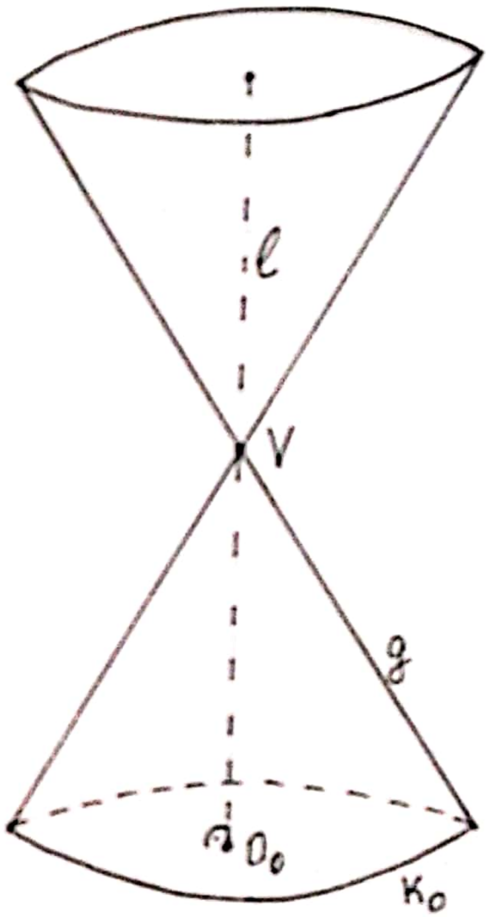
Конични сечения

I Разглеждаме



- $k_0(O_0; R)$ - окръжност;
- $l \begin{cases} \ni O \\ \perp k_0 \end{cases}$ - права;
- т. V - точка от l;
- $g \begin{cases} \ni V \\ \text{пресича } k_0 \end{cases}$

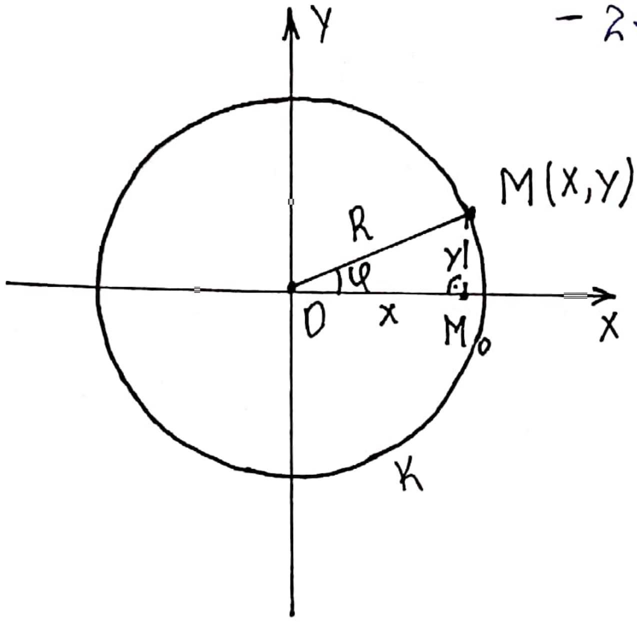
  g - образувателна;
- Повърхнината S, която се състои от всички образувателни g е прав кръгов конус с връх V и ос l;
- Окръжността k_0 се нарича управителна крива за конуса S.

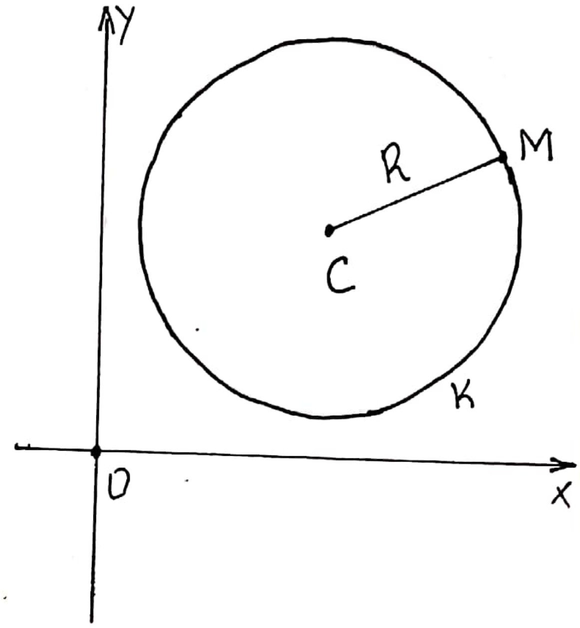
Разглеждаме сечения на конуса S с равнини, които не минават през върха V:

