Филип Филчев ОМI0600041

Домашна работа 3
Геометрия

① E_3^*

$M(-1,1,-1,1)$, $N(0,2,-1,0)$, $P(-1,1,-1,2)$

а) у-ние на равн. $\gamma \ni M, N, P$

$\gamma: Ax+By+Cz+Dt=0$

$$\gamma \ni M \left| \begin{array}{ll} -A+B-C+D=0 & \Rightarrow D=A+B \Rightarrow D=0 \\ 2B-C=0 & \Rightarrow C=2B \\ -A+B-C+2D=0 & \Rightarrow -A+B-2B+2A+2B \Rightarrow A=-B \end{array} \right.$$

Избираме $A=1$; $B=-1$; $C=-2$; $D=0$

$\gamma: x-y-2z=0$

б) общо у-ние на р-ната β; $\beta \ni U_\gamma$, $\beta \ni Q(0,0,1,1)$

$\beta \ni U_\gamma \Rightarrow \beta \parallel \gamma \Rightarrow \beta: x-y-2z+Dt$

$\beta \ni Q \Rightarrow -2+D=0 \quad D=2$

$\beta: x-y-2z+2=0$

в) аналит. представяне на орт. проек. φ в/у β

$\vec{n}_\beta(1,-1,2) \Rightarrow \varphi$ е центр. проекц. с безкр. точка $U(1,-1,-2,0)$

$M_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$

$$m_0 \left\{ \begin{array}{l} \ni U \\ \ni M_0 \end{array} \right. \qquad m_0 \left\{ \begin{array}{l} x=\lambda x_0+\mu \\ y=\lambda y_0-\mu \\ z=\lambda z_0-2\mu \\ t=\lambda t_0 \end{array} \right.$$

$M' = m_0 \cap \beta \Rightarrow (\lambda x_0+\mu)-(\lambda y_0-\mu)-2(\lambda z_0-2\mu)+2\lambda t_0=0$

$\lambda(x_0-y_0-2z_0+2t_0)+6\mu=0$

избор

Избираме $\lambda = -6 \Rightarrow \mu = x_0 - y_0 - 2z_0 + 2t_0$

$$\mu' \begin{cases} x' = -5x_0 - y_0 - 2z_0 + 2t_0 \\ y' = -x_0 - 5y_0 + 2z_0 - 2t_0 \\ z' = -2x_0 + 2y_0 + 2z_0 - 4t_0 \\ t' = -6t_0 \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & -5 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{E}_2^*$

③ т. $A(1,0,0) \to A(1,0,0)$

т. $B(0,1,0) \to B(0,1,0)$

т. $O(0,0,1) \to O'(2,-4,1)$

т. $E(1,1,1) \to E'(1,-5,1)$

а) аналитично представяне на φ

$$\varphi: C\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\t\end{pmatrix} = \rho\cdot\begin{pmatrix}x'\\y'\\t'\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix}$$

$A \to A:\quad C\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \rho_1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_{11}=\rho_1\cdot 1 \Rightarrow c_{11}=\rho_1\\ c_{21}=\rho_1\cdot 0 \Rightarrow c_{21}=0\\ c_{31}=\rho_1\cdot 0 \Rightarrow c_{31}=0\end{cases}$

$B \to B:\quad C\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \rho_2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_{12}=\rho_2\cdot 0 \Rightarrow c_{12}=0\\ c_{22}=\rho_2\cdot 1 \Rightarrow c_{22}=\rho_2\\ c_{32}=\rho_2\cdot 0 \Rightarrow c_{32}=0\end{cases}$

т. $O \to O':\quad C\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \rho_3\cdot\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_{13}=\rho_3\cdot 2 \Rightarrow c_{13}=2\rho_3\\ c_{23}=\rho_3\cdot -4 \Rightarrow c_{23}=-4\rho_3\\ c_{33}=\rho_3\cdot 1 \Rightarrow c_{33}=\rho_3\end{cases}$

$$\Rightarrow C=\begin{pmatrix}\rho_1 & 0 & 2\rho_3\\ 0 & \rho_2 & -4\rho_3\\ 0 & 0 & \rho_3\end{pmatrix}$$

т. $E \to E':\quad C\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \rho_4\cdot\begin{pmatrix}1\\-5\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \rho_1+2\rho_3=\rho_4\cdot 1\\ \rho_2-4\rho_3=\rho_4\cdot(-5)\\ \rho_3=\rho_4 \neq 0\\ \rho_1=-\rho_4 \neq 0\\ \rho_2=-\rho_4 \neq 0\end{cases}$

$\cancel{E)\ \rho \neq \rho_2 \neq \rho_1 = \rho_4}$

$\Rightarrow \rho_1 = \rho_2 = -\rho_3 = -\rho_4$

Избирам $\rho_1 = \rho_2 = 1$ $\rho_3 = \rho_4 = -1$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \det C \neq 0 \ \text{биекция}$$

