

Metodologia de Pesquisa

Simulação

Ricardo Rosal

June 6, 2022

1 Simulação como método de pesquisa

- Tipos de simulação
 - Eventos discretos
 - Sistemas dinâmicos
 - Simulação baseada em agentes

2 Métodos de simulação

- Sistemas dinâmicos
- Monte Carlo
- Automatos Celulares
- Simulação de eventos discretos
- Elementos Finitos

Simulação como método de pesquisa

Simulação como método de pesquisa

- O principal valor da simulação como método de pesquisa é a flexibilidade dada ao pesquisador de focar na complexidade do sistema e do modelo em estudo e fazer perguntas do tipo **"e se?"** ao invés de perguntas como **"o que aconteceu? como? e por que?"**.
- outros métodos de pesquisa, em contra-partida, requer que seja **estabelecida algumas preposições sobre causalidade do fenômeno estudado**, já a simulação nos permite, desde a dinâmica estabelecida do modelo, **"criar/descobrir"** tais efeitos e demonstrar causalidades.
- A simulação permite o estudo de **fenômenos mais complexos**, uma vez que as observações são feitas para **"avanchando"** no tempo (ou em outra dimensão em que o sistema tem uma dinâmica definida).

Simulação como método de pesquisa

- O principal valor da simulação como método de pesquisa é a flexibilidade dada ao pesquisador de focar na complexidade do sistema e do modelo em estudo e fazer perguntas do tipo **"e se?"** ao invés de perguntas como **"o que aconteceu? como? e por que?"**.
- outros métodos de pesquisa, em contra-partida, requer que seja **estabelecida algumas preposições sobre causalidade do fenômeno estudado**, já a simulação nos permite, desde a dinâmica estabelecida do modelo, **"criar/descobrir"** tais efeitos e demonstrar causalidades.
- A simulação permite o estudo de **fenômenos mais complexos**, uma vez que as observações são feitas para **"avancando"** no tempo (ou em outra dimensão em que o sistema tem uma dinâmica definida).

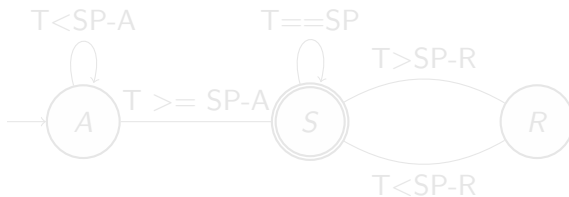
Simulação como método de pesquisa

- O principal valor da simulação como método de pesquisa é a flexibilidade dada ao pesquisador de focar na complexidade do sistema e do modelo em estudo e fazer perguntas do tipo **"e se?"** ao invés de perguntas como **"o que aconteceu? como? e por que?"**.
- outros métodos de pesquisa, em contra-partida, requer que seja **estabelecida algumas preposições sobre causalidade do fenômeno estudado**, já a simulação nos permite, desde a dinâmica estabelecida do modelo, **"criar/descobrir"** tais efeitos e demonstrar causalidades.
- A simulação permite o estudo de **fenômenos mais complexos**, uma vez que as observações são feitas para **"avanchando"** no tempo (ou em outra dimensão em que o sistema tem uma dinâmica definida).

Tipos de simulação

Principais famílias de simulação

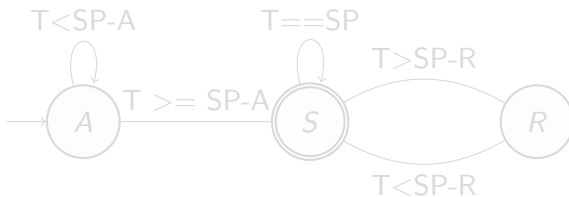
- **Simulação de eventos discretos:** envolve um modelo onde a dinâmica (*governing equations*) na dimensão ζ (tempo, por exemplo) evolui de forma discreta, normalmente os eventos são disparados por um gatilho, que pode ser implementado com uma **callback** ou um **intervalo pré-definido**.
- usualmente, métodos como maquinas de **estados-finitos**, e **teoria das filas** são utilizados para simulação de eventos discretos.



- exemplo:

Principais famílias de simulação

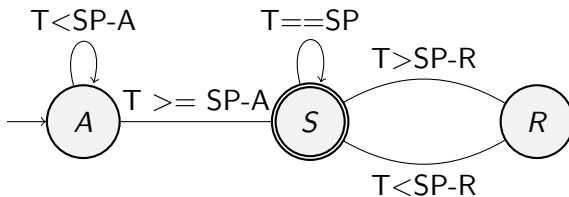
- **Simulação de eventos discretos:** envolve um modelo onde a dinâmica (*governing equations*) na dimensão ζ (tempo, por exemplo) evolui de forma discreta, normalmente os eventos são disparados por um gatilho, que pode ser implementado com uma **callback** ou um **intervalo pré-definido**.
- usualmente, métodos como maquinas de **estados-finitos**, e **teoria das filas** são utilizados para simulação de eventos discretos.



- exemplo:

Principais famílias de simulação

- **Simulação de eventos discretos:** envolve um modelo onde a dinâmica (*governing equations*) na dimensão ζ (tempo, por exemplo) evolui de forma discreta, normalmente os eventos são disparados por um gatilho, que pode ser implementado com uma **callback** ou um **intervalo pré-definido**.
- usualmente, métodos como máquinas de **estados-finitos**, e **teoria das filas** são utilizados para simulação de eventos discretos.



