Формулата за оценка е 2 + брой точки. Време за работа: 3 часа. Успех.

Ще считаме, че навсякъде работим върху вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, както и че числото* k *е естествено.*

Задача 1.

1. Дадени са две урни. В първата има 3 бели и 2 черни топки, а във втората урна има 1 бяла и 2 черни топки. На всеки опит от първата урна се теглят две топки без връщане, а от втората урна се тегли една топка. Дефинирани са следните събития:

$$A = \{\text{от първата урна е изтеглена точно една бяла топка}\};$$
$$B = \{\text{от първата урна са изтеглени повече бели отколкото от втората}\}.$$

   (а) (0.25 т.) Да се намерят вероятностите на A, B; както и тази на A, ако знаем, че B се е реализирало.

   (б) (0.25 т.) Ако се провеждат серия от опити докато събитието B се изпълни, като след всеки опит съставът на урните се възстановява в първоначалния си вид, какъв е очакваният брой направени опити?

2. (0.25 т.) Нека $X_1, \ldots, X_n$ са независими сл. вел. със средно μ и дисперсия σ^2. Изразете чрез μ и σ очакванията на

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \quad \text{и} \quad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2.$$

3. (0.25 т.) Монета с вероятност p за ези се хвърля n пъти. Нека E е събитието „пада се ези при първото хвърляне“, а F_k е събитието „точно k пъти се пада тура“. За кои двойки цели числа (n, k) събитията E и F_k са независими?

Задача 2. Играете на популярната игра „Сделка или не“.

1. (0.25 т.) Пред вас има три кутии A, B и C, в които са скрити награди от 10 лв., 50 лв. и 100 лв. Избирате една от трите кутии в началото на играта, като избраната кутия остава при вас неотворена. В първи рунд избирате коя от останалите две кутии да отпадне. Оказва се, че в нея има 50 лв. След кратка консултация с „банкера“, водещият ви дава правото да размените останалите в играта кутии. След като направите своя избор, вие печелите наградата в кутията пред вас. Ще размените ли кутиите? Обяснете.

2. (0.25 т.) Нека кутиите са четири - A, B, C и D, като в тях са скрити награди от 10 лв., 50лв., 100 лв. и 200 лв. В първи рунд 50 лв. отново отпадат от играта, като ви се дава правото да размените вашата кутия с една от останалите две. След като направите своя избор, играта продължава с ново отваряне на кутия. Ще размените ли кутиите след първи рунд? Обяснете.

3. (0.25 т.) Каква е очакваната печалба при смяна и при отказ за смяна в игрите от 1. и 2. след първи рунд? Ако вместо смяна на кутиите, водещият ви предлага сделка за 50 лв. в 1. (съответно 100 лв. в 2.), за да се откажете, ще приемете ли сделката? Обяснете.

4. (0.25 т.) Да приемем, че в 2. решавате да не размените кутиите. Във втори рунд избирате да бъде отворена една от другите две кутии. Оказва се, че в нея има 200 лв. Ще бъдете ли съгласни на размяна? А ако бяхте разменили кутиите първоначално? Обяснете.

Задача 3. Нека $X_1, \ldots, X_n \sim X$ и $Y_1, \ldots, Y_n \sim Y$ са независими случайни величини. Да допуснем, че X и Y са равни по разпределение.

1. (0.25 т.) Намерете разпределението, очакването и дисперсията на

$$d_n := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i > Y_i\}}.$$

2. (0.25 т.) За големи n, намерете константи a, b, такива че $\mathbb{P}(d_n \in (a, b)) = 99\%$.

3. (0.5 т.) Клинично изследване иска да провери дали спортуването има ефект върху настроението на тестова група от хора. Всеки от групата попълва въпросник, който оценява настроението му от 0 до 30 точки, като повечето точки кореспондират с по-добро настроение. След 1 седмица през която активно спортуват, хората попълват същия въпросник. За улеснение, приемете, че не е възможно участник да има равен резултат в началото и края на експеримента. Резултатите виждате в долната таблица.

   Като използвате 1. и 2., се аргументирайте дали спортът е повлиял на резултатите на участниците.

Индивид	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
резултат в началото на експеримента	25	21	22	28	20	25	27	22	21	29
резултат в края на експеримента	20	25	18	24	25	30	22	28	24	26

Задача 4. Целта в тази задача е да намерим целочислените моменти на нормално разпределена случайна величина $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. За улеснение, първоначално ще работим със $Z \sim N(0, 1)$.

1. (0.25 т.) Намерете $\mathbb{E}\left[e^{\lambda Z}\right]$ за $\lambda > 0$. Намерете $\mathbb{E}\left[Z^k\right]$ за $k \leq 6$.
2. (0.25 т.) Докажете, че $\mathbb{E}\left[f(Z)Z\right] = \mathbb{E}\left[f'(Z)\right]$ за функции f, такива че последните две очаквания са добре дефинирани.
3. (0.25 т.) Намерете $\mathbb{E}\left[Z^k\right]$ за всяко $k \geq 0$. Можете ли да получите респективния резултат за $\mathbb{E}\left[X^k\right]$?
4. (0.25 т.) Намерете вероятността $\mathbb{P}(Z^k > Z^{k-1})$ за $k \geq 5$.