Условно математическо очакване

Дефиниция: (условно очакване): Нека X, Y са две случайни величини. Тогава $\mathbb{E}[X|Y] = G^*(Y)$, което минимизира $\mathbb{E}[(X - G(Y))^2]$, където G е произволна функция.Тоест

$$\min_G \mathbb{E}[(X - G(Y))^2] = \mathbb{E}[(X - G^*(Y))^2] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|Y])^2]$$

$$\mathbb{E}[X|Y] = \sum_k \frac{\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{A_k}]}{p_k} \cdot \mathbb{1}_{A_k}$$

Където $A_k = \{Y = y_k\}$ и $p_k = \mathbb{P}(A_k)$

Ако $X = \mathbb{1}_B$ имаме, че $\mathbb{E}[X|Y] = \sum_k \mathbb{P}(B|A_k) \cdot \mathbb{1}_{A_k}$

Също $\mathbb{E}[X|Y] = \sum_k \mathbb{E}[X|Y = y_k] \cdot \mathbb{1}_{A_k}$

Формулата:

Имаме, че $Y = \sum_k y_k \mathbb{1}_{A_k}$
Нека $G(Y) = \sum_k a_k \mathbb{1}_{A_k}$
Тогава $f(a) = \mathbb{E}[(X - G(Y))^2] = \mathbb{E}[(X - \sum_k a_k \mathbb{1}_{A_k})^2]$
Интересуваме се от $\min_a f(a) \Leftrightarrow \left\{ \frac{\partial}{\partial a_j} f(a) = 0 \right.$
Откъдето получаваме, че $a_k = \frac{\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{A_k}]}{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_k}]}$
Окончателно: $\mathbb{E}[X|Y] = \sum_k \frac{\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{A_k}]}{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_k}]} \cdot \mathbb{1}_{A_k}$

Дефиниция: (очакване при дадена стойност): Нека X, Y са две случайни величини, където Y е дискретна. Тогава условното очакване на X при зададена стойност на $Y = y_k$ се разбира

$$\mathbb{E}[X|Y = y_k] = \sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i | Y = y_k)$$

Тогава таблицата на разпределение на случайната величина $\mathbb{E}[X|Y]$ е:

$\mathbb{E}[X\|Y]$	$\mathbb{E}[X\|Y = y_1]$	$\mathbb{E}[X\|Y = y_2]$	$\ldots$	$\mathbb{E}[X\|Y = y_n]$
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Твърдение: Нека X, Y, Z са случайни величини, където Y е дискретна. Тогава

- $\mathbb{E}[aX + bZ|Y] = a\mathbb{E}[X|Y] + b\mathbb{E}[Z|Y]$
- $X \perp Y \Rightarrow \mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$
- $X = f(Y) \Rightarrow \mathbb{E}[X|Y] = f(Y) = X$
- $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$
- $X \perp Y \Rightarrow \mathbb{E}[f(X, Y)|Y = y_k] = \mathbb{E}[f(X, y_k)]$
- **Доказателство:**
  - $\mathbb{E}[aX + bZ|Y] = a\mathbb{E}[X|Y] + b\mathbb{E}[Z|Y]$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[aX + bZ|Y] &= \sum_k \frac{\mathbb{E}[(aX + bZ) \cdot \mathbb{1}_{A_k}]}{\mathbb{P}(A_k)} \cdot \mathbb{1}_{A_k} \\ &= \sum_k \frac{a\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{A_k}] + b\mathbb{E}[Z \cdot \mathbb{1}_{A_k}]}{\mathbb{P}(A_k)} \cdot \mathbb{1}_{A_k} \\ &= a\mathbb{E}[X|Y] + b\mathbb{E}[Z|Y]\end{aligned}$$

  - $X \perp Y \Rightarrow \mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$

$$\mathbb{E}[X|Y = y_k] \overset{X \perp Y}{=} \mathbb{E}[X] \Rightarrow$$
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X|Y] &= \sum_k \mathbb{E}[X|Y = y_k] \cdot \mathbb{1}_{A_k} \\ &= \sum_k \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{1}_{A_k} \\ &= \mathbb{E}[X] \sum_k \mathbb{1}_{A_k} \\ &= \mathbb{E}[X]\end{aligned}$$

  - $X = f(Y) \Rightarrow \mathbb{E}[X|Y] = f(Y) = X$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X|Y] &= \sum_k \frac{\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{A_k}]}{\mathbb{P}(A_k)} \cdot \mathbb{1}_{A_k} \\
&= \sum_k \frac{\mathbb{E}[f(Y) \cdot \mathbb{1}_{A_k}]}{\mathbb{P}(A_k)} \cdot \mathbb{1}_{A_k} \\
&= \sum_k \frac{f(y_k)\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_k}]}{\mathbb{P}(A_k)} \cdot \mathbb{1}_{A_k} \\
&= \sum_k \frac{f(y_k)\mathbb{P}(A_k)}{\mathbb{P}(A_k)} \cdot \mathbb{1}_{A_k} \\
&= \sum_k f(y_k) \cdot \mathbb{1}_{A_k} \\
&= f(Y)
\end{aligned}
$$

- $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] &= \mathbb{E}\left[\sum_k \frac{\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{A_k}]}{\mathbb{P}(A_k)} \cdot \mathbb{1}_{A_k}\right] \\
&= \sum_k \frac{\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{A_k}]}{\mathbb{P}(A_k)} \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_k}] \\
&= \sum_k \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{A_k}] \\
&= \mathbb{E}[X] \sum_k \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_k}] \\
&= \mathbb{E}[X]
\end{aligned}
$$

- $X \perp Y \Rightarrow \mathbb{E}[f(X,Y)|Y = y_k] = \mathbb{E}[f(X, y_k)]$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X,Y)|Y = y_k] &= \sum_i x_i \mathbb{P}(f(X,Y) = x_i | Y = y_k) \\
&\overset{iid}{=} \sum_i x_i \mathbb{P}(f(X, y_k) = x_i) \\
&= \mathbb{E}[f(X, y_k)]
\end{aligned}
$$

Твърдение: $\sum_i \mathbb{P}(X = x_i | Y = y_k) = 1$

- **Доказателство:**

$$
\begin{aligned}
\sum_i \mathbb{P}(X = x_i | Y = y_k) &= \sum_i \frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_k)}{\mathbb{P}(Y = y_k)} \\
&= \frac{\sum_i \mathbb{P}(Y = y_k | X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_k)}{\mathbb{P}(Y = y_k)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(Y = y_k)}{\mathbb{P}(Y = y_k)} \sum_i \mathbb{P}(Y = y_k | X = x_i) \\
&= \frac{\mathbb{P}(Y = y_k)}{\mathbb{P}(Y = y_k)} = 1
\end{aligned}
$$