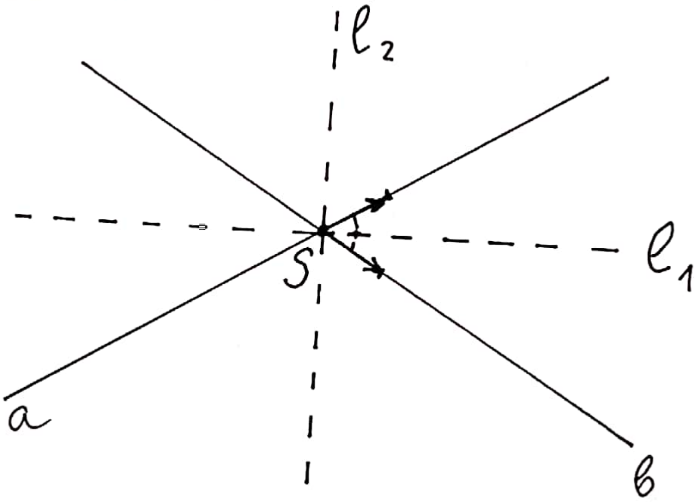
# Уравнения на права в равнината
## II част

## I Уравнения на ъглополовящи на ъгли между две прави.




$a \cap b = \text{т. } S$

$a \parallel \vec{a} \parallel \vec{a}_1 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$b \parallel \vec{b} \parallel \vec{b}_1 = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

$l_1 \begin{cases} \ni \text{т. } S \\ \parallel (\vec{a}_1 + \vec{b}_1) \end{cases}$  $l_2 : \begin{cases} \ni \text{т. } S \\ \parallel (\vec{a}_1 - \vec{b}_1) \end{cases}$

Ъглополовяща на остър и тъп ъгъл

Критерий: Ако $(\vec{a}_1 . \vec{b}_1) > 0$, то $\sphericalangle(\vec{a}_1, \vec{b}_1)$ е остър. Тогава
$l_1$ е ъглоп. на острия ъгъл м/у $a$ и $b$
$l_2$ е ъглоп. на тъпия ъгъл м/у $a$ и $b$

Ако $(\vec{a}_1 . \vec{b}_1) < 0$, то $\sphericalangle(\vec{a}_1, \vec{b}_1)$ е тъп. Тогава
$l_1$ е ъглоп. на тъпия ъгъл м/у $a$ и $b$
$l_2$ е ъглоп. на острия ъгъл м/у $a$ и $b$

1 зад. ОКС $K = Oxy$

$a: 3x - 4y + 5 = 0$

$b: 4x - 3y - 5 = 0$

Да се намерят уравнения на ъглополовящите $\ell_1$ и $\ell_2$ на ъглите между $a$ и $b$.

Да се определи коя от $\ell_1$ и $\ell_2$ е ъглополовяща на остър и коя на тъп ъгъл.

Решение:

1) $a \parallel \vec{a}(4;3)$, $|\vec{a}| = 5 \Rightarrow a \parallel \vec{a}_1\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

$b \parallel \vec{b}(3;4)$, $|\vec{b}| = 5 \Rightarrow b \parallel \vec{b}_1\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

2) т. $S = a \cap b$

$$\left| \begin{array}{l} 3x - 4y + 5 = 0 \\ 4x - 3y - 5 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{т. } S(5;5)$$

3) $\ell_1 \begin{cases} \ni S \\ \parallel (\vec{a}_1 + \vec{b}_1)\left(\frac{7}{5}, \frac{7}{5}\right) \end{cases} \Rightarrow \ell_1: \begin{cases} x = 5 + \frac{7}{5} \cdot s \\ y = 5 + \frac{7}{5} \cdot s \end{cases} s \in \mathbb{R}$

$\ell_1: x - y = 0$

$\ell_2 \begin{cases} \ni S \\ \parallel (\vec{a}_1 - \vec{b}_1)\left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right) \end{cases} \Rightarrow \ell_2: \begin{cases} x = 5 + \frac{1}{5} \cdot p \\ y = 5 - \frac{1}{5} \cdot p \end{cases}, p \in \mathbb{R}$

