

Musculation



Didier Müller, août 2013

www.nymphomath.ch

Table des matières

1. Ensembles

1.1. Définitions.....	1
1.2. Opérations sur les ensembles.....	2
1.3. Ce qu'il faut absolument savoir.....	4

2. Fractions et pourcentages

2.1. Définitions.....	5
2.2. Calcul avec les fractions.....	7
2.3. De la notation décimale vers la notation fractionnaire.....	9
2.4. Les fractions dans la vie courante.....	10
2.5. Pourcentages.....	10
2.6. Ce qu'il faut absolument savoir.....	12

3. Calcul littéral

3.1. Monômes.....	13
3.2. Opérations sur les monômes.....	13
3.3. Polynômes.....	14
3.4. Opérations sur les polynômes.....	15
3.5. Factorisation.....	15
3.6. Fractions littérales.....	16
3.7. Calculatrice.....	17
3.8. Le langage algébrique.....	18
3.9. Règles de manipulation des égalités.....	18
3.10. Ce qu'il faut absolument savoir.....	19

4. Résolution d'équations

1.1. Équations du premier degré.....	21
1.2. Équations du second degré.....	21
1.3. Équations bicarrées.....	22
1.4. Division de polynômes.....	22
1.5. Résolution d'équations de degré supérieur à 2.....	24
1.6. Équations irrationnelles.....	24
1.7. Où est l'erreur ?.....	25
1.8. Ce qu'il faut absolument savoir.....	25

5. Inéquations

5.1. Définition.....	27
5.2. Intervalles.....	27
5.3. Propriétés des inégalités.....	28
5.4. Méthode générale de résolution.....	29
5.5. Domaines du plan.....	30
5.6. Ce qu'il faut absolument savoir.....	31

6. Les différents types de démonstration

6.1. Démonstration directe.....	33
6.2. Démonstration par l'absurde.....	33
6.3. Démonstration par récurrence ou induction.....	34
6.4. « Preuves sans mots ».....	36

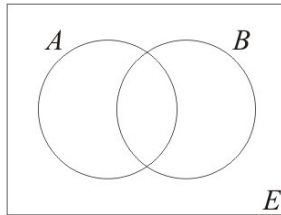
7. Poser et résoudre un problème

7.1. Comprendre le problème.....	37
7.2. Concevoir un plan.....	37
7.3. Mettre le plan à exécution.....	38
7.4. Revenir sur sa solution.....	38

1. Ensembles

1.1. Définitions

Ensembles, éléments et appartenance



Un **ensemble** peut être vu comme une sorte de sac virtuel entourant ses **éléments**, ce que modélisent bien les **diagrammes de Venn**. On distingue typographiquement un ensemble de ses éléments en utilisant une lettre latine majuscule, par exemple « E » ou « A », pour représenter l'ensemble, et des minuscules, telles que « x » ou « n », pour ses éléments.

Les éléments peuvent être de n'importe quelle nature : nombres, points géométriques, droites, fonctions, autres ensembles... On donne donc volontiers des exemples d'ensembles en dehors du monde mathématique. Par exemple : lundi est un élément de l'ensemble des jours de la semaine ; une bibliothèque est un ensemble de livres, etc.

Un même objet peut être élément de plusieurs ensembles : 4 est un élément de l'ensemble des nombres entiers, ainsi que de l'ensemble des nombres pairs (forcément entiers). Ces deux derniers ensembles sont infinis, ils ont une infinité d'éléments.

L'appartenance d'un élément, noté par exemple x , à un ensemble, noté par exemple A , s'écrit : $x \in A$.

Cet énoncé peut se lire : « x appartient à A », ou « x est élément de A », ou « x est dans A », ou encore « A a pour élément x ».

On barre le symbole « appartient » pour indiquer sa négation, la non-appartenance d'un objet à un ensemble : $x \notin A$ signifie « x n'appartient pas à A ».

Un **singleton** est un ensemble ne contenant qu'un élément.

Un sous-ensemble est un ensemble dont chaque élément est aussi contenu dans un autre ensemble. Si A est un sous-ensemble de B , on note $A \subset B$.

Par exemple, si $\text{jours} = \{\text{lundi, mardi, mercredi, jeudi, vendredi, samedi, dimanche}\}$ et $\text{week-end} = \{\text{samedi, dimanche}\}$, alors $\text{week-end} \subset \text{jours}$. Par contre, le *singleton* $\{\text{mardi}\} \not\subset \text{week-end}$.

Ensembles finis

Un ensemble est fini quand on peut compter ses éléments à l'aide d'entiers tous plus petits qu'un entier donné.

Les ensembles finis peuvent être définis **en extension**, par la liste de leurs éléments, et décrits comme tels ; on place la liste des éléments d'un ensemble entre accolades, par exemple $\{2, 3, 5\}$. L'ensemble des jours de la semaine peut être représenté par $\{\text{lundi, mardi, mercredi, jeudi, vendredi, samedi, dimanche}\}$.

Notons que la notation d'un ensemble en extension n'est pas unique : un même ensemble peut être noté en extension de façon différentes, car l'ordre des éléments est sans importance, par exemple $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

Types de nombres

Il existe différents types de nombres. Les nombres les plus familiers sont les entiers naturels : 0, 1, 2, 3, ... éléments de l'ensemble \mathbb{N} , et utilisés pour le dénombrement.

Si les entiers négatifs sont inclus, on obtient l'ensemble des nombres entiers relatifs \mathbb{Z} .

La division d'un entier relatif par un entier relatif non nul forme un nombre rationnel. L'ensemble de tous les nombres rationnels est noté \mathbb{Q} .

Si, dans l'ensemble, outre les éléments de \mathbb{Q} , on inclut tous les développements décimaux infinis et non périodiques, on obtient l'ensemble des nombres réels, noté \mathbb{R} .

Tous les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont appelés nombres irrationnels.

Nous avons donc une hiérarchie d'ensembles : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Définition d'un ensemble en compréhension

(la barre verticale se lit « tel que »)

Un ensemble peut être défini **en compréhension**, c'est-à-dire qu'on le définit par une propriété caractéristique parmi les éléments d'un ensemble donné. Ainsi l'ensemble des entiers naturels pairs est clairement défini par compréhension, par la propriété « être pair » parmi les entiers naturels. On écrira :

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ pairs}\} \quad \text{ou} \quad \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$$

Pour décrire l'ensemble des nombres entiers plus grands que 10, on écrira :

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x > 10\}$$

Autres notations

Il existe d'autres notations commodes, en particulier pour les ensembles de nombres, et plus généralement pour les ensembles totalement ordonnés. On peut utiliser des points de suspension pour des ensembles de cardinalité infinie, ou finie mais non déterminée.

Par exemple, l'ensemble des entiers naturels peut se noter par : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. S'il est clair par ailleurs que n désigne un entier naturel, $\{1, 2, \dots, n\}$, voire $\{1, \dots, n\}$ désigne en général l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 1 et inférieurs ou égaux à n . De même, on peut écrire $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, ou encore $\{-n, -n+1, \dots, n-1, n\}$.

Quand il y a un procédé itératif simple pour engendrer les éléments de l'ensemble, on peut se risquer à des notations comme $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$ pour l'ensemble des entiers naturels pairs, etc. On peut aussi utiliser ces notations pour des ensembles ayant « beaucoup » d'éléments : $\{1, 2, \dots, 1000\}$ plutôt que d'écrire les mille premiers nombres entiers non nuls, ou encore $\{3, 5, \dots, 21\}$ à la place de $\{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21\}$.

Il existe aussi des d'autres notations spéciales :

- * signifie « sans le 0 », par exemple \mathbb{R}^*
- + signifie « plus grand que 0, (0 compris) », par exemple \mathbb{R}_+
- signifie « plus petit que 0, (0 compris) » \mathbb{R}_-

On peut aussi combiner ces symboles : \mathbb{R}_+^*

Exercice 1.1

Écrivez en extension les ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\} \quad B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 10\} \quad C = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } x < 5\}$$

$$D = \{3x \mid x \in \mathbb{Z}\} \quad E = \left\{\frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Exercice 1.2

Écrivez en compréhension les ensembles suivants :

$$A = \{1, 3, 5, 7, \dots\} \quad B = \{8, 12, 16, \dots, 80\} \quad C = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$D = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\} \quad E = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\} \quad F = \{3, 9, 15, \dots, 33\}$$

1.2. Opérations sur les ensembles

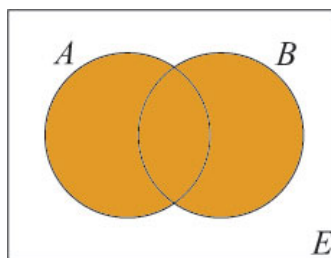
Union

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

Pour fixer les idées, on imaginera que E est une classe, A l'ensemble des filles et B l'ensemble des élèves portant des lunettes.

$$A \cup B = \{e \in E \mid e \in A \text{ ou } e \in B\}$$

L'union correspond à « ou » :
fille ou avec lunettes



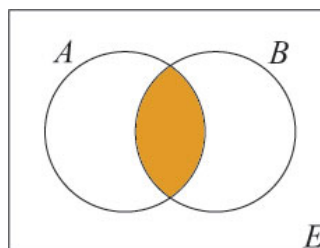
Dans notre exemple, l'ensemble final est composé de toutes les filles, plus les garçons avec des lunettes.

Intersection

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

$$A \cap B = \{e \in E \mid e \in A \text{ et } e \in B\}$$

L'intersection correspond à
« et » : fille et avec lunettes



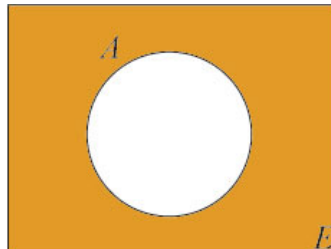
Dans notre exemple, l'ensemble final est composé des filles portant des lunettes.

Complémentaire

Soit A un sous-ensemble d'un ensemble E .

$$C_E A = \{e \in E \mid e \notin A\}$$

Le complémentaire correspond à
« non » : non fille



Dans notre exemple, l'ensemble final est composé de tous les garçons.

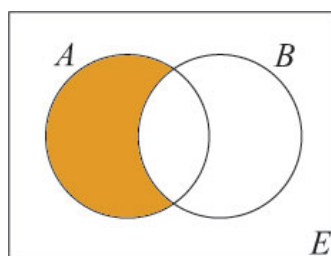
Quand il n'y a pas d'équivoque possible, on écrit aussi \bar{A} .

Différence

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

$$A \setminus B = \{e \in E \mid e \in A \text{ et } e \notin B\}$$

La différence correspond à
« moins » : fille moins avec
lunettes



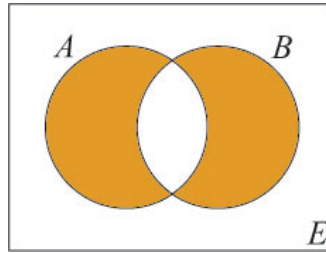
Dans notre exemple, l'ensemble final est composé de toutes les filles sans lunettes.

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

$$A \Delta B = \{e \in E \mid e \in A \text{ ou (exclusif) } e \in B\}$$

Différence symétrique

La différence symétrique
correspond à « ou exclusif » :
fille ou avec lunettes, mais pas
les deux.

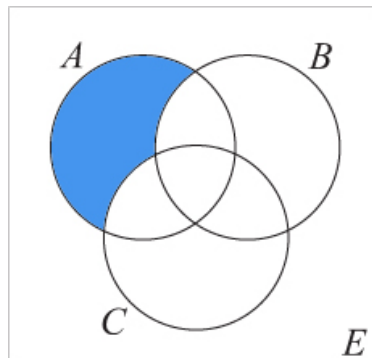


Dans notre exemple, l'ensemble final est composé des filles sans lunettes, plus les garçons avec des lunettes.

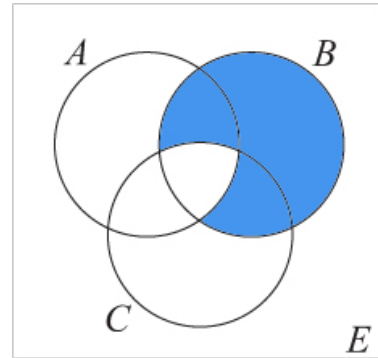
Exercice 1.3

Décrivez les parties bleues des ensembles ci-dessous à l'aide des opérations vues ci-dessus (il y a plusieurs solutions possibles).

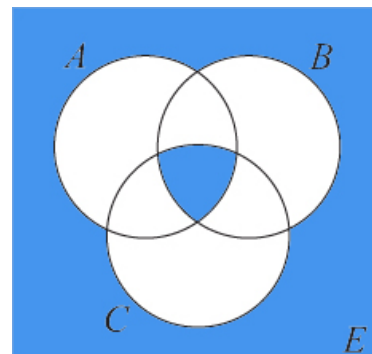
a.



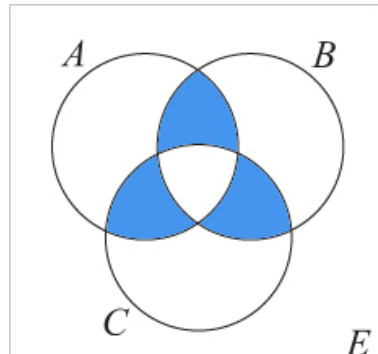
b.



c.



d.



Exercice 1.4

Soient A , B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E . Représentez les ensembles suivants avec des diagrammes de Venn :

a. $(A \cap B) \cup C$

b. $A \cap (B \cup C)$

c. $(C_E A) \cap B$

d. $C_E (A \cap B)$

e. $(A \setminus B) \cap C$

f. $A \setminus (B \cap C)$

g. $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

h. $(A \Delta B) \cup C$

1.3. Ce qu'il faut absolument savoir

Notations en extension et en compréhension

☐ ok

Les symboles des ensembles numériques

☐ ok

Les opérations sur les ensembles

☐ ok

2. Fractions et pourcentages

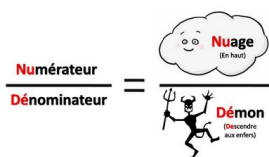
2.1. Définitions

$\frac{9}{8}$ des gens ne comprennent rien aux fractions !

Certaines divisions tombent justes. C'est par exemple le cas de la division $45 \div 18$ qui donne 2.5.

