

Точната формула за оценка се формира в зависимост от резултатите, като минималният резултат, за да бъде успешен изпитът е 1 точка. За приблизителна, може да използвате 2 + брой точки. Време за работа: 3 часа. Успех.

Формули за интегриране:  $\int u dv = uv - \int v du$ ,  $df(x) = f'(x)dx$ .

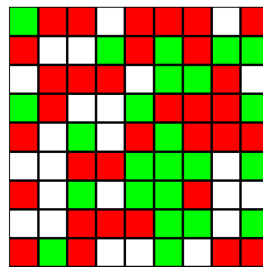
**Задача 1.** Стандартната рулетка включва 18 червени, 18 черни и едно зелено число. При успешен залог на черно/червено казиното изплаща заложената сума по две.

1. (0.5 т.) Приемете, че залозите са само по 1 лв. Колко залога за ден трябва да приеме казиното, за да очаква, че ще спечели поне 1000 лв на ден с вероятност 90%? При този брой залози, каква е вероятността казиното да е на загуба за даден ден?
2. (0.25 т.) Възможно е и да се залага и на конкретно число, като тогава печалбата е 36 пъти залога. Кое бихте предпочели: да заложите на едно конкретно число или на черно/червено? (Сравнете очакванията и дисперсиите и изберете спрямо тях.)
3. (0.25 т.) Ако имате 5 лв, какво бихте предпочели: да заложите 5 пъти на някое число при 5 завъртания, на 5 различни числа при 1 завъртане или 5 лева на черно/червено при 1 завъртане?

**Задача 2.** Нека съвместната плътност на  $X$  и  $Y$  е  $f_{X,Y}(x,y) = cx^3y$  за  $x, y \geq 0, x + y \leq 1$  и 0 извън тази област, където  $c$  е някаква константа. Намерете:

1. (0.5 т.)  $c$ , плътността на  $X$  и очакването на  $Y$ . Обяснете как бихте пресметнали  $Cor(X, Y)$ ;
2. (0.25 т.)  $E(Y|X = 1/2)$  и  $E(X|X = 1/2)$ ;
3. (0.25 т.) плътността на случайната величина  $Z = XY$ .

**Задача 3.** Квадратчетата от решетка 9x9 се оцветят по случаен начин в един от цветовете бяло, зелено и червено.



1. (0.5 т.) Какъв е очакваният брой на квадратчетата, които са оцветени в бяло или зелено? Каква е вероятността те да бъдат поне 60?  
Хоризонтално (вертикално) знаме ще наричаме три последователни хоризонтални (вертикални) клетки, оцветени в бяло, зелено и червено от ляво надясно (от горе надолу).
2. (0.25 т.) Вярно ли е, че броят хоризонтални знамена е биномно разпределен и ако да, с какви параметри?
3. (0.25 т.) Какво е очакването на броя хоризонтални знамена?
4. (0.25 т.) Независими ли са броевете хоризонтални и вертикални? Какъв е очакваният общ брой на хоризонтални И вертикални знамена?

**Задача 4.** Нека  $X_1, X_2, \dots$  независими  $Exp(1)$  сл. вел. и  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .

1. (0.5 т.) Намерете плътността на  $S_2$  и докажете по индукция, че плътността на  $S_n$  е

$$f_{S_n}(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} \mathbb{1}_{\{x>0\}}.$$

2. (0.25 т.) Нека  $N_t := \max\{n : S_n \leq t\}$ . Докажете, че  $\mathbb{P}(N_t \geq n) = \mathbb{P}(S_n \leq t)$  и че  $\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(S_n \leq t) - \mathbb{P}(S_{n+1} \leq t)$ .
3. (0.25 т.) Намерете разпределението на  $N_t$ .