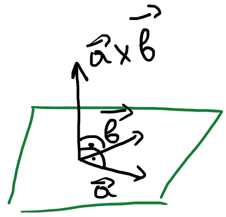
Векторно (→ вектор) и смесено (→ число) произведение на вектори

I Векторно произведение

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$:

- $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$
- $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|.\sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$
- посока на $\vec{c}$: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in S^+$



$\boxed{\vec{a}.\vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}}$

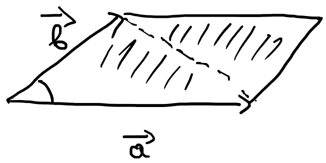
Свойства:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

2) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

3) $(\alpha.\vec{a}) \times (\beta.\vec{b}) = \alpha.\beta.(\vec{a} \times \vec{b})$

4) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$

5) 

$S_{усп.} = |\vec{a} \times \vec{b}|$

6) $\sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

7) Координатно представяне спрямо ОКС

$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$
$\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$
$\quad\ \ \mathrm{I}\quad \mathrm{II}\quad \mathrm{III}$

$$\vec{a} \times \vec{b}\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$
$\quad\quad\quad\ \ \mathrm{II}\ \ \mathrm{III}\quad\ \ \mathrm{III}\ \ \mathrm{I}\quad\ \ \mathrm{I}\ \ \mathrm{II}$

8) $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2.\vec{b}^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2$

→ ДС $= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2.\cos^2\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1 - \cos^2\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}))$

$$= |\vec a|^2|\vec b|^2\left(\underbrace{1-\cos^2\sphericalangle(\vec a,\vec b)}_{\sin^2\sphericalangle(\vec a,\vec b)}\right)$$

$$\Pi C = |\vec a \times \vec b|^2 = |\vec a|^2|\vec b|^2 \cdot \sin^2\sphericalangle(\vec a,\vec b)$$

II Смесено произведение

$\vec a, \vec b, \vec c$ – произволни

$$(\vec a\ \vec b\ \vec c) = \underbrace{(\vec a \times \vec b)}_{\text{вектор}} \cdot \vec c$$

$$\underbrace{\text{вектор} \cdot \text{вектор}}_{\text{число}}$$

Свойства:

1) $(\vec a\ \vec b\ \vec c) = (\vec b\ \vec c\ \vec a) = (\vec c\ \vec a\ \vec b) = -(\vec b\ \vec a\ \vec c) = -(\vec c\ \vec b\ \vec a)$
$= -(\vec a\ \vec c\ \vec b)$

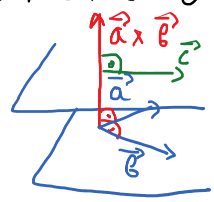
$$(\vec a\ \vec b\ \vec c) = (\vec a \times \vec b)\cdot\vec c = -(\vec b\ \vec a\ \vec c) = -(\vec b \times \vec a)\cdot\vec c$$

2) $(\vec a_1 + \vec a_2)\,\vec b\,\vec c = (\vec a_1\ \vec b\ \vec c) + (\vec a_2\ \vec b\ \vec c)$

3) $(\lambda\cdot\vec a)\,\vec b\,\vec c = \lambda\,(\vec a\ \vec b\ \vec c)$

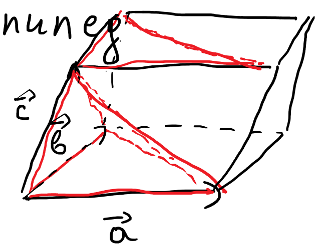
$(\vec a\ \vec b\ \vec c) = (\vec a \times \vec b)\cdot\vec c = 0$

4) $(\vec a\ \vec b\ \vec c) = 0 \iff \vec a, \vec b, \vec c$ са компланарни



5) Обем на паралелепипед

$$V = |(\vec a\ \vec b\ \vec c)|$$



6) Обем на тетраедър

$$V_{\text{тетр.}} = \frac{1}{6}|(\vec a\ \vec b\ \vec c)|$$

7) Координатно представяне спрямо ОКС

$\vec a\,(a_1, a_2, a_3)$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \ldots \end{vmatrix}$$

$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$

$\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ $\qquad (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$

8) $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) < 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in S^-$

$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) > 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in S^+$

III Лице на триъгълник в равнината

$A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$

$$S_{\triangle A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

IV Обем на тетраедър

$A_1(x_1, y_1, z_1)$

$A_2(x_2, y_2, z_2)$

$A_3(x_3, y_3, z_3)$

$A_4(x_4, y_4, z_4)$

$$V = \frac{1}{6}\left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

① Да се докаже, че НДУ, векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ да са ЛНЗ е $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{b}\times\vec{c}$, $\vec{c}\times\vec{a}$ също да са ЛНЗ.

I Необходимост.

