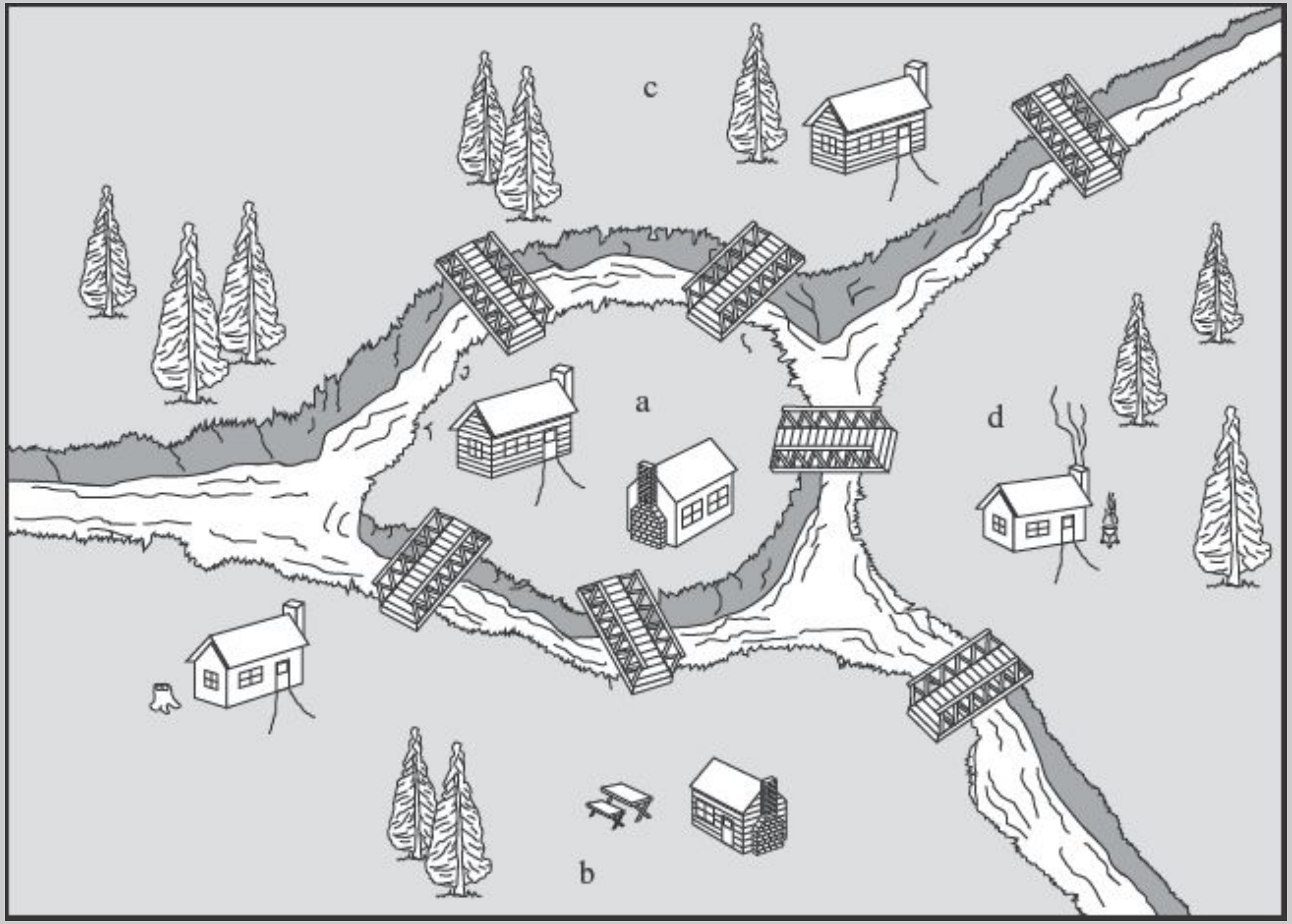
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

Caminho de Euler e Circuito Hamiltoniano

SUMÁRIO

- Problema do Caminho de Euler
- Problema do Circuito Hamiltoniano

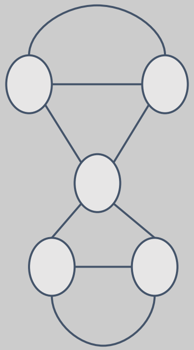
Problema do Caminho de Euler

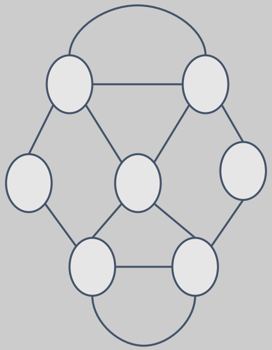


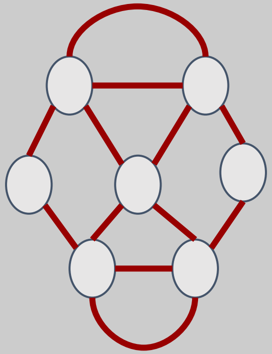
Fonte: Adaptado de Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação. J.L. Gersting.

