Метрични канонични уравнения на кривите от II степен

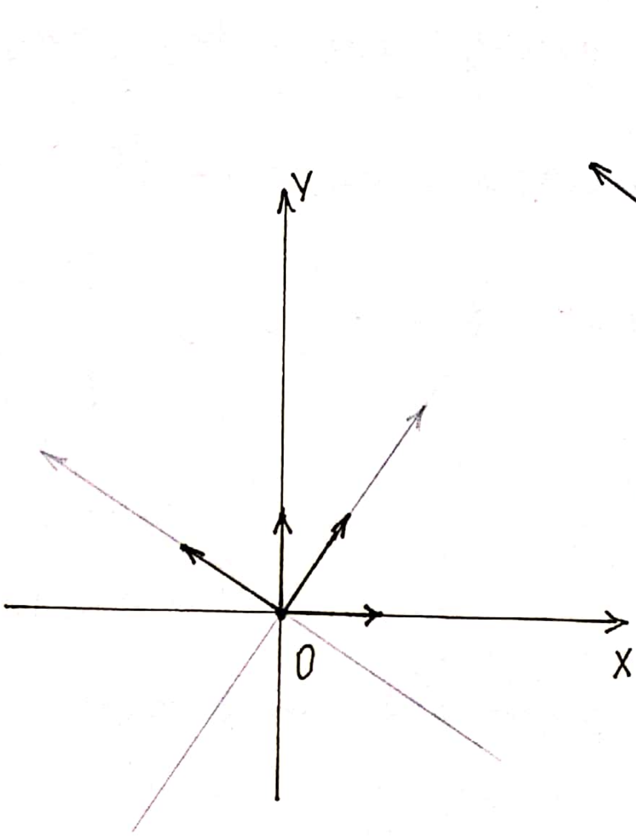
Задача: ОКС $K = Oxy = O\vec{e}_1\vec{e}_2$

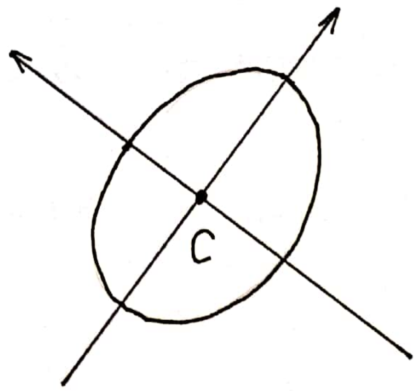
$k: 5.x^2 + 8xy + 5y^2 - 18.x - 18.y + 9 = 0$

а) Да се намери метрично канонично уравнение на кривата k и последователните координатни трансформации, които водят до него.

* * *

Търсим нова ОКС, която е геометрично свързана с кривата k. За целта ще намерим направленията на осите на k (главни направл.) и центъра (или върха) на k.





$K: \underset{a_{11}}{5}x^2 + \underset{2.a_{12}}{8}xy + \underset{a_{22}}{5}.y^2 - \underset{2a_{13}}{18}x - \underset{2a_{23}}{18}.y + \underset{a_{33}}{9} = 0$

I Разглеждаме матрицата $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Търсим „нова" векторна база, спрямо която матрицата A да е в диагонален вид:

$$\underset{\text{спр. } \vec{e}_1 \vec{e}_2}{A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}} \longrightarrow \underset{\text{спр. } \vec{b}_1 \vec{b}_2}{A' = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix}}$$

s_1 и s_2 са собствените стойности на A

$\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ са собствените вектори на A

$A.\vec{b} = s.\vec{b}$ или ако $\vec{b}(\alpha, \beta)$

$A.\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = s.\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A - s.E).\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$

Системата (1) има решение $(\alpha; \beta) \neq (0; 0) \Leftrightarrow$

$|A - s.E| = 0$ – характеристично уравнение на A

$\begin{vmatrix} 5-s & 4 \\ 4 & 5-s \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ винаги има реални корени

$(5-s)^2 - 4^2 = 0$

$(5-s+4).(5-s-4) = 0$

$s_1 = 9 \quad s_2 = 1$ – собствени стойности на A

1 сл. Ако $S_1 . S_2 > 0$, то кривата к е от елиптичен тип;

Очакваме к да има метрично канонично уравнение от вида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

