FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

Lógica de Predicados

SUMÁRIO

- Regras de Dedução
  - Particularização Universal
  - Particularização Existencial
  - Generalização Universal
  - Generalização Existencial
- Exemplos

Regras de Dedução

- Na lógica de predicados, não existe nada equivalente à tabela-verdade para provar validade.

- Um sistema de regras de dedução para partir das hipóteses e chegar à conclusão.

Regras de Dedução

- O sistema será correto
- O sistema será completo.
- Manter o conjunto de regras mínimo.

Regras de Dedução

As regras de equivalência e as regras de inferência para a lógica proposicional ainda fazem parte da lógica de predicados

$(\forall x)R(x) \wedge [(\forall x)R(x) \rightarrow (\forall x)S(x)] \rightarrow (\forall x)S(x)$

1. $(\forall x)R(x)$	hip
2. $(\forall x)R(x) \rightarrow (\forall x)S(x)$	hip
3. $(\forall x)S(x)$	1, 2, mp

Regras de Dedução

Abordagem geral: Retirar os quantificadores, manipular as fbfs sem os quantificadores e depois colocá-los de volta.

- Particularização
  - Universal
  - Existencial
- Generalização
  - Universal
  - Existencial

Particularização Universal

De $(\forall x)P(x)$, deduzimos $P(t)$

- t é uma variável ou um símbolo constante.
- **Restrição:** Se t for uma variável, não deve estar no escopo de um quantificador para t.

Particularização Universal

Exemplo: Todos os homens são mortais. Sócrates é humano. Portanto, Sócrates é mortal

M(x): x é mortal, H(x): x é humano, s: Sócrates.

$(\forall x)[H(x) \rightarrow M(x)] \wedge H(s) \rightarrow M(s)$

1. $(\forall x)[H(x) \rightarrow M(x)]$	hip
2. $H(s)$	hip
3. $H(s) \rightarrow M(s)$	1, pu
4. $M(s)$	2,3, mp

Particularização Universal

Se t for uma variável, não deve estar no escopo de um quantificador para t.

Exemplo: USO INCORRETO:

1. $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ hip
2. $(\exists y)P(y, y)$ 1, pu INCORRETA!

Se $P(x, y)$: $x < y$, temos $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ Verdade.

$P(a,b):a<b$

Agora, para $(\exists y)P(y, y)$: $y<y$ Falso

Particularização Existencial

De $(\exists x)P(x)$, deduzimos $P(a)$

- a é uma variável ou um símbolo constante.
- **Restrição:** Deve ser a primeira regra a usar a.

Particularização Existencial

Exemplo:

1. $(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$	hip
2. $(\exists y)P(y)$	hip
3. $P(a)$	2, pe
4. $P(a) \rightarrow Q(a)$	1, pu
5. $Q(a)$	3, 4, mp

Generalização Universal

De P(x), deduzimos $(\forall x)P(x)$

- Restrições para P(x):
  - Não pode ter sido deduzida de hipótese onde x é uma variável livre
  - Não pode ter sido deduzida, via equivalência, de uma fbf onde x é variável livre.

Generalização Universal

Exemplo: $(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \land (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$

1.	$(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$	hip.
2.	$(\forall x)P(x)$	hip.
3.	$[P(a) \rightarrow Q(a)]$	1, pu.
4.	$P(a)$	2, pu.
5.	$Q(a)$	3,4, mp.
6.	$(\forall x)Q(x)$	5, gu.

Generalização Universal

Exemplo: **USO INCORRETO!!**

1. $P(x)$ hip
2. $(\forall x)P(x)$ 1, gu. Incorreto, pois x era variável livre na hipótese.

Não pode ter sido deduzida de hipótese onde x é uma variável livre

Generalização Universal

Exemplo: **USO INCORRETO!!**

1. $(\forall x)(\exists y)Q(x, y)$ hip
2. $(\exists y)Q(x, y)$ 1, pu
3. $Q(x, a)$ 2, pe
4. $(\forall x)Q(x, a)$ 3, gu INCORRET

Não pode ter sido deduzida, via equivalência, de uma fbf onde x é variável livre.

$(\exists y)Q(x,y):x+y=0$
$Q(x,a):x+a=0$
$(\forall x)Q(x, a):x+a=0$

Q(x, a) obtida via pe no passo 2, onde x era uma variável livre.

Generalização Existencial

De P(x) ou P(a), deduzimos (∃x)P(x)

- **Restrições para P(x):**
  - **Para ir de P(a) para (∃x)P(x), x não pode aparecer em P(a).**

Generalização Existencial

Exemplo: Prove o argumento

$$(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)P(x)$$

1. $(\forall x)P(x)$ hip
2. $P(x)$ 1, pu
3. $(\exists x)P(x)$ 2, ge

Generalização Existencial

Exemplo: **USO INCORRETO!!**

Para ir de $P(a)$ para $(\exists x)P(x)$, x não pode aparecer em $P(a)$.

1. $P(a, y)$ hip
2. $(\exists y)P(y, y)$ 2,pe INCORRETO!!!

Se $P(x, y)$: $y > x$, para $P(y,0)$: $y>0$ Verdadeiro

Porém, $P(y,y)$: $y>y$ Falso.

Exemplos

Exemplo: USO INCORRETO!!

1. $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$ hip
2. $P(a) \wedge Q(a)$ 1,pe Incorreto!!

O escopo do primeiro quantificador existencial não pode ser estendido ao resto da fbf.

Exemplos

Exemplo: USO INCORRETO!!

1. $(\forall x)(\exists y)Q(x, y)$ hip
2. $(\forall x)Q(x, a)$ 1, pe. Incorreto!!

O quantificador existencial no passo 1 não está à frente.

Exemplos

$(\forall x)[P(x) \land Q(x)] \rightarrow (\forall x)P(x) \land (\forall x)Q(x)$

1. $(\forall x)[P(x) \land Q(x)]$ hip
2. $P(a) \land Q(a)$ 1, pu
3. $P(a)$ 3, simp
4. $Q(a)$ 3, simp
5. $(\forall x)P(x)$ 3, gu
6. $(\forall x)Q(x)$ 4, gu
7. $(\forall x)P(x) \land (\forall x)Q(x)$ 5,6, conj.

Exemplos

$(\exists x)R(x) \wedge [(\exists x)[R(x) \wedge S(x)]' \rightarrow (\exists x)[S(x)]'$

1. $(\exists x)R(x)$ hip
2. $[(\exists x)[R(x) \wedge S(x)]]'$ hip
3. $(\forall x)[R(x) \wedge S(x)]'$ 2,neg
4. $R(a)$ 1, pe
5. $[R(a) \wedge [S(a)]'$ 3,pe
6. $[R(a)]' \vee [S(a)]'$ 5, De Morgan
7. $R(a) \rightarrow [S(a)]'$ 4, cond.
8. $S(a)'$ 4, 7, mp
9. $(\exists x)[S(x)]'$ 8, ge

Os conceitos e exemplos apresentados nesses slides são baseados no conteúdo da seção 1.4 do material-base “Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação”, J.L. Gersting, 7a edição, LTC editora.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

Lógica de Predicados