FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

Funções

SUMÁRIO

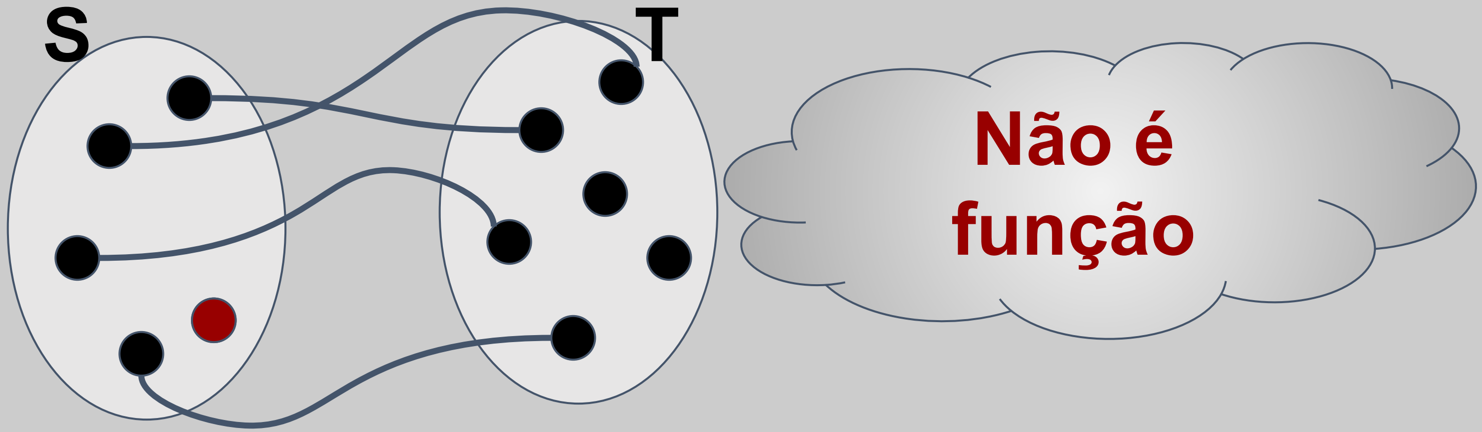
- Definição
- Propriedades de Funções
- Composição de Funções
- Funções Inversas

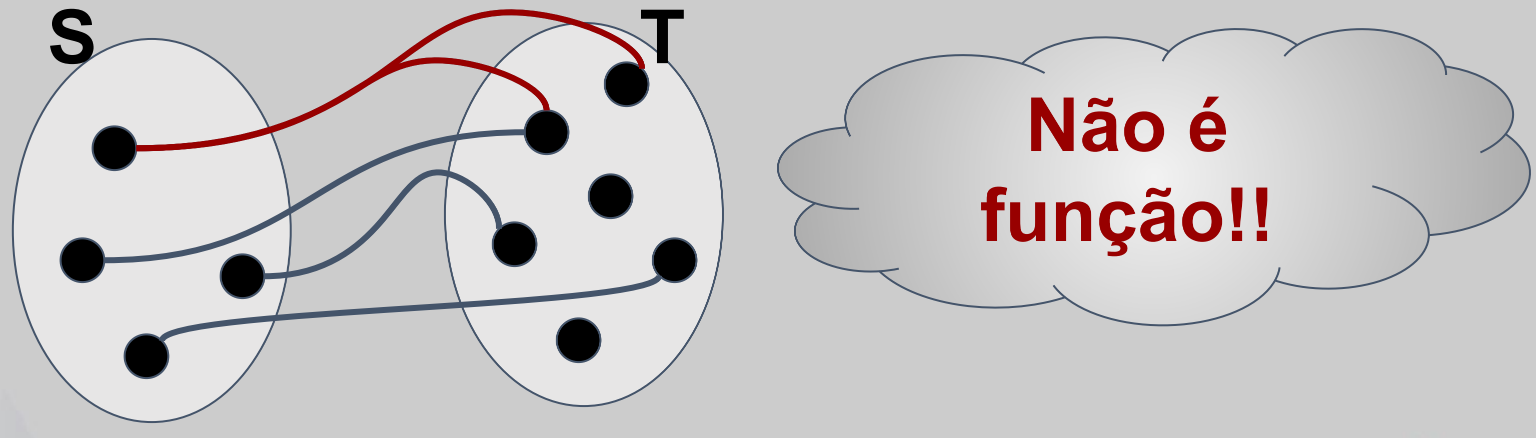
Funções

Uma **função** de S em T, $f: S \to T$, é um subconjunto de $S \times T$ tal que cada elemento de S aparece exatamente uma vez como a primeira componente de um par ordenado.

