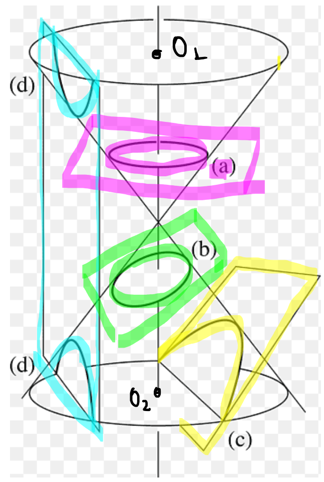
Конични сечения

Прав кръгов конус

O_1O_2 - ос на конуса

Сечения с равнина:

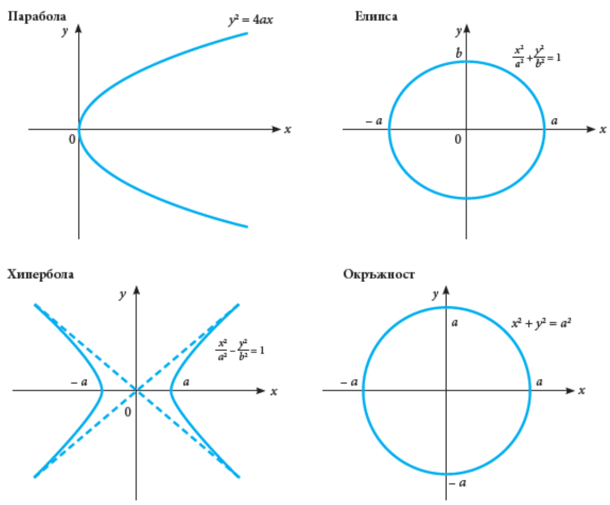


a) Окръжност: $\alpha \perp O_1O_2$

b) Елипса: α пресича $\forall$ образуваща на конуса

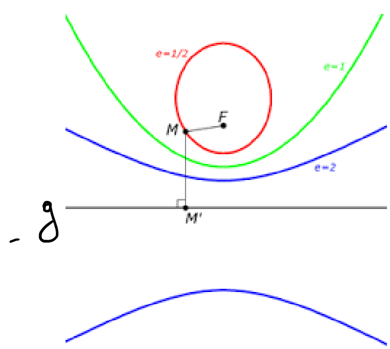
c) Парабола: α е успоредна на само 1 образуваща

d) Хипербола: α е успоредна на 2 образуващи



т. F - фокус

$g \not\ni F$ - директриса



Какво е ГМ на всички точки M от равнината, за които

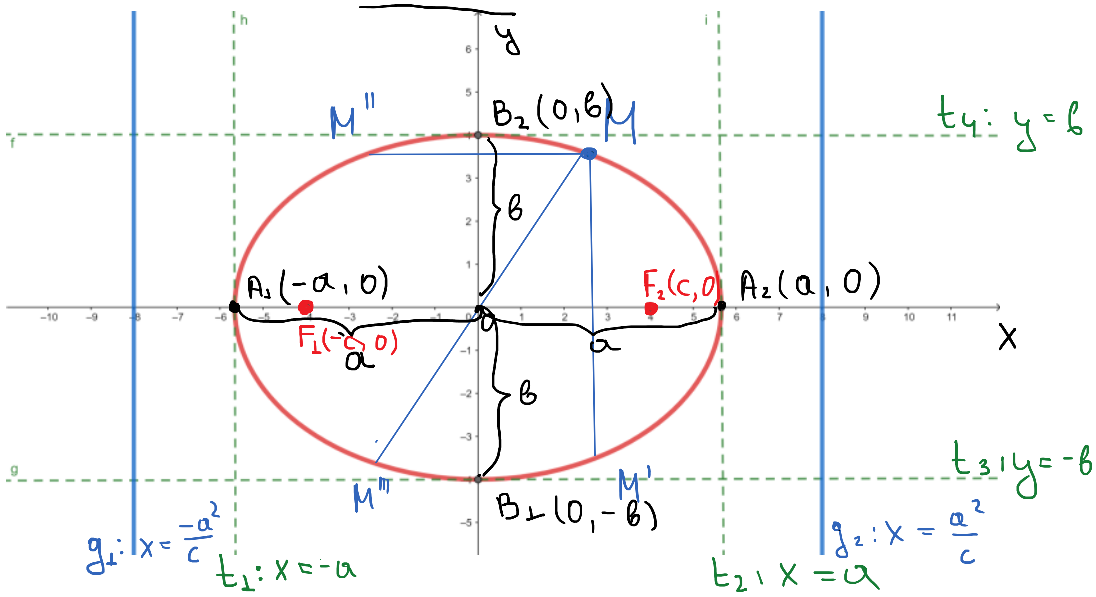
$$\frac{|FM|}{d(M,g)} = e = const$$ - число ексцентрицитет