- exemplo:

Principais famílias de simulação

- **Simulação de sistemas dinâmicos:** nesse tipo de simulação é definido o **estado** ou **estados** do sistema, que normalmente é a variável dependente de uma função, onde é conhecido a dinâmica do mesmo.
- essa dinâmica normalmente é definida por uma **equação diferencial ODE** ou **PDE**, dependendo do número de **dimensões** no espaço onde ocorre a dinâmica do sistema, e a função que define o **estado** é a solução da equação diferencial.
- Por exemplo:

$$F = m \cdot a \quad (1)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} - f = 0 \quad (2)$$

- ou:

$$\nabla^2 = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (3)$$

Principais famílias de simulação

- **Simulação de sistemas dinâmicos:** nesse tipo de simulação é definido o **estado** ou **estados** do sistema, que normalmente é a variável dependente de uma função, onde é conhecido a dinâmica do mesmo.
- essa dinâmica normalmente é definida por uma **equação diferencial ODE** ou **PDE**, dependendo do número de **dimensões** no espaço onde ocorre a dinâmica do sistema, e a função que define o **estado** é a solução da equação diferencial.
- Por exemplo:

$$F = m \cdot a \quad (1)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} - f = 0 \quad (2)$$

- ou:

$$\nabla^2 = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (3)$$

Principais famílias de simulação

- **Simulação de sistemas dinâmicos:** nesse tipo de simulação é definido o **estado** ou **estados** do sistema, que normalmente é a variável dependente de uma função, onde é conhecido a dinâmica do mesmo.
- essa dinâmica normalmente é definida por uma **equação diferencial ODE** ou **PDE**, dependendo do número de **dimensões** no espaço onde ocorre a dinâmica do sistema, e a função que define o **estado** é a solução da equação diferencial.
- Por exemplo:

$$F = m \cdot a \quad (1)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} - f = 0 \quad (2)$$

- ou:

$$\nabla^2 = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (3)$$

Principais famílias de simulação

- **Simulação de sistemas dinâmicos:** nesse tipo de simulação é definido o **estado** ou **estados** do sistema, que normalmente é a variável dependente de uma função, onde é conhecido a dinâmica do mesmo.
- essa dinâmica normalmente é definida por uma **equação diferencial ODE** ou **PDE**, dependendo do número de **dimensões** no espaço onde ocorre a dinâmica do sistema, e a função que define o **estado** é a solução da equação diferencial.
- Por exemplo:

$$F = m \cdot a \quad (1)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} - f = 0 \quad (2)$$

- ou:

$$\nabla^2 = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (3)$$

Principais famílias de simulação

- **Simulações baseadas em agentes:** são um grupo de métodos que de simulação que tem como objetivo a iteração de agentes que tendem a otimizar suas **funções de utilidade**.
- Um dos métodos mais utilizados para esse tipo de simulação a **teoria dos jogos**.

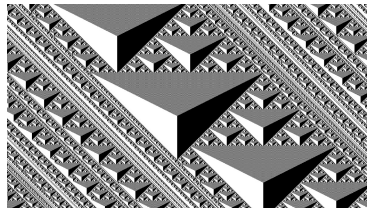


Figure: Kasparov vs Deep Blue e automato celular

Principais famílias de simulação

- **Simulações baseadas em agentes:** são um grupo de métodos que de simulação que tem como objetivo a iteração de agentes que tendem a otimizar suas **funções de utilidade**.
- Um dos métodos mais utilizados para esse tipo de simulação a **teoria dos jogos**.

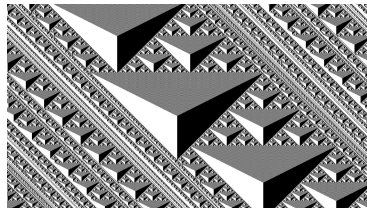


Figure: Kasparov vs Deep Blue e automato celular

Principais famílias de simulação

- **Simulações baseadas em agentes:** são um grupo de métodos que de simulação que tem como objetivo a iteração de agentes que tendem a otimizar suas **funções de utilidade**.
- Um dos métodos mais utilizados para esse tipo de simulação a **teoria dos jogos**.

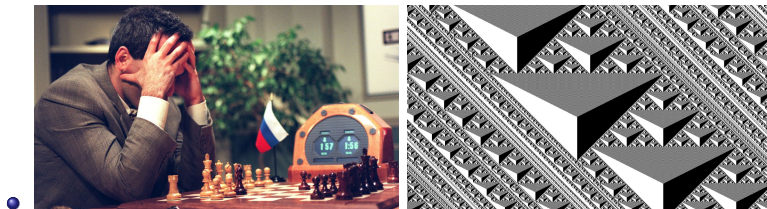


Figure: Kasparov vs Deep Blue e automato celular

Métodos de simulação

Sistemas dinâmicos

O que é um sistema dinâmico?

- Em resumo, um **sistema dinâmico** é um sistema que varia no tempo;
- o sistema é descrito uma variável que define o estado do sistema;

$$s(t) \quad (4)$$

- o estado pode ser um vetor (multivariável);

$$s(t) = (s(t), \dots, s_n(t))^T \quad (5)$$

- e para adicionar a *dinâmica* no sistema, é necessário definir como o **estado** varia no tempo.
- qual a forma mais convencional de fazer isso matematicamente?

$$\dot{s}(t) = \frac{ds(t)}{dt} = f(s(t)) \quad (6)$$

O que é um sistema dinâmico?

- Em resumo, um **sistema dinâmico** é um sistema que varia no tempo;
- o sistema é descrito uma variável que define o estado do sistema;

$$s(t) \quad (4)$$

- o estado pode ser um vetor (multivariável);

$$s(t) = (s(t), \dots, s_n(t))^T \quad (5)$$

- e para adicionar a *dinâmica* no sistema, é necessário definir como o **estado** varia no tempo.
- qual a forma mais convencional de fazer isso matematicamente?

$$\dot{s}(t) = \frac{ds(t)}{dt} = f(s(t)) \quad (6)$$

O que é um sistema dinâmico?

