FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

Técnicas de Demonstração

SUMÁRIO

- Demonstrações Informais
- Técnicas de Demonstração
    - Direta
    - Contraposição
    - Absurdo

Demonstrações Informais

- **Teorema:** afirmação que pode ser provada como verdadeira, por meio de outras afirmações já demonstradas.
- Dado $P \rightarrow Q$, se P for verdadeiro e provarmos que Q também o será, $P \rightarrow Q$ torna-se um teorema.
- Os **teoremas** são provados de modo menos formal do que usando **lógica proposicional** e lógica de **predicados**.

Demonstrações Informais

Basta um contraexemplo para mostrar que uma conjectura é falsa.

Exemplo:

- **Todos os animais que vivem no oceano são peixes.**
  Baleia - Mamífero - CONTRAEXEMPLO!!

- **Todo inteiro menor do que 10 é maior do que 5.**
  2 < 10 e 2 não é maior que 5
  CONTRAEXEMPLO!!

Demonstrações Informais

Basta um contraexemplo para mostrar que uma conjectura é falsa.

Exemplo: Para todo inteiro positivo n, $n! \leq n^2$

$n=1 \quad 1!=1=1^2$

$n=2 \quad 2!=2<2^2=4$

$n=3 \quad 3!=6<2^3=8$

$n=4 \quad 4!=24 \nleq 4^2=16$ FALSO - CONTRAEXEMPLO!!

Demonstrações Informais

Demonstração por Exaustão

Exemplo: Para qualquer inteiro positivo menor ou igual a 5, o quadrado do inteiro é menor ou igual à soma de 10 com 5 vezes o inteiro.

Dem. por exaustão: $n^2<10 + 5xn$

$n=1 \quad 1^2=1<10+5x1=15$

$n=2 \quad 2^2=4<10+5x2=20$

$n=3 \quad 3^2=9<10+5x3=25$

$n=4 \quad 4^2=16<10+5x4=30$

$n=5 \quad 5^2=25<10+5x5=35$

Demonstrações Informais

Demonstração por Exaustão

Exemplo: Para qualquer inteiro positivo, o quadrado do inteiro é menor ou igual à soma de 10 com 5 vezes o inteiro.

Dem. por exaustão:

n=6 $6^2=36<10+5\times6=40$

n=7 $7^2=49<10+5\times7=45$ X

n=8 $8^2=64<10+5\times8=50$ X

Direta

Suponha a hipótese P e deduza a conclusão Q.

$$P \rightarrow Q$$

- **Estabelece-se uma sequência de demonstração partindo de P e chegando a Q.**

Exemplo: Se x é um inteiro par e y é um inteiro par, então o produto xy é um inteiro par.

Direta

Exemplo: Se x é um inteiro par e y é um inteiro par, então o produto xy é um inteiro par.

1º Passo: Identificar a hipótese e tese (conclusão)

- **Hipótese: x é um inteiro par**
  y é um inteiro par
- **Tese: xy é um inteiro par.**

Direta

Exemplo: Se x é um inteiro par e y é um inteiro par, então o produto xy é um inteiro par.

2º Passo: Representar matematicamente

- **Hipótese: $x=2a$, para a inteiro**
  $y=2b$, para b inteiro.
- **Tese: $xy=2c$, para c inteiro**

Direta

Exemplo: Se x é um inteiro par e y é um inteiro par, então o produto xy é um inteiro par.

3º Passo: Partimos da hipótese para a tese.

Seja x=2a, para a inteiro e y=2b, para b inteiro.

$$
\begin{aligned}
x.y &= 2a.2b \\
&= 2(a.2b) \\
&= 2k,
\end{aligned}
$$

onde k=a.2b é um inteiro. Logo, xy=2k é par.

Provamos usando a demonstração direta!!!

Direta

Exemplo: Se um inteiro for divisível por 6, então o dobro desse inteiro será divisível por 4

Prova: Usando demonstração direta

Hipótese: x é divisível por 6

x é um múltiplo de 6

x=6a, a é um valor inteiro.

Tese: O dobro desse inteiro é divisível por 4

2x=4b, b inteiro (????)

Direta

Exemplo: Se um inteiro for divisível por 6, então o dobro desse inteiro será divisível por 4

Prova:

Dado x=6a, temos que:

$$x=6a$$

$$2x=12a$$

$$2x=4.3a$$

$$2x=4k,\ k=3a \text{ inteiro.}$$

Logo, 2x é divisível por 4.

Contraposição

Dado $(P \rightarrow Q)$, provamos que $Q' \rightarrow P'$.

$$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (Q' \rightarrow P')$$

Exemplo: Se o quadrado de um inteiro for ímpar, então o inteiro terá que ser ímpar.

Hipótese P: $x^2=2a+1$

Tese Q: $x=2b+1$ (Q)

a, b inteiros

P': $x^2=2a$

Q': $x=2b$

Contraposição

Exemplo: Se o quadrado de um inteiro for ímpar, então o inteiro terá que ser ímpar.