1. Нека $\alpha_1 \perp l$

   $S \cap \alpha_1 = k(O; R)$ - окръжност

   Аналитично задаване на окръжност спрямо равнинна ОКС $K = Oxy$





Окръжността $k(O;R)$ е геометричното място (ГМ) на всички точки $M(x,y)$ от равнината, за които $|OM| = R$, т.е.

$M(x,y) \in k \Leftrightarrow |OM| = R$

$\vec{OM}(x,y) \Rightarrow |\vec{OM}|^2 = x^2 + y^2$

$M \in k(O;R) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = R^2$

$k: x^2 + y^2 = R^2$ - централно уравнение на окръжност

* * *

Разгл. $\triangle OMM_0$:

$x = R.\cos\varphi$

$y = R.\sin\varphi$

$$k: \begin{cases} x = R.\cos\varphi \\ y = R.\sin\varphi \end{cases}, \quad R > 0, \text{const.}, \quad \varphi \in (0;2\pi]$$

координатни параметрични

Нека $k(C;R)$

т. $C(p,q)$ спр. $K = Oxy$

$\vec{CM}(x-p, y-q)$

$k: (x-p)^2 + (y-q)^2 = R^2$ - уравнение на окръжност

* * *

Координатни параметрични уравнения на окръжност $k(C;R)$

$$k: \begin{cases} x = p + R.\cos\varphi \\ y = q + R.\sin\varphi \end{cases}, \quad \varphi \in (0;2\pi]$$

2. Нека $\alpha_2 \not\parallel l$. α_2 пресича всички образувателни на конуса S.

$S \cap \alpha_2 = \mathcal{E}$ - елипса

$\mathcal{E}: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ - метрично канонично уравнение на елипса спр. $K = Oxy$

$$\mathcal{E}: \begin{cases} x = a.\cos\varphi \\ y = b.\sin\varphi \end{cases}, \varphi \in (0; 2\pi]$$

коорд. парам. уравнения на елипса $\mathcal{E}$ с център т. $O(0;0)$

$$\mathcal{E}: \begin{cases} x = p + a.\cos\varphi \\ y = q + b.\sin\varphi \end{cases}, \varphi \in (0; 2\pi] \rightarrow \mathcal{E} \text{ с център } C(p;q)$$

* * *

3. Нека α_3 е успоредна на две образувателни на конуса S.

$S \cap \alpha_3 = \chi$ - хипербола

$\chi: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ - метрично канонично уравнение на хипербола спр. $K = Oxy$

$$\chi: \begin{cases} x = a.\operatorname{ch} q \\ y = b.\operatorname{sh} q \end{cases}, q \in \mathbb{R}$$ - координатни параметрични уравнения на хипербола

$$ch\, q = \cosh q = \frac{e^{q} + e^{-q}}{2}$$
$$sh\, q = \sinh q = \frac{e^{q} - e^{-q}}{2} \Rightarrow ch^2 q - sh^2 q = 1$$

* * *

4. Нека α_4 е успоредна на една образуват. на конуса S.

