FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

Matrizes

SUMÁRIO

Terminologia

Dados em muitos tipos de problemas podem ser representados por meio de um arranjo retangular de valores.

Vendas de carros em 2020
1o Semestre

	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN
Loja 1	102	90	84	76	31	12
Loja 2	100	95	75	50	29	15

Terminologia

$$A=\begin{vmatrix} 3 & 8 & -3 \\ 5 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

Dimensões da matriz: número de linhas e de colunas

A:2x3 ou A_{2x3}

Elementos de uma matriz: a_{ij}

$$A=\begin{vmatrix} 3 & 8 & -3 \\ 5 & -2 & 7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Terminologia

Exemplo: Considere S = {2, 5, 7, 9} e a relação

ρ= {(7, 9), (2, 5), (9, 9), (2, 7)} em SxS.

Vamos usar uma matriz para representar ρ

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 2 & 5 & 7 & 9 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{array} & R= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

Terminologia

Para duas matrizes serem iguais elas têm que ter as mesmas **dimensões** e os **mesmos elementos** em cada posição.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Matrizes quadradas: número de linhas é igual ao de colunas.

Diagonal Principal

$$A_{4x4} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Terminologia

Matriz simétrica: $a_{ij} = a_{ji}$

$a_{12}=4=a_{21}$

$a_{24}=8=a_{42}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 2 & 9 \\ 6 & 8 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

Operações Matriciais

Multiplicação por escalar: αA

$$3.\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 & 4 \\ -1 & 7 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 9 & 4 & 12 \\ -3 & 21 & 3 & 15 \end{vmatrix}$$

Soma de Matrizes: $C=A+B$

A e B devem ter as mesmas dimensões.

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 & 4 \\ -1 & 7 & 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 9 & 4 & 12 \\ -3 & 21 & 3 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 12 & 6 & 16 \\ -4 & 28 & 4 & 20 \end{vmatrix}$$

Operações Matriciais

- **Subtração de matrizes:** A – B = A + (–1)B.
- **Matriz nula:** todos os elementos são 0.

  0 + A = A
- Multiplicação de matrizes: C=A.B
  - Se A: n × m e B: m × p, temos C: n × p.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

Operações Matricias

$$\underbrace{\begin{vmatrix} \boxed{0 \quad 3} \\ -1 \quad 7 \\ 1 \quad 2 \end{vmatrix}}_{3x2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}} & \begin{matrix}5\\0\end{matrix} & \begin{matrix}-1\\3\end{matrix} \end{vmatrix}}_{2x3} = \begin{vmatrix} \boxed{0x1+3x2} & 0x5+3x0 & 0x(-1)+3x3 \\ -1x1+7x2 & -1x5+7x0 & -1x(-1)+7x3 \\ 1x1+2x2 & 1x5+2x0 & 1x(-1)+2x3 \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} \boxed{6} & 0 & 9 \\ 13 & -5 & 22 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}}_{3x3}$$

Operações Matriciais

```
ALGORITMO MULTIPLICAÇÃO MATRICIAL
Para i = 1 até n faça
    Para j = 1 até p faça
        C[i, j] = 0
        Para k = 1 até m faça
            C[i, j] = C[i, j] + A[i, k] * B[k, j]
        fim do para
    fim do para
fim do para
```

$\Theta(n^3)$

Operações Matriciais

Se A, B e C <u>forem matrizes de dimensões apropriadas</u> e se r e s forem escalares, então as equações matriciais a seguir serão válidas:

- $A.(B.C) = (A.B).C$
- $A(B + C) = A.B + A.C$
- $(A + B)C = A.C + B.C$
- $rA.sB = (rs)(A.B)$

Operações Matriciais

Matriz Identidade: matriz n × n que tem todos os elementos na diagonal principal iguais a 1 e todos os demais iguais a 0.

Se A:nxn, temos I·A = A·I = A

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Método de Gauss

Considere um sistema como n equações e n incógnitas:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{vmatrix}$$

Método de Gauss

Considere um sistema como n equações e n incógnitas:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n$$

Matriz aumentada:

$$\left|\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & b_n \end{array}\right|$$

Método de Gauss

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{matrix}\right| \Rightarrow \left|\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} & d_n \end{matrix}\right|$$

$$\begin{matrix} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + & \dots & +c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{22}x_2 + & \dots & + c_{2n}x_n = d_2 \\ \ddots & & \vdots \\ & c'_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} & +c'_{nn}x_n = b_n \\ & & c_{nn}x_n = b_n \end{matrix}$$

Método de Gauss

As operações elementares não mudam o conjunto de soluções das equações subjacentes. Elas são efetuadas na matriz aumentada e consistem em:

i. Trocar duas linhas quaisquer da matriz.

ii. Multiplicar todos os elementos de uma linha por um escalar diferente de zero.

iii. Somar um múltiplo escalar de uma linha a qualquer outra.

