FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

Quantificadores, Predicados e Validade

SUMÁRIO

Quantificadores e Predicados

Para todo x, x > 0.

- **Verdadeiro para x inteiro positivo.**

$$\underbrace{\text{Para todo } x,}_{\text{Quantificador}}\ \underbrace{x > 0}_{\text{Predicado}}.$$

- **Quantificadores dizem quantos objetos têm determinada propriedade.**

Quantificadores e Predicados

Quantificador universal:

∀ “para todo”, “para cada” ou “para qualquer”

$$\underbrace{\text{Para todo x,}}_{(\forall x)}\ \underbrace{\text{x > 0.}}_{P(x)}$$

(∀x)P(x)

O valor lógico depende do domínio dos objetos

Quantificadores e Predicados

Exemplo: Interpretando $(\forall x)P(x)$ quando:

- **P(x): x é amarelo no conjunto de todos os botões-de-ouro.**
- **P(x): x é amarelo no conjunto de todas as flores.**
- **P(x): x é uma planta no conjunto de todas as flores.**
- **P(x): x é positivo ou negativo no conjunto de todos os inteiros.**

Quantificadores e Predicados

Quantificador existencial: ∃

“existe”, “há pelo menos um”, “existe algum” ou “para algum”

Existe x, x > 0.

$$(\exists x)P(x)$$

O valor lógico depende do domínio dos objetos

Quantificadores e Predicados

Predicados unários: consideram propriedades de uma única variável.

Predicados binários: consideram propriedades de duas variáveis.

Predicados ternários: consideram propriedades de três variáveis.

Predicados n-ários: consideram propriedades de *n* variáveis.

Quantificadores e Predicados

Exemplo: Seja $Q(x,y)$: $x < y$ nos inteiros

- **$(\forall x)(\exists y)Q(x, y)$: para todo x existe um y tal que $x<y$**
  - **Verdadeira!**
- **$(\exists y)(\forall x)Q(x, y)$: existe y para todo x tal que $x<y$.**
  - **Falsa!**

Quantificadores e Predicados

Exemplo: Seja $Q(x,y)$: $x < y$ nos inteiros

- **$(\forall x)(\forall x)Q(x,x)$: para todo x, temos $x<x$**
  - **Falsa!**

- **$(\forall x)Q(x,7)$: para todo x temos $x < 7$.**
  - **Falsa!**

Interpretação

- Uma interpretação de uma expressão com predicados consiste em:
    - Uma coleção de objetos, chamada de conjunto universo que inclui ao menos um objeto.
    - Uma propriedade dos objetos no domínio para cada predicado na expressão.
    - A atribuição de um objeto particular no conjunto universo para cada símbolo da expressão.

Interpretação

- Fbfs predicadas contém predicados e quantificadores.

- Fbfs proposicionais contém apenas letras de proposições e conectivos lógicos.

Interpretação

Exemplo: Vamos interpretar

$$(\forall x)(A(x)\ (\exists y)[B(x, y) \rightarrow C(y)]$$

no conjunto dos inteiros.

A(x): $x > 0$, B(x,y): $x > y$ e C(y): $y^2>0$.

“Para todo $x>0$, existe y tal que se $x>y$ então $y^2>0$.”

Representação

Vamos representar sentenças em português como fbfs predicadas.

"Todo papagaio é feio"

"Dada uma coisa, se é um papagaio, então é feio"

P(x): x é um papagaio F(x): x é feio

$$(\forall x)[P(x) \rightarrow F(x)]$$

Representação

O sentido muda com:

$$(\forall x)[P(x) \land F(x)]$$

P(x): x é um papagaio F(x): x é feio

“Todos no conjunto universo são papagaios e feios”

Representação

“Existe um papagaio feio”

“Existe alguma coisa que é, ao mesmo tempo, papagaio e feio”.

$$(\exists x)[P(x) \land F(x)]$$

P(x): x é um papagaio F(x): x é feio

$\forall \rightarrow$

$\exists \land$

Representação

Exemplo: Considere os seguintes predicados

- **D(x): x é um dia.**
- **S(x): x é ensolarado.**
- **R(x): x é chuvoso.**

Há dias ensolarados

$$(\exists x)[D(x) \land S(x)]$$

Todo dia ensolarado não é chuvoso.

$$(\forall x)[D(x) \land S(x) \rightarrow R'(x)]$$

R'(x): x não é chuvoso

Representação

Exemplo: Considere os seguintes predicados

- **D(x): x é um dia, S(x): x é ensolarado.**
- **R(x): x é chuvoso.**

Nenhum dia é ensolarado.

$$[\,(\exists x)D(x) \wedge S(x)\,]'$$

$$\Leftrightarrow\ (\exists x)'[D'(x) \wedge S(x)\,]'$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)[D(x) \wedge S(x)]'$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)[D'(x) \vee S'(x)]$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)[D(x) \rightarrow S'(x)]$$

Representação

Note que:

- [(∃x)A(x)] ’ é equivalente a (∀x)[A(x)]’
  “Existe algo lindo” é equivalente a “Tudo não é lindo”

- [(∀x)A(x)] ’ é equivalente a (∃x)[A(x)]’
  “Tudo é lindo” é equivalente a “Existe algo que não é lindo”, “Alguma coisa não é linda”

Representação

Exemplo: Considere os seguintes predicados

- **D(x): x é um dia, S(x): x é ensolarado.**
- **R(x): x é chuvoso.**

Se algum dia for ensolarado, então todos os dias serão ensolarados.

$$(\exists x)D(x) \wedge S(x) \rightarrow (\forall x)[D(x) \rightarrow S(x)]$$

Representação

Advérbios como “só”, “somente” e “apenas” podem gerar confusão.

Exemplo: Seja J(x): x é João, M(x): x é Maria e A(x,y): x ama y.

(a) João ama apenas Maria.

“Se João ama alguma coisa, essa coisa é Maria”

$$(\forall x)(J(x) \rightarrow (\forall y)(A(x, y) \rightarrow M(y))$$

O consequente é a palavra que vem depois do “apenas”

Representação

Exemplo: Seja J(x): x é João, M(x): x é Maria e A(x,y): x ama y.

(b) Apenas João ama Maria.

- **Se alguma coisa ama Maria, essa coisa é João.**
- **Dada alguma coisa, se for Maria, então, se alguma coisa a amar, essa coisa será João.**

$$(\forall x)(M(x) \rightarrow (\forall y)(A(y, x) \rightarrow J(y))$$

O consequente é a palavra que vem depois do "apenas"

Representação

Exemplo: Seja J(x): x é João, M(x): x é Maria e A(x,y): x ama y.

(c) João apenas ama Maria.

- **Se João tem alguma relação com Maria, essa relação é amor.**
- **Dada uma coisa, se for João, então, dada outra coisa, se for Maria, então João a ama.**

$(\forall x)(J(x) \rightarrow (\forall y)(M(y) \rightarrow A(x, y))$

O consequente é a palavra que vem depois do "apenas"

Os conceitos e exemplos apresentados nesses slides são baseados no conteúdo da seção 1.3 do material-base “Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação”, J.L. Gersting, 7a edição, LTC editora.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

Quantificadores, Predicados e Validade