Оценката Ви ще е равна на 1 + броя точки, които получите. Успех.

Ще считаме, че навсякъде работим върху вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *За удобство, дефинираме* $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Ако не е посочено изрично друго, ще считаме, че* $n, k, i \in \mathbb{N}$.

Задача 1. Недоброжелател изпраща фишинг имейл към преподавател. За по-голяма сигурност, през случайно време X в следващия един ден, т.е.

$$X \sim U(0,1), \quad f_X(x) = \mathbb{1}_{\{x \in [0,1]\}} = \begin{cases} 1, & \text{ако } 0 \le x \le 1; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

прикрива всички свои следи, но и губи възможността да се възползва. Преподавателят от своя страна отговаря за независимо от X експоненциално време със средно 2 дни, т.е.

$$Y \sim Exp(1/2), \quad f_Y(x) = \frac{1}{2} e^{-x/2} \mathbb{1}_{\{x \ge 0\}} = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x/2}, & \text{ако } x \ge 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

1. (0.75 т.) Каква е вероятността хакът да е успешен? Приблизително каква част от хаковете ще са успешни при голям брой опити?
   - Търси се
   $$p := \mathbb{P}\left(X < Y\right) = \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{2} e^{-y/2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \,,$$
   което се смята лесно. От ЗГЧ (допълнете за кои сл. вел. и изпълнени ли са условията, за да е сила), частта успешни е p.
2. (0.25 т.) Каква е вероятността хакерът да се възползва от фишинга , ако преподавателят е отговорил след точно 12 часа?

Търси се $\mathbb{P}(Y < X | X = 1/2) = \mathbb{P}(Y < 1/2)$. Тук имаше идея да се ползва условна плътност, но реално е ненужно.

Задача 2. По две от страните на правилен зар са оцветени в съответно бяло, зелено и червено. Хвърляме този зар два пъти. Нека X е броят на падналите се бели, а Y - на падналите се червени страни. Намерете:

1. (0.5 т.) съвместното разпределение и корелацията на X и Y. Независими ли са?
2. (0.25 т.) $\mathbb{P}(X = 1 | Y = 1)$;
3. (0.25 т.) $\mathbb{P}(X > Y)$.

- \-

Задача 3. Броят катастрофи всеки ден в България може да се моделира с независими Поасонови случайни величини $X_1, X_2, ...$ с еднакъв параметър $\lambda = 10$, т.е. за $k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \,.$$

Нека със S_n означим общия брой катастрофи за n дена, т.е. $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. (0.25 т.) Намерете математическото очакване и дисперсия на S_n.
   - $\mathbb{E} S_n = D S_n = n\lambda$, т.к. X_i са нез. и $\mathbb{E} X_i = D X_i = \lambda$
2. (0.75 т.) Покажете, че ако T е общият брой тежки катастрофи 2021-ва година, то
   $$\mathbb{P}(3529 \le T \le 3771) \approx 0.954 \,,$$
   като обосновете прецизно това приближение.

• Стандартно чрез ЦГТ, като трябваше да отбележите изрично, че условията за нея са в сила, т.е. $\mathbb{E} X_i^2 < \infty$

Задача 4. $n > 2$ човека хвърлят честна монета. Победител е този, който хвърли обратното на всички други. Ако такъв няма, играчите хвърлят отново.

1. (0.25 т.) Нека X е броят кръгове до излъчването на победител. Какво са очакването и дисперсията на X?

   • За да има победител, трябва някой да хвърли ези и другите тура или обратното. Вероятността за това е $p_n := n/2^{n-1}$ (защо?). $X \sim Ge(p_n)$ и значи $\mathbb{E}X = 1/p_n$ и $DX = 1/p_n^2$

2. (0.75 т.) Да предположим, че след излъчването на първи победител, играта продължава докато останат двама играчи. [1] Колко е броят на очакваните ходове? Ако k-тият победител печели $100(n-k)$, колко най-много бихте платили, за да участвате в тази игра?

   • Играта се повтаря, но с $(n-1)$ души и т.н.. Опишете добре, че в такъв случай очакваният брой ходове е $1/p_n + 1/p_{n-1} + \ldots + 1/p_3$.

   Очакваната печалба на всички играчи е равна по симетрия, а общо раздадените пари са $100\left((n-1)+(n-2)+\cdots+2\right)$, така че очакваната печалба на всеки е тази сума делена на n.

   • Не се изискваше, но последната сума очевидно може да се сметне

   $$100\left((n-1)+(n-2)+\cdots+2\right) = 100\left(\frac{n(n-1)}{2} - 1\right),$$

   а асимтотичното поведение на другата (кликайте спокойно) е нетривиално и е $2^n/n$.

Задача 5. Ентусиаст събира албум със стикери за Евро 2020 (през 2021), като броят на различните е $n := 500$. Той може да закупи случаен стикер. Целта ни ще е да анализираме сл. вел. X, обозначаваща бройката стикери, които трябва да закупи, докато събере всички различни.

1. (0.5 т.) Нека $X_1 = 1$ и дефинираме сл. вел $X_i =$ "купените стикери до получаването на i-тия различен вкл., след като сме попаднали на $(i-1)$-вия различен" за $i = 2, \ldots, n$.

   Например, ако ни се паднат стикери с номера $\mathbf{5}, \mathbf{12}, 5, \mathbf{111}, 12, 111, 5, \mathbf{13}$, то $X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 2, X_4 = 4$. Какво е разпределението на X_i? Намерете $\mathbb{E}X$.

   • $X_2 \sim Ge(499/500)$, т.к. с вероятност $499/500$ ще видим нов стикер и с 1 минус нея, началния. $X_3 \sim Ge(498/500)$ и т.н. Довършете.

2. (0.5 т.) Оценете вероятността колекционерът да трябва да купи поне $2n$ стикера, за да събере всички.

   • Чебишев.

   Последната е сравнително известна задача. Има я и в домашно 2 бонус. Ако се вгледате, може да забележите, че реално 4-та и 5-та са изключително сходни.

[1] Тоест играта се повтаря с останалите $(n-1)$ играчи и се излъчва втори победител, след това трети победител от играта с $(n-2)$-ма играчи и т.н.