D'autres ne s'arrêtent jamais. C'est ce qui se produit avec $19 \div 3 = 6.33333333...$ Pour que ces dernières aient un résultat, on a créé une nouvelle espèce de nombre : **les fractions**.

Le résultat **exact** de la division $19 \div 3$ est le nombre $\frac{19}{3}$. Une valeur **approchée** de cette fraction est 6.333.



Une **fraction** correspond à un nombre, entier ou décimal, écrit sous la forme d'une division de deux nombres entiers. La partie au-dessus de la barre de fraction s'appelle le **numérateur**, celle en dessous s'appelle le **dénominateur**.

Exemple :

$\frac{5}{2}$ est une fraction qui correspond au nombre 2.5. Elle se lit « cinq demis ». Le numérateur vaut 5 et le dénominateur 2.

Égalité de fractions

Pour vérifier si deux fractions sont égales, on peut utiliser le **produit en croix**.

Deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égales si $a \cdot d = b \cdot c$

Par exemple, $\frac{5}{2}$ et $\frac{45}{18}$ sont égales, car $5 \cdot 18 = 2 \cdot 45 = 90$.

Exercice 2.1

Les fractions ci-dessous sont-elles égales ?

a. $\frac{7}{4}$ et $\frac{35}{20}$

b. $\frac{14}{11}$ et $\frac{116}{99}$

c. $\frac{14}{19}$ et $\frac{38}{28}$

Amplification

Amplifier une fraction consiste à multiplier le numérateur **ET** le dénominateur par le même nombre.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

Simplification

On peut **simplifier** une fraction si on peut **diviser le numérateur et le dénominateur par un même nombre**, selon la propriété suivante :

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$$

Une fraction simplifiée au maximum est dans sa forme **irréductible**.

Exemple : $\frac{45}{18} = \frac{9 \cdot 5}{2 \cdot 9} = \frac{5}{2}$

$\frac{5}{2}$ est une forme irréductible.

Algorithme d'Euclide

PGDC :

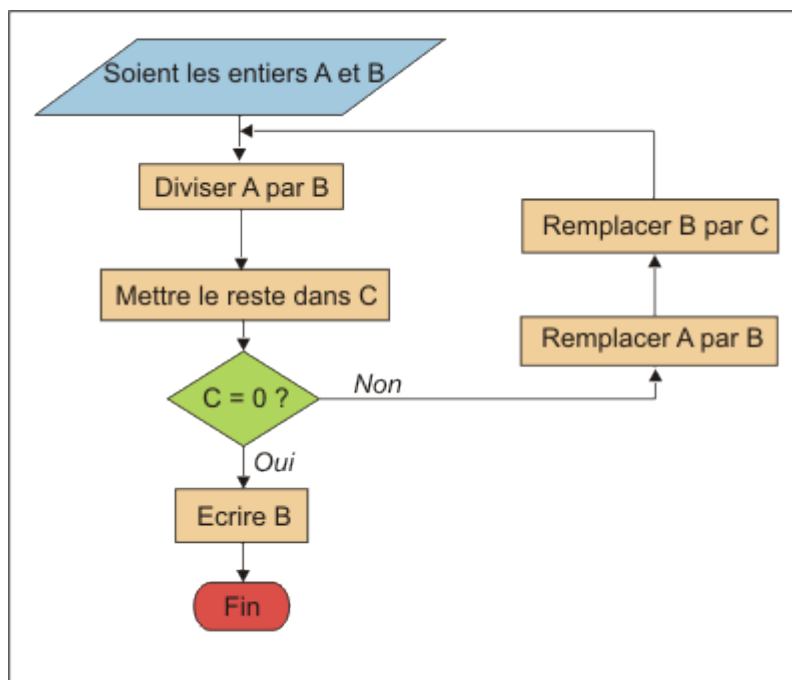
Plus Grand Diviseur Commun



Euclide

(Athènes, -325 -
Alexandrie, -265)

Cette méthode permet de calculer le PGDC de deux nombres A et B ($A > B$).



Exemple : calculons le PGDC(80, 48)

$$80 / 48 = 1 \text{ reste } 32$$

$$48 / 32 = 1 \text{ reste } 16$$

$$32 / 16 = 2 \text{ reste } 0$$

A	B	C	
80	48	32	
48	32	16	
32	<u>16</u>	0	STOP

Donc PGDC(80,48) = 16

Cette méthode peut être utilisée pour simplifier des fractions et les mettre à coup sûr sous forme irréductible.

Exemple : mettons sous forme irréductible la fraction $\frac{715}{546}$

$$715 / 546 = 1 \text{ reste } 169$$

$$546 / 169 = 3 \text{ reste } 39$$

$$169 / 39 = 4 \text{ reste } 13$$

$$39 / 13 = 3 \text{ reste } 0$$

A	B	C	
715	546	169	
546	169	39	
169	39	13	
39	<u>13</u>	0	STOP

Le PGCD(715, 546) est 13. On peut donc écrire $\frac{715}{546} = \frac{55 \cdot 13}{42 \cdot 13} = \frac{55}{42}$.

Exercice 2.2

Mettez les fractions ci-dessous sous forme irréductible :

a. $\frac{105}{45}$

b. $\frac{425}{612}$

c. $\frac{264}{99}$

d. $\frac{377}{403}$

e. $\frac{123}{328}$

f. $\frac{121}{231}$

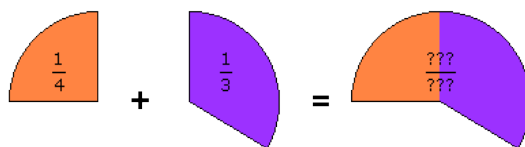
g. $\frac{609}{1305}$

h. $\frac{132}{77}$

2.2. Calcul avec les fractions

Addition et soustraction

Essayons d'additionner $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$. Représentons ces fractions de manière pâtissière :



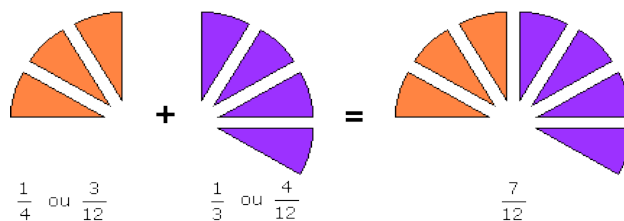
À quelle fraction correspond la part totale ? Les quarts et les tiers ne s'additionnent pas facilement même lorsqu'il s'agit de parts de gâteau ! La seule chose que nous savons faire, c'est additionner deux fractions ayant le même dénominateur.

Nous allons donc mettre les fractions $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$ sur un même dénominateur en les amplifiant de manière adéquate.

Parmi les dénominateurs communs possibles, il y a 12, 24, 36... Choisissons le plus simple d'entre eux : 12.

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{12} \quad \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$$

La situation a donc évolué : au lieu d'additionner des quarts et des tiers, nous allons additionner des douzièmes.



$$\text{Donc : } \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{12} = \frac{3 + 4}{12} = \frac{7}{12}$$

Méthode pour additionner ou soustraire deux fractions :

1. Mettre les fractions au même dénominateur.
2. Transformer les numérateurs de la même façon que l'on a transformé les dénominateurs (en les multipliant par le même nombre).
3. Additionner ou soustraire les numérateurs.

Cette méthode fonctionne aussi quand on veut additionner un entier et une fraction. Il suffit d'écrire l'entier n sous la forme $\frac{n}{1}$ et d'appliquer la méthode ci-dessus.

Exercice 2.3

Effectuez les opérations ci-dessous :

a. $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$

b. $\frac{1}{3} + \frac{5}{6}$

c. $\frac{5}{2} - \frac{7}{3}$

d. $\frac{1}{6} + \frac{3}{4}$

e. $\frac{3}{5} + \frac{3}{2} + \frac{3}{10}$

f. $\frac{2}{7} - \frac{3}{4} + \frac{7}{11}$

g. $2 + \frac{4}{3} + \frac{3}{9}$

h. $\frac{7}{4} + \frac{6}{4} + \frac{5}{3} - \frac{3}{2}$

i. $\frac{-1}{2} - \frac{11}{4} + \frac{7}{8} + \frac{5}{16} - \frac{3}{32} + \frac{7}{64} - \frac{75}{128}$

Multiplication

Pour multiplier une fraction par un nombre, il suffit de multiplier le numérateur de la fraction par ce nombre.

Pour multiplier deux fractions entre elles, il suffit de multiplier les numérateurs et les dénominateurs entre eux, conformément aux différentes règles de multiplication.

Exemple : $\frac{7}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{7 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{42}{20} = \frac{21}{10}$

C'est plus facile de simplifier d'abord !

On aurait aussi pu simplifier avant de multiplier : $\frac{7}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{10}$.

Exercice 2.4

Effectuez les opérations ci-dessous :

a. $\frac{8}{3} \cdot \frac{6}{5}$

b. $6 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{11}{2}$

c. $\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{15}{7}$

d. $\frac{3}{4} \cdot \frac{10}{7} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot 2$

Inverse

L'inverse d'un nombre a est $\frac{1}{a}$.

L'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.

Ne pas confondre l'inverse et l'opposé !

Exemples : l'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$; l'inverse de $\frac{5}{2}$ est $\frac{2}{5}$.

Division

Diviser une fraction par un nombre, c'est multiplier la première fraction par l'inverse de ce nombre.

Exemple : $\frac{1}{3} \div 2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Autre notation : $\frac{\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{6}$

Diviser une fraction par une autre fraction, c'est multiplier la première fraction par l'inverse de la seconde fraction.

Exemple : $\frac{1}{3} \div \frac{7}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{21}$

Autre notation : $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{4}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{21}$

Exercice 2.5

Effectuez les opérations ci-dessous :

a. $\frac{1}{4} \div 3$

b. $\frac{6}{5} \div \frac{8}{3}$

c. $\frac{\frac{8}{11}}{\frac{4}{9}}$

d. $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{12}{5} \cdot \frac{3}{7}}$

Fractions et signes

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} \qquad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$



Remarquez bien que $-\frac{a}{b} \neq \frac{-a}{-b}$!

Par exemple, $-\frac{2}{5} = \frac{-2}{5} = \frac{2}{-5} = -0.4$, mais $\frac{-2}{-5} = \frac{2}{5} = 0.4$!

2.3. De la notation décimale vers la notation fractionnaire

Nombres rationnels

Un nombre **rationnel** est un nombre réel exprimable par le quotient de deux entiers relatifs (appartenant à \mathbb{Z}), avec le dénominateur non nul. Rappelons que l'ensemble des nombres rationnels est noté \mathbb{Q} .

Le développement décimal des nombres rationnels a la particularité d'être **périodique**, c'est-à-dire qu'il existe un suffixe constitué d'une séquence finie de chiffres se répétant continuellement. Cette séquence est appelée « période du développement décimal illimité ».

On verra à l'exercice 2.6 que $0.999\dots = 1$!

Ce développement décimal illimité est unique si on s'interdit de finir par une séquence périodique de 9.

Par convention, on trace une barre horizontale au-dessus de la séquence périodique.

Exemples : $\frac{1}{3} = 0.333333\dots = 0.\overline{3}\dots$

$$\frac{2}{37} = 0.054054\dots = 0.\overline{054}\dots$$

$$\frac{115}{74} = 1.554054\dots = 1.\overline{5540}\dots$$

Il existe une méthode pour trouver la fraction correspondant à un nombre rationnel.

L'idée est de soustraire deux multiples de ce nombre de telle manière que la période disparaisse.

Exemple 1 : $0.222\dots = \frac{?}{?}$

Posons $n = 0.222\dots$. Prenons $10n = 2.222\dots$. On a donc $10n - n = 9n$, mais aussi, $2.222\dots - 0.222\dots = 2$.

Donc $9n = 2$, ce qui signifie que $n = \frac{2}{9}$.

Exemple 2 : $1.795454\dots = \frac{?}{?}$

Posons $n = 1.795454\dots$. Prenons $10'000n = 17'954.5454\dots$ et $100n = 179.5454\dots$. On a donc $10'000n - 100n = 9900n$, mais aussi, $17'954.5454\dots - 179.5454\dots = 17'775$.

Donc $9900n = 17'775$, ce qui signifie que $n = \frac{17'775}{9900} = \frac{79}{44}$.

Exercice 2.6

Écrivez sous forme d'une fraction irréductible les nombres rationnels suivants :

- | | | | |
|------------------|--------------|------------------|----------------|
| a. 0.2828... | b. 4.3232... | c. 0.999... | d. 4.67999... |
| e. 0.23431431... | f. 99.999... | g. 2.52815281... | h. 100.0101... |

Nombres irrationnels

Certains nombres réels ne peuvent pas s'écrire comme quotient de deux entiers. Ces nombres sont dits **irrationnels** et leur écriture décimale ne contient pas de période. Par exemple, π et $\sqrt{2}$ sont irrationnels.

2.4. Les fractions dans la vie courante

Exercice 2.7

Pour acheter une nouvelle photocopieuse, le collège décide de payer les $\frac{3}{4}$ du prix et les parents d'élèves $\frac{1}{5}$ de ce qui reste. Le foyer a prévu de participer pour 20 % du prix.

Tout cela suffira-t-il pour faire cet achat ?

Exercice 2.8

La Sécurité sociale rembourse 55 % des frais médicaux et une mutuelle complète ce remboursement par les $\frac{4}{11}$ de ce que rembourse la Sécurité sociale.

- Quelle fraction des frais médicaux est remboursée par la mutuelle ?
- Finalement, quelle fraction des frais médicaux n'est pas remboursée ?

Exercice 2.9

Aurélien décide de dépenser le contenu de sa tirelire pour acheter des cadeaux de Noël. Elle utilise $\frac{3}{7}$ de sa « fortune » pour acheter un cadeau à Jérôme et $\frac{4}{9}$ pour Charlotte.

- Sans faire les divisions, trouver le cadeau qui coûte le plus cher.
- Quelle fraction de ses économies reste-t-il à Aurélien pour un cadeau à son petit frère ?

2.5. Pourcentages

Définition



Un **pourcentage** est une façon d'exprimer une proportion d'un ensemble. On compare une valeur particulière à une valeur de référence et on cherche à déterminer ce que vaudrait cette valeur particulière si la valeur de référence était ramenée à 100, sachant que les proportions sont respectées.

