FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

Lógica Proposicional

SUMÁRIO

- Argumentos Válidos
- > Regras de Dedução
 - Regras de Equivalência
 - Regras de Inferência

Lógica proposicional: sistema formal que usa fbfs proposicionais.

- Também chamada lógica declarativa ou cálculo proposicional.
- Permite chegar a conclusões a partir de proposições dadas.

 $(A' \land (A \lor B) \land (B \lor C)') \rightarrow (B \lor C)$

 $(P1 \land P2 \land P3) \rightarrow Q$

P1=A'

 $P2=(A \lor B)$

 $P3=(B \lor C)$

 $Q=(B \lor C)$

Quando P1,P2,P3 implica Q? Quando Q é deduzido de P1, P2 e P3?

Quando Q é uma conclusão de P1,P2 e P3?

Quando Q segue de P1,P2,P3?

```
P1 \wedge P2 \wedge P3 \wedge...\wedge Pn\rightarrowQ Argumento
(P1 \wedge P2 \wedge P3...\wedge Pn) Hipóteses
Q Tese
```

Quando o argumento é válido?

- Sempre que a verdade das proposições
 P1, ..., Pn implicar a verdade de Q.
- (P1 ∧ P2 ∧ P3 ∧... ∧ Pn→Q) é verdadeiro !

A terra não é plana. Marte é o quarto planeta do sistema solar. Portanto, peixes vivem na água.

- Isoladamente, cada hipótese e a conclusão são verdadeiros, mas não consideramos um argumento válido!
- A conclusão é verdadeiro por si. Não é uma consequência das hipóteses definidas.

Argumento válido: Ocorre quando a fbf P1 \land P2 \land P3 \land ... \land Pn \rightarrow Q for uma tautologia.

Um argumento válido deve ser verdadeiro com base em sua estrutura interna. A terra não é plana.

Marte é o quarto
planeta do sistema
solar. Portanto,
peixes vivem na
água.

A: Terra não é plana

C: Peixes vivem na

água

B: Marte é o quarto

planeta

A	В	С	(A ∧ B)	(A ∧ B)→C
V	٧	٧	V	V
V	V	F	V	F
V	F	٧	F	V
V	F	F	F	V
F	٧	٧	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

Se a firma falir, todos os seus ativos serão confiscados.

A firma faliu. Segue que todos os seus ativos têm que ser

confiscados.

 $(A \rightarrow B) \land A \rightarrow B$

Α	В	(A→B)	(A→B)∧	(A→B) ∧
			A	A→B
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Sequência de demonstração: sequência de fbfs onde cada fbf é uma hipótese ou o resultado de se aplicar uma das regras de dedução.

- > O sistema lógico formal deve ser correto e completo.
 - Correto: apenas argumentos válidos deveriam ser demonstráveis.
 - Completo: todos os argumentos válidos deveriam ser demonstráveis.
- Também deve ser tratável: utiliza o menor número possível de regras de dedução.

Regras de Dedução

- Regras de equivalência: permitem que fbfs individuais sejam reescritas.
- Regras de inferência: permitem a dedução de novas fbfs a partir de fbfs anteriores na sequência de demonstração.

Nas regras de equivalência, pares de fbfs A e B são equivalentes: A⇔B (equivalência tautológica).

Comutatividade:

$$A \lor B \Leftrightarrow B \lor A, A \land B \Leftrightarrow B \land A$$

Associatividade:

$$(A \lor B) \lor C \Leftrightarrow A \lor (B \lor C)$$

$$(A \land B) \land C \Leftrightarrow A \land (B \land C)$$

Distributividade:

$$A \lor (B \land C) \Leftrightarrow (A \lor B) \land (A \lor C)$$

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

Lei de De Morgan

$$(A \land B)' \Leftrightarrow (A' \lor B')$$

$$(A \lor B)' \Leftrightarrow (A' \land B')$$

Condicional:

$$(A \rightarrow B) \Leftrightarrow (A' \lor B)$$

Dupla negação

Definição de equivalência

$$(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$$

Exemplo:

- 1. (P' ∧ R') ∨ S hipótese.
- 2. $(P \lor R)' \lor S$, De Morgan: $(A \lor B)' \Leftrightarrow (A' \land B')$
- 3. $(P \lor R) \rightarrow S$, Condicional: $(A' \lor B) \Leftrightarrow (A \rightarrow B)$

No passo 2, fizemos:

```
P=A e R=B em (A \vee B)' \Leftrightarrow (A' \wedge B')
```

No passo 3, fizemos:

$$(P \lor R)$$
'=A' e B=S em $(A' \lor B) \Leftrightarrow (A \to B)$
 $((P \lor R)' \lor S) \Leftrightarrow (P \lor R \to S)$