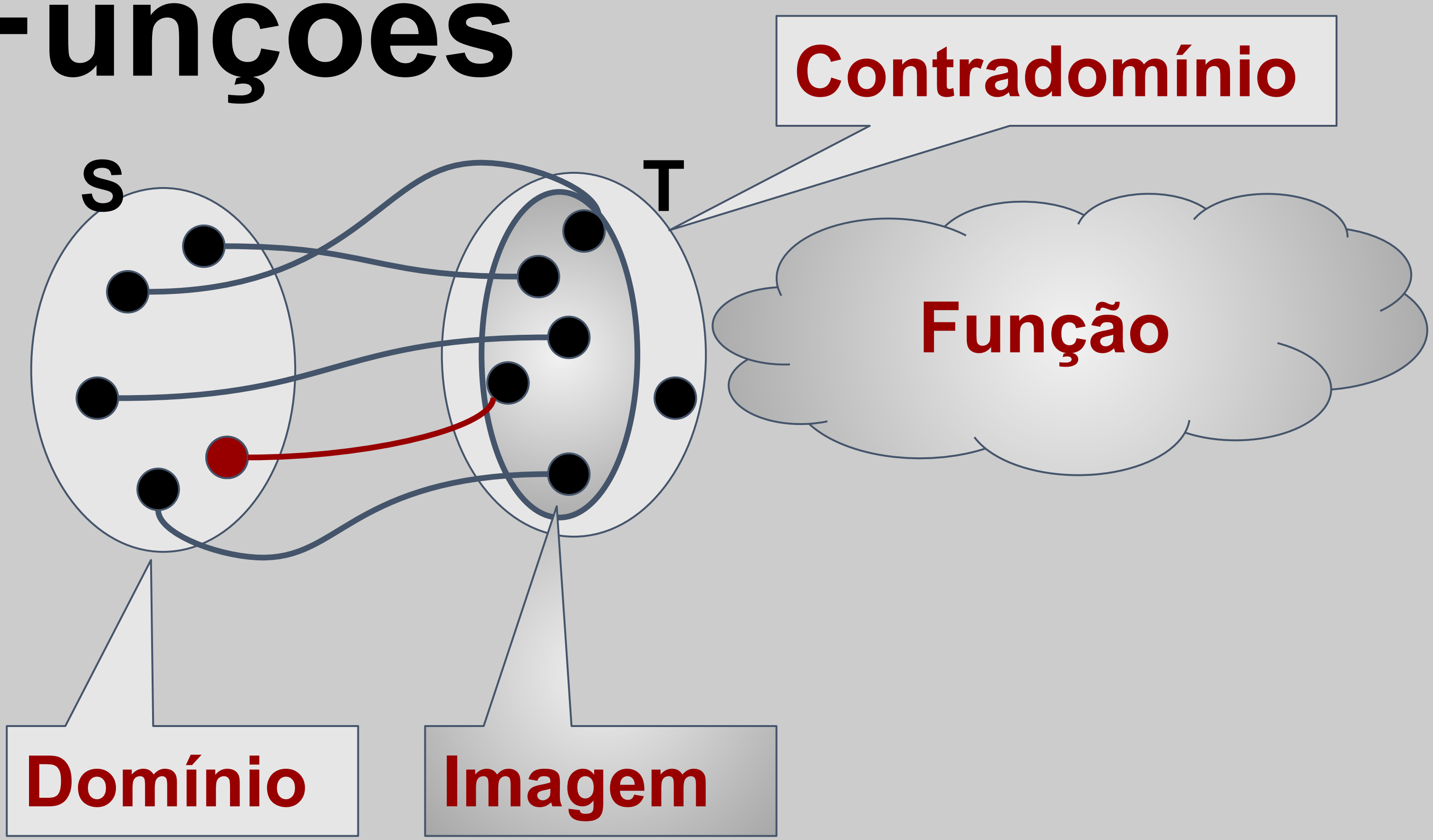
- S: **domínio**
- T: **contradomínio**
- (s, t): $t = f(s)$
- t: **imagem** de s sob f
- s: **imagem inversa** de t sob f

Funções





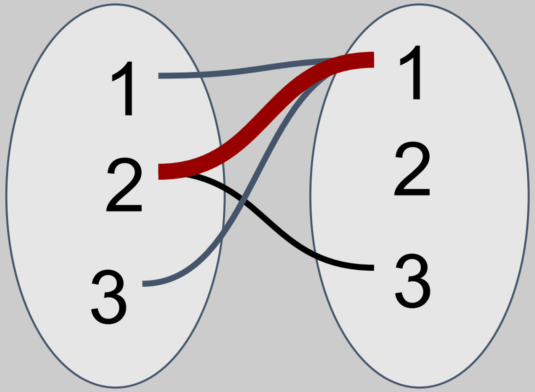
Funções



Funções

Exemplo: f: S → T, em que S = T = {1, 2, 3},

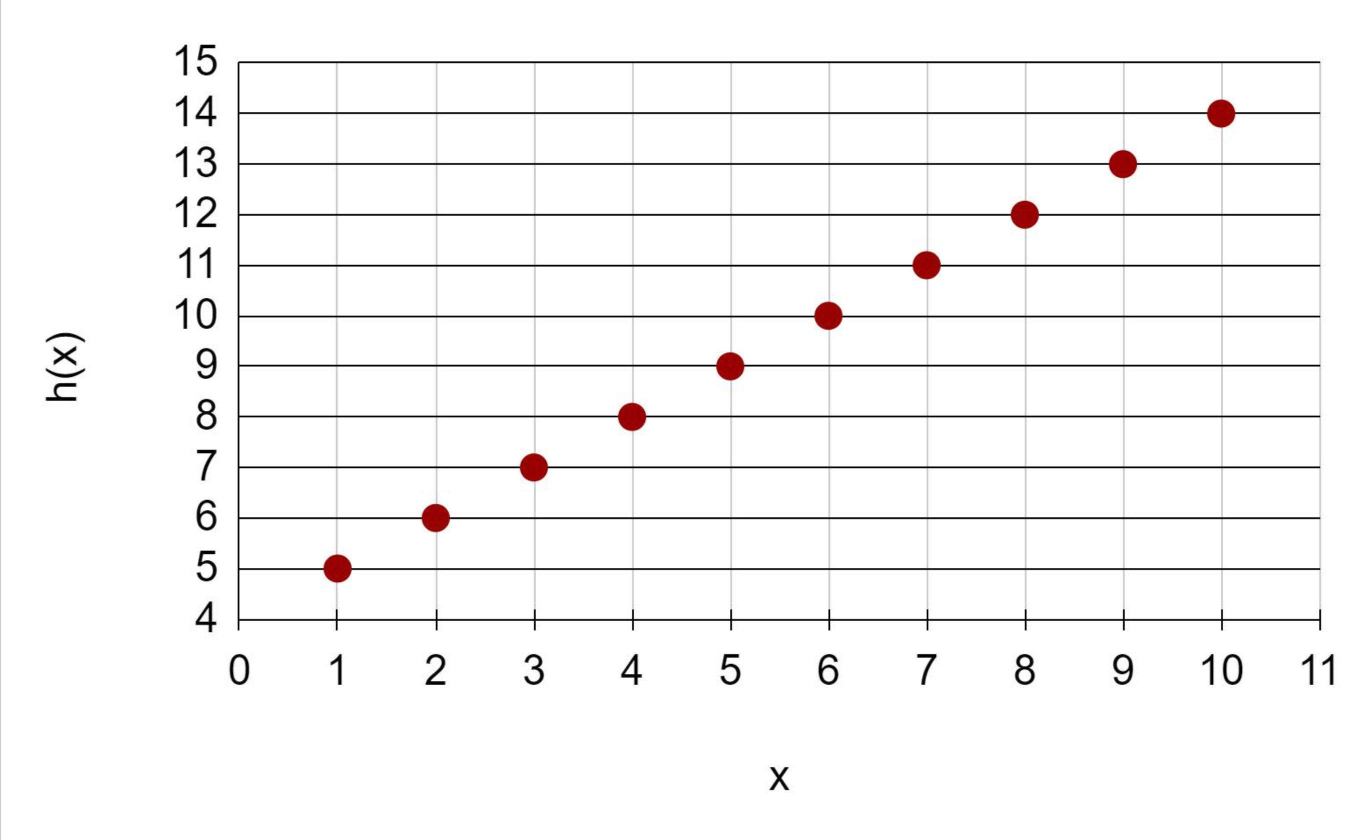
f = {(1, 1), (2, 3), (3, 1), (2, 1)}.



