FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

Grafos Direcionados, Relações Binárias e Acessibilidade

SUMÁRIO

- Grafos Direcionados e Relações Binárias
- Acessibilidade

Grafos Direcionados e Relações Binárias

- **Vamos considerar aqui grafos direcionados sem arcos paralelos e sem peso associado ao arco.**

Arcos não paralelos

Arcos paralelos

Grafos Direcionados e Relações Binárias

- A matriz de adjacência do grafo com n nós será uma matriz $n \times n$ não necessariamente simétrica.
- Sem arcos paralelos, a matriz de adjacência será uma matriz booleana: todos os elementos são 0s ou 1s.
- Logo, dada uma matriz booleana $n \times n$, podemos reconstruir o grafo direcionado representado por essa matriz.
- O grafo não terá arcos paralelos

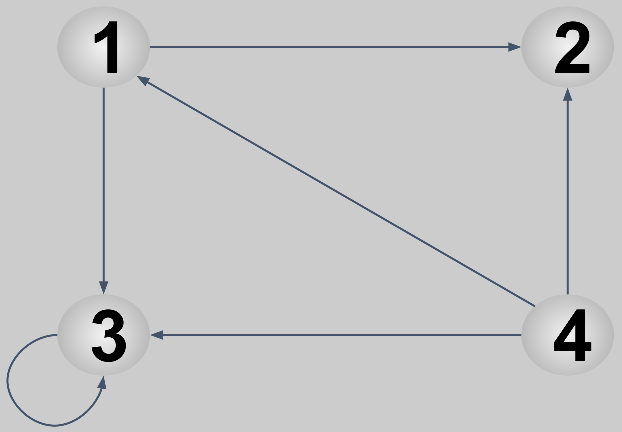
Grafos Direcionados e Relações Binárias

Grafos direcionados com *n* nós e sem arcos paralelos ⟷ Matrizes booleanas *nxn*

Grafos Direcionados e Relações Binárias

Exemplo:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$



Grafos Direcionados e Relações Binárias

Seja G=(N,A) um grafo direcionado com *n* nós em N e sem arcos paralelos.

Relação de adjacência do grafo G:

$$n_i \ \rho \ n_j$$

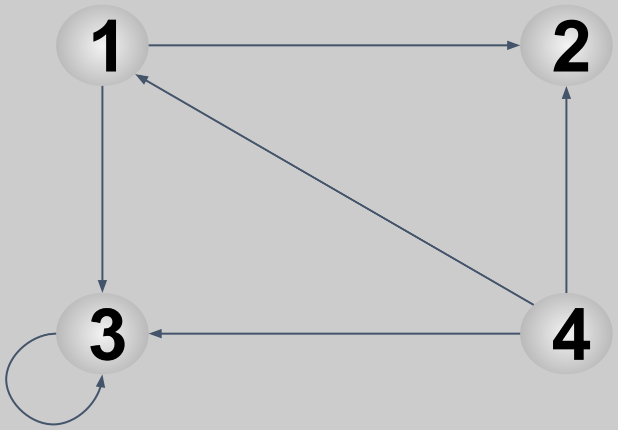
$$\leftrightarrow$$

Existe um arco em G de n_i para n_j

Grafos Direcionados e Relações Binárias

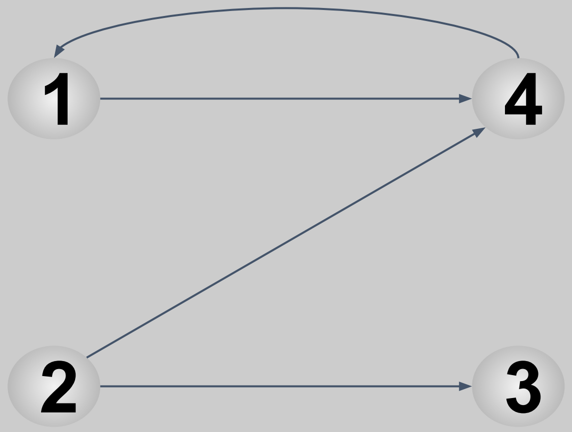
Exemplo: Relação de adjacência para o grafo

G: {(1, 2), (1,3), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)}.



