

Aprendizaje Supervisado: Regresión Logística.

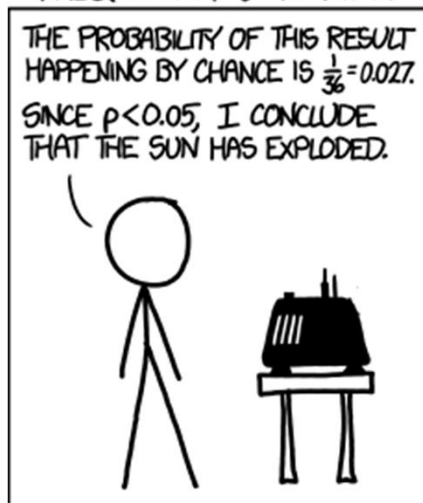
Agenda

- **Regresión Logística.**
 - Odds/Log odds
 - ¿Porque no regresión lineal?
 - Derivación de la función

DID THE SUN JUST EXPLODE?
(IT'S NIGHT, SO WE'RE NOT SURE.)



FREQUENTIST STATISTICIAN:



BAYESIAN STATISTICIAN:



H_0 : M miente
 H_A : M No miente

$P(S \text{ explotó} | M \text{ si o no}) \approx 0$

Antecedentes: Odds (Momios)

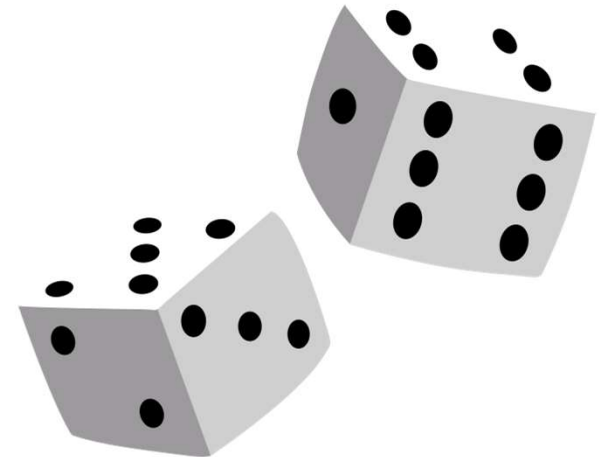
En algunos contextos Odds = Probability = Likelihood, en probabilidad **NO**.
En probabilidad nos referimos a “POSIBILIDADES”.

- La probabilidad de un evento como una proporción $\frac{\#Eventos}{Total}$
- La palabra “odds” se usa para representar la probabilidad de (POSIBILIDAD) un evento como probabilidades relativas . Es decir, la proporción de probabilidad de que un evento ocurra respecto a la probabilidad de que no ocurra.

Otros Eventos : $\# Eventos$

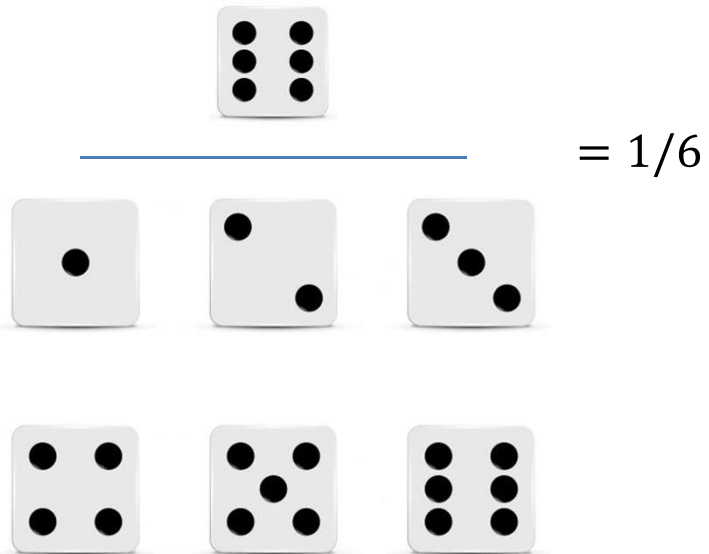
- Ej: La probabilidad de que en un dado justo caiga 6:
 - a) $1/6$
 - b) $5:1$
 - b.1) $(5/6) : (1/6)$