2 сл. Ако $S_1 . S_2 < 0$, к е от хиперболичен тип

Очакваме $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

3 сл. Ако $S_1 = 0$, $S_2 \neq 0$, к е от параболичен тип

Очакваме $y^2 = 2p . x$

* * *

Търсим собствените вектори на A

За $S_1 = 9 \Rightarrow \vec{b}_1 (\alpha_1 ; \beta_1)$, $|\vec{b}_1| = 1 \Leftrightarrow \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1$

$$(A - 9.E) . \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5-9 & 4 \\ 4 & 5-9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{l} -4\alpha_1 + 4\beta_1 = 0 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \alpha_1 = \beta_1 \\ 2.\alpha_1^2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

За $S_1 = 9 \Rightarrow \vec{b}_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

За $S_2 = 1 \Rightarrow \vec{b}_2 (\alpha_2, \beta_2)$, $|\vec{b}_2| = 1 \Leftrightarrow \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 5-1 & 4 \\ 4 & 5-1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \alpha_2 + \beta_2 = 0 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \vec{b}_2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

За $s_1 = 9 \Rightarrow \vec{b}_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

За $s_2 = 1 \Rightarrow \vec{b}_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Извършваме смяна на ОКС:

$K = O\vec{e}_1\vec{e}_2 \xrightarrow{T_1} K' = O\vec{b}_1\vec{b}_2$: $Ox' \uparrow\uparrow \vec{b}_1$

$Oy' \uparrow\uparrow \vec{b}_2$

Нека т. $M(x,y)$ спр. K и $M(x',y')$ спр. K'

$$T_1: \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x' - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x' + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y' \end{cases}$$

Спрямо $K' = O\vec{b}_1\vec{b}_2 = Ox'y'$ $A' = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow a'_{11} = 9$, $a'_{12} = 0$, $a'_{22} = \underline{1}$

Уравнението на кривата k спр. $K' = Ox'y'$ е:

$$k: 9x'^2 + 1 \cdot y'^2 - 18 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x' - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y'\right) - 18 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x' + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y'\right) + 9 = 0$$

$$k: 9x'^2 + y'^2 - 18 \cdot \sqrt{2} \cdot x' + 9 = 0 \quad (*)$$

Полученото уравнение не е метрично канонично, защото т. O не съвпада с центъра C на кривата k.

II Търсим координатите на т. $C(p,q)$

Извършваме смяна на ОКС:

$K' = Ox'y' \xrightarrow{T_2} K'' = Cx''y''$: $Cx'' \uparrow\uparrow Ox'$

$Cy'' \uparrow\uparrow Oy'$

Нека $M(x', y')$ спр. K' и $M(x'', y'')$ спр. K''

$$T_2 : \begin{cases} x' = x'' + p \\ y' = y'' + q \end{cases} \rightarrow \text{заместваме в уравн. } (*)$$

$$k: 9.(x''+p)^2 + (y''+q)^2 - 18.\sqrt{2}.(x''+p) + 9 = 0$$

$$k: 9.(x'')^2 + (y'')^2 + x''.\underbrace{(18p - 18.\sqrt{2})}_{0} + y''.\underbrace{(2q)}_{0} + 9p^2 + q^2 - 18\sqrt{2}p + 9 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 18p - 18\sqrt{2} = 0 \\ 2q = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} p = \sqrt{2} \\ q = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{центъра } C(\sqrt{2}, 0) \text{ спр. } K'$$

Пресмятаме свободния член:

$$9p^2 + q^2 - 18.\sqrt{2}.p + 9 = 9.(\sqrt{2})^2 + 0^2 - 18.\sqrt{2}.\sqrt{2} + 9 = -9$$

$$k: 9.(x'')^2 + (y'')^2 = 9 \ / : 9$$

$$k: \frac{(x'')^2}{1^2} + \frac{(y'')^2}{3^2} = 1$$

$a = 1$, $b = 3$

б) Да се намерят координатите на фокусите F_1 и F_2 на елипсата к спр. $K = Oxy$

1) координати спр. $K'' = Cx''y''$

$a = 1,\ b = 3 \Rightarrow c^2 = b^2 - a^2 = 9 - 1 = 8 \Rightarrow c = 2.\sqrt{2}$

