

Fonctions d'une variable



Didier Müller, août 2013

www.nymphomath.ch

Table des matières

1. Fonctions

1.1. Introduction au concept de fonction.....	1
1.2. Injection, surjection, bijection.....	4
1.3. Propriétés particulières de certaines fonctions.....	7
1.4. Compositions de fonctions.....	7
1.5. Ce qu'il faut absolument savoir.....	8

2. Fonctions affines

2.1. Fonction constante.....	9
2.2. Fonction linéaire.....	9
2.3. Fonction affine.....	9
2.4. Comment dessiner une droite donnée sous la forme d'une fonction ?.....	10
2.5. Notion de pente.....	11
2.6. Équation d'une droite connaissant sa pente et un point.....	12
2.7. Comment trouver l'équation d'une droite connaissant deux points ?.....	12
2.8. Comment trouver l'intersection de deux fonctions affines ?.....	13
2.9. Angle entre deux droites.....	14
2.10. Ce qu'il faut absolument savoir.....	14

3. Fonctions quadratiques

3.1. Exercices de découverte.....	15
3.2. Résumé des découvertes.....	17
3.3. Exercices complémentaires.....	17
3.4. Ce qu'il faut absolument savoir.....	20

4. Puissances et racines

4.1. Puissances à exposants entiers.....	21
4.2. Bases arithmétiques.....	22
4.3. Racines.....	24
4.4. Puissances à exposants rationnels.....	25
4.5. Ce qu'il faut absolument savoir.....	26

5. Logarithmes et exponentielles

5.1. Un peu d'histoire.....	27
5.2. Introduction.....	27
5.3. Propriétés.....	29
5.4. Définition du nombre e.....	30
5.5. Résolution d'équations.....	30
5.6. Passage d'une base à une autre.....	31
5.7. Graphes.....	32
5.8. Applications.....	33
5.9. Ce qu'il faut absolument savoir.....	35

6. Fonctions trigonométriques

6.1. Fonctions périodiques et fonctions trigonométriques.....	37
6.2. Équations trigonométriques simples.....	42
6.3. Relations trigonométriques.....	46
6.4. Ce qu'il faut absolument savoir.....	48

1. Fonctions

Le terme mathématique **fonction** apparaît à la fin du 17^{ème} siècle, quand le calcul différentiel et intégral en était aux premiers stades de son développement. Cet important concept est maintenant l'épine dorsale des cours avancés de mathématiques et il est indispensable dans tous les domaines scientifiques.

Dans ce cahier, nous allons d'abord nous familiariser avec le concept de fonction et quelques notions importantes associées, avant d'étudier en détails les fonctions les plus courantes, en allant de la plus simple à la plus compliquée.

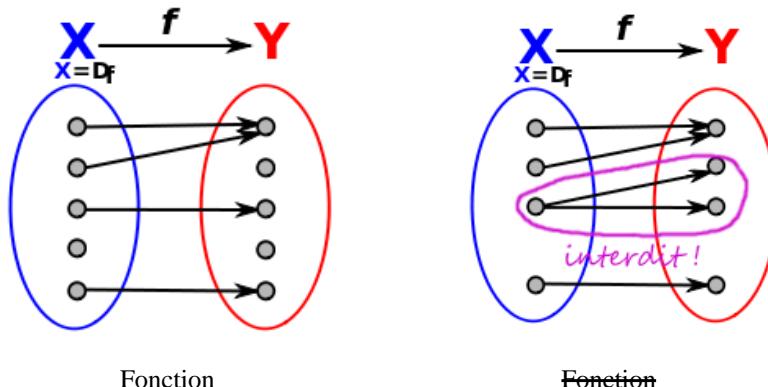
1.1. Introduction au concept de fonction

Achat de farine au kilo Vous voulez acheter de la farine à 1.60 frs le kilo. Le prix que vous paierez à la caisse dépendra du nombre de kilos de farine que vous achèterez. Si on appelle y le prix total (en francs) et x le nombre de kilos de farine, la relation entre y et x sera tout simplement $y = 1.6x$. Cette relation est le prix à payer en fonction du poids.