https://en.wikipedia.org/wiki/Odds#Mathematical_relations

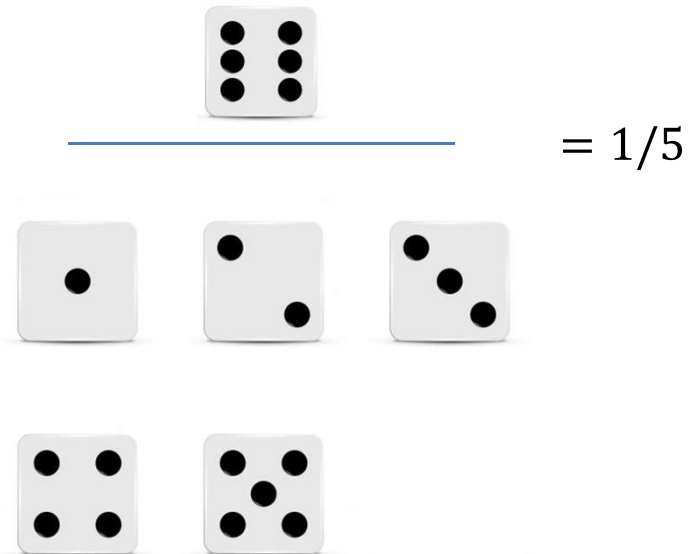


Ejemplo: caer un 6

Probabilidad

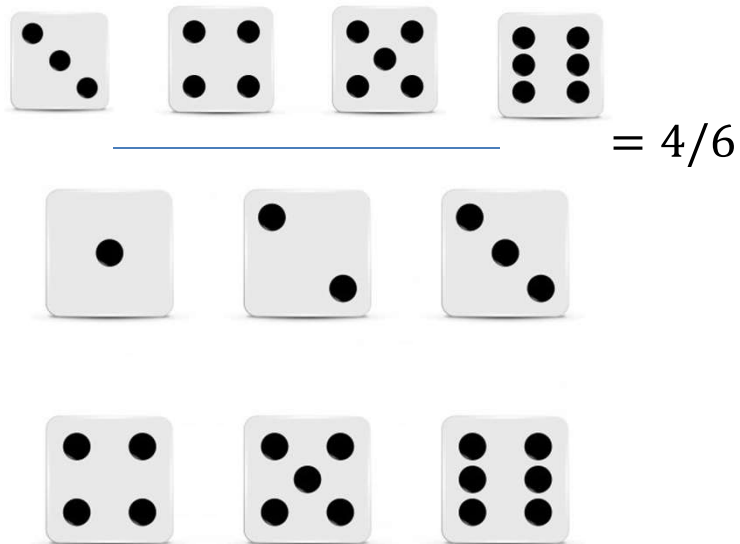


Odds

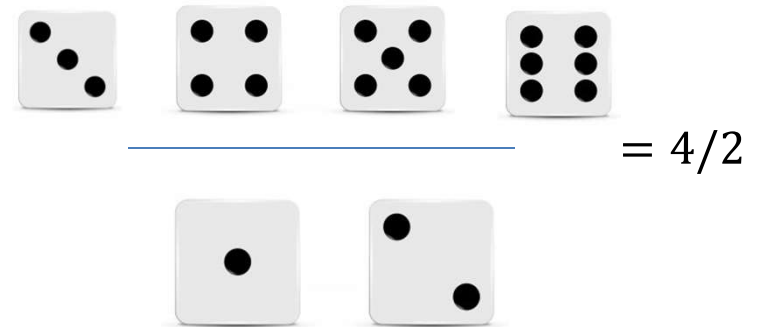


Ejemplo: caer un 3 o 4 o 5 o 6

Probabilidad



Odds



De forma general, la diferencia entre probabilidad y mómios es

Probabilidad

La proporción de veces que SI SUCEDÉ un evento

TOTAL de eventos

Odds

La proporción de veces que SI SUCEDÉ un evento