$S \cap \alpha_4 = \Pi$ – парабола

$\Pi_1 : y^2 = 2.p.x$ или $\Pi_2 : x^2 = 2p.y$ спр. Oxy

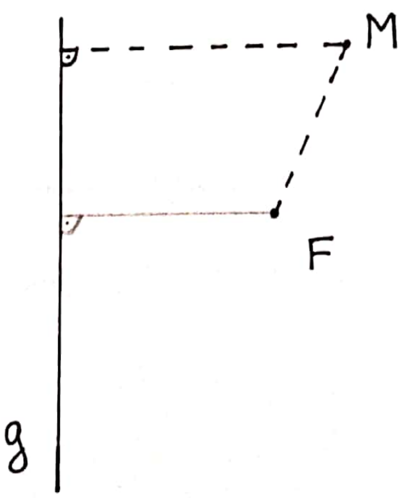
$$\Pi_1 : \begin{cases} x = \frac{q^2}{2p} \\ y = q \end{cases}, q \in \mathbb{R}$$

* * *

II Конични сечения

Задаване с фокус F и директриса g

$F \notin g$, $|\delta(F, g)| = p$



Търсим ГМТ от равнината

$$\frac{|FM|}{|\delta(M,g)|} = e = const.$$

Резултати: 1. Ако $e<1$, т.е. $e \in (0;1)$, търсеното ГМТ е елипса;

2. Ако $e>1$, търсеното ГМТ е хипербола;

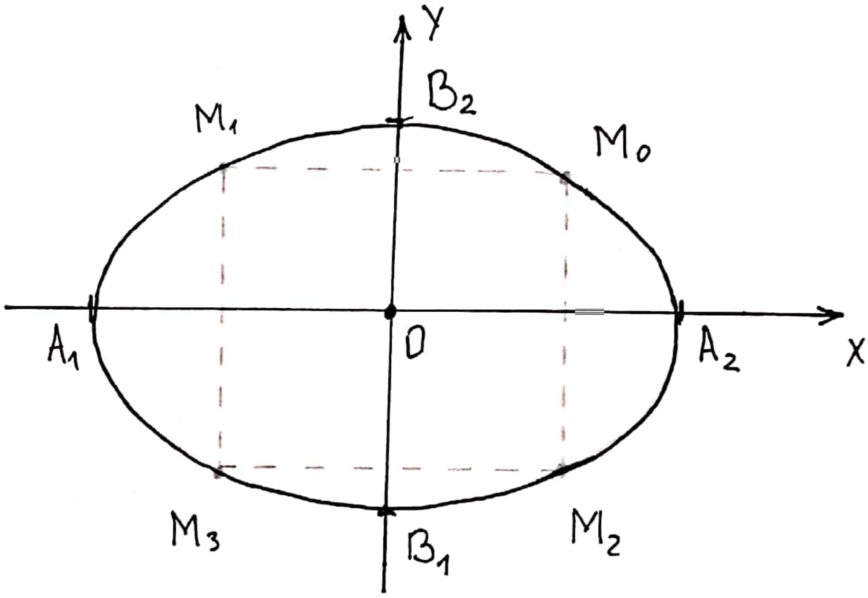
3. Ако $e=1$, търсеното ГМТ е парабола.

* * *

III Елипса

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$a>b>0$$



1. Симетрии

Ако т. $M_0(x_0,y_0) \in \mathcal{E}$, т.е. $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$, то

$M_1(-x_0,y_0) \in \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E}$ е симетрична отн. Oy

$M_2(x_0,-y_0) \in \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E}$ е симетрична отн. Ox

$M_3(-x_0,-y_0) \in \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E}$ е симетрична отн. т. O

Извод: Осите Ox и Oy са единствените оси на симетрия за $\mathcal{E}$.

т. O е единственият център на симетрия за $\mathcal{E}$

2. Върхове и върхови допирателни

$$\mathcal{E} \cap Ox = ? \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm a$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} \cap Ox = \{A_1; A_2\} : A_1(-a, 0) \text{ и } A_2(a; 0)$$

$$\mathcal{E} \cap Oy = ? \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y_{1,2} = \pm b$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} \cap Oy = \{B_1, B_2\} : B_1(0; -b) \text{ и } B_2(0; b)$$