L'enregistrement de la température Certains appareils enregistrent la température de l'air au cours de la journée. À chaque instant t correspond une température. On dit **que la température est fonction de l'instant** de la journée où elle est mesurée.

Une **fonction** est une relation entre deux ensembles, **le domaine de définition X** (ou ensemble des antécédents) et **l'ensemble des images Y** .

On voit sur le diagramme sagittal de gauche que **chaque antécédent a au plus une image**; par contre, une image peut avoir plusieurs antécédents.



À chaque antécédent correspond **au plus une image**.

Le domaine de définition est souvent désigné par la lettre D .

Le **domaine de définition X** est l'ensemble des nombres qui ont une image dans Y . Dans le premier exemple, X est l'ensemble des poids et Y l'ensemble des prix. Dans le second, X est l'ensemble des instants d'une journée et Y l'ensemble des températures ; dans cet exemple, il peut arriver qu'à deux instants différents corresponde la même température (x et z sur le schéma).

On utilise souvent y pour désigner l'**image** et x pour l'**antécédent**. On dit alors que y est **fonction de x** et on note plus généralement $y = f(x)$. Cela signifie qu'à droite du signe $=$, il n'y a qu'une variable appelée x .

Il faut bien comprendre que x et y **ne sont que des symboles** et rien ne nous empêche d'en utiliser d'autres. Par exemple quand la variable est le temps, on utilise volontiers t au lieu de x .

Reprenons l'exemple de la farine, à savoir la fonction $y = 1.6x$. Pour connaître le prix de 7 kilos de farine, on remplacera tout simplement x par 7 et on obtient l'image (le prix) $y = 1.6 \cdot 7 = 11.2$ frs.

Exercice 1.1

Soit la fonction $\frac{1}{x-3}$. Donnez...

- a. $f(4)$ b. $f(3)$ c. $4f(x)$ d. $f(4x)$
 e. $f(x+4)$ f. $f(4) + f(x)$ g. $f(-x)$ h. $-f(x)$

Mêmes questions pour les fonctions $f(x) = \sqrt{3x}$ et $f(x) = x^3 - 8x - 3$.

Exercice 1.2

Soit la fonction $f(t) = 3t^2 - 4$. Répondez par vrai ou faux.

- | | | |
|-------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| a. $f(0) = 0$ | <input type="checkbox"/> vrai | <input type="checkbox"/> faux |
| b. $f(-2) = -f(2)$ | <input type="checkbox"/> vrai | <input type="checkbox"/> faux |
| c. $f(1) = -1$ | <input type="checkbox"/> vrai | <input type="checkbox"/> faux |
| d. $f(5) + f(2) = f(7)$ | <input type="checkbox"/> vrai | <input type="checkbox"/> faux |
| e. $f(3) = f(-3)$ | <input type="checkbox"/> vrai | <input type="checkbox"/> faux |
| f. $3f(2) = f(6)$ | <input type="checkbox"/> vrai | <input type="checkbox"/> faux |

Exercice 1.3

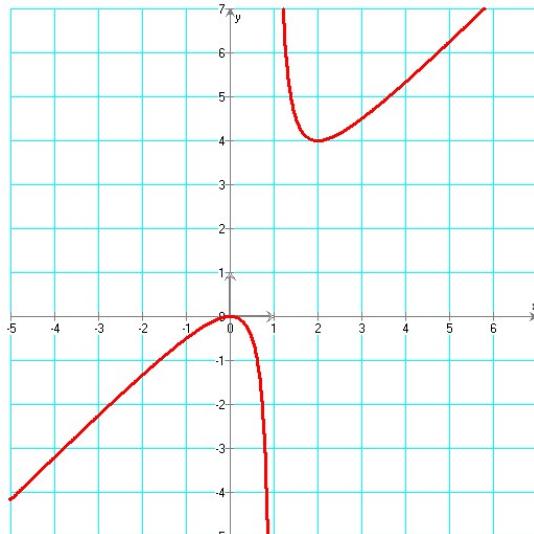
Décidez si les relations ci-dessous sont des fonctions de x . Si oui, trouvez le domaine de définition D .

