2. Линейна зависимост и независимост на вектори

Линейна комбинация

$\vec{v} = \lambda_1 . \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + \dots + \lambda_n . \vec{a_n}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$

$0 . \vec{a_1} + 0 \vec{a_2} + \dots + 0 . \vec{a_n} = \vec{0}$ - тривиална лин. комб.

<u>Деф</u> Векторите $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}$ се наричат линейно зависими, ако $\exists$ ненулева n-торка числа $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$:

$\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + \dots + \lambda_n . \vec{a_n} = \vec{0}$

Векторите $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}$ се наричат линейно независими, ако

$\lambda_1 . \vec{a_1} + \lambda_2 . \vec{a_2} + \dots + \lambda_n . \vec{a_n} = \vec{0} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

$\boxed{T}$ 1. Ако $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}$ са ЛЗ, то поне един от тях може да се представи като линейна комбинация на останалите.

$\vec{a}$ е ЛЗ $\iff \vec{a} = \vec{0}$

$\vec{a}, \vec{b}$ са ЛЗ $\iff \vec{a}, \vec{b}$ - колинеарни

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ са ЛЗ $\iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарни

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ са ЛЗ винаги

$\boxed{T}$ 2 Нека $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}$ са ЛНЗ и

$$\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 . \vec{a_2} + \dots + \lambda_n \vec{a_n} = \mu_1 . \vec{a_1} + \mu_2 . \vec{a_2} + \dots + \mu_n . \vec{a_n}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \mu_1, \ \lambda_2 = \mu_2, \ \dots, \ \lambda_n = \mu_n.$$

$\boxed{T}$ 3 Ако $\vec{a_1}$ и $\vec{a_2}$ са ЛНЗ и $\vec{v}$ е компланарен с тях, то $\exists! \ \lambda_1, \lambda_2$:

$$\vec{v} = \lambda_1 . \vec{a_1} + \lambda_2 . \vec{a_2}$$

① Даден е $\triangle ABC$, $\vec{CA} = \vec{a}$, $\vec{CB} = \vec{b}$.

Нека A_1, B_1, C_1 са средите съответно на BC, CA, AB.

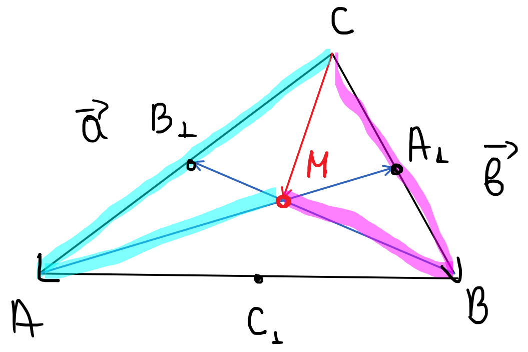
а) ? $\vec{AA_1}, \vec{BB_1}, \vec{CC_1}$ чрез $\vec{a}, \vec{b}$.

б) Да се док, че AA_1, BB_1, CC_1 се пресичат в 1 точка M и да се намери отношението, в което тя ги дели.

в) За произволна т. O, да се докаже, че

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

Реш: а)



$$\vec{CC_1} = \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB})$$

$$\vec{CC_1} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\vec{AA_1} = \vec{CA_1} - \vec{CA} = \frac{1}{2} . \vec{CB} - \vec{CA} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$$

$$\vec{BB_1} = \vec{CB_1} - \vec{CB} = \frac{1}{2}\vec{CA} - \vec{CB} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$$

д) 1 ст. Доказваме, че $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ са ЛНЗ:

$$\alpha.\overrightarrow{AA_1}+\beta.\overrightarrow{BB_1}=\vec{0}$$

$$\alpha.\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right)+\beta.\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{0}$$

$$\underbrace{\left(-\alpha+\frac{\beta}{2}\right)}_{0}\vec{a}+\underbrace{\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}_{0}\vec{b}=\vec{0}$$

От условието $\vec{a},\vec{b}$ са ЛНЗ $\Rightarrow$

$$\begin{cases}-\alpha+\frac{\beta}{2}=0\\ \frac{\alpha}{2}-\beta=0\end{cases}\Rightarrow \alpha=\beta=0 \Rightarrow$$

$\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ са ЛНЗ

Нека т.$M = AA_1 \cap BB_1$

2ст) Трябва да докажем, че CC_1 минава през т.M, т.е. че C, M, C_1 лежат на 1 права.

