

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

**Proposições, Representações
Simbólicas e Tautologias**

SUMÁRIO

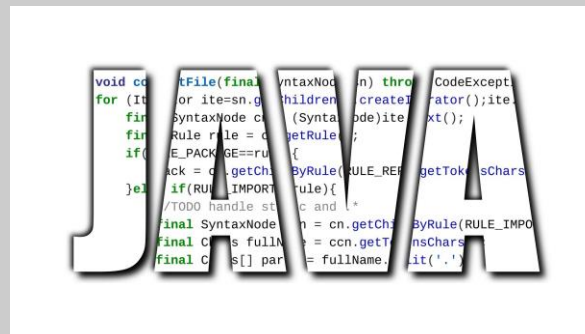
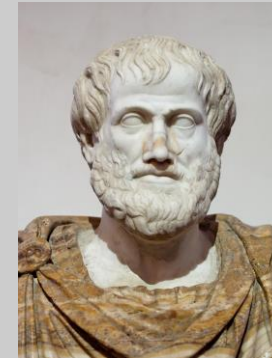
- Uma Breve Visão Geral
- Conectivos e Valores Lógicos
- Tautologia e Contradição
- Equivalência Tautológica

Uma breve visão geral

- **Objetivo da disciplina: desenvolver a base matemática necessária para projeto de algoritmos e noções de complexidade.**
- **Introduz conceitos fundamentais de matemática discreta, principalmente conceitos algébricos e lógicos.**

Uma breve visão geral

- A lógica formal deriva da filosofia na Grécia antiga com Aristóteles.
- A compreensão de uma demonstração simbólica formal é importante na computação.
- Conceitos de teoria dos grafos são usados em redes, sistemas operacionais e compiladores.



Conectivos e Valores Lógicos

Proposição: sentença que é falsa ou verdadeira.

- Dois é primo
- A terra é plana.
- $X > 20$.
- Quem ganhou o jogo?
- A inflação será menor este ano

Verdadeira

Falso

Não é proposição

Não é proposição

É proposição



Conectivos e Valores Lógicos

Conjunção \wedge - **E** : “...e,...mas,..também,...além disso”

- Maria é dentista mas gosta de doces
- A: Maria é dentista
- B: Maria gosta de doces

$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ & \wedge & \\ \text{Maria é dentista mas gosta de doces} & & \\ & (A \wedge B) & \end{array}$$

Conectivos e Valores Lógicos

Conjunção \wedge - E

**Maria é dentista
Maria gosta de doces**

**Maria é dentista
Maria não gosta de doces**

**Maria não é dentista
Maria gosta de doces**

**Maria não é dentista
Maria não gosta de doces**

| Tabela-Verdade | | |
|----------------|---|----------------|
| A | B | $(A \wedge B)$ |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

Conectivos e Valores Lógicos

Disjunção \vee - OU inclusivo

Maria é dentista ou gosta de doces

Maria é dentista
Maria gosta de doces
Maria é dentista
Maria não gosta de doces
Maria não é dentista
Maria gosta de doces
Maria não é dentista
Maria não gosta de doces

| Tabela-Verdade | | |
|----------------|---|--------------|
| A | B | $(A \vee B)$ |
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

Conectivos e Valores Lógicos

Disjunção \oplus V - XOU exclusivo

Neste momento, João toca piano ou João toca guitarra.

João toca piano
João toca guitarra
João toca piano
João não toca guitarra
João não toca piano
João toca guitarra
João não toca piano
João não toca guitarra

| Tabela-Verdade | | |
|----------------|---|----------------|
| A | B | $(A \oplus B)$ |
| V | V | F |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

Conectivos e Valores Lógicos

Negação: '

- Maria é dentista
- A: Maria é dentista
- A': Maria não é dentista

| Tabela-Verdade | |
|----------------|----|
| A | A' |
| V | F |
| F | V |

Conectivos e Valores Lógicos

Negação: cuidados ao negar!!!

- Vai fazer sol amanhã - **Proposição**
- Não vai fazer sol amanhã - **Negação correta**
- É falso que vai fazer sol amanhã - **Negação correta**
- Vai chover amanhã - **Negação incorreta!!!**

Conectivos e Valores Lógicos

Negação: cuidados ao negar!!!

