Функции на моментите

Дефиниция: (функция на моментите): Нека X е случайна величина и $\mathbb{E}[e^{tX}]$ е добре дефинирана за $|t| < \epsilon$ за някое $\epsilon > 0$. Тогава $M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$ се нарича функция на моментите на X за $|t| < \epsilon$.

Дефиниция: (k-ти момент): Нека X е случайна величина. Ако $\mathbb{E}[X^k]$ съществува, $\mathbb{E}[X^k]$ се нарича k-ти момент на X.

- Ако k-тия абсолютен момент съществува, тоест $\mathbb{E}[\ |X|^k\ ] < \infty$, то $\mathbb{E}[X^k]$ съществува

Дефиниция: (централен момент): Нека X е случайна величина и k-тия момент на X съществува. Тогава $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^k]$ е k-тия централен момент на X.

Забележка: Ако k-тия момент на X съществува, то i-тия централен момент на X също съществува за $i = \overline{1, k}$.

Свойства: Нека X е случайна величина и M_X е функцията на моментите на X.

- $M_X(0) = 1$
- $M_X(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k}{k!}\mathbb{E}[X^k]$
- $M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}[X^k]$
- $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$
- $Y = aX + b \Longrightarrow M_Y(t) = e^{bt}M_X(at)$
- $X \overset{d}{=} Y \Longleftrightarrow M_X(t) = M_Y(t)$
- $\lim\limits_{n\to\infty} M_{X_n}(t) = M_X(t)$ за всяко $|t| < \epsilon \Longrightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$

Доказателство:

- $M_X(0) = \mathbb{E}[e^{0X}] = \mathbb{E}[1] = 1$
- $M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \mathbb{E}[\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k}{k!}X^k] = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k}{k!}\mathbb{E}[X^k]$
- $M_X^{(n)}(t) = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k}{k!}\mathbb{E}[X^k] = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\dfrac{t^k}{k!}\mathbb{E}[X^k] \Longrightarrow$
  $M_X^{(n)}(0) = 1 \cdot \mathbb{E}[X^k] + \sum\limits_{k=0}^{\infty} 0 = \mathbb{E}[X^k]$

- $M_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[e^{t(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{tX}e^{tY}] \overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \mathbb{E}[e^{tX}]\mathbb{E}[e^{tY}] = M_X(t)M_Y(t)$
  Или чрез разписване на инетграла, представляващ очакването.
- $M_Y(t) = \mathbb{E}[e^{t(aX+b)}] = \mathbb{E}[e^{atX}e^{bt}] = \mathbb{E}[e^{atX}]e^{bt} = M_X(at)e^{bt}$