Основни понятия

Дефиниция: (случаен експеримент): Експеримент, при който не можем предварително да определим кой от възможните изходи ще се сбъдне

Дефиниция: (елементарно събитие): Всеки възможен елементарен изход на случаен експеримент ще означаваме с ω и ще наричаме елементарно събитие

Дефиниция: С Ω ще означаваме множеството от всички елементарни събития на даден експеримент

Дефиниция: (събитие): Всяко подмножество $A \subseteq \Omega$ наричаме събитие. С $|A|$ означаваме неговата кардиналност.

Дефиниция: (обединение): Нека $A, B \subseteq \Omega$. Тогава $A \cup B$ са всички $\omega \in \Omega$, такива, че $\omega \in A$ **или** $\omega \in B$

Дефиниция: (сечение): Нека $A, B \subseteq \Omega$. Тогава $A \cap B$ са всички $\omega \in \Omega$, такива, че $\omega \in A$ **и** $\omega \in B$

Дефиниция: (допълнение): Нека $A \subseteq \Omega$. Тогава A^C са всички $\omega \in \Omega$, такива, че $\omega \notin A$

Свойства: Нека $A, B, C \subseteq \Omega$. Тогава

- комутативност: $A \cup B = B \cup A$
- асоциативност: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- дистрибутивност: $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- закони на Де Морган: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

Дефиниция: (сигма алгебра): Нека Ω е съвкупност от елементарни събития и $\mathcal{A}$ е колекция от подмножества. Тогава наричаме $\mathcal{A}$ σ-алгебра, ако

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^C \in \mathcal{A}$
- $\forall i \geq 1 \;\; A_i \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Следствие:

- $\Omega \in \mathcal{A}$

- $\forall i \geq 1 \;\; A_i \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$
- **Доказателство**:
  - Тъй като $\emptyset \in \mathcal{A}$ и $\emptyset^C \in \mathcal{A} \Longrightarrow \Omega \in \mathcal{A}$
  - $\forall i \geq 1 \;\; A_i \in \mathcal{A} \Longrightarrow \forall i \geq 1 \;\; A_i^C \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i^C \in \mathcal{A} \Longrightarrow (\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i^C)^C \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Дефиниция: Нека $\mathcal{G}$ е непразна колекция от подмножесва от Ω. $\sigma(\mathcal{G})$ е най-малката σ-алгебра, съдържаша $\mathcal{G}$

Дефиниция: (борелова алгебра): $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ е борелова алгебра - най-малката σ-алгебра, съдържаща всички отворени интервали $\mathcal{I}$, тоест $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

- Когато имаме $\Omega = \mathbb{R}$, не работим с $2^{\mathbb{R}}$, а с $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Дефиниция: (атом): Ако $\mathcal{A}$ е σ-алгебра, то $A \in \mathcal{A}$ се нарича атом, ако от $B \subseteq A, B \in \mathcal{A}$ следва, че $B = \emptyset$