Grafos Direcionados e Relações Binárias

Exemplo:



O grafo G é obtido para N = {1, 2, 3, 4} e a relação binária {(1, 4), (2, 3), (2, 4), (4, 1)}

Grafos direcionados com n nós e sem arcos paralelos

Relações binárias em conjuntos com n elementos

Matrizes booleanas n x n

Grafos direcionados com n nós e sem arcos paralelos

Relações binárias em conjuntos com n elementos

Grafos Direcionados e Relações Binárias

Exemplo:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Relação binária

{(1, 4), (2, 3), (2, 4), (4, 1)}

Grafos Direcionados e Relações Binárias

- **Se uma relação binária em um conjunto N tiver determinada propriedade, isso se refletirá no grafo e na matriz booleana correspondente.**

- **Reciprocamente, determinadas características de um grafo direcionado ou de uma matriz booleana implicam certas propriedades nas relações de adjacência correspondentes.**

Grafos Direcionados e Relações Binárias

Lembre-se das propriedades de reflexividade, simetria, antissimetria e transitividade de uma relação binária!!

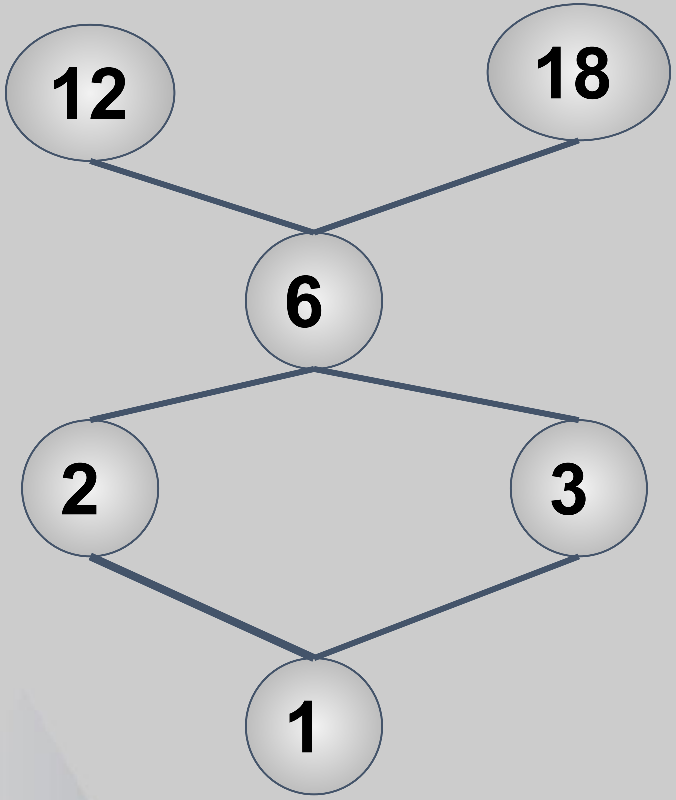
Exemplo: Se ρ for uma relação reflexiva em um conjunto N, então, para cada $n_i \in N$, $n_i \rho n_i$.