Não é função!!!

Funções

(b) h: ℕ → ℕ, onde h(x) = x + 4.



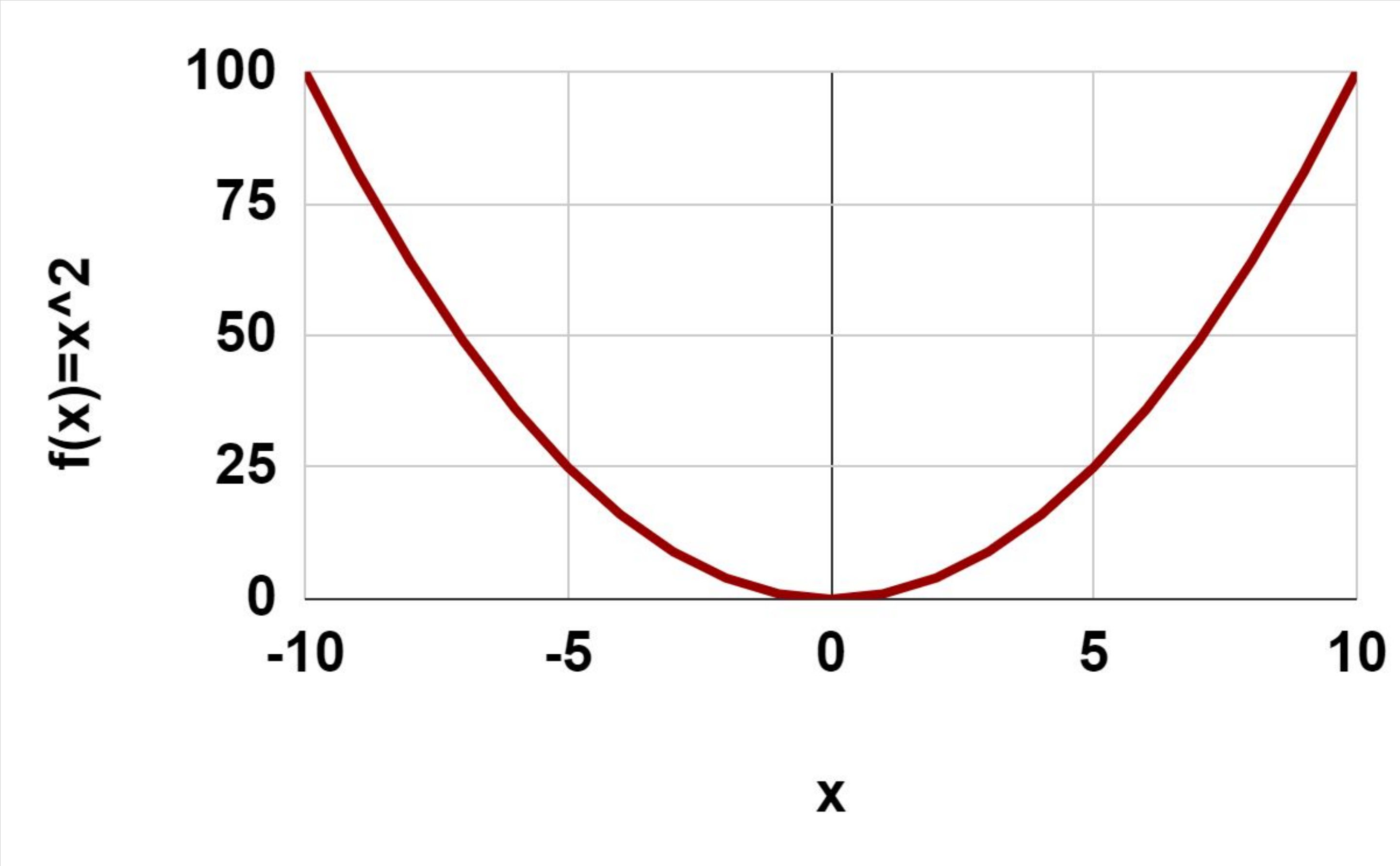
h(1)=5
h(2)=6
h(3)=7
h(4)=8
h(5)=9
h(6)=10
h(7)=11

