FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

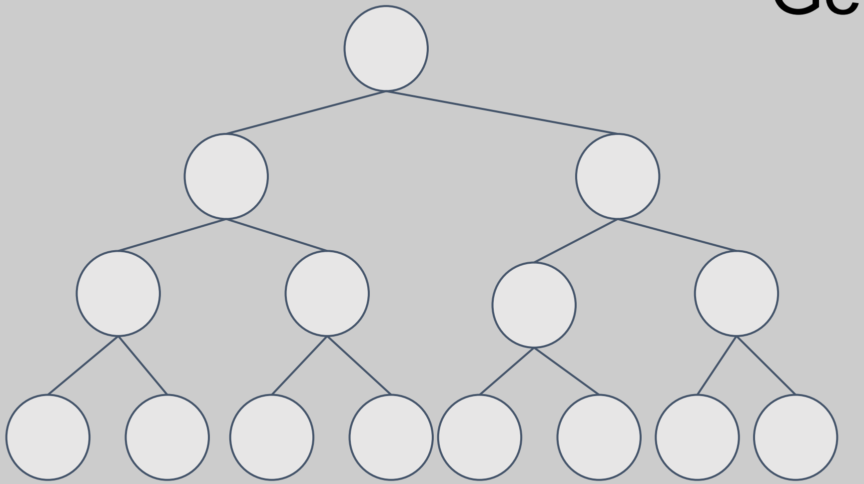
Relações de Recorrência

SUMÁRIO

- ➢ Relações de Recorrência
- ➢ Expanda-Suponha-Verifique
- ➢ Fórmulas para Solução

Relações de Recorrência

Exemplo: Gerando descendentes



Geração	Descendentes
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$
⋮	⋮
n	2^n

Indução

$S(0)=1$
$S(n)=2S(n-1)$

$$\xrightarrow{\text{Indução}}$$

$S(n)=2^n$

Expanda-Suponha-Verifique

Relações de recorrência podem ser resolvidas aplicando a técnica

1. Expanda.
2. Suponha.
3. Verifique.

Expanda-Suponha-Verifique

Exemplo: $S(1)=2$

$S(n)=2S(n-1)$

Expandir: $S(n)=2S(n-1) = 2.[2S(n-2)]=2^2S(n-2)=$

$= 2^2.[2S(n-3)]=2^3S(n-3)=$

$= 2^3.[2S(n-4)]=2^4S(n-4)$

Logo, $S(n)=2^kS(n-k)$ e para $k=n-1$, teremos:

$$S(n) = 2^{n-1}S(n-(n-1))= 2^{n-1}S(1)=2^n.$$

Suponha: $S(n)=2^n$ para $n\geq 1$.

Expanda-Suponha-Verifique

Suponha: $S(n)=2^n$ para $n\geq 1$.

Verifique: $S(n)=2^n$ para $n\geq 1$, considerando a Relação de recorrência $S(0)=1$ e $S(n)=2S(n-1)$

Provando por **indução**:

$n=1$ $\Rightarrow 2^1 = S(1)=2$ Ok

$n=k$, suponha que **$S(k)=2^k$**. (Hipótese Indução)

$n = k+1$, pela relação de recorrência:

$S(k+1)=2S(k)$

$=2.2^k$, pela H.I.

$=2^{k+1}$. Logo, $S(n)=2^n$ para $n\geq 1$ está correta.

Expanda-Suponha-Verifique

Exemplo: Encontre a forma fechada para

$T(1)=1$

$T(n)=T(n-1) + 3 \quad n\geq 2$

Expandir:

$T(n) = T(n-1)+3$

$= (T(n-2)+3)+3 = T(n-2)+6 \Leftrightarrow T(n-2)+2.3$

$= T(n-3)+3+6 = T(n-3)+9 \Leftrightarrow T(n-3)+3.3$

$= T(n-4)+3+9 = T(n-4)+12 \Leftrightarrow T(n-4)+4.3$

$=\ldots=T(n-k)+k.3$

Expanda-Suponha-Verifique

Expandir:

Após k expansões temos

$$T(n) = T(n-1)+3=...=T(n-k)+k.3$$

Para k=n-1, chegamos a expressão:

$$T(n) = T(n-1)+3=...=T(n-k)+k.3$$

$$=...=T(n-(n-1))+(n-1).3=$$

$$=T(1)+3(n-1)=1+3(n-1)=$$

$$=3n-2$$

Suponha: $T(n)=3n-2$ para $n>0$.

Expanda-Suponha-Verifique

Suponha: $T(n)=3n-2$ para $n>0$.

Verifique: $T(n)=3n-2$ para $n>0$.

Provando por indução, temos

$n=1 \Rightarrow T(1) = 3(1)-2 = 1$ ok.

$n=k \Rightarrow T(k) = 3k-2$ Hipótese de Indução.

$n=k+1$, vamos provar:

$T(k+1)=T(k)+3$, relação de recorrência

$T(k+1)=3k-2+3$, H.I.

$T(k+1)= 3k+1=3k+3-3+1=3(k+1)-3+1=$

$= 3(k+1)-2$, Logo $T(n)=3n-2$ $n>0$.

Fórmula para Solução

Relação de recorrência linear: os valores anteriores na definição estão na primeira potência.

