FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

Definições Recorrentes

SUMÁRIO

Definições Recorrentes

- **Definição recorrente: o item definido aparece como parte da definição.**
- **Definição recorrente ou definição por recorrência ou definição recursiva.**

nacadeiaalimentar(X, Y) <= seAlimenta(X, Y)

nacadeiaalimentar(X, Y) <=

seAlimenta(X, Z) e nacadeiaalimentar(Z, Y)

Sequências

Sequência: lista de objetos que são numerados em determinada ordem.

$$S(1), S(2), \ldots, S(k), \ldots$$
$$S1, S2, \ldots, Sk, \ldots$$
$$a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$$

Sequências

Sequência definida por recorrência:

- Define-se o primeiro ou alguns valores iniciais.
- Define-se valores subsequentes em termos de valores anteriores.

Exemplo: Escreva os cinco primeiros valores

1. $T(1) = 1$
2. $T(n) = T(n - 1) + 3$ para $n \geq 2$

Sequências

Exemplo: Escreva os cinco primeiros valores

1. $T(1) = 1$
2. $T(n) = T(n - 1) + 3$ para $n \geq 2$

$T(1) = 1$

$T(2)=T(2-1)+3$

$=T(1)+3$

$= 1 + 3 = 4$

$T(3)=T(3-1)+3$

$=T(2)+3=4+3=7$

$T(4)=T(4-1)+3$

$=T(3)+3$

$= 7 + 3 = 10$

$T(5)=T(5-1)+3$

$=T(4)+3$

$=10+3=13$

$T(1)=1$,

$T(2)=4$,

$T(3)=7$,

$T(4)=10$

$T(5)=13$

Sequências

Sequência de Fibonacci:

Introduzida no século XIII por Leonardo Fibonacci.

1. F(1) = 1
2. F(2) = 1
3. F(n) = F(n – 2) + F(n – 1) para n > 2

    F(3)=F(1)+F(2)=2

    F(4)=F(2)+F(3)=3

    F(5)=F(3)+F(4)=5

    F(6)=F(4)+F(5)=8

1170-1250

Sequências

Exemplo:

Prove que

$$F(n + 4) = 3F(n + 2) - F(n) \text{ para todo } n \geq 1$$

na sequência de Fibonacci.

Dem: Por indução

n=1:

$F(1+4)=3F(1+2)-F(1)$

$F(5)=3F(3)-F(1)$

$5=3(2)-1$

$5=5$ Ok

n=2:

$F(2+4)=3F(2+2)-F(2)$

$F(6)=3F(4)-F(2)$

$8=3(3)-1$

$8=8$ Ok

Sequências

Exemplo:

Prove que

$$F(n + 4) = 3F(n + 2) - F(n) \text{ para todo } n \geq 1$$

na sequência de Fibonacci.

Dem: **Por indução**

n=k: F(k+4)=3F(k+2) - F(k) Hipótese de Indução

Provar para n=k+1

$$F(k+1+4)=3F(k+1+2) - F(k+1)$$

$$F(k+5)=3F(k+3) - F(k+1)$$

Sequências

Dem: Por indução

n=k: $F(k+4)=3F(k+2) - F(k)$ Hipótese de Indução

Provar para n=k+1

$F(k+5)=3F(k+3) - F(k+1)$

$F(k+5)=F(k+3)+F(k+4)$ Fibonacci

$=F(k+3)+3F(k+2)-F(k)$ Hip. Indução

$=3F(k+1)-F(k-1) + 3F(k+2)-F(k)$ Hip. Indução

$=3F(k+1)+ 3F(k+2)-F(k-1)-F(k)$

$=3(F(k+1)+ F(k+2))-(F(k-1)+F(k))$ Fibonacci

$=3F(k+3)-F(k+1)$ Fibonacci

Logo, $F(k+5) = 3F(k+3)-F(k+1)$

Sequências

Exemplo: Prove que $F(n + 4) = 3F(n + 2) – F(n)$ para todo $n \geq 1$ na sequência de Fibonacci.