Ainsi, si, dans une population de 400 personnes (valeur de référence), 56 d'entre elles (valeur particulière) sont blondes, on rencontrerait, si les proportions étaient respectées, dans une population de 100 personnes, 14 personnes blondes.

$$\text{En effet, } \frac{56}{400} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = \frac{56 \cdot 100}{400} = 14.$$

On écrit alors que 14% d'entre elles sont blondes.

Appliquer un pourcentage

Appliquer un pourcentage, c'est retrouver la valeur étudiée, connaissant le pourcentage et la valeur de référence. Cette valeur étudiée se détermine en multipliant la valeur de référence par le nombre décimal associé au pourcentage.

Si une assemblée de 120 personnes compte 15% de femmes, alors il y a 18 femmes, car $120 \cdot 0.15 = 18$.

Le prix hors taxes d'un objet est 120 €. Le taux de TVA est de 5%. Celle-ci s'élève donc à 6 € car $120 \cdot 0.05 = 6$.

Pourcentage d'augmentation et de réduction

En économie et dans les taux d'intérêts, l'étude porte sur des variations en pourcentage, des augmentations ou des réductions. On peut tout à fait décomposer le calcul en deux temps : calcul de l'augmentation ou de la réduction, puis calcul de la valeur finale en effectuant une addition ou une soustraction.

Il est préférable de voir ces augmentations ou ces réductions comme issues de l'application d'un **coefficient multiplicateur**. Seul cet aspect des choses permet de retrouver efficacement une valeur de référence ou d'appliquer des augmentations successives.

Une **augmentation** de t % se traduit par une multiplication par $1 + \frac{t}{100}$.

Une **diminution** de t % se traduit par une multiplication par $1 - \frac{t}{100}$.

Augmenter 35 fois de 2% revient à multiplier par 1.02^{35} , c'est-à-dire 1.99989, soit quasiment par 2. Diminuer 35 fois de 2% revient à multiplier par 0.98^{35} , c'est-à-dire à diviser par 2.028, soit un peu plus de 2.

Retrouver la valeur de référence

Cette valeur de référence se trouve en divisant la valeur étudiée ou la population partielle par le décimal associé au pourcentage.

Dans une assemblée il y a 36 femmes, elles représentent 30% de l'assemblée donc l'assemblée est formée de 120 individus car $\frac{36}{0.3} = 120$.

Pour retrouver la valeur de référence, il suffit de diviser la valeur finale par le coefficient multiplicateur. Après une solde de 15% le prix d'un objet n'est plus que de 34 €, le prix initial de l'objet était donc de 40 € car :

- la réduction correspond à une multiplication par $1 - 0.15 = 0.85$
- $\frac{34}{0.85} = 40$

Pourcentage de pourcentage

On peut être amené à multiplier entre eux des pourcentages. C'est le cas par exemple pour calculer des pourcentages de pourcentage.

Dans une assemblée, il y a 36% de femmes et 25% de ces femmes sont âgées de plus de 50 ans. Il y a donc 9% de femmes âgées de plus de 50 ans, car $\frac{25}{100} \cdot \frac{36}{100} = \frac{9}{100}$.

Dangers et pièges



Pourcentage et point

Quand une population partielle est passée de 10% à 12%, il est délicat de parler de l'augmentation. Une erreur fréquente est de dire que la population a augmenté de 2%. En effet, en supposant que la population de référence soit de 100 individus et ne change pas entre la première et la seconde mesure (ce qui est rarement le cas), la population partielle passerait de 10 individus à 12 individus, soit une multiplication par 1.2 c'est-à-dire une augmentation de 20%. Or pourtant, il est utile de chiffrer cette variation : premier pourcentage 10% , second 12%. On parle alors d'une augmentation de 2 points.



Pourcentages composés

Lors de hausses et de baisses successives, la tentation est grande d'ajouter et soustraire les pourcentages d'augmentation.

Il est tentant de penser qu'une augmentation de 10% suivie d'une baisse de 10% ramène à la valeur initiale. Mais ces pourcentages ne correspondent pas à la même population de référence. En reprenant la technique du coefficient multiplicatif et l'appliquant à une quantité Q on s'aperçoit que les 10% d'augmentation reviennent à multiplier la quantité Q par 1.1 et que la réduction, s'appliquant à $1.1 \cdot Q$, revient à multiplier cette quantité par 0.9. Or, $0.9 \cdot 1.1 \cdot Q = 0.99 \cdot Q$, ce qui correspond à une baisse de 1%.

Exercice 2.10

Un sweat-shirt qui valait 35 € est vendu en solde 29,75 €.

- Calculer le montant de la réduction.
- Quel pourcentage du prix de départ cela représente-t-il ?

Exercice 2.11

Le cerveau représente environ 2% de la masse du corps humain. Quelle est la masse du cerveau d'une personne pesant 53 kg ?

Exercice 2.12

Jean a acheté une voiture neuve valant 15'000 euros. La première année, les modèles perdent 30% de leur valeur.

- Combien Jean pourra-t-il espérer revendre son véhicule au bout d'un an ?
- La deuxième année, et les suivantes, les modèles perdent 25% de leur valeur par rapport à l'année précédente. Que vaudra alors la voiture de Jean au bout de 4 ans ?

Exercice 2.13

Hier, le prix du gasoil était de 0,86 €/litre. Il y a deux semaines, il était de 0,92 €/litre.
De quel pourcentage le prix du gasoil a-t-il diminué ?
Quel sera le prix du gasoil s'il diminue cette fois de 5% ?

Exercice 2.14

Dans un pays, l'inflation atteint 6% par mois. Quel est le taux d'inflation annuel ?

2.6 Ce qu'il faut absolument savoir

Simplifier des fractions

☐ ok

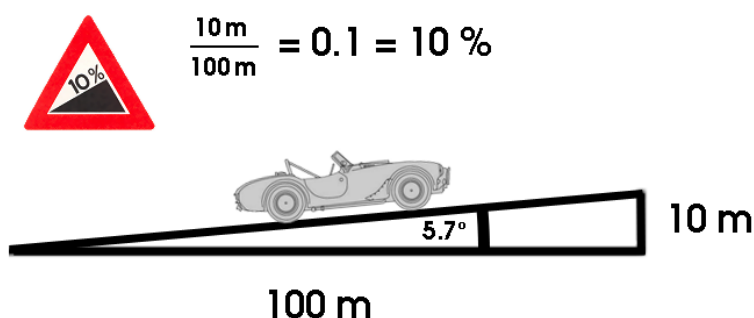
Calculer avec des fractions

☐ ok

Écrire un nombre rationnel sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers

☐ ok

Maîtriser les pourcentages

☐ ok


Les panneaux routiers indiquent les pentes des routes en pourcentage. Une pente de 10% signifie qu'à un déplacement horizontal de 100 m, correspond un déplacement vertical de 10 m. La pente correspond alors à la tangente de l'angle d'inclinaison de la route.



3. Calcul littéral

3.1. Monômes

L'utilisation des lettres comme notations puis comme objet de calculs, l'enchaînement des opérations élémentaires sur des expressions littérales constituent le **calcul littéral**. Ce calcul obéit à des règles analogues à celles que vous connaissez pour le calcul numérique.

Monômes

Un **monôme** est une expression obtenue par multiplication de nombres et de lettres.

Les deux premiers monômes sont sous forme réduite.

Exemples : $\frac{1}{3}ab^2$, $-3(xy)^2z$, $ab^4xay(-b)b$

Un monôme est sous **forme réduite** si l'on effectue le produit des nombres et regroupe les puissances d'une même lettre. Par convention, on écrit d'abord le signe, puis le nombre, puis les lettres que l'on place par ordre alphabétique.

Par exemple, $ab^4xay(-b)b = -4a^2b^3xy$

Exercice 3.1

Écrivez les monômes suivants sous forme réduite :

a. $abx^5ay(-3b)c$

b. $-zcx^2ay(-2c)c$

Vocabulaire

Dans un monôme donné sous forme réduite, le nombre (avec le signe) s'appelle le **coefficient** du monôme. Le reste de l'expression formé d'une ou plusieurs variables élevées à des puissances entières positives est nommée **partie littérale** du monôme.

Deux monômes sont **semblables** si, après réduction, leurs parties littérales sont égales.

Par exemple, $\frac{1}{3}ab^2$ et $-71ab^2$ sont semblables.

Notez bien que l'ordre des lettres ne changent rien au résultat. Ainsi, $ab = ba$.

3.2. Opérations sur les monômes

Multiplication

On effectue le produit des coefficients et le produit des parties littérales en utilisant les règles de calcul avec les puissances, afin d'obtenir un résultat réduit.

Exemple : $(2ab^2)(3a^4c) = 6a^5b^2c$

Rappel : $x^a x^b = x^{a+b}$

Élévation à une puissance

On applique la règle de calcul de puissance d'un produit, afin d'obtenir un résultat réduit.

$$(xy)^a = x^a y^a \quad \text{et} \quad (x^a)^b = x^{ab}$$

Exemple : $(2ab^2)^3 = 8a^3b^6$

Division

On effectue la division des coefficients (de sorte à obtenir un nombre réel ou une fraction irréductible) et la division des parties littérales en utilisant les règles de calcul avec les puissances, afin d'obtenir un résultat réduit.

Deux remarques importantes

Le résultat n'est en général pas un monôme ! En effet, il se peut qu'une des variables du résultat réduit soit élevée à une puissance négative.

Il faut préciser les conditions de validité de l'écriture en écartant toutes les valeurs des variables qui annulent le dénominateur (division par 0 !).

Exemple : $\frac{3ab^2}{7a^2b} = \frac{3}{7}a^{-1}b$ ($a \neq 0$ et $b \neq 0$)

Rappels : $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$

Somme et différence de monômes semblables

On additionne ou soustrait les coefficients.

On ne peut additionner ou soustraire que des monômes semblables.

Exemple : $3ab^2 - 7ab^2 = -4ab^2$

Exercice 3.2

Effectuez les opérations ci-dessous :

a. $(-2a^2b)(a^4bc)$

b. $(-2ab^2)(-3a^2d)$

c. $(-2a^2)^4$

d. $(a^4bc^3)^2$

e. $\frac{-2a^2b}{a^4bc}$

f. $\frac{-3a^3b^2cd}{-a^4bc^3}$

g. $-5a^2b + 2a^2b$

h. $-5ab^3 + 2ab^2 + 3ab^3$

3.3 Polynômes

Définitions

Un **polynôme** est une somme ou différence de monômes.

Le **degré** d'un polynôme par rapport à une lettre est la plus grande puissance à laquelle cette lettre est élevée dans le polynôme.

Exemple : le polynôme $\frac{1}{3}ax^4 - 3bx + 2$ est de degré 4 pour la lettre x .

Un polynôme est sous **forme réduite** si chaque monôme composant celui-ci est réduit et si l'on a regroupé tous les monômes semblables.

Exercice 3.3

Réduisez les polynômes suivants et donnez leur degré pour la lettre x . Écrivez la réponse sous la forme $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$.

a. $3x^2 + 7x^2 + 8x - 9$

b. $3x - 4xx^2 + 2x^2 - x^3$

c. $-5a^2x + 2ax$

d. $3abx^2 + 2x + x^2 + 3$

e. $-xbx^2 + ax^2 + 7x^2 + cx$

f. $-xx^3x^2 + 2x^6 + 8x^3 - 3xx^2$

3.4. Opérations sur les polynômes

Somme, différence

On regroupe, additionne ou soustrait tous les monômes semblables. Le résultat est donné sous forme réduite.

Produit

On effectue le produit de deux polynômes en appliquant la règle de la distributivité ci-dessous. Le résultat est donné sous forme réduite.

$$\begin{aligned} a(b+c) &= ab + ac \\ (a+b)(c+d) &= ac + ad + bc + bd \end{aligned}$$

On utilisera les expressions suivantes de façon équivalente : « effectuer le produit de polynômes », « distribuer et réduire », ou encore « développer ».

Ces opérations consistent toutes à transformer une expression algébrique donnée sous la forme d'un produit de termes en une somme de termes.

Exemple : $(7x^2 - 3x + 4)(x - 3) = 7x^3 - 21x^2 - 3x^2 + 9x + 4x - 12$

$$= 7x^3 - 24x^2 + 13x - 12$$

Élévation à une puissance

Le produit de deux ou plusieurs polynômes identiques est une puissance de polynômes et peut s'exprimer à l'aide de parenthèses et d'un exposant.

Dans certains cas, l'application d'identités dites « remarquables », nous permettront d'effectuer cette opération plus facilement.

Exemple : $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Exercice 3.4

Effectuez les opérations ci-dessous :

- | | |
|--------------------------------|-------------------|
| a. $-5a^2x + 2a^2x + ax^2 - x$ | b. $(x+3)(x^2-1)$ |
| c. $(x+3)(x^2-1)(2x+1)$ | d. $(x+1)^3$ |

3.5. Factorisation

Pilules
in k
our
ersonnes
âles

Mise en évidence

On met en évidence les symboles apparaissant dans plusieurs termes. En effet, $ab + ac = a(b+c)$. **Les parenthèses ne sont pas facultatives**, car la multiplication est prioritaire sur l'addition. Dans l'exemple suivant, on peut mettre « 3 » en évidence :

$$3x + 3y + 6z + t = 3(x+y+2z) + t$$

Formules remarquables

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$	$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

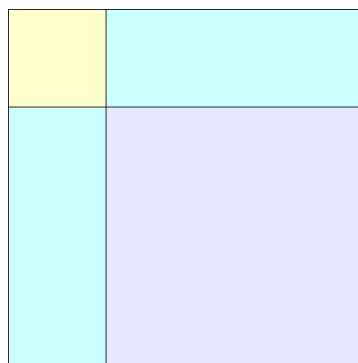
Remarque : Il faut aussi savoir utiliser ces formules « de droite à gauche » !

Toutes ces formules se démontrent facilement en développant le terme de gauche. Par exemple $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Les formules de droite s'obtiennent à partir des formules de gauche en remplaçant b par $(-b)$. Essayez !

On peut aussi démontrer ces formules de façon géométrique, comme l'avait fait **Euclide** dans le livre II de ses *Eléments*.

1. On peut convenir que la figure représente un carré dont le côté est somme de deux valeurs a et b . Son aire vaut donc $(a+b)^2$. Mais elle s'obtient aussi par l'addition de l'aire du carré jaune (a^2), des aires des rectangles verts (ab pour chacun) et de l'aire du carré violet (b^2).



