Конични сечения – основни свойства

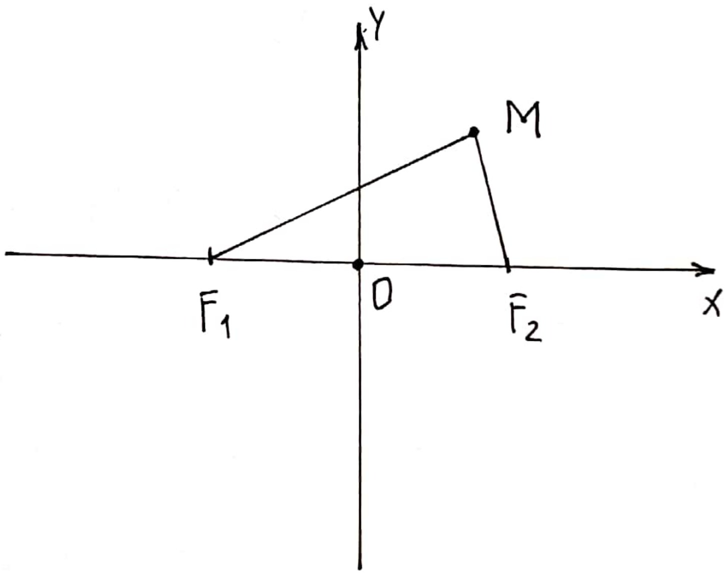
1 зад. Дадени са две различни точки F_1 и F_2, $|F_1F_2| = 2c$ и константа $a > c$. Да се намери ГМТ в равнината, за които

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a.$$

Решение:

I Избор на ОКС $K = Oxy$

1. Изб. т. O – средата на F_1F_2
2. Ox $Ox \equiv F_1F_2$, $Ox \uparrow\uparrow \overrightarrow{F_1F_2}$
3. Oy $Oy \equiv S_{F_1F_2}$



Спрямо така избраната ОКС: $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$:

$|\overrightarrow{F_1F_2}| = 2c$, $0 < c < a$

II Нека т. $M(x, y)$ спр. K е такава, че

$$|\overrightarrow{F_1M}| + |\overrightarrow{F_2M}| = 2a$$

Ще намерим уравнение на фигурата, която описват всички точки M с това свойство:

$\overrightarrow{F_1M}(x+c, y) \Rightarrow |\overrightarrow{F_1M}| = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$

$\overrightarrow{F_2M}(x-c, y) \Rightarrow |\overrightarrow{F_2M}| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$

$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad / (\ )^2$

$x^2+2xc+c^2+y^2 = 4a^2 - 4a.\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2-2xc+c^2+y^2$

$4a.\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4.xc \quad /:4$

$a.\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - x.c \quad / (\ )^2$

$a^2.(x^2-2xc+c^2+y^2) = a^4 - 2a^2cx + x^2.c^2$

$x^2.(a^2-c^2) + y^2.a^2 = a^4 - a^2.c^2$

$x^2.(a^2-c^2) + y^2.a^2 = a^2.(a^2-c^2)$

Полагаме $a^2-c^2=b^2 \Rightarrow$

$x^2.b^2 + y^2.a^2 = a^2.b^2 \quad /:(a^2.b^2)$

$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Извод: Ако т. $M(x,y)$ е такава, че $|F_1M|+|F_2M|=2a$,

то т. $M \in \mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$b^2 = a^2-c^2$

III Нека т. $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0 \in [-a; a]$, $y_0 \in [-b; b]$

Ще док., че $|F_1M_0| + |F_2M_0| = 2a$.

$|\overrightarrow{F_1M_0}|^2 = (x_0 + c)^2 + y_0^2$, от $\mathcal{E} \Rightarrow y_0^2 = b^2 - \frac{b^2 \cdot x_0^2}{a^2}$

$|\overrightarrow{F_1M_0}|^2 = x_0^2 + 2c \cdot x_0 + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x_0^2 =$

$= \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot x_0^2 + 2 \cdot c \cdot x_0 + a^2 =$

$= \frac{c^2}{a^2} \cdot x_0^2 + 2c \cdot x_0 + a^2 = \left(\frac{c \cdot x_0}{a} + a\right)^2 \Rightarrow$

$|\overrightarrow{F_1M_0}| = \left|\frac{a^2 + c \cdot x_0}{a}\right|$, но $\begin{cases} c < a \\ |x_0| \le a \end{cases} \Rightarrow |c \cdot x_0| < a^2 \Rightarrow$