б) неподвижни точки и неподвижни прави

I неподвижни точки

търсим собствени стойности:

$$|C - \rho . E| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\rho & 0 & -2 \\ 0 & 1-\rho & 4 \\ 0 & 0 & -1-\rho \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\rho).(-1)^6 . \begin{vmatrix} 1-\rho & 0 \\ 0 & 1-\rho \end{vmatrix} = 0; \ \boxed{(-1-\rho).(1-\rho).(1-\rho) = 0}$$

$\Rightarrow \rho_1 = -1$ $\rho_2 = \rho_3 = 1$

за $\rho_1 = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2x - 2t = 0 & x = t \\ 2y + 4t = 0 & y = -2t \end{vmatrix}$

$-2x = y = -2t$

Избираме $y = 1$ $\Rightarrow x = -2 = t$

$\Rightarrow \boxed{\text{т. } M_1(-2, 1, -2)}$ неподвижна за $\rho_{2,3}=1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} -2t=0 \\ 4t=0 \\ -2t=0 \end{array} \right.$ $t=0$

$\forall$ т. $M_2(x,y,t): t=0$, $\forall$ безкрайни точки

$\forall$ точка от правата $t=0$ (безкрайна) е неподвижена

II неподвижни прави

$$[u_1\ u_2\ u_3] \cdot C^{-1} = \sigma \cdot [u_1\ u_2\ u_3]$$
$$[u_1 u_2 u_3] \cdot (C^{-1} - \sigma . E) = [0,0\,0]$$

$$C^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot (4) . (-2) . (-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow C^{-1} = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

собствени стойности

$|C^{-1} - \sigma . E| = 0$ $\quad \sigma_1 = -1 \quad \sigma_{2,3} = 1$

за $\sigma_1 = -1 \Rightarrow [u_1\ u_2\ u_3] \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [0\,0\,0]$

$$\left| \begin{array}{l} 2u_1 = 0 \\ 2u_2 = 0 \\ -2u_1 + 4u_2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$ за σ_1: ~~[illegible]~~

$\forall g$, за която $u_1 = u_2 = 0$ е неподвижна за $\sigma_{2,3} = 1$ $[u_1 u_2 u_3] \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \mathcal{O}[000]$

$-2u_1 + 4u_2 + 2u_3 = 0$

за $\sigma_{2,3} = 1$: $g[-2, 4, -2]$

---

(2)

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 1 \\ 6 & -6 & 9 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

?, че C е матр. на централно проектиране
?, проекционен център S
?, проекционна равнина γ

1. $\det C = 0$
2. $r(C) = 3$
3. Търсим координати на $S(x,y,z,t)$, които са решение на $C \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $-x - y + 3z + t = 0$
$6x - 6y + 9z + 3t = 0$ $\quad 2x - 2y + 3z + t = 0$
$2x - y + 0.z + t = 0 \Rightarrow 3x = 3z \quad x = z$
$2x - y + 3z - 2t = 0 \Rightarrow y = 3t$
$\Rightarrow 2x - 3t + 3x - 2t = 0$
$5x = 5t \quad x = t$
$x = \frac{y}{3} = z = t$

Избираме $y = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ т. $S(1,1,3,1)$

4. Търсим координатите на равнината γ, която съдържа образите на всички точки от E_3^* под действие на изобр. с матр. C

$\gamma[u_1\, u_2\, u_3\, u_4]$

$M(x,y,z,t) \longrightarrow M'(x',y',z',t') \in \alpha$

$$C \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \rho \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} \in \alpha \Leftrightarrow [u_1\, u_2\, u_3\, u_4] \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = 0 \text{ за } \forall M$$

$$\underbrace{[u_1\, u_2\, u_3\, u_4] \cdot C}_{=[0\,0\,0\,0]} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$

$$[u_1\, u_2\, u_3\, u_4] \cdot C = [0\,0\,0\,0]$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 1 \\ 6 & -6 & 9 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -u_1 + 6u_2 + 2u_3 + 2u_4 = 0 & \Rightarrow\ u_1 = -6u_2 \\ -u_1 - 6u_2 - u_3 - u_4 = 0 \quad \cdot 13 & \Rightarrow\ -9u_2 = 3u_3 \quad u_2 = -\frac{u_3}{3} \\ 3u_1 + 9u_2 + 3u_4 = 0 & \\ u_1 + 3u_2 + u_3 - 2u_4 = 0 \quad | \cdot 3 & \Rightarrow\ 3u_3 = 3u_4 \quad u_3 = u_4 \end{cases}$$

$\gamma[-6, 1, -3, -3] \longleftarrow \left(-6u_2,\ u_2,\ -\frac{3u_2}{3},\ -3u_2\right)$

избиране $u_2 = 1$

$\gamma: -6x + y - 3z - 3t = 0$