Условна вероятност

Дефиниция: (условна вероятност): Нека $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ е вероятностно пространство и $A \in \mathcal{A}$ е такова, че $\mathbb{P}(A) > 0$. Тогава може да дефинираме нова вероятност върху $(A, \mathcal{A} \cap A, \mathbb{P}_A)$ чрез

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

за всяко $B \in \mathcal{A}$

Дефиниция: (независимост): Две събития A, B се наричат независими, ако $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ и пишем $A \perp\!\!\!\perp B$

- Ако $\mathbb{P}(A) > 0$ и $A \perp\!\!\!\perp B$, то $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$

Дефиниция: (независимост в съвкупност): Нека имаме вероятностно пространство и $A_1, \ldots, A_n$ са събития в него. Казваме, че $A_1, \ldots, A_n$ са независими в съвкпупност, ако за всяко $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$, такова, че $|I| \geq 2$, е изпълнено:

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Теорема: Нека имаме вероятностно пространство и $A_1, \ldots, A_n$ са събития в него, за които е изпълнено, че $\mathbb{P}(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i) > 0$. Тогава е вярно, че

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}\left(A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cdot \mathbb{P}\left(A_{n-1} \middle| \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i\right) \cdots \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1)$$

- Доказателство по индукция

Теорема: Нека имаме вероятностно пространство и $A_1, \ldots, A_n$ са независими събития в него. Тогава е вярно, че $A_1^C, \ldots, A_n^C$ също са независими събития

- Доказателство по индукция

Дефиниция: (пълна група от събития): Групата от множества $H_1, H_2, \ldots, H_n$ се нарича пълна група от събития, ако за всеки различни $1 \leq i < j \leq n$ е изпълнено, че $H_i \cap H_j = \emptyset$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$

Теорема: (формула за пълната вероятност): Нека $H_1, \ldots, H_n$ са пълна група от събития в Ω и $A \in \mathcal{A}$. Тогава

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)$$

- **Доказателство**:
  Имаме, че

  $$A = A \cap \Omega = A \cap \bigcup_{i=1}^{n} H_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap H_i)$$

  Тогава

  $$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap H_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)$$

Теорема: (формула на Бейс): Нека $H_1, \ldots, H_n$ са пълна група от събития в Ω и $A \in \mathcal{A}$, като $\mathbb{P}(A) > 0$. Тогава за всяко $1 \leq k \leq n$ е изпълнено, че

$$\mathbb{P}(H_k|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_k)\mathbb{P}(H_k)}{\mathbb{P}(A)}$$

- **Доказателство**:
  Имаме, че $\mathbb{P}(A \cap H_k) = \mathbb{P}(A|H_k) \cdot \mathbb{P}(H_k)$ и $\mathbb{P}(A \cap H_k) = \mathbb{P}(H_k|A) \cdot \mathbb{P}(A)$
  Тогава имаме,че

  $$\mathbb{P}(H_k|A) = \frac{\mathbb{P}(H_k \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|H_k)\mathbb{P}(H_k)}{\mathbb{P}(A)}$$