Съвместни непрекъснати разпределения

Дефиниция: (съвместна плътност на вектор): Казваме, че $X = (X_1, \ldots, X_n)$ е вектор от непрекъснати случайни величини, ако $\exists f_X = f_{X_1, \ldots, X_n} : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ - съвместна плътност, такава, че:

- $f_X(x_1, \ldots, x_n) \geq 0, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = 1$
- $\mathbb{P}(X \in A \subseteq \mathbb{R}^n) = \int\limits_A f_X(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n, \forall A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$

Дефиниция: Нека f_X е съвместна плътност на разпределение. Тогава

$$\mathcal{D}f_X = \{(x_1, \ldots, x_n) | f_X((x_1, \ldots, x_n) > 0\}$$

Дефиниция: (маргинална плътност): Нека f_X е съвместна плътност на $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Тогава

$$f_{X_i}(x_i) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{i-1} \mathrm{d}x_{i+1} \ldots \mathrm{d}x_n$$

е маргиналната плътност на X_i

Дефиниция: (условна плътност): Нека f_X е съвместна плътност на $X = (X_1, X_2)$. Тогава ако $f_{X_1}(x_1) > 0$, то

$$f_{X_2 | X_1 = x_1}(x_2) = \frac{f_X(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)}$$

е условната плътност на X_2 при условие $X_1 = x_1$

Дефиниция: (съвместна функция на разпределение): Нека $X = (X_1, \ldots, X_n)$ е вектор от случайни величини(произволни). Тогава

$$F_X(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n)$$

е съвместна функция на разпределение на X

- Ако f_X съществува, то $F_X(x_1, \dots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \cdots \int\limits_{-\infty}^{x_n} f_X(x_1, \dots, x_n) \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n$
- Ако F_X съществува и е непрекъсната по всички направления, то $f_X(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$

Дефиниция: (независимост): Казваме, че $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \iff F_X(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2)$

- Ако f_X съществува, то

$$X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \iff f_X(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$$

Дефиниция: (независими в съвкупност): Нека $X = (X_1, \dots, X_n)$ е вектор от непрекъснати случайни величини. Тогава $X_1, \dots, X_n$ са независими в съвкупност, ако $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ е изпълнено, че $F_X(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \dots F_{X_n}(x_n)$

Твърдение: Ако X има плътност f_X и $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, то

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_n) f_X(x_1, \dots, x_n) \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n$$

Твърдение: Ако $X = (X_1, X_2)$ е вектор от непрекъснати случайни величини и $\mathbb{E}[X_1], \mathbb{E}[X_2]$ съществуват. Тогава $\mathbb{E}[X_1 + X_2] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2]$

- **Доказателство:**
$\mathbb{E}[X_1 + X_2] =$
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x_1 + x_2) f_X(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 =$
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 f_X(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_2 f_X(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 =$
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2) \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_1 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 =$
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{X_1}(x_1) \mathrm{d}x_1 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{X_2}(x_2) \mathrm{d}x_2 =$
$\mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2]$
- **Следствие:** Ако $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$, то $\mathbb{D}[X_1 + X_2] = \mathbb{D}[X_1] + \mathbb{D}[X_2]$