Проверка на хипотези

Нека имаме X - случайна величина и $F_X(x, \theta)$
Нека $\vec{X}$ е извадка на X с наблюдения $x_1, \dots, x_n$.
$H_0: \quad \theta = \theta_0 \rightarrow \text{нулева хипотеза}$
$H_1: \quad \theta = \theta_1 \rightarrow \text{алтернативна хипотеза}$
Търсим критична област $W \subseteq \mathbb{R}^n$, такава, че:

- Ако $\vec{X} \in W$ отхвърляме H_0 и приемаме H_1
- Ако $\vec{X} \notin W$ отхвърляме H_1 и приемаме H_0

$\alpha = \mathbb{P}(\vec{X} \in W | H_0) \rightarrow \text{грешка от първи род}$
$\beta = \mathbb{P}(\vec{X} \notin W | H_1) \rightarrow \text{грешка от втори род}$

$W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 \leq \alpha 2 \\ \beta_1 \geq \beta_2 \end{cases}$

Дефиниция: (оптимална критична област): Нека α е фиксирано. Тогава W^* наричаме оптимална критична област, ако

$$\beta^* = \mathbb{P}(\vec{X} \notin W^* | H_1) = \min_{W:\ \mathbb{P}(\vec{X} \in W | H_0) = \alpha} (\mathbb{P}(\vec{X} \notin W | H_1))$$

Лема: (на Неймън-Пирсън): Нека $L_0(\vec{X}) = L(\vec{X}, \theta_0)$ и $L_1(\vec{X}) = L(\vec{X}, \theta_1)$ и имаме $X, f_X(x, \theta)$. Тогава ако $W^* \subseteq \mathbb{R}^n$ е критична област при зададено α, то W^* е оптимална критична област, ако $\exists k > 0$, такова, че:

$$W^* \subseteq \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | L_1(\vec{x}) \geq k L_0(\vec{x})\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

- Можем да сведем лемата до търсене на k, α, отговарящи на условията за W^* и тогава W^* е оптимална критична област.

Доказателство:

$$\mathbb{P}(\vec{X} \notin W^* | H_1) = \mathbb{P}(\vec{X} \in (W^*)^C | H_1)$$

Нека W е критична област при зададено α. Тогава искаме да проверим:

$$\mathbb{P}(\vec{X} \in (W^*)^C | H_1) \overset{?}{\leq} \mathbb{P}(\vec{X} \in W^C | H_1)$$

$$\int\limits_{(W^*)^C} L_1(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} \overset{?}{\leq} \int\limits_{W^C} L_1(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x}$$

$$\int\limits_{(W^*)^C} L_1(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} \overset{?}{\leq} \int\limits_{W^C \cap (W^*)^C} L_1(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} + \int\limits_{W^C \cap W^*} L_1(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x}$$

$$\int\limits_{(W^*)^C} L_1(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} \overset{?}{\leq} \int\limits_{(W^*)^C} L_1(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} - \int\limits_{(W^*)^C \cap W} L_1(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} + \int\limits_{W^C \cap W^*} L_1(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x}$$

$$0 \overset{?}{\leq} - \int\limits_{(W^*)^C \cap W} L_1(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} + \int\limits_{W^C \cap W^*} L_1(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x}$$

$$A = \int\limits_{W^C \cap W^*} L_1(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} - \int\limits_{(W^*)^C \cap W} L_1(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} \overset{?}{\geq} 0$$

Но имаме, че $W^C \cap W^* \subseteq W^*$ и $(W^*)^C \cap W \subseteq (W^*)^C$ и прилагаме свойството на W^*:

$$A \geq k \int\limits_{W^C \cap W^*} L_0(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} - k \int\limits_{(W^*)^C \cap W} L_0(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} \overset{?}{\geq} 0$$

$$\int\limits_{W^C \cap W^*} L_0(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} - \int\limits_{(W^*)^C \cap W} L_0(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} \overset{?}{\geq} 0$$