Голямата ос $2b = 2.3$ е по $Cy'' \Rightarrow F_1$ и $F_2 \in Cy''$

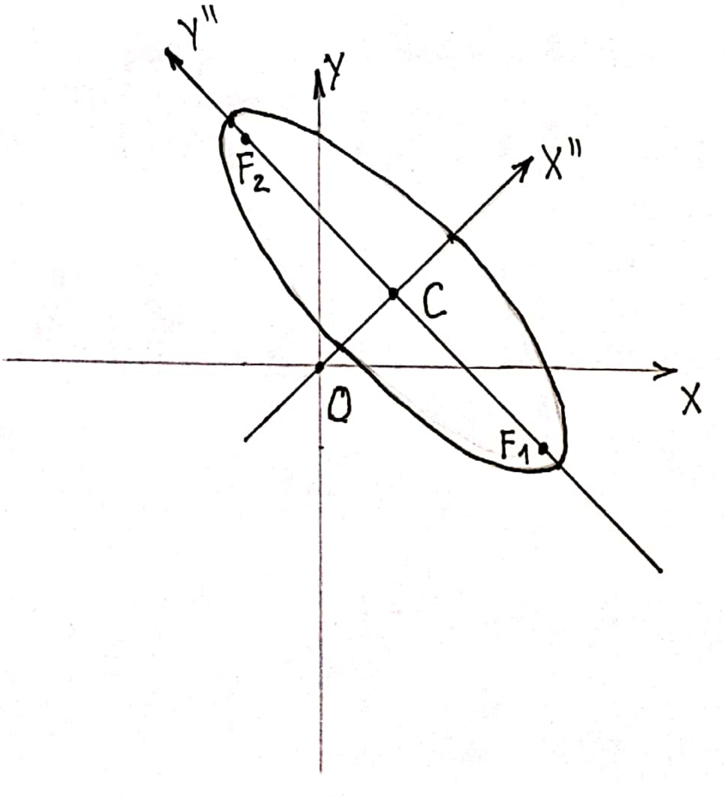
$F_1(\underset{x''}{\underset{\shortparallel}{0}}; \underset{y''}{\underset{\shortparallel}{-2.\sqrt{2}}})$ $F_2(\underset{x''}{\underset{\shortparallel}{0}}; \underset{y''}{\underset{\shortparallel}{2.\sqrt{2}}})$ спр. K''

$$F_1 \xrightarrow{T_2} \begin{cases} x' = x'' + \sqrt{2} = \sqrt{2} \\ y' = y'' = -2\sqrt{2} \end{cases} \xrightarrow{T_1} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.(-2.\sqrt{2}) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.(-2\sqrt{2}) \end{cases}$$

$F_1(3, -1)$ спр. K

$$F_2 \xrightarrow{T_2} \begin{cases} x' = 0 + \sqrt{2} = \sqrt{2} \\ y' = 2.\sqrt{2} \end{cases} \xrightarrow{T_1} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.(2.\sqrt{2}) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.(2.\sqrt{2}) \end{cases}$$

$F_2(-1, 3)$ спр. K



Задача: ОКС $K = Oxy$

$$K: \underset{\overset{\shortparallel}{a_{11}}}{9}.x^2 - \underset{\overset{\shortparallel}{2a_{12}}}{24}.x.y + \underset{\overset{\shortparallel}{a_{22}}}{16}.y^2 - 10.x - 70.y + 125 = 0$$

I Матрица от коефициентите пред вторите степени

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}$$

1) Търсим собствени стойности s_1 и s_2 на A:

$$\begin{vmatrix} 9-s & -12 \\ -12 & 16-s \end{vmatrix} = 0 \qquad (9-s).(16-s) - 144 = 0$$

$$s^2 - 25.s = 0$$

$$s.(s-25) = 0 \Rightarrow s_1 = 0,\ s_2 = 25 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ кривата k е от параболичен тип.