- Em resumo, um **sistema dinâmico** é um sistema que varia no tempo;
- o sistema é descrito uma variável que define o estado do sistema;

$$s(t) \quad (4)$$

- o estado pode ser um vetor (multivariável);

$$s(t) = (s(t), \dots, s_n(t))^T \quad (5)$$

- e para adicionar a *dinâmica* no sistema, é necessário definir como o **estado** varia no tempo.
- qual a forma mais convencional de fazer isso matematicamente?

$$\dot{s}(t) = \frac{ds(t)}{dt} = f(s(t)) \quad (6)$$

O que é um sistema dinâmico?

- Em resumo, um **sistema dinâmico** é um sistema que varia no tempo;
- o sistema é descrito uma variável que define o estado do sistema;

$$s(t) \quad (4)$$

- o estado pode ser um vetor (multivariável);

$$s(t) = (s(t), \dots, s_n(t))^T \quad (5)$$

- e para adicionar a *dinâmica* no sistema, é necessário definir como o **estado** varia no tempo.
- qual a forma mais convencional de fazer isso matematicamente?

$$\dot{s}(t) = \frac{ds(t)}{dt} = f(s(t)) \quad (6)$$

O que é um sistema dinâmico?

- Em resumo, um **sistema dinâmico** é um sistema que varia no tempo;
- o sistema é descrito uma variável que define o estado do sistema;

$$s(t) \quad (4)$$

- o estado pode ser um vetor (multivariável);

$$s(t) = (s(t), \dots, s_n(t))^T \quad (5)$$

- e para adicionar a *dinâmica* no sistema, é necessário definir como o **estado** varia no tempo.
- qual a forma mais convencional de fazer isso matematicamente?

$$\dot{s}(t) = \frac{ds(t)}{dt} = f(s(t)) \quad (6)$$

Representações de sistemas dinâmicos

Temos geralmente duas formas de representar o tempo em sistemas dinâmicos, e isso normalmente depende da dinâmica do sistema e como isso será definido.

- **Tempo discreto:** os tempo nos sistemas dinâmicos são representados **relações recorrentes** também chamado de **equações de diferenças**.

$$s(t + \Delta t) = f(s(t)) \quad (7)$$

- **Tempo contínuo:** já nos sistemas contínuos são representados por **equações diferenciais**, ordinárias (ODE) ou parciais (PDE).

$$\dot{s} = \frac{ds(t)}{dt} = f(s(t)) \quad (8)$$

Representações de sistemas dinâmicos

Temos geralmente duas formas de representar o tempo em sistemas dinâmicos, e isso normalmente depende da dinâmica do sistema e como isso será definido.

- **Tempo discreto:** os tempo nos sistemas dinâmicos são representados **relações recorrentes** também chamado de **equações de diferenças**.

$$s(t + \Delta t) = f(s(t)) \quad (7)$$

- **Tempo contínuo:** já nos sistemas contínuos são representados por **equações diferenciais**, ordinárias (ODE) ou parciais (PDE).

$$\dot{s} = \frac{ds(t)}{dt} = f(s(t)) \quad (8)$$

Exemplo: Crescimento Populacional

- Vamos abordar um problema onde aplicação onde o objeto é simular o **"crescimento"** de uma população em um dado sistema.
- podemos começar modelando esse sistema, definindo a variável estado do sistema, que no caso é a população $P(t)$.
- Considerando que sabemos o estado atual da população $P(0) = P_0$, temos um IVP.
- De forma bastante resumida, podemos falar que os únicos processos que influenciam o estado da população é a $M(t)$ e o nascimento $N(t)$.
- então podemos definir que:

$$\dot{P} = \frac{P(t)}{dt} = N(t) - M(t) \quad (9)$$

- Possíveis funções para modelar os nascimentos e mortes poderiam ser:

$$B(t) = r_b P(t) \quad (10)$$

$$B(t) = r_d P(t) \quad (11)$$

Exemplo: Crescimento Populacional

- Vamos abordar um problema onde aplicação onde o objeto é simular o "**crescimento**" de uma população em um dado sistema.
- podemos começar modelando esse sistema, definindo a variável estado do sistema, que no caso é a população $P(t)$.
- Considerando que sabemos o estado atual da população $P(0) = P_0$, temos um IVP.
- De forma bastante resumida, podemos falar que os únicos processos que influenciam o estado da população é a $M(t)$ e o nascimento $N(t)$.
- então podemos definir que:

$$\dot{P} = \frac{P(t)}{dt} = N(t) - M(t) \quad (9)$$

- Possíveis funções para modelar os nascimentos e mortes poderiam ser:

$$B(t) = r_b P(t) \quad (10)$$

$$B(t) = r_d P(t) \quad (11)$$

Exemplo: Crescimento Populacional

- Vamos abordar um problema onde aplicação onde o objeto é simular o "**crescimento**" de uma população em um dado sistema.
- podemos começar modelando esse sistema, definindo a variável estado do sistema, que no caso é a população $P(t)$.
- Considerando que sabemos o estado atual da população $P(0) = P_0$, temos um IVP.
- De forma bastante resumida, podemos falar que os únicos processos que influenciam o estado da população é a $M(t)$ e o nascimento $N(t)$.
- então podemos definir que:

$$\dot{P} = \frac{P(t)}{dt} = N(t) - M(t) \quad (9)$$

- Possíveis funções para modelar os nascimentos e mortes poderiam ser:

$$B(t) = r_b P(t) \quad (10)$$

$$B(t) = r_d P(t) \quad (11)$$

Exemplo: Crescimento Populacional

- Vamos abordar um problema onde aplicação onde o objeto é simular o "**crescimento**" de uma população em um dado sistema.
- podemos começar modelando esse sistema, definindo a variável estado do sistema, que no caso é a população $P(t)$.
- Considerando que sabemos o estado atual da população $P(0) = P_0$, temos um IVP.
- De forma bastante resumida, podemos falar que os únicos processos que influenciam o estado da população é a $M(t)$ e o nascimento $N(t)$.
- então podemos definir que:

$$\dot{P} = \frac{P(t)}{dt} = N(t) - M(t) \quad (9)$$

- Possíveis funções para modelar os nascimentos e mortes poderiam ser:

$$B(t) = r_b P(t) \quad (10)$$

$$B(t) = r_d P(t) \quad (11)$$

Exemplo: Crescimento Populacional

- Vamos abordar um problema onde aplicação onde o objeto é simular o "**crescimento**" de uma população em um dado sistema.
- podemos começar modelando esse sistema, definindo a variável estado do sistema, que no caso é a população $P(t)$.
- Considerando que sabemos o estado atual da população $P(0) = P_0$, temos um IVP.
- De forma bastante resumida, podemos falar que os únicos processos que influenciam o estado da população é a $M(t)$ e o nascimento $N(t)$.
- então podemos definir que:

$$\dot{P} = \frac{P(t)}{dt} = N(t) - M(t) \quad (9)$$

- Possíveis funções para modelar os nascimentos e mortes poderiam ser:

$$B(t) = r_b P(t) \quad (10)$$

$$B(t) = r_d P(t) \quad (11)$$

Exemplo: Crescimento Populacional

- Vamos abordar um problema onde aplicação onde o objeto é simular o **"crescimento"** de uma população em um dado sistema.
- podemos começar modelando esse sistema, definindo a variável estado do sistema, que no caso é a população $P(t)$.
- Considerando que sabemos o estado atual da população $P(0) = P_0$, temos um IVP.
- De forma bastante resumida, podemos falar que os únicos processos que influenciam o estado da população é a $M(t)$ e o nascimento $N(t)$.
- então podemos definir que:

$$\dot{P} = \frac{P(t)}{dt} = N(t) - M(t) \quad (9)$$

- Possíveis funções para modelar os nascimentos e mortes poderiam ser:

$$B(t) = r_b P(t) \quad (10)$$

$$B(t) = r_d P(t) \quad (11)$$

Exemplo: Crescimento Populacional

- Podemos simplificar esse problema da seguinte forma:

$$\dot{P} = rP(t) \text{ onde } r = rb - rd \quad (12)$$

- E, por ser um modelo **muito** simples, podemos resolvê-lo analiticamente.

$$P(t) = P_0 e^{rt} \quad (13)$$

Exemplo: Crescimento Populacional

- Podemos simplificar esse problema da seguinte forma:

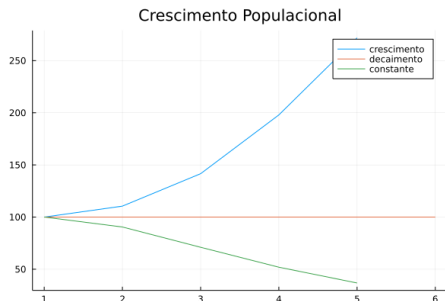
$$\dot{P} = rP(t) \text{ onde } r = rb - rd \quad (12)$$

- E, por ser um modelo **muito** simples, podemos resolvê-lo analiticamente.

$$P(t) = P_0 e^{rt} \quad (13)$$

Exemplo: Crescimento Populacional

- $r > 0$: crescimento exponencial
- $r < 0$: decaimento exponencial
- $r = 0$: população constante



Exemplo: Lotka-Volterra

- Expandindo a simulação aplicada a dinâmicas populações, um modelo mais completo seria o modelo de **Lotka-Volterra**, também conhecido como *presa-predador*.
- Suponha que você queira modelar as populações de gatos e ratos em uma ilha, com suas respectivas dinâmicas no tempo definidas pelas funções $g(t)$ e $r(t)$, respectivamente. Os gatos se alimentam de ratos e morrerão de fome sem eles.
- Portanto, qualquer equação diferencial que descreva a taxa de variação de $g(t)$ também deve envolver $r(t)$. Da mesma forma, a taxa de variação de $r(t)$ depende do número atual de $g(t)$.

Exemplo: Lotka-Volterra

- Expandindo a simulação aplicada a dinâmicas populações, um modelo mais completo seria o modelo de **Lotka-Volterra**, também conhecido como *presa-predador*.
- Suponha que você queira modelar as populações de gatos e ratos em uma ilha, com suas respectivas dinâmicas no tempo definidas pelas funções $g(t)$ e $r(t)$, respectivamente. Os gatos se alimentam de ratos e morrerão de fome sem eles.
- Portanto, qualquer equação diferencial que descreva a taxa de variação de $g(t)$ também deve envolver $r(t)$. Da mesma forma, a taxa de variação de $r(t)$ depende do número atual de $g(t)$.

Exemplo: Lotka-Volterra

- Expandindo a simulação aplicada a dinâmica populações, um modelo mais completo seria o modelo de **Lotka-Volterra**, também conhecido como *presa-predador*.
- Suponha que você queira modelar as populações de gatos e ratos em uma ilha, com suas respectivas dinâmicas no tempos definidas pelas funções $g(t)$ em $r(t)$, respectivamente. Os gatos se alimentam de ratos e morrerão de fome sem eles.
- Portanto, qualquer equação diferencial que descreva a taxa de variação de $g(t)$ também deve envolver $r(t)$. Da mesma forma, a taxa de variação de $r(t)$ depende do número atual de $g(t)$.

