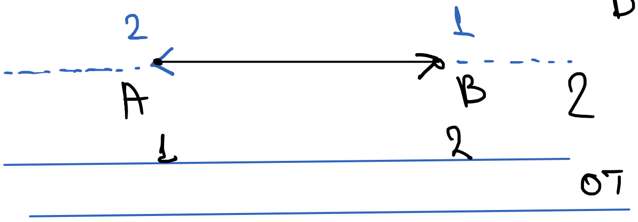
Насочена отсечка. Вектор. Афинни операции с вектори.

Деф Насочена отсечка (свързан вектор) $\overrightarrow{AB}$ – отсечка, на която единия край е избран за първи, а другия за втори,



Върху отсечката AB лежат 2 различни насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$.

Елементи:

- Начало, край – еднозначно определят нас. отс.

По- сока

- Дължина $|\overrightarrow{AB}|$
- Директриса – правата AB
- Направление – $\forall$ прави $\parallel AB$

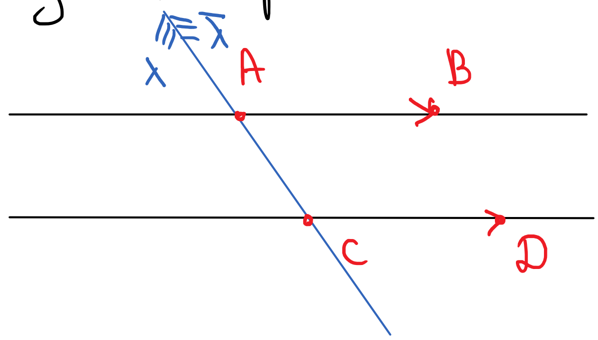
Сравняване на посоки:

- Върху всяка права могат да се разглеждат две противоположни посоки
- Посока може да се определи от ненулева насочена отсечка.

Нулевата насочена отсечка няма посока,

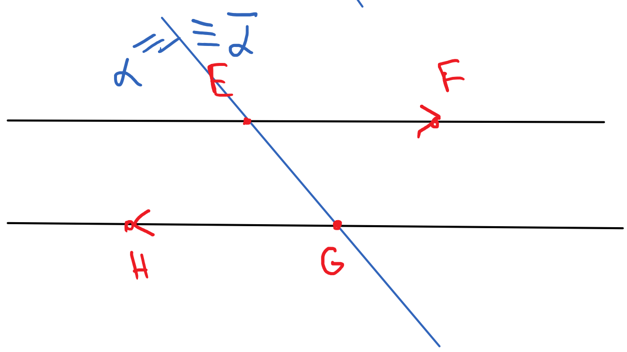
Но има дължина 0!

• Посоки сравняваме само върху прави от едно направление.



т. B, т. $D \in \bar{\lambda}$ $\Rightarrow$

$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ – еднопосочни

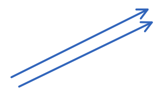


т. $F \in \bar{\alpha}$

т. $H \in \alpha$ $\Rightarrow$

$\overrightarrow{EF} \uparrow\downarrow \overrightarrow{GH}$ – противопосочни

Равни насочени отсечки: Имат еднакви



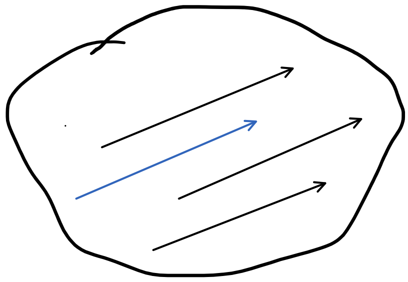
- направление
- посока
- дължина

„=" е релация на еквивалентност:

1. $\vec{a} = \vec{a}$
2. $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{b} = \vec{a}$
3. $\vec{a} = \vec{b}$ и $\vec{b} = \vec{c} \Rightarrow \vec{a} = \vec{c}$

Def: Свободен вектор $\vec{a}$, породен от насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ – съвкупността от $\forall$ насочени отсечки, които са равни на $\overrightarrow{AB}$.

