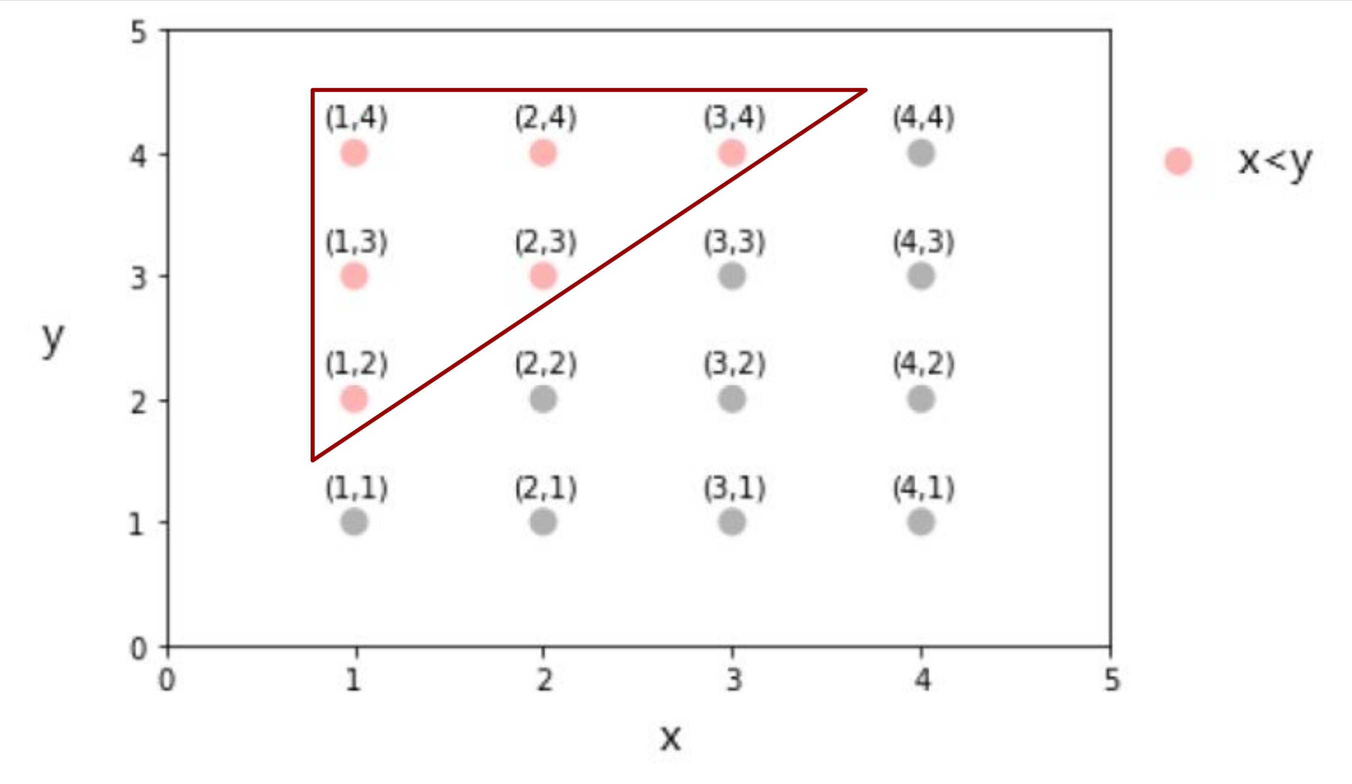
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

Relações Binárias

SUMÁRIO

Relações Binárias

Uma relação binária em um conjunto S é um subconjunto de SxS.