Върхови допирателни:

$$t_1 \begin{cases} \ni A_1(-a, 0) \\ \parallel Oy \end{cases} \Rightarrow t_1 : x = -a$$

$$t_2 \begin{cases} \ni A_2(a; 0) \\ \parallel Oy \end{cases} \Rightarrow t_2 : x = a$$

$$t_3 \begin{cases} \ni B_1(0, -b) \\ \parallel Ox \end{cases} \Rightarrow t_3 : y = -b$$

$$t_4 \begin{cases} \ni B_2(0; b) \\ \parallel Ox \end{cases} \Rightarrow t_4 : y = b$$

3. Разположение. Интервали за x и y

От $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x^2 = (b^2 - y^2) \cdot \dfrac{a^2}{b^2} \geq 0 \Rightarrow y \in [-b; b]$

$$y^2 = (a^2 - x^2) \cdot \dfrac{b^2}{a^2} \geq 0 \Rightarrow x \in [-a; a]$$

Елипсата $\mathcal{E}$ е разположена във вътрешността на правоъгълник със страни $2a$ и $2b$

При $a > b > 0$, $|A_1A_2| = 2a$ – голяма ос на $\mathcal{E}$

$|B_1B_2| = 2b$ – малка ос на $\mathcal{E}$

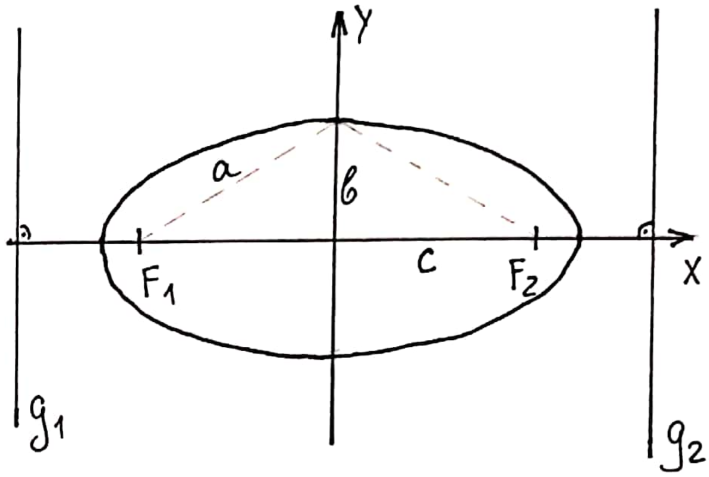
При $b > a > 0$, $|A_1A_2| = 2a$ – малка ос на $\mathcal{E}$

$|B_1B_2| = 2b$ – голяма ос на $\mathcal{E}$

4. Фокуси и директриси на елипса

1сл. При $a > b$

$$c^2 = a^2 - b^2$$



F_1 и F_2 лежат на голямата ос на $\mathcal{E}$

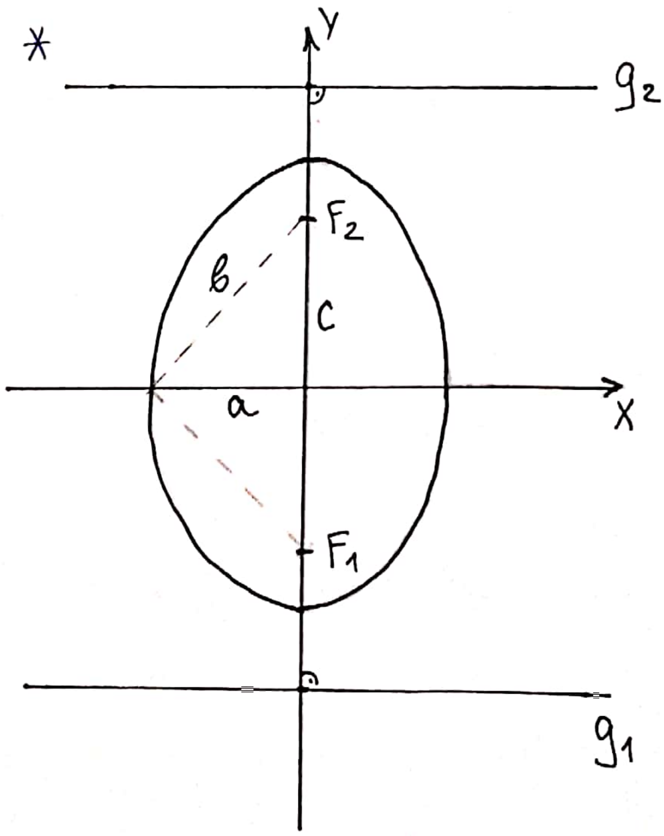
$F_1(-c, 0) \to g_1 : x = \dfrac{-a^2}{c}$