1) При $0 < e < 1 \Rightarrow$ ГМ е елипса

2) При $e = 1 \Rightarrow$ ГМ е парабола

3) При $e > 1 \Rightarrow$ ГМ е хипербола

<u>Елипса</u>



ОКС $K = Oxy$ $\quad a > b$

$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - метрично канонично уравнение на елипса

Разположение и свойства:

I Ox, Oy - единствените оси на симетрия за елипсата $\mathcal{E}$

т. O - единствен център на симетрия за $\mathcal{E}$

II $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$

$x^2 = (b^2 - y^2) \cdot \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow -b \leq y \leq b$

$y^2 = (a^2 - x^2) \cdot \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow -a \leq x \leq a$

$\Rightarrow$ Елипсата $\mathcal{E}$ е затворена в правоъгълник със страни $2a$ и $2b$.

A_1A_2 - голяма ос на $\mathcal{E}$

B_1B_2 - малка ос на $\mathcal{E}$

III Върхове

$$A_1(-a,0) \Rightarrow t_1: x=-a$$
$$A_2(a,0) \Rightarrow t_2: x=a$$
$$B_1(0,-b) \Rightarrow t_3: y=-b$$
$$B_2(0,b) \Rightarrow t_4: y=b$$

Върхови допирателни

IV) Фокуси $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a > b$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