Função!!!
Discreta

Funções

f: ℝ → ℝ, em que f é definida por f(x) =x^2

Função!!!
Contínua

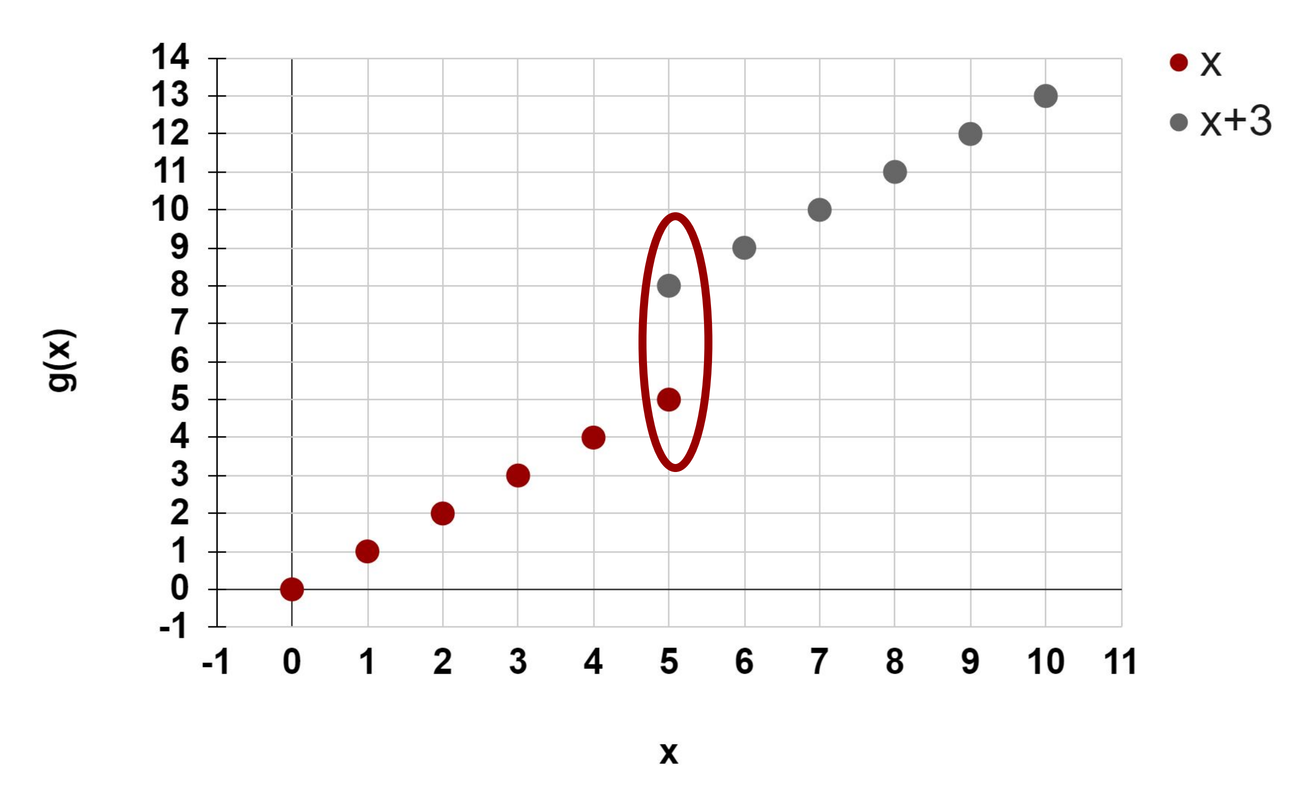


Funções

(c) g: ℕ → ℕ, em que f é definida por

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 5 \\ x+3, & x \geq 5 \end{cases}$$

Não é Função!!!

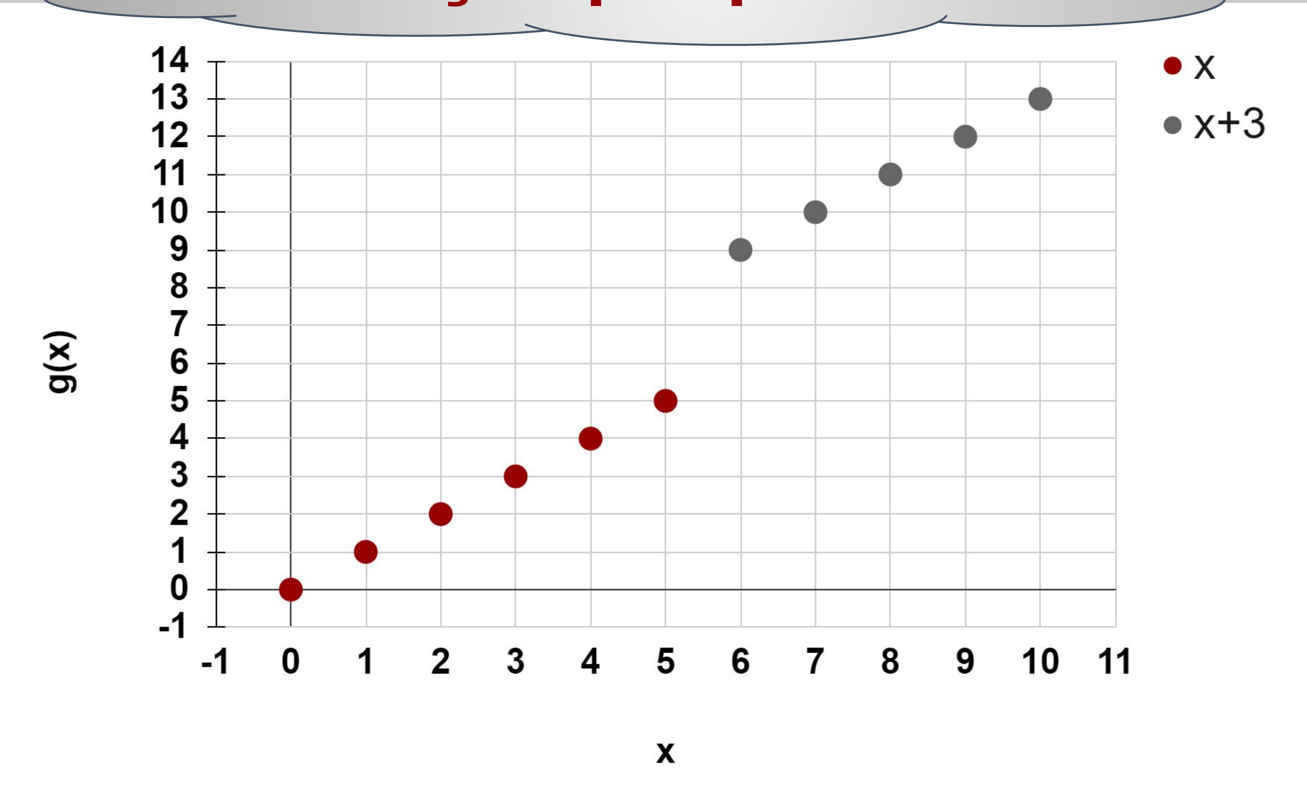


Funções

(c) g: ℕ → ℕ, em que f é definida por

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \le 5 \\ x+3, & x > 5 \end{cases}$$

Função por partes!!!



Funções

Podemos ter uma função

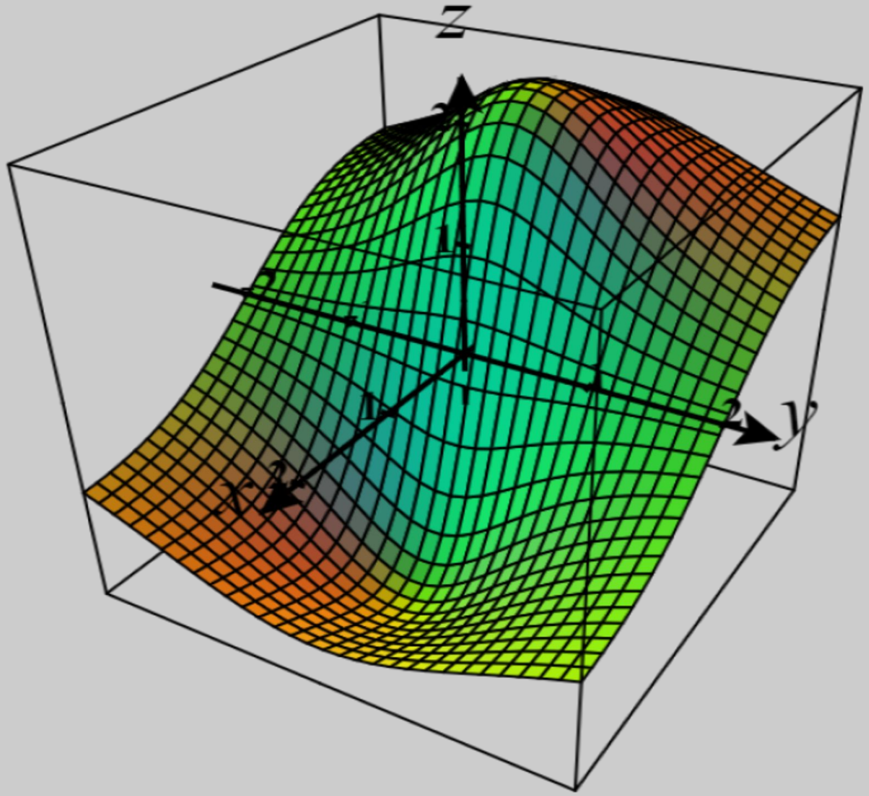
$f: (S1 \times S2 \times \ldots, Sn) \to T$,