- O jogo é difícil e caro - **Proposição**
- O jogo não é difícil e não é caro - **Negação incorreta!!**
- O jogo não é difícil ou não é caro - **Negação correta!!!**
- O jogo é fácil e barato - **Negação Incorreta!!!**
- O jogo é fácil ou barato - **Negação correta!!!**

Conectivos e Valores Lógicos

Condicional \rightarrow

- Se Maria tirar férias, então ela vai descansar.
- A: Maria tira férias - A é o antecedente
- B: Maria vai descansar - B é o consequente
- Verdade de A implica (leva) verdade B!!
- $(A \rightarrow B)$: Se A, então B

Conectivos e Valores Lógicos

Se Maria tirar férias, então ela vai descansar.

Maria tira férias, Maria descansa

Maria tira férias, Maria não
descansa

Maria não tira férias, Maria
descansa

Maria não tira férias, Maria não
descansa

| Tabela-Verdade | | |
|----------------|---|---------------------|
| A | B | $(A \rightarrow B)$ |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

Conectivos e Valores Lógicos

$$(A \rightarrow B)$$

- Se A, então B.
- A condicional B
- A, logo B
- A só se B;
- A somente se B.
- B segue de A.
- A é uma condição suficiente para B, basta A para B.
- B é uma condição necessária para A.

Conectivos e Valores Lógicos

Bicondicional: \leftrightarrow

- **Maria acorda cedo se, e somente se, chega no horário ao trabalho.**
- **A: Maria acorda cedo**
- **B: Maria chega no horário**
- **$A \leftrightarrow B$: A se, e somente se, B**
- **$A \leftrightarrow B$: A é condição necessária e suficiente para B.**

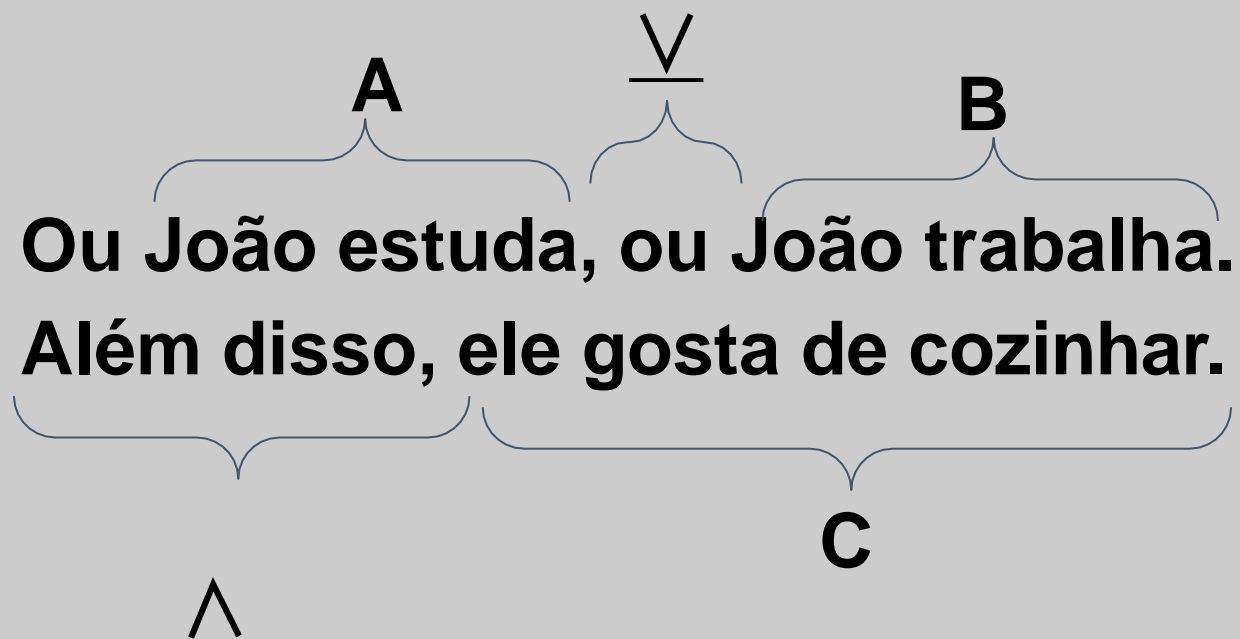
Conectivos e Valores Lógicos

| A | B | $A \rightarrow B$ | $B \rightarrow A$ | $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ |
|---|---|-------------------|-------------------|--|
| V | V | V | V | V |
| V | F | F | V | F |
| F | V | V | F | F |
| F | F | V | V | V |

