# Actividad 9. Aproximación al cálculo del periodo del péndulo

Rosa Luz Zamora Peinado

Mayo de 2016

### Introducción

Recordemos que en actividades anteriores se trabajó con el periodo del péndulo. En esta actividad se utiliza la herramienta de Maxima para crear mejores aproximaciones mediante expansiones de series de Taylor. Los productos de esta actividad son la aproximación al periodo exacto del péndulo y una gráfica de su error relativo realizada en Python con series de potencia utilizando Matplotlib.

### PERIODO EXACTO DEL PÉNDULO

### Planteamiento del problema

Teniendo la siguiente expresión para el periodo exacto del péndulo

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}\, d\theta$$

y sabiendo que podemos escribir la expresión anterior como una integral elíptica de primer tipo:

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\, K\left(\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)$$

donde $F$ será la integral completa del primer tipo:

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}\, du$$

Demostrar, entonces, que la integral elíptica puede ser aproximada por una serie de potencias descrita por la expresión:

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \cdots + \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 k^{2n} + \cdots\right\}$$

donde $n!!$ es el doble factorial.Entonces la solución exacta del péndulo es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right)+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\sin^6\left(\frac{\theta_0}{2}\right)+\cdots\right)$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{(2n)!}{(2^n\cdot n!)^2}\right)^2\cdot\sin^{2n}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right].$$

Ahora bien, aplicando una serie de Maclaurin:MXSubir un videoAcceder

Buscar

$$\sin\frac{\theta_0}{2} = \frac{1}{2}\theta_0 - \frac{1}{48}\theta_0^3 + \frac{1}{3840}\theta_0^5 - \frac{1}{645120}\theta_0^7 + \cdots$$

mostrar que podemos expresar al periodo del péndulo $T$ como:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1+\frac{1}{16}\theta_0^2+\frac{11}{3072}\theta_0^4+\frac{173}{737280}\theta_0^6+\frac{22931}{1321205760}\theta_0^8+\frac{1319183}{951268147200}\theta_0^{10}+\frac{23352646}{200907832688}\right.$$

A continuación se muestra el procedimiento con sus respectivos resultados en Maxima

```
(%i1)  K: 1/sqrt(1-(k^2)*(sin(u))^2);
```

(%o1) $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin(u)^2}}$

MXS

```
(%i2)  integrate(K, u, o, %pi/2);
```

un videoAcceder

Buscar

(%o2) $\int_o^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin(u)^2}}du$

Buscar

```
(%i3)  tK: taylor(K, u, 0, 8);
```

Buscar

(%o3)/T/ $1+\frac{k^2u^2}{2}+\frac{(9k^4-4k^2)\,u^4}{24}+\frac{(225k^6-180k^4+16k^2)\,u^6}{720}+\frac{(11025k^8-12600k^6+3024k^4-}{40320}$

...

```
(%i4)  eK: expand(integrate(tK, u, 0, %pi/2));
```

(%o4) $\frac{35\pi^9k^8}{589824}-\frac{5\pi^9k^6}{73728}+\frac{5\pi^7k^6}{14336}+\frac{\pi^9k^4}{61440}-\frac{\pi^7k^4}{3584}+\frac{3\pi^5k^4}{1280}-\frac{\pi^9k^2}{2903040}+\frac{\pi^7k^2}{40320}-\frac{\pi^5k^2}{960}+\frac{\pi^3k^2}{48}+\frac{\pi}{2}$

```
(%i5)  sK: subst(sin(%theta/2), k, eK);
```

$$(\%o5)\quad \frac{35\,\pi^9\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^8}{589824}-\frac{5\,\pi^9\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^6}{73728}+\frac{5\,\pi^7\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^6}{14336}+\frac{\pi^9\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{61440}-\frac{\pi^7\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{3584}+$$
$$\frac{3\,\pi^5\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{1280}-\frac{\pi^9\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{2903040}+\frac{\pi^7\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{40320}-\frac{\pi^5\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{960}+\frac{\pi^3\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{48}+\frac{\pi}{2}$$

```
(%i7)  ssK: sK*2/%pi;
```

$$(\%o7)\quad \frac{2\left(\frac{35\,\pi^9\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^8}{589824}-\frac{5\,\pi^9\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^6}{73728}+\frac{5\,\pi^7\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^6}{14336}+\frac{\pi^9\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{61440}-\frac{\pi^7\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{3584}+\frac{3\,\pi^5\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{1280}-\frac{\pi^9\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{2903040}+\pi^7\right.}{\pi}$$

```
(%i8)  essK: expand(ssK);
```