$$\vec{a} = \{\forall \vec{b} : \vec{b} = \overrightarrow{AB}\}$$



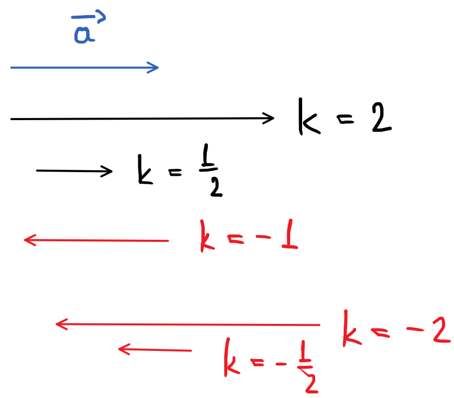
Умножение на вектор с число → вектор

$\vec{a}$, $\vec{b}$ – вектори, k – число, $\boxed{k.\vec{a} = \vec{b}}$

1) $\vec{a} \parallel \vec{b}$

2) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, $k > 0$

$\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, $k < 0$

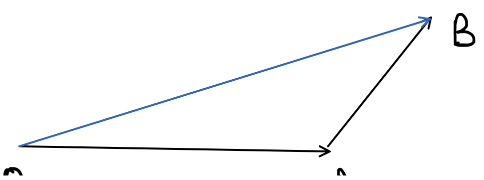


3) $\boxed{|\vec{b}| = |k| . |\vec{a}|}$

Сбор на вектори → вектор

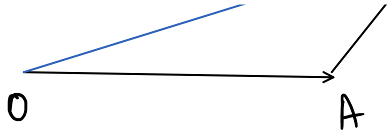
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

Правило на триъгълника:



$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

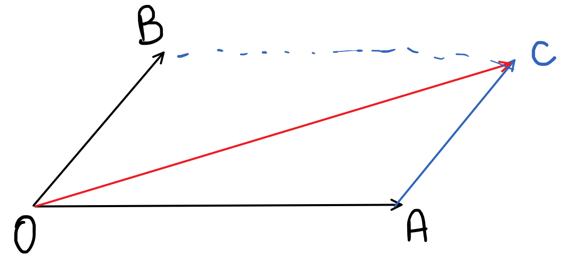
$\overrightarrow{MN}$, т. P – произволна



$\overrightarrow{MN}$, т. P – произволна

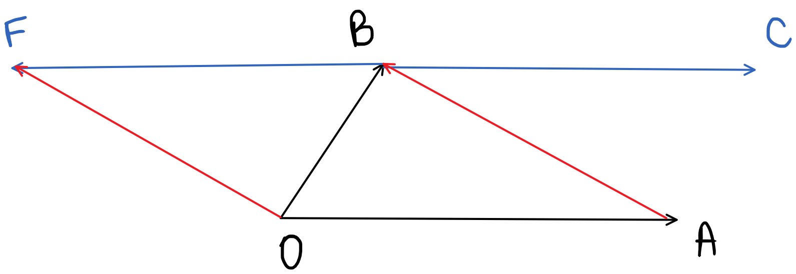
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN}$

Правило на успоредника:



$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$

Разлика на вектори:



$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MN}$, т. P – произволна

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}$

Свойства:

1) $\forall \vec{a}\ \exists!\,(-\vec{a}):\ \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

3) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

4) $\exists!\,\vec{0}:\ \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

5) $1.\vec{a} = \vec{a}$

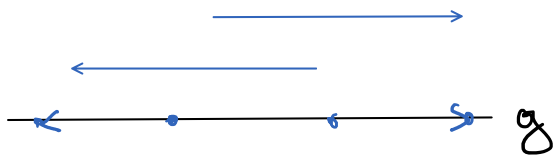
6) $n(m.\vec{a}) = (n.m).\vec{a}$

7) $(n+m).\vec{a} = n.\vec{a} + m\vec{a}$

8) $n.(\vec{a}+\vec{b}) = n.\vec{a} + n.\vec{b}$

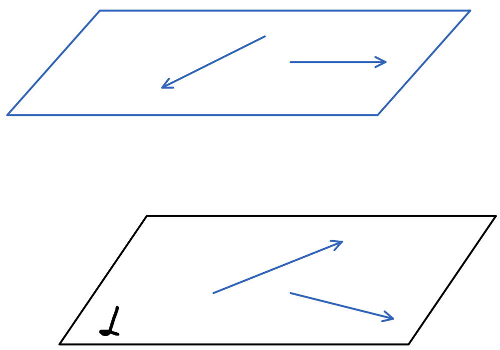
Множеството V на свободните вектори с операции „сбор на вектори" и „умножение на вектор с число" е линейно пространство.

Def: Вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$ се нарича колинеарен на права g, ако има представител || или ∈ на g.



Def: 2 или повече вектора са колинеарни, ако са колинеарни на една и обща права.