$x \rho y \leftrightarrow x<y$

Relações Binárias

Exemplo: $S=\{1,2,3,4\}$

$S \times S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),$
$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$

$x \ \rho \ y \leftrightarrow x<y,\ x \in S \text{ e } y \in S$

$S \times S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),$
$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$

$\rho=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$

Relações Binárias

Exemplo: S={1,2}

SxS={(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)}

x ρ y ↔ x+y é ímpar, x∈S e y∈S

ρ ={(1,2),(2,1),}

x ρ y ↔ ρ={(1,1),(2,1)}, onde (1,2) ∉ ρ

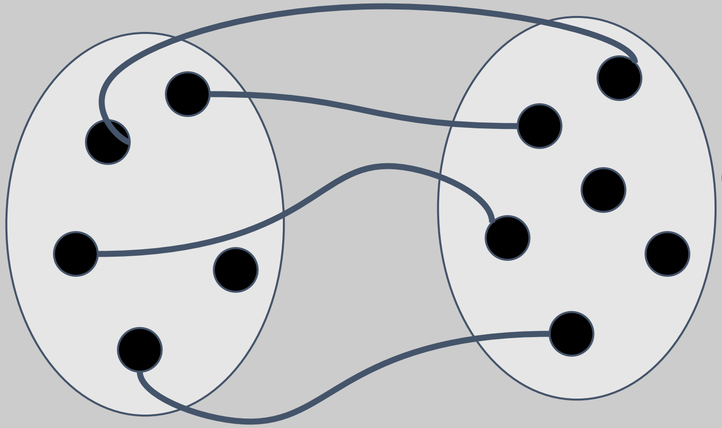
Relações Binárias

Relações entre conjuntos diferentes:

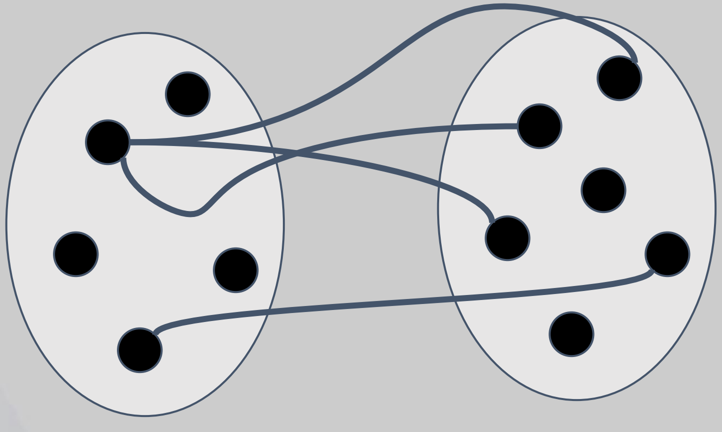
- Dados dois conjuntos S e T, uma **relação binária** de S para T é um subconjunto de S × T.

- Dados n conjuntos S1, S2, ... , Sn, n > 2, uma **relação n-ária** em S1 × S2 × ... × Sn é um subconjunto de S1 × S2 × ... × Sn.

