

Изпит по ВиС - част 1

23.06.2021

Време за работа: 120 минути

Указания за работа

При работата върху задачите може да реферирате към теореме и твърдения, които ви помагат за извеждането на някоя стъпка. Точките имат индикативен характер.

Въпроси

Задача 1. Нека X, Y са независими дискретни случайни величини с очакване $\mathbb{E}[X] = \mu_X, \mathbb{E}[Y] = \mu_Y$ и дисперсия $\sigma_X^2 = DX, \sigma_Y^2 = DY$.

- Докажете, че $\mathbb{E}[XY] = \mu_X \mu_Y$. (1.50 т.)
- Докажете, че $D(XY) = \sigma_X^2 \sigma_Y^2 + \mu_Y^2 \sigma_X^2 + \mu_X^2 \sigma_Y^2$. (1.50 т.)

Задача 2. В началото на Ковид-19 пандемията българи се завръщат от западни държави. Считаме, че те влизат един по един и всеки, независимо от всички останали, е заразен с Ковид с вероятност $p = 1/100$. Нека N_n е поредният влязъл, който е n -тият заразен измежду влезлите дотук ($N_{10} = 100$ означава, че 100-ният влязъл е точно 10-ят заразен).

- Какво е разпределението на N_n ? (1 т.)
- Какви са очакването и дисперсията на N_n ? (1 т.)
- Каква е приблизително вероятността хилядният заразен да не е влязъл до стотихиятия завърнал се? (1 т.)

Задача 3.

- Дефинирайте понятието независимост в съвкупност за n непрекъснати случайни величини. (0.5 т.)
- Напишете твърденията на закона за големите числа и на усиления закон за големите числа за редица от независими еднакво разпределени случайни величини $(X_j)_{j \geq 1}$. (1 т.)
- Докажете закона за големите числа, ако $\mathbb{E}[X_1] = 0, \mathbb{E}[X_1^2] = 1$.
- Комарджия има N лева и залага последователно 1 лв. на червено на рулетка с 18 червени и 19 други числа. Понеже N е много голямо, той счита, че с положителна вероятност няма да фалира дори да продължи да играе до безкрайност. Вярно ли е това? (1.5 т.)

Задача 4. Преподавател получава обикновено по 5 имейла от приятели в рамките на ден, като те пристигат независимо един от друг и равномерно разпределени на $(0, 1)$ (денят се кодира с $(0, 1)$). По време на сесия е известно, че той отваря на другия ден само 4-тия неотворен имейл от предходния ден (подредени хронологично). Хакер иска да се възползва от това, като изпрати своето съобщение, така че с максимална вероятност неговият имейл да е хронологично на четвърто място. За да постигне това, в кой момент трябва да изпрати имейл? (3 т.)

Задача 5.

- Дефинирайте сходимост по разпределение. (0.5 т.)
- Нека $(X_j)_{j \geq 1}$ е редица от независими в съвкупност случайни величини, всяка, от които експоненциално разпределена с параметър 1 и $M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.
 - Изразете функцията на разпределение на M_2 и на M_n . (1 т.)
 - Покажете, че $Y_n = M_n - \log(n)$ се сходя по разпределение към случайна величина Y и намерете функцията на разпределение на Y . (1.5 т.)

Изпит по ВиС - част 2

23.06.2021

Време за работа: 60 минути

Указания за работа

При работата върху проблемите може да реферирате към теореми и твърдения, които ви помагат за извеждането на някоя стъпка. Точките имат индикативен характер.

Въпроси

Задача 1. Нека X има плътност $f(x; \beta) = C_\beta x^{\beta-1}(1-x)$ за $x \in (0, 1)$ и $\beta > 0$.

- За всяко β намерете C_β . (0.5 т.)
- Напишете функцията на правдоподобие за n наблюдения (x_1, x_2, \dots, x_n) , получени като извадка от X и по метода на максималното правдоподобие, намерете квадратно уравнение за максимално правдоподобната оценка на β . (0.5 т.)
- Възможно ли е и двата корена едновременно да са максимално правдоподобни оценки за β ? (1 т.)
- Дефинирайте състоятелна оценка и покажете, че ако $\beta = 1$, то максимално правдоподобната оценка е състоятелна. (1 т.)

Задача 2.

- Дефинирайте оптимална критична област за тестване на хипотези и свързващите понятия като грешка от първи и втори род. (0.5 т.)
- Напишете твърдението на лемата на Нейман-Пирсън.
- За X от Задача 1 тестваме $H_0 : \beta = 1$ срещу $H_1 : \beta = 2$. (0.5 т.)
 - Покажете, че за $\alpha = 0.05$ и всяко n , при извадка от n данни, оптималната критична област е от вида $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]^n : \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln(x_j) \geq K_n\}$, за някоя константа K_n . (1 т.)
 - Вярно ли е, че за големи n , K_n се сходя към $-3/2$? (**) (1 т.)