FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

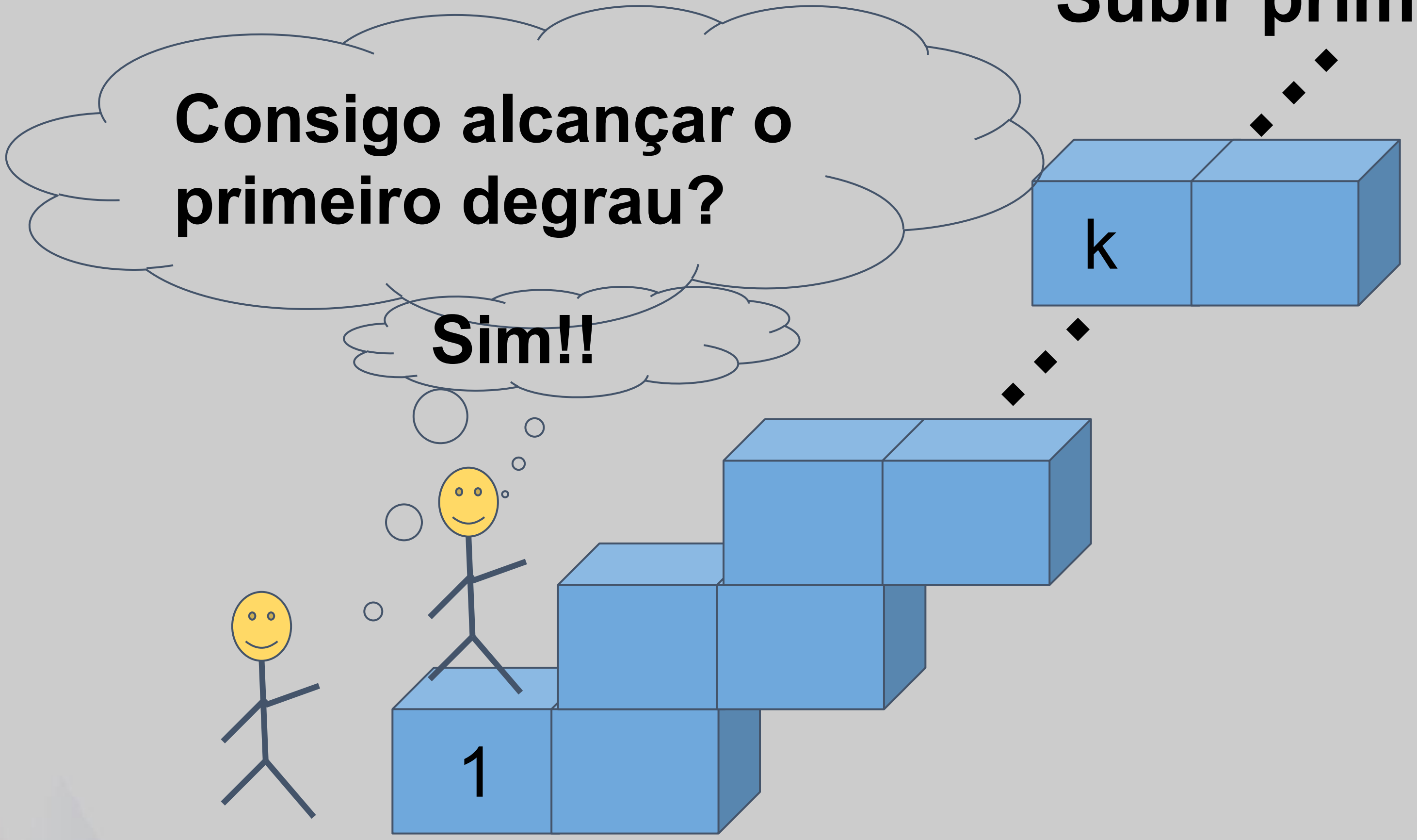
Indução

SUMÁRIO

Primeiro Princípio da Indução

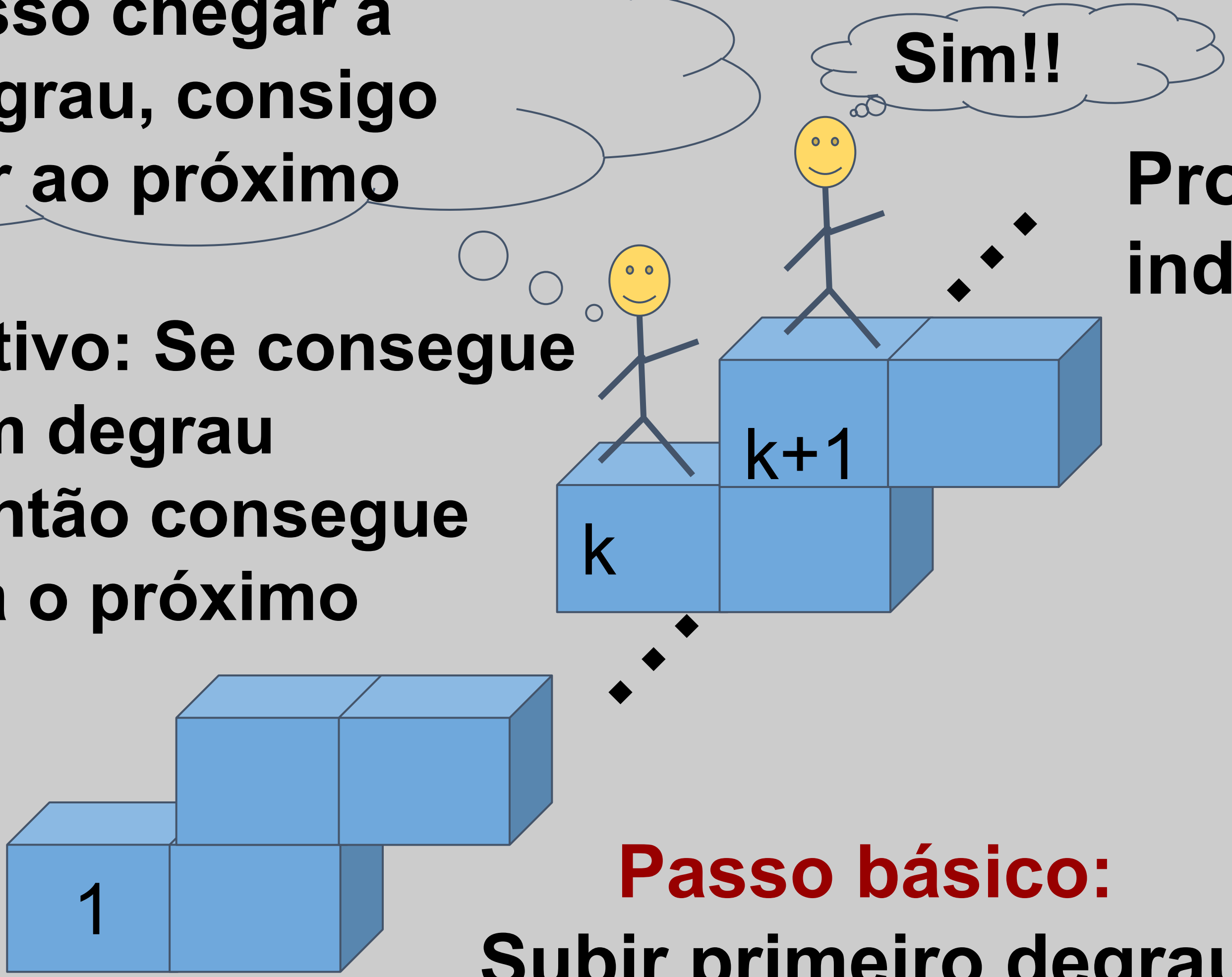
Exemplo: Subindo uma escada infinita

Passo básico
Subir primeiro degrau



Primeiro Princípio da Indução

Se posso chegar a um degrau, consigo chegar ao próximo



Provado por indução!!!