associando cada n-upla (s1, s2, . . . , sn),

$s_i \in S_i$, a um único elemento de T.

Funções

$f(x,y) = -4x/(x^2+y^2+1)$ $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



Funções

Exemplo: $f: \{V, F\}^n \rightarrow \{V, F\}$.

n=3 $f: \{V, F\}^3 \rightarrow \{V, F\}$.

$(A,B,C) \rightarrow f(A,B,C)=(A \wedge B) \vee C$

$f(V,V,F) = (V \wedge V) \vee F = V$

$f(F,V,F) = (F \wedge V) \vee F = F$

Funções

Exemplo: $\forall\, x \in \mathbb{Z}$ e $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, temos que

$$f(x) = x \bmod n,$$

associa a cada x o resto de sua divisão por n.

- **$x = qn + r,\ 0 \leq r < n$,**
  - **q: quociente**
  - **r: resto**

Funções

Exemplo: $\forall$ x $\in \mathbb{Z}$ e $\forall$n $\in \mathbb{Z}_+$, temos que

n=5, temos f(x)=x mod 5

f(13) = 13 mod 5

13= 5.a +r $0 \leq r < 5$

13-r=5a

a=2, r=3

Funções

Funções iguais apresentam o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e a mesma associação de valores.

Exemplo: Dados S = {1,2, 3} e T = {1,4, 9}.

f: S → T, onde f = {(1, 1), (2, 4), (3, 9)}.

g: S → T, onde

$$g(n) = \frac{\sum_{k=1}^{n}(4k-2)}{2}$$

Funções

Exemplo: Dados S = {1,2, 3} e T = {1,4, 9}.

f: S → T, onde f = {(1, 1), (2, 4), (3, 9)}.

g: S → T, onde

$$g(n) = \frac{\sum_{k=1}^{n}(4k - 2)}{2}$$

f(1)=1=g(1)=(4(1)-2)/2=1 Ok

f(2)=4=g(2)=[(4(1)-2)+ (4(2)-2)]/2=(2+6)/2=4 Ok

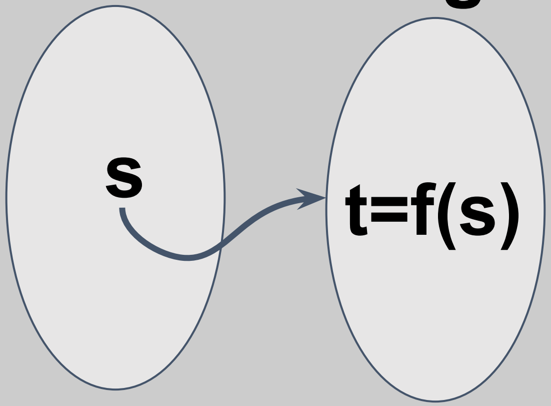
f(3)=9=g(9)=[2+6+ (4(3)-2)]/2=18/2=9 Ok

Logo, f=g

Propriedades de Funções

Uma função f: S → T é dita sobrejetora (ou sobrejetiva) se sua imagem for igual a seu contradomínio.

Domínio   Imagem=Contradomínio



Para mostrar que uma função é sobrejetora, pegue um elemento arbitrário no contradomínio e mostre que ele tem uma imagem inversa no domínio

Propriedades de Funções

Exemplo: f: $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ com f(x) = 3x + 2.

Seja q $\in \mathbb{Q}$, encontrar x $\in \mathbb{Q}$ tal que

$$f(x) = 3x + 2 = q.$$

$$3x=q-2$$

$$x = (q - 2)/3$$

onde x $\in \mathbb{Q}$.

Logo, f é sobrejetora.

Propriedades de Funções

Exemplo: g: $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ com $f(x) = 3x + 2$.

Seja $q \in \mathbb{Q}$, encontrar $x \in \mathbb{Z}$ tal que

$$f(x) = 3x + 2 = q.$$

$$3x=q-2$$

$$x = (q - 2)/3$$

onde $x \notin \mathbb{Z}$.

