3 Координатни системи

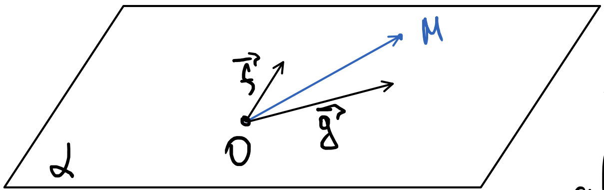
Координати на вектори и точки.

I. Афинна координатна система в равнината

α е $K = O\vec{f}\vec{g}$

т. O – начало

$\vec{f}, \vec{g}$ – ЛНЗ вектори



За $\forall \vec{a}$ – компланарен с $\vec{f}$ и $\vec{g}$ съществува единствена двойка реални числа (a_1, a_2):

$$\vec{a} = a_1.\vec{f} + a_2.\vec{g} \leftrightarrow \vec{a}(a_1, a_2)$$

Казваме, че (a_1, a_2) са координатите на вектора $\vec{a}$ спрямо коорд. с-ма $K = O\vec{f}\vec{g}$

Нека т. M е от равнината α. Разглеждаме радиус-вектора $\vec{OM}$ – компланарен с $\vec{f}$ и $\vec{g}$

$\Rightarrow \exists!(x, y): \vec{OM} = x.\vec{f} + y.\vec{g} \leftrightarrow$ т. $M(x, y)$ спр. K

Условия за колинеарност в равнината:

$\vec{a}(a_1, a_2)$

$\vec{b}(b_1, b_2)$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Три точки $A_1(x_1, y_1)$; $A_2(x_2, y_2)$; $A_3(x_3, y_3)$

са колинеарни $\Leftrightarrow$ $A_1A_2 \parallel A_1A_3 \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}$

$\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

$\overrightarrow{A_1A_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1)$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\underline{\text{II}}$ Афинна координатна система в пространството

$K = O\vec{f}\vec{g}\vec{h}$

т. O – начало

$\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}$ – ЛНЗ

$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{f} + a_2 \cdot \vec{g} + a_3 \cdot \vec{h} \Leftrightarrow \vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ спр K

$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{f} + y \cdot \vec{g} + z\vec{h} \Leftrightarrow M(x, y, z)$ спр. K

$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$

$\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$

$\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right.$$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ – компланарни} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$; $A_2(x_2, y_2, z_2)$; $A_3(x_3, y_3, z_3)$;

$A_4(x_4, y_4, z_4)$

A_1, A_2, A_3 – колинеарни $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{A_1A_2} \parallel \overrightarrow{A_1A_3}$ $\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \\ \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right.$$

A_1, A_2, A_3, A_4 – компланарни $\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}$ – компланарни $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(1) АКС $K = Oxy$

$A(4,6)$; $B(1,-1)$; $C(2,4)$; $D(1,5)$

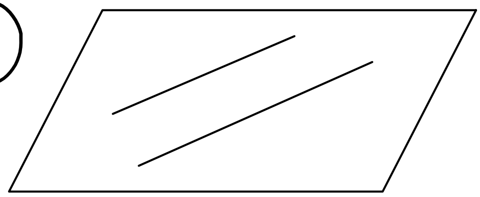
Да се намерят координатите на пресечната точка M на AB и CD, ако такава съществува.

(2)

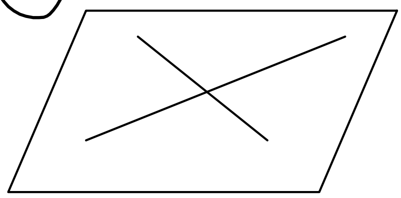
Р... (1)

Реш:

1



2



$\overrightarrow{AB}(1-4, -1-6)$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(-3, -7) \\ \overrightarrow{CD}(-1, 1)\end{array}\right\}$ ЛНЗ $\Rightarrow$

т. $M = AB \cap CD$

Нека т. $M(x, y)$

т. $M \in AB \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 7x - 3y = 10$

т. $M \in CD \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y = 6$

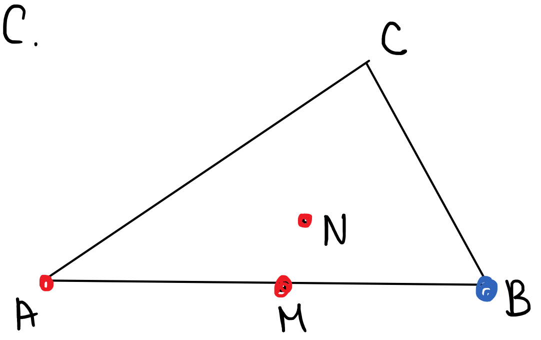
$\left| \begin{array}{l} 7x - 3y = 10 \\ x + y = 6 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{14}{5} \\ y = \frac{16}{5} \end{array}$, $M\left(\frac{14}{5}, \frac{16}{5}\right)$

2) АКС $K = Oxyz$

$A(3, 4, -2)$; $M(0, 2, 1)$; $N(4, 2, 3)$

Да се намерят координатите на върховете

B и C на $\triangle ABC$ така, че т. M да е среда на AB, а т. N – медицентър на $\triangle ABC$.