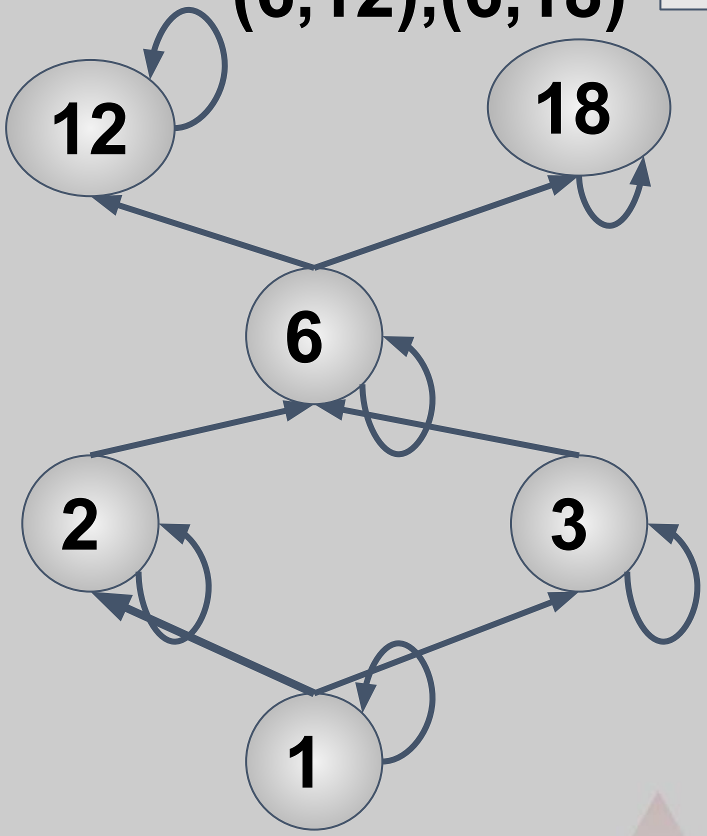
- **O grafo direcionado terá um laço em cada nó.**
- **A matriz booleana terá apenas valores iguais a 1 na diagonal principal.**

Grafos Direcionados e Relações Binárias

(1,3), (3,6),
(6,12),(6,18) $\Rightarrow$ (1,6), (1,12), (1,18)
(3,12), (3,18)

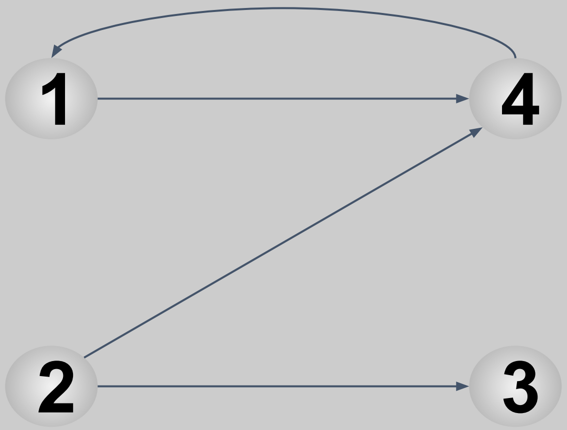
Diagrama de Haase





Acessibilidade

Considere um grafo direcionado. O nó n_j será **acessível** a partir do nó n_i se existir um caminho de n_i para n_j.



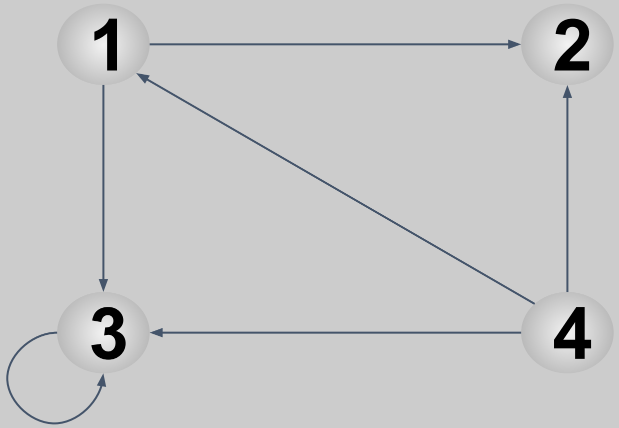
Acessibilidade

- Considere um sistema modelado por um grafo direcionado com um “nó inicial”.
- Um nó não acessível a partir do nó inicial nunca afeta tal sistema.
- Logo, o nó não acessível pode ser eliminado.

Acessibilidade

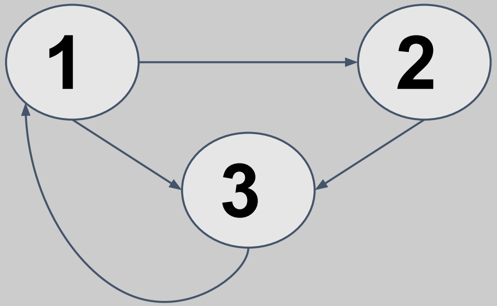
A matriz de adjacência por si só representa uma forma limitada de acessibilidade, por caminhos de comprimento 1.