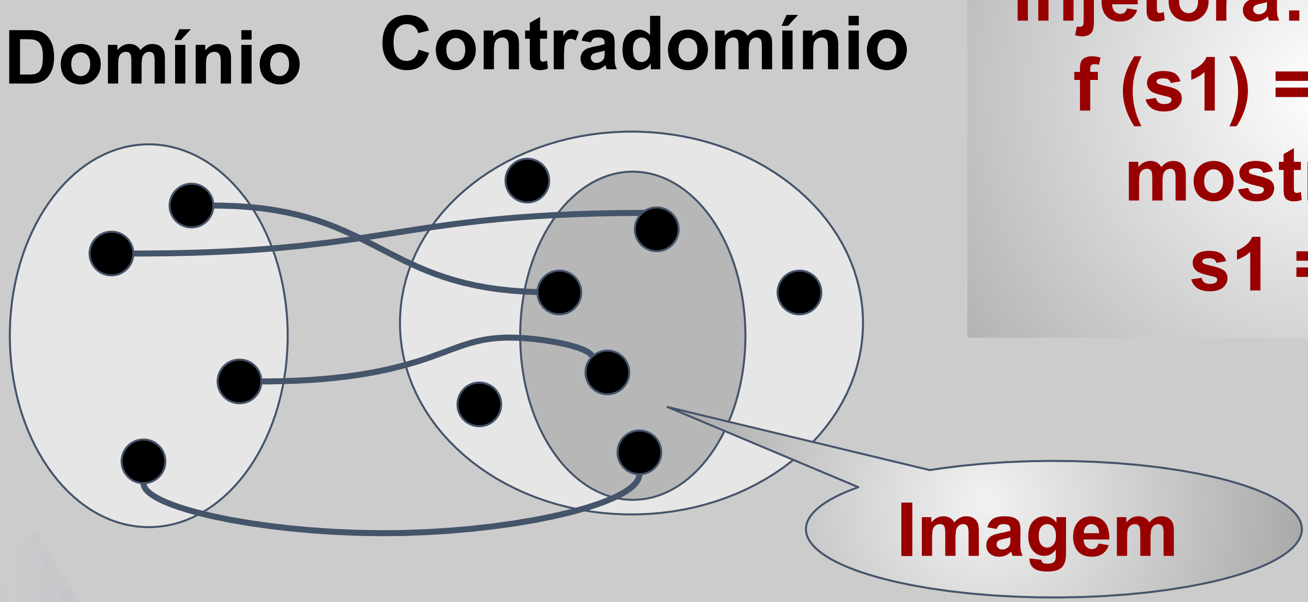
Por exemplo, $q=0$ resulta em

$$x=-\tfrac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$$

Propriedades de Funções

Uma função f: S → T é **injetora** (ou injetiva ou **um para um**) se nenhum elemento de T é a imagem sob f de dois elementos distintos em S.

Mostrar que f é injetora: suponha f (s1) = f (s2) e mostre que s1 = s2.



Propriedades de Funções

Exemplo: $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $g(x) = x^3$ é injetora

Se a e b $\in \mathbb{R}$ com $g(a) = g(b)$, então

$$a^3 = b^3$$

$$a = b.$$

Exemplo: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = x^2$ não é injetora.

$$f\,(2) = f\,(-2) = 4$$

Exemplo $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ com $h(x) = x^2$ é injetora.

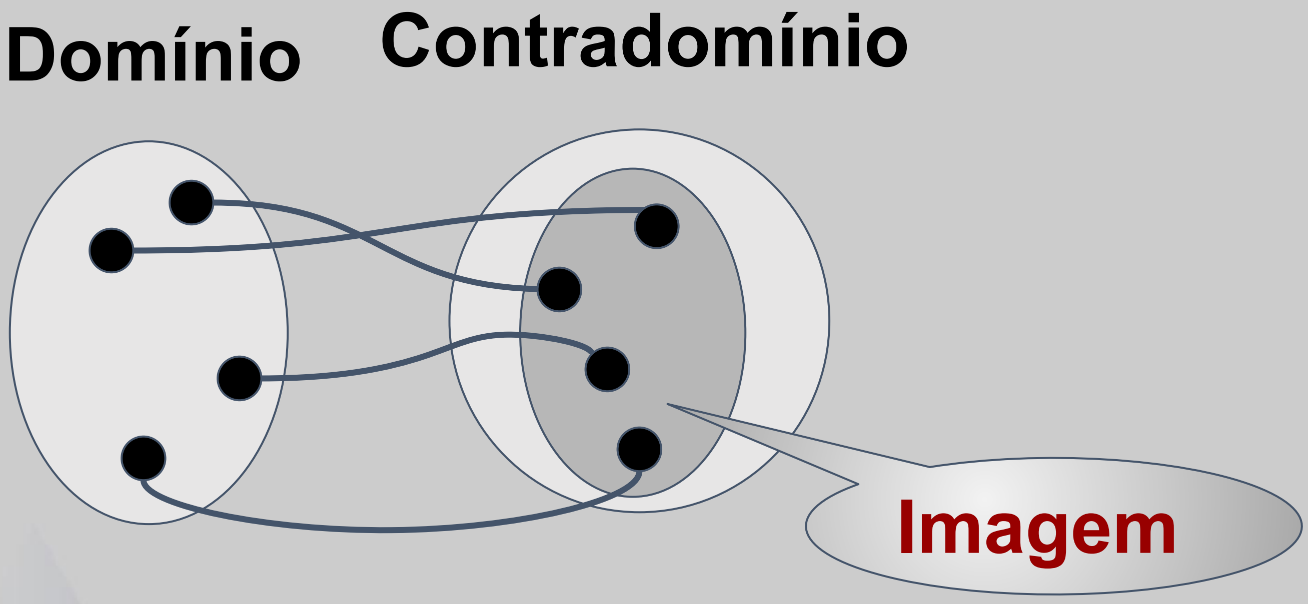
Se a e b $\in \mathbb{N}$ com $h(a) = h(b)$

$$a^2 = b^2,$$

$a=b$, não negativos!!

Propriedades de Funções

Uma função f: S → T é bijetora (ou bijetiva ou uma bijeção) se é, ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora.



Propriedades de Funções

Exemplo: g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^3$ é uma bijeção.

Provamos que é injetora.

Vamos provar que é sobrejetora.

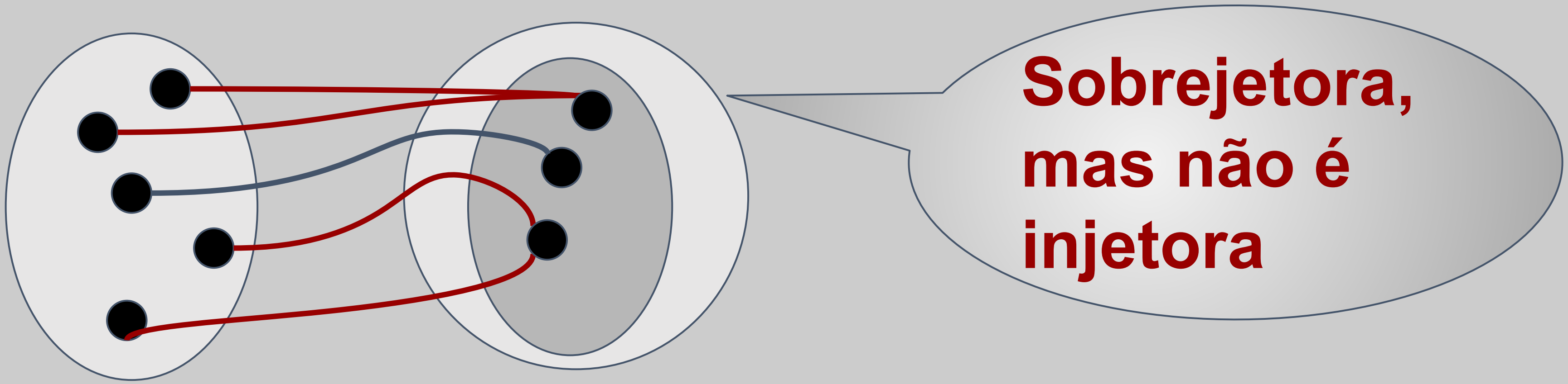
Seja $y=g(x)$, vamos encontrar x no domínio.