Имаме, че $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ са ЛНЗ. Трябва да докажем, че $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{b}\times\vec{c}$, $\vec{c}\times\vec{a}$ са ЛНЗ.

$$\alpha(\vec{a}\times\vec{b}) + \beta\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) + \gamma\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{0} \quad /\cdot\vec{a} \quad /\cdot\vec{b} \quad /\cdot\vec{c}$$

$\perp\vec{a}, \perp\vec{b}$

$$\alpha\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a} + \beta\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} + \gamma\cdot(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{a} = \vec{0}\cdot\vec{a} = 0$$

$$\alpha\cdot\underbrace{(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{a})}_{0} + \beta\cdot\underbrace{(\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a})}_{\neq 0} + \gamma\cdot\underbrace{(\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{a})}_{0} = 0$$

$\neq 0$, защото $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ са ЛНЗ

$$\alpha \cdot \underbrace{(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{a})}_{0} + \beta \cdot \underbrace{(\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a})}_{\neq 0,\ \text{защото } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ са ЛНЗ}} + \gamma \cdot \underbrace{(\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{a})}_{0} = 0$$

$(\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}) = 0 \iff$ компланарни (ЛЗ)

$(\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}) \neq 0 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ са ЛНЗ

$$\beta \cdot \underbrace{(\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a})}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$\alpha \cdot \underbrace{(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{b})}_{0} + \beta \cdot \underbrace{(\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{b})}_{0} + \gamma \cdot \underbrace{(\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b})}_{\neq 0} = \vec{0} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\Rightarrow \gamma = 0$$

$$\alpha \cdot \underbrace{(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})}_{\neq 0} + \beta \cdot \underbrace{(\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{c})}_{0} + \gamma \cdot \underbrace{(\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{c})}_{0} = \vec{0} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 0$$

$\alpha = \beta = \gamma = 0 \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b},\ \vec{b} \times \vec{c},\ \vec{c} \times \vec{a}$ са ЛНЗ.

II Достатъчност

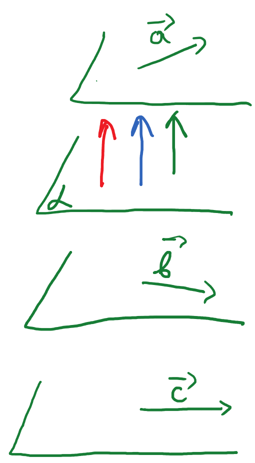
Имаме, че $\vec{a} \times \vec{b},\ \vec{b} \times \vec{c},\ \vec{c} \times \vec{a}$ са ЛНЗ.

Трябва да докажем, че $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ са ЛНЗ.

Да допуснем противното, т.е. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ са ЛЗ.

$\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ са компланарни. $\Rightarrow \exists$ равнина α:

$\vec{a} \parallel \alpha,\ \vec{b} \parallel \alpha,\ \vec{c} \parallel \alpha$



$\vec{a} \times \vec{b} \perp \alpha$

$\vec{b} \times \vec{c} \perp \alpha$

$\vec{c} \times \vec{a} \perp \alpha$

$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b},\ \vec{b} \times \vec{c},\ \vec{c} \times \vec{a}$ са колинеарни $\Rightarrow$

ЛЗ – противоречие с условието

$\Rightarrow$ Допускането е грешно. $\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ са ЛНЗ.

② Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, за които

$|\vec{a}| = 2, \ |\vec{b}| = 1, \ \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}.$

Да се определи неизвестен вектор $\vec{p}$ от уравненията:

$$\vec{a}.\vec{p} = 2(\vec{b}.\vec{p}) = -\frac{1}{2}(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{p}) = 4$$

<u>Решение:</u> $\vec{a}, \vec{b}$ са ЛНЗ, $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b} \Rightarrow$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ образуват векторна база в пространството.

$$\vec{p} = \alpha.\vec{a} + \beta.\vec{b} + \gamma.(\vec{a} \times \vec{b})$$

$\vec{a}.\vec{p} = 4 \qquad \vec{p}.\vec{a} = (\alpha.\vec{a} + \beta.\vec{b} + \gamma.(\vec{a} \times \vec{b})).\vec{a} = 4$

$$\alpha \underset{\overset{\shortparallel}{4}}{\vec{a}^2} + \beta.\underbrace{(\vec{b}.\vec{a})}_{0} + \gamma.\underbrace{(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{a})}_{0} = 4$$

$$4.\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 1$$

$2(\vec{b}.\vec{p}) = 4 \qquad \vec{p}.\vec{b} = 2$

$$(\alpha.\vec{a} + \beta.\vec{b} + \gamma.(\vec{a} \times \vec{b})).\vec{b} = 2$$

$$\alpha.\underbrace{\vec{a}.\vec{b}}_{0} + \beta.\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\vec{b}^2} + \gamma.\underbrace{(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{b})}_{0} = 2 \Rightarrow \beta = 2$$

$-\frac{1}{2}(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{p}) = 4 \qquad (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{p}) = -8$

$$(\vec{a} \times \vec{b}).\vec{p} = -8$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}).(\alpha.\vec{a} + \beta.\vec{b} + \gamma.(\vec{a} \times \vec{b})) = -8$$

$$\alpha.\underbrace{(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{a})}_{0} + \beta.\underbrace{(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{b})}_{0} + \gamma.(\vec{a} \times \vec{b})^2 = -8$$

$$\gamma(\vec{a} \times \vec{b})^2 = -8$$

$$\gamma \cdot \left(\vec{a}^{\,2} \vec{b}^{\,2} - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \right) = -8$$

$$\gamma \cdot (4 \cdot 1 - 0) = -8 \Rightarrow \gamma = -2$$

$$\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b} - 2(\vec{a} \times \vec{b})$$