Оценката Ви ще е равна на 2 + броя точки, които получите. Време за работа: 3 часа. Успех. Ще считаме, че навсякъде работим върху вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Задача 1. (2 т.) По актуални данни, около 2% от населението е заразено с COVID-19. От друга страна, производители на тестове информират, че така наречените "бързи тестове" са положителни при болни с вероятност 65% и с вероятност 1% при здрави.

1. (0.5 т.) Избираме случаен човек и го тестваме. Резултатът е положителен. Каква е вероятността той да бъде болен?

   • Нека $Inf = \{$"човекът е болен"$\}$ и $Pos = \{$тестът е положителен$\}$. Търсената вероятност е

$$\mathbb{P}(Inf|Pos) = \frac{\mathbb{P}(Pos|Inf)\mathbb{P}(Inf)}{\mathbb{P}(Pos|Inf)\mathbb{P}(Inf) + \mathbb{P}(Pos|\overline{Inf})\mathbb{P}(\overline{Inf})} = \frac{65\% \times 2\%}{65\% \times 2\% + 1\% \times 98\%} \approx 57.02\% .$$

2. (0.5 т.) Актуална тема е получаването на отрицателен резултат, за да се сдобие съответният човек със зелен сертификат. Да предположим, че даден човек знае, че е болен. Средно колко теста ще са му нужни, докато получи отрицателен тест[1]? Каква е вероятността 2 теста да бъдат достатъчни, за да получи желания зелен сертификат?

   • Броят тестове до първи положителен при болен човек е $X \sim Ge(p)$ за $p = 35/100$. Следователно средно ще са нужни $100/35 \approx 2.86$ теста до първи отрицателен, а отговорът на втората част е $\mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = p + (1-p)p = 0.5775$.

3. (1 т.) Да разгледаме двама случайно избрани човека. Коя е най-вероятната комбинация за двойката (брой болни, брой положителни тестове)? Пресметнете корелацията на броя болни и броя положителни тестове, като използвате приближения с точност 0.01.

   • Нека X е сл.вел, равна на броя болни, Y - на положителните тестове, $p = 99/100$, $q = 65/100$ и $r = 2/100$. Пресмятаме

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X=0, Y=0) = \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0|X=0) = (1-r)^2 p^2 \approx 0.94\\
&\mathbb{P}(X=0, Y=1) = (1-r)^2 \cdot 2p(1-p) \approx 0.02\\
&\mathbb{P}(X=0, Y=2) \approx 0.00\\
&\mathbb{P}(X=1, Y=0) = 2r(1-r)p(1-q) \approx 0.01\\
&\mathbb{P}(X=1, Y=1) = 2r(1-r)(pq + (1-p)(1-q)) \approx 0.03\\
&\mathbb{P}(X=1, Y=2) = 2r(1-r)q(1-p) \approx 0.00\\
&\mathbb{P}(X=2, Y=0) = \mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=0|X=2) = r^2(1-q)^2 \approx 0.00\\
&\mathbb{P}(X=2, Y=1) = r^2 \cdot 2q(1-q) \approx 0.00\\
&\mathbb{P}(X=2, Y=2) = r^2 q^2 \approx 0.00
\end{aligned}$$

   Следователно най-вероятната комбинация е 2-ма здрави и 0 положителни теста, а приближеното съвместно разпределение на двойката е

$X \backslash Y$	0	1	2	$\mathbb{P}(X = \cdot)$
0	0.94	0.02	0.00	0.96
1	0.01	0.03	0.00	0.04
2	0.00	0.00	0.00	0.00
$\mathbb{P}(Y = \cdot)$	0.95	0.05	0.00	

,

   Пресмятаме последователно

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}X \approx 0.04; && DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 \approx 0.04 - (0.04)^2 \approx 0.04;\\
&\mathbb{E}Y \approx 0.05; && DY = \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 \approx 0.05 - 0.0025 \approx 0.05;\\
&\mathbb{E}XY \approx 0.03; && Cor(X,Y) = \frac{\mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y}{\sqrt{DX \cdot DY}} \approx \frac{0.03 - 0.04 \cdot 0.05}{\sqrt{0.04 \cdot 0.05}} \approx 0.63 .
\end{aligned}$$

[1] За целите на задачата, игнорирайте, че при положителен резултат би трябвало автоматично да бъде поставен под карантина.

Задача 2. (1.5 т.) В казино се предлага следната игра - хвърляте зар 100 пъти, като за всяка 6-ца получавате по 1 лев. Цената за участие е 20 лева.

- (0.5 т.) Нека X_i = "печалбата от хвърляния $25i - 24$ до $25i$" за $i = 1, 2, 3, 4$, а X е общата печалба. Какви са разпределенията на дефинираните случайни величини? Бихте ли участвали в играта?

  • $X_i \sim Bin(25, 1/6), X \sim Bin(100, 1/6)$. $\mathbb{E}X = 100/6 < 20$, т.е. играта не е честна от гледна точка на средна печалба.

- (0.25 т.) Нека $Y = 4X_1$, т.е. вместо да хвърляме 100 пъти, хвърляме 25 и умножаваме печалбата по 4. Сравнете очакванията и дисперсиите на X и Y и обяснете накратко получения резултат.

  • $\mathbb{E}X = \mathbb{E}X_1, DX = 500/36, D4X_1 = 16DX_1 = 2000/36$. При по-голям брой хвърляния, отклонението от средното е логично по-малко.

- (0.75 т.) Казиното предлага и алтернативна игра - ако хвърлите общо сума над 555 от 100-те хвърляния, печелите 1000лева, като цената за участие е 10 лева. Реклама твърди, че тази игра е специална коледна промоция и вероятността за печалба е над 1/100, което значи, че средната печалба е положителна. Можете ли да потвърдите/отречете това твърдение?

  • Нека Y_i е стойността при i-тото хвърляне. Тогава можем да изразим общата сума Y като $Y_1 + \cdots + Y_{100}$. Пресмятаме $\mathbb{E}Y_1 = 7/2$ и $DY_1 = 35/12$. Тъй като Y_i са независими, то $\mathbb{E}Y = 100 \cdot 7/2 = 350$ и $DY = 100 \cdot 35/12 = 875/3$. Следователно от неравенството на Чебишов:

  $$\mathbb{P}(Y \geq 555) = \mathbb{P}(Y - \mathbb{E}y \geq 205) \leq \mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}Y| \geq 205) \leq \frac{DY}{205^2} < 0.7\%,$$

  т.е. вероятността за печалба е строго по-малка от 1 % и рекламата е лъжлива.

Задача 3. (0.5 т.) Избираме 2 случайни точки върху отсечка с дължина 1. Да наречем единия ѝ край ляв, а другия - десен. Каква е вероятността дължините на получените отсечки да са в нарастващ ред отляво надясно?

• Ако x, y са разстоянията от левия край до двете точки, то ако $y > x$, трябва да е изпълнено $x < y - x < 1 - y$, т.е. $2x < y < (x+1)/2$ и аналогично при $x > y$, $2x - 1 < y < x/2$.

Крайният отговор може да се сметне с елементарна геометрия или чрез

$$2\int_0^{1/3} \frac{x+1}{2} - 2x \, \mathrm{d}x = \int_0^{1/3} 1 - 3x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$