

# FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

**Quantificadores, Predicados e  
Validade**

# SUMÁRIO

- **Quantificadores e Predicados**
- **Interpretação**
- **Representação**

# Quantificadores e Predicados

Para todo  $x$ ,  $x > 0$ .

- Verdadeiro para  $x$  inteiro positivo.

Para todo  $x$ ,  $x > 0$ .

**Quantificador** **Predicado**

- Quantificadores dizem quantos objetos têm determinada propriedade.

# Quantificadores e Predicados

Quantificador universal:

$\forall$  “para todo”, “para cada” ou “para qualquer”

Para todo  $x$ ,  $x > 0$ .

$$(\forall x)P(x)$$

O valor lógico depende do domínio dos objetos

# Quantificadores e Predicados

**Exemplo: Interpretando  $(\forall x)P(x)$  quando:**

- **$P(x)$ :  $x$  é amarelo no conjunto de todos os botões-de-ouro.**
- **$P(x)$ :  $x$  é amarelo no conjunto de todas as flores.**
- **$P(x)$ :  $x$  é uma planta no conjunto de todas as flores.**
- **$P(x)$ :  $x$  é positivo ou negativo no conjunto de todos os inteiros.**

# Quantificadores e Predicados

Quantificador existencial:  $\exists$

“existe”, “há pelo menos um”, “existe algum”  
ou “para algum”

$$\underbrace{\text{Existe } x}_{(\exists x)} \underbrace{x > 0}_{P(x)}$$

O valor lógico depende do domínio dos objetos

# Quantificadores e Predicados

**Predicados unários:** consideram propriedades de uma única variável.

**Predicados binários:** consideram propriedades de duas variáveis.

**Predicados ternários:** consideram propriedades de três variáveis.

**Predicados  $n$ -ários:** consideram propriedades de  $n$  variáveis.

# Quantificadores e Predicados

Exemplo: Seja  $Q(x,y): x < y$  nos inteiros

- $(\forall x)(\exists y)Q(x, y)$ : para todo  $x$  existe um  $y$  tal que  $x < y$ 
  - Verdadeira!
- $(\exists y)(\forall x)Q(x, y)$  : existe  $y$  para todo  $x$  tal que  $x < y$ .
  - Falsa!



# Quantificadores e Predicados

**Exemplo: Seja  $Q(x,y): x < y$  nos inteiros**

- **$(\forall x)(\forall x)Q(x,x)$ : para todo  $x$ , temos  $x < x$** 
  - **Falsa!**
- **$(\forall x)Q(x,7)$ : para todo  $x$  temos  $x < 7$ .**
  - **Falsa!**

# Interpretação

- **Uma interpretação de uma expressão com predicados consiste em:**
  - **Uma coleção de objetos, chamada de conjunto universo que inclui ao menos um objeto.**
  - **Uma propriedade dos objetos no domínio para cada predicado na expressão.**
  - **A atribuição de um objeto particular no conjunto universo para cada símbolo da expressão.**

# Interpretação

- **Fbfs predicadas** contém predicados e quantificadores.
- **Fbfs proposicionais** contém apenas letras de proposições e conectivos lógicos.

# Interpretação

**Exemplo: Vamos interpretar**

$$(\forall x)(A(x) (\exists y)[B(x, y) \rightarrow C(y)]$$

**no conjunto dos inteiros.**

**$A(x): x > 0$ ,  $B(x,y): x > y$  e  $C(y): y^2 > 0$ .**

**“Para todo  $x > 0$ , existe  $y$  tal que se  $x > y$  então  $y^2 > 0$ .”**

# Representação

Vamos representar sentenças em português como fbfs predicadas.

“Todo papagaio é feio”

“Dada uma coisa, se é um papagaio, então é feio”

$P(x)$ :  $x$  é um papagaio  $F(x)$ :  $x$  é feio

$(\forall x)[P(x) \rightarrow F(x)]$

# Representação

O sentido muda com:

$$(\forall x)[P(x) \wedge F(x)]$$

$P(x)$ : x é um papagaio  $F(x)$ : x é feio

“Todos no conjunto universo são papagaios e feios”

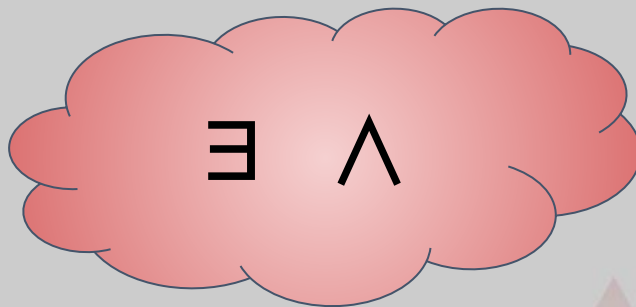
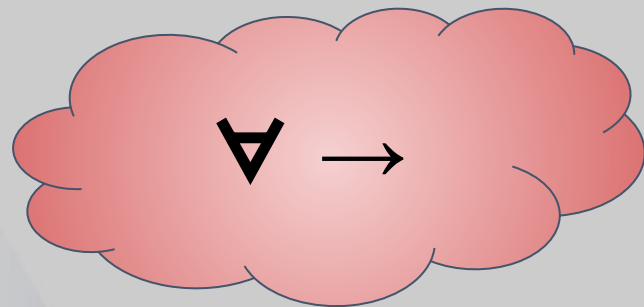
# Representação

