

V ЧАСТ: Уравнения на права в равнината

Всички задачи от тази част са зададени спрямо ОКС $K = Oxy$ в равнината.

1 зад. Дадени са точките : $A(5, 1)$, $B(3, 3)$ и $C(-1, 5)$. Да се намерят:

- a) Уравнения на симетралите на страните AB и AC на триъгълник ABC ;
- b) Координатите на центъра на описаната около триъгълник ABC окръжност (пресечната точка на симетралите);
- c) Дължината на радиуса на описаната около триъгълник ABC окръжност (разстоянието от центъра до произволен връх на триъгълника).

2 зад. Дадени са правите: $a: 3x - 2y + 1 = 0$, $b: x - y + 1 = 0$ и $m_B: 2x - y - 1 = 0$. Нека правите a и b съдържат съответно страните BC и AC на триъгълник ABC , а правата m_B съдържа медианата му през върха B . Да се намерят координатите на върховете и лицето на триъгълник ABC .

3 зад. Дадени са точките : $A(1, 2)$, $B(-2, 1)$ и $C(-1, -2)$. Да се намерят:

- a) Уравнения на правите, които съдържат средните отсечки на триъгълник ABC ;
- b) Уравнения на височините на триъгълник ABC ;
- c) Дължината на медианата AA_1 на триъгълник ABC .

4 зад. Дадени са правите: $g: 2x - 3y + 1 = 0$, $a: x + 5y + 7 = 0$ и точката $P(2, 6)$. Светлинен лъч l минава през точката P , отразява се от правата g и отразеният лъч l' става успореден на правата a . Да се намерят уравнения на правите, съдържащи лъчите l и l' .

5 зад. Дадени са правите: $b_A: 4x - 3y + 2 = 0$, $h_A: x + 3y + 8 = 0$ и точката $B(-3, 5)$. Да се намерят координатите на върховете A и C на триъгълник ABC , ако правите b_A и h_A съдържат съответно вътрешната ъглополовяща и височината през върха A на триъгълника.

6 зад. Дадени са правите: $g: 2x - y - 5 = 0$ и $b: 3x - y - 1 = 0$. Да се намери уравнение на правата b' , ортогонално симетрична на правата b относно правата g .

Уравнения на права в равнината – задачи от изпитни теми

1 зад. Спрямо ОКС $K=Oxy$ в равнината са дадени т. $B(-4, 3)$ и правите:

$$m_c: 4x - y + 6 = 0 \text{ и } h_c: 3x - y + 4 = 0.$$

Да се намерят координатите на върховете A и C на триъгълник ABC , ако m_c е медианата, а h_c е височината при върха C на триъгълника. Да се намери лицето на триъгълник ABC .

2 зад. Спрямо ОКС $K=Oxy$ в равнината са дадени т. $B(3, 4)$ и правите:

$$b_c: 2x + y - 5 = 0 \text{ и } h_c: x + y - 5 = 0.$$

Да се намерят координатите на върховете A и C на триъгълник ABC , ако b_c е вътрешната ъглополовяща, а h_c е височината при върха C на триъгълника. Да се намери лицето на триъгълник ABC .

3 зад. Спрямо ОКС $K=Oxy$ са дадени точката $P(-3, 3)$ и правите :

$$a: 3x - 4y + 5 = 0 \text{ и } g: 2x - y + 4 = 0.$$

Светлинен лъч, успореден на правата a , се отразява от правата g и отразеният лъч минава през т. P . Намерете уравненията на правите b и b' , съдържащи падащия и отразения лъчи.

4 зад. Спрямо ОКС $K=Oxy$ в равнината са дадени т. $B(6, 1)$, т. $C(4, 3)$ и т. $M(4, 1)$, които са съответно два от върховете и медицентъра на ΔABC . Да се намерят: координатите на третия връх на триъгълника, лицето на триъгълника и уравнение на правата, която е успоредна на страната BC и минава през точката M .

5 зад. Спрямо ОКС $K=Oxy$ са дадени правите:

$$h_1: 2x - 3y + 7 = 0, h_2: x + 2y - 7 = 0 \text{ и точка } A(1, 5).$$

- а) Да се намерят уравненията на страните на триъгълник ABC , ако височините му през върховете B и C лежат съответно на правите h_1 и h_2 .
- б) Да се намерят лицето на триъгълника, координатите на центъра и дължината на радиуса на **описаната** около него окръжност.

6 зад. Спрямо ОКС $K=Oxy$ са дадени правите:

$$h: x - 7y - 6 = 0, m: 5x - 13y - 30 = 0 \text{ и точката } B\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

- а) Да се намерят координатите на върховете на триъгълник ABC , ако височината и медианата му през върха C лежат съответно на правите h и m ;
- б) Да се намерят координатите на центъра и дължината на радиуса на **вписаната** в триъгълника окръжност.