Dem. por contraposição

Hipótese Q’: $x=2b$ e Tese P’: $x^2=2a$

$$x=2b$$

$$x^2=(2b)^2$$

$$x^2=4b^2$$

$$x^2=2.(2b^2)$$

$$x^2=2.k,\ k=2b^2 \text{ inteiro}$$

Contraposição

Proposição do tipo "se e somente se" requer duas demonstrações, uma em cada direção.

$$(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

Exemplo: Prove que o produto xy será ímpar se e somente se tanto x quanto y forem inteiros ímpares.

P: $xy=2a+1$ Q: $x=2b+1$ e $y=2c+1$

a,b,c inteiros

Contraposição

Exemplo: Prove que o produto xy será ímpar se e somente se tanto x quanto y forem inteiros ímpares.

Ida: P→Q. P: $xy=2a+1$ → Q: $x=2b+1$ **e** $y=2c+1$

Vamos usar contraposição: Q'→P'.

Q': $x=2b$ **ou** $y=2c$.

$x.y=2b.y$

$=2k,$

$k=by$ inteiro.

$x.y=x.2c$

$=2cx$

$=2k,$

$k=cx$ inteiro

Provamos P→Q usando Q'→P'

Contraposição

Exemplo: Prove que o produto xy será ímpar se e somente se tanto x quanto y forem inteiros ímpares.

Volta: $Q \rightarrow P$

$$(Q: x=2b+1 \text{ e } y=2c+1) \rightarrow (P: xy=2a+1)$$

Dem. direta: $Q \rightarrow P$, P: $x=2b+1$ e $y=2c+1$.

$$x.y=(2b+1)(2c+1)$$

$$=4bc+2b+2c+1$$

$$= 2(2bc+b+c)+1=2k+1,$$

$k=2bc+b+c$ inteiro. Logo, xy é ímpar.

Absurdo

$$(P \land Q' \rightarrow 0) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$$

DICA: Para provar que algo não é verdade, tente demonstração por absurdo.

Exemplo: Se um número somado a ele mesmo for igual a ele mesmo, então esse número será 0

P: um número somado a ele mesmo for igual a ele mesmo

$$P: x+x=x$$

Q: esse número será 0

$$Q: x=0$$

Absurdo

Exemplo: Se um número somado a ele mesmo for igual a ele mesmo, então esse número será 0.

Demonstrando por absurdo, temos:

$$P \wedge Q' \rightarrow 0$$

Hipótese: $P \wedge Q'$

$$(x+x=x) \wedge (x \neq 0)$$

Tese: 0 - Falso

Absurdo

Exemplo: Se um número somado a ele mesmo for igual a ele mesmo, então esse número será 0.

$$P \wedge Q' \rightarrow 0$$

Hipótese: $P \wedge Q'$

$$(x+x=x) \wedge (x \neq 0)$$

Tese: 0 - Falso

$x+x=x$ (Hipótese)

$2x=x$

$2x/x = x/x$, pois $x \neq 0$ (Hipótese)

$2=1$ Absurdo - FALSO!!

Absurdo

Exemplo: Provar que $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Dem. por absurdo

Suponha que $\sqrt{2}$ é racional.

Logo, $\sqrt{2}=p/q$, onde p e q são inteiros indivisíveis.

$$\sqrt{2}=p/q$$

$$2=p^2/q^2$$

$$p^2=2q^2$$

Absurdo

Exemplo: Provar que $\sqrt{2}$ não é um número racional.

$\sqrt{2}=p/q$, onde p e q são inteiros indivisíveis.

$$\sqrt{2}=p/q$$

$$2=p^2/q^2$$

$$p^2=2q^2$$

Assim, 2 divide p^2 e 2 é um fator de p.

Logo, $p=2x$ e $p^2=(2x)^2=2q^2$

$$4x^2=2q^2 \Rightarrow 2x=q^2$$

Absurdo

Exemplo: $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Logo, $p=2x$ e $p^2=(2x)^2=2q^2$

$$4x^2=2q^2 \Rightarrow 2x=q^2$$

Temos que 2 divide q^2, logo 2 divide q.

Isso significa que 2 é um fator comum de q e p, logo,

p e q não são indivisíveis.

Portanto, $\sqrt{2}$ não é racional!!!

Absurdo

Exemplo: Prove por absurdo que o produto de dois inteiros ímpares não é par.

Vamos assumir, por absurdo, que o produto de dois inteiros ímpares é par.
Lembre-se $P \wedge Q' \rightarrow 0$,

> **Hipóteses: (x=2a+1 e y=2b+1) e (x.y=2k)**
>
> **Tese: Falso**

Absurdo

Exemplo: Prove por absurdo que o produto de dois inteiros ímpares não é par.

Dem:

$xy=2k$ (Hipótese)

$(2a+1)(2b+1)=2k$ (Hipótese)

$4ab+2a+2b+1=2k$

$2(2ab+a+b)+1=2k$

$2m+1 \neq 2k$ FALSO!!!

Os conceitos e exemplos apresentados nesses slides são baseados no conteúdo da seção 2.1 do material-base “Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação”, J.L. Gersting, 7a edição, LTC editora.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA COMPUTAÇÃO

Técnicas de Demonstração