$F_2(c; 0) \to g_2 : x = \dfrac{a^2}{c}$

* * *

2сл. При $a < b$

$$c^2 = b^2 - a^2$$



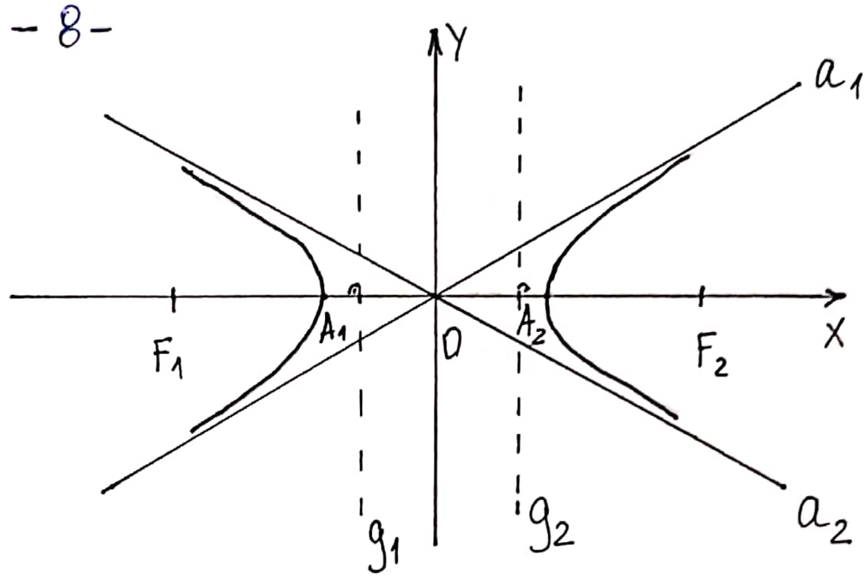
F_1 и F_2 лежат на голямата ос на $\mathcal{E}$

$F_1(0; -c) \to g_1 : y = \dfrac{-b^2}{c}$

$F_2(0; c) \to g_2 : y = \dfrac{b^2}{c}$

IV Хипербола

$$\chi : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



1. Симетрии:

отн. Ox, Oy и т. O;

2. Върхове:

$\chi \cap Ox = \{A_1; A_2\}$ $\quad A_1(-a;0)$ $\quad$ Ox е реална ос на хиперболата χ.

$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ $\quad A_2(a;0)$

$t_1: x = -a$
$t_2: x = a$ – върхови допирателни

$\chi \cap Oy = \varnothing$ $\quad \Rightarrow$ Oy е имагинерна ос на хиперболата χ

$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$

! фокусите на χ винаги лежат на нейната реална ос.