$$(\%o8)\quad \frac{35\,\pi^8\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^8}{294912}-\frac{5\,\pi^8\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^6}{36864}+\frac{5\,\pi^6\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^6}{7168}+\frac{\pi^8\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{30720}-\frac{\pi^6\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{1792}+$$
$$\frac{3\,\pi^4\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{640}-\frac{\pi^8\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{1451520}+\frac{\pi^6\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{20160}-\frac{\pi^4\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{480}+\frac{\pi^2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{24}+1$$

```
(%i11) T: (2*%pi)*sqrt(l/g);
```

$$(\%o11)\quad 2\,\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

```
(%i12) define(T(theta), T*essK);
```

$$(\%o12)\quad \mathrm{T}(\theta):=2\,\pi\left(\frac{35\,\pi^8\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^8}{294912}-\frac{5\,\pi^8\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^6}{36864}+\frac{5\,\pi^6\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^6}{7168}+\frac{\pi^8\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{30720}-\frac{\pi^6\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{1792}+3\right.$$

```
(%i13) S: sin(%theta/2);
```

$$(\%o13)\quad \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

```
(%i14) sS: taylor(S, %theta, 0, 8);
```

$$(\%o14)/T/\quad \frac{\theta}{2}-\frac{\theta^3}{48}+\frac{\theta^5}{3840}-\frac{\theta^7}{645120}+\ldots$$

```
(%i20) mlT: subst(sS, S, T(theta));
```

$$(\%o20)/T/\quad 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}-\frac{\left(\pi^9-72\,\pi^7+3024\,\pi^5-60480\,\pi^3\right)\sqrt{\frac{l}{g}}\,\theta^2}{2903040}+\frac{\left(571\,\pi^9-10008\,\pi^7+93744\,\pi^5-24192\right.}{139345920}$$
$$\frac{\left(82231\,\pi^9-560052\,\pi^7+1681344\,\pi^5-967680\,\pi^3\right)\sqrt{\frac{l}{g}}\,\theta^6}{16721510400}+\frac{\left(7632451\,\pi^9-23682528\,\pi^7+27627264\right.}{3745618329600}$$
$$\ldots$$

**Gráfica de error relativo**

Comose mencionó al principio, para crear esta gráfica se utilizó un código en Python que resuelve las series de potencia:

y a contiuación, el código utilizado:

```
#BIBLIOTECAS UTILIZADAS
from scipy.integrate import quad
import numpy as np
```