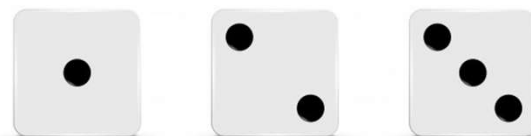
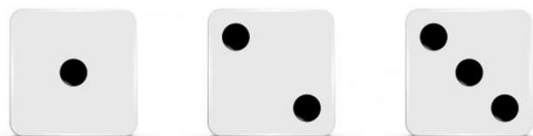
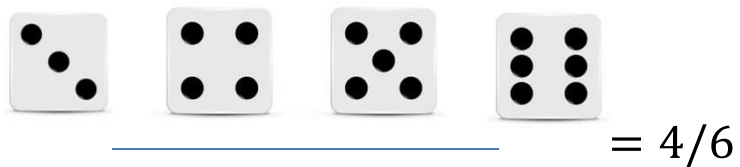
La proporción de que NO SUCEDÉ un evento

Calcular los Odds a partir de probabilidades

La **probabilidad** de que SI SUCEDA un evento

$$= \frac{4}{\frac{6}{2}} = 2 = \frac{p}{1-p}$$

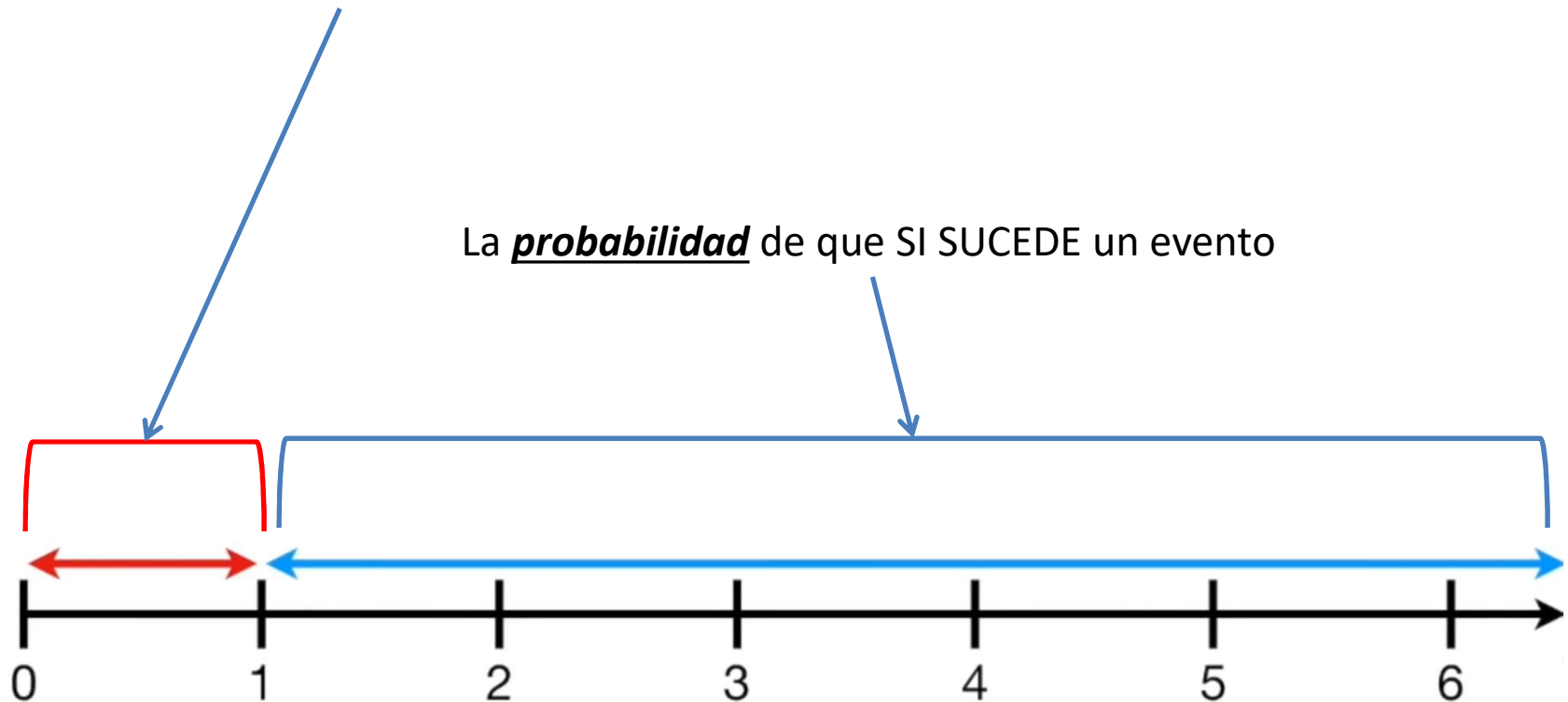
La **probabilidad** de que NO SUCEDA un evento



¿Cuál es el rango de valores de los Odds?