**“Existe um papagaio feio”**

**“Existe alguma coisa que é, ao mesmo tempo, papagaio e feio”.**

$$(\exists x)[P(x) \wedge F(x)]$$

**$P(x)$ :  $x$  é um papagaio    $F(x)$ :  $x$  é feio**



# Representação

**Exemplo: Considere os seguintes predicados**

- **$D(x)$ :  $x$  é um dia.**
- **$S(x)$ :  $x$  é ensolarado.**
- **$R(x)$ :  $x$  é chuvoso.**

**Há dias ensolarados**

$$(\exists x)[D(x) \wedge S(x)]$$

**Todo dia ensolarado não é chuvoso.**

$$(\forall x)[D(x) \wedge S(x) \rightarrow R'(x)]$$

**$R'(x)$ :  $x$  não é chuvoso**



# Representação

**Exemplo: Considere os seguintes predicados**

- **$D(x)$ :  $x$  é um dia,  $S(x)$ :  $x$  é ensolarado.**
- **$R(x)$ :  $x$  é chuvoso.**

**Nenhum dia é ensolarado.**

$$[ (\exists x)D(x) \wedge S(x) ] '$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)'[D'(x) \wedge S(x)] '$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)[D(x) \wedge S(x)]'$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)[D'(x) \vee S'(x)]$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)[D(x) \rightarrow S'(x)]$$

# Representação

Note que:

- $[ (\exists x)A(x) ]'$  é equivalente a  $(\forall x)[A(x)]'$   
“Existe algo lindo” é equivalente a “Tudo não é lindo”
- $[ (\forall x)A(x) ]'$  é equivalente a  $(\exists x)[A(x)]'$   
“Tudo é lindo” é equivalente a “Existe algo que não é lindo”, “Alguma coisa não é linda”

# Representação

**Exemplo: Considere os seguintes predicados**

- **$D(x)$ :  $x$  é um dia,  $S(x)$ :  $x$  é ensolarado.**
- **$R(x)$ :  $x$  é chuvoso.**

**Se algum dia for ensolarado, então todos os dias serão ensolarados.**

$$(\exists x)D(x) \wedge S(x) \rightarrow (\forall x)[D(x) \rightarrow S(x)]$$

# Representação

Advérbios como “só”, “somente” e “apenas” podem gerar confusão.

Exemplo: Seja  $J(x)$ :  $x$  é João,  $M(x)$ :  $x$  é Maria e  $A(x,y)$ :  $x$  ama  $y$ .

(a) João ama **apenas** Maria.

“Se João ama alguma coisa, essa coisa é Maria”

$$(\forall x)(J(x) \rightarrow (\forall y)(A(x, y) \rightarrow M(y)))$$

**O conseqüente é a palavra  
que vem depois do “apenas”**

# Representação

Exemplo: Seja  $J(x)$ :  $x$  é João,  $M(x)$ :  $x$  é Maria e  $A(x,y)$ :  $x$  ama  $y$ .

(b) **Apenas** João ama Maria.

- Se alguma coisa ama Maria, essa coisa é João.
- Dada alguma coisa, se for Maria, então, se alguma coisa a amar, essa coisa será João.

$$(\forall x)(M(x) \rightarrow (\forall y)(A(y, x) \rightarrow J(y)))$$

**O consequente é a palavra  
que vem depois do “apenas”**

# Representação

Exemplo: Seja  $J(x)$ :  $x$  é João,  $M(x)$ :  $x$  é Maria e  $A(x,y)$ :  $x$  ama  $y$ .

(c) João **apenas** ama Maria.

- Se João tem alguma relação com Maria, essa relação é amor.
- Dada uma coisa, se for João, então, dada outra coisa, se for Maria, então João a ama.

$(\forall x)(J(x) \rightarrow (\forall y)(M(y) \rightarrow A(x,$   
 $y)))$

O consequente é a palavra  
que vem depois do “apenas”

**Os conceitos e exemplos apresentados  
nesses slides são baseados no conteúdo da  
seção 1.3 do material-base “Fundamentos  
Matemáticos para a Ciência da Computação”,  
J.L. Gersting, 7a edição, LTC editora.**

# FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

**Quantificadores, Predicados e  
Validade**