Passo Indutivo: Se consegue chegar a um degrau qualquer, então consegue passar para o próximo

Passo básico:
Subir primeiro degrau

Primeiro Princípio da Indução

Primeiro Princípio da Indução:

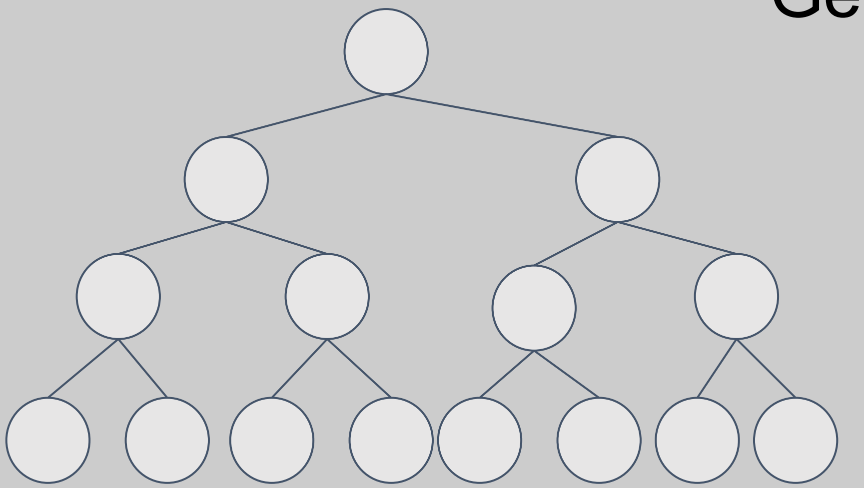
Passo básico: **P(1) é verdadeiro.**

Passo indutivo: $\forall k \in Z_+, P(k) \rightarrow P(k+1)$

$P(n)$ **verdade** $\forall n \in Z_+$

Primeiro Princípio da Indução

Exemplo: Gerando descendentes



Geração	Descendentes
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$
$\vdots$	$\vdots$
n	2^n

Proposição: Teremos 2^n descendentes na geração n

Hipótese: Duplica de uma geração para a outra.

Primeiro Princípio da Indução

Exemplo: Gerando descendentes

Hipótese: Duplica de uma geração para a outra.

Tese: Teremos 2^n descendentes na geração n

Passo base:

n=1 $P(1)=2=2^1$ Duplicou!!

Primeiro Princípio da Indução

Passo indutivo: $\forall k \in Z+, P(k) \rightarrow P(k+1)$

Hipótese de indução para n=k

$P(k)=2^k$ Suponha verdadeiro para n=k!!!

Vamos provar para n=k+1

$P(k+1)=2P(k)$ Hipótese

$P(k+1)=2.2^k$ Hipótese de indução

$P(k+1)=2^{k+1}$

Primeiro Princípio da Indução

Exemplo: Prove que $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$

n=1 - Passo Básico

$$1 = 1^2$$

$$1 = 1 \text{ Ok}$$

n=k - Hipótese de indução

$$1+3+5+...+(2k-1) = k^2$$

Vamos provar para n=k+1

$$1+3+5+...+(2k-1)+[2(k+1)-1) = (k+1)^2$$

Primeiro Princípio da Indução

Exemplo: Prove que $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$

n=k - Hipótese de indução

$$1+3+5+...+(2k-1) = k^2$$

Vamos provar para n=k+1

$$1+3+5+...+(2k-1)+[2(k+1)-1) = (k+1)^2$$

$k^2+[2(k+1)-1) = (k+1)^2$ Hipótese de indução

$$k^2+2k+2-1= (k+1)^2$$

$$k^2+2k+1= (k+1)^2$$

$$(k+1)^2= (k+1)^2$$

Primeiro Princípio da Indução

Exemplo: Prove que $\forall n \in Z+$, $2n > n$.