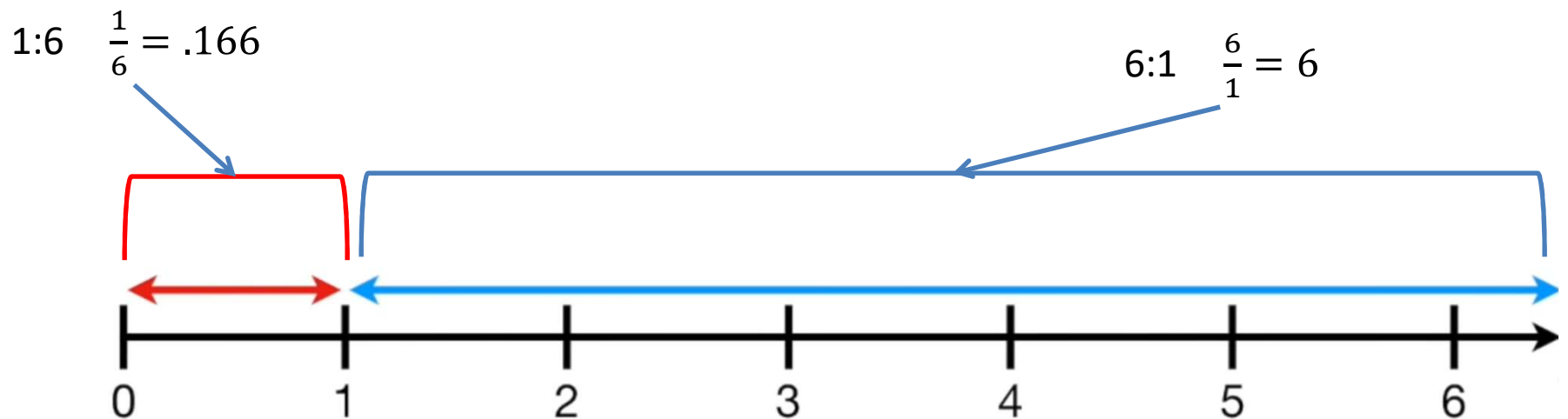
La probabilidad de que NO SUCEDA un evento

La probabilidad de que SI SUCEDA un evento



¿Cómo comparamos valores?

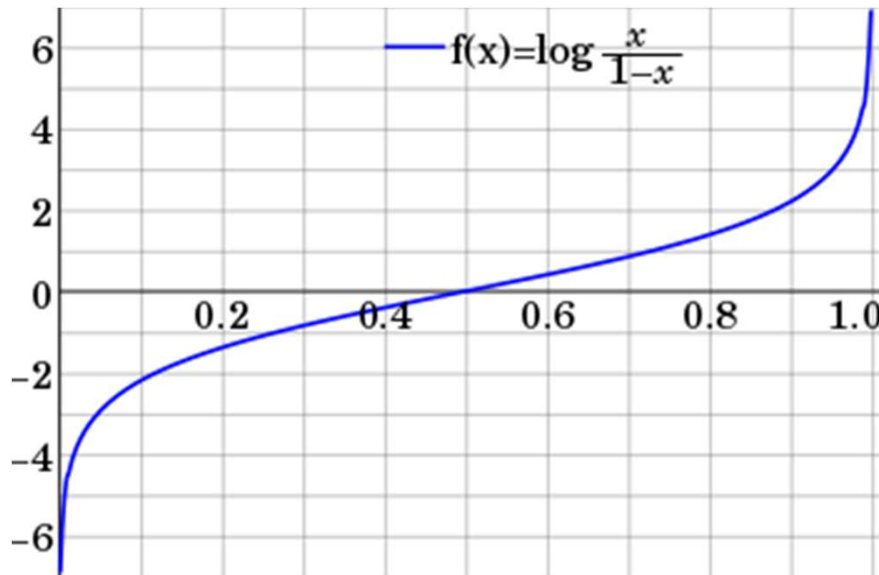
Supongamos, que estoy apostando en un juego de azar, y los odds de ganar son:



Antecedentes:

Log Odds

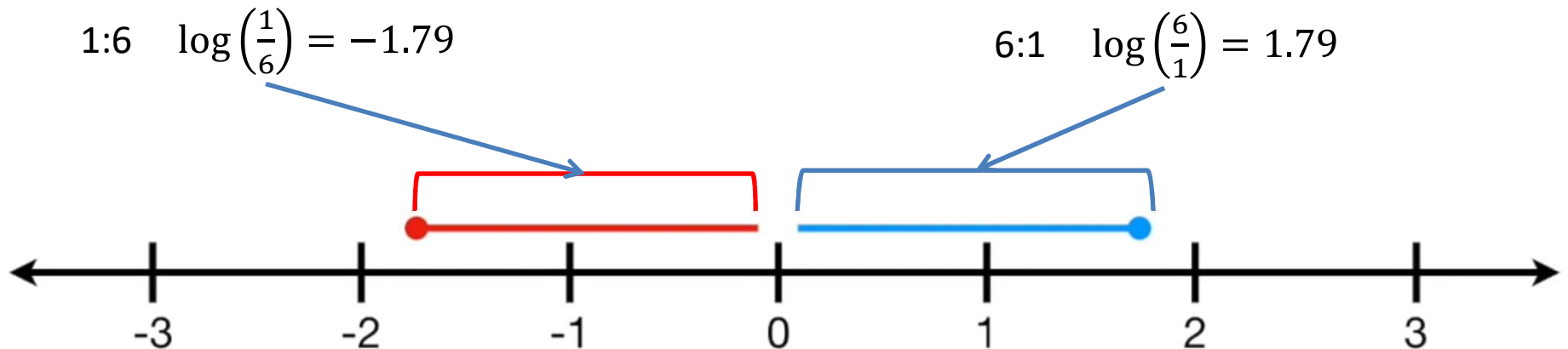
- El logaritmo de momios...
- Alternativa para expresar probabilidades simplificando el proceso de actualización con nueva evidencia
- Logit
- Función inversa de la función sigmoideal.



$$\text{logit}(P(A)) = \log \left(\frac{P(A)}{P(\neg A)} \right)$$
$$\text{logit}(P(A)) \in (-\infty, \infty)$$

Comparar las “posibilidades” es más fácil usando Log Odds

Supongamos, que estoy apostando en un juego de azar, y los odds de ganar son:



Antecedentes:

Log Odds

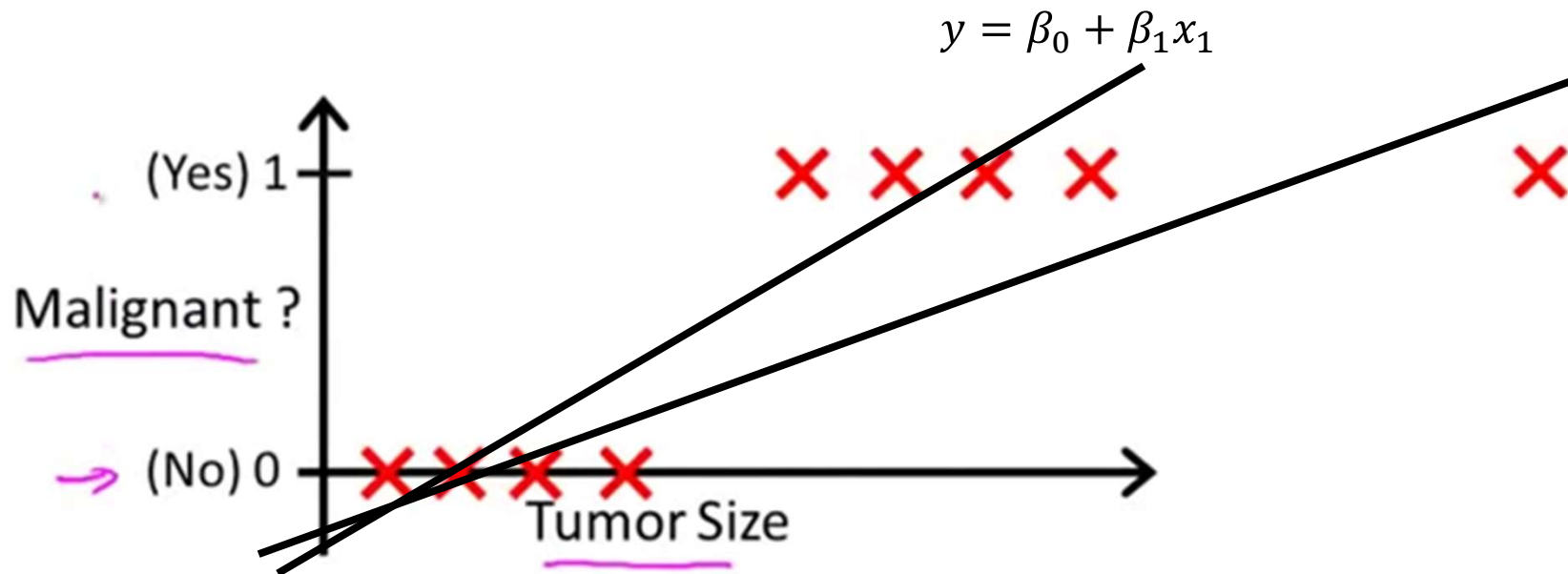
La función logística de cualquier número α esta dado por el logit inverso:

$$\text{logit}(\alpha) = \log\left(\frac{\alpha}{\neg\alpha}\right) = \log(\alpha) - \log(\neg\alpha) \rightarrow$$

...

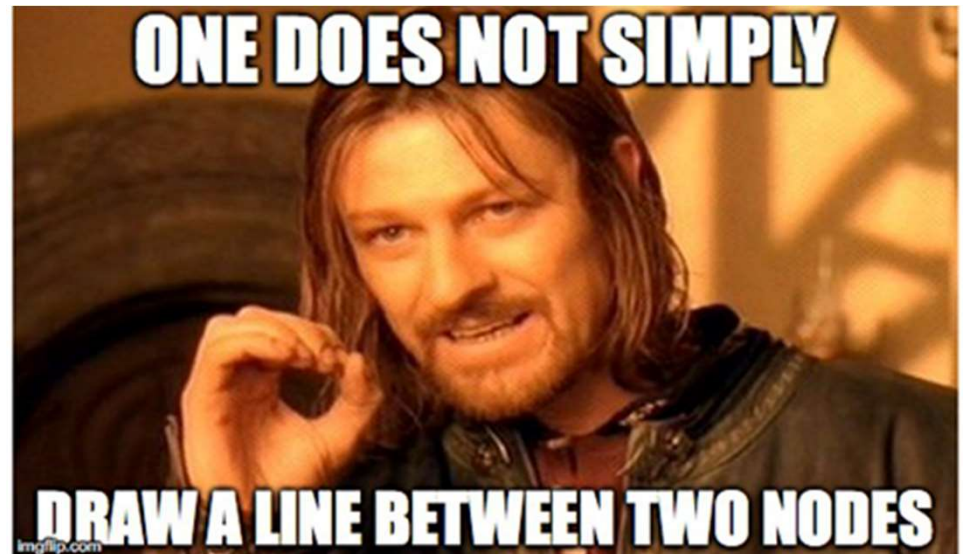
...

$$\text{logit}^{-1}(\alpha) = \text{sigmoid}(\alpha) = \frac{1}{1 + \exp(-\alpha)} = \frac{\exp(\alpha)}{\exp(\alpha) + 1}$$



Pregunta:

- a) ¿Qué pasa con el modelo y su error?
- b) ¿Cómo son los valores devueltos por el modelo?