Exemplo: Lotka-Volterra

- Isso apresenta algumas novas características do modelo para simulação, agora precisamos representar dois **estados do sistema**, a população de gatos $g(t)$ e de ratos $r(t)$.
- Podemos modelar esse sistema como um **sistema de equações diferenciais**.
- E chegamos no **modelo de Lotka-Volterra**.

$$\frac{dr(t)}{dt} = \alpha r(t) - \beta r(t)g(t) \quad (14)$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = \delta r(t)g(t) - \gamma g(t) \quad (15)$$

Exemplo: Lotka-Volterra

- Isso apresenta algumas novas características do modelo para simulação, agora precisamos representar dois **estados do sistema**, a população de gatos $g(t)$ e de ratos $r(t)$.
- Podemos modelar esse sistema como um **sistema de equações diferenciais**.
- E chegamos no **modelo de Lotka-Volterra**.

$$\frac{dr(t)}{dt} = \alpha r(t) - \beta r(t)g(t) \quad (14)$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = \delta r(t)g(t) - \gamma g(t) \quad (15)$$

Exemplo: Lotka-Volterra

- Isso apresenta algumas novas características do modelo para simulação, agora precisamos representar dois **estados do sistema**, a população de gatos $g(t)$ e de ratos $r(t)$.
- Podemos modelar esse sistema como um **sistema de equações diferenciais**.
- E chegamos no **modelo de Lotka-Volterra**.

$$\frac{dr(t)}{dt} = \alpha r(t) - \beta r(t)g(t) \quad (14)$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = \delta r(t)g(t) - \gamma g(t) \quad (15)$$

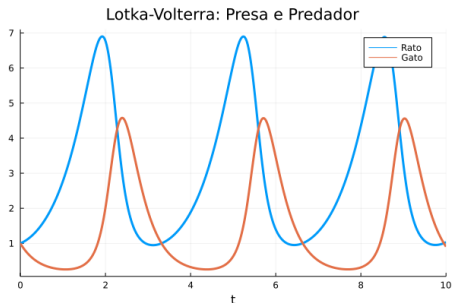
Exemplo: Lotka-Volterra (Solução)

Parâmetros:

- α : é a taxa de crescimento da população de ratos na ausencia de gatos.
- β : é a taxa de morte natural de gatos na ausencia de ratos.
- δ : é a taxa de mortalidade por encontro de gatos com ratos.
- γ : é a "conversão" de ratos em gatos.

$$\frac{dr(t)}{dt} = \alpha r(t) - \beta r(t)g(t) \quad (16)$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = \delta r(t)g(t) - \gamma g(t)$$



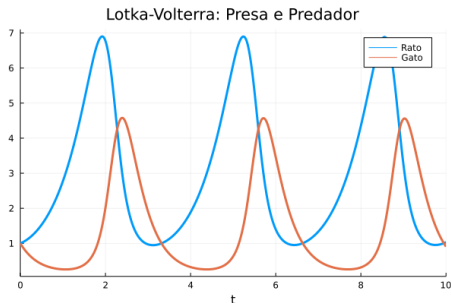
Exemplo: Lotka-Volterra (Solução)

Parâmetros:

- α : é a taxa de crescimento da população de ratos na ausencia de gatos.
- β : é a taxa de morte natural de gatos na ausencia de ratos.
- δ : é a taxa de mortalidade por encontro de gatos com ratos.
- γ : é a "conversão" de ratos em gatos.
-

$$\frac{dr(t)}{dt} = \alpha r(t) - \beta r(t)g(t) \quad (16)$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = \delta r(t)g(t) - \gamma g(t)$$



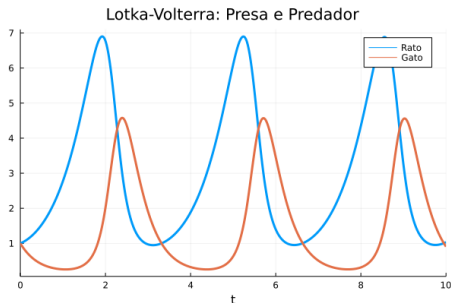
Exemplo: Lotka-Volterra (Solução)

Parâmetros:

- α : é a taxa de crescimento da população de ratos na ausencia de gatos.
- β : é a taxa de morte natural de gatos na ausencia de ratos.
- δ : é a taxa de mortalidade por encontro de gatos com ratos.
- γ : é a "conversão" de ratos em gatos.

$$\frac{dr(t)}{dt} = \alpha r(t) - \beta r(t)g(t) \quad (16)$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = \delta r(t)g(t) - \gamma g(t)$$



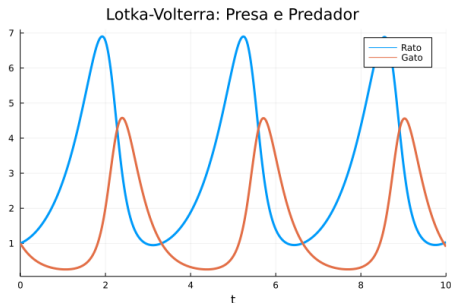
Exemplo: Lotka-Volterra (Solução)

Parâmetros:

- α : é a taxa de crescimento da população de ratos na ausencia de gatos.
- β : é a taxa de morte natural de gatos na ausencia de ratos.
- δ : é a taxa de mortalidade por encontro de gatos com ratos.
- γ : é a "conversão" de ratos em gatos.

$$\frac{dr(t)}{dt} = \alpha r(t) - \beta r(t)g(t) \quad (16)$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = \delta r(t)g(t) - \gamma g(t)$$



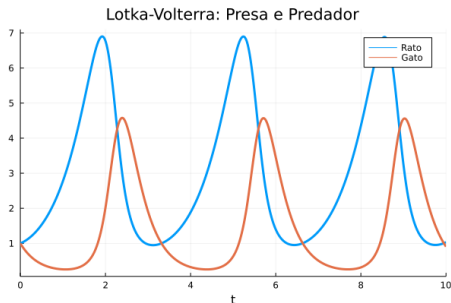
Exemplo: Lotka-Volterra (Solução)

Parâmetros:

- α : é a taxa de crescimento da população de ratos na ausencia de gatos.
- β : é a taxa de morte natural de gatos na ausencia de ratos.
- δ : é a taxa de mortalidade por encontro de gatos com ratos.
- γ : é a "conversão" de ratos em gatos.
-

$$\frac{dr(t)}{dt} = \alpha r(t) - \beta r(t)g(t) \quad (16)$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = \delta r(t)g(t) - \gamma g(t)$$



Monte Carlo

O que é método de Monte Carlo?