Relações Binárias

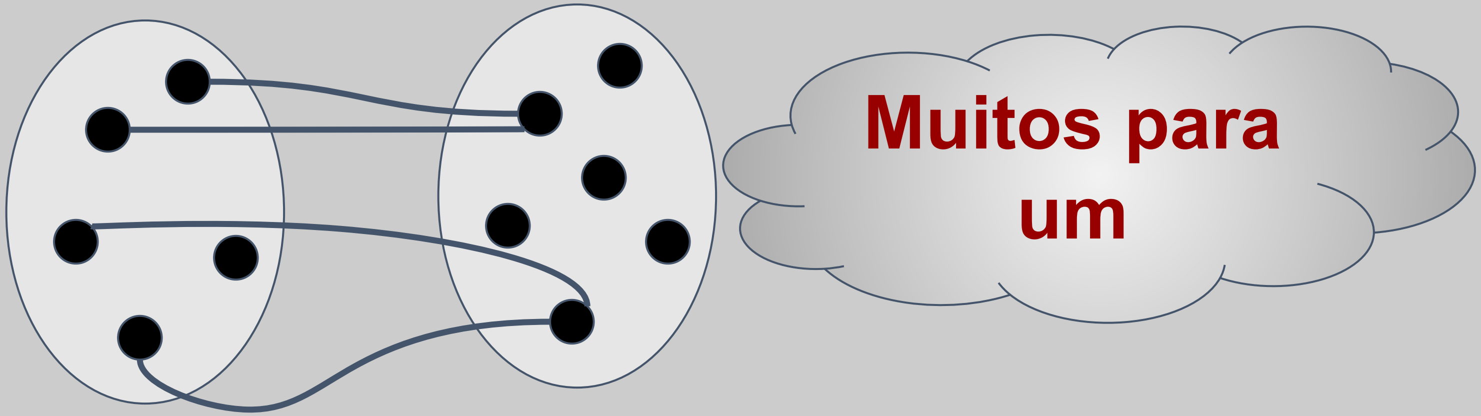


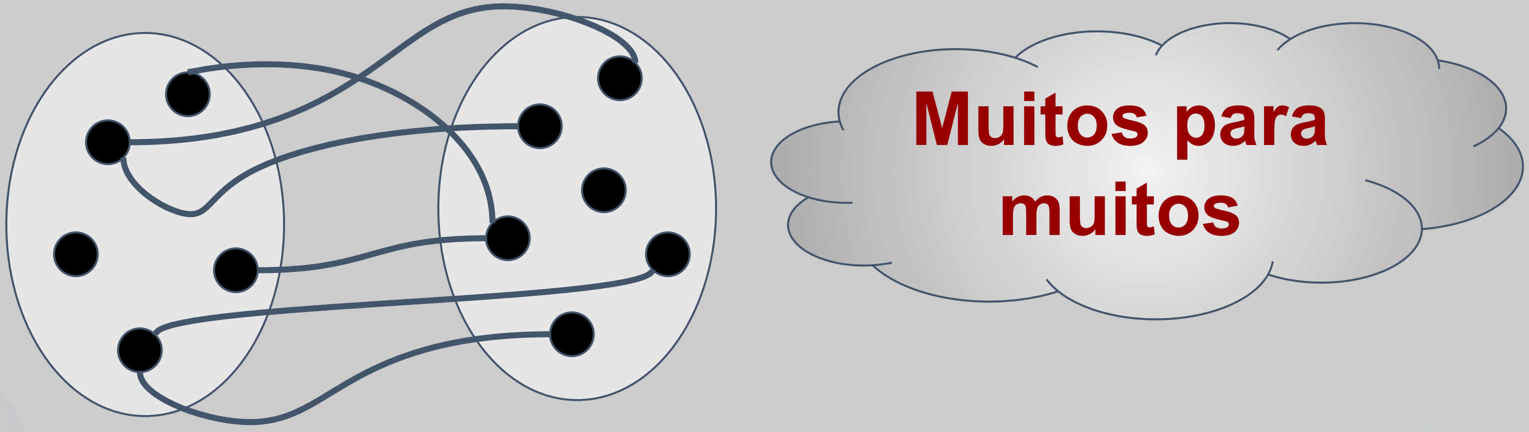
Um para um



Um para muitos

Relações Binárias





Propriedades de Relações

Seja ρ uma relação binária em um conjunto S.

Reflexiva:

$(\forall x)(x \in S \rightarrow (x, x) \in \rho)$

Simétrica:

$(\forall x)(\forall y)(x \in S \wedge y \in S \wedge (x, y) \in \rho \rightarrow (y, x) \in \rho)$

Transitiva:

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in S \wedge y \in S \wedge z \in S$

$\wedge (x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \rightarrow (x, z) \in$

$\rho)$

Propriedades de Relações

Exemplo: Seja ρ a relação binária em ℕ

$x \rho y \leftrightarrow x \leq y$, $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$

- **Essa relação é reflexiva:**

  $(\forall x)(x \in S \to (x, x) \in \rho)$

  Se $x \in \mathbb{N}$, temos $x=x$, logo $(x,x) \in \rho$

- **Essa relação é transitiva:**

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in S \land y \in S \land z \in S$

$\land (x, y) \in \rho \land (y, z) \in \rho \to (x, z) \in$

$\rho)$

Para $x,y,z \in \mathbb{N}$, se $x \leq y$ e $y \leq z$, temos $x \leq y \leq z$. Logo, $x \leq z$

Propriedades de Relações

Exemplo: Seja ρ a relação binária em ℕ

$x \rho y \leftrightarrow x \leq y, x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$

- Essa relação não é simétrica.

$(\forall x)(\forall y)(x \in S \land y \in S \land (x, y) \in \rho \rightarrow (y, x) \in \rho)$

Basta um contra-exemplo!