Реш! т. O – началото на к.с.

т. O (0, 0, 0)

т. M – среда на AB => $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$

$$\left| \begin{array}{ll} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} & 0 = \frac{3 + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} & 2 = \frac{4 + y_B}{2} \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} & 1 = \frac{-2 + z_B}{2} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow B(-3, 0, 4)$

т. N – медицентър на $\triangle ABC$ =>

$$\vec{ON} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

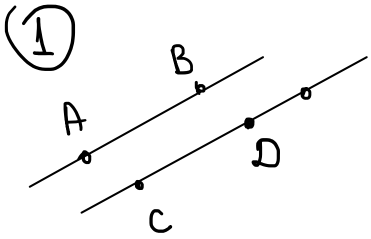
$$\left| \begin{array}{l} 4 = x_N = \frac{1}{3}(3 + (-3) + x_C) \\ 2 = y_N = \frac{1}{3}(4 + 0 + y_C) \\ 3 = z_N = \frac{1}{3}(-2 + 4 + z_C) \end{array} \right. \Rightarrow C(12, 2, 7)$$

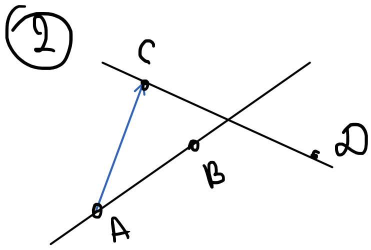
③ AKC $K = Oxyz$

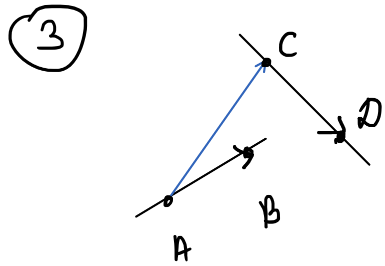
$A(6, 0, 1)$; $B(-1, 3, 2)$; $C(5, 1, -3)$; $D(6, 1, 3)$

Да се определи взаимното положение на AB и CD

Реш:







кръстосани

$\overrightarrow{AB}(-7,3,1)$

$\overrightarrow{CD}(1,0,6)$

$\overrightarrow{AC}(-1,1,-4)$

Проверяваме дали $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}$ са компланарни:

$$\begin{vmatrix} -7 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 37 \neq 0$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}$ са ЛНЗ $\Rightarrow$ AB и CD са кръстосани

б)

$A(1,1,0)$; $B(2,1,0)$; $C(1,0,0)$; $D(1,2,0)$

AB и CD – пресичащи се в 1 точка

$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{CD} \end{matrix}\right\}$ ЛНЗ

$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{AC} \end{matrix}\right\}$ ЛЗ

$\overrightarrow{AB}(1,0,0)$

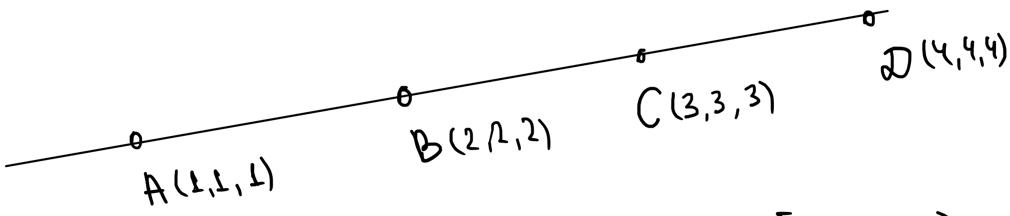
$\overrightarrow{CD}(0,2,0)$

$\overrightarrow{AC}(0,-1,0)$

в)

A B C D

$AB \equiv CD$



$\overrightarrow{AB}(1,1,1)$

$\overrightarrow{CD}(1,1,1)$

$\overrightarrow{AC}(2,2,2)$

$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$, т. A – обща $\Rightarrow$

A, B, C – лежат на 1 права