| A | B | $A \leftrightarrow B$ |
|---|---|-----------------------|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

Conectivos e Valores Lógicos

Fórmula bem formulada (fbf): cadeia que forma uma expressão válida.



$$\begin{array}{c} (A \vee B) \\ \wedge C \end{array}$$

Conectivos e Valores Lógicos

Ordem de precedência nas fbfs:

1. para conectivos dentro de vários parênteses, efetuam-se primeiro as expressões dentro dos parênteses mais internos

2. '

3. \wedge , \vee

4. \rightarrow

5. \leftrightarrow

$A \vee B'$: $A \vee$
 $(B)'$

~~$(A \vee B)$~~
)'

$A \vee B \rightarrow C$: $(A \vee B)$
 $\rightarrow C$

~~$A \vee$~~
 ~~$(B \rightarrow C)$~~

Conectivos e Valores Lógicos

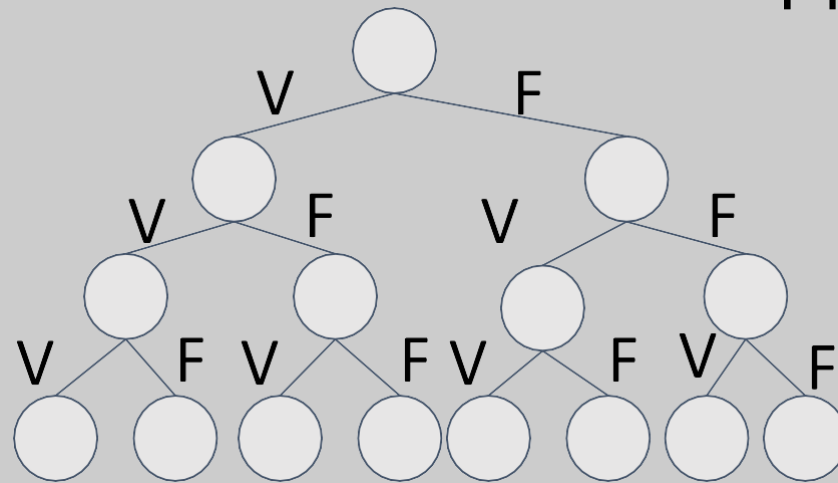
Conectivo Principal

$$A \vee (B \rightarrow C)'$$

$$(A \wedge C) \rightarrow ((B \vee C)' \rightarrow A)$$

Conectivo Principal

Conectivos e Valores Lógicos



Proposição

1

2

3

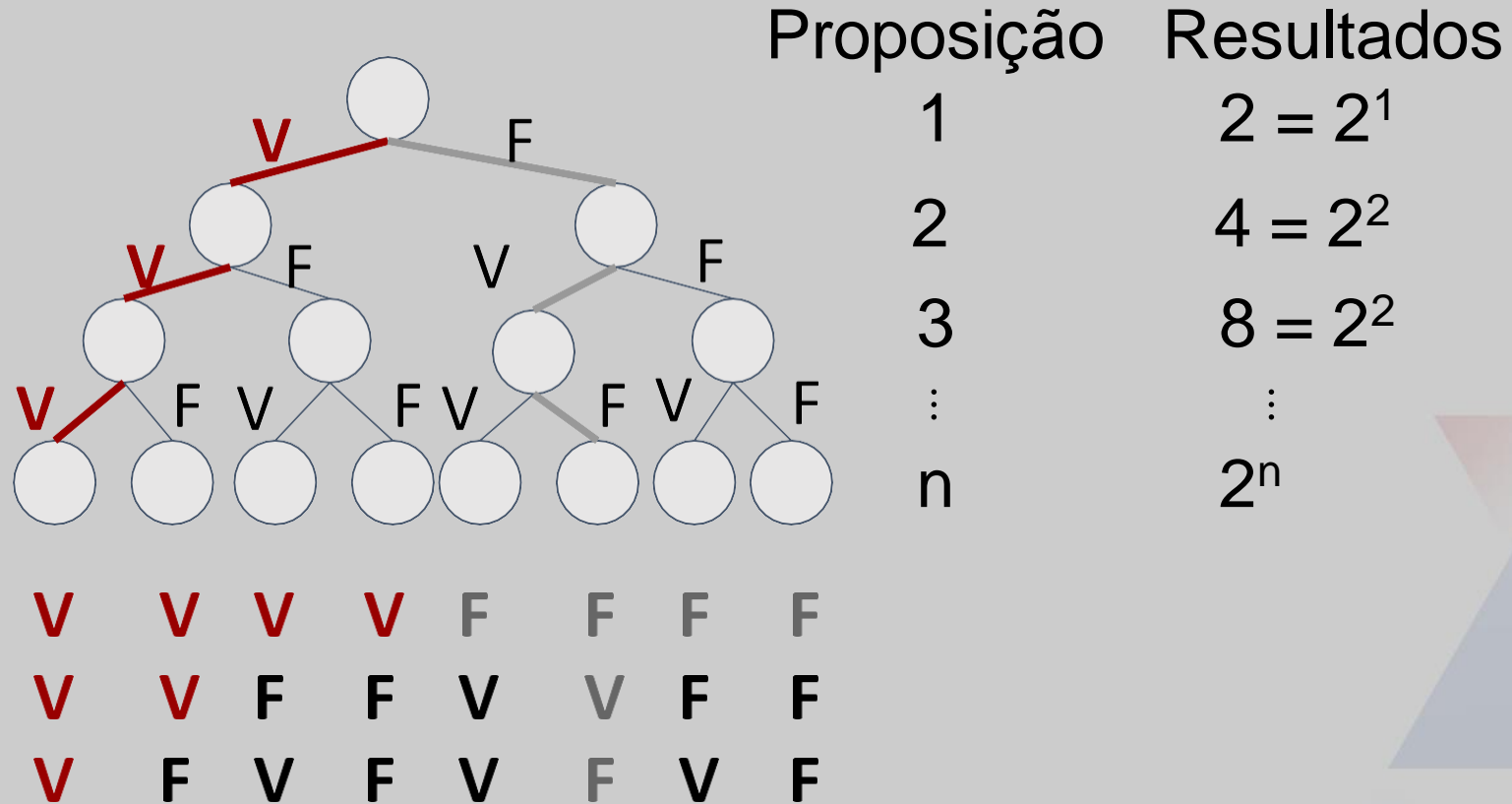
Resultados

$$2 = 2^1$$

$$4 = 2^2$$

$$8 = 2^3$$

Conectivos e Valores Lógicos



Tautologia e Contradição

Tautologia: fórmula ou proposição que é sempre verdadeira para qualquer tipo de interpretação possível.

- Maria é médica ou Maria não é médica

A

A'

| A | A' | $A \vee A'$ |
|---|----|-------------|
| V | F | V |
| F | V | V |

Tautologia!

Tautologia e Contradição

A'
Amanhã não vai chover. Amanhã vai chover
ou o céu estará azul. Portanto, o céu estará azul.
 B B

$$(A' \wedge (A \vee B)) \rightarrow B$$

Tautologia e Contradição

$$(A' \wedge (A \vee B)) \rightarrow B$$

| A | B | A' | $A \vee B$ | $A' \wedge (A \vee B)$ | $(A' \wedge (A \vee B)) \rightarrow B$ |
|---|---|----|------------|------------------------|--|
| V | V | F | V | F | V |
| V | F | F | V | F | V |
| F | V | V | V | V | V |
| F | F | V | F | F | V |

Tautologia e Contradição

Contradição: fórmula ou proposição que é sempre falsa para qualquer tipo de interpretação possível.