Def: Вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$ се нарича компланарен на равнина α, ако има представител || или ∈ на α.



Def. 2 или повече вектора са компланарни, ако са компланарни на една и обща равнина.

Def: Медицентър M на система от точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ е точката, за която:

(1) $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \dots + \overrightarrow{MA_n} = \vec{0}$

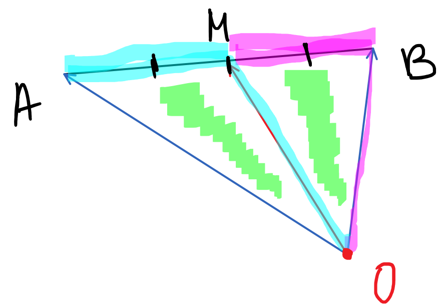
$\Updownarrow$

$\Updownarrow$

(2) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}\right)$, където т. O – произволна

① Осн. Нека A и B са произволни точки и т. M е средата на AB. Да се докаже, че

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)}$$, т. O – произволна



Реш: $\triangle OBM \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$ ①

$\triangle OMA \Rightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{MA}$ ②

① + ② $\Rightarrow$ $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{MA}$

$$2.\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \underbrace{\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{MA}}_{\vec{0}}$$, защото M е среда

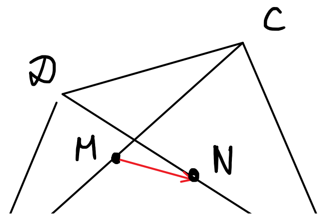
$$2.\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$

② ABCD – четириъгълник

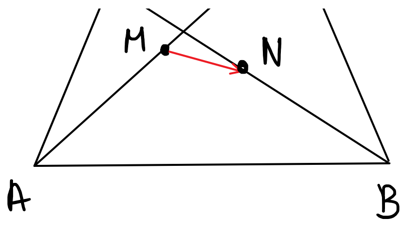
т. M и т. N са среди съответно на AC и BD

Да се докаже, че



$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right)$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right)$$



Реш: т. O - произволна

т. M е среда на AC => $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right)$

т. N е среда на BD => $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right)$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}\right)$$

$\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{CB}$

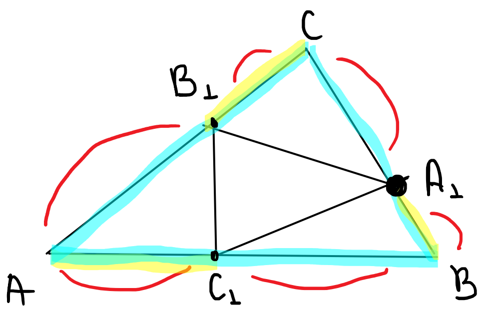
$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right)$$

3) Нека A_1, B_1, C_1 лежат съответно на страните BC, CA и AB на $\triangle ABC$ и са такива, че $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A$. Да се докаже, че $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ имат общ медицентър.

Реш:

Screen clipping taken: 23.2.2022 г. 11:25



Реш: Нека

т. M - медицентър на $\triangle ABC$.

т. M_1 - медицентър на $\triangle A_1B_1C_1$

т. O - произволна

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$$

$\overrightarrow{OA}$ $\overrightarrow{AC_1}$

$$\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}\right) =$$

$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1}}$

O $\qquad M \equiv M_1$

$AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A$

$$\vec{OM_1} = \frac{1}{3}(\vec{OA_1} + \vec{OB_1} + \vec{OC_1}) =$$

$\vec{OA_1} = \vec{OB} + \vec{BA_1}$, $\vec{OB_1} = \vec{OC} + \vec{CB_1}$

$AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C =$
$= CB_1 : B_1A$

$\vec{AC_1} = k \cdot \vec{AB}$

$\vec{BA_1} = k \cdot \vec{BC}$

$\vec{CB_1} = k \cdot \vec{CA}$

$$\vec{OM_1} = \frac{1}{3}(\vec{OB} + \vec{BA_1} + \vec{OC} + \vec{CB_1} + \vec{OA} + \vec{AC_1})$$

$$= \underbrace{\frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})} + \frac{1}{3}(\vec{BA_1} + \vec{CB_1} + \vec{AC_1})$$

$$= \vec{OM} + \frac{1}{3}(k \cdot \vec{BC} + k \cdot \vec{CA} + k \cdot \vec{AB})$$