Regresión Logística

↳ Familia de Métodos

Modelos Lineales Generalizados
(GLM)

↳ 1972 Nelder and Wedderburn

↳ Extensión de la MLR a
problemas \neq Regresión

↳ La Regresión Logística es un caso
especial de MLR

GLM

$$g(E(y)) = \alpha + \beta x_1 + \gamma x_2$$

$g(\cdot)$ Función ligada

$E(\cdot)$ Función de Valor Esperado

El valor esperado de una variable aleatoria es su

MEDIA, a continuación se muestra el cálculo

a) discreta y b) continua:

$$a) E[h(x)] = \sum_x h(x) f(x) \leftarrow h(x) \text{ en una variable aleatoria}$$

$$b) E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Ejemplo:

1000 clientes

Necesitamos predecir la probabilidad.

clientes comprar / no-comprar

$$y \in \left\{ \begin{array}{l} 0 - \text{no-compra} \\ 1 - \text{compra} \end{array} \right\}$$

a) Empecemos por plantear una regresión lineal

con $y \rightarrow g(y)$

$$g(y) = \beta_0 + \beta_1 (\text{age}) \quad \textcircled{a}$$

En Reg. Logística se busca:

- Estimar $P(\cdot)$ del resultado de y

Para ello $g(\cdot)$ requiere 2 cosas:

- i) probabilidad de Éxito (Compra)
- ii) ✓ de Falla (No-Compra)

Estas probabilidades deben satisfacer:

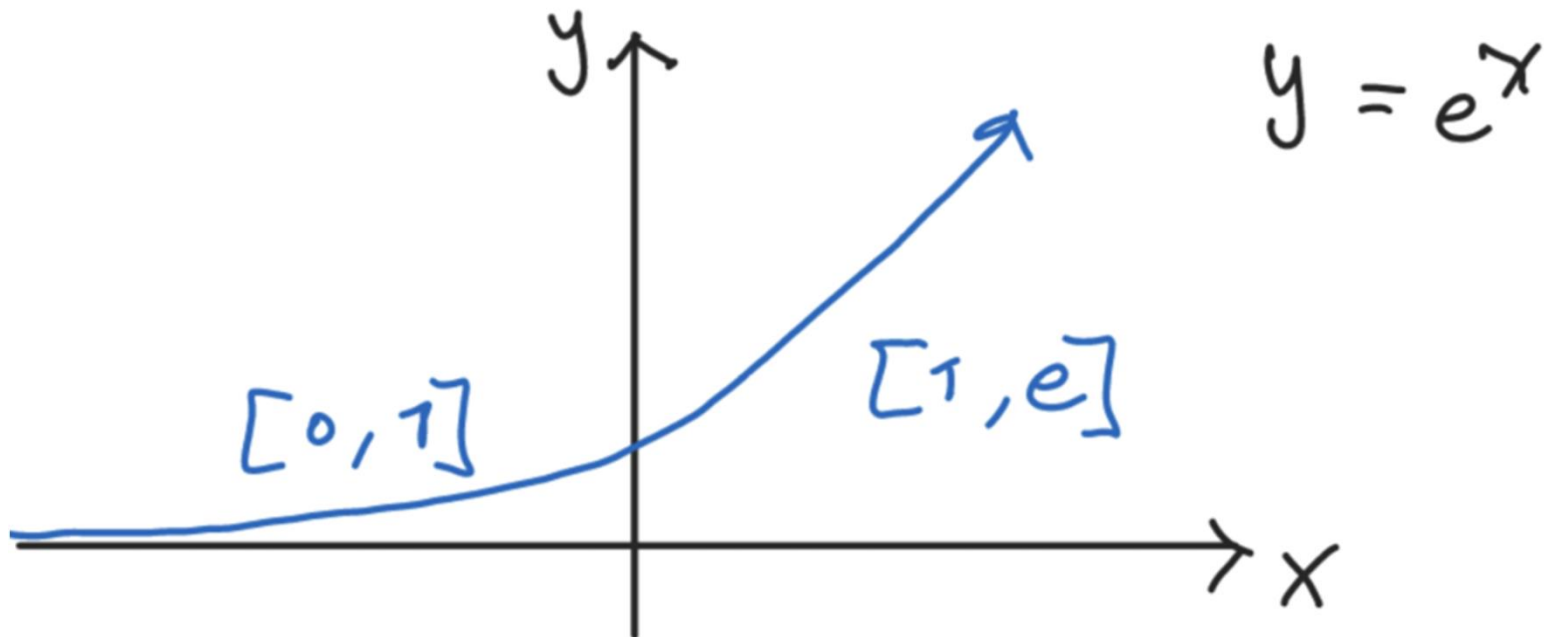
$$1. P(\cdot) \geq 0$$

$$2. P(a) + P(b) \leq 1$$

Debido a estas condiciones ($Prob \geq 0$) expresaremos la regresión lineal como una función exponencial

¿Por qué?