- Maria é médica e Maria não é médica

A

A'

| A | A' | $A \wedge A'$ |
|---|----|---------------|
| V | F | F |
| F | V | F |

Contradição!

Tautologia e Contradição

CONTRADIÇÃO - Exemplo: $(A \vee \neg A) \rightarrow (B \wedge \neg B)$

| A | B | $\neg A$ | $\neg B$ | $A \vee \neg A$ | $B \wedge \neg B$ | $(A \vee \neg A) \rightarrow (B \wedge \neg B)$ |
|---|---|----------|----------|-----------------|-------------------|---|
| V | V | F | F | V | F | F |
| V | F | F | V | V | F | F |
| F | V | V | F | V | F | F |
| F | F | V | V | V | F | F |

Equivalência Tautológica

Equivalência Tautológica: ocorre quando $A \leftrightarrow B$ é uma tautologia.

- Representamos por $A \Leftrightarrow B$ para indicar que a proposição A é equivalente à proposição B.
- Isso significa que podemos, do ponto de vista de fbf, substituir A por B ou vice-versa.

Equivalência Tautológica

Lei de De Morgan: $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ - TAUTOLOGIA

| A | B | $\neg A$ | $\neg B$ | $(A \vee B)$ | $\neg(A \vee B)$ | $\neg A \wedge \neg B$ | $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ |
|---|---|----------|----------|--------------|------------------|------------------------|---|
| V | V | F | F | V | F | F | V |
| V | F | F | V | V | F | F | V |
| F | V | V | F | V | F | F | V |
| F | F | V | V | F | V | V | V |

Equivalência Tautológica

Algumas Equivalências Tautológicas:

Comutatividade:

$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A \quad A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$$

Associatividade:

$$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$$

$$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$$

Equivalência Tautológica

Algumas Equivalências Tautológicas:

Distributividade:

$$A \vee (B \wedge C) \Rightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$A \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

Elementos neutros

$$A \vee 0 \Rightarrow A$$

$$A \wedge 1 \Rightarrow A$$

Complementares

$$A \vee A' \Rightarrow 1$$

$$A \wedge A' \Rightarrow 0$$

Equivalência Tautológica

| A | A' | 1 | 0 | A ∧ 1 | A ∧ A' | A ∧ 1 ⇒ A | A ∧ A' ⇒ 0 |
|----------|-----------|----------|----------|--------------|---------------|------------------|-------------------|
| V | F | V | F | V | F | V | V |
| F | V | V | F | F | F | V | V |

Equivalência Tautológica

Exemplo:

$$\text{SE } \underbrace{(\text{Press\~aoInicial} > \text{Press\~aoFinal})}_A \text{ E } \underbrace{\text{Temperatura} > 20}_B$$

$$\neg \underbrace{(\text{Press\~aoInicial} > \text{Press\~aoFinal})}_A \text{ E } \underbrace{\text{Temperatura} > 20}_B$$

FAÇA comando1;
SENÃO FAÇA comando2

A: PressãoInicial > PressãoFinal

B: Temperatura > 20

Temos: $A \wedge \neg (A \wedge B)$

Equivalência Tautológica

Essa seria a expressão mais simples? $A \wedge \neg(A \wedge B)$

$A \wedge \neg(A \wedge B) \Rightarrow A \wedge (\neg A \vee \neg B)$ (Lei de De Morgan)

$\Rightarrow (A \wedge \neg A) \vee (A \wedge \neg B)$ (Distributiva)

$\Rightarrow 0 \vee (A \wedge \neg B)$ (Contradição $(A \wedge \neg A) \Rightarrow \text{Falso}$)

$\Rightarrow (A \wedge \neg B)$ (Elemento Neutro)

SE ((PressãoInicial>PressãoFinal) E

NÃO (Temperatura>20))

FAÇA comando1;

SENÃO

FAÇA comando2

Os conceitos e exemplos apresentados nesses slides são baseados no conteúdo da seção 1.1 do material-base “Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação”, J.L. Gersting, 7a edição, LTC editora.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

**Proposições, Representações
Simbólicas e Tautologias**