4) $(\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25} > 0$

$\Rightarrow \ell_1 \rightarrow$ остър

$\ell_2 \rightarrow$ тъп

$\ell_2: x + y - 10 = 0$

2 зад. (Упражнение) Същото условие за:

$a: x - 3y = 0$

$в: 3x - y + 8 = 0.$

* * *

## II. Нормално уравнение на права. Ориентирано разстояние от точка до права

ОКС $K = Oxy$

$g: A.x + B.y + C = 0 \Rightarrow \vec{n}_g(A, B)$

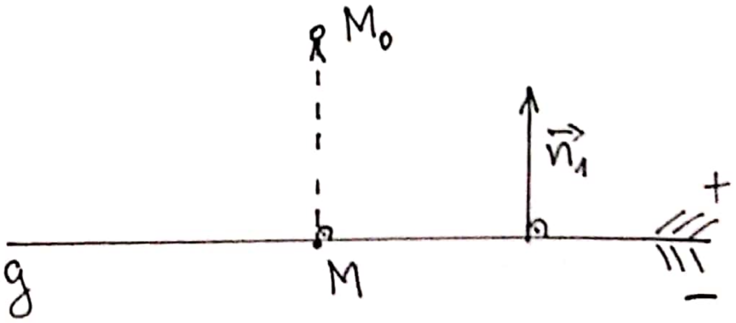
$(A, B) \neq (0, 0)$ $\qquad |\vec{n}_g| = \sqrt{A^2 + B^2}$

$$\vec{n}_1 = \frac{\vec{n}_g}{|\vec{n}_g|} \Rightarrow \vec{n}_1\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$$

$$g: \frac{A.x + B.y + C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$ – нормално уравнение на $g$

Разлеждаме $g$

и т. $M_0(x_0, y_0)$




$\overrightarrow{MM_0} \parallel \vec{n}_1 \Rightarrow \exists!\ \delta:$

$\overrightarrow{MM_0} = \delta . \vec{n}_1$

$$\delta(M_0, g) = \frac{A.x_0 + B y_0 + C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

↓

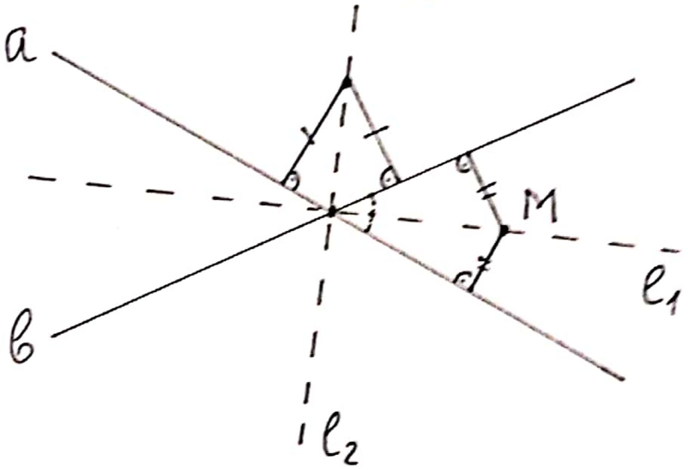
ориентирано разстояние от $M_0$ до $g$

$\delta(M_0, g) > 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_0} \uparrow\uparrow \vec{n}_1$

$\delta(M_0, g) < 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_0} \uparrow\downarrow \vec{n}_1$

II н. Уравнения на ъглополовящи чрез нормални уравнения на правите $a$ и $b$:

$$a: \frac{A_1.x + B_1.y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = 0 \quad ; \quad b: \frac{A_2.x + B_2.y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0$$




т. $M \in l_{1,2} \iff$

$$|\delta(M,a)| = |\delta(M,b)|$$

$$\delta(M,a) = \pm\, \delta(M,b)$$

$$l_{1,2}: \ \delta(M,a) \pm \delta(M,b) = 0$$

Пример: 1 зад.