2. On peut convenir aussi que a désigne le côté du grand carré et b le côté du carré jaune. L'aire du carré violet vaut donc $(a-b)^2$. Mais cette valeur peut s'obtenir en retranchant du grand carré d'aire a^2 deux rectangles jaunes et verts d'aire ab et en rajoutant une fois b^2 car l'aire de ce carré jaune a été soustraite deux fois.

Factorisation

Factoriser un polynôme de degré supérieur ou égal à 2 revient à l'écrire sous la forme d'un **produit de facteurs**.

Exemple

$$x^2 + 11x + 28 = (x+4)(x+7)$$

On a tâtonné ainsi :

$$28 = 1 \cdot 28 \text{ mais } 1+28 \neq 11$$

$$28 = 2 \cdot 14 \text{ mais } 2+14 \neq 11$$

$$28 = 4 \cdot 7 \text{ et } 4+7 = 11$$

Pour vérifier une factorisation, il suffit de développer le produit écrit au deuxième membre et de voir si l'on retrouve bien le premier membre.

On a souvent à factoriser des polynômes du second degré :

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

Il faut donc trouver (par tâtonnement) deux nombres a et b dont la somme correspond au deuxième terme et le produit au troisième terme. Il est plus facile de commencer le tâtonnement par le produit.

Exercice 3.5

Décomposez en facteurs :

Effectuez :

a. $7a + 7ab - 7a^2$

q. $3 \cdot 2 + 1$

b. $4a^2 - 1$

r. $3(2+1)$

c. $a^3 - 8$

s. $4 + 3 \cdot 2$

d. $x(a-b) + 3(b-a)$

t. $(4+3) \cdot 2$

e. $x^2 + 5x + 6$

u. $3 + 4 \cdot 3 - 6 \cdot 2$

f. $a^3 - a + 2a^2 - 2$

v. $2 + 3 \cdot 5^2$

g. $(x^2-1)^2 - 3(x^2-1)$

Supprimez les parenthèses inutiles :

h. $a^4 + b^4 - 2a^2b^2$

w. $(3/x)+2 + (4 \cdot 3) - 1$

i. $(-a-b)^3 + 4(a+b)$

x. $(4 \cdot x) + 5(2+x)$

j. $3x^2 - 18x - 48$

y. $(x+2)(x-1) + (3 \cdot x) - (x+2)$

k. $x^2 - 3x - 28$

z. $(x-3)^2 \cdot (x-4) + (x+2)^3$

l. $1 - x^2y^2$

m. $8a^6 - 1$

n. $a^2 + 2ab - x^2 + b^2$

o. $x^3 + x^2 - 6x$

p. $a^3 - 3a^2 + 7 + 3a$

3.6. Fractions littérales

Quand on simplifie une fraction, tous les monômes doivent être simplifiés de la même façon.

La manière la plus sûre est de factoriser avant de simplifier.



Exemple : simplifier $\frac{3ab^2+6b}{3ab}$

Faux

$$\frac{3ab^2+6b}{3ab} = \frac{b^2+6}{1} = b^2+6$$

Juste

$$\frac{3b(ab+2)}{3ab} = \frac{ab+2}{a} = b + \frac{2}{a}$$

ou bien (sans factoriser)

$$\frac{3ab^2+6b}{3ab} = \frac{ab^2+2b}{ab} = \frac{ab+2}{a}$$

Exercice 3.6

Simplifiez les fractions suivantes :

a. $\frac{6a^6b^2c}{4a^2b^2c^5}$

b. $\frac{5a+5b}{7a+7b}$

c. $\frac{a+ab}{2ab}$

d. $\frac{(a-b)^2}{b-a}$

e. $\frac{a^3-1}{(a-1)^3}$

f. $\frac{x^2-6x+9}{x^2-5x+6}$

Exercice 3.7

Effectuez et simplifiez :

a. $\frac{a}{2} + \frac{a}{3}$

b. $\frac{a}{3} - \frac{2a}{5} + a$

c. $\frac{2}{a} - \frac{a}{2}$

d. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

e. $\frac{2}{x+2} + \frac{3}{x-3}$

f. $\frac{1}{a+b} - \frac{2a}{a^2-b^2}$

Exercice 3.8

Effectuez et simplifiez :

a. $\frac{3ab}{-5c} \cdot \frac{20b^3c^2}{9a^2} \cdot \frac{-a}{2b^2c}$

b. $\frac{a^2-b^2}{a} \cdot \frac{a^2b}{a^2+2ab+b^2}$

c. $\frac{\frac{5a^2b}{c}}{\frac{10b^2}{c^2}}$

3.7. Calculatrice

Priorité des opérations

La notation algébrique de votre calculatrice est-elle hiérarchisée ou non ?

Pour le savoir, écrivez sur votre calculatrice : $2 + 3 \cdot 5$.

Si vous trouvez 17, la notation est hiérarchisée.

Si vous trouvez 25, elle ne l'est pas.

L'ordre de priorité s'établit ainsi (plus le numéro est élevé, plus la priorité est grande) :

Priorité 4 - les parenthèses ()

Priorité 3 - l'exponentiation y^x (ou $^$) et les fonctions (sinus, cosinus, etc.)

Priorité 2 - la multiplication et la division

Priorité 1 - l'addition et la soustraction

La règle de priorité est la suivante :

- en lisant de gauche à droite, quand un nombre se trouve entre deux signes opératoires, c'est l'opération prioritaire qui est effectuée en premier.
- si les deux opérations ont le même niveau de priorité, elles sont effectuées dans l'ordre d'écriture.

Exercice 3.9

Lequel des calculs est correct ?

- a. $6 + 3 \cdot 2 = 9 \cdot 2 = 18$ ou $6 + 3 \cdot 2 = 6 + 6 = 12$
b. $4 + 5 \cdot (6 + 3) = 4 + 45 = 49$ ou $4 + 5 \cdot (6 + 3) = 9 \cdot 9 = 81$
c. $13 - 4 + 5 = 9 + 5 = 14$ ou $13 - 4 + 5 = 13 - 9 = 4$
d. $2 + 10 \cdot 17 - 7 = 12 \cdot 10 = 120$ ou $2 + 10 \cdot 17 - 7 = 2 + 170 - 7 = 165$
e. $6 + 10 / 2 = 16 / 2 = 8$ ou $6 + 10 / 2 = 6 + 5 = 11$
f. $5 \cdot 2 + 9 - 4(2+5) = 19 - 28 = -9$ ou $5 \cdot 2 + 9 - 4(2+5) = 55 - 28 = 27$
g. $4/5 \cdot 2/3 + 5/3 = 4/5 \cdot 7/3 = 18/15$ ou $4/5 \cdot 2/3 + 5/3 = 8/15 + 5/3 = 33/15$ ou
 $4/5 \cdot 2/3 + 5/3 = 4/(10/3) + 5/3 = 12/10 + 5/3 = 6/5 + 5/3 = 43/15$

3.8. Le langage algébrique

Jusqu'au 16^{ème} siècle, la résolution de problèmes était principalement rhétorique : les calculs s'exprimaient en phrases complètes. Mais la complexité de ceux-ci conduit les mathématiciens à construire des notations symboliques. C'est le travail entrepris par Viète, Descartes,... qui font entrer les mathématiques dans l'ère de l'algèbre.

Exercice 3.10

Écrivez les expressions suivantes en termes algébriques :

- a. l'entier suivant le nombre entier n
b. le triple du nombre n
c. le double de l'entier précédant le nombre entier n
d. le produit de deux nombres entiers consécutifs
e. un nombre impair
f. une puissance de 2
g. l'inverse de x
h. l'opposé de x
i. le double du carré de l'inverse de l'opposé de l'entier précédant le quadruple de x

Exercice 3.11

Associez la bonne description aux expressions algébriques :

$x + y$	est un produit
$x^2 - y^2$	est le double du carré d'une somme
$2(x + y)^2$	est le carré du double d'une somme
$(x - y)^2$	est la somme des carrés
xy	est le carré d'une somme
$(x + y)^2$	est une somme
$(x - y)(x + y)$	est le carré d'une différence
$2xy$	est la différence des carrés
$(2(x + y))^2$	est un double produit
$x^2 + y^2$	est le produit d'une somme par une différence

3.9. Règles de manipulation des égalités

On peut voir une égalité comme **une balance qui doit rester en équilibre**, quelle que soit la manipulation que l'on effectue.

1. Si l'on ajoute quelque chose (disons c) sur le plateau de gauche, on doit impérativement ajouter la même quantité sur le plateau de droite. Donc :
 $A=B \Leftrightarrow A+c=B+c$



2. De même si l'on retranche quelque chose : $A=B \Leftrightarrow A-c=B-c$
3. Si on multiplie la partie de gauche par un nombre, on doit multiplier la partie de droite par le même nombre : $A=B \Leftrightarrow A \cdot c=B \cdot c$. Mais attention ! Le nombre c doit être différent de 0 !
4. De même pour la division : $A=B \Leftrightarrow \frac{A}{c}=\frac{B}{c}$. Mais attention ! c doit être différent de 0 !

Pour résumer, si l'on fait une manipulation du côté gauche de l'équation, on doit faire la même manipulation du côté droit.

Le but de ces manipulations est d'arriver à une équation, équivalente à celle de départ, mais de la forme $x = \dots$. On appelle cela **résoudre une équation**.

Exemple : résoudre l'équation $5x-4=3x+2$

$$\begin{array}{rcl} 5x-4=3x+2 & & | -3x \\ 2x-4=2 & & | +4 \\ 2x=6 & & | \div 2 \\ x=3 & & \end{array}$$

On peut vérifier que $5 \cdot 3 - 4 = 3 \cdot 3 + 2$

Exercice 3.12

Résolvez les équations suivantes :

- a. $-3x-4=3x-2+6x$
- b. $-2x=10x-3+4x$
- c. $x^2-4+8x+2=2(4x+1)$
- d. $x^2=x(x+2)$
- e. $x^3-8=x^2(x+2)$

Exercice 3.13

Dans chacune des formules de physique suivantes, exprimez chaque lettre au moyen des autres :

- a. $F=G \frac{m_1 m_2}{r^2}$
- b. $T=2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$
- c. $v=a \cdot t+v_0$
- d. $x=\frac{1}{2}a \cdot t^2+x_0$
- e. $U=R \cdot I$
- f. $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$
- g. $P=\frac{U^2}{R}$
- h. $W=R \cdot I^2 \cdot t$

3.10. Ce qu'il faut absolument savoir

- | | |
|--|-----------------------------|
| Manipuler les monômes | <input type="checkbox"/> ok |
| Manipuler les polynômes | <input type="checkbox"/> ok |
| Connaître toutes les identités remarquables par cœur | <input type="checkbox"/> ok |
| Factoriser | <input type="checkbox"/> ok |
| Simplifier une fraction | <input type="checkbox"/> ok |
| Maîtriser le calcul avec les fractions | <input type="checkbox"/> ok |
| Connaître les priorités des calculatrices | <input type="checkbox"/> ok |
| Maîtriser le langage algébrique | <input type="checkbox"/> ok |
| Maîtriser le calcul littéral | <input type="checkbox"/> ok |

Alphabet grec

alpha	A, α	nu	N, ν
bêta	B, β	xi	Ξ , ξ
gamma	Γ , γ	omicron	O, o
delta	Δ , δ	pi	Π , π
epsilon	E, ϵ	rhô	P, ρ
dzêta	Z, ζ	sigma	Σ , σ
êta	H, η	tau	T, τ
thêta	Θ , θ	upsilon	Y, υ
iota	I, ι	phi	Φ , ϕ
kappa	K, κ	khi	X, χ
lambda	Λ , λ	psi	Ψ , ψ
mu	M, μ	oméga	Ω , ω

4. Résolution d'équations

4.1. Équations du premier degré

Forme générale $ax + b = 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$)

Solution $x = -\frac{b}{a}$

Exercice 4.1

Résolvez les équations suivantes :

- a. $2x + 1 = 0$ b. $\frac{5}{3}x - \frac{4}{5} = 0$ c. $-4x = 3$ d. $3x - 4 = -2x$
 e. $4x = 4x$ f. $3 = -3x + 1$ g. $3x + 2 = 3x - 5$

Exercice 4.2

Résolvez les équations suivantes :

- a. $\frac{x-3}{x-5} = 5$ b. $\frac{x-3}{x-5} = 1$ c. $\frac{x-3}{x-5} = 0$
 d. $\frac{x-5}{4} - \frac{x-5}{8} = \frac{1}{8}$ e. $\frac{5}{x+1} = \frac{3}{x+1} + \frac{1}{2}$ f. $\frac{1}{x-4} = \frac{1}{2x+1}$

Exercice 4.3

Résolvez les équations suivantes :

- a. $5[3(2x-1) + 7x] = 10(x+20.5)$ b. $\frac{x+4}{3} - \frac{x-4}{5} - \frac{3x-1}{15} - 1 = 1$
 c. $\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{5(x-1)}{3} = \frac{20-5x}{12}$ d. $\frac{x-a}{2} - \frac{x-b}{3} = \frac{a+b}{6}$

4.2. Équations du second degré

Forme générale $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$)

Solutions La valeur $\Delta = b^2 - 4ac$ est le **discriminant** de l'équation.

Si $\Delta > 0$, l'équation a **deux solutions** réelles : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Si $\Delta = 0$, $x_1 = x_2$; l'équation a **une solution** réelle (solution double) : $x = \frac{-b}{2a}$

Si $\Delta < 0$, l'équation **n'a pas de solution** réelle.

Factorisation

Si $\Delta \geq 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Si $\Delta < 0$, le polynôme n'est pas factorisable dans \mathbb{R} .



Mohammed Al'Khwarizmi
(788-850)

Exemple

Factorisons $2x^2 + 12x + 10$. On trouve les deux racines :

$$x_1 = \frac{-12 + \sqrt{12^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10}}{2 \cdot 2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-12 - \sqrt{12^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10}}{2 \cdot 2} = -5$$

Donc : $2x^2 + 12x + 10 = 2(x+1)(x+5)$

Dans le traité *Hisâb al-jabr wa'l-muqâbala* (Science de la transposition et de la réduction) du mathématicien d'Asie centrale Al'Khwarizmi, les équations du second degré sont classées en six types et résolues.

Étape 3 : division de $-4x^2 + 8x$ par $x - 3$. Quotient $-4x$, reste $-4x$.