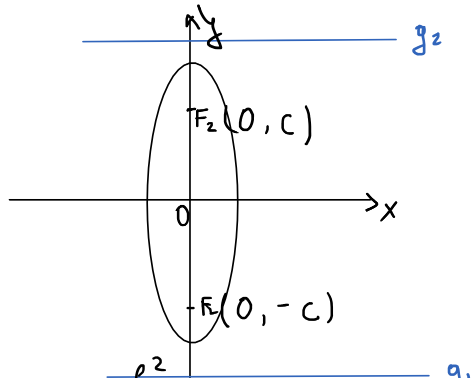
$F_1(-c,0)$; $F_2(c,0)$

Директриси: $g_1: x = \frac{-a^2}{c}$, $g_2: x = \frac{a^2}{c}$

$\varepsilon: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a < b$

$$c^2 = b^2 - a^2$$

$F_1(0,-c)$; $F_2(0,c)$

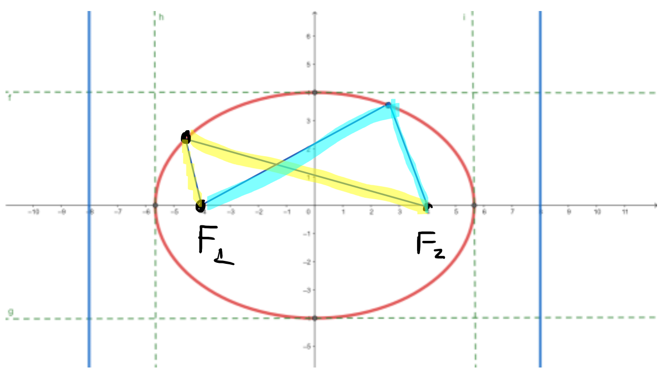


Директриси $g_1: y = \frac{-b^2}{c}$, $g_2: y = \frac{b^2}{c}$

Def Елипса: ГМ на всички точки M от равнината, за които

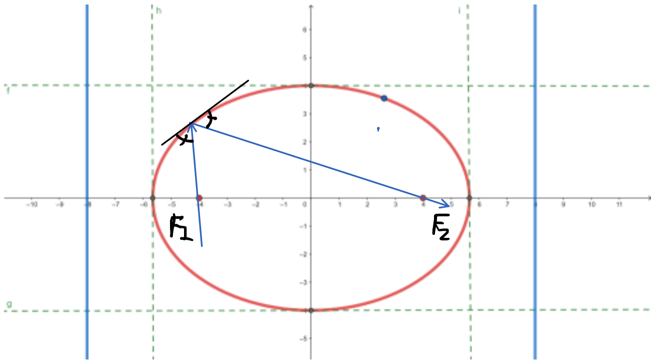
$$|F_1M| + |F_2M| = const = 2a$$

F_1, F_2 - фокуси на елипсата

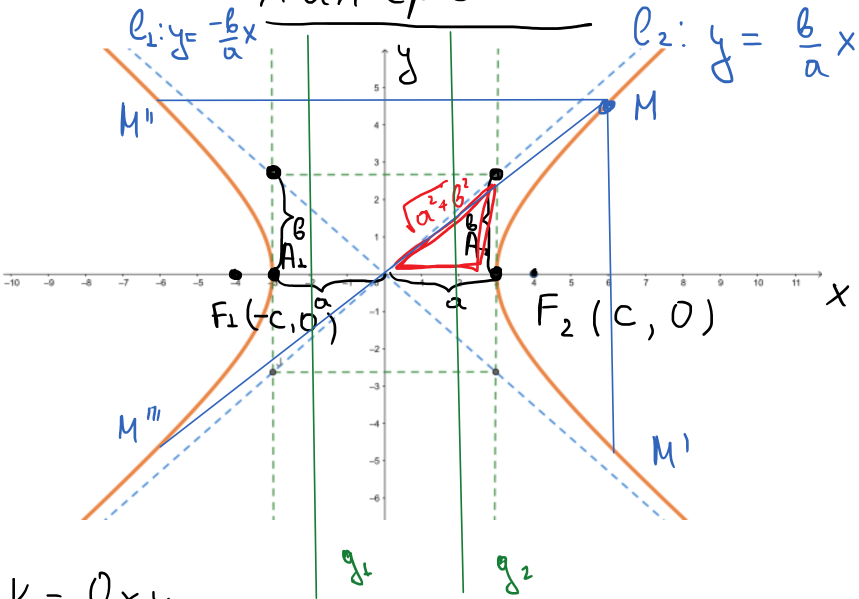


Оптично свойство на елипсата

Светлинен лъч минава през единия от двата фокуса на елипса $\mathcal{E}$ и се отразява от нея. Тогава отразеният лъч минава през другия фокус на $\mathcal{E}$.



Хипербола



ОКС $K = Oxy$

$\chi: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – метрично канонично уравнение на хипербола

I Ox, Oy – единствените оси на симетрия за хиперболата

т. O – единствен център на симетрия за χ

II Асимптоти

$$l_1: y = -\frac{b}{a}x, \quad l_2: y = \frac{b}{a}x$$

III Фокуси $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \qquad c^2 = a^2 + b^2$

$$F_1(-c,0); \quad F_2(c,0)$$

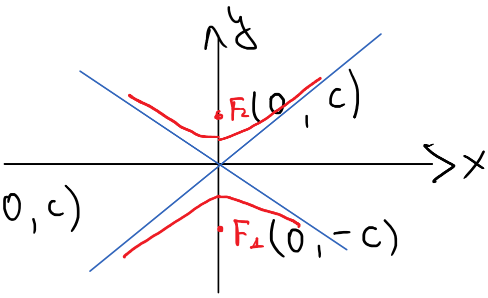
$F_1(-c, 0)$; $F_2(c, 0)$

Директриси: $g_1: x = \frac{-a^2}{c}$, $g_2: x = \frac{a^2}{c}$

$\chi: -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

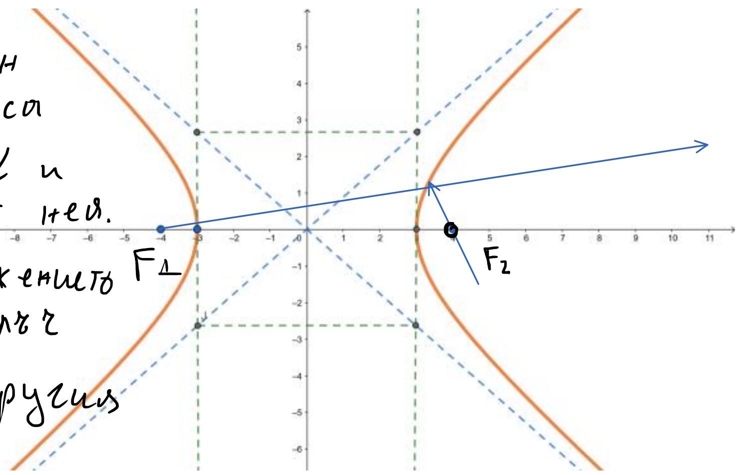
$c^2 = a^2 + b^2$

$F_1(0, -c)$; $F_2(0, c)$



Оптично свойство на хиперболата

Светлинен лъч минава през един от двата фокуса на хипербола χ и се отразява от нея. Тогава продължението на отразения лъч минава през другия фокус на χ.