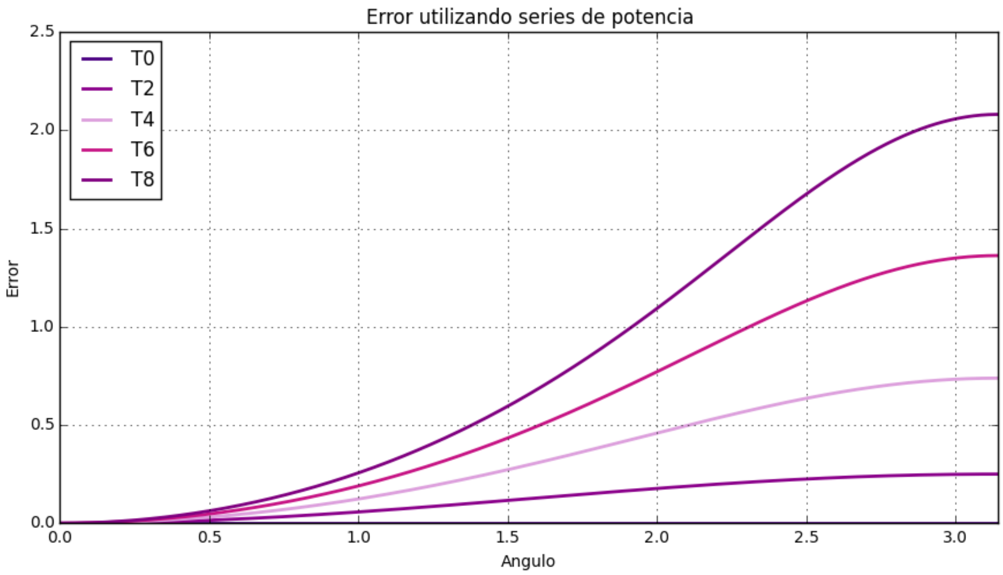


Figura 1: Gráfica de error relaitivo para el periodo del péndulo.

```
import matplotlib.pyplot as plt

#Definiendo las constantes
#gravedad
g=9.8
#longitud de la cuerda
l=2.5

#Periodo base
T0=2*np.pi*np.sqrt(l/g)

n=1000
#Error añadido para evitar división entre 0
e=0.0001
#Rango de theta0
theta0=np.linspace(e,(np.pi)+e,n)


#Definiendo arreglos para resultados arrojados
S=[0 for i in range(n)]
TT=[0 for i in range(n)]
R=[0 for i in range(n)]
T=[0 for i in range(n)]
real0=[0 for i in range(n)]
real2=[0 for i in range(n)]
```

```
real4=[0 for i in range(n)]
real6=[0 for i in range(n)]
real8=[0 for i in range(n)]

#-------------------------------------------
#Creando doble loop para considerar los casos
#donde se agregan mas terminos de la serie de potencias


M0=0

#Comenzando un loop para poder calcular todos los resultados
#posibles contemplando un angulo inicial variante
for i in range(M0):
    for j in range(0,n):
        F1=float(math.factorial(2*i))
        F2=float(((2**i)*(math.factorial(i)))**2)

        S[j]=np.sin(theta0[j]/2)**(2*i)
        TT[j]=((F1/F2)**2)*(S[j])
        R[j]=TT[j]+R[j]
        T[j]=R[j]*T0
        real0[j]=(T[j]/T0)
#-------------------------------------------
M2=2
for i in range(M2):
    for j in range(0,n):
        F1=float(math.factorial(2*i))
        F2=float(((2**i)*(math.factorial(i)))**2)

        S[j]=np.sin(theta0[j]/2)**(2*i)
        TT[j]=((F1/F2)**2)*(S[j])
        R[j]=TT[j]+R[j]
        T[j]=R[j]*T0
        real2[j]=(T[j]/T0)-1
#-------------------------------------------
M4=4
for i in range(M4):
    for j in range(0,n):
        F1=float(math.factorial(2*i))
        F2=float(((2**i)*(math.factorial(i)))**2)

        S[j]=np.sin(theta0[j]/2)**(2*i)
        TT[j]=((F1/F2)**2)*(S[j])
        R[j]=TT[j]+R[j]
        T[j]=R[j]*T0
```

```
        real4[j]=(T[j]/T0)-2
#-------------------------------------------
M6=6
for i in range(M6):
    for j in range(0,n):
        F1=float(math.factorial(2*i))
        F2=float(((2**i)*(math.factorial(i)))**2)

        S[j]=np.sin(theta0[j]/2)**(2*i)
        TT[j]=((F1/F2)**2)*(S[j])
        R[j]=TT[j]+R[j]
        T[j]=R[j]*T0
        real6[j]=(T[j]/T0)-3
#-------------------------------------------
M8=8
for i in range(M8):
    for j in range(0,n):
        F1=float(math.factorial(2*i))
        F2=float(((2**i)*(math.factorial(i)))**2)

        S[j]=np.sin(theta0[j]/2)**(2*i)
        TT[j]=((F1/F2)**2)*(S[j])
        R[j]=TT[j]+R[j]
        T[j]=R[j]*T0
        real8[j]=(T[j]/T0)-4

#Gráfica
plt.plot(theta0, real0, 'indigo',linewidth=2, label="T0")
plt.plot(theta0, real2, 'darkmagenta',linewidth=2, label="T2")
plt.plot(theta0, real4, 'plum',linewidth=2, label="T4")
plt.plot(theta0, real6, 'mediumvioletred',linewidth=2, label="T6")
plt.plot(theta0, real8, 'purple',linewidth=2, label="T8")
plt.title('Error utilizando series de potencia')
plt.grid()
plt.xlabel('Angulo')
plt.xlim(0,np.pi)
plt.ylabel('Error')
plt.legend(loc='best')
```

## BIBLIOGRAFÍA

[**1**] Física Computacional(2016-2) *Actividad 9*. Recuperado en mayo de 2016 de `http://computacional1.pbworks.com/w/page/106821012/Actividad%209%20(2016-1)`

[**2**] Wikipedia *Pendulum(mathematics)* .Recuperado en mayo de 2016 de `https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_(mathematics)`