Непрекъснати разпределения

Теорема: (смяна на променливите):
Нека $X = (X_1, X_2)$ е вектор от непрекъснати случайни величини.
Нека f_X е съвместната плътност на X
Нека $g : \mathcal{D}f_X \to \mathbb{R}^2$ е взаимно еднозначна
Нека $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = g(X) = \begin{pmatrix} g_1(X_1, X_2) \\ g_2(X_1, X_2) \end{pmatrix}$
Нека $g(\mathcal{D}f_X) = \{y \in \mathbb{R}^2 | y = g(x) \text{ за } x \in \mathcal{D}f_X\}$
Нека $X = h(Y) = \begin{pmatrix} h_1(Y_1, Y_2) \\ h_2(Y_1, Y_2) \end{pmatrix}$, където $h = g^{-1}$
Нека h, g са непрекъснати и диференцируеми съответно в $g(\mathcal{D}f_X)$ и $\mathcal{D}f_X$
Нека $J = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} (y) \right| \neq 0, \forall y \in g(\mathcal{D}f_X)$
ТОГАВА съвместната плътност на Y е $f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot J(y)$ за всяко $y \in g(\mathcal{D}f_X)$

- **Доказателство:** Нека $A \subseteq g(\mathcal{D}f_X)$
  $\iint\limits_A f_Y(y_1, y_2) \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2 =$
  $\mathbb{P}(Y \in A) =$
  $\mathbb{P}(g(X) \in A) =$
  $\mathbb{P}(X \in h(A)) =$
  $\iint\limits_{h(A)} f_X(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \overset{x = h(y_1, y_2)}{=}$
  $\iint\limits_A f_X(h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2)) J(y_1, y_2) \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2 =$
  $\iint\limits_A f_X(h(y)) J(y) \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2 \Longrightarrow$
  $f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot J(y)$

Забележка: Ако $X_j \sim \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j^2)$, то $Y = \sum\limits_j X_j \sim \mathcal{N}\big(\sum\limits_j \mu_j, \sum\limits_j \sigma_j^2\big)$

Дефиниция: (Гама разпределение): $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, ако за $\alpha, \beta > 0$ имаме, че

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha - 1} e^{-\beta x} & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x \leq 0 \end{cases}$$

- $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha - 1} e^{-x} \mathrm{d}x$ - Гама функция на Ойлер

- $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$
- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma(n) = (n-1)!$

При $\alpha = 1 \Rightarrow \Gamma(1, \beta) = Exp(\beta)$

Твърдение: Ако $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$ и $(X_1, \dots, X_n)$ са независими в съвкупност, то

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \beta)$$

- При $n = 2$
  $Y = X_1 + X_2$
  $Z = X_2$
  $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \dfrac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} e^{-\beta(x_1+x_2)}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}$
  $g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$
  $h(y, z) = \begin{pmatrix} y - z \\ z \end{pmatrix}$
  $J = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1$
  $f_{Y,Z}(y, z) = f_{X_1,X_2}(h(y, z)) \cdot J(y, z) = \dfrac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} (y-z)^{\alpha_1-1} z^{\alpha_2-1} e^{-\beta y}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}$

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y,Z}(y, z) dz \\
&= \int_{0}^{y} \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} (y-z)^{\alpha_1-1} z^{\alpha_2-1} e^{-\beta y}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} dz \\
&= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} y^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\beta y}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_{0}^{1} (1-t)^{\alpha_1-1} t^{\alpha_2-1} dt \\
&\overset{\beta\text{-функция}}{=} \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} y^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\beta y}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \\
&= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} y^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\beta y}}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}
\end{aligned}$$

Твърдение: Ако $(X_1, \dots, X_n)$ са независими в съвкупност експоненциално разпределени с $\lambda > 0$, то

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$$

Твърдение: Ако $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, то $\mathbb{E}[X] = \dfrac{\alpha}{\beta}$ и $\mathbb{D}[X] = \dfrac{\alpha}{\beta^2}$

- **Доказателство:**

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int\limits_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^\alpha e^{-\beta x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\beta} \int\limits_0^\infty \frac{x^\alpha \beta^{\alpha+1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha+1)} \mathrm{d}x \\
&\overset{\Gamma(\alpha+1,\beta)}{=} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\beta} 1 \\
&= \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\beta} \\
&= \frac{\alpha}{\beta}
\end{aligned}$$

Дефиниция: (Хи-квадрат разпределение): $X \sim \chi^2(n)$, ако $X \sim \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ и $n \geq 1$

- $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x \leq 0 \end{cases}$
- $\mathbb{E}[X] = n$
- $\mathbb{D}[X] = 2n$

Твърдение: Ако $X_1, \dots, X_n$ са независими в съвкупност стандратно нормално разпределени случайни величини, то

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$$

- **Доказателство:** Понеже $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$, то е достатъчно да докажем $X_i^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, понеже $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}) = \chi^2(n)$
  Нека $Y = X_1^2$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y < y) &= \mathbb{P}(X_1^2 < y) \\
&= \mathbb{P}(-\sqrt{y} < X_1 < \sqrt{y}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{-x^2}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} e^{\frac{-x^2}{2}} \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\mathbb{P}(Y < y) = \frac{y^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-y}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{y^{\frac{1}{2}-1} e^{\frac{-y}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}
$$

$$
Y \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)
$$

Дефиниция: (t-разпределение): Нека $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, а $Y \sim \chi^2(n)$ и $Z \perp\!\!\!\perp Y$, $n \geq 1$. Тогава

$$
X = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t(n)
$$

е t-разпределение с n степени на свобода