Def Хипербола: ГМ на всички точки M от равнината, за които

$$||F_1M| - |F_2M|| = 2a = const$$

$$0 < 2a < |F_1F_2|$$

F_1, F_2 – фокуси

Парабола

ОКС $K = Oxy$

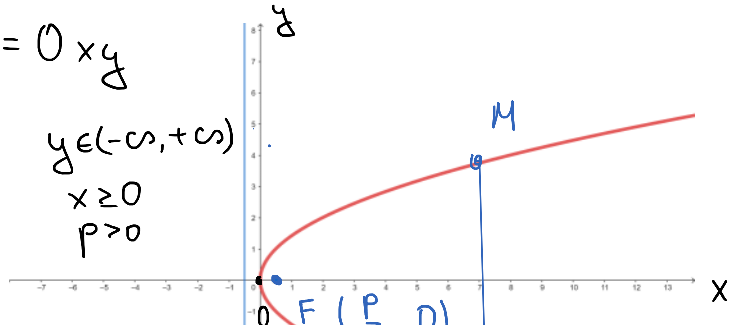
$\Pi: y^2 = 2px$ $y \in (-\infty, +\infty)$

$x \geq 0$

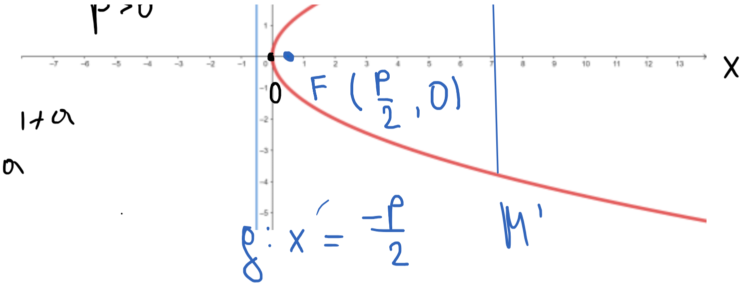
$p > 0$

– метрично

канонично



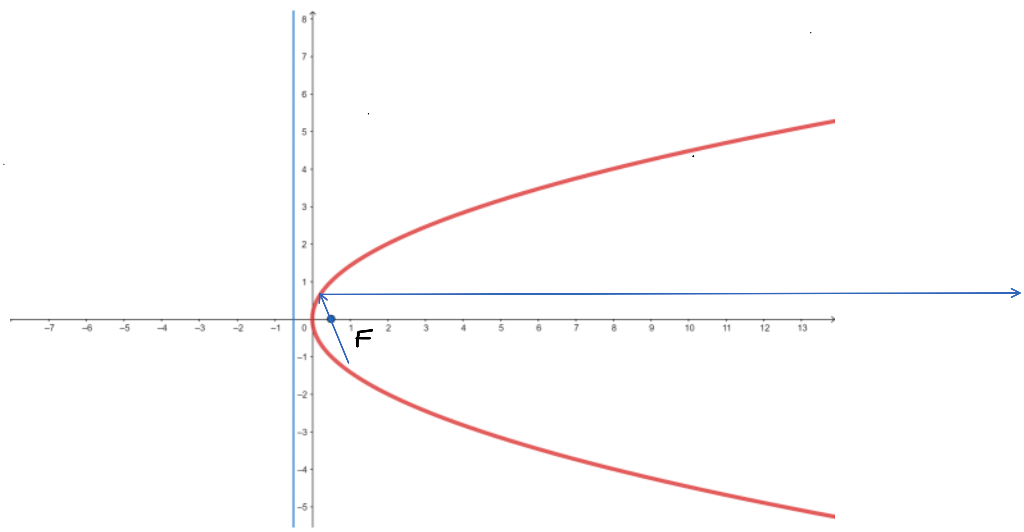
...метрично $p>0$
канонично уравнение на парабола