Dem: Demonstração usando apenas Fibonacci

$$
\begin{aligned}
F(n+4) &= F(n+2)+F(n+3) \\
&= F(n+2)+F(n+2)+F(n+1) \\
&= F(n+2)+F(n+2)+F(n-1)+F(n)
\end{aligned}
$$

$$F(n+1)=F(n-1)+F(n) \Leftrightarrow F(n-1)=F(n+1)-F(n)$$

$$
\begin{aligned}
F(n+4) &= F(n+2)+F(n+2)+F(n+1)-F(n)+F(n) \\
&= F(n+2)+F(n+2)+F(n+2)-F(n) \\
&= 3F(n+2)-F(n)
\end{aligned}
$$

Conjuntos

- Os objetos em uma sequência são ordenados
- Um conjunto de objetos é uma coleção na qual **não há nenhuma ordem imposta**.
- Alguns conjuntos podem ser definidos por recorrência.

Conjuntos

Exemplo:

1.Qualquer letra de proposição é uma fbf.

2. Se P e Q são fbfs, então $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$,

$(P \rightarrow Q)$, (P') e $(P \leftrightarrow Q)$ também são.

A, B e C são fbfs pela regra 1.

Pela regra 2, temos: $(A \wedge B)$, C'

Pela regra 2 novamente: $(A \wedge B) \rightarrow C'$

Pela regra 2 novamente: $((A \wedge B) \rightarrow C')'$

Conjuntos

Exemplo: Considere a definição recorrente

1. A cadeia vazia λ (a cadeia sem símbolo) pertence a A*.
2. Um único elemento qualquer de A pertence a A*.
3. Se x e y são cadeias em A*, então a concatenação xy de x e y também pertence a A*.

Dada uma cadeia x, temos: λx=xλ=x

Se x = 1011 e y = 001, temos

xy=1011001 yx=0011011 yxλx=00110111011

Operações

Exemplo: Considere a definição recorrente abaixo para a operação de potenciação a^n, onde a é um número real não nulo e n é um inteiro não negativo

1. $a^0 = 1$
2. $a^n = (a^{n-1})a$ para $n \geq 1$

Logo,

$2^3=2.(2^{3-1})=2.(2^2)$

$=2.(2.(2^{2-1}))=2.(2.(2^1))$

$=2.(2.(2.(2^{1-1})))=2.(2.(2.(2^0)))$

$2^3=2.(2.(2.(2^0)))$

$=2.(2.(2.(1))))$

$=2.(2.(2))$

$=2.(4)=8$

Operações

Exemplo:

1. $m(1) = m$
2. $m(n) = m(n-1) + m$ para $n \geq 2$

definição recorrente para a multiplicação de dois inteiros positivos m e n.

$m(4)$

$$\begin{aligned} m(4) &= m(4-1)+m \\ &= m(3)+m \\ &= (m(2)+m)+m \\ &= ((m(1)+m)+m)+m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m(4) &= ((m(1)+m)+m)+m \\ &= ((m+m)+m)+m \\ &= (2m+m)+m \\ &= 3m+m \\ &= 4m \end{aligned}$$

Algoritmos

Exemplo: Algoritmo Iterativo

Soma(inteiro n)