7 зад. Спрямо ОКС $K=Oxy$ са дадени точките $P(-5, 4)$ и $S(-3, -1)$, и правата $m: x + y - 3 = 0$.

- а) Светлинен лъч минава през точката P и след отразяването си от правата m става успореден на ординатната ос. Намерете уравненията на правите g и g' , съдържащи падащия и отразения лъчи;
- б) Намерете координатите на върховете на триъгълник ABC , за който точката S е център на описаната окръжност, а падащият и отразения лъчи съдържат две от страните му.

VI ЧАСТ: Уравнения на права и равнина в пространството

Всички задачи от тази част са зададени спрямо ОКС $K = Oxyz$ в пространството

1 зад. Да се намери общо уравнение на равнина, която минава през точките M, N и P , ако:

$$M(-1, 0, 1), N(0, -1, 1), P(2, 3, 3).$$

2 зад. Да се намери общо уравнение на равнина, която минава през точката P и правата g , ако:

$$P(-2, -1, 2), \quad g \begin{cases} x = 4 + s \\ y = 3 + s, s \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + s \end{cases}$$

3 зад. Да се намери общо уравнение на равнина, която минава през пресичащите се прави a и b ,

$$\text{ако: } a \begin{cases} x = -2 + s \\ y = 2 + s, s \in \mathbb{R}, \\ z = 1 - s \end{cases}, \quad b \begin{cases} x = 0 + 2p \\ y = 4 + 2p, p \in \mathbb{R}. \\ z = 4 + 3p \end{cases}$$

4 зад. Да се намери общо уравнение на равнина, която минава правата a и е успоредна на правата

$$b, \text{ ако: } a \begin{cases} x = 1 - s \\ y = 2 - s, s \in \mathbb{R}, \\ z = 1 + s \end{cases}, \quad b \begin{cases} x = 5 + 2p \\ y = 4 + 3p, p \in \mathbb{R}. \\ z = 3 - 3p \end{cases}$$

5 зад. Да се намери общо уравнение на равнина, която минава през правата g и е перпендикулярна на равнината β , ако:

$$g \begin{cases} x = 4 + s \\ y = 3 + s, s \in \mathbb{R}, \\ z = 2 + s \end{cases}, \quad \beta: x + y - 2z + 2 = 0.$$

6 зад. Да се намерят координатни параметрични уравнения на правата g , която е зададена като

$$\text{пресечница на две равнини: } g \begin{cases} 2x + y + z - 7 = 0 \\ x - y + 2z - 5 = 0. \end{cases}$$

7 зад. Дадени са точката $M(-1, 1, 2)$ и правата $a \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z - 2 = 0. \end{cases}$

- Да се намерят координатни параметрични уравнения на правата g , която е успоредна на правата a и минава през точката M ;
- Да се намери разстоянието от точката M до правата a ;
- Да се намерят координатите на точката M' , ортогонално симетрична на точката M относно правата a .

8 зад. Дадени са точките $A(3, 4, 0)$ и $B(3, 3, -2)$, и равнината $\beta: x + 2y - z + 1 = 0$. Светлинен лъч минава през точката A , отразява се от равнината β и отразеният лъч минава през точката B . Да се намерят уравнения на правите, съдържащи падащия и отразения лъчи.

9 зад. Дадени са равнината $\alpha: x - 2y + 5z - 2 = 0$ и правата $b \begin{cases} x = 2 - 3s \\ y = 0 + 1s, s \in \mathbb{R}. \\ z = 6 - 5s \end{cases}$. Да се намерят уравнения на правата b' , ортогонално симетрична на b относно равнината α .

10 зад. Дадени са правите: $a \begin{cases} x = 2 + 0s \\ y = -3 - 1s, s \in \mathbb{R}, \\ z = 1 + 1s \end{cases}, \quad b \begin{cases} x = -2 + 2p \\ y = 1 - 1p, p \in \mathbb{R}. \\ z = -5 - 1p \end{cases}$

- Да се докаже, че правите a и b са кръстосани;

- б) Да се намерят уравнения на оста на кръстосаните прави a и b ;
 в) Ако точките A и B са краищата на оста-отсечка на кръстосаните прави a и b , а т. $O(0, 0, 0)$ е началото на координатната система, да се намери лицето на триъгълник OAB .

11 зад. Дадени са кръстосаните прави: $a \begin{cases} x = 1 + 1s \\ y = 0 + 1s \\ z = 0 \end{cases}, s \in \mathbb{R}, \quad b \begin{cases} x = 0 - 1p \\ y = 1 - 1p \\ z = 2 + 2p \end{cases}, p \in \mathbb{R}$ и равнината

$\beta: x + y - 1 = 0$. Нека точките $A \in a$ и $B \in b$ са краищата на оста-отсечка на правите a и b , а точките C и D са прободните точки съответно на правите a и b с равнината β . Да се намери обемът на тетраедър $ABCD$.