Jérôme Cardan (1501-1576)

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 \quad | \quad x - 3 \\
 \underline{x^4 - 3x^3} \\
 x^3 - 7x^2 \\
 \underline{x^3 - 3x^2} \\
 -4x^2 + 8x \\
 \underline{-4x^2 + 12x} \\
 -4x
 \end{array}$$

Étape 4 : division de $-4x + 12$ par $x - 3$. Quotient -4 , reste 0.

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 \quad | \quad x - 3 \\
 \underline{x^4 - 3x^3} \\
 x^3 - 7x^2 \\
 \underline{x^3 - 3x^2} \\
 -4x^2 + 8x \\
 \underline{-4x^2 + 12x} \\
 -4x + 12 \\
 \underline{-4x + 12} \\
 0
 \end{array}$$

$P(x)$ est divisible par $(x - 3)$
car le reste est nul. 3 est donc
une racine, ce qu'on peut
facilement vérifier en
remplaçant x par 3 dans $P(x)$.

$P(x)$ peut alors se factoriser : $P(x) = (x - 3)(x^3 + x^2 - 4x - 4)$.

Essayons maintenant de diviser $P(x)$ par $(x - 1)$:



Niels Henrik Abel (1802-1829)

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 \quad | \quad x - 1 \\
 \underline{x^4 - x^3} \\
 -x^3 - 7x^2 \\
 \underline{-x^3 + x^2} \\
 -8x^2 + 8x \\
 \underline{-8x^2 + 8x} \\
 12
 \end{array}$$

On voit que $P(x)$ n'est pas divisible par $(x - 1)$, car le reste vaut 12. 1 n'est donc pas une racine. D'autre part, on remarque que $P(1) = 12$.

Méthode de Horner



William George Horner (1786-1837) est un mathématicien britannique. Il est connu pour « sa » méthode déjà publiée par Zhu Shijie vers 1300, mais aussi utilisée (en Angleterre) par Isaac Newton 150 ans avant Horner.

La méthode (ou schéma) de Horner utilise un tableau pour calculer l'image d'un polynôme P pour une valeur r donnée. Sa force est que, tout en calculant cette image, on peut obtenir une factorisation de P si r est une racine de P .

1. On commence par reporter les coefficients du polynôme dans la première ligne.
2. On place la racine évidente dans la case de gauche sur la deuxième ligne.
3. On reporte le premier coefficient dans la première case de la troisième ligne.
4. Multiplier le nombre de la dernière ligne par la racine évidente.
5. Reporter le résultat dans la case située à droite sur la deuxième ligne.
6. Effectuer l'addition des chiffres de la première et la deuxième ligne et reporter le résultat dans la troisième ligne.
7. Aller au point 4 tant que la dernière case de la troisième ligne n'est pas remplie.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0	1 ^{ère} ligne
	↓	+	+	+	+	+	
r	↓	$r \cdot b_{n-1}$	$r \cdot b_{n-2}$...	$r \cdot b_1$	$r \cdot b_0$	2 ^{ème} ligne
	= ↗	= ↗	= ↗	= ↗	= ↗	=	
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}		b_0	$P(r)$	3 ^{ème} ligne

Un exemple

Reprenons le polynôme suivant : $P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$ (*)

L'objectif est de mettre (*) sous la forme $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = 0$

On commence par rechercher une racine évidente du polynôme (une racine évidente est une solution comme $-2, -1, 1, 2, 3, \dots$). Dans notre cas, 3 est une racine évidente de (*).

		1	-2	-7	8	12	← coefficients de (*)
racine évidente →	3		3	3	-12	-12	
		1	1	-4	-4	0	

Comme la dernière case de la troisième ligne contient un 0, cela confirme que 3 est une racine de P .

À partir des coefficients obtenus sur la troisième ligne on peut effectuer la factorisation :

(*) devient $(x - 3)(x^3 + x^2 - 4x - 4) = 0$

On peut ensuite recommencer avec le polynôme : $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ (**)

(**) a encore une racine évidente : -1 . D'où le tableau de Horner suivant :

		1	1	-4	-4	← coefficients de (**)
racine évidente →	-1		-1	0	4	
		1	0	-4	0	

On factorise donc (*) comme suit : $(x - 3)(x + 1)(x^2 - 4) = 0$

On peut alors résoudre le polynôme du second degré. La factorisation de (*) donne donc finalement : $(x - 3)(x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0$.

* * * *

Pour terminer, calculons encore $P(1)$ avec le schéma de Horner :

		1	-2	-7	8	12	← coefficients de (*)
	1		1	-1	-8	0	
		1	-1	-8	0	12	

4.5. Résolution d'équations de degré supérieur à 2

Si on connaît une ou plusieurs racines d'un polynôme de degré supérieur à 2, on peut le **factoriser** et ainsi obtenir un produit de polynômes de degré inférieur (par une division de polynômes ou par la méthode de Horner). Si le plus grand degré de ces polynômes est 2 ou 1, alors on peut trouver les autres racines.

Les formules de résolution des équations de degré 3 (trouvées par **Tartaglia**, puis généralisées et publiées par **Cardan**) et 4 sont d'un emploi peu fréquent.

Il n'existe aucune formule générale pour la résolution des équations de degré supérieur à 4 (théorème d'**Abel**, 1826).

Exercice 4.7

Trouvez les racines de $x^3 - 3x^2 - 46x + 168$, sachant que -7 est une racine.

Faites deux fois cet exercice : d'abord par une division de polynômes, puis avec un schéma de Horner.

Exercice 4.8

Trouvez les racines de $x^4 - 14x^3 + 68x^2 - 136x + 96$, sachant que 2 est une racine double.

Exercice 4.9

Trouvez les racines de $x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Exercice 4.10

Trouvez les racines de $2x^3 - 5x - 6$, sachant que 2 est une racine.

Exercice 4.11

Résolvez l'équation $x^4 - x^3 - 6x^2 = 0$.

4.6. Équations irrationnelles

Une équation où l'inconnue figure sous un radical est dite **irrationnelle**. Pour résoudre une telle équation, on est amené à élever les deux membres d'une égalité à la puissance n pour éliminer le radical $\sqrt[n]{}$.

Un exemple résolu

$x_2 = 2$ est une **solution étrangère** qui est apparue suite à l'élévation au carré. Il faut donc **toujours vérifier** les résultats obtenus.

Résolvons l'équation $\sqrt{2+x} + 4 - \sqrt{10-3x} = 0$.

$$\sqrt{2+x} + 4 = \sqrt{10-3x}$$

on a isolé un radical

$$2+x+8\sqrt{2+x}+16=10-3x$$

on a élevé au carré

$$8\sqrt{2+x} = -8-4x$$

on a isolé le radical restant

$$2\sqrt{2+x} = -2-x$$

on a simplifié par 4

$$4(2+x) = 4+4x+x^2$$

on a élevé au carré une deuxième fois

$$x^2 = 4$$

on a simplifié

On obtient deux solutions : $x_1 = -2$ et $x_2 = 2$. Cependant, seule la solution $x_1 = -2$ satisfait l'équation proposée.

Exercice 4.12

Résolvez les équations suivantes :

a. $x - \sqrt{4x-19} = 4$

b. $2(x+4) + \sqrt{x(x+6)} = 16$

c. $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1} = 5$

d. $\sqrt{x+18} + \sqrt{x-8} = \sqrt{x+2}$

e. $\sqrt{x^2+1} = 7-x$

f. $x^2 = \sqrt[3]{2x^3+4}$

g. $\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} = \frac{12}{\sqrt{5+x}}$

4.7. Où est l'erreur ?**Exercice 4.13**

$$a = b$$

$$a^2 = ab$$

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

$$(a+b)(a-b) = b(a-b)$$

$$(a+b) = b$$

$$a + a = a$$

$$2a = a$$

$$2 = 1$$

Exercice 4.14

Soit x le poids d'un éléphant et y le poids d'un moustique. Appelons la somme des deux poids $2v$; donc $x + y = 2v$. De cette équation, nous pouvons tirer :

a) $x - 2v = -y$

b) $x = -y + 2v$

En multipliant a) par x , on obtient : $x^2 - 2vx = -yx$

En utilisant b) dans la partie droite : $x^2 - 2vx = y^2 - 2vy$

Additionnons v^2 : $x^2 - 2vx + v^2 = y^2 - 2vy + v^2$

On peut réécrire : $(x-v)^2 = (y-v)^2$

Prenons la racine carrée : $x-v = y-v$

Donc, au final : $x = y$.

Le poids d'un éléphant est donc égal au poids d'un moustique !

4.8. Ce qu'il faut absolument savoir

Reconnaître et résoudre des équations du premier degré	<input type="checkbox"/> ok
Reconnaître et résoudre des équations du second degré	<input type="checkbox"/> ok
Reconnaître et résoudre des équations bicarrées (ou bicubiques)	<input type="checkbox"/> ok
Savoir diviser un polynôme par un autre	<input type="checkbox"/> ok
Savoir diviser un polynôme par un autre avec la méthode de Horner	<input type="checkbox"/> ok
Résoudre des équations d'un degré supérieur à 2 par des divisions de polynômes successives	<input type="checkbox"/> ok
Reconnaître et résoudre des équations irrationnelles	<input type="checkbox"/> ok

5. Inéquations

5.1. Définition

Exemple : $x < 4 + 2x$

Une **inéquation** affirme que deux expressions contenant une variable ne sont pas égales. Une expression peut être plus petite ($<$), plus petite ou égale (\leq), plus grande ($>$), ou encore plus grande ou égale (\geq) à une autre expression.

La droite réelle

Le symbole ∞ utilisé pour les intervalles infinis est une notation et **ne représente pas un nombre réel**.

Vous savez que l'on peut représenter les nombres réels sur une droite allant de moins l'infini ($-\infty$) à plus l'infini ($+\infty$).



Sur la droite réelle, le nombre a est à gauche du nombre b si a est plus petit que b . On voit immédiatement que tous les nombres à gauche de b satisfont l'inéquation $x < b$. La solution d'une inéquation n'est donc pas un nombre, mais un **ensemble** de nombres, aussi appelé **intervalle**.

5.2. Intervalles

Le symbole \emptyset (lu « ensemble vide ») représente un intervalle vide.

L'intervalle no 1 est un intervalle **ouvert** (les extrémités ne sont pas comprises).

L'intervalle no 2 est un intervalle **fermé** (les extrémités sont comprises). Les intervalles 3 et 4 sont **semi-ouverts**.

Les intervalles 5 à 9 sont des intervalles **infinis**.

L'intervalle 10 est en fait la réunion (\cup) de deux sous-intervalles.

	Notations	Inéquations	Représentations graphiques
1	$]a ; b[$	$a < x < b$	
2	$[a ; b]$	$a \leq x \leq b$	
3	$[a ; b[$	$a \leq x < b$	
4	$]a ; b]$	$a < x \leq b$	
5	$]a ; +\infty[$	$x > a$	
6	$[a ; +\infty[$	$x \geq a$	
7	$] -\infty ; b[$	$x < b$	
8	$] -\infty ; b]$	$x \leq b$	
9	$] -\infty ; +\infty[$ (ou \mathbb{R})	$-\infty < x < +\infty$	
10	$] -\infty ; a[\cup] b ; c[$	$x < a$ ou $b \leq x < c$	

Remarquez que $-\infty$ est toujours précédé d'un « $]$ » et $+\infty$ toujours suivi d'un « $[$ ». On ne peut pas borner l'infini, sinon il serait fini !

Exercice 5.1

Parmi les affirmations suivantes, dites lesquelles sont fausses. Quand c'est le cas, donnez un contre-exemple.

a. Si $x > 1$ et $y > 2$, alors $x + y > 3$.

b. Si $x < 5$ et $y < 6$ alors $x \cdot y < 30$.

c. Si $x < 0$, alors $x < x^2$

d. Si $x < y < -2$, alors $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

Exercice 5.2

Écrivez sous forme d'intervalles les inégalités ci-dessous et dessinez ces intervalles sur la droite réelle.

a. $-5 \leq x \leq 2$

b. $0 < x < 7$

c. $-6 \leq x < 0$

d. $-2 < x < 4$

e. $x < -2$

f. $1 < x$

g. $x < 0$ ou $4 < x < 10$

h. $x < 3$ ou $x \geq 4$

Exercice 5.3

Écrivez sous forme d'inégalités et d'intervalles chacun des dessins ci-dessous.

**5.3. Propriétés des inégalités****Propriété d'inversion**

Cette propriété est similaire pour $a \leq b$, $a > b$ et $a \geq b$.

Pour tous les réels a et b de même signe (donc $a \cdot b > 0$), on a :

$$\text{Si } a < b \text{ et } a \cdot b > 0 \text{ alors } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

Propriété d'addition

Illustration :

Si $2 < 4$, alors $2 + 8 < 4 + 8$

Pour tous les réels a , b et c , on a :

$$\text{Si } a < b, \text{ alors } a + c < b + c$$

Cette propriété va nous permettre de résoudre l'inégalité suivante :

La propriété d'addition est similaire pour $a \leq b$, $a > b$ et $a \geq b$.

$$\begin{array}{ll} -4x - (3 - 5x) > 8 & \text{On enlève les parenthèses} \\ -4x - 3 + 5x > 8 & \text{On simplifie} \\ x - 3 > 8 & \text{On additionne 3 des deux côtés} \\ x - 3 + 3 > 8 + 3 & \text{Et on trouve} \\ x > 11 \end{array}$$

La solution est donc l'ensemble des nombres réels qui sont plus grands que 11.

Propriété de multiplication

Cette propriété est similaire pour $a \leq b$, $a > b$ et $a \geq b$.

