Закон за големите числа и Централна гранична теорема

Дефиниция: (слаб ЗГЧ): Нека $(X_n)_{n\geq 1}$ е редица от случайни величини в едно вероятностно пространство и $\mathbb{E}[X_n]$ съществува за всяко $n \geq 1$. Тогава за редицата е в сила *слабия закон за големите числа* (СЗГЧ), ако

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}[X_i])}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$$

- $(X_n)_{n\geq 1}$ са еднакво разпределени, ако $X_n \overset{d}{=} X_1$
- $(X_n)_{n\geq 1}$ са независими (в съвкупност), ако всяка крайна редица е независима в съвкупност.
- $(X_n)_{n\geq 1}$ са независими и еднакво разпределени (iid), ако са изпълнени горните две условия

Теорема: (СЗГЧ): Нека $(X_n)_{n\geq 1}$ е редица от независими и еднакво разпределени случайни величини в едно вероятностно пространство и $\mathbb{E}[X_1]$ съществува. Тогава:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1]$$

Доказателство:

От дефиницията имаме $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}[X_i])}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mathbb{E}[X_1]}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - \mathbb{E}[X_1] \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$

Полагаме $Y_i = X_i - \mathbb{E}[X_i]$ и тогава $\mathbb{E}[Y_i] = 0$

Искаме да проверим дали за всяко $\epsilon > 0$ е изпълнено, че

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i}{n}\right| > \epsilon\right) = 0$$

$$
\begin{aligned}
0 \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i}{n}\right| > \epsilon\right) &= \\
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} Y_i\right| > n\epsilon\right) &= \\
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} Y_i - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[Y_i]\right| > n\epsilon\right) &= \\
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \mathbb{E}[Y_i])\right| > n\epsilon\right) &\overset{\text{Чебишов}}{\leq} \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{D}[\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i]}{n^2\epsilon^2} \quad \overset{iid}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n\mathbb{D}[Y_1]}{n^2\epsilon^2} = 0
\end{aligned}
$$

С което доказахме желаното.

Дефиниция: (усилен ЗГЧ): Нека $(X_n)_{n\geq 1}$ е редица от случайни величини в едно вероятностно пространство и $\mathbb{E}[X_n]$ съществува за всяко $n \geq 1$. Тогава за редицата е в сила *усиления закон за големите числа* (УЗГЧ) или просто *ЗГЧ*, ако $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}[X_i])}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с.}} 0$

- Ако $(X_n)_{n\geq 1}$ са еднакво разпределени, то казваме, че $(X_n)_{n\geq 1}$ изпълнява *ЗГЧ (силния)*, ако $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с.}} \mathbb{E}[X_1]$

Теорема: (УЗГЧ): Нека $(X_n)_{n\geq 1}$ е редица от независими и еднакво разпределени случайни величини в едно вероятностно пространство и $\mathbb{E}[X_1]$ съществува. Тогава за редицата е в сила *УЗГЧ*, тоест $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} \overset{\text{п.с.}}{=} \mathbb{E}[X_1]$

Доказателство:

Нека приемем, че $\mathbb{E}[X_1] = 0$ и $\mathrm{E}[X_1^4] < \infty$

Нека

$$
L = \left\{\omega \in \Omega \middle| \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i(\omega)}{n} = 0\right\}
$$

$$L=\bigcap_{r=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k\geq n}\left\{\omega\in\Omega \mid \left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}X_i(\omega)}{k}\right|\leq\frac{1}{r}\right\}$$

Целта ни е да докажем, че $\mathbb{P}(L)=1$

$$L^C=\bigcup_{r=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}B_{n,r}$$

, където

$$B_{n,r}=\bigcup_{k\geq n}\left\{\omega\in\Omega \mid \left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}X_i(\omega)}{k}\right|>\frac{1}{r}\right\}$$

Сега продължаваме:

$$\mathbb{P}(L^C)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{r=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}B_{n,r}\right)\leq\sum_{r=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_{n,r}\right)=\sum_{r=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(B_{n,r})$$

