Видове непрекъснати разпределения

Равномерно разпределение

Казваме, че $X \sim U(a,b)$ е равномерно разпределена с $-\infty < a < b < \infty$, ако

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , \ a < x < b \\ 0 & , \quad \text{иначе} \end{cases}$$

Или написано по друг начин, $f_X(x) = \dfrac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}$

$\mathbb{E}[X] = \dfrac{b-a}{2}$

$\mathbb{E}[X^2] = \dfrac{b^2+ab+a^2}{3}$

$\mathbb{D}[X] = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

$F_X(x) = \int\limits_{\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\infty}^{\infty} \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & , \quad x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & , \ a < x \le b \\ 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$

Ако $Y = \dfrac{X-a}{b-a}$, то $Y \sim U(0,1)$ и $X = (b-a)Y + a$

Нормално разпределение

Казваме, че $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ е нормално разпределена с $\mu \in \mathbb{R}$ и $\sigma > 0$, ако за всяко $x \in \mathbb{R}$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\mathbb{E}[X] = \mu$
$\mathbb{E}[X^2] = \sigma^2 + \mu^2$
$\mathbb{D}[X] = \sigma^2$

$F_X(x) = \int\limits_{\infty}^{x} f_X(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$

Ако $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$, то $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ и $X = \sigma Z + \mu$

$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ - стандартно нормално разпределение
$F_Z(x) = \Phi(x)$
$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) = \overline{\Phi}(x)$
$F_X(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

$\mathbb{E}[Z] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} y e^{\frac{-y^2}{2}}\mathrm{d}y = 0$ - нечетна функция

$\mathbb{E}[Z^2] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{\frac{-y^2}{2}}\mathrm{d}y =?$

Чрез метода на Файнман:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y \\
\sqrt{2\pi}\sigma &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y \ \Bigg| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} \\
2\pi &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{2\sigma^3} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y \\
\sigma^3 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y \ \Bigg|_{\sigma=1}
\end{aligned}$$

$\mathbb{E}[Z^2] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{\frac{-y^2}{2}}\mathrm{d}y = 1$
$\mathbb{D}[Z] = 1$

Експоненциално разпределение

Казваме, че $X \sim Exp(\lambda)$ е експоненциално разпределена с $\lambda > 0$, ако

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ,\ x \geq 0 \\ 0 & ,\ x < 0 \end{cases}$$

$F_X(x) = \int\limits_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = 1 - e^{-\lambda x} = \mathbb{P}(X \leq x)$

$\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{\lambda}$, понеже

- $\int\limits_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty y e^{-y} \mathrm{d}y = 1$ - интегрираме плътност на $Exp(1)$
- По метода на Файнман от интеграл на плътността на $Exp(\lambda)$ и диференциране по λ

$\mathbb{D}[X] = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Твърдение: (безпаметност): Нека $X \sim Exp(\lambda)$. Тогава

$$\mathbb{P}(X > x + y | X > y) = \mathbb{P}(X > x)$$

- **Доказателство:**

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > x + y | X > y) &= \frac{\mathbb{P}(X > x + y \cap X > y)}{\mathbb{P}(X > y)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X > x + y)}{\mathbb{P}(X > y)} \\
&= \frac{1 - \mathbb{P}(X \leq x + y)}{1 - \mathbb{P}(X \leq y)} \\
&= \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(x+y)})}{1 - (1 - e^{-\lambda y})} \\
&= \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} \\
&= e^{-\lambda x} \\
&= 1 - (1 - e^{-\lambda x}) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X \leq x) \\
&= \mathbb{P}(X > x)
\end{aligned}$$