$|\overrightarrow{F_1M_0}| = \frac{a^2 + c \cdot x_0}{a}$

$|\overrightarrow{F_2M_0}| = \left|\frac{a^2 - c \cdot x_0}{a}\right| = \frac{a^2 - c \cdot x_0}{a}$

$|\overrightarrow{F_1M_0}| + |\overrightarrow{F_2M_0}| = \frac{a^2 + c \cdot x_0 + a^2 - c \cdot x_0}{a} = 2 \cdot a$

2 зад. Дадени са две точки $F_1 \neq F_2$, $|F_1F_2| = 2.c$ и константа $a \in (0; c)$, т.е. $0 < a < c$.
Да се намери ГМТ в равнината, за които

$$\left| |\overrightarrow{F_1M}| - |\overrightarrow{F_2M}| \right| = 2.a.$$

Отг: Търсеното ГМТ е $\chi : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$,

където $b^2 = c^2 - a^2$

* * *

3 зад. Дадени са т. F и права g, $F \notin g$: $d(F; g) = p$. Да се намери ГМТ в равнината, за които:

$$|FM| = d(M, g).$$

I Избор на ОКС $K = Oxy$

$F_0 = \text{орт. пр.}_g F$

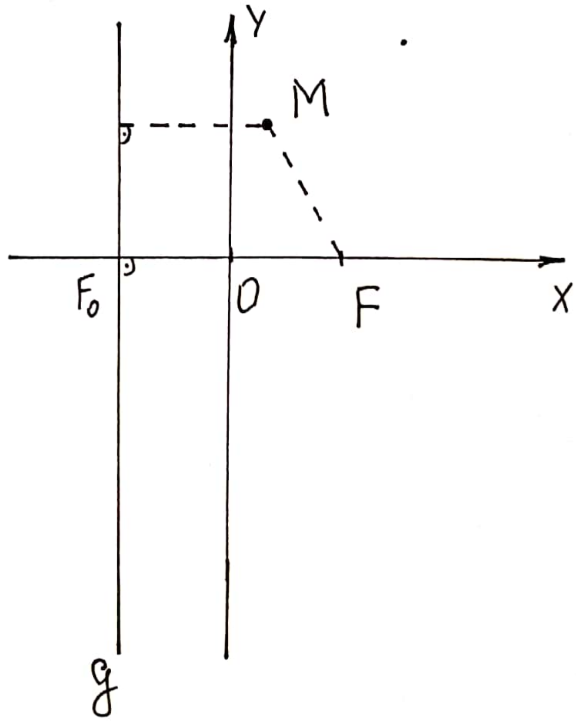
т. O – средата на FF_0

$Ox \equiv F_0F$, $Ox \uparrow\uparrow \overrightarrow{F_0F}$

$Oy \equiv s_{F_0F}$

Спр. K т. $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

$g: x = \dfrac{-p}{2}$



II Нека т. $M(x,y)$: $|\overrightarrow{FM}| = d(M;g)$
$x \geq 0$

$$|\overrightarrow{FM}| = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad d(M;g) = x + \frac{p}{2}$$

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left(x+\frac{p}{2}\right) \quad / (\ )^2$$

$$x^2 - p.x + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + p.x + \frac{p^2}{4}$$

$$y^2 = 2.p.x \Rightarrow M \in \Pi : y^2 = 2p.x.$$

III Нека т. $M_0(x_0, y_0) \in \Pi : y^2 = 2p.x$

$$|\overrightarrow{FM}|^2 = \left(x_0 - \frac{p}{2}\right)^2 + y_0^2 = x_0^2 - p.x_0 + \frac{p^2}{4} + 2.p.x_0 =$$

$$= x_0^2 + p.x_0 + \frac{p^2}{4} = \left(x_0 + \frac{p}{2}\right)^2 = [d(M_0, g)]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{FM}| = d(M_0; g).$$

* * *

4 зад. ОКС $K = Oxy$

Права $g: y = k.x + n$ е допирателна към

а) $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff a^2.k^2 = n^2 - b^2$;

б) $\chi: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff a^2.k^2 = n^2 + b^2$;

в) $\Pi: y^2 = 2.p.x \iff \begin{cases} p = 2.k.n \\ k \neq 0 \end{cases}$

Доказателство:

