

Actividad 5. Movimiento armónico simple: Péndulo

Rosa Luz Zamora Peinado

Febrero de 2016

Introducción

En esta actividad se realizó un programa utilizando la función `scipy.integrate.odeint` de Python para resolver la ecuación diferencial que describe el movimiento de un péndulo simple y un péndulo amortiguado. Se presentan, más adelante, el código y las gráficas obtenidas.

El péndulo es un sistema físico que puede oscilar bajo la acción gravitatoria u otra característica física (elasticidad, por ejemplo) y que está configurado por una masa suspendida de un punto o de un eje horizontal fijos mediante un hilo, una varilla, u otro dispositivo que sirve para medir el tiempo.

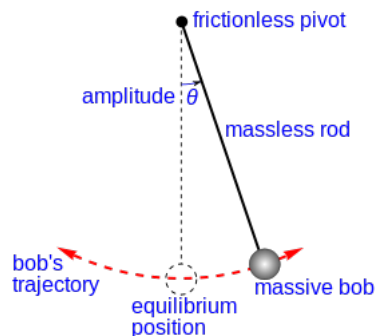


Figura 1: Diagrama de péndulo simple.

Una simplificación del péndulo, valga la redundancia, es el péndulo simple; el cual tiene de las siguientes características.

- La cuerda en la que el péndulo se balancea no tiene masa, no se estira y permanece tensa.
- La lenteja es una masa puntual.
- El movimiento ocurre solo en dos dimensiones, i.e. la lenteja no traza una elipse sino un arco.

- El movimiento no pierde energía por fricción o por la resistencia del aire.
- El campo gravitacional es uniforme.
- El soporte no se mueve.
- La ecuación diferencial que representa el movimiento de un péndulo simple es:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (1)$$

donde g es la aceleración de la gravedad, l es la longitud de la cuerda y θ el desplazamiento angular.

en esta práctica se trabajó también con el péndulo amortiguado, el cual obedece a la ecuación (1) pero con un componente extra de amortiguamiento b . Utilizamos la siguiente ecuación

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (2)$$

Resulta que solucionando (2) para θ , encontramos un movimiento periódico que con $b > 0$ muestra decaimientos exponenciales en la velocidad angular y el ángulo de apertura del péndulo. A continuación se presenta el código base utilizado:

```
#Forma de la ecuación diferencial
#theta''(t) + b*theta'(t) + c*sin(theta(t)) = 0

#theta'(t) = omega(t)
#omega'(t) = -b*omega(t) - c*sin(theta(t))
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

def pend(y, t, b, c):
    theta, omega = y
    dydt = [omega, -b*omega - c*np.sin(theta)]
    return dydt

b = 0.15 #Coeficiente de amortiguamiento
g= 9.8 #Aceleración de la gravedad
l= 1 #Longitud del péndulo
c=g/l

y0 = [np.pi/6, 3] #[ángulo inicial, velocidad inicial]

t = np.linspace(0, 40, 1000) #generación de puntos
```

```
sol = odeint(pend, y0, t, args=(b, c)) #solución a la ecuación diferencial

plt.plot(t, sol[:, 0], 'teal', label='theta(t)') #gráfica de theta vs t
plt.plot(t, sol[:, 1], 'mediumvioletred', label='omega(t)') #gráfica de omega vs
plt.legend(loc='best')
plt.xlabel('t')
plt.grid()
plt.show()
```

A continuación se presentan las gráficas obtenidas para ambos tipos de péndulo: simple y amortiguado, las cuales concuerdan con la intuición física y con lo aprendido en los cursos de Mecánica II y Ecuaciones Diferenciales.