$n=1$ $2.(1)=2>1$ Ok - Verificamos o passo base

$n=k$ Hipótese de indução

$$2k > k$$

Vamos provar para $n=k+1$

$$2(k+1)=2k+2>k+2$$

$$>k+1 \quad k \text{ para } k \in Z+$$

Logo, $2(k+1) > (k+1)$

Primeiro Princípio da Indução

Exemplo: Prove que $\forall n \in Z+$, 2^{2n} -1 é divisível por 3.

Precisamos provar que $2^{2n} -1=3a$, a inteiro positivo.

n=1 $2^{2.1}-1=4-1=3$ Ok

n=k - Hipótese de indução

$2^{2k} -1 = 3a$, a inteiro positivo

Primeiro Princípio da Indução

Exemplo: Prove que $\forall n \in Z+$, 2^{2n} -1 é divisível por 3.

n=1 $2^{2.1}-1=4-1=3$ Ok

n=k - Hipótese de indução

$2^{2k} - 1 = 3a$, a inteiro positivo

$2^{2k} - 1 = 3a$

$2^{2k} = 3a+1$

Vamos provar para n=k+1

$2^{2(k+1)} - 1 = 2^{2k+2}-1$

$=2^{2k}.2^2-1=4.2^{2k}-1=$

$=4(3a+1)-1=12a+4-1=12a+3$

$=3(4a+1)=3b$

Logo, $2^{2(k+1)} -1=3b$ é divisível por 3!

Primeiro Princípio da Indução

Exemplo: Prove que $\forall n \in Z+$, $n^2 > 3n$ para $n > 3$.

$n=4$ $\quad 4^2=16>3.4=12$ Ok

Hipótese de indução para $n=k$

$$k^2 > 3k$$

Vamos provar para $n=k+1$

$(k+1)^2 = k^2+2k+1>3k+2k+1$ Hipótese de indução

$(k+1)^2 > 5k+1>3k+2k+1>3k+3=3(k+1)$

Logo, $(k+1)^2 > 3(k+1)$

Primeiro Princípio da Indução

Exemplo: Prove que $\forall n \in Z+$, $2n+1 < 3n$ para $n > 1$.

$n=2$ $\quad 2.2+1=5<3.2=6$ Ok

$n=k$ $\quad 2k+1 < 3k$ Hipótese de indução.

$n=k+1$, vamos provar que $2(k+1)+1<3(k+1)$

$$2(k+1)+1=2k+3$$

$$=2k+1+2<3k+2$$

$$=2k+1+2<3k+2<3k+3=3(k+1)$$

Logo, $2(k+1)+1 < 3(k+1)$

Segundo Princípio da Indução

Segundo Princípio da Indução (Indução Forte):

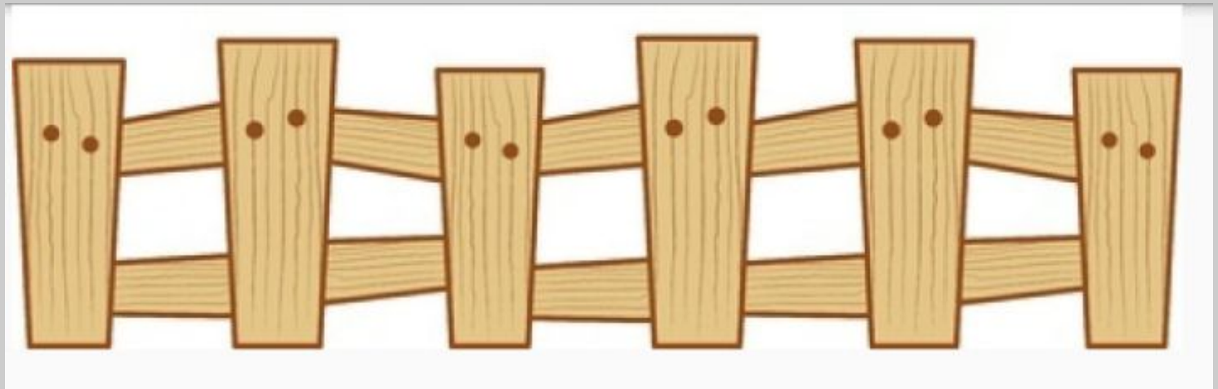
Passo básico: $P(1)$ é verdadeiro.