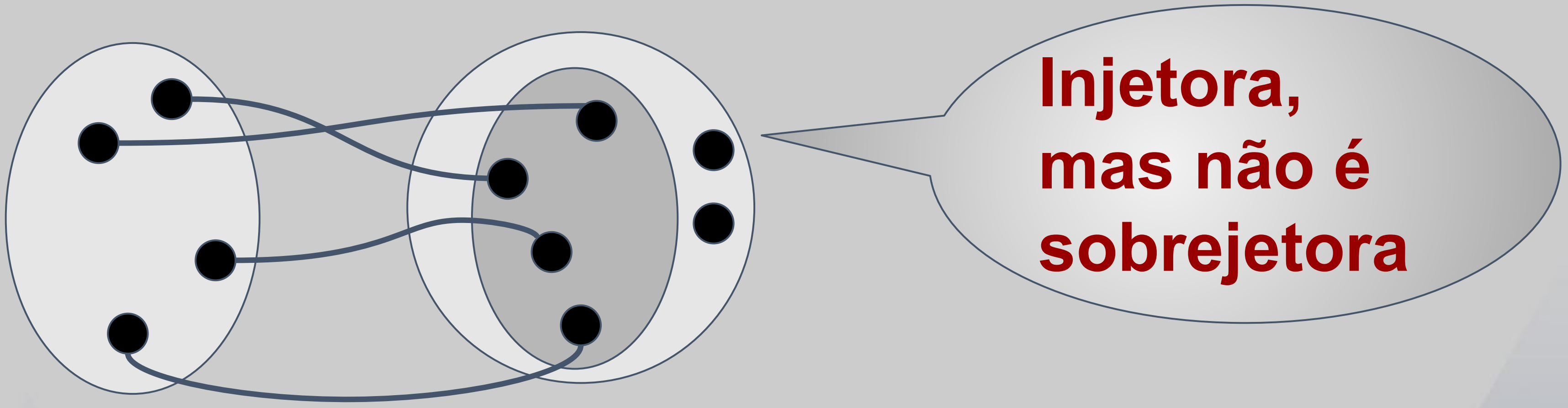
$$g(x)=y=x^3 \rightarrow x=y^{1/3}$$

onde $y^{1/3} \in \mathbb{R}$. Logo, existe $x \in \mathbb{R}$.

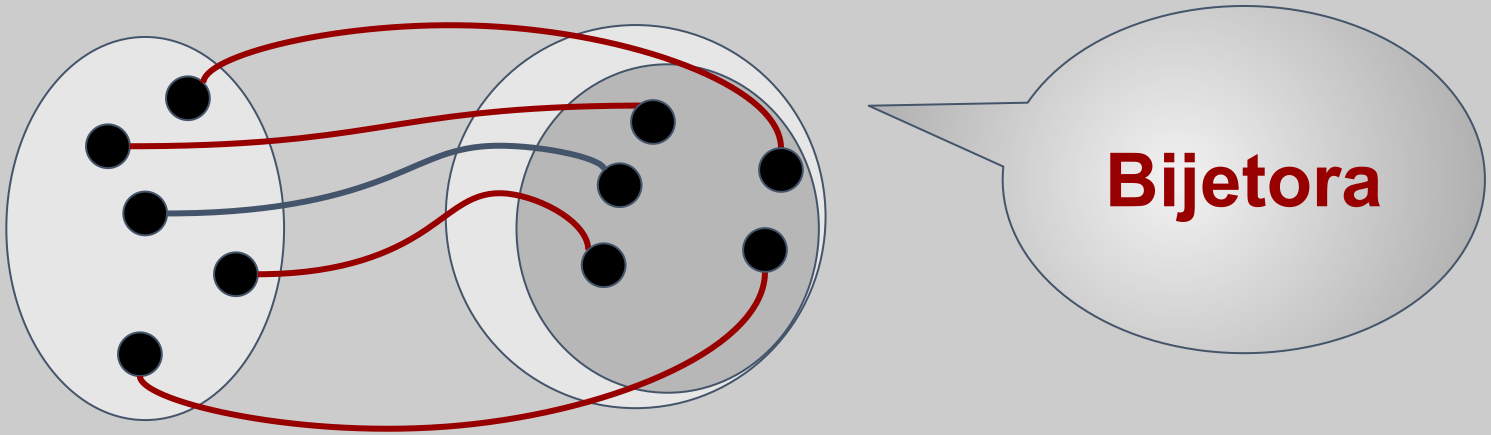
Portanto, $g(x)=x^3$ é bijetora.