Péndulo Simple: $b = 0$

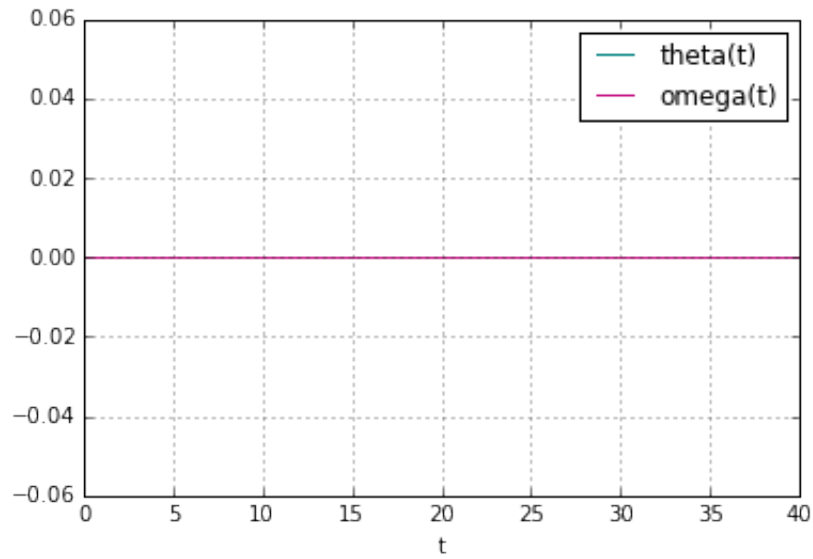


Figura 2: Péndulo simple: $\theta = 0$, $\omega = 0,0 \frac{rad}{s}$

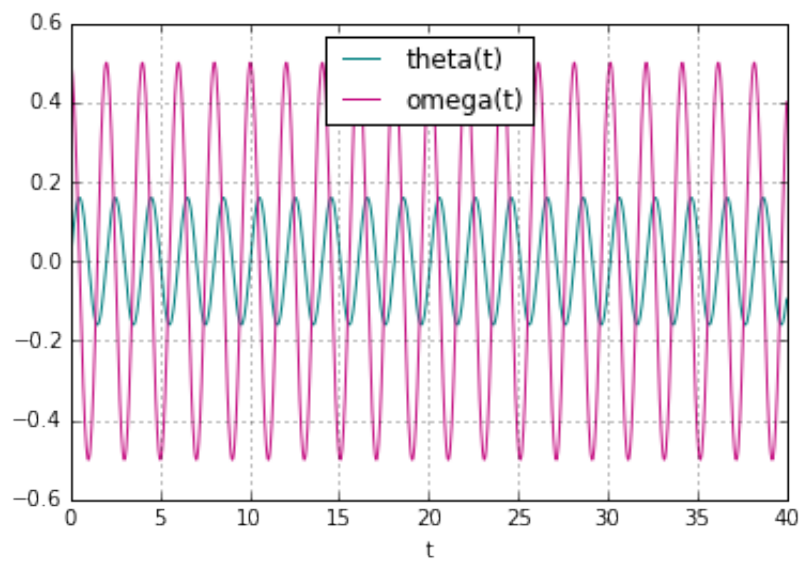


Figura 3: Péndulo simple: $\theta = 0,0$, $\omega = 0,5 \frac{rad}{s}$

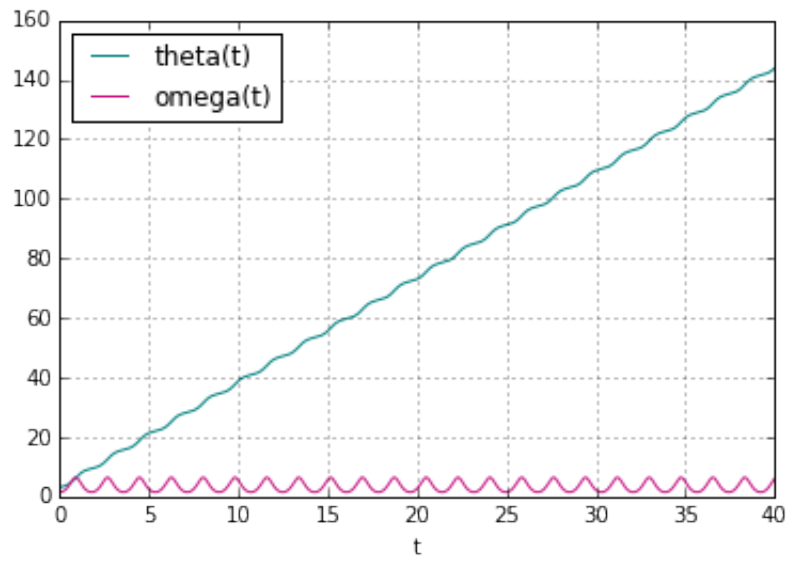


Figura 4: Péndulo simple: $\theta = \pi$, $\omega = 1,5 \frac{rad}{s}$

Péndulo Amortiguado: $b \neq 0$

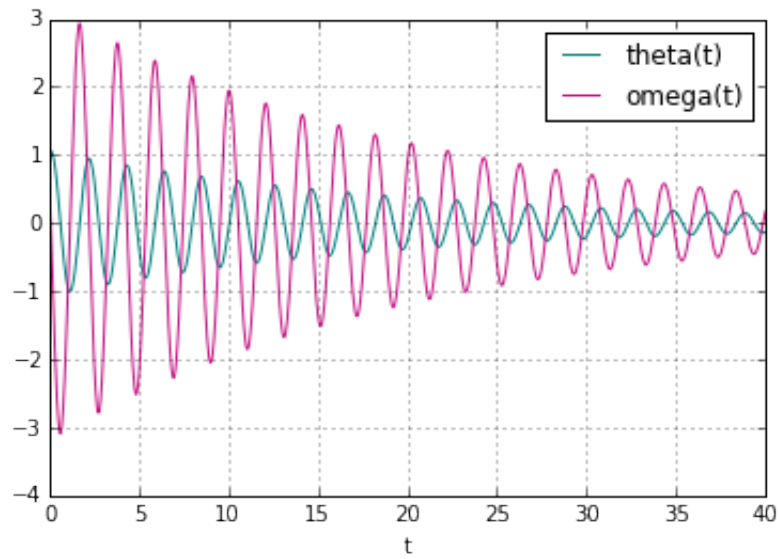


Figura 5: Péndulo amortiguado: $b = 0,1$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\omega = 0,5 \frac{rad}{s}$

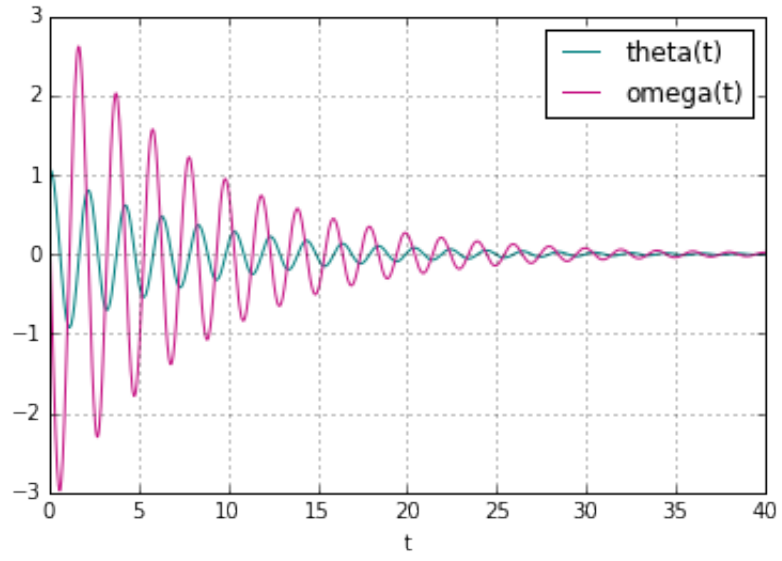