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$



Acessibilidade

$$A=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



Grafo com n nós

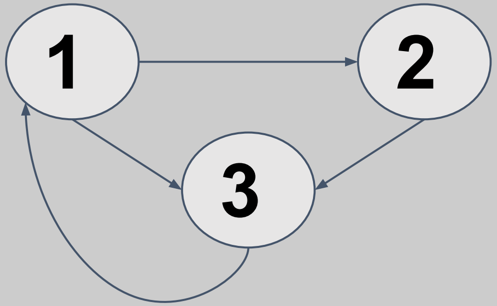
$A^{(2)}$=AxA

$$a_{ij}^{(2)} = \bigvee_{k=1}^{n}\left(a_{ik} \wedge a_{ik}\right)$$

$$A^{(2)}=\left|\begin{array}{lll}
(0\wedge 0)\vee & (0\wedge 1)\vee & (0\wedge 1)\vee \\
(1\wedge 1) & (1\wedge 0) & (1\wedge 1) \\
\vee(1\wedge 1) & \vee(1\wedge 0) & \vee(1\wedge 0) \\
(0\wedge 0)\vee & (0\wedge 1)\vee & (0\wedge 1)\vee \\
(0\wedge 1) & (0\wedge 0) & (0\wedge 1) \\
\vee(1\wedge 1) & \vee(1\wedge 0) & \vee(1\wedge 0) \\
(1\wedge 0)\vee & (1\wedge 1)\vee & (1\wedge 1)\vee \\
(0\wedge 1) & (0\wedge 0) & (0\wedge 1)
\end{array}\right|$$

Acessibilidade

$$A=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

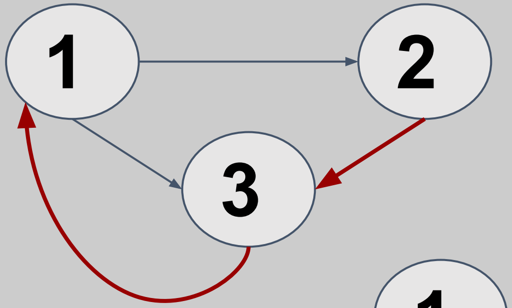


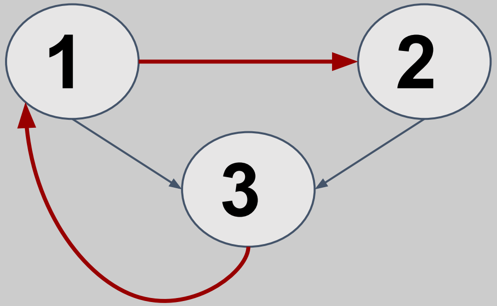
Grafo com n nós

$A^{(2)}$=AxA

$$a_{ij}^{(2)} = \bigvee_{k=1}^{n} \left(a_{ik} \wedge a_{ik} \right)$$

$$A^{(2)}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$





Acessibilidade

Teorema: **Se A for a matriz booleana de adjacência de um grafo direcionado G com n nós e sem arcos paralelos, então $a_{ij}^{(m)}=1$ se, e somente se, existir um caminho de comprimento m do nó n_i para o nó n_j.**

Acessibilidade

Se o grafo tem n nós, então qualquer caminho com n arcos ou mais, e, portanto, com n + 1 nós ou mais, tem que ter um nó repetido.

Não precisamos nunca procurar um caminho de n_i a n_j de comprimento maior do que n.

Acessibilidade

Matriz R de acessibilidade:

$R = A \vee A^2 \vee ... \vee A^n$

O nó n_j será acessível de n_i se, e somente se, o elemento i, j em R for positivo.

