FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

Demonstração de Correção - Parte II

SUMÁRIO

- Relembrando:
  - ✓ Tripla de Hoare
  - ✓ Axioma da Atribuição
  - ✓ Regra Condicional
- Regra do Laço

Relembrando: Tripla de Hoare

{Q}
s_0
{R1}
s_1
{R2}
⋮
s_{n-1}
{R}

Asserções
$Q, R_1, R_2, \ldots, R_n = R$

P é correto se cada condicional é válido

{Q}P{R}: tripla de Hoare

Q: pré-condição

P: programa

R: pós-condição

$\{Q\}s_0\{Rl\}$
$\{Rl\}s_1\{R2\}$
$\{R2\}s_2\{R3\}$
⋮
$\{Rn-1\}s_{n-1}\{R\}$

Relembrando: Axioma de Atribuição

(a,b)

{y=b,x=a}
temp = x
{y=b,temp=a}
x = y
{x=b,temp=a}
y = temp
{x=b,y=a}

(b,a)

Avance do fim para o início!

Relembrando: Regra Condicional

{x = 4}

Se x < 5 então

y = x – 1

Senão

y = 7

{y = 3}

{x = 4 e x < 5}y = x – 1 {y = 3}

{x = 4 e x ≥ 5}y = 7 {y = 3}

Relembrando: Regra Condicional

$\{x = 4\}$

Se $x < 5$ então

$y = x - 1$

Senão

$y = 7$

$\{y = 3\}$

$$\boxed{\{x = 4 \text{ e } x < 5\}\, y = x - 1\ \{y = 3\}}$$

$\Downarrow$ **Verdadeiro!!**

$\{x - 1 = 3 \text{ ou } x=4\}$

$y = x - 1$

$\{y = 3\}$

Regra do Laço

De $\{Q \land B\}$ P $\{Q\}$

Deduzimos: $\{Q\}\ s_i\ \{Q \land B'\}$

Onde s_i tem a forma:

Enquanto condição B

faça P

Regra do Laço

De $\{Q \wedge B\}$ P $\{Q\}$
Deduzimos: $\{Q\}$ s_i $\{Q \wedge B'\}$

- **Invariante de laço**:
  - propriedade que é verdadeira cada vez que a condição do laço é avaliada.
  - Propriedade que é verdadeira antes e depois de cada iteração do laço.
- A propriedade de um invariante de laço é satisfeita independente de qual iteração do laço está sendo executada.

Regra do Laço

Três aspectos precisam ser considerados:

De $\{Q \land B\}$ P $\{Q\}$
Deduzimos: $\{Q\}$ s_i $\{Q \land B'\}$

- **Inicialização:** Um invariante de laço é verdadeiro antes da primeira iteração do laço.
- **Manutenção:** Se for verdadeiro antes de uma iteração do laço, ele permanece verdadeiro antes da próxima iteração.
- **Terminação:** Um invariante nos dá uma propriedade útil que ajuda a mostrar que o algoritmo está correto quando o laço termina.

Regra do Laço

Indução matemática

De $\{Q \wedge B\}$ P $\{Q\}$

Deduzimos: $\{Q\}$ s_i $\{Q \wedge B'\}$

- **Passo base:** Provar que a hipótese de indução ocorre para os valores de entrada do laço.
- **Passo Indutivo:** Provar que se a hipótese de indução ocorre após k iterações, ela também é verificada após k+1 iterações.
- Utilize a hipótese de indução para comprovar que o algoritmo está correto ao final do laço.

A hipótese de indução é a invariante de laço!!!

Regra do Laço

Exemplo:

1. $i = 0$
2. $j = 0$
3. Enquanto $i \neq \boxed{x}$
4. faça $j = j + \boxed{y}$
5. $i = i + 1$
6. retorna $\boxed{j}$

$j=x.y$

- Qual a entrada?
- Qual a saída?
- Qual a propriedade do laço?

$j=i.y$

$\{j=i.y \land i \neq x\}\ P\ \{j=i.y\}$

$\{j=i.y\}\ s_i\ \{j=i.y \land i=x\}$

$\{Q \land B\}\ P\ \{Q\}$

$\{Q\}\ s_i\ \{Q \land B'\}$

$Q: j=i.y$

$B: i \neq x$

Regra do Laço

Exemplo:

1. $i = 0$
2. $j = 0$
3. Enquanto $i \neq x$
4. faça $j = j + y$
5. $i = i + 1$
6. retorna j

Invariante de laço: $j=i.y$

Passo base: Antes do início do laço, temos

$i=0;$

$j=0;$

Logo, $j = i.y$

$=0.y$

$=0$ Ok!!