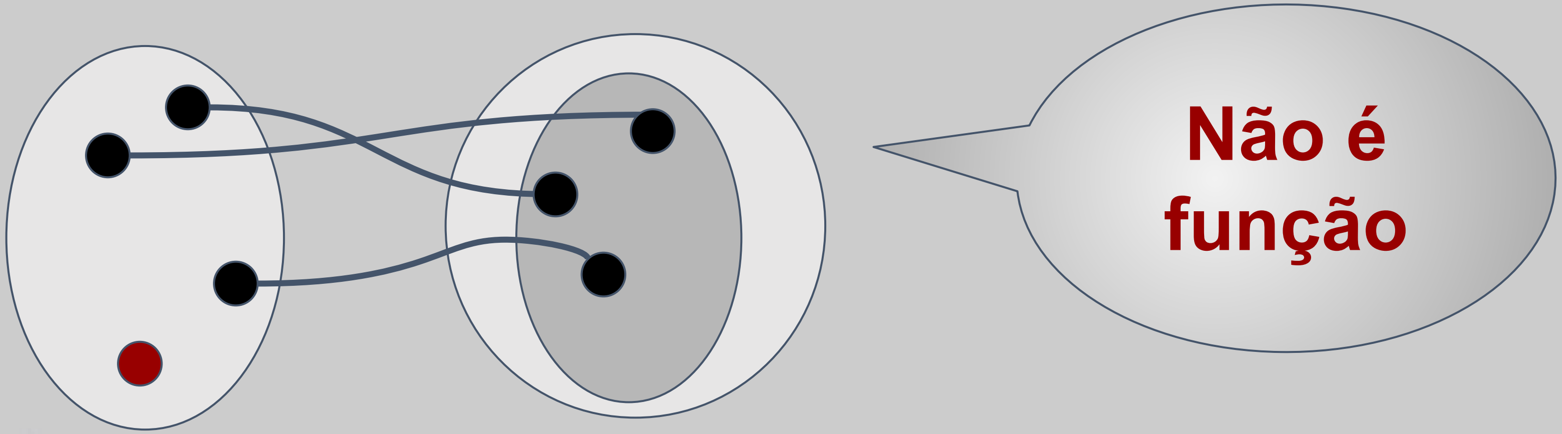
Propriedades de Funções





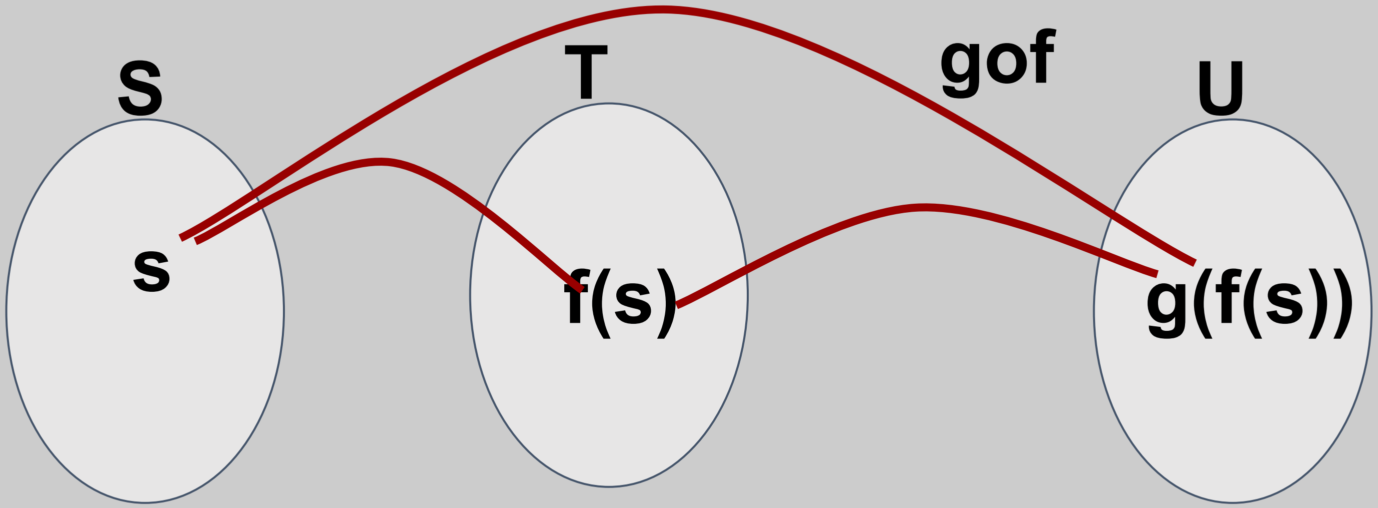
Propriedades de Funções





Funções Compostas

Sejam f: S → T e g: T → U. A **função composta** g o f é a função de S em U definida por (g o f) (s) = g(f(s)).



Funções Compostas

Seja f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por f (x) = x^2.

g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por g(x) = $\lceil x \rceil$.

Função teto $\lceil x \rceil$: retorna menor $z \geq x$, $z \in \mathbb{Z}$.

$\lceil 2.8 \rceil = 3$, $\lceil -4.1 \rceil = -4$.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \lceil f(x) \rceil = \lceil x^2 \rceil \Rightarrow g(f(2,3)) = \lceil (2,3)^2 \rceil$

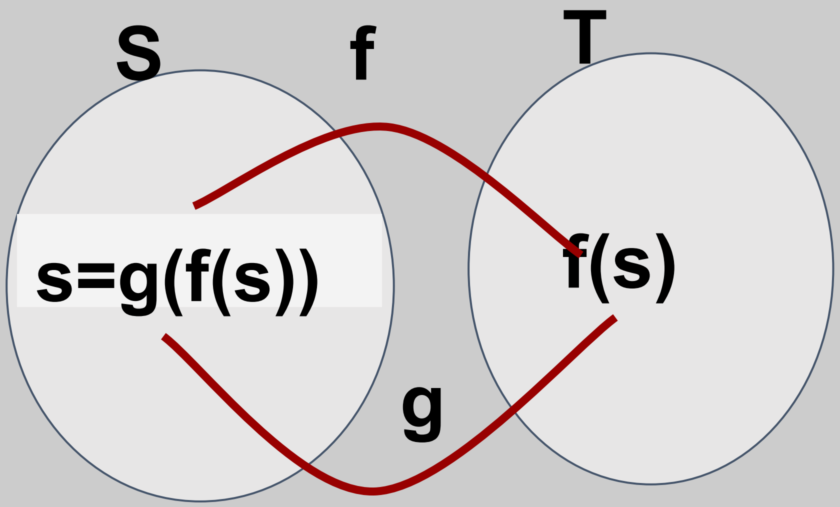
$g(f(2,3)) = \lceil 5,29 \rceil = 6$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (\lceil x \rceil)^2 \Rightarrow f(g(2,3)) = (\lceil 2,3 \rceil)^2$

$g(f(2,3)) = (3)^2 = 9$

Função Composta

A função que leva cada elemento de um conjunto S em si mesmo, ou seja, que deixa cada elemento de S fixo, é chamada de função identidade em S e denotada por i_S.



Função Composta

Exemplo: Sejam $f: S \to T$ e $g: T \to S$.

Mostre que $f \circ g = i_T$ e $g \circ f = i_s$

Seja $t \in T$, então

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(s) = t$$

Seja $s \in S$, então

$$(g \circ f)(s) = g(f(s)) = g(t) = s$$

Função Inversa

Seja $f : S \to T$. Se existir $g: T \to S$ tal que $g \circ f = i_s$ e $f \circ g = i_T$, então g é chamada função inversa de f denotada por f^{-1}.

TEOREMA: Seja $f: S \to T$. Então, f é uma bijeção se e somente se f^{-1} existe.

Função Inversa

Exemplo: Seja f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x + 4$ uma função bijetora. Encontre f^{-1}.

Trocamos x por $y=f^{-1}(x)$ na função:

$$x=3y+4$$
$$3y=x-4$$
$$y=(x-4)/3$$
$$f^{-1}(x)=(x-4)/3$$

Os conceitos e exemplos apresentados nesses slides são baseados no conteúdo da seção 5.4 do material-base “Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação”, J.L. Gersting, 7a edição, LTC editora.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

Funções