- O objetivo do método de Monte Carlo é amostrar um processo estocástico e a partir disso, determinar propriedades estatísticas do fenómeno.
- no entanto, como é amostrado os eventos aleatórios?
- A principal sacada do método de Monte Carlo foi utilizar a função inversa de uma CDF (cumulative distribution function) para, a partir de um gerador de números aleatórios, definir o estado do evento gerado.
- Por exemplo, se jogarmos uma moeda 4 vezes, qual é a probabilidade de obtermos 3 caras e 1 coroa?
- podemos definir isso analiticamente pelo seguinte processo (distribuição binomial):

$$P(3\text{caras}) = \binom{4}{3} \frac{1}{2}^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{4} \quad (18)$$

O que é método de Monte Carlo?

- O objetivo do método de Monte Carlo é amostrar um processo estocástico e a partir disso, determinar propriedades estatísticas do fenómeno.
- no entanto, como é amostrado os eventos aleatórios?
- A principal sacada do método de Monte Carlo foi utilizar a função inversa de uma CDF (cumulative distribution function) para, a partir de um gerador de números aleatórios, definir o estado do evento gerado.
- Por exemplo, se jogarmos uma moeda 4 vezes, qual é a probabilidade de obtermos 3 caras e 1 coroa?
- podemos definir isso analiticamente pelo seguinte processo (distribuição binomial):

$$P(3\text{caras}) = \binom{4}{3} \frac{1}{2}^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{4} \quad (18)$$

O que é método de Monte Carlo?

- O objetivo do método de Monte Carlo é amostrar um processo estocástico e a partir disso, determinar propriedades estatísticas do fenómeno.
- no entanto, como é amostrado os eventos aleatórios?
- A principal sacada do método de Monte Carlo foi utilizar a função inversa de uma CDF (cumulative distribution function) para, a partir de um gerador de números aleatórios, definir o estado do evento gerado.
- Por exemplo, se jogarmos uma moeda 4 vezes, qual é a probabilidade de obtermos 3 caras e 1 coroa?
- podemos definir isso analiticamente pelo seguinte processo (distribuição binomial):

$$P(3\text{caras}) = \binom{4}{3} \frac{1}{2}^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{4} \quad (18)$$

O que é método de Monte Carlo?

- O objetivo do método de Monte Carlo é amostrar um processo estocástico e a partir disso, determinar propriedades estatísticas do fenómeno.
- no entanto, como é amostrado os eventos aleatórios?
- A principal sacada do método de Monte Carlo foi utilizar a função inversa de uma CDF (cumulative distribution function) para, a partir de um gerador de números aleatórios, definir o estado do evento gerado.
- Por exemplo, se jogarmos uma moeda 4 vezes, qual é a probabilidade de obtermos 3 caras e 1 coroa?
- podemos definir isso analiticamente pelo seguinte processo (distribuição binomial):

$$P(3\text{caras}) = \binom{4}{3} \frac{1}{2}^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{4} \quad (18)$$

O que é método de Monte Carlo?

- O objetivo do método de Monte Carlo é amostrar um processo estocástico e a partir disso, determinar propriedades estatísticas do fenómeno.
- no entanto, como é amostrado os eventos aleatórios?
- A principal sacada do método de Monte Carlo foi utilizar a função inversa de uma CDF (cumulative distribution function) para, a partir de um gerador de números aleatórios, definir o estado do evento gerado.
- Por exemplo, se jogarmos uma moeda 4 vezes, qual é a probabilidade de obtermos 3 caras e 1 coroa?
- podemos definir isso analiticamente pelo seguinte processo (distribuição binomial):

$$P(3\text{caras}) = \binom{4}{3} \frac{1}{2}^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{4} \quad (18)$$

Simulação probabilidade Cara ou Coroa

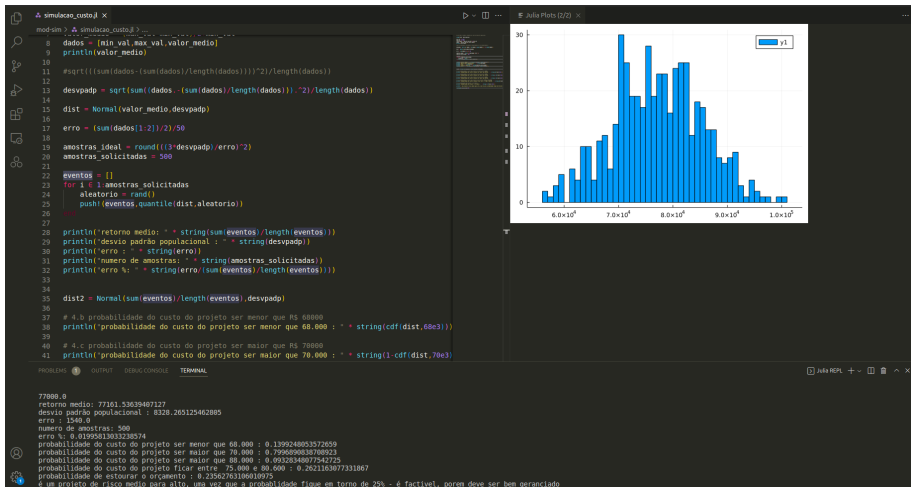
```
julia> begin
tentativas = 10000
sucesso = 0

for i in 1:tentativas
    if round(rand())+round(rand())+round(rand())+round(rand())==3
        sucesso += 1
    end
end

println("tentativas: " * string(tentativas))
println("sucesso: " * string(sucesso))
end

tentativas: 10000
sucesso: 2491
```