Имаме

$$\alpha = \mathbb{P}(\vec{X} \in W^* | H_0) = \int\limits_{W^*} L_0(\vec{X})\mathrm{d}\vec{x} = \int\limits_{W^* \cap W} L_0(\vec{X})\mathrm{d}\vec{x} + \int\limits_{W^* \cap W^C} L_0(\vec{X})\mathrm{d}\vec{x}$$

Също

$$\alpha = \mathbb{P}(\vec{X} \in W | H_0) = \int\limits_{W} L_0(\vec{X})\mathrm{d}\vec{x} = \int\limits_{W \cap W^*} L_0(\vec{X})\mathrm{d}\vec{x} + \int\limits_{W \cap (W^*)^C} L_0(\vec{X})\mathrm{d}\vec{x}$$

Откъдето получаваме, че

$$\int\limits_{W \cap (W^*)^C} L_0(\vec{X})\mathrm{d}\vec{x} = \int\limits_{W^* \cap W^C} L_0(\vec{X})\mathrm{d}\vec{x}$$

И тогава имаме търсеното

$$\int\limits_{W^C \cap W^*} L_0(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} - \int\limits_{(W^*)^C \cap W} L_0(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} \ = 0 \geq 0$$

С което доказахме лемата.

Твърдение: Нека $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, където σ^2 е известно. Тогава оптималната критична област за проверка на $H_0 : \mu = \mu_0$ срещу $H_1 : \mu = \mu_1$ при зададено ниво на значимост α е:

$W_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n | L_1(\vec{X}) \geq kL_0(\vec{X})\}$, където:
$k = e^{\left(\frac{(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1-\alpha)+\mu_0)(2(\mu_1-\mu_0)n)+n\mu_0^2-n\mu_1^2}{2\sigma^2}\right)}$

Доказателство:

$$L_1(\vec{X}) \geq kL_2(\vec{X})$$
$$\ln(L_1(\vec{X})) \geq \ln(kL_2(\vec{X}))$$
$$\ln(L_1(\vec{X})) \geq \ln(k) + \ln(L_2(\vec{X}))$$
$$\ln\left(\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2}\right) \geq \ln(k) + \ln\left(\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}\right)$$
$$-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2 \geq \ln(k) - \frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$$
$$-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2 \geq \ln(k) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$$
$$-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2 \geq 2\sigma^2\ln(k) - \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$$
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2 \leq -2\sigma^2\ln(k) + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$$
$$\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\mu_1\sum_{i=1}^{n}X_i + n\mu_1^2 \leq -2\sigma^2\ln(k) + \sum_{i=1}^{n}X_j^2 - 2\mu_0\sum_{i=1}^{n}X_i + n\mu_0^2$$
$$2(\mu_1-\mu_0)\sum_{i=1}^{n}X_i \geq -2\sigma^2\ln(k) + n\mu_0^2 - n\mu_1^2$$
$$\sum_{i=1}^{n}X_i \geq \frac{-2\sigma^2\ln(k) + n\mu_0^2 - n\mu_1^2}{2(\mu_1-\mu_0)}$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \geq \frac{-2\sigma^2\ln(k) + n\mu_0^2 - n\mu_1^2}{2(\mu_1-\mu_0)} \cdot \frac{1}{n}$$
$$\overline{X} \geq \frac{-2\sigma^2\ln(k) + n\mu_0^2 - n\mu_1^2}{2(\mu_1-\mu_0)n} = k_1$$

Сега търсим

$$\begin{aligned}\alpha &= \mathbb{P}(\vec{X} \in W_k | H_0) \\ &= \mathbb{P}(\overline{X} \geq k_1 | H_0) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{k_1-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{k_1-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = k_2\right)\end{aligned}$$

$$= 1 - \Phi(k_2)$$

Откъдето като изразим k чрез $\alpha, n, \sigma^2, \mu_0, \mu_1$ получаваме търсената стойност и определяме оптималната критична област като $W_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n | L_1(\vec{X}) \geq kL_0(\vec{X})\}$