- | | | |
|------------------------|------------------------------------|--------------------------|
| a. $y = (x + 2)^2$ | b. $y = \frac{1}{(x+2)^2}$ | c. $y = \frac{1}{x^2+2}$ |
| d. $y = \pm 3x$ | e. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+1}}$ | f. $y^2 = x^2$ |
| g. $y = \frac{x}{ x }$ | h. $y = \sqrt{2-x}$ | |

Graphe

La représentation d'une fonction avec des diagrammes sagittaux ou des tableaux devient vite fastidieuse. On préfère une représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Le graphe d'une fonction est l'ensemble des points de coordonnées $(x ; f(x))$ du plan.



abscisse x	ordonnée $y = \frac{x^2}{x-1}$
-3.0	-2.250
-2.0	-1.333
-1.0	-0.500
0.0	0.000
1.0	indéfini
2.0	4.000
3.0	4.500
4.0	5.333

Tableau de valeurs

Test de la droite verticale

Il est facile de vérifier si une relation est bien une fonction. Une droite verticale balayant le plan de gauche à droite doit partout croiser le **graphe au plus une fois** (zéro ou une fois), ce qui est bien le cas pour le graphe ci-dessus.

Exercice 1.4

Dessinez les graphes des fonctions $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = \sqrt{x-2}$.

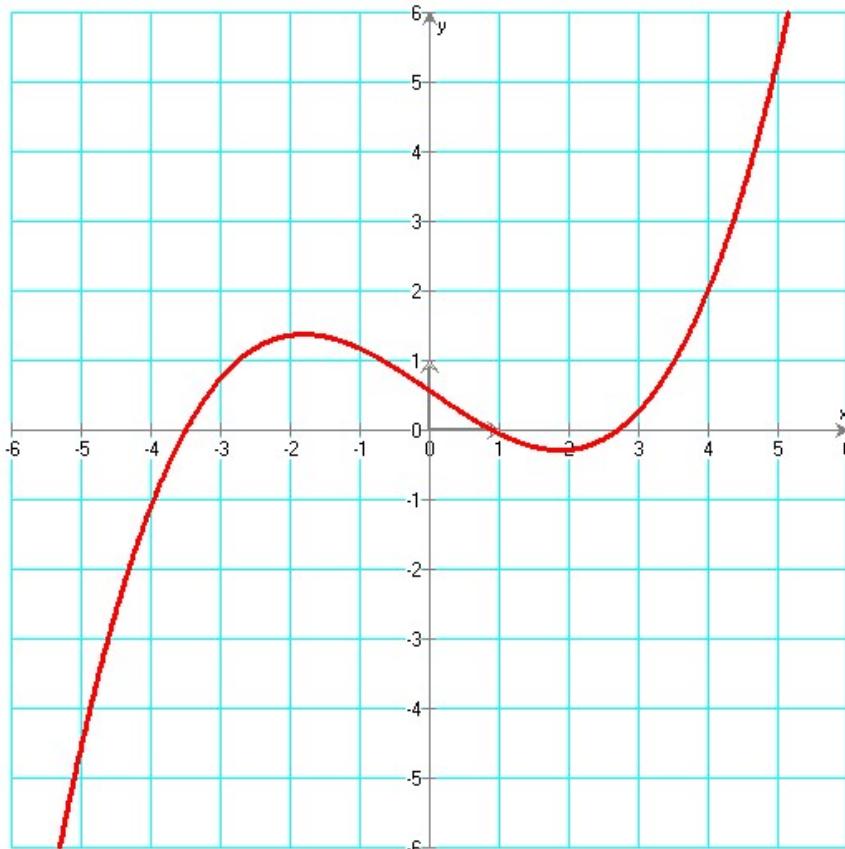
Exercice 1.5

Esquissez une courbe plausible représentant la température de l'air en fonction de l'heure de la journée du **a.** 21 juin **b.** 21 septembre **c.** 21 décembre.

