Филип Филчев, 0MI0600041
Софтуерно инженерство, I група, I курс

Домашна работа № 1

(1) $\vec{a}, \vec{b}: |\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \sphericalangle\varphi = \frac{\pi}{6}$

$ABCD \to$ усп, $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$

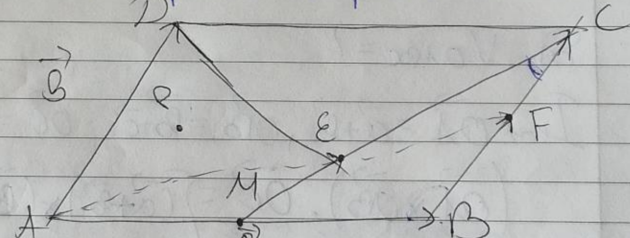
т. M – среда на AB,
т. F – среда на BC
т. E: $\vec{ME} = \frac{1}{3}\vec{MC}$

$\vec{a}^2 = 9$, $\vec{b}^2 = 16$
$(\vec{a}\vec{b}) = 3.4.\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$
$|(\vec{a} \times \vec{b})| = 3.4.\frac{1}{2} = 6$

а) ?, т. $A, E, F \to$ колинеарни

б) ?, $S_{\triangle EFC}$

в) т. P – медиц. на $\triangle AED$, изразете $\vec{AP}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$



а) имаме, че $\vec{AB} = \vec{a} \Rightarrow \vec{AM} = \vec{MB} = \frac{\vec{a}}{2}$
$\vec{BC} = \vec{AD} = \vec{b} \Rightarrow \vec{BF} = \vec{FC} = \frac{\vec{b}}{2}$

Разгл. $\triangle ABF$, $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BF} = \frac{\vec{b}}{2} \Rightarrow \vec{AF} = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}$

Разгл. $\triangle MBC$, $\vec{MB} = \frac{\vec{a}}{2}$, $\vec{BC} = \vec{b} \Rightarrow \vec{MC} = \frac{\vec{a}}{2} + \vec{b}$

$\Rightarrow \vec{ME} = \frac{1}{3}\vec{MC} = \frac{\vec{a}}{6} + \frac{\vec{b}}{3}$

Разгл. $\triangle AME$, $\vec{AM} = \frac{\vec{a}}{2}$, $\vec{ME} = \frac{\vec{a}}{6} + \frac{\vec{b}}{3} \Rightarrow \vec{AE} = \frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{a}}{6} + \frac{\vec{b}}{3} =$

$= \frac{4\vec{a} + 2\vec{b}}{6} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$

$\Rightarrow \vec{AF} = \dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{2}$, а $\vec{AE} = \dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3} \Rightarrow$ т. A, E, F лежсат на една права, защото $\vec{AF}$ и $\vec{AE}$ – КЛ.

① б) $S_{\triangle EFC}$ $\quad \vec{MC} = \dfrac{\vec{a}}{2} + \vec{b} \Rightarrow \vec{EC} = \dfrac{2}{3}\vec{MC} = \dfrac{\vec{a}}{3} + \dfrac{2}{3}\vec{b}$

$\vec{FC} = \dfrac{\vec{b}}{2}$

$\Rightarrow$

$S_{\triangle EFC} = \dfrac{|(\vec{EC} \times \vec{FC})|}{}$

$(\vec{EC} \times \vec{FC}) = \left(\dfrac{\vec{a}}{3} + \dfrac{2\vec{b}}{3}\right) \times \dfrac{\vec{b}}{2} = \dfrac{1}{6}(\vec{a} \times \vec{b}) + \dfrac{1}{3}(\vec{b} \times \vec{b}) =$

$= \dfrac{1}{6}(\vec{a} \times \vec{b}) = \dfrac{6}{6} = 1$

$\Rightarrow S_{\triangle EFC} = \dfrac{|1|}{2} = \dfrac{1}{2}$ ед^2

① в) т. P – медиц. на $\triangle AED$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ за т. O $\Rightarrow$ $OP = \frac{1}{3}(OA + OE + OD)$, нека $O \equiv A$

$\Rightarrow AP = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}) =$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3} + \vec{b}\right) = \frac{2\vec{a} + 4\vec{b}}{9}$ П

② ОКС $K = Oxyz$

т. A (−2, −1, 1)
т. B (5, 2, −1)
т. C (−3, 4, 6)
т. D (5, 0, 8)

т. ~~M~~ N среда на CD

а) ?, A, B, C, D не лежат ~~в~~ една равн.

б) ?, $S_{\triangle BAN}$

с) ?, коорд. т. H → BH – h в $\triangle BAN$

а) $\overrightarrow{AB}(7, 3, -2)$
$\overrightarrow{AC}(-1, 5, 5)$
$\overrightarrow{AD}(7, 1, 7)$

$\det\begin{vmatrix} 7 & 3 & -2 \\ -1 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 408 > 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \text{ и } \overrightarrow{AD}$ – образуват тетраедър и A, B, C, D не са в една равн.