1. s=0
2. Para i de 1 até n faça
3. s=s+i
4. retorna s

n=5

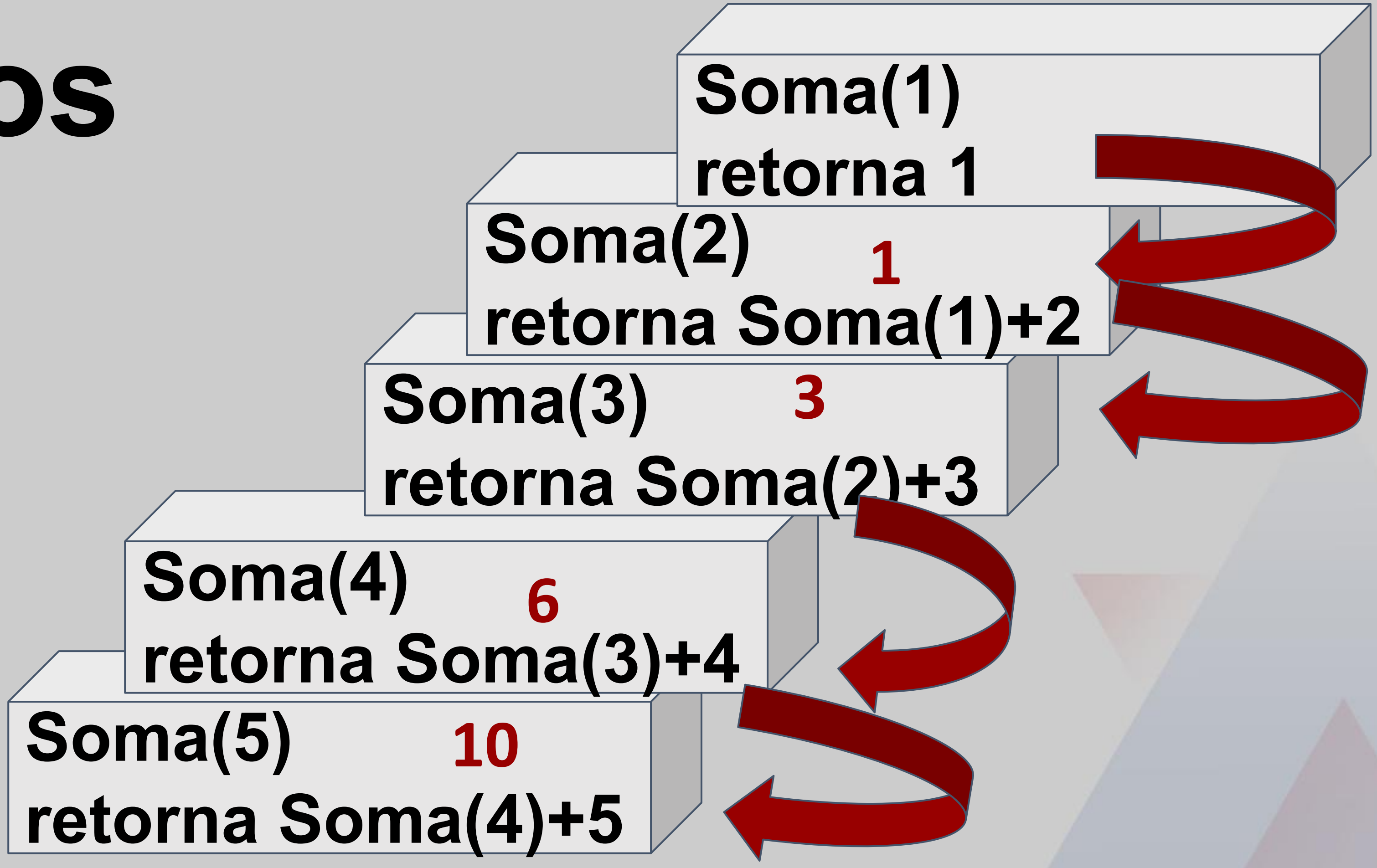
s=0	Linha 1	i=2	Linha 2	i=5	Linha 2
i=1	Linha 2	s=1+2=3	Linha 3	s=10+5=15	Linha 3
s=0+1=1	Linha 3	i=3	Linha 2	i=6	Linha 2
		s=3+3=6	Linha 3	s=15	Linha 4
		i=4	Linha 2		
		s=6+4=10	Linha 3		

Algoritmos

Exemplo:

Soma(inteiro n)

1. Se n<=1 então
2. retorna n
3. Senão
4. retorna Soma(n-1) + n



Algoritmos

- **Desvantagens da Recursão**
  - **Gera sobrecarga (overhead) com as chamadas de função, gerando gasto de tempo de processamento e espaço de memória.**
  - **Uma cópia da função (variáveis da função) é criada, consumindo memória.**
  - **Logo, a iteração tende a ser mais rápida por não fazer repetidas chamadas de funções.**

Algoritmos

Recursão	Iteração
Estruturas condicionais	Estruturas de repetição
Repetição implícita	Repetição explícita
Caso base como critério de parada	Condição com critério de parada
Lento	Rápido
Solução simples	Solução complexa
Fácil manutenção	Difícil Manutenção

Quando usar Recursão ou Iteração?

Os conceitos e exemplos apresentados nesses slides são baseados no conteúdo da seção 3.1 do material-base “Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação”, J.L. Gersting, 7a edição, LTC editora.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

Definições Recorrentes