Exercice 1.6

Le tarif pratiqué par Swisscom (chiffres de 2001) en zone interurbaine est de 12 cts par minute (lundi - vendredi, de 08.00 à 17.00 h).

Sachant que la facturation se fait par tranche de 10 cts, représentez graphiquement le prix à payer en fonction du temps.

Exercice 1.7

Soit la fonction $f(x)$ donnée par son graphe ci-dessus. Lisez sur ce graphique $f(k)$, pour k entier compris dans l'intervalle $[-5 ; 5]$.

Exercice 1.8

Soit la fonction $y = 2x^2 + 5x - 7$.

- Trouvez les abscisses où la courbe de la fonction coupe l'axe Ox .
- Trouvez l'ordonnée où la courbe de la fonction coupe l'axe Oy .

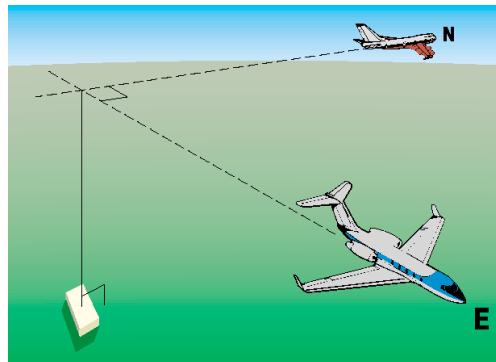
Exercice 1.9

On veut construire un réservoir en acier pour le gaz propane ayant la forme d'un cylindre de 10 m de long terminé par un hémisphère à chaque extrémité. Exprimez le volume du réservoir (en m^3) en fonction du rayon r (en m).



Exercice 1.10

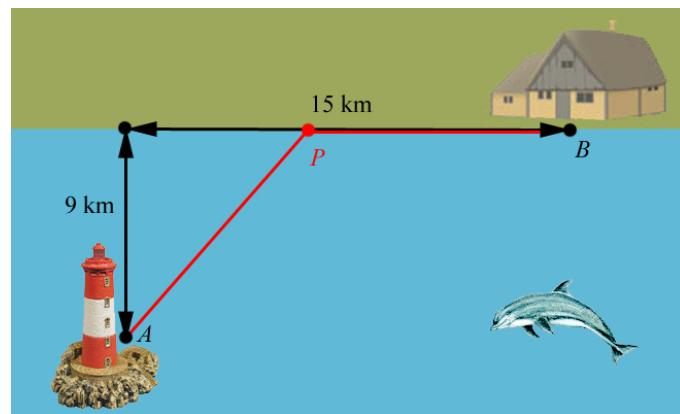
Un avion volant plein nord à la vitesse de 200 km/h est passé au-dessus d'une station de repérage au sol à 14h. Un autre avion, à la même altitude, est passé au-dessus de cette station à 14h30, volant vers l'est à 400 km/h (voir figure ci-dessous).



- Si t est le nombre d'heures après 14h30, exprimez la distance d entre les avions en fonction de t .
- Combien de temps après 14h30 les avions étaient-ils distants de 500 km ?

Exercice 1.11

Le gardien d'un phare (point A) doit rejoindre sa maison côtière (point B). Il se déplace en canot à la vitesse de 4 km/h et à pied à la vitesse de 5 km/h. La côte est supposée rectiligne. Il accostera au point P . Si T est le temps total pour atteindre la maison, exprimez T en fonction de x .

**1.2. Injection, surjection, bijection**

Prenons le cas d'un hôtel où un groupe de touristes doit être logé. Chaque façon de répartir ces touristes dans les chambres peut être représentée par une application de l'ensemble des touristes, X , vers l'ensemble des chambres, Y (à chaque touriste est associée une chambre).

