

Оценката Ви ще е равна на 2 + броя точки, които получите. Време за работа: 3 часа. Успех.

Ще считаме, че навсякъде работим върху вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и X, Y са случайни величини.

Задача 1. Нека съвместната плътност на X и Y е $f_{X,Y}(x, y) = cx + 1$ за $x, y \geq 0, x + y \leq 1$ и 0 извън тази област, където c е някаква константа. Намерете:

1. (0.75 т.) c и $Cov(X, Y)$;
2. (0.25 т.) $\mathbb{E}(X|Y = 1/2)$.

Задача 2. Да допуснем, че количеството грах в грамове в определен вид консерви може да се моделира чрез $N(\mu, 10^2)$. Ако знаем, че 15% от консервите съдържат по-малко от 250 грама грах, намерете:

1. (0.25 т.) параметъра μ ;
2. (0.25 т.) процента консерви, които съдържат повече от 280 грама грах.

След промяна, да допуснем, че моделът е $N(250, \sigma^2)$.

3. (0.5 т.) Намерете σ , ако знаете, че 97% от консервите съдържат между 230 и 270 грама грах.

Задача 3. Контролно по ВиС е съставено от 4 задачи, като вероятността да се реши всяка от тях е съответно 80%, 70%, 60% и 40%. Допускаме, че решенията на всички задачи независими.

Всяка задача носи 10 точки, ако е решена и 0 иначе. Оценката се формира по формулата 2 + точки/10. Ако явилите са 100 души, пресметнете:

1. (0.25 т.) вероятността средният резултат на зад.1 да бъде под 8 точки;
2. (0.25 т.) очакваната средна оценка;
3. (0.5 т.) вероятността средната оценка да е поне 1% по-висока от очакваната.

Задача 4. Застрахователната компания „Инс 1“ моделира размера на исковете, които изплаща чрез независими експоненциални сл. вел.¹ със средно 100 лв. „Инс 1“ сключва презастраховка на цена от $x > 0$ лв с „Инс 2“, която гласи, че ако постъпи иск над 300 лв към „Инс 1“, „Инс 2“ ще покрие 200 лв от тях.

1. (0.25 т.) Каква е вероятността „Инс 1“ да трябва да плати от своя бюджет по-малко от 200 лв за един иск?
2. (0.25 т.) Ако „Инс 2“ желаят да има средна печалба от 10 лв на иск, каква е стойността на x ?
3. (0.5 т.) Ако „Инс 1“ желаят да има средна печалба от 10 лв на иск, колко би трябвало да е цената на полицата, която предлагат? Каква би била цената, ако не сключваха презастраховка с „Инс 2“? Защо „Инс 1“ биха искали да сключат такава презастраховка при положение, че средната печалба е еднаква?

¹Напомниме, че $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, ако $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{\{x>0\}}$.