Формулата за оценка е 2 + брой точки. Време за работа: 4 часа. Успех.

Задача 1. Асен и петима негови приятели всеки ден играят футбол, като се разделят по равномерно случаен начин на два отбора по трима души. Колко е математическото очакване и дисперсията на броя дни до първия път, когато:

1. (0.25 т.) Асен е в отбор с 2-мата най-добри от приятелите си?
2. (0.25 т.) се разделят на отбори, на които вече са се делили в предишен ден?
3. (0.5 т.) вече са играли във всички възможни комбинации помежду си?

Задача 2. Борис и Валя се разбират да се срещнат пред ФМИ. Нека времената, които отнема на всеки от тях да стигнат до мястото на срещата са независимо експоненциално разпределени със средно 10 минути.

1. (0.25 т.) Колко е вероятността (може да закръглите с точност 0.01) първият от тях да се появи след по-малко от 10 минути, а следващият 1 минута след него?
2. (0.25 т.) Намерете число x, такова че вероятността и двамата да стигнат след поне x минути да бъде 50%.
3. (0.25 т.) Каква е вероятността (приблизително с точност 0.01) след 100 такива уговорки, Борис да е пристигал по-рано в поне 55 от случаите?
4. (0.5 т.) Колко е очакването, дисперсията и плътносттна на случайната величина, равна на времето (в минути), които първият пристигнал ще изчака до пристигането на втория?

Задача 3.

1. (0.5 т.) Нека Ω е множество с 10 елемента. По колко начина можем да изберем негови три подмножества $A, B, C \subset \Omega$, така че да е изпълнено равенството
$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1 + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)?$$
2. (0.5 т.) Нека Ω е множеството от ненамаляващи функции от $\{1, \ldots, 10\}$ в $\{1, \ldots, 20\}$. Каква е вероятостта равномерно случаен негов елемент да бъде строго растяща функция?

Задача 4. Нека X и Y са независими $Exp(1)$ сл. вел. и $Z := \sqrt{X/Y}$.

1. (0.5 т.) Намерете функцията на разпределение F_Z и използвайки я, очакването $\mathbb{E}Z$.
2. (0.5 т.) Изразете $\mathbb{E}Z$ чрез съвместната плътност на X и Y. Заключете, че $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.[1]

(бонус 0.5 т.) Намерете границата

$$\lim_{n \to \infty} e^{-n} \left(\frac{n^1}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \ldots \frac{n^n}{n!} \right).$$

[1] Гама-функцията на Ойлер се дефинира чрез $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t$ и изпълнява $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.