Para cualquier valor de la pendiente m
y peso de la var. independiente el valor
será **POSITIVO** ✓



Para facilitar la notación $p = g(\cdot)$

$$p = e^{(\beta_0 + \beta_1(\text{age}))} \quad \textcircled{b}$$

Para garantizar que $P \leq 1$

$$p = \frac{e^{(\beta_0 + \beta_1(\text{age}))}}{e^{(\beta_0 + \beta_1(\text{age}))} + 1} \quad \textcircled{c}$$

Recordemos que la función liga requiere la probabilidad:

- a) De **ÉXITO**
- b) De **FALLA**

De acuerdo a la ecuación ©,
la probabilidad de ÉXITO se expresa:

$$p = \frac{e^y}{e^y + 1}$$

↑
Función LOGIT

en este caso p es
la probabilidad de
ÉXITO

Entonces para $p(\text{FALLA}) = q$

$$q = 1 - p = 1 - \left(\frac{e^y}{e^y + 1} \right)$$

Si dividimos p/q

$$\frac{p}{q} = \frac{\frac{e^y}{e^y + 1}}{1 - \frac{e^y}{e^y + 1}} = \frac{\frac{e^y}{e^y + 1}}{\frac{e^y + 1 - e^y}{e^y + 1}} = \left(\frac{\frac{e^y}{e^y + 1}}{\frac{1}{e^y + 1}} \right)$$

$$= \frac{e^{2y} + e^y}{e^y + 1} = \frac{e^y (e^y + 1)}{e^y + 1} = e^y$$

Entonces si p/q

$$p/q = \boxed{\frac{p}{1-p} = e^y}$$

$$\rightarrow \log\left(\frac{p}{1-p}\right) = y$$

Función Log!!!

Pregunta: $\log\left(\frac{p}{1-p}\right)$ es lineal? NO

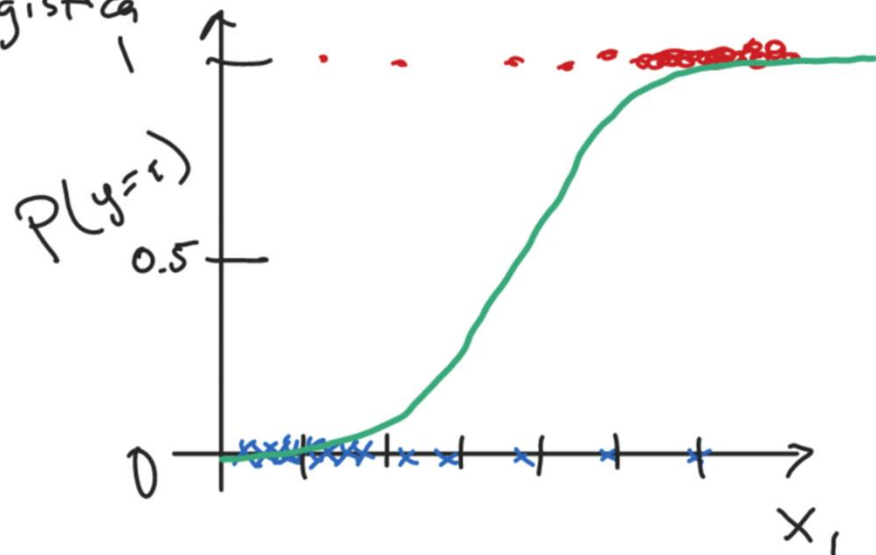
Una asociación NO-LINEAL con un modelo
Lineal

El modelo
entonces queda:

$$\log\left(\frac{p}{1-p}\right) = \beta_0 + \beta_1 X_1$$

log - odds!!

• Una gráfica típica de la regresión logística



• Comentarios del Modelo:

1. Cuando $\log\left(\frac{p}{1-p}\right) > 0$

↳ la probabilidad de **EXITO** es $> 50\%$.