Точкови оценки

Дефиниция: (генерална съвкупност): Генерална съвкупност е множеството от всички обект, които се изследват (чиито свойста се изследват).

- X - отразява свойство на генералната съвкупност
- $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ - извадка от n независими в съвкупност наблюдения над X

Допускаме, че:

- $F_X(x) = F_X(x, \theta)$
- $f_X(x) = f_X(x, \theta)$

$\hat{\theta} = \hat{\theta}(\vec{X})$ - точкова оценка на θ

Дефиниция: (метод на максималното правдоподобие): Нека $\vec{X}$ са наблюдения над непрекъснатата случайна величина X с плътност $f_X(x, \theta)$ за $\theta \in \Theta$. Тогава максимално правдоподобната оценка на θ се бележи с $\hat{\theta}$ и се определя от

$$L(\vec{X}, \hat{\theta}) = \sup_{\theta \in \Theta} L(\vec{X}, \theta)$$

където $L(\vec{X}, \theta) = f_{X_1, \dots, X_n}(\vec{X}, \theta) = \prod_{j=1}^{n} f_{X_j}(X_j, \theta)$ - функция на правдоподобието.

Твърдение: Нека $\vec{X}$ са наблюдения над $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ и $\theta = (\mu, \sigma^2)$.
Тогава $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j$ е максимално правдоподобна оценка за μ независимо дали знаем или не знаем σ^2.
Максимално правдоподобната оценка за σ^2:

- ако μ е известно: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \mu)^2$
- ако μ е неизвестно: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \hat{\mu})^2$

Доказателство:

$$L(\vec{X},\theta) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_j-\mu)^2}{2\sigma^2}} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{(x_j-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\ln L(\vec{X},\theta) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - n\ln(\sigma) - \sum_{j=1}^{n} \frac{(x_j-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

Искаме първо

$$0 = \frac{\partial}{\partial\mu}(\ln L(\vec{X},\theta)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(x_j-\mu)}{\sigma^2} \implies$$
$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$$

Сега

$$0 = \frac{\partial}{\partial\sigma^2}(\ln L(\vec{X},\theta)) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^4}\sum_{j=1}^{n} \frac{(x_j-\mu)^2}{2} \implies$$
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)^2$$

Дефиниция: (метод на моментите): Нека $\vec{X}$ са наблюдения над X с $F_X(x,\theta)$ за $\theta = (\theta_1,\dots,\theta_s) \in \Theta$
Ако $\overline{X}_n^{(j)} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k^j$ за $1 \le j \le s$
Ако $M_j(\theta_1,\dots,\theta_s) = \mathbb{E}X^j$ за $1 \le j \le s$
Тогава оценката $\hat{\theta}$ по метода на моментите се дефинира като решение на системата $\left\{\overline{X}_n^{(j)} = M_j(\hat{\theta})\right.$ за $1 \le j \le s$ и $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1,\dots,\hat{\theta}_s)$.

Свойства: (на точковите оценки):

- неизместеност:
  $\mathbb{E}[\hat{\theta}(\vec{X})] = \theta$
  Ако $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}[\hat{\theta}(\vec{X})] = \theta$ - асимптотично неизместена оценка
- състоятелност:
  $\hat{\theta}(\vec{X})$ е състоятелна оценка, ако за всяко $j \le s$, $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\hat{\theta}_j(\vec{X}) - \theta_j| > \epsilon) = 0$$

, тоест

$$\hat{\theta}_j(\vec{X}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \theta_j$$

Ако $\hat{\theta}_j(\vec{X}) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с.}} \theta_j$, то оценката е силно състоятелна.

Твърдение: Нека $\vec{X}$ са наблюдения над $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ и $\theta = (\mu, \sigma^2)$. Тогава максимално правдоподобната оценка за μ е $\hat{\mu} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} X_j$ и е неизместена и силно състоятелна оценка. Максимално правдоподобната оценка за σ^2:

- ако μ е известно: $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(X_j - \mu)^2$ - неизместена и силно състоятелна оценка
- ако μ е неизвестно: $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(X_j - \hat{\mu})^2$ - асимптотично неизместена и силно състоятелна оценка

Доказателство:

- $\mathbb{E}[\hat{\mu}] = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\mathbb{E}[X_j] = \dfrac{n\mu}{n} = \mu$ - неизместена оценка
- $\hat{\mu} = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n}\mathbb{E}[X_j]}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с.}} \mathbb{E}[X_1] = \mu$ - силно състоятелна оценка (от УЗГЧ)
- $\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\mathbb{E}[(X_j - \mu)^2] = \dfrac{n\sigma^2}{n} = \sigma^2$ - неизместена оценка при известно μ
- $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n}\mathbb{E}[(X_j - \mu)^2]}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с.}} \mathbb{E}[(X_1 - \mu)^2] = \sigma^2$ - силно състоятелна оценка (от УЗГЧ) при известно μ
- $\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\mathbb{E}[(X_j - \hat{\mu})^2] =$
  $\mathbb{E}[\overline{X}^{(2)}] - (\mathbb{E}[\overline{X}^{(1)}])^2 =$
  $\dfrac{1}{n}\mathbb{E}[\sum\limits_j X_j^2] - \dfrac{1}{n^2}\mathbb{E}[\sum\limits_j X_j]^2 =$
  $\mathbb{E}[X_1^2] - \dfrac{n\mathbb{E}[X_1^2]}{n^2} - \dfrac{n(n-1)(\mathbb{E}[X_1])^2}{n^2} =$
  $\dfrac{n-1}{n}\mathbb{E}[X_1^2] - \dfrac{n-1}{n}(\mathbb{E}[X_1])^2 =$

