FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

Matrizes

SUMÁRIO

- > Terminologia
- ➤ Operações Matriciais
- > O Método de Gauss
- > Matrizes Booleanas

Dados em muitos tipos de problemas podem ser representados por meio de um arranjo retangular de valores.

Vendas de carros em 2020 10 Semestre

					MAI	
Loja 1 Loja 2	102	90	84	76	31	12
Loja 2	100	95	75	50	29	15

Dimensões da matriz: número de linhas e de colunas

Elementos de uma matriz: a_{ij}

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 8 & -3 \\ 5 & -2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Exemplo: Considere S = $\{2, 5, 7, 9\}$ e a relação ρ = $\{(7, 9), (2, 5), (9, 9), (2, 7)\}$ em SxS. Vamos usar uma matriz para representar ρ

Para duas matrizes serem iguais elas têm que ter as mesmas dimensões e os mesmos elementos em cada posição.

 1
 2
 1
 1

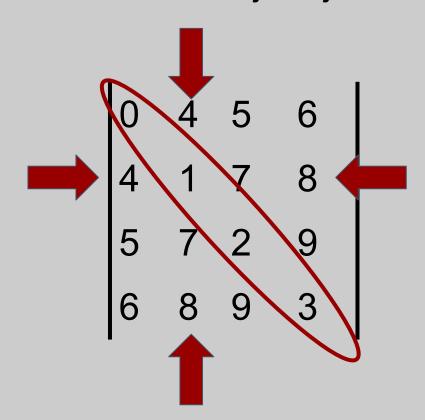
 1
 2
 2
 2

Matrizes quadradas:

número de linhas é igual ao de colunas.

$$A_{4x4} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Matriz simétrica: $a_{ij} = a_{ji}$



Multiplicação por escalar: aA

Soma de Matrizes: C=A+B

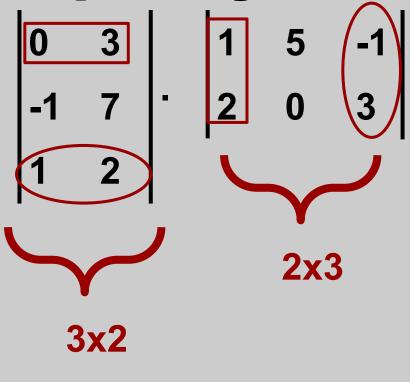
A e B devem ter as mesmas dimensões.

- Subtração de matrizes: A − B = A + (−1)B.
- Matriz nula: todos os elementos são 0.

$$0 + A = A$$

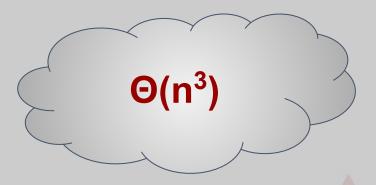
- Multiplicação de matrizes: C=A.B
 - Se A: n × m e B: m × p, temos C: n × p.

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$$



$$= \begin{vmatrix} 0x1+3x2 & 0x5+3x0 & 0x(-1)+3x3 \\ -1x1+7x2 & -1x5+7x0 & -1x(-1)+7x3 \\ 1x1+2x2 & 1x5+2x0 & 1x(-1)+2x3 \end{vmatrix}$$

- 1. ALGORITMO MULTIPLICAÇÃO MATRICIAL
- 2. Para i = 1 até n faça
- 3. Para j = 1 até p faça
- 4. C[i, j] = 0
- 5. Para k = 1 até m faça
- 6. C[i, j] = C[i, j] + A[i, k] * B[k, j]
- 7. fim do para
- 8. fim do para
- 9. fim do para



Se A, B e C <u>forem matrizes de dimensões</u> <u>apropriadas</u> e se r e s forem escalares, então as equações matriciais a seguir serão válidas:

- A. (B.C) = (A.B).C
- $A(B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- $(A + B)C = A \cdot C + B \cdot C$
- rA.sB = (rs)(A.B)

Matriz Identidade: matriz n × n que tem todos os elementos na diagonal principal iguais a 1 e todos os demais iguais a 0.