$S(n)=f_1(n)S(n-1)+f_2(n)S(n-2)+\cdots+f_k(n)S(n-k)+g(n)$

Relação de recorrência com coeficientes constantes: todos os f_i são constantes.

Relação de recorrência de primeira ordem: o n-ésimo termo depende apenas do termo $n-1$.

Fórmula para Solução

Relações de recorrência lineares de primeira ordem:

$$S(n) = cS(n-1) + g(n)$$

Relação de recorrência homogênea:

$g(n) = 0$ para todo n.

$$S(n) = cS(n-1)$$

Fórmula para Solução

Fórmula para relação de recorrência linear de primeira ordem:

$$S(n) = cS(n-1) + g(n)$$

$$S(n) = c^{n-1}S(1) + \sum_{i=2}^{n} c^{n-i}g(i)$$

Fórmula para Solução

Exemplo: $S(1)=2$

$S(n)=2S(n-1)$

Temos: $c=2$ e $g(n)=0$

$S(n)=2^{n-1}S(1)+\sum_{i=2,\ldots n}c^{n-i}(0)$

$=2^{n-1}2+0$

$=2^n$

$$S(n) = cS(n-1) + g(n)$$

$$S(n) = c^{n-1}S(1) + \sum_{i=2}^{n} c^{n-i}g(i)$$

Fórmula para Solução

Exemplo: $T(1)=1$

$T(n)=T(n-1) + 3 \quad n\geq 2$

Temos: $c=1$ e $g(n)=3$

$$T(n)=(1)^{n-1}T(1)+\sum_{i=2,\dots n}(1)^{n-i}(3)$$

$$=1.1+\sum_{i=2,\dots n}(3)$$

$$=1+3.(n-1)$$

$$=1+3n-3$$

$$=3n-2$$

$$S(n) = cS(n-1) + g(n)$$

$$S(n) = c^{n-1}S(1) + \sum_{i=2}^{n} c^{n-i}g(i)$$

Fórmula para Solução

Relações de recorrência lineares de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$S(n)=aS(n-1)+bS(n-2)$$

$$S(n)=p(r1)^{n-1}+q(r2)^{n-1}$$

r1 e r2 são raízes de $t^2 - at - b=0$

p e q devem satisfazer:

$$p + q = S(1)$$

$$p(r1) + q(r2) = S(2)$$

Fórmula para Solução

$S(n)=p(r1)^{n-1}+q(r2)^{n-1}$
$r1$ e $r2$: $t^2 - at - b=0$
$p + q = S(1)$
$p(r1) + q(r2) = S(2)$

Exemplo: $S(1)=3$, $S(2)=1$

$S(n) = 2S(n - 1) + 3S(n - 2)$ para $n \geq 3$

$a=2$ e $b = 3 \Rightarrow t^2-2t-3=0$ com raízes $r1=3$ e $r2=-1$

$p+q=3$ $\Rightarrow$ $p=1$ e $q=2$
$p(3)+q(-1)=1$

Logo, temos $S(n)=1(3)^{n-1}+2.(-1)^{n-1}$
$= 3^{n-1}+2.(-1)^{n-1}$

Fórmula para Solução

Relações de recorrência dividir para conquistar:
Aparecem na análise de algoritmos que resolvem um problema dividindo-o em versões menores.

$$S(n)=cS(n/2)+g(n),\ \forall n \geq 2 \text{ e } n=2^m$$

Fórmula para Solução

$S(n)=cS(n/2)+g(n),\ \forall n\geq 2 \text{ e } n=2^m$

$S(2^m)=cS(2^{m-1})+g(2^m)$

$T(m)=cT(m-1)+g(2^m)$ para $m\geq 1$

$T(m)=c^{m-1}T(1)+\sum_{i=2,\ldots m} c^{m-i}g(2^i)$ $T(1)=cT(0)+g(2)$

$S(2^m)=c^mS(2^0)+\sum_{i=1,\ldots m} c^{m-i}g(2^i)$

onde, $n=2^m \Leftrightarrow m=\log n$

$S(n)=c^{(\log n)}S(1)+\sum_{i=1,\ldots \log n} c^{(\log n)-i}g(2^i)$

$$S(n) = cS(n-1) + g(n)$$

$$S(n) = c^{n-1}S(1) + \sum_{i=2}^{n} c^{n-i}g(i)$$

Fórmula para Solução

Exemplo: $T(1)=3$ e $T(n)=2T(n/2)+2n$ $n>1$

$$S(n)=c^{(\log n)}S(1)+\sum_{i=1,\ldots\log n} c^{(\log n)-i}g(2^i)$$

$c=2$ e $g(n)=2n$

$$T(n)=2^{(\log n)}T(1)+\sum_{i=1,\ldots\log n} 2^{(\log n)-i}(2.2^i)$$

$$=n.3+\sum_{i=1,\ldots\log n} 2^{(\log n)}2^{-i}(2^{i+1}),\quad n=2^m \Leftrightarrow m=\log n$$

$$=n.3+\sum_{i=1,\ldots\log n} 2^{(\log n)}2^1=3n+2\sum_{i=1,\ldots\log n} 2^{(\log n)}$$

$$=3n+2\sum_{i=1,\ldots\log n} n$$

$$= 3n+2n\log n$$

Os conceitos e exemplos apresentados nesses slides são baseados no conteúdo da seção 3.2 do material-base "Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação", J.L. Gersting, 7a edição, LTC editora.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

Relações de Recorrência