Temos que $(3,4) \in \rho$ pois $3 \leq 4$.

$3 \leq 4$ não implica que $4 \leq 3$.

Para $x, y \in \mathbb{N}$, se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$.

Propriedades de Relações

Seja ρ uma relação binária em um conjunto S.

Relação anti simétrica:

$(\forall x)(\forall y)(x \in S \land y \in S \land (x, y) \in \rho \land (y, x) \in \rho \rightarrow x = y)$

Cuidado!!

- **Seja ρ é uma relação simétrica e antissimétrica em S com $(x, y) \in \rho$.**
  - $(y, x) \in \rho \rightarrow$ **Simetria e** $x=y \rightarrow$ **Anti simetria.**
  - $x \, \rho \, y \leftrightarrow x=y$

Propriedades de Relações

Seja ρ uma relação binária em um conjunto S.

Relação anti simétrica:

$(\forall x)(\forall y)(x \in S \wedge y \in S \wedge (x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho \rightarrow x = y)$

Cuidado!!

- Seja $\rho = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$ em $S = \{1, 2, 3\}$.
  - Não é simétrica: $(1, 3) \in \rho$ e $(3,1) \notin \rho$
  - Não é anti simétrica: $(1, 2), (2, 1) \in \rho$ com $1 \neq 2$.

Fecho de uma Relação

Uma relação binária ρ* em um conjunto S é o fecho de uma relação ρ em S em relação à propriedade P se:

1. **ρ* tem a propriedade P**
2. **$\rho \subseteq \rho^*$**
3. **ρ* é subconjunto de qualquer outra relação em S que inclua ρ e tenha a propriedade P.**

Fecho de uma Relação

Exemplo: Sejam S = {1, 2, 3} e ρ = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)}

- **ρ não é reflexiva, nem simétrica, nem transitiva.**
- **Fecho de ρ em relação à reflexividade (P)**
  - **ρ* = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (2, 2), (3, 3)}**
  - **$\rho \subseteq \rho^*$**
  - **Qualquer relação reflexiva em S tem que conter os novos pares ordenados. Qualquer relação reflexiva contendo ρ tem ρ* como subconjunto.**

Fecho de uma Relação

Exemplo: Sejam $S = \{1, 2, 3\}$ e $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$.

- **Fecho de ρ em relação à simetria é**

$\rho^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (2, 1), (3, 2)\}$

- **Fecho de ρ em relação à transitividade é:**

$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3),$
$(3, 2), (3, 3), (2, 1)\}$ (Incompleta!!)

$\rho^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3),$
$(2, 1), (2, 2)\}$

Ordem Parcial

Uma relação binária em um conjunto S que seja reflexiva, antissimétrica e transitiva é chamada de uma ordem parcial em S.

Ordem Parcial

Exemplo: Em $\mathbb{Z}_+$, $x\ \rho\ y \leftrightarrow x$ divide y.

Reflexiva:

Temos $x/x=1$, ou seja, x divide $x \rightarrow (x,x) \in \rho$

Antissimétrica:

Se $(x,y) \in \rho \wedge (y,x) \in \rho$, temos $y=x.a$, $a \in \mathbb{Z}_+$ e

$x=y.b \rightarrow y=x.a=(y.b).a=y.(b.a)$, logo $b=a=1 \rightarrow x=y$

Transitiva:

Se $(x,y) \in \rho \wedge (y,z) \in \rho$, temos $y=x.a$ e $z=y.b$,

logo, $z=(x.a).b=x.(a.b) \rightarrow z=x.c \rightarrow x$ divide z.