Exemplo: Monte Carlo para análise de custo



Automatos Celulares

Definição de Automatos Celulares

- Definindo a partir de um espaço discreto Ω , um reticulado de células de dimensões n .
- Realiza simulação em tempos discretos, calculado o **estado** de cada célula em cada passo no tempo n .
- Deve ser definido um conjunto discreto de estados (S) possíveis por célula.
- Deve ser definido uma **regra de evolução** Φ que define como ocorre a dinâmica do estado das células, na vizinhança \mathcal{N}
- a atualização do estado das células ocorre **paralelamente!**.
- Então para definir completamente um automato celular precisamos da seguinte tupla:

$$\langle \Omega, S, \mathcal{N}, \Phi \rangle \quad (19)$$

Definição de Automatos Celulares

- Definindo a partir de um espaço discreto Ω , um reticulado de células de dimensões n .
- Realiza simulação em tempos discretos, calculado o **estado** de cada célula em cada passo no tempo n .
- Deve ser definido um conjunto discreto de estados (S) possíveis por célula.
- Deve ser definido uma **regra de evolução** Φ que define como ocorre a dinâmica do estado das células, na vizinhança \mathcal{N}
- a atualização do estado das células ocorre **paralelamente!**.
- Então para definir completamente um automato celular precisamos da seguinte tupla:

$$\langle \Omega, S, \mathcal{N}, \Phi \rangle \quad (19)$$

Definição de Automatos Celulares

- Definindo a partir de um espaço discreto Ω , um reticulado de células de dimensões n .
- Realiza simulação em tempos discretos, calculado o **estado** de cada célula em cada passo no tempo n .
- Deve ser definido um conjunto discreto de estados (S) possíveis por célula.
- Deve ser definido uma **regra de evolução** Φ que define como ocorre a dinâmica do estado das células, na vizinhança \mathcal{N}
- a atualização do estado das células ocorre **paralelamente!**.
- Então para definir completamente um automato celular precisamos da seguinte tupla:

$$\langle \Omega, S, \mathcal{N}, \Phi \rangle \quad (19)$$

Definição de Automatos Celulares

- Definindo a partir de um espaço discreto Ω , um reticulado de células de dimensões n .
- Realiza simulação em tempos discretos, calculado o **estado** de cada célula em cada passo no tempo n .
- Deve ser definido um conjunto discreto de estados (S) possíveis por célula.
- Deve ser definido uma **regra de evolução** Φ que define como ocorre a dinâmica do estado das células, na vizinhança \mathcal{N}
- a atualização do estado das células ocorre **paralelamente!**.
- Então para definir completamente um automato celular precisamos da seguinte tupla:

$$\langle \Omega, S, \mathcal{N}, \Phi \rangle \quad (19)$$

Definição de Automatos Celulares

- Definindo a partir de um espaço discreto Ω , um reticulado de células de dimensões n .
- Realiza simulação em tempos discretos, calculado o **estado** de cada célula em cada passo no tempo n .
- Deve ser definido um conjunto discreto de estados (S) possíveis por célula.
- Deve ser definido uma **regra de evolução** Φ que define como ocorre a dinâmica do estado das células, na vizinhança \mathcal{N}
- a atualização do estado das células ocorre **paralelamente!**.
- Então para definir completamente um automato celular precisamos da seguinte tupla:

$$\langle \Omega, S, \mathcal{N}, \Phi \rangle \quad (19)$$

Definição de Automatos Celulares

- Definindo a partir de um espaço discreto Ω , um reticulado de células de dimensões n .
- Realiza simulação em tempos discretos, calculado o **estado** de cada célula em cada passo no tempo n .
- Deve ser definido um conjunto discreto de estados (S) possíveis por célula.
- Deve ser definido uma **regra de evolução** Φ que define como ocorre a dinâmica do estado das células, na vizinhança \mathcal{N}
- a atualização do estado das células ocorre **paralelamente!**.
- Então para definir completamente um automato celular precisamos da seguinte tupla:

$$\langle \Omega, S, \mathcal{N}, \Phi \rangle \quad (19)$$

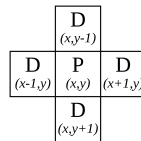


Figure: Von Neumann \mathcal{N}

- Vizinhança de Von Neumann;
- Vizinhança de Moore;

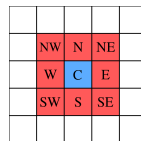


Figure: Moore \mathcal{M}

Exemplo: Jogo da Vida de Conway

Um exemplo classico de um automato celular é o *Conway's game of life*, onde cada célula tem 2 estados, ou seja $S = \langle \text{vivo}, \text{morto} \rangle$;

O espaço Ω é um **reticulado infinito 2D**.

Poder ser aplicado tanto em Neumann \mathcal{N} ou Moore \mathcal{N} .

e a regra de evolução Φ é definida por:

- qualquer célula com menos de 2 vizinhos vivos **morre** (subpopulação);
- qualquer célula com 2 ou mais vizinho vivos **vive** na proxima geração;
- qualquer célula viva com mais de 3 vizinhos vivos **morre** (sobrepopulação);
- qualquer célula morta com exatamente 3 vizinhos vira uma célula **viva** (reprodução);

GIF do jogo da vida...

Simulação de eventos discretos

Simulação de Eventos Discretos

- Contrasta com simulações *time-driven*;
- Deve existir **eventos no tempo** que causam alterações significantes no comportamento do sistema;
- O sistema é simulado por **saltos entre eventos** no tempo.

Simulação de Eventos Discretos

- Contrasta com simulações *time-driven*;
- Deve existir **eventos no tempo** que causam alterações significantes no comportamento do sistema;
- O sistema é simulado por **saltos entre eventos** no tempo.

- Contrasta com simulações *time-driven*;
- Deve existir **eventos no tempo** que causam alterações significantes no comportamento do sistema;
- O sistema é simulado por **saltos entre eventos** no tempo.