De	Deduzimos	Regra
P, P→Q	Q	Modus Ponens
P→Q, Q'	P'	Modus tollens
P, Q	P∧Q	Conjunção
P∧Q	P, Q	Simplificação
Р	P∨Q	Adição

Exemplo:

- 1. $A \rightarrow (B \land C)$ hipótese
- 2. A hipótese
- 3. (B ∧ C)

P→Q

Modus Ponens

P

Q

- 1. $A \rightarrow (B \land C)$ hipótese V
- 2. A hipótese v
- 3. (B ∧ C) V

$$V \rightarrow Q V$$

P_V

Q V

Modus Tollens

Conjunção

F F

- 1. $P \rightarrow Q$ V hip.
- 2. Q' V hip.
- 3. P' v dedução

- 1. P _V hip.
- 2. Q _V hip.
- dedução 3. PAQ v dedução

Simplificação

- 1. $P \land Q \lor hip.$
- 2. P v dedução
- 3. Q v dedução

Adição

- 1. P V hip.
- dedução 2. PVQ v dedução

Exemplo:

$$A \land (B \rightarrow C) \land [(A \land B) \rightarrow (D \lor C')] \land B \rightarrow D$$

- 1. A hip.
- 2. $(B \rightarrow C)$ hip.
- 3. $[(A \land B) \rightarrow (D \lor C')]$ hip.
- 4. B hip.
- 5. C 2, 4 mp.
- 6. A ∧ B 1, 4 conj.
- 7. D V C' 3,6, mp.
- 8. C'∨ D 7, com.
- 9. $C \rightarrow D$ 8, cond.
- 10. D 5,9, mp.

Dicas:

 Modus ponens é uma regra intuitiva. Tente usá-la!

(P ∧ Q)'ou (P ∨ Q)' dificilmente são úteis.
 Aplique leis de De Morgan para obter P' ∨ Q' e P' ∧ Q', respectivamente.

Dicas:

- P ∨ Q dificilmente são úteis já que não implicam P nem Q.
- Tente usar a dupla negação em P ∨ Q para obter:
 - 1. $P \lor Q$ hip.
 - 2. (P')' ∨ Q 1, dupla negação
 - 3. $P' \rightarrow Q$. 2, cond.

O método dedutivo nos permite substituir:

P1
$$\wedge$$
 P2 \wedge P3 \wedge ... \wedge Pn \rightarrow (R \rightarrow S)

por

P1
$$\wedge$$
 P2 \wedge P3 \wedge ... \wedge Pn \wedge R \rightarrow S

Silogismo hipotético (sh):

- $P \rightarrow Q e Q \rightarrow R$, pode-se deduzir $P \rightarrow R$.
- $(P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$

Exemplo:

$$(A \rightarrow B) \land (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

$$(A \rightarrow B) \land (B \rightarrow C) \land A \rightarrow C$$

- 1. $(A \rightarrow B)$ hip.
- 2. $(B \rightarrow C)$ hip.
- 3. A hip.
- 4. B 1,3, mp.
- 5. C 2, 4 mp.

Exemplo:

$$(A \rightarrow B) \land (C' \lor A) \land C \rightarrow B$$

- 1. $(A \rightarrow B)$ hip.
- 2. (C' ∨ A) hip.
- 3. C hip.
- 4. $C \rightarrow A$ 2,cond.
- 5. A 3, 4, mp.
- 6. B 1,5, mp.

Exemplo: Se segurança é um problema, então o controle será aumentado. Se segurança não for um problema, então os negócios na Internet irão aumentar. Portanto, se o controle não for aumentado, os negócios na Internet crescerão.

A: segurança é um problema

B: o controle será aumentado.

C: os negócios na internet irão aumentar

A→ B: Se segurança é um problema, então o controle será aumentado.

A'→ C: Se segurança não for um problema, então os negócios na Internet irão aumentar. Portanto, →

B'→ C: se o controle não for aumentado, os negócios na Internet crescerão.

$$(A \rightarrow B) \land (A' \rightarrow C) \rightarrow (B' \rightarrow C)$$

$$\begin{array}{c} (\mathsf{A} \!\to \mathsf{B}) \ \land \ (\mathsf{A}' \!\to \mathsf{C}) \to \! (\mathsf{B}' \!\to \mathsf{C}) \\ (\mathsf{A} \!\to \mathsf{B}) \ \land \ (\mathsf{A}' \!\to \mathsf{C}) \ \land \ \mathsf{B}' \!\to \mathsf{C} \end{array}$$

1. (A→ B)

2. (A'→ C)

3. B'

4. A'

5. C

hip.

hip.

hip.

1,3, mt

2,4, mp.

Os conceitos e exemplos apresentados nesses slides são baseados no conteúdo da seção 1.2 do material-base "Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação", J.L. Gersting, 7a edição, LTC editora.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

Lógica Proposicional