2) Търсим собствените вектори $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ на A:

За $s_1 = 0 \Rightarrow \vec{b}_1(\alpha_1, \beta_1)$, $|\vec{b}_1| = 1 \Leftrightarrow \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 9-0 & -12 \\ -12 & 16-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 9\alpha_1 - 12\beta_1 = 0 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 = \frac{4}{3} \cdot \beta_1 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{b}_1\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

За $s_2 = 25 \Rightarrow \vec{b}_2(\alpha_2, \beta_2)$: $|\vec{b}_2| = 1$

$$\begin{pmatrix} 9-25 & -12 \\ -12 & 16-25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -16.\alpha_2 - 12.\beta_2 = 0 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{-3}{4} . \beta_2$$

За $s_1 = 0 \Rightarrow \vec{b}_1\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

За $s_2 = 25 \Rightarrow \vec{b}_2\left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

3) Смяна на ОКС $K = O_{xy} \xrightarrow{T_1} K' = O_{x'y'}$:

$$O_{x'} \uparrow\uparrow \vec{b}_1 \qquad \Rightarrow$$
$$O_{y'} \uparrow\uparrow \vec{b}_2$$

$$T_1: \begin{cases} x = \frac{4}{5} \cdot x' - \frac{3}{5} \cdot y' \\ y = \frac{3}{5} \cdot x' + \frac{4}{5} \cdot y' \end{cases}$$

Спрямо K' имаме $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow a'_{11} = 0$, $a'_{12} = 0$, $a'_{22} = 25$

Уравнението на кривата к спр. $K' = O_{x'y'}$:

$$k: 0 \cdot x'^2 + 0 \cdot x' \cdot y' + 25 \cdot y'^2 - 10 \cdot \left(\frac{4}{5} \cdot x' - \frac{3}{5} \cdot y'\right) - 70 \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot x' + \frac{4}{5} \cdot y'\right) + 125 = 0$$

$$k: 25 \cdot y'^2 - 50 \cdot x' - 50 \cdot y' + 125 = 0 \ /: 25$$

$$k: y'^2 - 2 \cdot x' - 2y' + 5 = 0 \quad (**)$$

II Метрично канонично уравнение на парабола има вида: $y^2 = 2p \cdot x$ и се получава, когато върхът на параболата V съвпада с началото на к.с.

Търсим т. $V(p,q)$ - връх на параболата k

Извършваме смяна на ОКС

$$K' = O_{x'y'} \xrightarrow{T_2} K'' = V_{x''y''} : \quad Vx'' \uparrow\uparrow Ox'$$
$$Vy'' \uparrow\uparrow Oy'$$

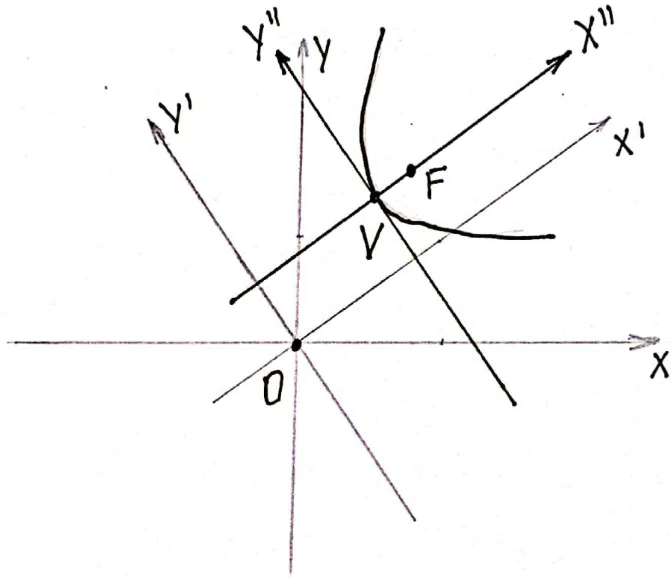
$$T_2 : \begin{cases} x' = x'' + p \\ y' = y'' + q \end{cases} \to (*)$$

$$k : (y''+q)^2 - 2.(x''+p) - 2.(y''+q) + 5 = 0$$

$$k : y''^2 - 2x'' + y''.\underbrace{(2q-2)}_{=0} + \underbrace{q^2 - 2p - 2q + 5}_{=0} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2q - 1 = 0 \\ q^2 - 2p - 2q + 5 = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} q = 1 \\ p = 2 \end{vmatrix} \quad V(2;1) \text{ спр. } K'$$

Окончателно: $k : y''^2 = 2x''$



$F(\frac{1}{2}, 0)$ - фокус спр. K''