Видове сходимост

Дефиниция: (почти сигурна сходимост): Нека $(X_n)_{n\geq 1}$ е редица от случайни величини в едно вероятностно пространство и X е случайна величина в същото вероятностно пространство. Тогава X_n се схожда *почти сигурно* към X, ако $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$ и пишем $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с.}} X$.
Също можем да кажем и $\mathbb{P}(\{\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X\}) = 1$

Дефиниция: (сходимост по вероятност): Нека $(X_n)_{n\geq 1}$ е редица от случайни величини в едно вероятностно пространство и X е случайна величина в същото вероятностно пространство. Тогава X_n се схожда *по вероятност* към X, ако $\mathbb{P}(A_{n,\epsilon}) = 0$ за всяко $\epsilon > 0$, където $A_{n,\epsilon} = \{\omega \in \Omega || X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}$ и пишем $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X$

Дефиниция: Ако X е случайна величина и F_X е функцията на разпределение на X, то $C_{F_X} = C_X = \{x \in \mathbb{R} | F_X \text{ е непрекъсната в } x\}$

Дефиниция: (сходимост по разпределение): Нека $(X_n)_{n\geq 1}$ е редица от случайни величини в едно вероятностно пространство и X е случайна величина в същото вероятностно пространство. Тогава X_n се схожда *по разпределение* към X, ако $\lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ за всяко $x \in C_X$ и пишем $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$

Твърдение: Ако $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$, то за всяка непрекъсната и ограничена функция f е изпълнено, че $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]$

Теорема: Нека $(X_n)_{n\geq 1}$ е редица от случайни величини в едно вероятностно пространство и X е случайна величина в същото вероятностно пространство. Тогава:

- $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с.}} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X$
- $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$

Доказателство:

1. Нека $L = \{\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X\}$ и $\mathbb{P}(L) = 1$
   Искаме $\mathbb{P}(A_{n,\epsilon}) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \forall \epsilon > 0$

$L = \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} A^C_{k,\frac{1}{r}}$, където $A^C_{k,\frac{1}{r}} = \{\omega \in \Omega | |X_k(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{r}\}$, което може да тълкуваме като: $\forall r \exists N \forall k \geq N$: $\frac{1}{r}$ е граница.

Тогава $L^C = \bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_{k,\frac{1}{r}}$ и $\mathbb{P}(L^C) = 0$

$0 = \mathbb{P}(\bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_{k,\frac{1}{r}}) \overset{r=r_0}{\Longrightarrow} \mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_{k,\frac{1}{r_0}}) = 0$ е вярно за $\forall r_0 \geq 1$

$\mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{n,\frac{1}{r_0}}) = 0$, където $B_{n,\frac{1}{r_0}} = \bigcup_{k \geq n} A_{k,\frac{1}{r_0}}$

$\iff \lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(B_{n,\frac{1}{r_0}}) = 0$

$\iff \lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(\bigcup_{k \geq n} A_{k,\frac{1}{r_0}}) = 0$

$\iff \lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_{n,\frac{1}{r_0}}) = 0$

Но $A_{n,\epsilon} \supseteq A_{n,\frac{1}{r_0}} \Longrightarrow \mathbb{P}(A_{n,\frac{1}{r_0}}) \geq \mathbb{P}(A_{n,\epsilon}) \geq 0$

След граничен преход $n \to \infty$ полуваме:

$\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_{n,\epsilon}) = 0$, което искахме.

2. Нека $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_{n,\epsilon}) = 0$

   Искаме $\mathbb{P}(X_n \leq x) \overset{n \to \infty}{\to} \mathbb{P}(X \leq x)$

   Нека фиксираме $\epsilon > 0$

   $\mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}(X_n \leq x, A_{n,\epsilon}) + \mathbb{P}(X_n \leq x, A^C_{n,\epsilon}) =$

   Понеже $\mathbb{P}(X_n \leq x, A_{n,\epsilon}) < \mathbb{P}(A_{n,\epsilon}) \to 0$, то

   $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n \leq x) = \lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n \leq x, A^C_{n,\epsilon}) \leq \mathbb{P}(X \leq x + \epsilon)$

   $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n \leq x) \leq F_X(x + \epsilon)$

   $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n \leq x) \leq \lim\limits_{\epsilon \to 0} F_X(x + \epsilon)$

   $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n \leq x) \leq F_X(x)$

   Сега искаме да проверим дали $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n \leq x) \geq F_X(x)$

   $\mathbb{P}(X_n \leq x) \geq \mathbb{P}(X_n \leq x, A^C_{n,\epsilon}) \geq \mathbb{P}(X_n \leq x - \epsilon, A^C_{n,\epsilon})$

   Аналогично получаваме желаното и окончателно $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n \leq x) = F_X(x)$

Твърдение: Нека $(X_n)_{n \geq 1}$ е редица от случайни величини в едно вероятностно пространство и $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{d} c$. Тогава $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} c$

Доказателство:

Искаме $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} c$ или $(X_n - c) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} 0$, което е същото като $\forall \epsilon > 0 : \lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(|X_n - c| > \epsilon) = 0$

Първо $X_n = c$, тогава е валидно желаното.

Нека сега $Y_n = X_n - c \xrightarrow[n \to \infty]{d} 0$

Имаме, че $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(Y_n)] = \mathbb{E}[f(Y)] = f(0)$

$f_\epsilon(y) = \min(|y|, \epsilon)$ и $f_\epsilon(0) = 0$

$\mathbb{E}[\min(|Y_n|, \epsilon)] \to 0 = f_\epsilon(0)$

$\mathbb{E}[\min(|Y_n|, \epsilon)] = \mathbb{E}[\min(|Y_n|, \epsilon) \cdot \mathbb{1}_{\{|Y_n| > \epsilon\}}] + \mathbb{E}[\min(|Y_n|, \epsilon) \cdot \mathbb{1}_{\{|Y_n| \leq \epsilon\}}] =$

$\epsilon \cdot \mathbb{P}(|Y_n| > \epsilon) + \mathbb{E}[|Y_n| \cdot \mathbb{1}_{\{|Y_n| \leq \epsilon\}}] \geq \epsilon \cdot \mathbb{P}(|Y_n| > \epsilon)$

Тогава имаме $\mathbb{E}[\min(|Y_n|, \epsilon)] \geq \epsilon \cdot \mathbb{P}(|Y_n| > \epsilon) \geq 0$ и след граничен преход $n \to \infty$ получаваме

$0 \geq \epsilon \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(|Y_n| > \epsilon) \geq 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(|Y_n| > \epsilon) = 0$

$Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$

$X_n - c \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$

$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$

Теорема: (неравенство на Чебишов): Нека X е случайна величина с крайна дисперсия и $a > 0$. Тогава

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > a) \leq \frac{\mathbb{D}[X]}{a^2}$$

Доказателство:

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}[X] &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \\
&= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2 \cdot \mathbb{1}_{\{|X - \mathbb{E}[X]| > a\}}] + \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2 \cdot \mathbb{1}_{\{|X - \mathbb{E}[X]| \leq a\}}] \\
&\geq a^2 \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{|X - \mathbb{E}[X]| > a\}}] + 0 \\
&= a^2 \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > a)
\end{aligned}$$

Откъдето $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > a) \leq \dfrac{\mathbb{D}[X]}{a^2}$

Твърдение: Нека X е случайна величина, такава, че $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$ за някое $n \in \mathbb{Z}^+$. Тогава

$$\mathbb{P}(|X| > a) < \frac{\mathbb{E}[|X|^n]}{a^n}$$

и

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > a) < \frac{\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|^n]}{a^n}$$

за всяко $a > 0$