Se A:nxn, temos $I \cdot A = A \cdot I = A$

```
      1
      0
      0
      0

      0
      1
      0
      0

      0
      0
      1
      0

      0
      0
      0
      1
```

Considere um sistema como n equações e n incógnitas:

$$a_{11}x_{1} + a_{12}x_{2} + \dots + a_{1n}x_{n} = b_{1}$$

$$a_{21}x_{1} + a_{22}x_{2} + \dots + a_{2n}x_{n} = b_{2}$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_{1} + a_{n2}x_{2} + \dots + a_{nn}x_{n} = b_{n}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{1} & b_{1} \\ x_{2} & \vdots \\ b_{n} \end{vmatrix}$$

Considere um sistema como n equações e n incógnitas:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$

 $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$
:

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n$$

Matriz aumentada:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & b_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} & d_n \end{vmatrix}$$

$$c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = d_1$$

 $c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n = d_2$
 \vdots

$$c'_{(n-1)(n-1)}x_{n-1}+c'_{nn}x_n = b_n$$

 $c_{nn}x_n = b_n$

As operações elementares não mudam o conjunto de soluções das equações subjacentes. Elas são efetuadas na matriz aumentada e consistem em:

- i. Trocar duas linhas quaisquer da matriz.
- ii. Multiplicar todos os elementos de uma linha por um escalar diferente de zero.
- iii. Somar um múltiplo escalar de uma linha a qualquer outra.

Exemplo:
$$2x - 3y + z = -22$$
 L1 $7x + 9y - 3z = 14$ L2 $6x + 7y + 2z = 91$ L3

$$x - (3/2)y + (\frac{1}{2})z = 11$$

 $y - (\frac{1}{3})z = 14/3$
 $-(13/3)z = 247/3$
 $x = -4$
 $y = 11$
 $z = 19$

Matrizes que têm apenas elementos iguais a 0 ou 1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \land B = \begin{bmatrix} 0 \land & 1 \land 0 & 1 \land \\ 1 & & & 1 \\ 1 & & & 1 \\ 1 & & & 0 \\ 0 \land & 1 \land 1 & 0 \land \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$0 \land 1 \land 1 & 0 \land \\ 0 \land 1 \land 1 & 0 \land \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}
0 & & & & & & & & & & & & & \\
1 & & & & & & & & & \\
1 & & & & & & & & \\
1 & & & & & & & \\
1 & & & & & & & \\
1 & & & & & & & \\
1 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & & \\
0 & & & & \\
0 & & & & \\
0 & & & & \\
0 & & & & \\
0 & & & & \\
0 & & & & \\
0 & &$$

Multiplicação Booleana A:mxn B:nxp C=A × B

$$C_{ij} = \bigvee_{k=1}^{m} a_{ik} \wedge b_{kj}$$

AxB=
$$\begin{vmatrix} (0 \land 1) \lor & (0 \land 0) \lor & (0 \land 1) \lor \\ (1 \land 1) & (1 \land 1) & (1 \land 0) \lor \\ (1 \land 1) \lor & (1 \land 0) \lor & (1 \land 1) \lor \\ (0 \land 1) & (0 \land 1) & (0 \land 0) \lor \\ (0 \land 1) \lor & (0 \land 0) \lor & (0 \land 1) \lor \\ (1 \land 1) & (1 \land 1) & (1 \land 1) \end{vmatrix}$$

$$AxB = \begin{vmatrix} (0 \land 1) \lor & (0 \land 0) \lor & (0 \land 1) \lor \\ (1 \land 1) & (1 \land 1) & (1 \land 0) & \\ (1 \land 1) \lor & (1 \land 0) \lor & (1 \land 1) \lor \\ (0 \land 1) & (0 \land 1) & (0 \land 0) & \\ (0 \land 1) \lor & (0 \land 0) \lor & (0 \land 1) \lor \\ (1 \land 1) & (1 \land 1) & (1 \land 1) & \\ \end{vmatrix}$$

Os conceitos e exemplos apresentados nesses slides são baseados no conteúdo da seção 5.7 do material-base "Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação", J.L. Gersting, 7a edição, LTC editora.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

Matrizes