$a: 3x - 4y + 5 = 0 \to$ общо у-ние $\Rightarrow a: \dfrac{3.x - 4y + 5}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0$

$b: 4x - 3y - 5 = 0$ – общо $\Rightarrow b: \dfrac{4x - 3y - 5}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0$

$$l_{1,2}: \ \frac{3x - 4y + 5}{5} \pm \frac{4x - 3y - 5}{5} = 0$$

$$l_1(-): \ \frac{-x - y + 10}{5} = 0 \ /.(-5) \Rightarrow l_1: \ x + y - 10 = 0$$

$$l_2(+): \ \frac{7x - 7y}{5} = 0 \ /.\frac{5}{7} \Rightarrow l_2: \ x - y = 0$$

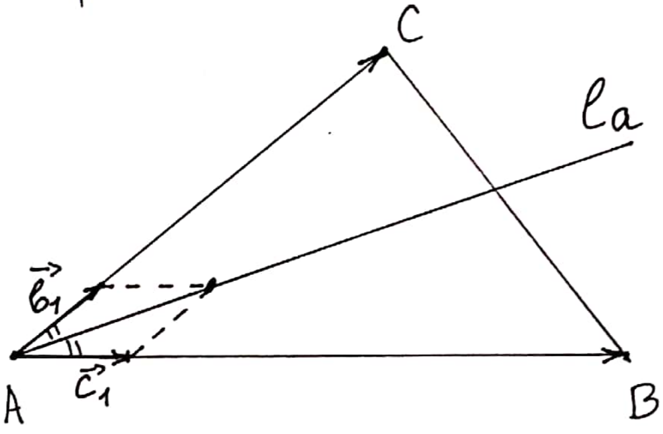
Този начин може да се използва за прави в равнината и равнини в пространството.

**3 зад.** ОКС $K = Oxy$

$A(1,2)$, $B(-1,3)$, $C(5,4)$

Да се намери уравнение на ъглополовящата на вътрешния ъгъл при $A$ на $\triangle ABC$.

Решение:




$l_a$ - търсената ъглополовяща

$l_a \ni A$

$l_a \parallel (\vec{b_1} + \vec{c_1})$:

$$\vec{b_1} = \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}, \quad \vec{c_1} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$$

$$\vec{AC}(4,2) \Rightarrow |\vec{AC}| = \sqrt{20} = 2.\sqrt{5} \Rightarrow \vec{b_1}\left(\frac{4}{2.\sqrt{5}}, \frac{2}{2.\sqrt{5}}\right)$$

$$\vec{AB}(-2,1) \Rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{5} \qquad \Rightarrow \vec{c_1}\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{b_1} + \vec{c_1}\left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$l_A \begin{cases} \ni A(1,2) \\ \parallel \vec{e_2}(0,1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{l_A : x = 1}$$

* * *

**4 зад.** (Упражнение) $A(1,-2)$, $B(2,0)$, $C\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Да се намерят координатите на центъра и дължината на радиуса на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност.

Отг: т. $O_1\left(1, -\frac{1}{3}\right)$, $r = \frac{\sqrt{5}}{3}$

## III Полуравнини. Разположение на точки

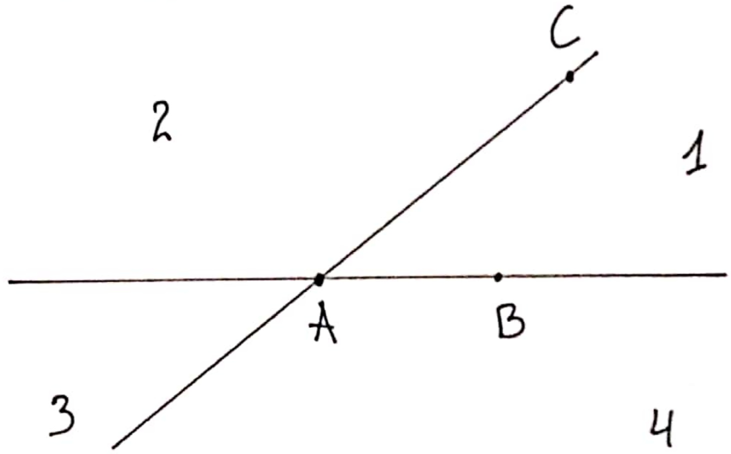
/5 зад. произволна АКС $K = Oxy$

$A(2,-2)$, $B(1,3)$, $C(5,4)$

а) Правите $AB$ и $AC$ разделят равнината на 4 области, означени с 1, 2, 3 и 4. Определете в коя от тези области лежи т. $S(6,5)$.