Pour tous les réels a , b et c , on a :

$$\begin{array}{l} \text{Si } a < b \text{ et } c \text{ positif, alors } a \cdot c < b \cdot c. \\ \text{Si } a < b \text{ et } c \text{ négatif, alors } a \cdot c > b \cdot c. \end{array}$$

Cette propriété va nous permettre de résoudre l'inégalité suivante :

Illustrations :

Si $2 < 4$, alors $2 \cdot 8 < 4 \cdot 8$

Si $2 < 4$, alors $2 \cdot (-8) > 4 \cdot (-8)$

$$\begin{array}{ll} 5(3 - 2x) \geq 10 & \\ \frac{1}{5} 5(3 - 2x) \geq \frac{1}{5} 10 & \text{On multiplie tout par } \frac{1}{5} \\ 3 - 2x \geq 2 & \text{On simplifie} \\ 3 - 2x + (-3) \geq 2 + (-3) & \text{On soustrait 3 des deux côtés} \\ -2x \geq -1 & \text{On simplifie} \\ -\frac{1}{2} (-2x) \leq -\frac{1}{2} (-1) & \text{On multiplie tout par } -\frac{1}{2} \\ x \leq \frac{1}{2} & \text{Et on trouve} \end{array}$$

Exercice 5.4

Résolvez les inéquations suivantes :

a. $5x - 7 > 11x + 9$

b. $5x + 5 < 5x$

c. $2(4x - 1) \leq 3x - 6$

d. $3(x + 1) - x \leq 1 + 2(1 + x)$

e. $\frac{1}{2}x - 5 > \frac{1}{4}x + 3$

f. $-\frac{3}{5}x - 6 < -\frac{2}{5}x + 7$

g. $3 \leq \frac{2x-3}{5} < 7$

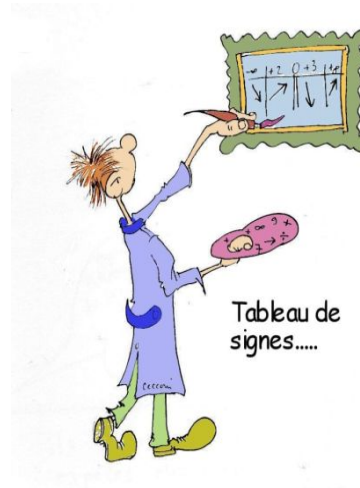
h. $|2x + 5| < 4$

5.4. Méthode générale de résolution

Si l'inéquation ne se ramène pas après simplifications à une inéquation du premier degré, on suit la démarche suivante :



1. On regroupe tous les termes dans le membre de gauche pour que celui de droite soit égal à 0.
2. On factorise (si possible) le membre de gauche en le mettant sous forme d'un produit ou d'un quotient.
3. On étudie le signe de chacun des facteurs dans un **tableau de signes** (voir les exemples ci-après).
4. On conclut en observant la dernière ligne du tableau.



Exemple 1 Résoudre l'inéquation $\frac{x-1}{x-2} > 0$.

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser un tableau de signes. Le quotient $\frac{x-1}{x-2}$ est positif si $x-1 > 0$ et $x-2 > 0$, ou si $x-1 < 0$ et $x-2 < 0$.

Important ! Dans la première ligne du tableau, les racines sont classées par **ordre croissant**.

	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
signe de $(x - 1)$	−	0	+	+	+
signe de $(x - 2)$	−	−	−	0	+
signe de $\frac{x-1}{x-2}$	+	0	−		+

On lit sur la dernière ligne du tableau que l'inéquation proposée a pour solution tous les réels x tels que $x < 1$ ou $x > 2$.

Exemple 2 Résoudre l'inéquation $-x^3 + 4x^2 + x - 4 \leq 0$.

Le polynôme $-x^3 + 4x^2 + x - 4$ a trois racines : -1 , 1 et 4 .

On peut donc le factoriser : $-x^3 + 4x^2 + x - 4 = (x + 1)(1 - x)(x - 4)$

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
signe de $(x + 1)$	-	0	+	+	+	+	+
signe de $(1 - x)$	+	+	+	0	-	-	-
signe de $(x - 4)$	-	-	-	-	-	0	+
signe de $(x + 1)(1 - x)(x - 4)$	+	0	-	0	+	0	-

On lit sur la dernière ligne du tableau que l'inéquation proposée a pour solution tous les réels x tels que $-1 \leq x \leq 1$ ou $x \geq 4$.



Il faut se méfier des fractions ! On n'a pas le droit de multiplier l'inégalité par le dénominateur de la fraction s'il contient une variable ; en effet, comme la valeur de x est inconnue, on ne sait pas si c'est un nombre positif ou négatif ! On ne sait donc pas si le sens de l'inéquation changera après multiplication. **On ne peut multiplier (ou diviser) les deux côtés d'une inégalité que par des valeurs connues** (des constantes).

Exercice 5.5

Résolvez les inéquations suivantes :

a. $\frac{x-3}{x^2-3x+2} \geq 0$

b. $\frac{x+1}{x-1} > \frac{x-1}{x+1}$

c. $\frac{1}{x} \geq x$

d. $\frac{13}{2-x} \leq 7 - \frac{4}{3x+1}$

Exercice 5.6

Résolvez les inéquations suivantes :

a. $x^2 - 5x + 9 > x(x - 1) + 12$

b. $x^2 - 5x + 6 \leq 0$

c. $x^2 - 3x - 28 > 0$

d. $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$

e. $4x^3 - 10x^2 + 48x < 0$

Exercice 5.7

L'indice de masse corporelle (ou IMC) donne une évaluation de la corpulence pour les adultes de 20 à 65 ans. Il se calcule simplement en divisant le poids (en kilos) par la taille (en mètres) au carré. D'après l'OMS, la corpulence est normale si l'IMC est compris entre 18.5 et 25.

Si une personne mesure 175 cm, dans quelle fourchette de poids doit-elle se situer pour avoir une corpulence normale ?

Exercice 5.8

Pour qu'un médicament soit efficace, il faut que sa concentration dans le sang dépasse une certaine valeur, appelée niveau thérapeutique minimal. Admettons que la concentration c (en mg/l) d'un certain médicament t heures après qu'on l'a pris oralement est donnée par

$$c = \frac{20t}{t^2 + 4}.$$

Si le niveau thérapeutique minimal est 4 mg/l, déterminez quand ce niveau sera dépassé.

5.5. Domaines du plan

Si D est la droite d'équation $ax + by + c = 0$ dans le repère canonique, alors l'ensemble des points M de coordonnées $(x ; y)$ vérifiant $ax + by + c \geq 0$ est un demi-plan P_1 de frontière D . Sur l'autre demi-plan P_2 de frontière D , on a donc $ax + by + c \leq 0$.

Exemple Le système
$$\begin{cases} 2x + 4y \leq 10 \\ 3x - 4y \geq 2 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$$
 se représente graphiquement en utilisant les trois droites D_1 , D_2 et D_3 d'équations :

$$D_1 : 2x + 4y = 10$$

$$D_2 : 3x - 4y = 2$$

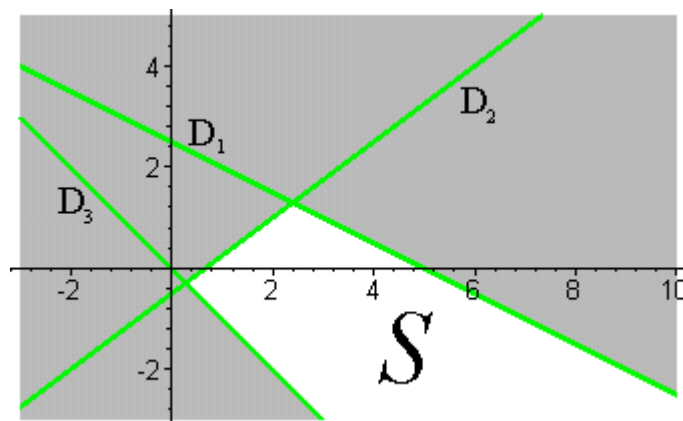
$$D_3 : x + y = 0$$

L'ensemble des points M de coordonnées $(x ; y)$ vérifiant $2x + 4y \leq 10$ est donc un des demi-plans de frontières D_1 . Cette droite passe, par exemple, par les points A de coordonnées $(5 ; 0)$ et B de coordonnées $(1 ; 2)$.

On trace cette droite, puis on prend un point test, c'est-à-dire, un point n'appartenant pas à D_1 qui permettra de savoir dans quel demi-plan on a $2x + 4y \leq 10$. Prenons, par exemple, le point O $(0 ; 0)$. Les coordonnées de O vérifient bien $2x + 4y \leq 10$. Donc ce point appartient à l'ensemble des points M de coordonnées $(x ; y)$ tels que $2x + 4y \leq 10$. L'ensemble des points M dont les coordonnées vérifient $2x + 4y \leq 10$ est donc le demi-plan de frontière D_1 et contenant le point O . Par commodité, on hachure l'autre demi-plan (celui qui n'est pas solution). Il ne reste plus qu'à tracer la droite D_1 et à hachurer le demi-plan non-solution.

On fait de même pour $3x - 4y \geq 2$, en traçant la droite D_2 . Pour $x + y \geq 0$, on trace D_3 mais on ne peut pas prendre le point O comme point test car ce point est situé sur la droite D_3 . On choisit alors un autre point, par exemple C de coordonnées $(1 ; 1)$.

Après avoir hachuré les trois demi-plans de frontières D_1 , D_2 et D_3 qui ne vérifient pas les inéquations correspondant aux droites, la partie non-hachurée est alors la solution.



Exercice 5.9

Dessinez les domaines correspondant aux contraintes suivantes :

$$\text{a. } \begin{cases} 2x + 3y \leq 12 \\ 3x + y \leq 9 \\ x + y \geq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} -x + 2y \geq 0 \\ 2x + y \geq 0 \\ 2x + y \leq 5 \end{cases}$$

5.6. Ce qu'il faut absolument savoir

Maîtriser les notations des intervalles

☐ ok

Connaître les propriétés des inégalités

☐ ok

Résoudre des inéquations

☐ ok

Dessiner un domaine du plan défini par un ensemble d'inégalités

☐ ok

6. Les différents types de démonstrations

En mathématiques, une **démonstration** est un raisonnement qui permet, à partir de certains axiomes, d'établir qu'une assertion est nécessairement vraie.

Les démonstrations utilisent la logique mais incluent habituellement des éléments du langage naturel en évitant tant que possible d'introduire des ambiguïtés.

Un résultat qui est démontré s'appelle un **théorème**. Une fois le théorème démontré, il peut être utilisé comme base pour démontrer d'autres assertions.

Une assertion qui est supposée vraie mais qui n'a pas encore été démontrée est appelée une **conjecture**.

6.1. Démonstration directe

Elle consiste à démontrer la proposition énoncée (par exemple un théorème) en partant directement des hypothèses données et en arrivant à la conclusion par une suite d'implications logiques.

Exemple Soit n un nombre entier positif ou nul ($n \in \mathbb{N}$) et considérons $P(n) = n^2 + 7n + 12$. Alors il n'existe pas de n tel $\sqrt{P(n)} \in \mathbb{N}$.

Démonstration Pour tout n , on a :

$$n^2 + 6n + 9 < n^2 + 7n + 12 < n^2 + 8n + 16,$$

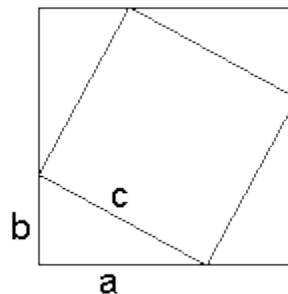
$$\text{d'où } (n+3)^2 < P(n) < (n+4)^2.$$

Puisque $n+3 > 0$, on déduit que $(n+3) < \sqrt{P(n)} < (n+4)$.

Donc $\sqrt{P(n)} \notin \mathbb{N}$, puisqu'il est strictement compris entre deux entiers consécutifs.

Exercice 6.1

Utilisez le dessin ci-dessous pour démontrer le théorème de Pythagore :



Exercice 6.2

Le triangle ABC est rectangle en A .

La hauteur issue de A coupe le segment $[BC]$ en H .

Le point I est le milieu du segment $[HB]$ et le point J , le milieu du segment $[AH]$.

Démontrez que les droites (CJ) et (AI) sont perpendiculaires.

6.2. Démonstration par l'absurde

Elle consiste à supposer le contraire de la proposition énoncée et de montrer qu'on aboutit alors à une contradiction (impossibilité).

Exemple Comme exemple, nous démontrerons l'irrationalité de $\sqrt{2}$, i.e. $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Rappelez-vous qu'un nombre rationnel est un nombre qui peut être exprimé sous la forme a/b , où a et b sont des nombres entiers et b est différent de 0.

Tout d'abord, supposons que $\sqrt{2}$ est *rationnel* :

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

où a et b sont premiers entre eux (i.e. les deux entiers n'ont pas de facteurs en commun). En d'autres mots, a/b est sous forme irréductible. Continuons :

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$2b^2 = a^2$$

Nous avons maintenant trouvé que a^2 est un certain entier multiplié par 2. Par conséquent, a^2 doit être divisible par 2 ; autrement dit, il est pair. Comme le carré d'un nombre impair est lui-même impair, a doit être pair lui aussi. Nous pouvons maintenant écrire que $a = 2c$, où c est un autre entier.

$$2b^2 = (2c)^2$$

$$2b^2 = 4c^2$$

$$b^2 = 2c^2$$

Nous avons découvert que b^2 est aussi un entier multiplié par 2. En suivant le raisonnement précédent, b doit être un entier pair. Ici, nous avons une contradiction : les deux nombres entiers a et b sont pairs. En d'autres termes, nous venons de démontrer que ces deux nombres ont un facteur commun : 2. Mais nous avons déjà supposé que ces deux nombres n'avaient pas de facteur commun ! Puisqu'une telle contradiction a été établie, nous **devons** conclure que notre supposition d'origine était fausse.

Par conséquent, on ne peut pas trouver deux entiers a et b premiers entre eux tels qu'on puisse écrire $\sqrt{2}$ sous la forme a/b , donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 6.3

Démontrez que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 6.4

Démontrez qu'il existe un nombre infini de nombres premiers.

Exercice 6.5

On couvre un carré 6 x 6 avec 18 dominos sans chevauchements et sans dépasser les bords. Montrez qu'il existe toujours une droite qui coupe le carré en deux parties mais qui ne divise aucun des dominos.

6.3. Démonstration par récurrence ou induction

Soit $P(n)$ une propriété de l'entier $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'on a les deux assertions suivantes :

1. $P(0)$ est vraie (ancrage) ;
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ implique $P(n+1)$ (hérédité).

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.



L'hypothèse d'hérédité signifie que si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ l'est aussi. Dans ces conditions, $P(n)$ est vraie pour tout n . En effet, $P(0)$ est vraie par l'hypothèse d'ancrage, donc $P(1)$ l'est par hérédité, donc $P(2)$ aussi pour la même raison, etc. On a un « effet dominos ».