Figura 6: Péndulo amortiguado: $b = 0,25$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\omega = 0,5 \frac{rad}{s}$

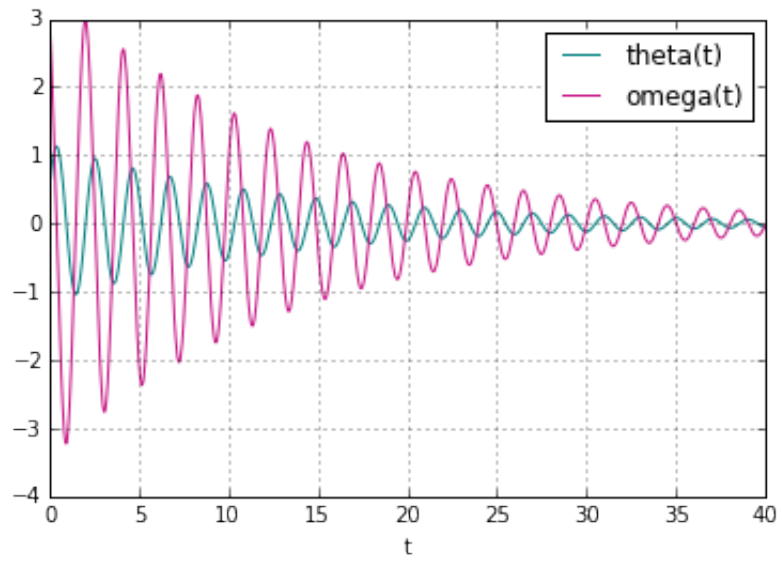


Figura 7: Péndulo amortiguado: $b = 0,15$, $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\omega = 3,0 \frac{rad}{s}$

Bibliografía

- [1] Física Computacional(2016-2) *Actividad 5*. Recuperado el 01 de marzo de 2016 de [http://computacional1.pbworks.com/w/page/105233358/Actividad%205%20\(2016-1\)\)](http://computacional1.pbworks.com/w/page/105233358/Actividad%205%20(2016-1)))
- [2] Wikipedia *Mathematical Pendulum*. Recuperado el 01 de marzo de 2016 de https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_%28mathematics%29