Оценката Ви ще е равна на 2 + броя точки, които получите. Време за работа: 3 часа. Успех.
Ще считаме, че навсякъде работим върху вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Задача 1. Резервоар се пълни в началото на седмицата със сл.вел. $X \in [0,1]$ единици, а през седмицата се употребява сл.вел. Y. Нека съвместната плътност на тези две случайни величини е

$$f_{X,Y}(x,y) = 3x\mathbb{1}_{\{0 \le y \le x \le 1\}} = \begin{cases} 3x, & \text{ако } 0 \le y \le x \le 1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

1. (0.25 т.) Намерете вероятността в дадена седмица резервоарът да бъде запълнен с най-много $1/2$ единици и да бъдат изразходвани повече от $1/4$.

2. (0.75 т.) Намерете $Cov(X,Y)$.

Задача 2. (1 т.) На спирките за градски транспорт се инсталират информационни табла с размери 10×100 диода. Доставени са качествени материали, като можем да моделираме времето на изправност на един диод чрез експоненциална сл. вел. със средно 10 години.

Опитът показва, че ако работят по-малко от 75% от диодите, информацията често е неразбираема и таблото трябва да се ремонтира. Каква е вероятността да трябва да бъде извършен ремонт след 3 години експлоатация?

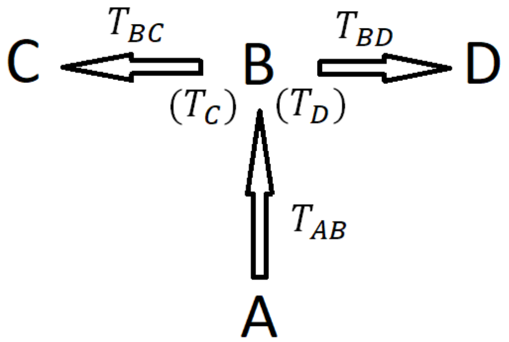
Задача 3. Да предположим, че можем да моделираме възвръщаемостите на три актива A, B и C като независими нормално разпределени случайни величини $N(3,2), N(3,3), N(1,10)$ и че разполагате с 5 единици за инвестиции.

1. (0.25 т.) Как бихте разпределили парите си, за да максимизирате очакваната печалба?

2. (0.25 т.) Между всички възможности от 1., един начин за избор е да предпочетем разпределението с най-малка дисперсия. Кое е то?

3. (0.5 т.) Рисков инвеститор залага 5-те си единици в независим актив $D \sim N(-2, 20)$. Каква е вероятността неговата инвестиция да е по-успешна от тази в 2.?

Задача 4. X и Y пътуват заедно от град A до B. След пристигането си, изчакват съответно автобуси до C и D. Предполагаме, че пътуванията траят съответно $T_{AB} \sim Exp(3), T_{BC} \sim Exp(4)$ и $T_{BD} \sim Exp(5)$, а изчакванията в B са $T_C \sim Exp(1)$ и $T_D \sim Exp(2)$, като така дефинираните времена са независими. Нека ξ и η са времената на пътуване на X и Y.



1. (0.25 т.) Намерете $\mathbb{P}(T_C + \ln(\mathbb{E}T_D) > 0)$.

2. (0.75 т.) Намерете $Cor(\xi, \eta)$.