I O_x – ос на симетрия за Π
т. $O(0,0)$ – връх на Π
O_y – върхова допирателна

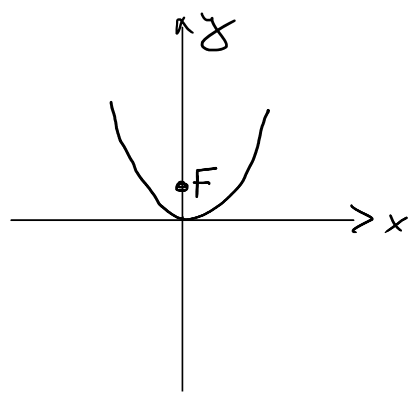
II. Фокус $F(\frac{p}{2}, 0)$
Директриса $d: x = \frac{-p}{2}$

Оптично свойство на параболата



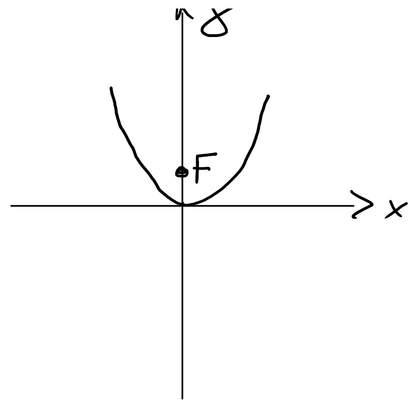
Светлинен лъч минава през фокуса на параболата Π и се отразява от нея. Тогава отразеният лъч става успореден на оста на симетрия на Π.

$\Pi: x^2 = 2py \quad p>0$
$F(0, \frac{p}{2})$



$П: x^2 = 2py \quad p > 0$

$F(0, \frac{p}{2})$



Допирателна в т. $M_0(x_0, y_0)$ към:

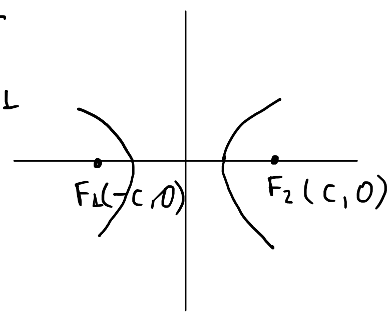
а) $Е: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ е с у-е $t_0: \frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$

б) $Х: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ е с у-е $t_0: \frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$

в) $П: y^2 = 2px$ е с у-е $t_0: y \cdot y_0 = p(x + x_0)$

Примери: 1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



$a = 3, \quad b = 2$

$c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 2^2 = 13$

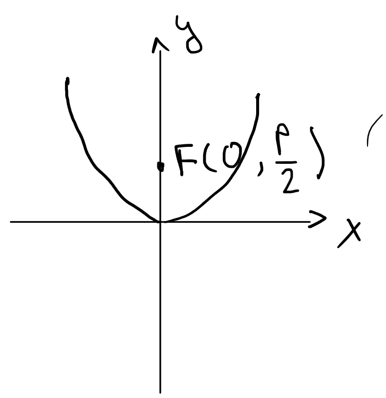
$F_1(-\sqrt{13}, 0), \quad F_2(\sqrt{13}, 0)$

2) $x^2 = y = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot y$

$x^2 = 2py$

$p = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{p}{2} = \frac{1}{4}$

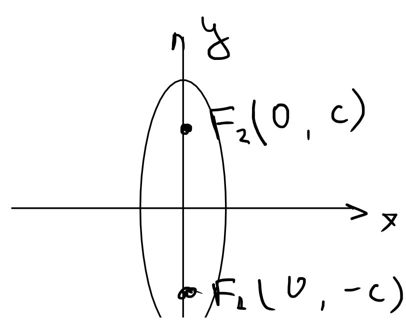
$F(0, \frac{1}{4})$



3) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$

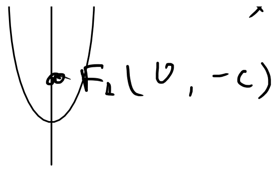
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$a = \sqrt{3} < b = \sqrt{6}$



$a = \sqrt{3} < b = \sqrt{6}$

$c^2 = \sqrt{6}^2 - \sqrt{3}^2 = 3$



$F_1(0, -\sqrt{3})$, $F_2(0, \sqrt{3})$