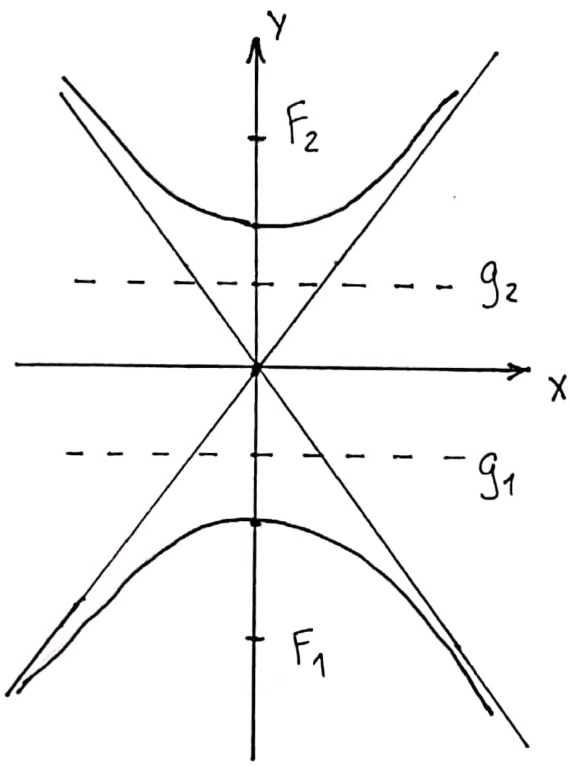
3. Интервали за x и y:

От $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x^2 = \dfrac{a^2}{b^2} \cdot (b^2 + y^2) \Rightarrow y \in \mathbb{R}$

$y^2 = \dfrac{b^2}{a^2} \cdot (x^2 - a^2) \geq 0 \iff x \in (-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$

4. Фокуси и директриси на хипербола

1. сл. $\chi_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



$c^2 = a^2 + b^2$

$F_1, F_2 \in Ox$ – реалната ос

$F_1(-c; 0)$ $F_2(c; 0)$

$g_1: x = \frac{-a^2}{c}$; $g_2: x = \frac{a^2}{c}$

2 сл. $\chi_2: \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

$c^2 = a^2 + b^2$

$F_1, F_2 \in Oy$ – реалната ос

$F_1(0; -c) \rightarrow g_1: y = \frac{-b^2}{c}$

$F_2(0; c) \rightarrow g_2: y = \frac{b^2}{c}$

* * *

5. Асимптоти на хипербола:

От $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}$

$y_1 = f_1(x) = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}$

$a: y = k.x + n$ – наклонена асимптота, ако същ.

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f_1(x)}{x} = k \Rightarrow \dots \quad k = \frac{b}{a}$

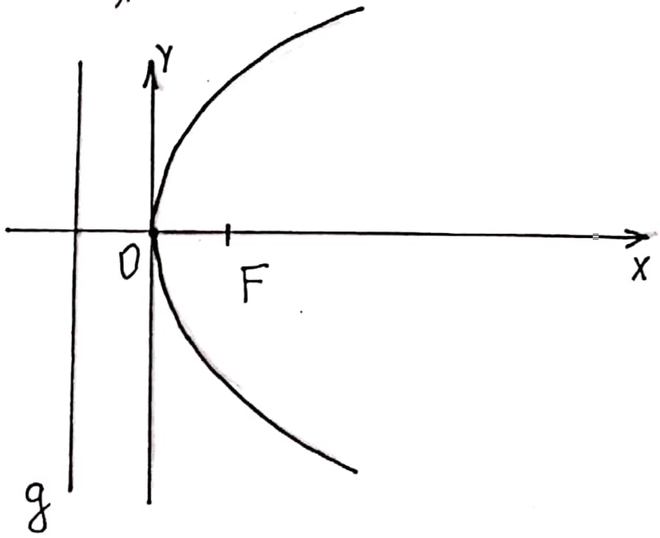
$\lim\limits_{x \to \infty} (f_1(x) - k.x) = n \Rightarrow \dots \quad n = 0$

Извод: Уравненията на асимптотите на χ

$$a_1: y = \frac{b}{a}\cdot x \quad \text{и} \quad a_2: y = -\frac{b}{a}\cdot x$$

* * *

V Парабола:



$\Pi_1: y^2 = 2p.x$

т. O – връх

Ox – ос на симетрия

Oy – върхова допирателна

$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ – фокус

$g: x = -\frac{p}{2}$ – директриса

$\Pi_2: x^2 = 2p.y$

т. O – връх

Oy – ос на симетрия

Ox – върхова допирателна

$F\left(0; \frac{p}{2}\right)$ – фокус

$g: y = -\frac{p}{2}$ – директриса