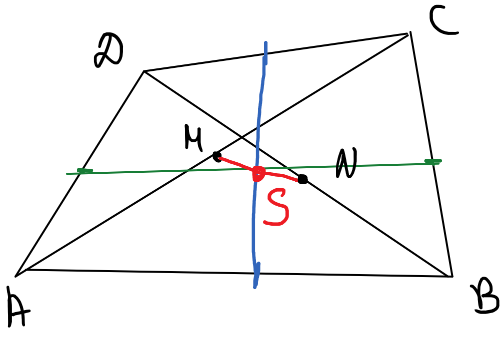
$$= \vec{OM} + \frac{k}{3}(\underbrace{\underbrace{\vec{BC} + \vec{CA}}_{\vec{BA}} + \vec{AB}}_{\vec{0}})$$

$\vec{OM_1} = \vec{OM}$, т. O – общо начало $\Rightarrow M \equiv M_1$.

(4) $ABCD$ – четириъгълник

Да се определи положението на т. S от равнината му, за която е изпълнено:

$$\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = \vec{0}$$



Реш: Нека т. M е среда на AC $\Rightarrow$

$$\vec{SM} = \frac{1}{2}(\vec{SA} + \vec{SC})$$

Нека т. N – среда на BD $\Rightarrow$

$$\vec{SN} = \frac{1}{2}(\vec{SB} + \vec{SD})$$

$$\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{SN} = \frac{1}{2}(\underbrace{\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}}_{\vec{0}}) = \frac{1}{2}.\vec{0} = \vec{0}$$

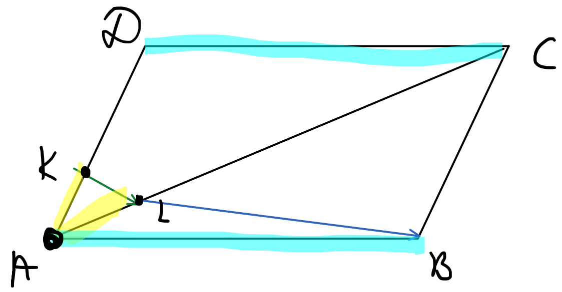
$$\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{SN} = \vec{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{SM} = -\overrightarrow{SN} \\ |\overrightarrow{SM}| = |-1|\,|\overrightarrow{SN}| \end{array}\right\}$$ S е средата на MN

⑤ ABCD – успоредник

т. K ∈ AD : $\boxed{5\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD}}$

т. L ∈ AC : $\boxed{6.\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC}}$



Да се докаже, че точките K, L, B са колинеарни.

<u>Реш:</u> $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK}$

$$\overrightarrow{LB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AL}$$

$$= 6.\overrightarrow{AL} - 5.\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AL} = 5.(\overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK}) = 5.\overrightarrow{KL}$$

$\overrightarrow{LB} = 5.\overrightarrow{KL}$, т. L – обща точка =>

K, L, B лежат на 1 права.

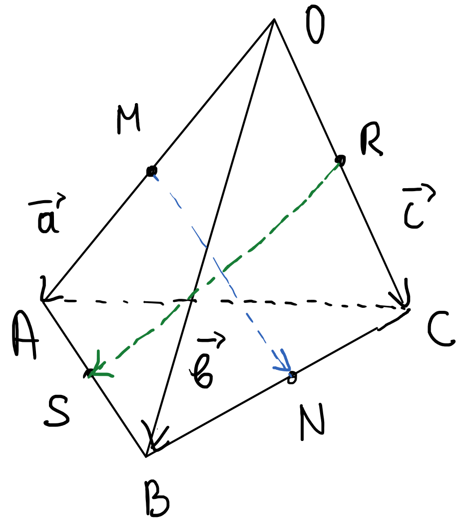
⑥ OABC – тетраедър, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$

M, P, R – среди на ръбовете OA, OB, OC

N, Q, S – среди на ръбовете BC, AC, AB

а) ? $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$ чрез $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$;

б) Да се докаже, че средите на MN, PQ, RS съвпадат



Реш:

а) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c} - \vec{a})$

$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$

$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b})$

б) Нека т. O_1 – среда на MN

т. O_2 – среда на PQ

т. O_3 – среда на RS

$\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})\right)$

$= \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$\overrightarrow{OO_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})\right)$

$= \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$\overrightarrow{OO_3} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{OO_2} = \overrightarrow{OO_3}$, т. O – обща $\Rightarrow O_1 \equiv O_2 \equiv O_3$