Problema do Caminho de Euler

Um caminho de Euler em um grafo G é um caminho que usa cada arco em G exatamente uma vez.







Problema do Caminho de Euler

Teorema: O número de nós ímpares em qualquer grafo é par.

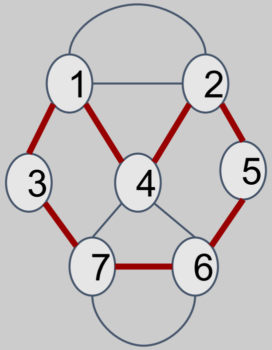
Prova: Vamos supor um grafo conexo, caso contrário não há caminho de Euler. Seja N(i) o número de nós com grau i e S a soma de todos os graus de todos os nós do grafo

$$S=1.N(1)+2N(2)+...+i.N(i)+...k.N(k) =$$
$$= 2.N(2)+4N(4)+6N(6)+...+2mN(2m)+$$
$$+1.N(1)+3N(3)+5N(5)+...+(2m+1)N(2m+1)=$$

Problema do Caminho de Euler

Teorema: O número de nós ímpares em qualquer grafo é par.

Prova: A soma S é de fato uma contagem do número total de extremidades de arco no grafo.



$S=2.N(2)+4N(4)=4+20=24=2.|A|=2.12=24$

Problema do Caminho de Euler

Teorema: O número de nós ímpares em qualquer grafo é par.

Prova:

Sendo $S=2.|A|$(par), temos que

$S=1.N(1)+2N(2)+...+i.N(i)+...k.N(k) =$

$= 2.N(2)+4N(4)+6N(6)+...+2mN(2m)+$

$+1.N(1)+3N(3)+5N(5)+...+(2m+1)N(2m+1)=$

$=2X +1.N(1)+3N(3)+5N(5)+...+(2m+1)N(2m+1)=$

Pois, $2.N(2)+4N(4)+6N(6)+...+2mN(2m)=2X$ (par)

Problema do Caminho de Euler

Teorema: O número de nós ímpares em qualquer grafo é par.

Prova:

$S=2X+1.N(1)+3N(3)+5N(5)+...+(2m+1)N(2m+1)$

$2|A|=2X+1.N(1)+3N(3)+5N(5)+...+(2m+1)N(2m+1)$

$2|A|-2X = 1.N(1)+3N(3)+5N(5)+...+(2m+1)N(2m+1)$

$2B=1.N(1)+3N(3)+5N(5)+...+(2m+1)N(2m+1)$

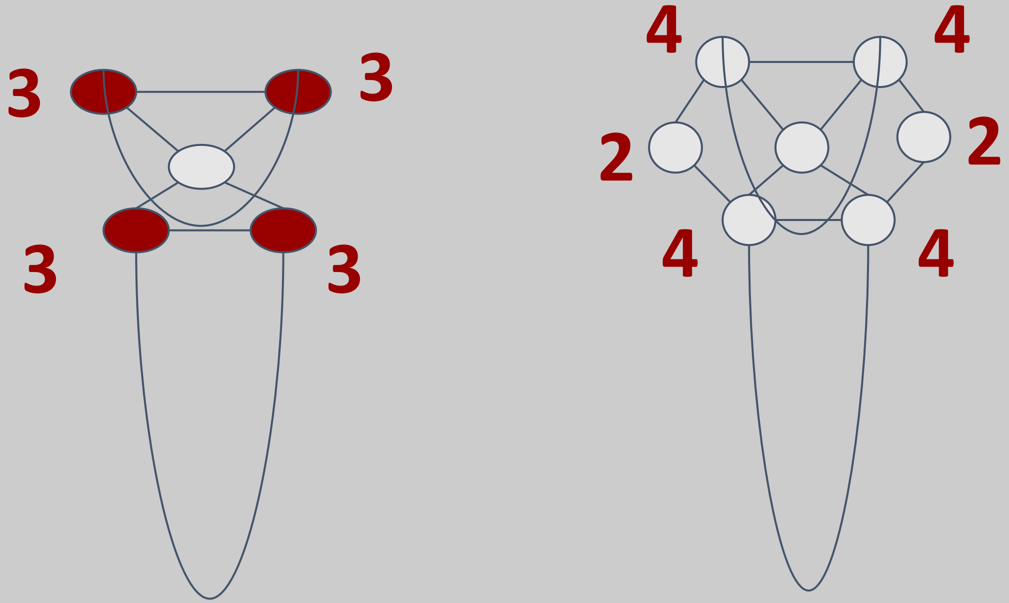
Para que a soma dos números ímpares seja par, precisamos ter um número par de número ímpares.