Ordem Parcial

Exemplo: Em $\mathbb{Z}_+$, x ρ y ↔ x divide y em S={1,2,3,6,12,18}

$(S,\preccurlyeq)=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,6),(1,12),(1,18),(2,2),(2,6),(2,12),(2,18),(3,3),(3,6),(3,12),(3,18),(6,6),(6,12),(6,18),(12,12),(18,18)\}$

- **$(S, \preccurlyeq)$: Se $x \preccurlyeq y$, então ou $x = y$ ou $x \neq y$.**
- **Se $x \preccurlyeq y$ mas $x \neq y$, escrevemos $x \prec y$: x é um predecessor de y ou y é um sucessor de x.**
- **Se $x \prec y$ e não existe nenhum z com $x \prec z \prec y$ então x é um predecessor imediato de y.**

Ordem Parcial

Exemplo:

**$(S,\preccurlyeq)=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,6),(1,12),(1,18),(2,2),(2,6),$
$(2,12),(2,18),(3,3),(3,6),(3,12),(3,18),(6,6),(6,12),$
$(6,18),(12,12),(18,18)\}$**

- **Predecessores de 6:**

$1 \preccurlyeq 6$, $2 \preccurlyeq 6$ e $3 \preccurlyeq 6$.

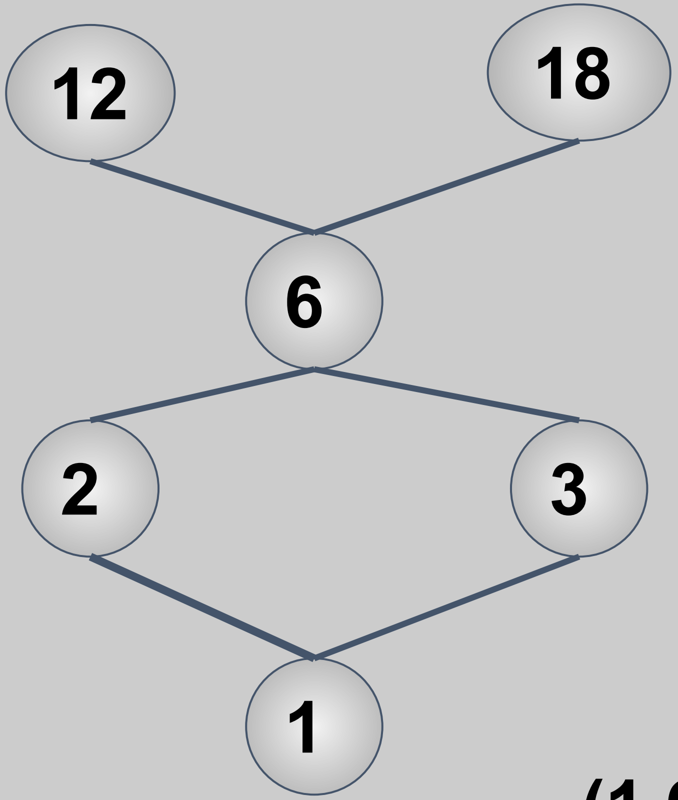
- **Predecessores imediatos de 6:**
  $2 \prec 6$ e $3 \prec 6$

- **Observe que $1 \prec 2 \prec 6$, logo 1 não é um predecessor imediato de 6.**

Ordem Parcial

Diagrama de Haase

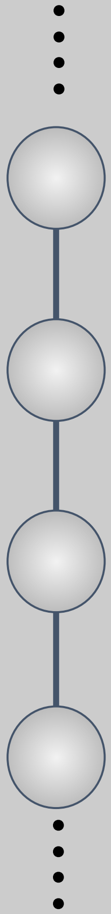
Representa visualmente (S, $\preccurlyeq$)