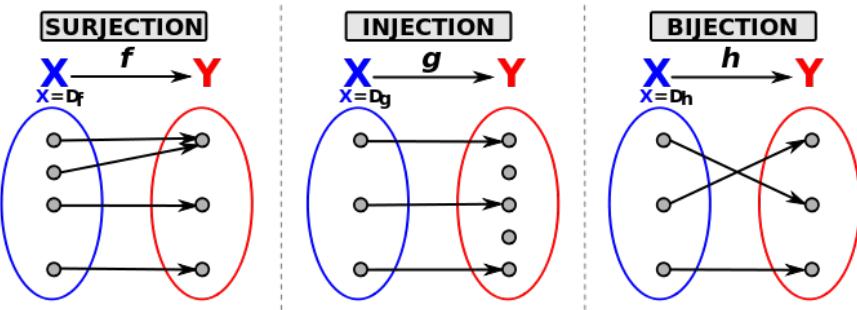
- Les touristes souhaitent que l'application soit **injective**, c'est-à-dire que *chacun d'entre eux ait une chambre individuelle*. Cela n'est possible que si le nombre de touristes ne dépasse pas le nombre de chambres.
- L'hôtelier souhaite que l'application soit **surjective**, c'est-à-dire que *chaque chambre soit occupée*. Cela n'est possible que s'il y a au moins autant de touristes que de chambres.
- Ces deux conditions sont compatibles que si le nombre de touristes est égal au nombre de chambres. Dans ce cas, il sera possible de répartir les touristes de telle sorte qu'il y en ait un seul par chambre, et que toutes les chambres soient occupées : l'application sera alors à la fois injective et surjective ; on dira qu'elle est **bijective**.

L'exemple de la farine
est une bijection.

Une fonction f de X vers Y est surjective si et seulement si tout élément de Y possède au moins un antécédent dans X .

Une fonction f de X vers Y est injective si et seulement si tout élément de Y possède au plus un antécédent dans X .

Une fonction f de X vers Y est bijective si et seulement si tout élément de Y possède exactement un antécédent dans X (ce qui équivaut à dire que f est à la fois injective et surjective).



Exercice 1.12

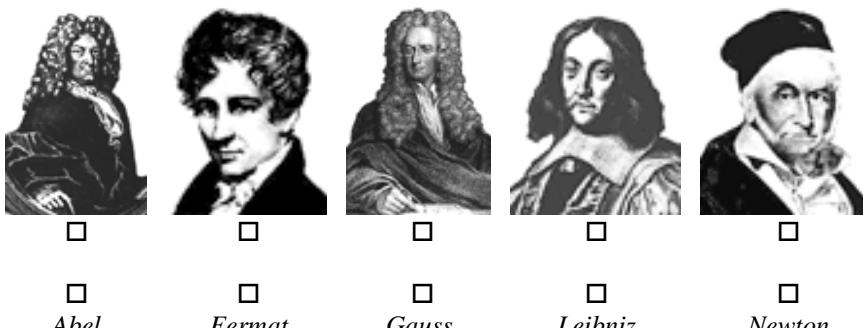
Pour chaque fonction f ci-dessous, déterminez (et justifiez) si elle est bijective, injective mais pas surjective, surjective mais pas injective, ou ni injective ni surjective :

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $f(x) = x^2$
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, telle que $f(x) = x^2$
- $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $f(x) = 2x$
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $f(x) = 8x + 123$
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \{7\}$, telle que $f(x) = 7$
- $f: \{2\} \rightarrow \{2, 7\}$, telle que $f(x) = 7$
- $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $f(x) = \frac{1}{x}$

Les bijections sont en fait un concept connu de vous tous depuis bien longtemps ! Par exemple, lorsque, dans la rubrique jeux des journaux vous devez faire correspondre un visage à un nom, vous faites une bijection.



Quand, petit, vous comptiez jusqu'à 5 sur vos doigts, vous faisiez aussi une bijection : au pouce correspondait le 1, à l'index le 2, etc.



Une fonction de X vers Y est bijective si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- (1) Pour tout $a \neq b$ dans X , on a $f(a) \neq f(b)$ dans Y .
- (2) Toutes les fois que $f(a) = f(b)$ dans Y , alors $a = b$ dans X .

Exercice 1.13

Donnez un test simple qui permette de déterminer si une fonction est bijective ou non, en voyant son graphe.

Indication : inspirez-vous du test de la droite verticale.

Exercice 1.14

Les fonctions ci-dessous sont-elles bijectives ?