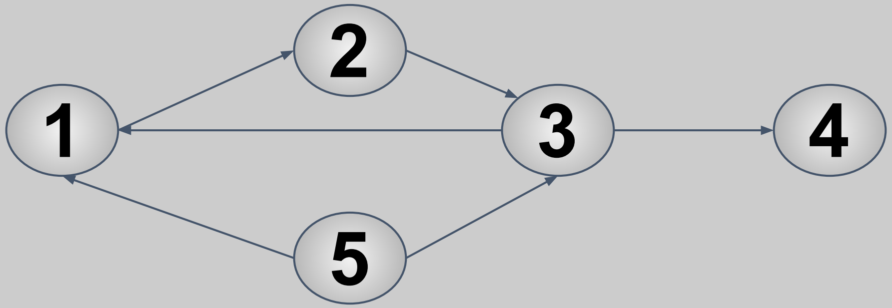
Acessibilidade

Relação binária de acessibilidade ρ^R em um grafo direcionado G:
$(n_i, n_j) \in \rho^R$ quando há caminho em G de n_i para n_j.

ρ^R é o fecho transitivo da relação binária ρ em G.

Acessibilidade

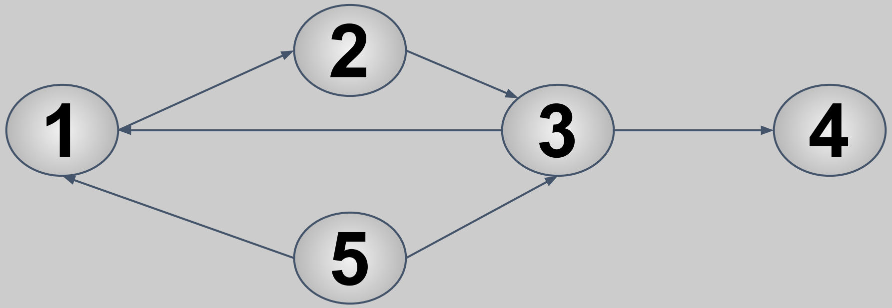
Exemplo:



$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

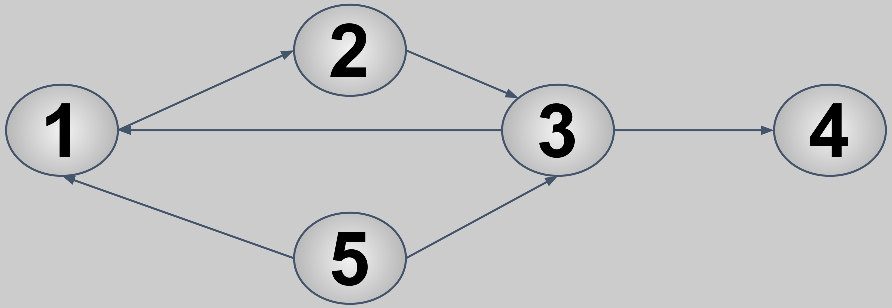
$\rho=\{(1,2),(2,3),(3,1),(3,4),(5,1),(5,3)\}$

Acessibilidade



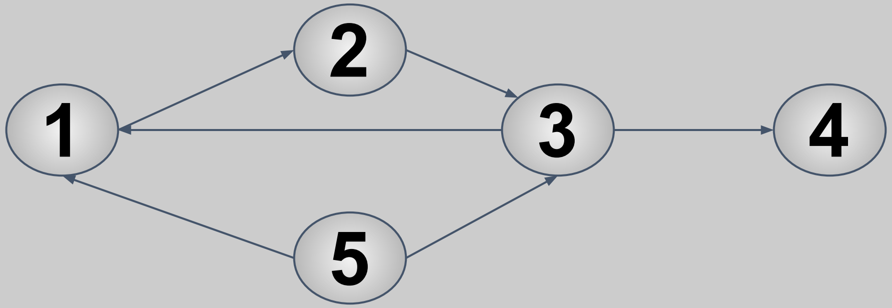
$$A^{(2)}= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad A^{(3)}= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Acessibilidade



$$A^{(4)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad A^{(5)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Acessibilidade



$\rho=\{(1,2),(2,3),(3,1),(3,4),(5,1),(5,3)\}$

$\rho^R =\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$

$$R=A\vee A^2\vee A^3\vee A^2\vee A^5= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Os conceitos e exemplos apresentados nesses slides são baseados no conteúdo da seção 7.1 do material-base “Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação”, J.L. Gersting, 7a edição, LTC editora.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

Grafos Direcionados, Relações Binárias e Acessibilidade