Método de Gauss

Exemplo:

$$\begin{array}{rl} 2x - 3y + z = -22 & L1 \\ 7x + 9y - 3z = 14 & L2 \\ 6x + 7y + 2z = 91 & L3 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 2 & -3 & 1 & -22 \\ 7 & 9 & -3 & 14 \\ 6 & 7 & 2 & 91 \end{array}\right| \begin{array}{l} L1 \div 2 \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left|\begin{array}{cccc} 1 & -3/2 & 1/2 & -11 \\ 7 & 9 & -3 & 14 \\ 6 & 7 & 2 & 91 \end{array}\right|$$

Método de Gauss

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & -3/2 & 1/2 & -11 \\ \color{darkred}{7} & 9 & -3 & 14 \\ 6 & 7 & 2 & 91 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ L2=L2-\color{darkred}{7}xL1 \\ L3=L3-6xL1 \end{array} \Rightarrow \left|\begin{array}{cccc} 1 & -3/2 & 1/2 & -11 \\ 0 & 39/2 & -13/2 & 91 \\ 0 & 16 & -1 & 157 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & -3/2 & 1/2 & -11 \\ 0 & 39/2 & -13/2 & 91 \\ 0 & 16 & -1 & 157 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ L2=(2/39)xL2 \\ \\ \end{array}$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{cccc} 1 & -3/2 & 1/2 & -11 \\ 0 & 1 & -1/3 & 14/3 \\ 0 & 16 & -1 & 157 \end{array}\right|$$

Método de Gauss

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & -3/2 & 1/2 & -11 \\ 0 & 1 & -1/3 & 14/3 \\ 0 & 16 & -1 & 157 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ L3=L3-16xL2 \end{array} \Rightarrow \left|\begin{array}{cccc} 1 & -3/2 & 1/2 & -11 \\ 0 & 1 & -1/3 & 14/3 \\ 0 & 0 & -13/3 & 247/3 \end{array}\right|$$

$$\begin{aligned} x - (3/2)y + (1/2)z &= 11 \\ y - (1/3)z &= 14/3 \\ -(13/3)z &= 247/3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{array}{l} x=-4 \\ y=11 \\ z=19 \end{array}$$

Matrizes Booleanas

Matrizes que têm apenas elementos iguais a 0 ou 1

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Matrizes Booleanas

$$A= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad B= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A \wedge B = \begin{vmatrix} 0 \wedge 1 & 1 \wedge 0 & 1 \wedge 1 \\ 1 \wedge 1 & 0 \wedge 0 & 0 \wedge 0 \\ 0 \wedge 0 & 1 \wedge 1 & 0 \wedge 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Matrizes Booleanas

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A \vee B = \begin{vmatrix} 0 \vee 1 & 1 \vee 0 & 1 \vee 1 \\ 1 \vee 1 & 0 \vee 0 & 0 \vee 0 \\ 0 \vee 0 & 1 \vee 1 & 0 \vee 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Matrizes Booleanas

$$A=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad B=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Multiplicação Booleana
A:mxn B:nxp C=A × B

$$c_{ij} = \bigvee_{k=1}^{m} a_{ik} \wedge b_{kj}$$

$$AxB=\begin{vmatrix} (0\wedge1)\vee(1\wedge1) & (0\wedge0)\vee(1\wedge1) & (0\wedge1)\vee(1\wedge0) \\ (1\wedge1)\vee(0\wedge1) & (1\wedge0)\vee(0\wedge1) & (1\wedge1)\vee(0\wedge0) \\ (0\wedge1)\vee(1\wedge1) & (0\wedge0)\vee(1\wedge1) & (0\wedge1)\vee(1\wedge1) \end{vmatrix}$$

Matrizes Booleanas

$$
A \times B = \begin{bmatrix} (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \\ (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \\ (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

Os conceitos e exemplos apresentados nesses slides são baseados no conteúdo da seção 5.7 do material-base “Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação”, J.L. Gersting, 7a edição, LTC editora.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

Matrizes