Une démonstration par récurrence contient toujours deux étapes :

1. **L'initialisation** : c'est la vérification de $P(0)$. Il ne faut jamais l'oublier !
2. **La récurrence proprement dite** : on suppose que la propriété $P(n)$ est vraie (on l'appelle hypothèse de récurrence), et on essaie de montrer $P(n+1)$ à partir d'elle.

Exemple On veut démontrer par récurrence la propriété suivante : « pour tout entier naturel n et tout réel x strictement positif, $(1+x)^n \geq 1+nx$ ».

- $(1+x)^0 = 1 \geq 1+0x$, donc la propriété est vraie au rang 0.
- Supposons la propriété vraie pour un certain rang n , c'est-à-dire supposons que $(1+x)^n \geq 1+nx$
- Alors, $(1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx)$,
d'où $(1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x+nx^2$,
donc, $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$ (puisque x est positif),
par conséquent, $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$
La propriété reste donc vraie au rang $n+1$.
- Conclusion : elle est vraie quel que soit l'entier naturel n .

Exercice 6.6

Démontrez les formules suivantes :

- a. $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
b. $1+4+9+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
c. $1+8+27+\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice 6.7

Démontrez que ...

- a. $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6 pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b. $7^{n+1} + 2$ est divisible par 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

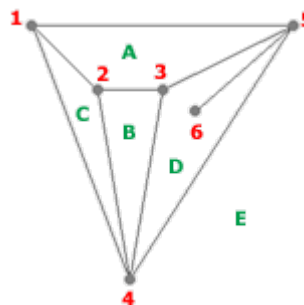
Exercice 6.8

Dessignons sur une feuille des points. Nous les appellerons des *sommets*. Relions ces sommets par des *arêtes*, pas forcément rectilignes, qui ne se coupent pas. Depuis chaque sommet, on doit pouvoir atteindre tous les autres sommets en suivant les arêtes (on parle de *graphe connexe*). Appelons *régions* les surfaces de la feuille délimitées par des arêtes.

Par exemple, avec six sommets et neuf arêtes, le dessin ci-dessous divise le plan en cinq régions (A, B, C, D, E). On remarque que quatre régions sont limitées alors que la cinquième (E), extérieure au diagramme, ne l'est pas.



Leonhard **Euler**
(Bâle, 15/4/1707 -
St-Petersbourg, 18/9/1783)



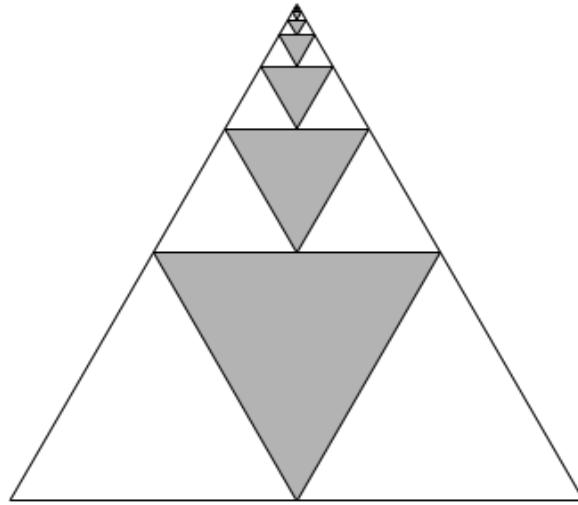
Formulé par le mathématicien suisse Léonard **Euler** en 1752, la **relation d'Euler** énonce une formule mathématique qui relie le nombre d'arêtes (a), de sommets (s), et de régions (r) : $r - a + s = 2$.

Démontrez cette relation par induction.

6.4. « Preuves sans mots »

Exercice 6.9

Comprenez-vous cette « preuve sans mots » ?



$$\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^5} \dots$$

Exercice 6.10

Démontrez sans mots que $1 + 3 + 5 + \dots + (2p-1) = p^2$.

7. Poser et résoudre un problème

Savoir résoudre un problème, cela s'apprend ! C'était le credo du mathématicien hongrois George **Polya** quand il publia en 1945 son livre *How to solve it*, en Français « Comment le résoudre ». Traduit dans plus de 17 langues et vendu à l'époque à plus d'un million d'exemplaires, le livre de George Polya est vite devenu la bible des étudiants en science. Brillant pédagogue, Polya avait identifié les quatre principes élémentaires à respecter pour se donner un maximum de chances de résoudre un problème posé.

7.1. Comprendre le problème



George **Polya**
(Budapest, 13/12/1887 -
Palo Alto, 7/9/1985)

En premier lieu, il faut comprendre le problème et son énoncé. La plupart du temps, le simple fait de ne pas bien maîtriser la signification d'une partie même infime du problème empêche de poursuivre le raisonnement. Aux yeux de Polya, il faut se poser certaines questions références ayant pour objet de vérifier que l'on a bien tout compris.

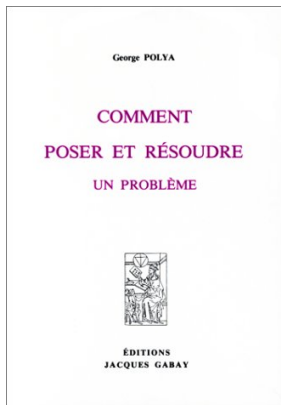
Quelle est l'inconnue ? Quelles sont les données ? Quelle est la condition ?

Est-il possible de satisfaire à la condition ? La condition est-elle suffisante pour déterminer l'inconnue. Est-elle insuffisante ? Redondante ? Contradictoire ?

Dessinez une figure. Introduisez la notation appropriée.

Distinguez les diverses parties de la condition. Pouvez-vous les formuler ?

7.2. Concevoir un plan



George Polya
**Comment poser et résoudre
un problème**
éditions Jacques Gabay (1989)
Broché - 237 pages
ASIN : 2876470497

Deuxième principe posé par Polya : établir un plan d'attaque. En d'autres termes, c'est l'élaboration et le choix de la stratégie à suivre qui va assurer un maximum de succès car trop souvent on disperse son esprit en réfléchissant de 36 façons différentes.

Avez-vous déjà rencontré ce problème ? Ou bien avez-vous rencontré le même problème sous une forme légèrement différente ?

Connaissez-vous un problème qui s'y rattache ? Connaissez-vous un théorème qui puisse être utile ?

Regardez bien l'inconnue et essayez de penser à un problème qui vous soit familier et qui ait la même inconnue ou une inconnue similaire.

Voici un problème qui se rattache au vôtre et que vous avez déjà résolu. Pourriez-vous vous en servir ? Pourriez-vous vous servir de son résultat ? Pourriez-vous vous servir de sa méthode ? Vous faudrait-il introduire un élément auxiliaire quelconque pour pouvoir vous en servir ?

Pourriez-vous énoncer le problème différemment ? Pourriez-vous l'énoncer sous une autre forme encore ? Reportez-vous aux définitions.

Si vous ne pouvez résoudre le problème qui vous est proposé, essayez de résoudre d'abord un problème qui s'y rattache. Pourriez-vous imaginer un problème qui s'y rattache et qui soit plus accessible ? Un problème plus général ? Un problème plus particulier ? Un problème analogue ?

Pourriez-vous résoudre une partie du problème ? Ne gardez qu'une partie de la condition, négligez l'autre partie ; dans quelle mesure l'inconnue est-elle alors déterminée, comment peut-elle varier ?

Pourriez-vous tirer des données un élément utile ? Pourriez-vous penser à d'autres données qui pourraient vous permettre de déterminer l'inconnue ?

Pourriez-vous changer l'inconnue, ou les données, ou toutes deux s'il est nécessaire, de façon que la nouvelle inconnue et les nouvelles données soient plus rapprochées les unes des autres ? Vous êtes-vous servi de toutes les données ? Vous êtes-vous servi de la condition toute entière ? Avez-vous tenu compte de toutes les notions essentielles que comportait le problème ?

7.3. Mettre le plan à exécution

Le troisième principe de Polya est même plus simple que les deux premiers car il s'agit là de savoir se tenir à la stratégie adoptée. Il faut donc savoir faire preuve de patience, ne pas se décourager et si vraiment cela est nécessaire, changer de méthode.

En mettant votre plan à exécution, vérifiez-en chaque détail l'un après l'autre.

Pouvez-vous voir clairement si ce détail est correct ? Pouvez-vous démontrer qu'il est correct ?

7.4. Revenir sur sa solution

Le dernier principe posé par Polya consiste à se relire, à jeter un oeil sur ce que l'on vient de faire, en considérant ce qui a semblé fonctionner et ce qui n'a pas marché. Cela permet de mieux comprendre pourquoi il fallait recourir à la stratégie employée dans ce cas et de la sorte réfléchir plus vite lors de problèmes futurs.

Pouvez-vous vérifier le résultat ?

Pouvez-vous vérifier le raisonnement ?

Pouvez-vous obtenir le résultat différemment ? Pouvez-vous le voir d'un coup d'œil ?

Pouvez-vous vous servir du résultat ou de la méthode pour quelque autre problème ?

Toute la pertinence de George Polya, c'est véritablement d'avoir mis au point une méthode qui peut servir bien au-delà des seuls problèmes mathématiques. Essayez de l'appliquer dans la vie courante, vous ne serez pas déçu du résultat si vous respectez bien les quatre principes fondamentaux.



Solutions des exercices

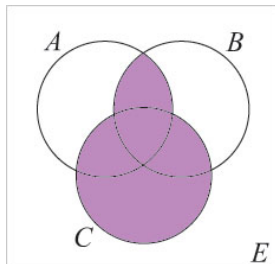
Chapitre 1

- 1.1.** $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
 $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
 $C = \{0, 1, 4, 9, 16\}$
 $D = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$
 $E = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$

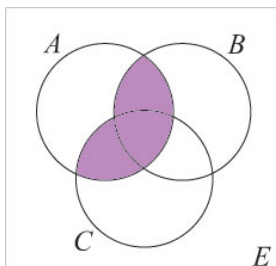
- 1.2.** $A = \{2x+1 \mid x \in \mathbb{N}\}$
 $B = \{4x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } 2 \leq x \leq 20\}$
 $C = \mathbb{Z}^*$
 $D = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leq x \leq 6\}$
 $E = \{\frac{x}{x+1} \mid x \in \mathbb{N}^*\}$
 $F = \{6x+3 \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } x \leq 5\}$

- 1.3.** a. $A \setminus (B \cup C)$
b. $B \setminus (A \cap C)$
c. $\overline{A \cup B \cup C} \cup (A \cap B \cap C)$
d. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)$

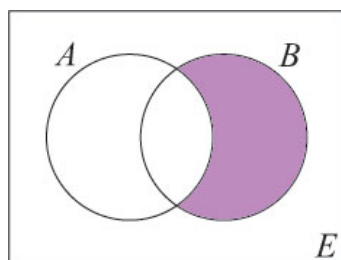
- 1.4.** a.



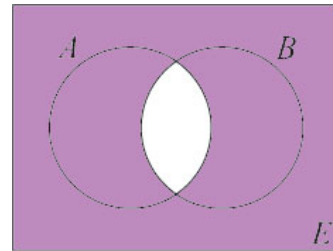
- b.



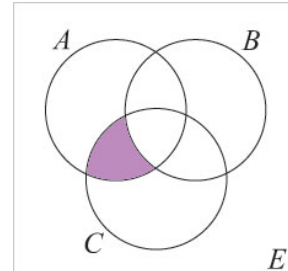
- c.



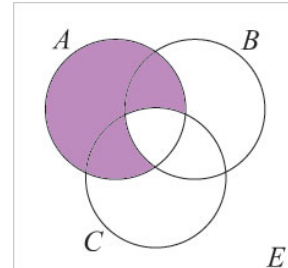
- d.



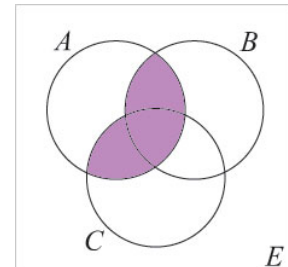
- e.



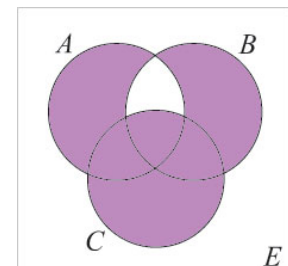
- f.



- g.



- h.



Chapitre 2

- 2.1.** a. oui b. non c. non

- 2.2.** a. $\frac{7}{3}$ b. $\frac{25}{36}$ c. $\frac{8}{3}$

$$\begin{array}{lll} \text{d. } \frac{29}{31} & \text{e. } \frac{3}{8} & \text{f. } \frac{11}{21} \\ \text{g. } \frac{7}{15} & \text{h. } \frac{12}{7} & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{2.3. a. } 1 & \text{b. } \frac{7}{6} & \text{c. } \frac{1}{6} \\ \text{d. } \frac{11}{12} & \text{e. } \frac{12}{5} & \text{f. } \frac{53}{308} \\ \text{g. } \frac{11}{3} & \text{h. } \frac{41}{12} & \text{i. } -\frac{337}{128} \end{array}$$

$$\text{2.4. a. } \frac{16}{5} \quad \text{b. } 55 \quad \text{c. } \frac{4}{7} \quad \text{d. } 1$$

$$\begin{array}{lll} \text{2.5. a. } \frac{1}{12} & \text{b. } \frac{9}{20} & \text{c. } \frac{18}{11} \\ \text{d. } \frac{175}{216} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{2.6. a. } \frac{28}{99} & \text{b. } \frac{428}{99} & \text{c. } 1 \\ \text{d. } \frac{117}{25} & \text{e. } \frac{5852}{24975} & \text{f. } 100 \\ \text{g. } \frac{25279}{9999} & \text{h. } \frac{9901}{99} & \end{array}$$