Regra do Laço

Exemplo:

1. $i = 0$
2. $j = 0$
3. Enquanto $i \neq x$
4. faça $j = j + y$
5. $i = i + 1$
6. retorna j

Invariante de laço: $j=i.y$

Passo Indutivo:

Supomos que

$j=(k-1).y$ na k-ésima iteração

(hipótese de indução)

Regra do Laço

Exemplo:

1. $i = 0$
2. $j = 0$
3. Enquanto $i \neq x$
4. faça $j = j + y$
5. $i = i + 1$
6. retorna j

Passo Indutivo: No início da iteração k+1, temos $j=(k-1).y$

$\{j=i.y \land i \neq x\}\ P\ \{j=i.y\}$

$\{j=(k-1).y\}\ s_i\ \{j=k.y \land i=k\}$

$j=j+y$ Linha 4

$=(k-1).y + y$ Hip. Indução

$=[(k-1)+1].y$

$= k.y$

$i=i+1$ Linha 5

$= k-1+1$

$= k$

Regra do Laço

Exemplo:

1. $i = 0$
2. $j = 0$
3. Enquanto $i \neq x$
4. faça $j = j + y$
5. $i = i + 1$
6. retorna j

Terminação:

Como provado por indução, temos $j=(x-1).y$ e $i=x-1$ no início da iteração x

$j=j+y$ Linha 4

$=(x-1).y+y$ hip. indução.

$=[(x-1)+1].y$

$=x.y$

$i=i+1=x-1+1=x$ Linha 5

Regra do Laço

Exemplo:

1. $i = 0$
2. $j = 0$
3. Enquanto $i \neq x$
4. faça $j = j + y$
5. $i = i + 1$
6. retorna j

$i=i+1=x-1+1=x$ Linha 5

Critério de parada ativado!

$i=x \Rightarrow B'$ e teremos com

$j=x.y$ Linha 6

$$\{Q\}\ s_i\ \{Q \wedge B'\}$$

$$\{j=(x-1).y\}\ s_i\ \{j=x.y \wedge i=x\}$$

Regra do Laço

- Qual a entrada?
- Qual a saída?
- Qual a propriedade do laço?

Exemplo:

1.a=$\boxed{c}$
2.b=0
3.Enquanto (a>0)
4. faça a=a - 1
5. b=b + 1
6. retorna $\boxed{b}$

$\Downarrow$

b=c-a

$\Downarrow$

a+b=c

$\{a+b=c \land a>0\}\ P\ \{a+b=c\}$

$\{a+b=c\}\ s_i\ \{a+b=c \land a\leq 0\}$

Regra do Laço

Exemplo 1:

1.a=c
2.b=0
3.Enquanto (a>0)
4.   faça   a=a - 1
5.   b=b + 1
6. retorna b

Invariante de laço: $a+b = c$

Passo base: Antes do início do laço, temos

$a=c;$

$b=0;$

Logo, $a + b = c + 0$

$= c \Rightarrow a+b = c$

Ok!!

Regra do Laço

Exemplo 1:

1. a=c
2. b=0
3. Enquanto (a>0)
4. faça a=a - 1
5. b=b + 1
6. retorna b

Invariante de laço: a+b = c

Passo Indutivo:

Na k-ésima iteração, supomos válida a relação a+b=c com

a=c-k Linha 4

b=k Linha 5

Regra do Laço

Exemplo:

1. a=c
2. b=0
3. Enquanto (a>0)
4.   faça a=a - 1
5.   b=b + 1
6. retorna b

Passo Indutivo:

Na k-ésima iteração, supomos válida a relação a+b=c e temos a=c-k e b=k

Na iteração k+1, usando a hip. de Indução, temos:

a = c-k-1, Linha 4

b = k+1, Linha 5

Logo, a + b = (c-k-1)+(k+1)

= c

⇒ a+b = c Ok!!

Regra do Laço

Exemplo 1:

1. a=c
2. b=0
3. Enquanto (a>0)
4. faça a=a - 1
5.   b=b + 1
6. retorna b

Terminação:

Na iteração onde a=1 e b=c-1, temos

a=a-1=0, Linha 4

b=b+1, Linha 5

b=c-1+1

= c

Atendemos o critério de parada!!

B’: a≤0

retornando b=c na Linha 6

com

Q: a+b=c pois 0+c=c Ok!!

Os conceitos e exemplos apresentados nesses slides são baseados no conteúdo da seção 2.3 do material-base “Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação”, J.L. Gersting, 7a edição, LTC editora.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

Demonstração de Correção - Parte II