12 зад. Дадени са точките $A(0, 0, -1)$ и $B(-2, -8, -3)$, равнината $\beta: 3x + 4y - z + 1 = 0$ и правата

$$b \begin{cases} x = 3 + 3s \\ y = -8 + 1s \\ z = 1 - 1s \end{cases}, s \in \mathbb{R}. \text{ Да се намерят:}$$

- а) Уравнение на равнината γ , която минава през точките A и B , и е перпендикулярна на равнината β ;
 б) Координатни параметрични уравнения на пресечницата g на равнините β и γ ;
 в) Разстоянието от точката B до правата g .

Уравнения на права и равнина в пространството – задачи от изпитни теми

1 зад. Дадени са точката $M(-1, 1, 2)$ и правата $a \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases}$.

- а) Да се намерят координатни параметрични уравнения на правата g , която е успоредна на правата a и минава през точката M ;
 б) Да се намери разстоянието от точката M до правата a и координатите на точката M' , ортогонално симетрична на точката M относно правата a ;
 в) Да се намери уравнение на равнината α , която минава през т. M и правата a .

2 зад. Дадени са точките $A(0, 0, -1)$ и $B(-2, -8, -3)$, равнината $\beta: 3x + 4y - z + 1 = 0$ и правата

$$b \begin{cases} x = 3 + 3s \\ y = -8 + 1s \\ z = 1 - 1s \end{cases}, s \in \mathbb{R}. \text{ Да се намерят:}$$

- д) Уравнение на равнината γ , която минава през точките A и B , и е перпендикулярна на равнината β ;
 е) Разстоянието от точката B до правата b и координатите на точката B' , ортогонално симетрична на точката B относно правата b .

3 зад. Спрямо ОКС $K=Oxyz$ са дадени точката $C(0, 0, -3)$, равнината $\alpha: 2x + 2y - z + 1 = 0$ и правите :

$$a \begin{cases} x = p \\ y = -2 + p \\ z = -1 + 2p \end{cases}, p \in \mathbb{R}, \quad b \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}, \quad c \begin{cases} x = 1 + 2q \\ y = -1 + 6q \\ z = 2 - q \end{cases}, q \in \mathbb{R}$$

- а) Да се намерят уравнения на трансверзалата t на кръстосаните прави a и b , която е успоредна на правата c ;
 б) Ако т. $A = a \cap \alpha$ и т. $B = b \cap \alpha$, намерете уравнения на височината h_c от върха C към страната AB на триъгълник ABC . Намерете лицето на ABC .

4 зад. Спрямо ОКС $K=Oxyz$ в пространството са дадени точка $P(1, 5, 0)$, правите

$$a: \begin{cases} x = 1 - 2q \\ y = 2 + q \\ z = 0 + 2q \end{cases}, q \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad b: \begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 3x - 2z - 9 = 0 \end{cases}, \text{ и равнина } \alpha: y - z - 2 = 0.$$

- а) Светлинен лъч минава през точка P , отразява се от равнината α и пресича правите a и b . Да се намерят уравнения на правите съдържащи съответно падащия и отразения лъч.
- б) Нека правата a пресича равнината α в точка A , а правата b пресича равнината α в точка B . Да се намери лицето на триъгълник ABP .

5 зад. Спрямо ОКС $K=Oxyz$ в пространството са дадени точките $M(1, 5, 0)$, $B(5, 0, 3)$, $A(3, 1, 3)$,

правите $a: \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ 2y - z - 4 = 0 \end{cases}$ и $b: \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 4 - 2s \\ z = -3 + 3s \end{cases}$, $q \in \mathbb{R}$, и равнината $\alpha: y - z - 2 = 0$.

- а) Да се намери трансверзала на правите a и b , минаваща през точка A .
- б) Светлинен лъч l минава през точката M , отразява се от равнината α и отразения лъч l' минава през точката B . Да се намерят уравненията на l и l' .

6 зад. Спрямо ОКС $K=Oxyz$ в пространството са дадени: точки $P(3, 1, 5)$ и $Q(-2, 12, 1)$,

равнина $\alpha: x + 2y + 2z - 6 = 0$ и правите: $a: \begin{cases} x = 3 + s \\ y = 0 + s \\ z = 3 + 2s \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$, $b: \begin{cases} x = 2 - p \\ y = 3 - p \\ z = 1 + 3p \end{cases}$, $p \in \mathbb{R}$.

- а) Да се намерят координатите на точки A и B – краищата на оста-отсечка на кръстосаните прави a и b ;
- б) Светлинен лъч l минава през т. P , отразява се от равнината α и отразения лъч l' минава през точката Q . Да се намерят координатите на точката C , в която правите l и l' пробождат равнината α .
- с) Да се намери лицето на триъгълник ABC .