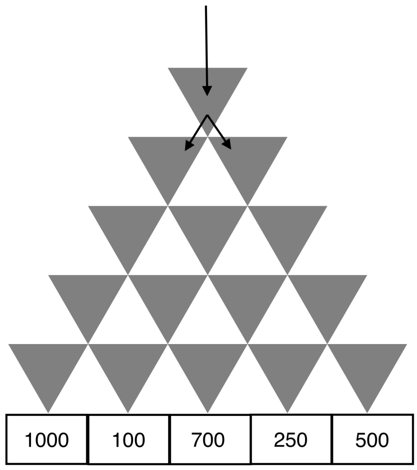
*Точната формула за оценка се формира в зависимост от резултатите. За приблизителна, може да използвате 2 + брой точки. Време за работа: 3 часа. Успех.*

*Ще считаме, че навсякъде работим върху вероятностно пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

**Задача 1.** Играч в „Треска за злато” [1] пуска топче в пирамидата на късмета в най-горния триъгълник, като то пада в един от долните два с равна вероятност.




1. (0.5 т.) Каква е разпределението и очакваната печалба при едно пускане?
2. (0.5 т.) Ако регламентът е, че имате право да пускате топчета докато някое попадне при печалба 1000лв, колко средно топчета ще пуснете? Колко ще е очакваната Ви печалба?
3. (0.5 т.) При началната наредеба водещият Ви предлага да пермутира случайно печалбите. Бихте ли се съгласили или бихте останали с началното разпределение? А как бихте наредили печалбите, ако имахте тази възможност?

Поради различни аномалии се усъмнявате, че топчето пада вляво/вдясно с равна вероятност. Нека $p$ е вероятността да се отклони наляво.

4. (0.25 т.) Пускате 3 топчета и те се озовават при печалба 100 лв. Кое е това $p$, за което това е най-вероятно?
5. (0.5 т.) Получавате информация, че предаването разполага с две пирамиди: една с $p = 1/2$ и една с $p = 1/3$. Тъй като не знаете коя използват в момента, можете да приемете, че вероятността е равна за коя да е от тях. Ако при две пускания топчетата се озовават по средата (700 лв), каква е апостериорната вероятност да е избрана машината с $p = 1/3$

**Задача 2.** (1 т.) Някои от стандартните разпределения, с които сме се запознали са $Ber(p)$, $Bin(n,p)$, $Ge(p)$, $Poi(\lambda)$.

Нека $X_1$ и $X_2$ са независими и еднакво разпределени случайни величини с някой от горните закони (т.е. имаме 4 различни възможности). Изпълнено ли е, че $X_1X_2$ или $X_1 + X_2$ имат същия тип разпределение като $X_1$ (евентуално с други параметри)? Аргументирайте се напълно.

Ако отговорът е не във всички случаи, можете ли да дадете пример, в който имаме подобна ситуация?

**Задача 3.** Нека $X_1, X_2$ и $X_3$ са независими и еднакво разпределени сл. вел. с очакване $\mu$ и дисперсия $\sigma^2$. Страничен наблюдател иска да оцени очакването $\mathbb{E}f := \mathbb{E}f(X_1, X_2, X_3)$, но вижда една тяхна реализация: $(x_1, x_2, x_3)$. Една възможност е да оцени $\mathbb{E}f$ чрез $f(x_1, x_2, x_3)$. Друга такава е да опита изкуствено да увеличи наблюденията си, като разгледа и допълнителни три наредби $(x_2, x_1, x_3), (x_3, x_2, x_1)$ и $(x_1, x_3, x_2)$ и осредни резултата и по тях. Преценете има ли разлика в точността на оценките от двете процедури, като пресметнете съответните очаквани стойности и дисперсии, ако:

1. (0.1 т.) $f(X_1, X_2, X_3) = X_1 + X_2 + X_3$;
2. (0.2 т.) $f(X_1, X_2, X_3) = X_1 + X_2 - X_3$;
3. (0.7 т.) $f(X_1, X_2, X_3) = X_1X_2 - X_3$.

*Пример: При наблюдение* $(3, 8, 1)$*, за функцията в точка 3, едната оценка е* $3 \cdot 8 - 1 = 23$*, а другата, след добавянето на* $(8, 3, 1), (1, 8, 3)$ *и* $(3, 1, 8)$ *е* $((3 \cdot 8 - 1) + (8 \cdot 3 - 1) + (1 \cdot 8 - 3) + (3 \cdot 1 - 8))/4 = 11.5$

[1] https://bit.ly/3nRl2pG, https://bit.ly/3Bc0bjO.