Вероятности

Дефиниция: (вероятност): Нека Ω е множество от елементарни събития и $\mathcal{A}$ е σ-алгебра над Ω.
Тогава изображението $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ се нарича вероятност, ако е изпълнено:

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Ако $A \in \mathcal{A}$, то $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- Ако $\forall i \geq 1 \;\; A_i \in \mathcal{A}$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$ за $i \neq j$, то $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

Твърдение: Нека $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ е вероятност. Тогава за $A, B \in \mathcal{A}$ е изпълнено:

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap A^C)$
- Ако $A \subseteq B$, то $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- Ако $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$, то $\mathbb{P}(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n)$
- Ако $A_i \in \mathcal{A}$, то $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$
- **Доказателство:**
  - $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ и $\emptyset = \Omega^C$, то $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\Omega^C) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 0$
  - $B = (A \cap B) \cup (A^C \cap B)$ - непресичащи се
  - $A \subseteq B \Rightarrow B = A \cup (A^C \cap B)$ - непресичащи се, тогава
    $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap A^C) \geq \mathbb{P}(A)$
  - $A \cup B = A \cup (A^C \cap B)$ и $A^C \cap B = B \setminus (A \cap B)$, тогава
    $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap A^C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
  - Нека $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$
    Конструираме множествата $B_j = A_j \setminus A_{j+1}$
    $A_1 = (\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \setminus A_{j+1}) \cup A$ и $1 \geq \mathbb{P}(A_1) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} B_i + \mathbb{P}(A)$, което означава, че редът $\sum\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ е сходящ, откъдето $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=n}^{\infty} B_i = 0$
    Също $A_n = (\bigcup\limits_{j=n}^{\infty} B_j) \cup A$ и $\mathbb{P}(A_n) = \sum\limits_{i=n}^{\infty} B_i + \mathbb{P}(A)$ и след граничен преход $n \to \infty$ получаваме $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$

- Нека $B_k = A_k \setminus (\bigcup\limits_{j=1}^{k-1} A_j) \subseteq A_k$ откъдето $\mathbb{P}(B_k) \leq \mathbb{P}(A_k)$

  Сега трябва да проверим, дали $A = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j = B$

  Понеже $B_k \subseteq A_k$, то $B \subseteq A$

  Сега да проверим обратното. Нека $w \in A$ и нека k е най-малкото такова, че $w \in A_k$.

  Тогава $w \notin \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} A_j$ откъдето $w \in (A_k \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} A_j) = B_k$ и $B \subseteq A$

  Понеже $A = B$, то $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ и $\mathbb{P}(B) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i)$

  Но от по-горно свойство, имаме, че $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i)$ и получихме търсеното

  $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

  - Или алтернативно: От по-горното свойство имаме, че $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$
    Откъдето $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) \leq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$.

    От тук по индукция следва, че $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

Дефиниция: (вероятностно пространство): Наредената тройка $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, където Ω е пространство от елементарни събития, $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$ е σ-алгебра и $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$, се нарича вероятностно пространство

! ЗАБЕЛЕЖКА: От тук нататък във всички дефиниции формално трябва да присъства опоменаването на вероятностно пространство $V = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

Дефиниция: (дискретна вероятност): Ако имаме краен брой елементарни изходи $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \simeq \{1, \ldots, n\}$. Стандартно избираме $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ и избираме числата $p_1, \ldots, p_n$, такива, че $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$. Така дефинираме $\forall A \in \mathcal{A} \;\; \mathbb{P}(A) = \sum\limits_{i \in A} p_i$

- Проверка за коректност: $\mathbb{P}(\Omega) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$ и ако $A_1, \ldots A_k$ са непресичащи се събития, то $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{j=1}^{k} A_j) = \sum\limits_{i \in \bigcup\limits_{j=1}^{k} A_j} p_i = \sum\limits_{j=1}^{k} \sum\limits_{i \in A_j} p_i = \sum\limits_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_j)$

Дефиниция: (равномерна вероятност): Ако имаме краен брой елементарни изходи $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \simeq \{1, \ldots, n\}$ и стандартно избираме $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$, вероятността $\forall A \in \mathcal{A} \;\; \mathbb{P}(A) = \sum\limits_{i \in A} \frac{1}{n} = \frac{|A|}{n}$ наричаме равномерна и $\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{n}$

- Ако имаме безкрайно $\Omega = \{1, 2, \dots\}$, понеже $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$, то може да дефинираме вероятността, като $\mathbb{P}(\{k\}) = p_k = (\frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{k^2})$

Дефиниция: (геометрична вероятност): Геометричната вероятност е пример за вероятностно разпределение върху неизброимо множество. Най-простият вариант разпределя равномерно вероятностите. Ако $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, избираме $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega)$ и имаме, че $|\Omega| = \iint\limits_{\Omega} dx < \infty$. Тогава $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ за всяко $A \in \mathcal{A}$- отворено. Вероятността зависи само от площта на A, а не от формата и разположението. $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$ за всяко $x \in \Omega$, понеже лицето на точка е 0.