2020-2021

ELEMENTS DE CORRECTION DES EXERCICES DU TD3 DE TRAITEMENT DU SIGNAL
Sciences du Numérique - Première année

Exercice 1 : Effet de l'échantillonnage

Soit le signal suivant : $x(t) = \cos(2\pi f_0 t),\ f_0 = 10$ kHz.

1. Tracer la transformée de Fourier de $x(t)$: $X(f)$.
   La transformée de Fourier de $x(t)$, $X(f)$, est tracée sur la figure 1.

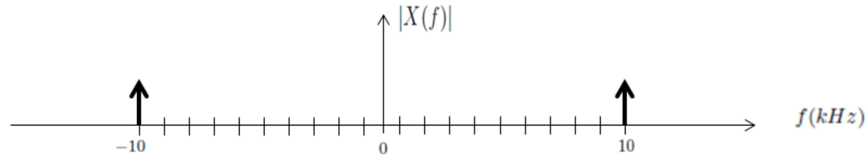

FIGURE 1 – Transformée de Fourier de $x(t) = \cos(2\pi f_0 t),\ f_0 = 10$ kHz.

2. Est-il possible d'échantillonner $x(t)$ sans perte d'information ? Si oui à quelle condition ?
   Il est possible d'échantillonner $x(t)$ sans perte d'information en utilisant une fréquence d'échantillonnage $F_e > 2f_0 = 20$ kHz (respect de la condition de Shannon).
3. Tracer, entre 0 et F_e, la transformée de Fourier de $x(t)$ échantillonné à $T_e = 1/F_e$ quand :
   (a) $F_e = 30$ kHz.
   (b) $F_e = 8$ kHz.
   La transformée de Fourier de $x(t)$, échantillonné à $T_e = 1/F_e$, est tracée entre 0 et F_e sur la figure 2 quand $F_e = 30$ kHz et sur la figure 3 quand $F_e = 8$ kHz.

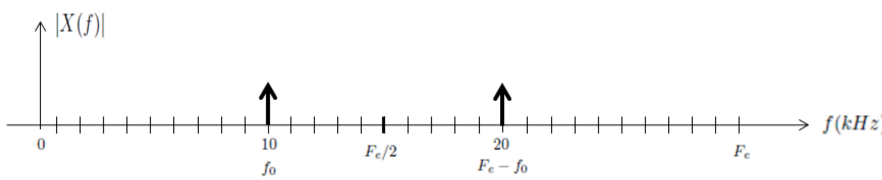

FIGURE 2 – Transformée de Fourier de $x(t) = \cos(2\pi f_0 t),\ f_0 = 10$ kHz, $F_e = 30$ kHz.

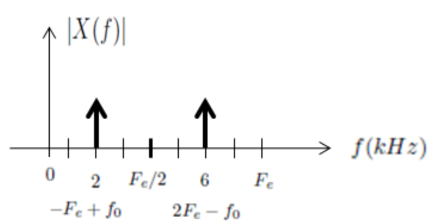

FIGURE 3 – Transformée de Fourier de $x(t) = \cos(2\pi f_0 t),\ f_0 = 10$ kHz, $F_e = 8$ kHz.

4. A partir des échantillons nous souhaitons reconstruire $x(t)$ par filtrage passe-bas à $F_e/2$. Quels seront les signaux obtenus pour chaque fréquence d'échantillonnage précédente ?
   Par filtrage passe-bas à $F_e/2$, nous obtenons $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, avec $f_0 = 10$ kHz pour $F_e = 30$ kHz, et $x(t) = \cos(2\pi f_1 t)$, avec $f_1 = 2$ kHz pour $F_e = 8$ kHz.

Exercice 2 : Echantillonneur moyenneur

L'échantillonneur moyenneur est une méthode pratique d'échantillonnage qui consiste à calculer, toutes les T_e secondes (période d'échantillonnage), la valeur moyenne du signal pendant un intervalle de temps θ ($\theta << T_e$) et à affecter cette valeur moyenne à l'échantillon discrétisé :

$$\begin{aligned} y\left(kT_e\right) &= \frac{1}{\theta}\int_{kT_e-\theta}^{kT} x(u)du \\ x_{ech}(t) &= \sum_k y\left(kT_e\right)\delta\left(t-kT_e\right) \end{aligned}$$

1. Démontrer que le signal échantillonné $x_{ech}(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$x_{ech}(t) = \frac{1}{\theta}\left[\Pi_\theta\left(t\right) * x\left(t-\frac{\theta}{2}\right)\right].\,Ш_{T_e}\left(t\right)$$

   où $\Pi_\theta\left(t\right)$ et $Ш_{T_e}\left(t\right)$ représentent respectivement la fenêtre rectangulaire de largeur θ et le peigne de Dirac de période T_e.
   $x_{ech}(t) = \sum_k y\left(kT_e\right)\delta\left(t-kT_e\right) = y(t)\sum_k \delta\left(t-kT_e\right) = y(t).\,Ш_{T_e}\left(t\right)$. Reste à montrer que $y(t) = \frac{1}{\theta}\left[\Pi_\theta\left(t\right) * x\left(t-\frac{\theta}{2}\right)\right]$:
   $y(t) = \frac{1}{\theta}\int_{t-\theta}^{t} x(u)du = \frac{1}{\theta}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\times\Pi_\theta\left(u-\left(t-\frac{\theta}{2}\right)\right)du = \frac{1}{\theta}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\times\Pi_\theta\left(\left(t-\frac{\theta}{2}\right)-u\right)du = \frac{1}{\theta}\left(x*\Pi_\theta\right)\left(t-\frac{\theta}{2}\right)$
2. En déduire la transformée de Fourier correspondante $X_{ech}\left(f\right)$.
   $X_{ech}(f) = Y(f) * \frac{1}{T_e}Ш_{1/T_e}\left(f\right) = \frac{1}{T_e}\sum_k Y\left(f-\frac{k}{T_e}\right)$, avec $Y(f) = sinc(\pi f\theta)X(f)e^{-j\pi f\theta}$
3. En considérant un signal à support spectral borné $2\Delta f$ et en prenant en compte que la fonction $sinc(\pi\theta f)$ peut être supposée constante sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{3\theta},\frac{1}{3\theta}\right]$

$$sinc(\pi\theta f) = \frac{\sin(\pi\theta f)}{\pi\theta f} \approx 1 \text{ pour } f \in \left[-\frac{1}{3\theta},\frac{1}{3\theta}\right]$$

   (a) quelle(s) condition(s) doit vérifier θ pour que le signal $x(t)$ puisse être restitué par filtrage de $x_{ech}(t)$?
   Il faut que $\Delta f \leq \frac{1}{3\theta} \Leftrightarrow \theta \leq \frac{1}{3\Delta f}$

   (b) Dans ces conditions peut-on échantillonner à la fréquence de Shannon ?
   Après filtrage antialiasing on pourra prendre F_e tel que $\Delta f < \frac{F_e}{2} = \frac{1}{2T_e} \Leftrightarrow T_e < \frac{1}{2\Delta f}$