а) $\mathcal{E} \cap g = \{T\} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = k.x + n \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{(k.x+n)^2}{b^2} = 1$$

$$b^2.x^2 + a^2.(k.x+n)^2 = a^2.b^2$$

$$b^2.x^2 + a^2.k^2.x^2 + 2a^2.k.n.x + a^2n^2 = a^2b^2$$

$$x^2.(a^2k^2 + b^2) + (2a^2.n.k).x + a^2.(n^2 - b^2) = 0$$

$$D = a^4.n^2k^2 - (a^2k^2 + b^2).a^2.(n^2 - b^2) = 0 \;/ : a^2$$

$$\underline{a^2n^2k^2} - \underline{a^2k^2n^2} + a^2k^2b^2 - b^2n^2 + b^4 = 0 \;/ : b^2$$

$$a^2k^2 - n^2 + b^2 = 0$$

извод: $\mathcal{E}$ и g имат точно една обща точка

$\iff a^2.k^2 = n^2 - b^2$

15. зад. ОКС $K = Oxy$

Допирателната t_0 в т. $M_0(x_0, y_0)$ от:

а) $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ има уравнение: $t_0: \frac{x.x_0}{a^2} + \frac{y.y_0}{b^2} = 1$;

б) $\chi: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ има уравнение: $t_0: \frac{x.x_0}{a^2} - \frac{y.y_0}{b^2} = 1$;

в) $\Pi: y^2 = 2.p.x$ има уравнение: $t_0: y.y_0 = p.(x + x_0)$.

Доказателство:

а) 1) $M_0 \in \mathcal{E} \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2.x_0^2 + a^2.y_0^2 = a^2.b^2$

$M_0(x_0, y_0) \in t_0$, защото $\frac{x_0.x_0}{a^2} + \frac{y_0.y_0}{b^2} = 1$ е изпълн.

$\Rightarrow \mathcal{E} \cap t_0$ съдържа т. M_0;

2) записваме декартово уравнение на t_0

$$t_0: y = \left(-\frac{x_0.b^2}{y_0.a^2}\right).x + \left(\frac{b^2}{y_0}\right) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} k = -\frac{x_0.b^2}{y_0.a^2} \\ n = \frac{b^2}{y_0} \end{array} \right.$$

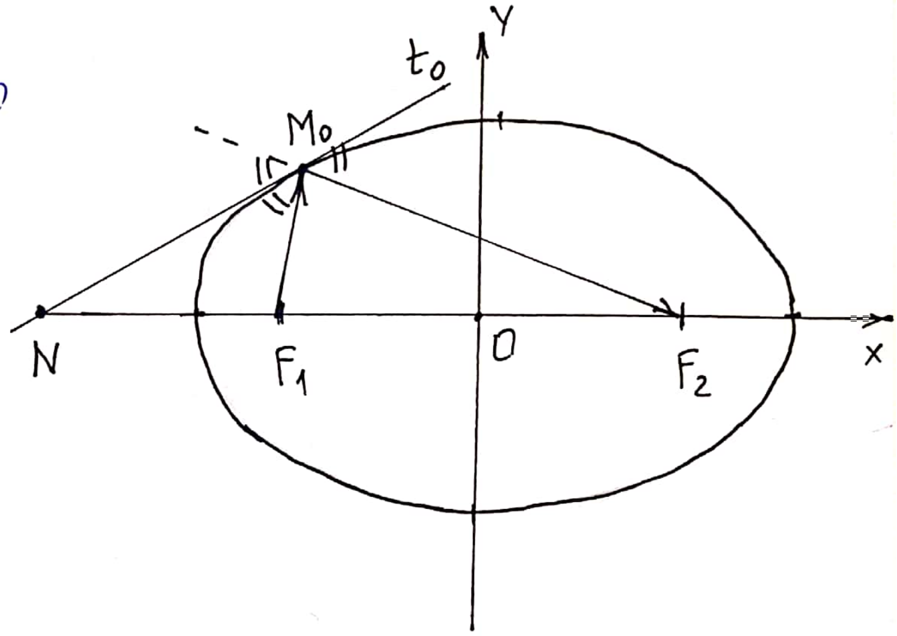
3) Проверяваме дали t_0 удовл. условието от зад. 4

$$a^2.k^2 - n^2 + b^2 = a^2.\left(-\frac{x_0.b^2}{y_0.a^2}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{y_0}\right)^2 + b^2 =$$

$$= \frac{x_0^2.b^4}{y_0^2.a^2} - \frac{b^4}{y_0^2} + b^2 = b^2.\left(\frac{x_0^2.b^2}{y_0^2.a^2} - \frac{b^2}{y_0^2} + 1\right) =$$

$$= \frac{b^2}{y_0^2.a^2}\left(x_0^2b^2 + y_0^2.a^2 - a^2b^2\right) = 0$$ $\Rightarrow t_0$ е допирателна към $\mathcal{E}$ в т. M_0.