Requisitos para executar uma DES

- deve ser possível **calcular analiticamente** o estado do sistema, em qualquer valor no tempo, entre dois eventos.
- Os eventos devem ocorrer em uma posição no tempo $t \in \mathbb{R}^+$.
- Apenas 1 evento pode ocorrer de cada vez.

Requisitos para executar uma DES

- deve ser possível **calcular analiticamente** o estado do sistema, em qualquer valor no tempo, entre dois eventos.
- Os eventos devem ocorrer em uma posição no tempo $t \in \mathbb{R}^+$.
- Apenas 1 evento pode ocorrer de cada vez.

Requisitos para executar uma DES

- deve ser possível **calcular analiticamente** o estado do sistema, em qualquer valor no tempo, entre dois eventos.
- Os eventos devem ocorrer em uma posição no tempo $t \in \mathbb{R}^+$.
- Apenas 1 evento pode ocorrer de cada vez.

Descrição de uma simulação por eventos discretos

- O sistema é composto de varias entidades i , que representam os *passos* da simulação.
- Cada passo é descrito pelo seu conjunto de estados ($s_i(t)$).
- Onde $S(t)$ é o conjunto $\{s_i(t)\}$ no instante de tempo t .

Descrição de uma simulação por eventos discretos

- O sistema é composto de varias entidades i , que representam os *passos* da simulação.
- Cada passo é descrito pelo seu conjunto de estados ($s_i(t)$).
- Onde $S(t)$ é o conjunto $\{s_i(t)\}$ no instante de tempo t .

Descrição de uma simulação por eventos discretos

- O sistema é composto de varias entidades i , que representam os *passos* da simulação.
- Cada passo é descrito pelo seu conjunto de estados ($s_i(t)$).
- Onde $S(t)$ é o conjunto $\{s_i(t)\}$ no instante de tempo t .

- Cada evento j é associado com uma ação a_j .
- Cada ação a_j muda o estado do sistema:

$$a_j : S(t_i) \rightarrow S(t_{i+1}) \quad (20)$$

- O evento é a **causa**, a ação é o **efeito**.

- Cada evento j é associado com uma ação a_j .
- Cada ação a_j muda o estado do sistema:

$$a_j : S(t_i) \rightarrow S(t_{i+1}) \quad (20)$$

- O evento é a **causa**, a ação é o **efeito**.

- Cada evento j é associado com uma ação a_j .
- Cada ação a_j muda o estado do sistema:

$$a_j : S(t_i) \rightarrow S(t_{i+1}) \quad (20)$$

- O evento é a **causa**, a ação é o **efeito**.

Elementos Finitos

Método dos elementos finitos

- Embora o método dos elementos finitos seja um método numérico para solução de PDE, ele é amplamente utilizado para simulação fenômenos físicos na física e na engenharia.
- A principal vantagem do método dos elementos finitos é a possibilidade de solução numérica para PDEs que descrevem a dinâmica espaço-temporal em geometrias complexas. problemas que dificilmente possuem solução analítica.

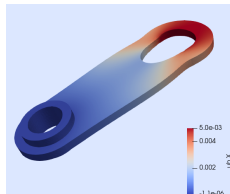


Figure: Elasticidade Linear

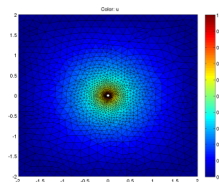


Figure: Campo Elétrico

Método dos elementos finitos

- Embora o método dos elementos finitos seja um método numérico para solução de PDE, ele é amplamente utilizado para simulação fenômenos físicos na física e na engenharia.
- A principal vantagem do método dos elementos finitos é a possibilidade de solução numérica para PDEs que descrevem a dinâmica espaço-temporal em geometrias complexas. problemas que dificilmente possuem solução analítica.

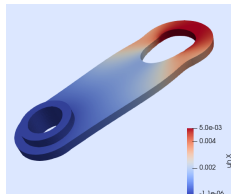


Figure: Elasticidade Linear

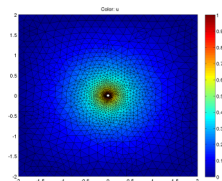


Figure: Campo Elétrico

- O **metodo dos elementos finitos** consiste na criação de uma **malha** que representa a geometria do espaço onde o campo escalar ou vetorial ocorre. esse passo é conhecido como **discretização do domínio** é comum para metodos numéricos.
- O proximo passo é aproximação da solução por uma **interpolação polinomial** em cada elemento.
- Definição de matrizes compostas das **interpolações polinomiais** para representar o sistema global para o dominio de solução.
- Aplicar algoritmo de solução do sistema global. (variais opções disponiveis), mas normalmente é utilizado livrarias de algebra linear de **HPC** como **LAPACK** e **BLAS**.

Exemplos: Elementos finitos

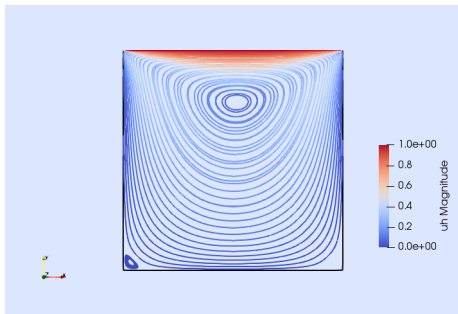


Figure: Navier-stokes para fluídos incompressíveis

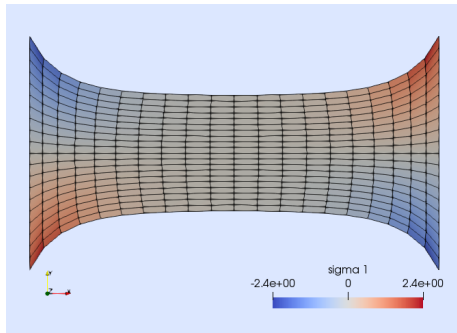


Figure: Deformação de material hiperelástico