Problema do Caminho de Euler

Teorema: Existirá um caminho de Euler em um grafo conexo se, e somente se, não existirem nós ímpares ou existirem exatamente dois nós ímpares. No caso em que não existem nós ímpares, o caminho pode começar em qualquer nó e terminar aí; no caso de dois nós ímpares, o caminho precisa começar em um deles e terminar no outro.

Problema do Caminho de Euler

Exemplo:



Determina se existe um caminho de Euler em um grafo conexo sem laços

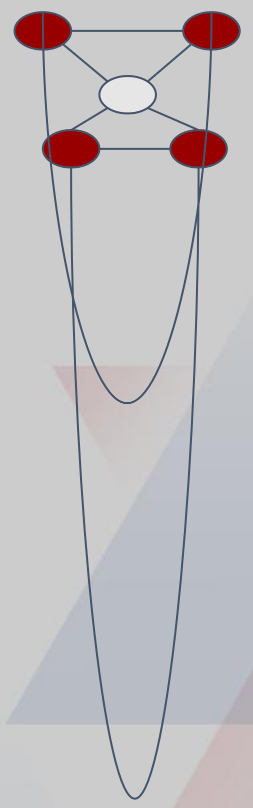
```
CaminhoDeEuler (matriz n × n A)
total = 0, i = 1
Enquanto (total ≤ 2) e (i ≤ n) faça
    grau = 0
     para j = 1 até n faça
            grau = grau + A_ij //encontra o grau do nó i (*)
    fim do para
    Se grau é ímpar, então
                  total = total + 1 //encontrou outro nó ímpar
    fim do se
    i = i + 1
fim do enquanto
Se total > 2 então Escreva("Não há caminho de Euler")
Senão    Escreva("Há caminho de Euler")
fim do se
```

Problema do Caminho de Euler

Exemplo:

grau = 0
para j = 1 até n faça
grau = grau + A_{ij}
fim do para
Se grau é ímpar, então
total = total + 1

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$



i=1	i=2	i=3	i=4	
grau = 3	grau = 3	grau = 4	grau = 3	Não há Caminho de Euler
total=1	total=2	total=2	total=3	

Problema do Circuito Hamiltoniano

Um **circuito hamiltoniano** em um grafo é um ciclo contendo todos os nós do grafo.

Problema do Circuito Hamiltoniano

Caminho de Euler:

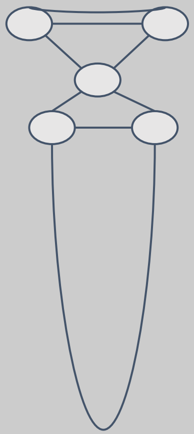
- Todos os arcos são usados exatamente uma vez, mas os nós podem ser repetidos.

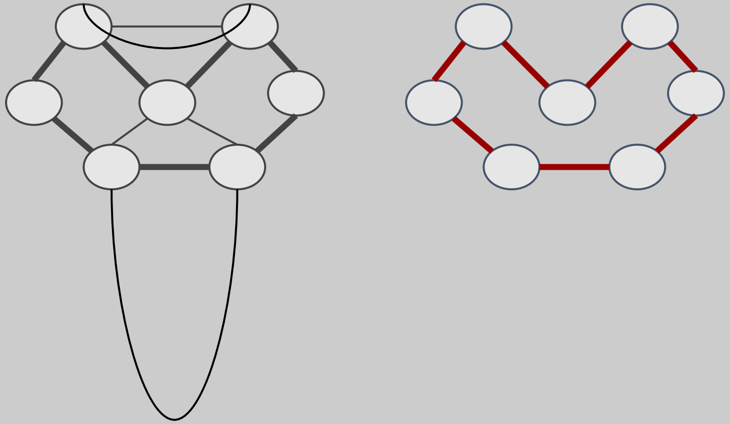
Circuito hamiltoniano:

- Todos os nós são visitados exatamente uma vez, exceto pelo nó inicial, e podemos ter arcos não usados.
- Nenhum arco é usado mais de uma vez, senão algum nó seria visitado novamente.

Problema do Circuito Hamiltoniano

Exemplo:





Problema do Circuito Hamiltoniano

- **Embora o problema do circuito hamiltoniano pareça bastante semelhante ao do caminho de Euler, existe uma diferença básica: nunca se encontrou um algoritmo eficiente para determinar se existe um circuito hamiltoniano.**

Os conceitos e exemplos apresentados nesses slides são baseados no conteúdo da seção 7.2 do material-base “Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação”, J.L. Gersting, 7a edição, LTC editora.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

Caminho de Euler e Circuito Hamiltoniano