б) $\vec{AB}(7,3,-2)$

за CD: $ON = \frac{1}{2}(OC+OD)$ $\quad$ $\vec{AC}(-1,5,5)$

$AN = \frac{1}{2}(AC+AD)$ $\quad$ $\vec{AD}(7,1,7)$

$\vec{AN}(a,b,c)$

$a = \frac{1}{2}(-1+7) = 3$

$b = \frac{1}{2}(1+5) = 3$

$c = \frac{1}{2}(5+7) = 6$ $\quad$ $\cancel{\vec{AN}} =$

$\vec{AN}(3,3,6)$

$AB(7,3,-2)$

$$(\vec{AN} \times \vec{AB}) = \left(\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}\right) = (-24, 48, -12)$$

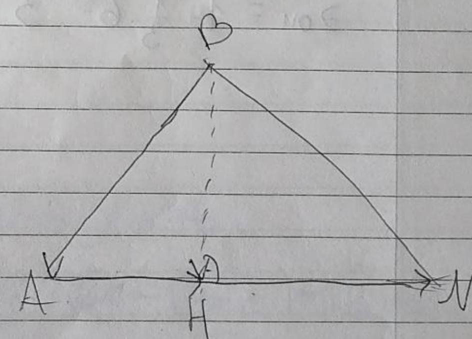
$$|(\vec{AN} \times \vec{AB})| = \sqrt{-24^2 + 48^2 + -12^2} = \sqrt{6^2 \cdot 4^2 + 6^2 \cdot 8^2 + 4^2 \cdot 3^2} =$$

$$= \sqrt{36 \cdot 80 + 144} = \sqrt{3024} = 12\sqrt{21}$$

$\Rightarrow S_{\Delta ANB} = 6\sqrt{21}$

в) т N - среда на $\vec{CD}$

$\Rightarrow \vec{ON} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD})$



координати на т. N

$x = \frac{1}{2}(5-3) = 1$

$y = \frac{1}{2}(4+0) = 2$

$z = \frac{1}{2}(8+6) = 7$

т. $N(1,2,7) \Rightarrow \vec{AN}(3,3,6)$

$\vec{BA}(-7,-3,2)$, $\vec{AN}(3,3,6)$

$\vec{BH} = \vec{BA} + \vec{AH}$ $\quad \vec{AH} \parallel \vec{AN} \Rightarrow \exists!\, x : \vec{AH} = \vec{AN}\,x$

$\vec{BH} = \vec{BA} + x \cdot \vec{AN} \quad | \cdot \vec{AN}$

$\underbrace{\vec{AN}\cdot\vec{BH}}_{=0} = \vec{BA}\cdot\vec{AN} + x\,\vec{AN}^2$

$\vec{AN}^2 = 3^2 + 3^2 + 6^2 = 54$

$\vec{BA}\cdot\vec{AN} = -21 - 9 + 12 = -18$

$\Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow \vec{AH} = \frac{1}{3}\vec{AN}$

$\vec{AH} = \vec{OH} - \vec{OA} = \frac{1}{3}\vec{AN}$

~~x_{OH}~~ $\vec{OH} = \vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{AN}$

$x_{OH} = -2 + \frac{1}{3}\cdot 3 = -1$

$y_{OH} = -1 + \frac{1}{3}\cdot 3 = 0$

$z_{OH} = 1 + \frac{1}{3}\cdot 6 = 3 \quad \Rightarrow \vec{OH}$ и съотв т.H $(-1, 0, 3)$

③ $\vec{a}, \vec{b}$: $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\measuredangle(a,b) = \frac{\pi}{3}$

$\vec{OA} = \vec{a} + \vec{b}$

$\vec{OB} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$

$\vec{a}^2 = 1$, $\vec{b}^2 = 4$

$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 1$

$|(\vec{b} \times \vec{a})| = 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

α) $P_{\triangle OAB} = ?$

β) $\vec{OC} = \vec{b} \times \vec{a}$, το $V_{OABC} = ?$

α) $P_{\triangle AOB} = |\vec{AO}| + |\vec{OB}| + |\vec{BA}|$

$|\vec{OA}| = \sqrt{\vec{OA}^2} = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 1 + 4 + 2 = 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{|\vec{OA}| = \sqrt{7}}$

$\cancel{OB}$ $\vec{OB} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a} = (\underbrace{\vec{a} \cdot \vec{a}}_{1}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{a}) \vec{a} = \vec{b} - \vec{a}$

$|\vec{OB}| = \sqrt{\vec{OB}^2} = (\vec{b} - \vec{a})^2 = \vec{b}^2 + \vec{a}^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 5 - 2 = 3$

$\Rightarrow \boxed{|\vec{OB}| = \sqrt{3}}$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a} - \vec{a} - \vec{b} = -2\vec{a}$

$|\vec{AB}| = \sqrt{\vec{AB}^2} = 4\vec{a}^2 = 4 \Rightarrow \boxed{|\vec{AB}| = 2}$

$\Rightarrow P_{AOB} = 2 + \sqrt{3} + \sqrt{7}$

β) $V_{OABC} = \frac{1}{6} |(OA|OB|OC)|$

$(OA \times OB) = (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} - \vec{a}) = \cancel{(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})}$

$= (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{b} \times -\vec{a}) = \cancel{(\vec{a} \times \vec{b})} - (\vec{b} \times \vec{a}) - (\vec{b} \times \vec{a}) =$

$= -2(\vec{b} \times \vec{a}) | \cdot \vec{OC} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2(\vec{b} \times \vec{a})^2 = -6 \Rightarrow V_{OABC} = \frac{|-6|}{6} = 1$ □

$(\vec{b} \times \vec{a})^2 = \vec{b}^2 \cdot \vec{a}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = -3$