Оптично свойство на елипса



ОКС $K = Oxy$

$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$c^2 = a^2 - b^2$

$M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$

$t_0: \frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$ – доп. към $\mathcal{E}$ в т. M_0

$t_0 \cap Ox = N$

Ще докажем, че t_0 е външната ъглополовяща при връх M_0 на $\triangle F_1F_2M_0$, т.е. ще док., че:

$$\frac{|F_1M_0|}{|F_2M_0|} = \frac{|F_1N|}{|F_2N|}$$

Доказателство:

$F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, $N\left(\frac{a^2}{x_0}, 0\right) = t_0 \cap Ox$

$\overrightarrow{F_1N}\left(\frac{a^2}{x_0} + c, 0\right) \Rightarrow |\overrightarrow{F_1N}| = \left|\frac{a^2 + c \cdot x_0}{x_0}\right|$

$\overrightarrow{F_2N}\left(\frac{a^2}{x_0} - c, 0\right) \Rightarrow |\overrightarrow{F_2N}| = \left|\frac{a^2 - c \cdot x_0}{x_0}\right|$

$$\frac{|\overrightarrow{F_1N}|}{|\overrightarrow{F_2N}|} = \frac{|a^2 + c \cdot x_0|}{|a^2 - c \cdot x_0|} \quad (1)$$

$\overrightarrow{F_1M_0}(x_0+c, y_0) \Rightarrow |\overrightarrow{F_1M_0}|^2 = (x_0+c)^2 + y_0^2$

$M_0 \in \mathcal{E} \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ и $a^2 - b^2 = c^2$, $y_0^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x_0^2$

$$|\overrightarrow{F_1M_0}|^2 = x_0^2 + 2c.x_0 + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x_0^2 =$$

$$= x_0^2 . \frac{(a^2 - b^2)}{a^2} + 2c.x_0 + a^2 = x_0^2 . \frac{c^2}{a^2} + 2.c.x_0 + a^2$$

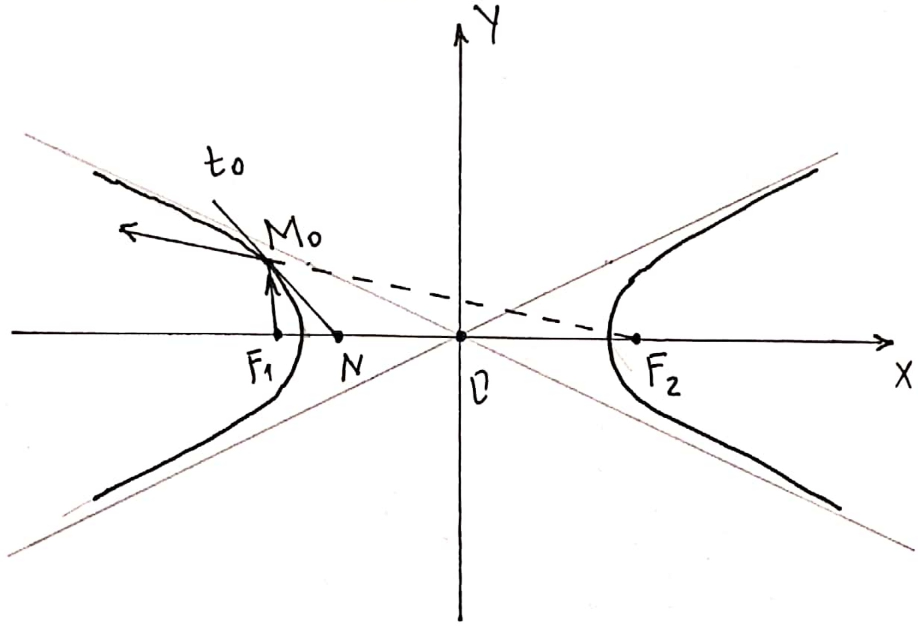
$$|\overrightarrow{F_1M_0}|^2 = \frac{a^4 + 2a^2.c.x_0 + c^2.x_0^2}{a^2}$$

$$|\overrightarrow{F_1M_0}| = \left|\frac{a^2 + c.x_0}{a}\right|$$

$$|\overrightarrow{F_2M_0}| = \left|\frac{a^2 - c.x_0}{a}\right|$$

$$\Rightarrow \frac{|\overrightarrow{F_1M_0}|}{|\overrightarrow{F_2M_0}|} = \frac{|a^2 + c.x_0|}{|a^2 - c.x_0|} \quad (2)$$