$\frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$ - изместена оценка при неизвестно μ, но асимптотично неизместена

   - Ако $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X}^{(1)})^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2$ - неизместена оценка, понеже $\mathbb{E}[S^2] = \frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$

- $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}[(X_j - \hat{\mu})^2]}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с.}} \mathbb{E}[(X_1 - \hat{\mu})^2] = \sigma^2$ - силно състоятелна оценка (от УЗГЧ) при неизвестно μ

Дефиниция: (централна статистика): $T = T(\vec{X}, \theta)$ е централна статистика, ако:

- T е монотонна по θ
- $F_T(X) = \mathbb{P}(T(\vec{X}, \theta) \leq x)$ не зависи от θ

Дефиниция: (доверителен интервал): $(\mathcal{I}_1(\vec{X}), \mathcal{I}_2(\vec{X}))$ е доверителен интервал за θ на $\vec{X}$ - наблюдения над X, ако $\mathcal{I}_1(\vec{X}) < \mathcal{I}_2(\vec{X})$ са такива, че нивото на доверие $\gamma \leq \mathbb{P}(\theta \in (\mathcal{I}_1(\vec{X}), \mathcal{I}_2(\vec{X})))$

- Ако търсим доверителен интервал за X с ниво на доверие γ, то търсим такива $\mathcal{I}_1(\vec{X})$ и $\mathcal{I}_2(\vec{X})$, че $\mathbb{P}(\mathcal{I}_1(\vec{X}) < X < \mathcal{I}_2(\vec{X})) = \gamma$
- Определянето на доверителен интервал за θ на $\vec{X}$ се извършва чрез централна статистика $T(\vec{X}, \theta)$ и квантили на $T(\vec{X}, \theta)$ по следния начин:

$$\gamma = \mathbb{P}(q_1 < T < q_2)$$
$$\gamma = \mathbb{P}(T^{-1}(q_1) < \theta < T^{-1}(q_2))$$

  Където най често $q_1 = \frac{1-\gamma}{2}, \quad q_2 = \frac{1+\gamma}{2}$

Твърдение: Ако $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ и $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X_n}^{(1)})^2$, $S^2 \perp\!\!\!\perp \overline{X_n}^{(1)}$. Тогава:

- $T = \frac{\overline{X_n}^{(1)} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ е централна статистика за $\theta = \mu$ при известно σ^2
- $T = \frac{\overline{X_n}^{(1)} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$ е централна статистика за $\theta = \mu$ при незвестно σ^2
- $T = \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$ е централна статистика за $\theta = \sigma^2$ при известно μ.

- $T = \dfrac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ е централна статистика за $\theta = \sigma^2$ при неизвестно μ
  .

Доказателство:
Нека $Y = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$$T = \frac{\overline{X_n}^{(1)} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X_n}^{(1)} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\frac{S}{\sigma}} = \frac{\frac{\frac{\overline{X_n}^{(1)} - \mu}{\sigma}}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{S^2(n-1)}{\sigma^2}\frac{1}{n-1}}} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n-1}}}$$

$Z \perp\!\!\!\perp Y$, защото $S^2 \perp\!\!\!\perp \overline{X_n}^{(1)}$

$$T = \frac{\overline{X_n}^{(1)} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

Тогава T е централна статистика и доверителният интервал за μ с ниво на доверие γ е:

$$\mathbb{P}(-q_{\frac{1-\gamma}{2}} < T < q_{\frac{1-\gamma}{2}}) = \gamma$$
$$\mathbb{P}\left(\overline{X}^{(1)} - \frac{S}{\sqrt{n}} q_{\frac{1-\gamma}{2}} < \mu < \overline{X}^{(1)} + \frac{S}{\sqrt{n}} q_{\frac{1-\gamma}{2}}\right) = \gamma$$

Също, ако $Z_j \sim Z$, имаме

$$\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{(x_j - \mu)^2}{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j$$

$$T = \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \sum_{j=1}^{n} Z_j \sim \chi^2(n)$$

- Ако μ е известно, то $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(X_j - \mu)^2$ е максимално правдоподобна оценка за σ^2 и

  $\dfrac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$

- Ако μ е неизвестно, то $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(X_j - \hat{\mu})^2$ е максимално правдоподобна оценка за σ^2 и $\dfrac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

Тогава T е централна статистика и доверителнията интервал за σ^2 с ниво на доверие γ е:

$$\mathbb{P}(q_{\frac{1-\gamma}{2}} < T < q_{\frac{1-\gamma}{2}}) = \gamma$$
$$\mathbb{P}\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{q_{\frac{1+\gamma}{2}}} < \sigma^2 < \frac{n\hat{\sigma}^2}{q_{\frac{1-\gamma}{2}}}\right) = \gamma$$