Нека $\overrightarrow{AM}=\lambda.\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BM}=\mu.\overrightarrow{BB_1}$

От $\triangle CAM \Rightarrow \overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CA}+\lambda.\overrightarrow{AA_1}$

$$=\vec{a}+\lambda.\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right)$$

$$\overrightarrow{CM}=(1-\lambda)\,\vec{a}+\frac{\lambda}{2}\vec{b}$$

От $\triangle CBM \Rightarrow \overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CB}+\mu.\overrightarrow{BB_1}$

$$=\vec{b}+\mu.\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}\right)$$

$$\overrightarrow{CM}=\frac{\mu}{2}\vec{a}+(1-\mu)\,\vec{b}$$

$\vec{a},\vec{b}$ са ЛНЗ $\Rightarrow$

$\vec{a}, \vec{b}$ са ЛНЗ $\Rightarrow$

$$\left| \begin{aligned} 1-\lambda &= \frac{\mu}{2} \\ \frac{\lambda}{2} &= 1-\mu \end{aligned} \right. \Rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda &= \frac{2}{3} \\ \mu &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\vec{CM} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{CC_1}$$

т. C - общо начало $\Rightarrow$ C, M, C_1 лежат на 1 права

$\vec{CM} = \frac{2}{3}\vec{CC_1}$, $\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AA_1}$, $\vec{BM} = \frac{2}{3}\vec{BB_1}$

в) $\vec{CM} = \frac{2}{3}\vec{CC_1}$, т. O - произволна

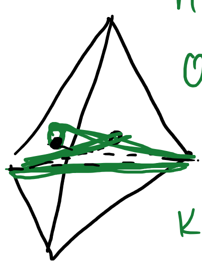
$\boxed{\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})}$

$$\vec{OM} - \vec{OC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB})$$

$$\vec{OM} - \vec{OC} = \frac{1}{3}(\vec{OA} - \vec{OC} + \vec{OB} - \vec{OC})$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} - \frac{2}{3}\vec{OC} + \vec{OC}$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$



Простр.

(Ост) $\vec{AA_1}, \vec{BB_1}, \vec{AB}$ са компланарни

3 : 1

$\vec{OM} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$

② Нека $A \neq B$, т. O - произволна

Да се докаже, че НДУ т. P да лежи на AB е да $\exists$ числа α и β :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = \alpha . \overrightarrow{OA} + \beta . \overrightarrow{OB} \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

Да се док, че α и β са единствени и не зависят от т. O

Реш: I Необходимост

Имаме, че т. P лежи на правата AB.

Трябва да докажем системата.

т. P лежи на AB $\Rightarrow$ $\exists !\, k$: $\overrightarrow{AP} = k . \overrightarrow{AB}$

т. O – произволна

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = k . (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

$$\overrightarrow{OP} = \underbrace{(1-k)}_{\alpha} . \overrightarrow{OA} + \underbrace{k}_{\beta} . \overrightarrow{OB}$$

Нека $\alpha = 1 - k$, $\beta = k$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \overrightarrow{OP} = \alpha . \overrightarrow{OA} + \beta . \overrightarrow{OB} \\ \alpha + \beta = 1 - k + k = 1 \end{cases}$

II. Достатъчност

Имаме, че $\begin{cases} \overrightarrow{OP} = \alpha . \overrightarrow{OA} + \beta . \overrightarrow{OB} \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases}$. Трябва да

докажем, че P лежи на AB.

От $\alpha + \beta = 1 \Rightarrow \alpha = 1 - \beta \Rightarrow$

$$\overrightarrow{OP} = (1-\beta) . \overrightarrow{OA} + \beta . \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} - \beta . \overrightarrow{OA} + \beta . \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \beta \left(\underbrace{-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}} \right)$$

$$\vec{OP} - \vec{OA} = \beta \cdot \vec{AB} \qquad \vec{AB}$$

$\vec{AP} = \beta \cdot \vec{AB}$, т. A - общо начало $\Rightarrow$

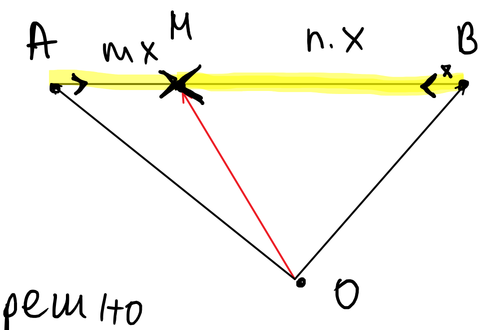
A, P, B лежат на 1 права

α, β - барицентрични координати на т. P, относно A и B.

3 Дадени са $A \neq B$ и $m, n \in \mathbb{R}^+$

Да се докаже, че НДУ т. M да дели отсечката AB вътрешно в отношение $m:n$, считано от т. A, е за произволна т. O да е в сила

$$\vec{OM} = \frac{n}{m+n}\vec{OA} + \frac{m}{m+n}\cdot\vec{OB}$$



Реш: I Необходимост

Имаме, че M дели AB вътрешно в отношение $m:n$. Трябва да докажем равенството за т. O - произв.

