Случайни величини

Дефиниция: (случайна величина): Нека имаме вероятностно пространство. Тогава $X : \Omega \to \mathbb{R}$ е слуайна величина, ако $\forall a < b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ е в сила $X^{-1}((a, b)) \in \mathcal{A}$, където

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

или записано по друг начин:

$$X^{-1}((a, b)) = \{\omega \in \Omega | a < X(\omega) < b\} = \{a < X < b\} \in \mathcal{A}$$

- **Забележка:** Достатъчно за X да е случайна величина е $X^{-1}((-\infty, b)) = \{X < b\} \in \mathcal{A}$, откъдето следва, че ако X е случайна величина, е вярно, че $X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ за всяко $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})s$ - бореловата аргебра

Теорема: (свойства на случайна величина): За X, Y - случайни величини във вероятностно пространство е в сила:

- $aX + bY$ е случайна величина за $\forall a, b \in \mathbb{R}$
- XY е случайна величина
- $\dfrac{X}{Y}$ е случайна величина, ако $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$
- **Доказателство:**
  - Нека $X_1 = aX$ и $Y_1 = bY$
    - При $a = 0$ имаме, че $X_1 = 0$ и го проверяваме:
      За $b \leq 0$ имаме $\{X_1 < b\} = \emptyset \in \mathcal{A}$
      За $b > 0$ имаме $\{X_1 < b\} = \Omega \in \mathcal{A}$
    - При $a > 0$ проверяваме:
      $\{X_1 < b\} = \{aX < b\} = \{X < \frac{b}{a}\} \in \mathcal{A}$, понеже X е случайна величина.
      Тогава имаме, че X_1 и Y_1 са случайни величини
  - Нека $Z = X_1 + Y_1$
    $\{Z < b\} = \{X_1 + Y_1 < b\}$ и искаме да проверим дали
    $\{X_1 + Y_1 < b\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}}(\{X_1 < q\} \cap \{Y_1 < b - q\}) = L$, понеже $L \in \mathcal{A}$
    - $\omega \in L \Longrightarrow \exists q_0 : \begin{cases} X_1(\omega) < q_0 \\ Y_1(\omega) < b - q_0 \end{cases} \Longrightarrow X_1(\omega) + Y_1(\omega) < b$
      $\Longrightarrow L \subseteq \{X_1 + Y_1 < b\}$

  - $\omega \in \{X_1 + Y_1 < b\}$ и $X_1 + Y_1 < b - 2r$ за някое $r > 0$
    Също $\exists q : q - r < X_1(\omega) < q + r$
    Тогава $Y_1(\omega) < b - 2r - X_1(\omega) < b - 2r - q + r = b - (q + r)$
    Откъдето $\omega \in \{X_1 < q + r\} \cap \{Y_1 < b - (q + r)\} \in L$
    Следователно $\{X_1 + Y_1 < b\} \subseteq L$
  - Окончателно $\{X_1 + Y_1 < b\} = L$, с което доказахме желаното.

Дефиниция: (индикаторна функция): Нека имаме вероятностно пространство и $H \in \Omega$. Тогава

$$\mathbb{1}_H = \begin{cases} 1, \omega \in H \\ 0, \omega \notin H \end{cases}$$

Свойства: (на индикаторна функция):

- $\mathbb{1}_{H^C} = 1 - \mathbb{1}_H$
- $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
- $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
- $\mathbb{1}_{(A \cup B)^C} = \mathbb{1}_{A^C} \mathbb{1}_{B^C}$
- $\mathbb{1}_{\bigcup_k A_k} = 1 - \mathbb{1}_{\bigcap_k A_k^C} = 1 - \prod_k \mathbb{1}_{A_k^C} = 1 - \prod_k (1 - \mathbb{1}_{A_k})$

Лема: Нека имаме вероятностно пространство и $H \in \mathcal{A}$. Тогава $\mathbb{1}_H : \Omega \to \mathbb{R}$ е случайна величина.

- **Доказателство:** Ако $X(\omega) = \mathbb{1}_{H(\omega)}$, то $X^{-1}(\{0\}) = H^C$ и $X^{-1}(\{1\}) = H$

  $\forall a < b$ е вярно, че $X^{-1}(a, b) = \begin{cases} \emptyset & , \quad a \geq 1 \text{ или } b \leq 0 \\ \Omega & , \ 0 \in (a, b) \text{ и } 1 \in (a, b) \\ H & , \ 0 \notin (a, b) \text{ и } 1 \in (a, b) \\ H^C & , \ 0 \in (a, b) \text{ и } 1 \notin (a, b) \end{cases}$

  Или алтернативно, $X^{-1}(-\infty, b) = \begin{cases} \emptyset & , \quad b \leq 0 \\ \Omega & , \quad b > 1 \\ H^C & , \ b \in (0, 1) \end{cases}$

  Така според дефиницията, X е случайна величина.

Дефиниция: (дискретна случайна величина): Нека имаме вероятностно пространство и H е пълна група от събития в него. Нека $\overline{x}$ е вектор или редица от числа, съотвестваща на елементарните събития в H. Тогава $X(\omega) = \sum_j x_j \mathbb{1}_{H_j(\omega)}$ се нарича дисктретна случайна величина.

Дефиниция: (разпределение на дискретна случайна величина): Нека $X = \sum_j x_j \mathbb{1}_{H_j}$ е дисктретна случайна величина. Тогава таблицата, където $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i = \mathbb{P}(H_i)$ и $\sum_j p_j = 1$, се нарича таблица на разпределение.

X	x_1	$\dots$	x_k	$\dots$
$\mathbb{P}(X = x_i)$	p_1	$\dots$	p_k	$\dots$

Твърдение: Казваме, че две дискретни случайни величини X, Y са еднакви по разпределение, ако техните таблици съвпадат, тоест $\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(Y = x_i)$ за всяко x_i и пишем $X \stackrel{d}{=} Y$.

Твърдение: Казваме, че $X_1, \dots, X_n$ са еднакви по разпределение, ако $X_1 \stackrel{d}{=} X_j$ за всяко $1 \leq j \leq n$.

Дефиниция: (смяна на променливите): Нека X, Y са две дискретни случайни величини в едно вероятностно пространство и нека $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Тогава $Z(\omega) = g(X(\omega), Y(\omega))$ е смяна на променливите X, Y.

- Ако имаме $Y = g(X)$, то $Y = \sum_j g(x_j) \mathbb{1}_{H_j}$, ако $X = \sum_j x_j \mathbb{1}_{H_j}$

Дефиниция: (независимост на дисктретни случайни величини): Нека X, Y са две дискретни случайни величини в едно вероятностно пространство. Тогава

$$X \perp Y \iff \mathbb{P}(X = x_j, Y = y_k) = \mathbb{P}(X = x_j \cap Y = y_k) = \mathbb{P}(X = x_j) \cdot \mathbb{P}(Y = y_k) \; \forall j, k$$

Дефиниция: (независимост в съвкупност): Нека $X_1, \dots, X_n$ са дискретни случайни величини в едно вероятностно пространство. Тогава те са независими в съвкупност, ако

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Дефиниция: (функция на разпределение): Нека X е дискретна случайна величина в едно вероятностно пространство. Тогава $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x)$, $\forall x \in (-\infty, \infty)$, се нарича функция на разпределение на X.

Нотация: Ако две дискретни случайни величини X, Y са независими и еднакво разпределени с величината Z, пишем $X, Y \stackrel{iid}{\sim} Z$