От (1) и (2) $\Rightarrow$ t_0 е ъглополовяща ...



Оптично свойство на хипербола

$\chi : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $c^2 = a^2 + b^2$

$F_1(-c; 0)$
$F_2(c; 0)$ - фокуси на хиперболата

$M_0(x_0, y_0) \in \chi$

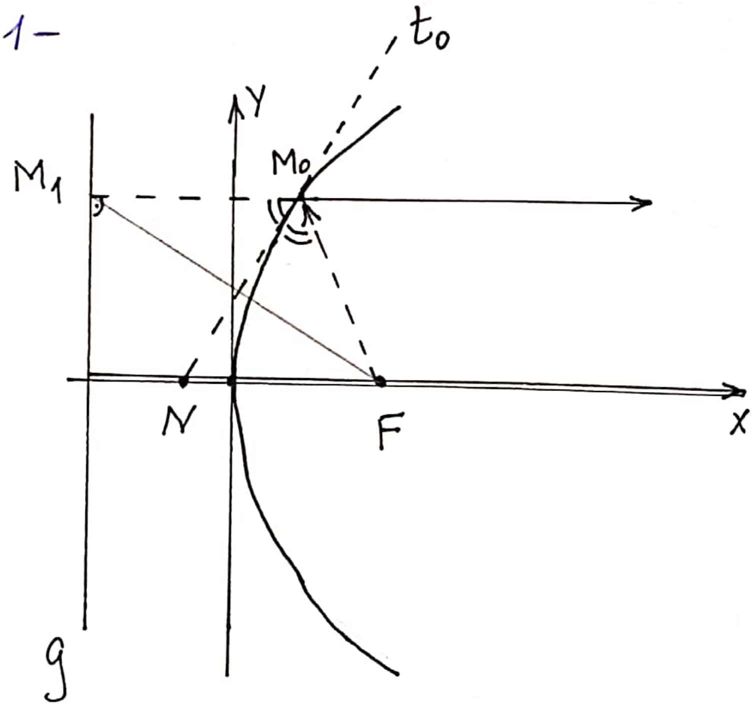
$t_0 : \frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$

$N = t_0 \cap Ox \Rightarrow N\left(\frac{a^2}{x_0}, 0\right)$

Правата t_0 е вътрешна ъглополовяща при върха M_0 на $\triangle F_1F_2M_0$.

изпълнено е: $\frac{|\overrightarrow{F_1M_0}|}{|\overrightarrow{F_2M_0}|} = \frac{|\overrightarrow{F_1N}|}{|\overrightarrow{F_2N}|}$

Оптично свойство на парабола



$\Pi: y^2 = 2.p.x$

$M_0(x_0, y_0) \in \Pi$

$M_1 =$ орт. пр.$_g M_0$

$g: x = -\frac{p}{2}$

$M_1(-\frac{p}{2}, y_0)$

$t_0: y.y_0 = p.(x + x_0)$

Ще докажем, че t_0 е височина (ъглополовяща и медиана) в $\triangle FM_0M_1$, т.е. ще док., че $t_0 \perp \overrightarrow{FM_1}$

Доказателство:

1. $F(\frac{p}{2}, 0)$, $M_1(\frac{-p}{2}, y_0)$ $\Rightarrow \overrightarrow{FM_1}(-p, y_0)$

2. общо уравнение на t_0:

$t_0: p.x - y_0.y + p.x_0 = 0 \Rightarrow A = p,\ B = -y_0,\ C = p.x_0$

$t_0 \parallel \vec{t_0}(-B, A) \Rightarrow \vec{t_0}(y_0, p)$

3. $(\overrightarrow{FM_1} . \vec{t_0}) = (-p).y_0 + y_0.p = 0 \Rightarrow t_0 \perp FM_1$