**(1,3), (3,6), (6,12),(6,18) $\Rightarrow$ (1,6), (1,12), (1,18)
(3,12), (3,18)**

Ordem Parcial

Diagrama de Haase

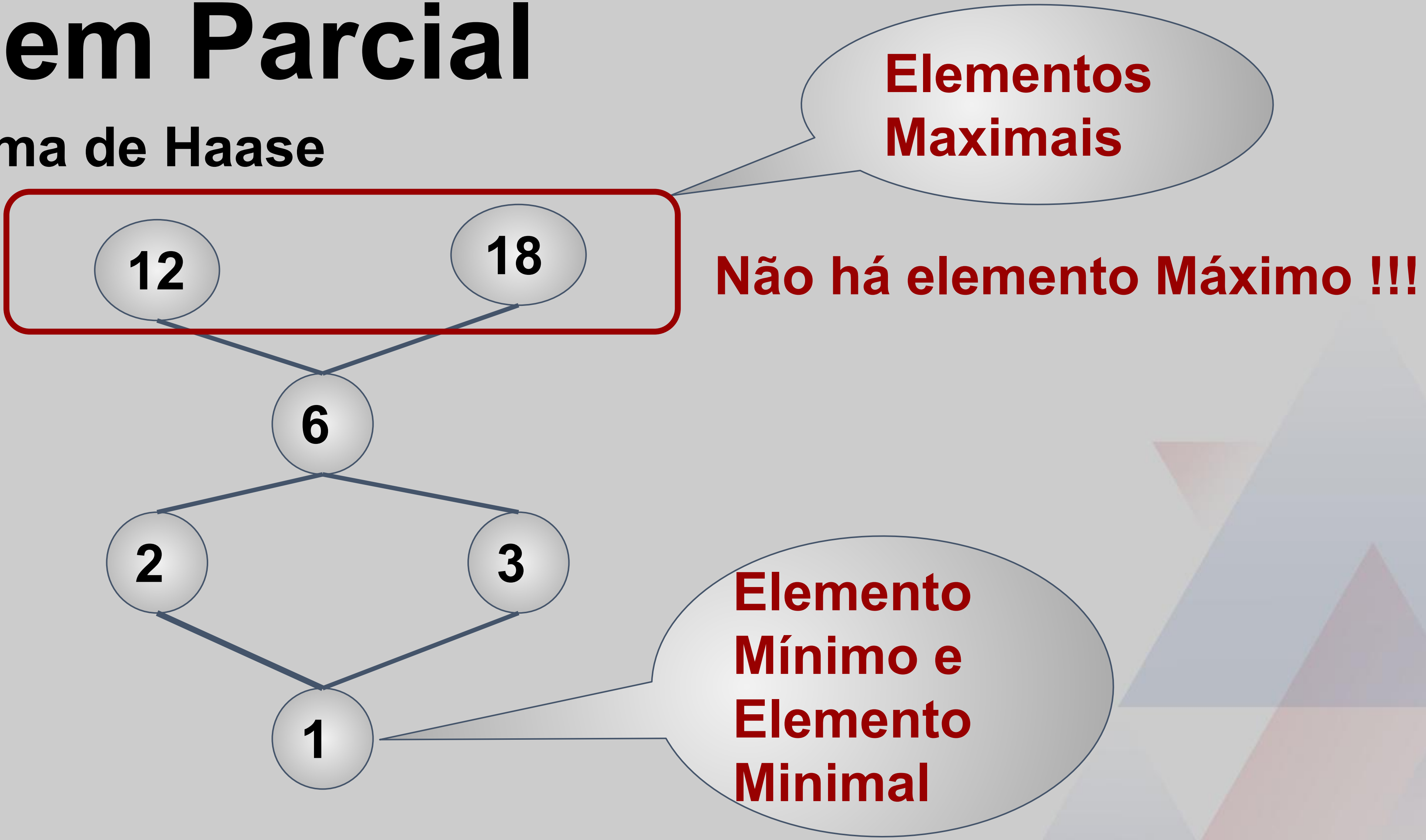


Ordenação total
ou
Cadeia

Em $\mathbb{N}$, $x \; \rho \; y \leftrightarrow x \leq y$.

Ordem Parcial

Diagrama de Haase



Relações de Equivalência

Uma relação binária em um conjunto S que é reflexiva, simétrica e transitiva é chamada de relação de equivalência em S.

Exemplo: Em $\mathbb{N}$, $x \rho y \leftrightarrow x + y$ é par.

Reflexiva: $(x,x) \in \rho$ pois $x+x=2x$ é par.