Passo indutivo: $\forall k \in Z_+$

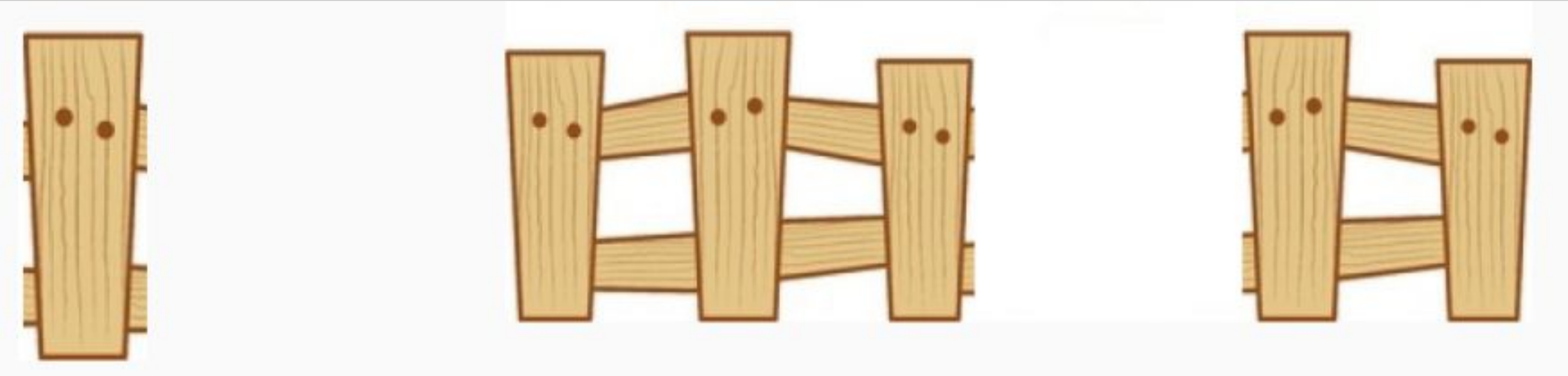
$$\underbrace{[(P(r) \text{ com } 1 \leq r \leq k) \rightarrow P(k+1)]}_{P(n) \text{ verdade } \forall n \in Z_+}$$

Demonstrações Informais

Exemplo:



n=1 seções = 0 n=3 seções = 2 n=2 seções = 1



Segundo Princípio da Indução

Exemplo:

n=1 esteio, teremos n-1=1-1= 0 seções.

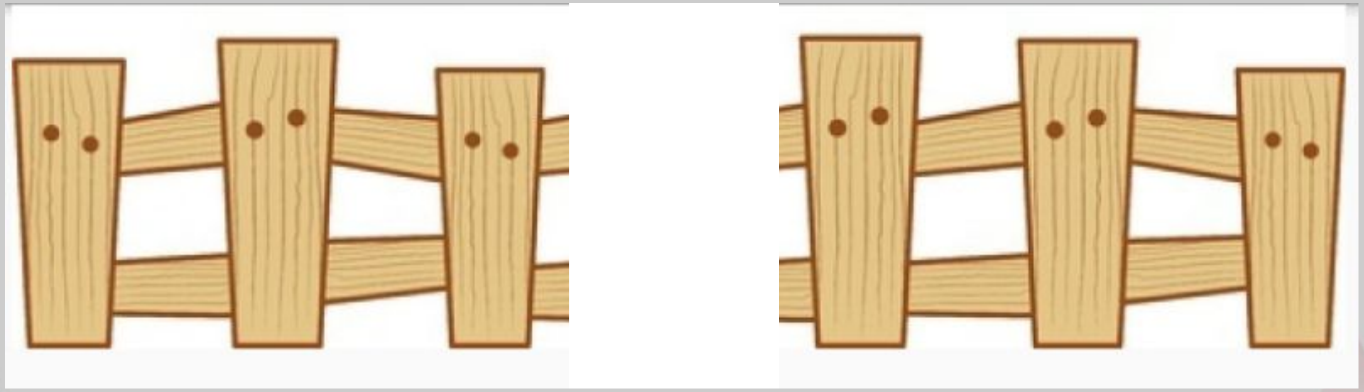
Pelo segundo princípio da indução, temos que:

- **Para n=k temos que qualquer quantidade r de esteios com 1≤r≤k atende a propriedade de ter r-1 seções.**

Segundo Princípio da Indução

Exemplo:

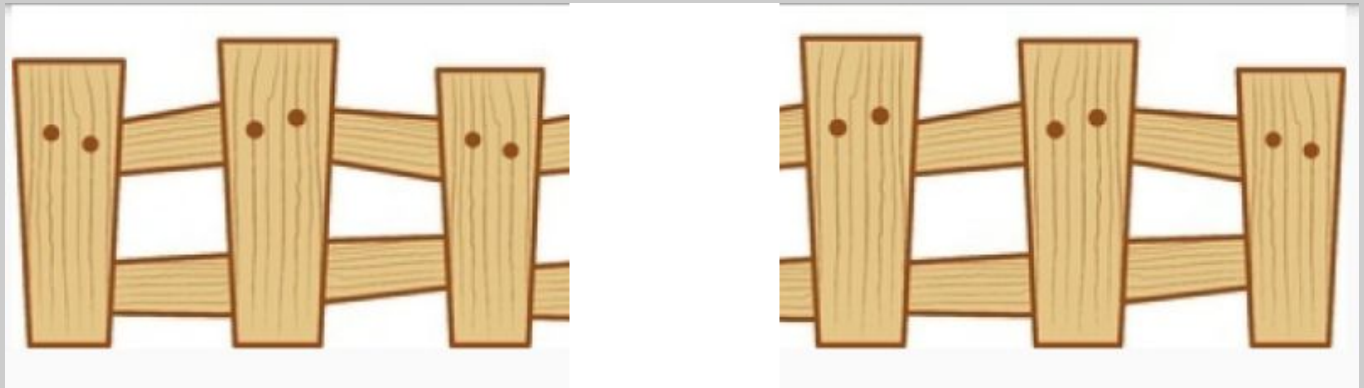
- **Suponha uma cerca com k+1 esteio. Se removermos uma seção, teremos duas cercas com r1 e r2 esteios tal que r1+r2=k+1 esteios**



Segundo Princípio da Indução

Exemplo:

- **Por indução forte, temos r1-1 seções e r2-1 seções nestas duas cercas.**



Segundo Princípio da Indução

Exemplo:

- Assim, r1-1+r2-1=r1+r2-2=

  = k+1-2=k-1 seções.

- Retornando com a seção removida, temos:

  k-1+1 = k seções para k+1 esteios!!

Segundo Princípio da Indução

Exemplo: Prove que qualquer quantia em selos maior ou igual a 8 centavos pode ser obtida usando-se apenas selos de 3 e 5 centavos.

Dem: **Seja $n=8$, temos $8 = 3 + 5$**

Suponha que para $n=r$ com $8 \leq r \leq k$ seja válido

P(r): $3a+5b$ inteiro e $8 \leq r \leq k$ Válido!!!

Note que $9= 3.3+5(0)$ e $10=3.(0)+5.(2)$

Segundo Princípio da Indução

Suponha $n=k+1$ centavos e retire 3 centavos.

Teremos $n-3=k+1-3=k-2$ com $8 \leq k-2 < k$.

Logo, $k-2=3a+5b$ pela hipótese de indução

Voltando os 3 centavo, temos:

$$k-2+3 = 3a+5b+3 = 3(a+1)+5b=3a + 5b$$

$$k+1=3a+5b$$

Os conceitos e exemplos apresentados nesses slides são baseados no conteúdo da seção 2.2 do material-base “Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação”, J.L. Gersting, 7a edição, LTC editora.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

Indução