2.7. oui

$$\text{2.8. a. } \frac{1}{5} \quad \text{b. } \frac{1}{4}$$

2.9. a. le cadeau pour Charlotte est un peu plus cher
b. $\frac{8}{63}$

$$\text{2.10. a. } 5.25 \text{ €} \quad \text{b. } 15\%$$

$$\text{2.11. } 1.06 \text{ kg}$$

$$\text{2.12. a. } 10500 \text{ €} \quad \text{b. } 4429.69 \text{ €}$$

2.13. Le gasoil a diminué de 6.5% environ.
Le gasoil coûtera 0.82 €/l

2.14. L'inflation annuelle est de 101,2%.
Chaque année, les prix ont plus que doublé !

$$\begin{array}{ll} \text{3.2. a. } -2a^6b^2c & \text{b. } 6a^3b^2d \\ \text{c. } 16a^8 & \text{d. } a^8b^2c^6 \\ \text{e. } \frac{-2}{a^2c} & \text{f. } \frac{3bd}{ac^2} \\ \text{g. } -3a^2b & \text{h. } -2ab^3+2ab^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{3.3. a. } 10x^2+8x-9 & \text{degré 2} \\ \text{b. } -5x^3+2x^2+3x & \text{degré 3} \\ \text{c. } (-5a^2+2a)x & \text{degré 1} \\ \text{d. } (3ab+1)x^2+2x+3 & \text{degré 2} \\ \text{e. } -bx^3+(a+7)x^2+cx & \text{degré 3} \\ \text{f. } x^6+5x^3 & \text{degré 6} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{3.4. a. } ax^2+(-3a^2-1)x & \\ \text{b. } x^3+3x^2-x-3 & \\ \text{c. } 2x^4+7x^3+x^2-7x-3 & \\ \text{d. } x^3+3x^2+3x+1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{3.5. a. } 7a(1-a+b) & & \\ \text{b. } (2a+1)(2a-1) & & \\ \text{c. } (a-2)(a^2+2a+4) & & \\ \text{d. } (a-b)(x-3) & & \\ \text{e. } (x+3)(x+2) & & \\ \text{f. } (a-1)(a+1)(a+2) & & \\ \text{g. } (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) & & \\ \text{h. } (a^2-b^2)^2 & & \\ \text{i. } (a+b)(2+a+b)(2-a-b) & & \\ \text{j. } 3(x+2)(x-8) & & \\ \text{k. } (x+4)(x-7) & & \\ \text{l. } (1-xy)(1+xy) & & \\ \text{m. } (2a^2-1)(4a^4+2a^2+1) & & \\ \text{n. } (a+b+x)(a+b-x) & & \\ \text{o. } x(x+3)(x-2) & & \\ \text{p. } (a+1)(a^2-4a+7) & & \\ \text{q. } 7 & \text{r. } 9 & \text{s. } 10 \\ \text{t. } 14 & \text{u. } 3 & \text{v. } 77 \\ \text{w. } 3/x+2+4 \cdot 3-1 & & \\ \text{x. } 4 \cdot x+5(2+x) & & \\ \text{y. } (x+2)(x-1)+3 \cdot x-(x+2) & & \\ \text{z. } (x-3)^2 \cdot (x-4)+(x+2)^3 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{3.6. a. } \frac{3a^4}{2c^4} & \text{b. } \frac{5}{7} \\ \text{c. } \frac{1+b}{2b} & \text{d. } b-a \\ \text{e. } \frac{a^2+a+1}{(a-1)^2} & \text{f. } \frac{x-3}{x-2} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{3.7. a. } \frac{5a}{6} & \text{b. } \frac{14a}{15} \\ \text{c. } \frac{4-a^2}{2a} & \text{d. } \frac{a+b}{ab} \end{array}$$

Chapitre 3

$$\begin{array}{ll} \text{3.1. a. } -15a^2b^2cxy & \\ \text{b. } 24ac^3yz^2 & \end{array}$$

e. $\frac{5x}{(x+2)(x-3)}$ f. $\frac{1}{b-a}$

3.8. a. $\frac{2}{3}b^2$ b. $\frac{ab(a-b)}{a+b}$ c. $\frac{a^2c}{2b}$

3.9. a. 12 b. 49 c. 14 d. 165 e. 11
f. -9 g. $33/15 = 2.2$

3.10. a. $n+1$ b. $3n$ c. $2(n-1)$
d. $n \cdot (n+1)$ e. $2n+1$ f. 2^n
g. $1/x$ h. $-x$ i. $2(-1/(4x-1))^2$

3.11. $x+y$ est une somme
 x^2-y^2 est la différence de carrés
 $2(x+y)^2$ est le double du carré d'une somme
 $(x-y)^2$ est le carré d'une différence
 xy est un produit
 $(x+y)^2$ est le carré d'une somme
 $(x-y)(x+y)$ est le produit d'une somme
par une différence
 $2xy$ est un double produit
 $(2(x+y))^2$ est le carré du double d'une somme
 x^2+y^2 est la somme de carrés

3.12. a. $x = -\frac{1}{6}$ b. $x = \frac{3}{16}$
c. $x = \pm 2$ d. $x = 0$
e. pas de solution

3.13.

a. $r = \pm \sqrt{G \frac{m_1 m_2}{F}}$; $G = \frac{F r^2}{m_1 m_2}$; $m_1 = \frac{F r^2}{G m_2}$;
 $m_2 = \frac{F r^2}{G m_1}$

b. $l = \frac{T^2 g}{4\pi^2}$; $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$

c. $v_0 = v - a \cdot t$; $a = \frac{v - v_0}{t}$; $t = \frac{v - v_0}{a}$

d. $x_0 = x - \frac{1}{2} a \cdot t^2$; $a = 2 \frac{x - x_0}{t^2}$; $t = \pm \sqrt{2 \frac{x - x_0}{a}}$

e. $R = \frac{U}{I}$; $I = \frac{U}{R}$

f. $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$; $R_1 = \frac{R R_2}{R_2 - R}$; $R_2 = \frac{R R_1}{R_1 - R}$

g. $R = \frac{U^2}{P}$; $U = \pm \sqrt{P R}$

h. $R = \frac{W}{t \cdot I^2}$; $t = \frac{W}{R \cdot I^2}$; $I = \pm \sqrt{\frac{W}{R \cdot t}}$

Chapitre 4

4.1. a. $-1/2$ b. $12/25$ c. $-3/4$ d. $4/5$ e. \mathbb{R}
f. $-2/3$ g. pas de solution

4.2. a. 5.5 b. pas de solution c. 3 d. 6
e. 3 f. -5

4.3. a. 4 b. 3 c. \mathbb{R} d. $4a - b$

4.4. a. 1 ; 2 b. 1 ; 4 c. pas de solutions
d. -3 e. $\frac{5 \pm \sqrt{41}}{4}$ f. $1 \pm \sqrt{13}$
g. pas de solutions h. 0 ; $2 - \sqrt{5}$

4.5. $k_1 = -6$, $k_2 = 2$

4.6. a. 2 ; -2 ; 1 ; -1 b. 1 ; -1
c. pas de solutions d. $\sqrt[3]{7}$; $-\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$

4.7. $x_1 = -7$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$

4.8. $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $x_4 = 6$

4.9. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$

4.10. $x_1 = 2$, x_2 et $x_3 \notin \mathbb{R}$

4.11. $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$

4.12. a. 7 et 5 b. 2 c. 4.29 d. pas de solution
e. $24/7$ f. $\sqrt[3]{1 \pm \sqrt{5}}$ g. 4 et 3

4.13. On n'a pas le droit de simplifier par 0 ($a - b$)

4.14. Le problème vient du fait $(y - v)^2 = (v - y)^2$

Chapitre 5

5.1. a. vrai b. faux c. vrai d. vrai

5.2. a. $[-5 ; 2]$ b. $]0 ; 7[$ c. $[-6 ; 0[$
d. $]-2 ; 4[$ e. $]-\infty ; -2[$ f. $]1 ; +\infty[$
g. $]-\infty ; 0[\cup]4 ; 10[$
h. $]-\infty ; 3[\cup]4 ; +\infty[$

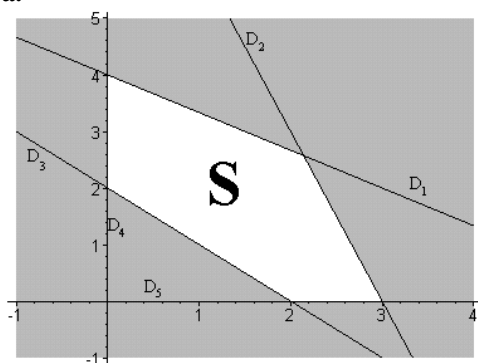
5.3. a. $]-2 ; 7[$ b. $]3 ; 8]$ c. $[-4 ; +\infty[$
d. $]-\infty ; 1[\cup]2 ; 3[$

- 5.4. a. $]-\infty; -\frac{8}{3}[$ b. \emptyset c. $]-\infty; -\frac{4}{5}]$
 d. \mathbb{R} e. $]32; +\infty[$ f. $] -65; +\infty[$
 g. $[9; 19[$ h. $] -\frac{9}{2}; -\frac{1}{2}[$
- 5.5. a. $]1; 2[\cup]3; +\infty[$ b. $] -1; 0[\cup]1; +\infty[$
 c. $] -\infty; -1[\cup]0; 1[$ d. $] -\infty; -\frac{1}{3}[\cup]2; +\infty[$
- 5.6. a. $] -\infty; -\frac{3}{4}[$ b. $[2; 3]$
 c. $] -\infty; -4[\cup]7; +\infty[$
 d. $] -2; -1[\cup]1; 2[$ e. $] -\infty; 0[$

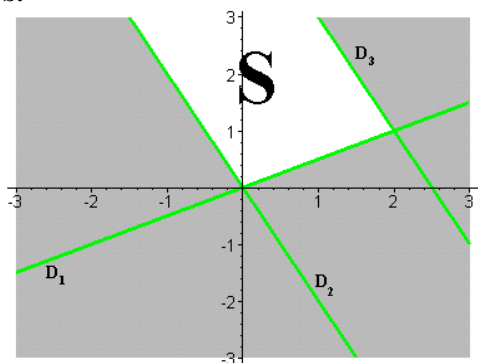
5.7. entre 57 et 76 kilos

5.8. $1 < t < 4$

5.9. a.



b.



6.2. Nous savons que I est le milieu de $[BH]$ et que J est le milieu de $[AH]$. Or, on sait que dans un triangle, la droite qui relie les 2 milieux de 2 côtés est parallèle au 3ème côté. En appliquant cette propriété au triangle AHB , on en déduit que (IJ) est parallèle à (BA) .

Comme ABC est rectangle en A , alors (BA) est perpendiculaire à (AC) . Or, nous venons de démontrer que (IJ) est parallèle à (BA) . Par conséquent, (IJ) est perpendiculaire à (AC) . (IJ) est donc une hauteur du triangle AIC .

(AH) et (IJ) sont 2 hauteurs du triangle AIC et sont concourantes en J . Comme les 3 hauteurs d'un triangle se coupent en un même point, alors la troisième hauteur de sommet C passe aussi par J . Or la droite (CJ) passe par J : c'est donc la 3ème hauteur du triangle.

(CJ) étant une hauteur de AIC , alors les droites (CJ) et (AI) sont perpendiculaires.

6.3. La démonstration est la même que pour $\sqrt{2}$.

6.4. Supposons qu'il existe un nombre fini (k) de nombres premiers notés p_1, p_2, \dots, p_k . Posons $N = p_1 p_2 \dots p_k + 1$. Par construction, N est distinct de p_1, p_2, \dots, p_k , donc n'est pas premier.

D'après l'hypothèse, N n'est divisible par aucun des p_i , car le reste de la division euclidienne de N par p_i vaut 1. On vient donc de découvrir un $(k+1)$ ème nombre premier, ce qui contredit l'hypothèse.

6.5. Raisonnons par absurde et supposons que chaque droite divise un domino. Subdivisons le carré en 36 carrés unité et considérons les 25 droites qui coupent le carré 6×6 mais aucun des carrés unité. Par hypothèse, chacune de ces droites divise au moins un domino.

La droite g divise le grand carré en deux rectangles de la forme $6 \times k$ et $6 \times (6 - k)$. En particulier dans chacun des deux rectangles il y a un nombre pair de carrés unité. Chaque domino qui se trouve entièrement dans un des rectangles y couvre exactement deux carrés unité. Si un domino est coupé en deux par g , alors il couvre exactement un carré unité dans chacun des rectangles.

Il s'ensuit directement que g doit couper en deux un nombre pair de dominos, car sinon il n'y aurait qu'un nombre impair de carrés unité couverts de chaque côté de la droite.

En particulier, nous pouvons conclure que g divise au moins deux dominos.

Chapitre 6

6.1. $(a + b)^2 = 4 \cdot ab/2 + c^2$ que l'on simplifie.

Chacune des 10 droites coupe donc au moins deux dominos. De plus, il est clair qu'un domino ne peut pas être coupé par plus qu'une droite à la fois. Il s'ensuit donc qu'on doit avoir au moins 20 dominos. Comme par hypothèse nous n'en avons que 18, nous obtenons la contradiction désirée.

6.6. a. vrai pour $n=1$

Supposons que la relation est vraie pour n et démontrons-la pour $n+1$:

$$1+2+3+\dots+n+(n+1) = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Nous avons supposé vraie la relation :

$$1+2+3+\dots+n = \frac{(n+1)n}{2}, \text{ donc, on a}$$

$$1+2+3+\dots+n+(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)n+(n+1) =$$

$$(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{1}{2}(n+2)(n+1), \text{ qui est ce que}$$

nous devons démontrer.

6.7. a. Parmi n , $n+1$ et $n+2$, au moins un des trois est pair et un des trois est multiple de 3. Donc $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6.

b. Par induction :

Vrai pour $n=0$: 9 est divisible par 3.

Supposons que $7^{n+1} + 2$ est divisible par 3.

Pour $n+1$ on a :

$$7^{n+2} + 2 = 7 \cdot 7^{n+1} + 2 = 7 \cdot (7^{n+1} + 2) - 12.$$

Si $7^{n+1} + 2$ est divisible par 3, alors $7 \cdot (7^{n+1} + 2) - 12$ l'est aussi.

La relation est donc vraie pour tout n entier.

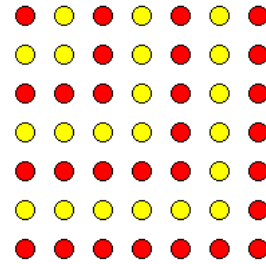
6.8. $r - a + s = 2$ est vraie si le graphe se limite à un sommet. En effet, comme on n'a qu'une région, $1 - 0 + 1 = 2$.

Si on ajoute un sommet, on doit forcément ajouter une arête pour que le graphe reste connexe.

On aura donc $r - (a+1) + (s+1) = r - a + s = 2$.

Si on ajoute une arête entre deux sommets déjà présents, on ajoute forcément une région. On aura donc $(r+1) - (a+1) + s = r - a + s = 2$.

6.10.



$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$