$$\vec{AM} = -\frac{m}{n}\cdot\vec{BM}$$

$$n.(\vec{OM} - \vec{OA}) = -m.(\vec{OM} - \vec{OB})$$

$$n.\vec{OM} - n.\vec{OA} = -m.\vec{OM} + m.\vec{OB}$$

$$n.\vec{OM} + m.\vec{OM} = n.\vec{OA} + m.\vec{OB}$$

$$\vec{OM} = \frac{n}{\ }\vec{OA} + \frac{m}{\ }\vec{OB}$$

$n.\vec{OM} + m.\vec{O}\ldots$

$$\vec{OM} = \frac{n}{n+m}\vec{OA} + \frac{m}{n+m}\vec{OB}$$

II. $\Leftarrow$) Имаме:

$$\vec{OM} = \frac{n}{m+n}\vec{OA} + \frac{m}{m+n}\vec{OB} \quad /.(m+n)$$

$$m.\vec{OM} + n.\vec{OM} = n.\vec{OA} + m.\vec{OB}$$

$$m.(\vec{OM} - \vec{OB}) = n.(\vec{OA} - \vec{OM})$$

$$m.\vec{BM} = n.\vec{MA}$$

$$\vec{BM} = -\frac{n}{m}.\vec{AM}$$

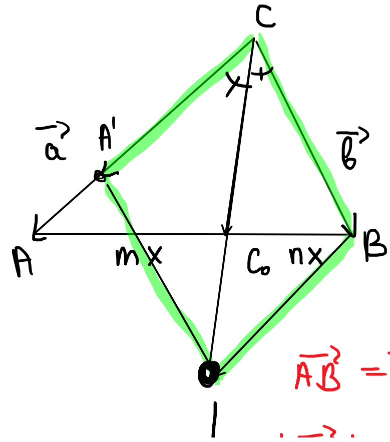
4) Даден е $\triangle ABC$, като $\vec{CA} = \vec{a}$, $\vec{CB} = \vec{b}$.
AA_0, BB_0, CC_0 - вътрешни ъглополовящи.

а) ? $\vec{AA_0}, \vec{BB_0}, \vec{CC_0}$ чрез $\vec{a}, \vec{b}$;

б) Да се док., че $\forall$ ъглопол. разделя срещуположната страна в отношение равно на отношението на прилежащите страни;

Упр. в) Да се докаже, че трите ъглополовящи на $\triangle ABC$ се пресичат в 1 точка.

Реш: Нека $|\vec{a}| > |\vec{b}|$



$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

Нека $AC_0 : C_0B = m : n$

$$\vec{CC_0} = \frac{n}{m+n}.\vec{CA} + \frac{m}{m+n}.\vec{CB}$$

$CC_0 = \frac{\quad}{m+n} \ldots \frac{\quad}{m+n}$

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

$|\overrightarrow{AB}| = |\vec{b} - \vec{a}|$

L

$$\overrightarrow{CC_0} = \frac{n}{m+n} \cdot \vec{a} + \frac{m}{m+n} \vec{b}$$

Нека $A' \in CA : |\overrightarrow{CA'}| = |\overrightarrow{CB}| = |\vec{b}|$

$$\left.\begin{aligned} A' \in CA \Rightarrow \exists!\, k : \overrightarrow{CA'} &= k . \overrightarrow{CA} \\ k &> 0 \\ |\overrightarrow{CA'}| &= |k| . |\overrightarrow{CA}| \end{aligned}\right\} \quad k = \frac{|\overrightarrow{CA'}|}{|\overrightarrow{CA}|} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

Нека $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{CA'} = k . \overrightarrow{CA}$. Тогава $CA'LB$ – ромб. (диагоналите са ъглополовящи) $\Rightarrow C, C_0, L$ лежат на 1 права $\Rightarrow \exists!\, \lambda : \overrightarrow{CC_0} = \lambda . \overrightarrow{CL}$

$$\overrightarrow{CC_0} = \lambda . (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BL})$$

$$\overrightarrow{CC_0} = \lambda . (\overrightarrow{CB} + k . \overrightarrow{CA})$$

$$\overrightarrow{CC_0} = \lambda . k . \vec{a} + \lambda . \vec{b}$$

Понеже $\vec{a}, \vec{b}$ са ЛНЗ $\Rightarrow$

$$\left| \begin{aligned} \frac{n}{m+n} &= \lambda . k \\ \frac{m}{m+n} &= \lambda \end{aligned} \right. \qquad k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

$$\frac{\frac{n}{m+n}}{\frac{m}{m+n}} = \frac{\lambda . k}{\lambda} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

$$\boxed{\frac{n}{m} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}}$$

$$\frac{n}{m+n} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$$

$$\frac{m}{m+n} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$$

$$\overrightarrow{CC_0} = \frac{n}{m+n} . \vec{a} + \frac{m}{m+n} . \vec{b} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|} . \vec{a} + \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|} \vec{b}$$

$$\overrightarrow{CC_0} = \frac{n}{m+n} \cdot \vec{a} + \frac{m}{m+n} \cdot \vec{b} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|} \cdot \vec{a} + \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|} \vec{b}$$

Аналогично:

$$\overrightarrow{AA_0} = \frac{|\vec{b}-\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}-\vec{a}|} (-\vec{a}) + \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}-\vec{a}|} (\vec{b}-\vec{a})$$

$$\overrightarrow{BB_0} = \frac{|\vec{b}-\vec{a}|}{|\vec{b}|+|\vec{b}-\vec{a}|} (-\vec{b}) + \frac{|\vec{b}|}{|\vec{b}|+|\vec{b}-\vec{a}|} (-\vec{b}+\vec{a})$$