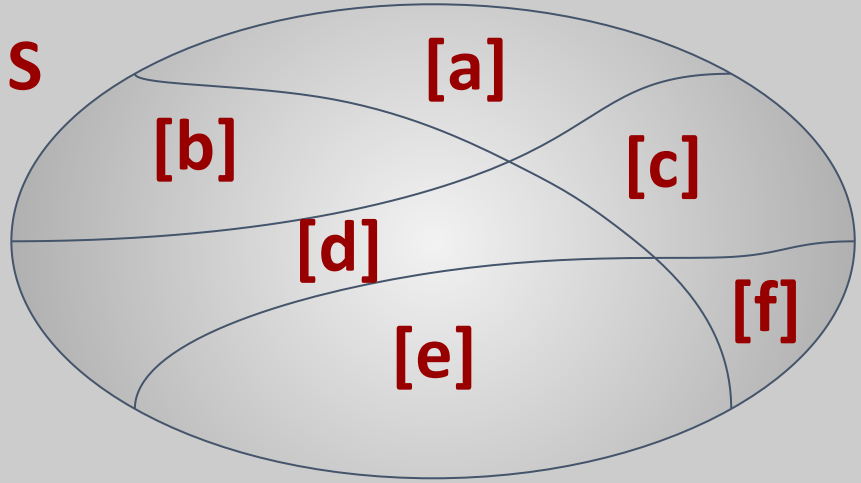
Simétrica: Se $(x,y) \in \rho$, $x+y=2a$ par com $a \in \mathbb{N}$.
Porém, $x+y=y+x \rightarrow y+x=2a$, logo $(y,x) \in \rho$

Transitiva: Se $(x,y) \in \rho$ e $(y,z) \in \rho$, temos:
$x+y=2a$ e $y+z=2b$. Como $x=2a-y$, temos
$y+z=2b \Rightarrow y-2a+z=2b-2a \Rightarrow x+z=2c \Rightarrow (x,y) \in \rho$

Relações de Equivalência

Uma partição de um conjunto S é uma coleção de subconjuntos disjuntos não vazios cuja união é igual a S.

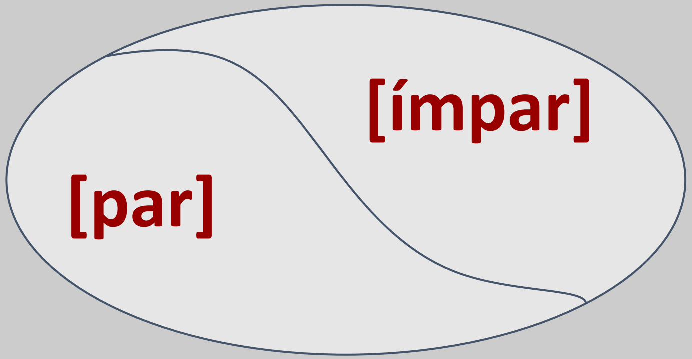
Classe de equivalência: $[x] = \{y | y \in S \wedge x \rho y\}$
Todos os elementos relacionados com x em S.



Relações de Equivalência

TEOREMA: Uma relação de equivalência ρ em um conjunto S determina uma partição de S, e uma partição de S determina uma relação de equivalência em S.

$$x \, \rho \, y \leftrightarrow x + y \text{ é par}$$



Relações de Equivalência

Congruência módulo n: Para x e y inteiros e n um inteiro positivo, $x \equiv y \pmod{n}$ se $x - y$ for um múltiplo inteiro de n;

Exemplo: Quais as classes de equivalência para relação congruência módulo 5 em $\mathbb{Z}$?

- $[0] = \{\dots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots\}$
- $[1] = \{\dots, -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \dots\}$
- $[2] = \{\dots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \dots\}$
- $[3] = \{\dots, -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \dots\}$
- $[4] = \{\dots, -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \dots\}$

Relações de Equivalência

Exemplo: Quais as classes de equivalência para relação congruência módulo 5 em $\mathbb{Z}$?

- **x-0=5a⇒ x=5a**

  [0] = {... , −15, −10, −5, 0, 5, 10, 15, ...}
- **x-1=5a ⇒ x=5a+1**

  [1] = {... , −14, −9, −4, 1, 6, 11, 16, ...}
- **x-2=5a ⇒ x=5a+2**

  [2] = {... , −13, −8, −3, 2, 7, 12, 17, ...}
- **x-5=5a ⇒ x=5a-5=5(a-1)=5a**

  [5] = {... , −15, −10, −5, 0, 5, 10, 15, ...} =[0]

Os conceitos e exemplos apresentados nesses slides são baseados no conteúdo da seção 5.1 do material-base "Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação", J.L. Gersting, 7a edição, LTC editora.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

Relações Binárias