(!) Намерете по една точка във всяка от област.

Решение:




1) Пишем общи уравнения на $AB$ и $AC$

$AB: 5x+y-8=0$ (?)

$AC: 2x-y-6=0$ (?)

2) Дали т. $S \in AB$, $S \in AC$? $S(6,5)$

$\ell_{AB} = 5x+y-8 \Rightarrow \ell_{AB}(S) = 5.6+5-8 = 27 \neq 0 \Rightarrow S \notin AB$

$\ell_{AC} = 2x-y-6 \Rightarrow \ell_{AC}(S) = 2.6-5-6 = 1 \neq 0 \Rightarrow S \notin AC$

3) Разгл. правата $AB$ и точки $C$ и $S$

$\ell_{AB}(C) . \ell_{AB}(S) = (5.5+4-8).27 > 0 \Rightarrow C$ и $S$ са от една полуравнина спр. $AB \Rightarrow S \in 1$ или $S \in 2$

4) $AC$ и точки $B$ и $S \Rightarrow \ell_{AC}(B) . \ell_{AC}(S) = (2.1-3-6).1 < 0 \Rightarrow$

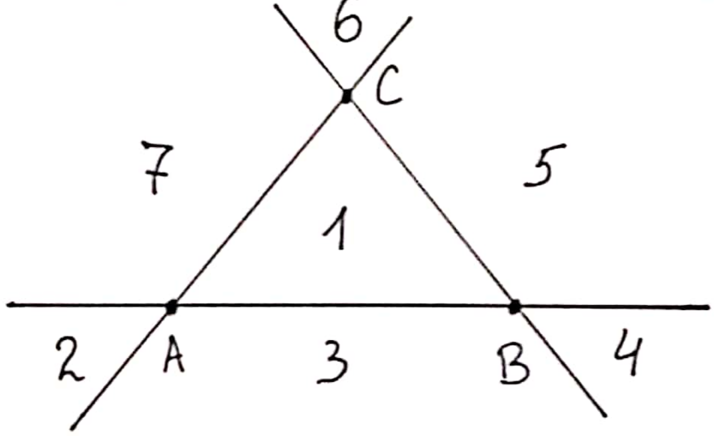
$B$ и $S$ са от различни полуравнини спр. $AC \Rightarrow S \in 2$ или $S \in 3$

(!)

б) $A(2,-2)$, $B(1,3)$, $C(5,4)$

Правите AB, AC и BC разделят равнината на 7 области. Определете в коя от тях лежи т. $X(1,1)$.

Решение:




1) $AB: 5x+y-8=0$

$AC: 2x-y-6=0$

$BC: x-4y+11=0$

2) AB и точки C и X

$\ell_{AB}(C) . \ell_{AB}(X) = (5.5+4-8).(5.1+1-8) = 21.(-2) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow S \in 2, 3, 4$

3) AC и точки B и X

$\ell_{AC}(B) . \ell_{AC}(X) = (2.1-3-6).(2.1-1-6) = (-7).(-5) \Rightarrow$

$\Rightarrow S \in 3, 4$

3) BC и точки A и X

$\ell_{BC}(A) . \ell_{BC}(X) = (2-4.(-2)+11).(1-4.1+11) = 21.8 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow S \in 3$

* * *

6 зад. (Упражнение) Определете дали четириъгълникът ABCD е изпъкнал, ако:

а) $A(2,-2)$, $B(1,3)$, $C(5,4)$, $D(6,5)$;

б) $A(2,-2)$, $B(1,3)$, $C(5,4)$, $D(1,1)$;

Въпроси: 1) В коя област (от 1 до 7) трябва да лежи D, за да е изпъкнал ABCD?

2) → б)