Непрекъснати случайни величини

Дефиниция: (непрекъсната случайна величина): Нека $V = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ е вероятностно пространство. Тогава $X : \Omega \to \mathbb{R}$ е непрекъсната случайна величина, ако приема неизброимо много стойности

Дефиниция: (плътност): X е абсолютно напрекъсната(непрекъсната за краткост) случайна величина с плътност $f_X(x)$, ако

- $f_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \mathrm{d}x = 1$
- $\mathbb{P}(a < X < b) = \int\limits_{a}^{b} f_X(x) \mathrm{d}x, \forall -\infty \leq a < b \leq \infty$

Твърдение: (вероятност за дискретно събитие): Нека X е напрекъсната случайна величина с плътност $f_X(x)$. Тогава за всяко $c \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X = c) = 0$

- **Доказателство:** $\{X = c\} \subseteq \{c - \epsilon \leq X \leq c + \epsilon\}$
  $\mathbb{P}(X = c) \leq \mathbb{P}(c - \epsilon \leq X \leq c + \epsilon) = \int\limits_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} f_X(x) \mathrm{d}x$
  След граничен преход $\epsilon \to 0$:
  $0 \leq \mathbb{P}(X = c) \leq \int\limits_{c}^{c} f_X(x) \mathrm{d}x = 0$
  $\mathbb{P}(X = c) = 0$

Дефиниция: (функция на разпределние): Нека X е напрекъсната случайна величина с плътност $f_X(x)$. Тогава $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(y) \mathrm{d}y$

- Ако f_X е непрекъсната в точката x, то $F'_X(x) = f_X(x)$

Теорема: (за смяна на променливите): Нека X е напрекъсната случайна величина и g е строго монотонна и диференцируема функция. Тогава $Y = g(X)$ е напрекъсната случайна величина с плътност $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot |(g^{-1})'(y)|$

- **Доказателство:** Нека разгледаме случая, когато g е монотонно растяща и диференцируема. Тогава g^{-1} съществува.

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f_Y(y)\mathrm{d}y &= \mathbb{P}(a < Y < b) \\
&= \mathbb{P}(a < g(X) < b) \\
&= \mathbb{P}(g^{-1}(a) < X < g^{-1}(b)) \\
&= \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f_X(x)\mathrm{d}x \\
&\overset{X=g^{-1}(Y)}{=} \int_a^b f_X(g^{-1}(y))\mathrm{d}(g^{-1}(y)) \\
&= \int_a^b f_X(g^{-1}(y))|(g^{-1}(y))'|\ \mathrm{d}y \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot (g^{-1})'(y)
$$

Аналогично получаваме и че $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot (-(g^{-1})'(y))$, когато g е намаляваща
Окончателно $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot |(g^{-1})'(y)|$

- Алтернативно може и

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\
&= \mathbb{P}(g(X) \leq y) \\
&= \mathbb{P}(X \leq g^{-1}(y)) \\
&= F_X(g^{-1}(y)) \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
f_Y(y) = F'_X(g^{-1}(y)) = f_X(g^{-1}(y))(g^{-1}(y))'
$$

Дефиниция: (очакване и дисперсия):

- $\mathbb{E}[X] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x \iff \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) < \infty$
- $\mathbb{E}[g(X)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\mathrm{d}x$
- $\mathbb{D}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 f_X(x)\mathrm{d}x \iff \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) < \infty$

Свойства: (очакване и дисперсия):

- $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$

- $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
- $\mathbb{E}[aX] = a\mathbb{E}[X]$
- $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \iff X \perp Y$
- $\mathbb{D}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$
- $\mathbb{D}[aX] = a^2\mathbb{D}[X]$
- $\mathbb{D}[X+Y] = \mathbb{D}[X] + \mathbb{D}[Y] \iff X \perp Y$