Понеже $B_{m+1,r}\subseteq B_{n,r}$ имаме:

$$\mathbb{P}(B_{n,r})\leq\sum_{k\geq n}\mathbb{P}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}X_i}{1}\geq\frac{k}{r}\right)\overset{(1)}{\leq}\sum_{k\geq n}\frac{r^4\mathbb{E}[|\sum\limits_{i=1}^{k}X_i|^4]}{k^4}$$

Уточнение: (1) : От следствието на неравенството на Чебишов, приложено за $n=4, a=\frac{k}{r}$

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{k}X_i\right)^4\right]\overset{iid}{=}k\mathbb{E}[X_1^4]+c\binom{k}{2}\mathbb{E}[X_1^2]$$

Тогава имаме:

$$\mathbb{P}(B_{n,r})=r^4\sum_{k\geq n}\frac{k\mathbb{E}[X_1^4]+c\binom{k}{2}\mathbb{E}[X_1^2]}{k^4}\leq r^4\mathbb{E}[X_1^4]\sum_{k\geq n}\frac{1}{k^3}+\frac{cr^4}{2}\sum_{k\geq n}\frac{k(k-1)}{k^4}$$

Понеже $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$ е сходящ ред, то $\sum\limits_{k\geq n}\frac{1}{k^3}\to 0$ при $n\to\infty$
Също $0\leq\sum\limits_{k\geq n}\frac{k(k-1)}{k^4}\leq\sum\limits_{k\geq n}\frac{1}{k^2}\to 0$ при $n\to\infty$

Получаваме:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_{n,r}) \leq r^4 \cdot \mathbb{E}[X_1^4] \cdot 0 + \frac{cr^4}{2} \cdot 0 = 0$$

Тогава $\mathbb{P}(L^C) = 0$ и $\mathbb{P}(L) = 1$

Теорема: (ЦГТ): Нека $(X_n)_{n\geq 1}$ е редица от независими и еднакво разпределени случайни величини в едно вероятностно пространство и $\mathbb{E}[X_1] = \mu$ и $\mathbb{D}[X_1] = \sigma^2$ съществуват. Тогава, ако $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} X_j$ е изпълнена централната гранична теорема и

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Тогава за всяко $x \in \mathbb{R} = C_\Phi = C_{F_Z}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \mathbb{P}(Z \leq x) = \Phi(x)$$

Доказателство:
Ще допуснем, че $M_{X_1}(t)$ е добре дефинирана за всяко $t \in \mathbb{R}$

Нека центрираме и нормираме X_i: $Y_i = \dfrac{X_i - \mu}{\sigma}$
Тогава $(Y_n)_{n\geq 1}$ е редица от независими и еднакво разпределени случайни величини и $\mathbb{E}[Y_1] = 0$ и $\mathbb{D}[Y_1] = 1$

Нека $V_n = \dfrac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i}{\sqrt{n}}$
Искаме да докажем, че $M_{V_n}(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ за всяко $t \in \mathbb{R}$

$$M_{V_n}(t) = M_{\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sqrt{n}}}(t) \overset{\text{свойство}}{=} M_{\sum_{i=1}^{n} Y_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \overset{iid}{=} \left[M_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$$

Сега да разгледаме

$$M_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \mathbb{E}[e^{\frac{t}{\sqrt{n}}Y_1}] \overset{\text{Тейлър}}{=}$$
$$\mathbb{E}[1 + \frac{t}{\sqrt{n}}Y_1 + \frac{t^2}{2!\cdot n}Y_1^2 + \frac{t^3}{3!\cdot n^{\frac{3}{2}}}Y_1^3 \cdot \Theta(Y_1)] =$$
$$1 + 0 + \frac{t^2}{2n} \cdot 1 + \frac{t^3}{6n^{\frac{3}{2}}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{\frac{t^2}{2n}}$$

Тогава

$$M_{V_n}(t) = \left[M_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{\frac{t^2}{2}} = M_Z(t)$$

Следствие: Нека $X \sim Bin(n,p)$ Тогава за всяко $a < b$

$$\mathbb{P}\left(a < \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right) \xrightarrow{n\to\infty} \Phi(b) - \Phi(a)$$