Точната формула за оценка се формира в зависимост от резултатите. За приблизителна, може да използвате 2 + брой точки. Време за работа: 3 часа. Успех.

С m, n, k ще бележим неотрицателни цели числа.

Задача 1. Нека X е случайна величина с функция на разпределение

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{за } x \leq 0; \\ ax^2 + bx, & \text{за } 0 < x \leq 1; \\ 1, & \text{за } x > 1. \end{cases}$$

1. (0.25 т.) Отговорете дали X е непрекъсната случайна величина, като изведете нейната плътност в случай, че смятате, че е такава.
2. (0.25 т.) Намерете константите a и b, ако знаете в допълнение, че $\mathbb{P}(X > 0.75) = 0.5$.
3. (0.25 т.) Ако очакването на случайна величина Y съществува, то за него е вярно, че

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y > t)\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^0 \mathbb{P}(Y \leq t)\mathrm{d}t.$$

   Докажете това равенство, ако знаете, че Y е непрекъсната случайна величина с плътност f_Y.
4. (0.25 т.) Използвайте горната формула, за да намерите очакването на X.

Задача 2. Нека $U_1, U_2, U_3 \sim U(0,1)$ са независими. Нека $U_{(1)}, U_{(2)}, U_{(3)}$ са наредените в нарастващ ред U_1, U_2 и U_3.

Например, ако дадена реализация е $U_1 = 0.23$, $U_2 = 0.88$, $U_3 = 0.1$, то $U_{(1)} = 0.1$, $U_{(2)} = 0.23$, $U_{(3)} = 0.88$.

1. (0.25 т.) Намерете плътностите и очакванията на $U_{(1)} := \min\{U_1, U_2, U_3\}$ и $U_{(3)} := \max\{U_1, U_2, U_3\}$.
2. (0.25 т.) Вярно ли е, че $U_{(2)} \sim U(0,1)$. Ако да, го докажете, а ако не - намерете разпределението му.
3. (0.25 т.) Намерете дисперсията на $X := -\ln(U_1)$.

Нека $X_1, X_2, X_3, X_4 \sim Exp(1)$ са независими.

4. (0.25 т.) Намерете плътностите, очакванията и дисперсиите на $S_2 := X_1 + X_2$, $S_3 := X_1 + X_2 + X_3$ и $S_4 := X_1 + \dots + X_4$.
5. (0.5 т.) Нека $Y_k := S_k / S_n$. Докажете, че $Y_{(k)}$ и $U_{(k)}$ имат еднакви разпределения за $k = 1, 2, 3$.

Задача 3.

1. (0.25 т.) В производството на специализирани автомобилни компоненти, дължината на определени детайли се измерва, и отклоненията от препоръчителната дължина се моделират с очакване 0 и дисперсия 9. Компонентът се счита за приемлив, ако отклонението от препоръчителната дължина е по-малко от зададен праг s. Определете какъв процент от грешките по дължина попадат в приемливия обхват, когато $s = 1$. Намерете стойността на s, при която 95% от компонентите отговарят на критериите за приемливост.
2. (0.5 т.) Нека $X \sim N(1,1)$. С точност 0.01, намерете $\mathbb{E}|X|$.

Задача 4. Равнината е разграфена на успоредни прави, като разстоянието между всеки две съседни е $2t$. Хвърляме върху нея игла с дължина $2l \leq 2t$, която се приземява на случайна позиция.

1. (0.5 т.) Каква е вероятността иглата да докосва някоя от правите?

   Упътване: Параметризирайте по позицията на центъра на иглата и ъгъла, който сключва с правите.
2. (0.25 т.) Да допуснем, че $l = t$. Колко най-малко игли би трябвало да хвърлим, независимо една от друга, така че с вероятност поне 95% поне половината от тях да пресичат права? Можете ли да обясните как хвърлянето на игли по описания горе начин би могло да ни даде оценка за π и защо?
3. *(0.25 т.) Бонус: Решете 1. в случая $l > t$.*