- a. $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, telle que $f(x) = \sqrt{x}$
- b. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $f(x) = x$
- c. $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, telle que $f(x) = \frac{1}{x}$
- d. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, telle que $f(x) = |x|$
- e. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $f(x) = 4x^3$
- f. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $f(x) = x^2 - 4$

Bijection réciproque

Pour trouver la fonction réciproque, il suffit, dans les cas simples, d'exprimer x en fonction de y .

Si f est une bijection de X vers Y , il existe une **bijection réciproque** de Y vers X , notée $'f$, telle que $x = 'f(y) \Leftrightarrow y = f(x)$.

La réciproque de la réciproque de f redonne la fonction d'origine, si l'on prend bien garde au domaine de définition et à l'ensemble des images de la fonction f .

Reprendons une dernière fois l'exemple de la farine.

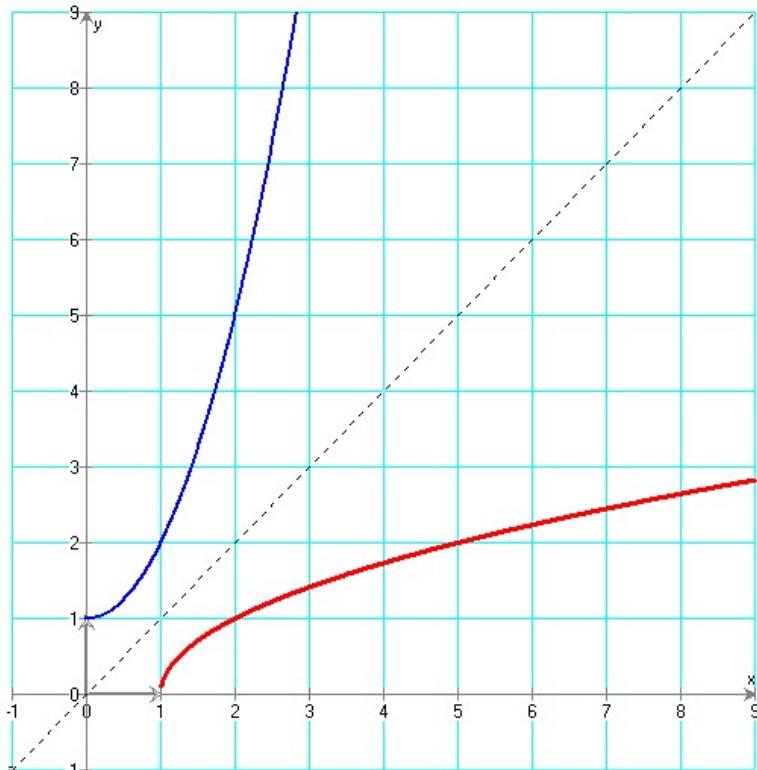
La réciproque de $y = 1.6x$ est $x = \frac{y}{1.6}$.

Cette fonction nous donne le nombre de kilos de farine achetés en fonction du prix payé.

Exemple Soit $y = f(x) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \{y \mid y \geq 1\}$ telle que $y = x^2 + 1$. La réciproque est $x = \sqrt{y-1}$. Puisque le symbole utilisé pour la variable est sans importance, nous pouvons aussi écrire $'f(x) = \sqrt{x-1}$.

On peut dessiner une fonction connaissant sa réciproque en effectuant une symétrie d'axe $y = x$ (en traitillé).

La fonction $y = x$ est appelée « fonction identité. »



Le dessin ci-dessus montre les courbes des fonctions

$y = x^2 + 1$ (en bleu) et $y = \sqrt{x-1}$ (en rouge).

Exercice 1.15

Donnez, si elle existe, la réciproque des fonctions suivantes :

- a. $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, telle que $f(x) = x^2$
- b. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $f(x) = x^2$
- c. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $f(x) = (x-1)^3$
- d. $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, telle que $f(x) = \sqrt{x}$

1.3. Propriétés particulières de certaines fonctions

Fonction paire Une fonction f est **paire** si $f(x) = f(-x)$.

Par exemple $f(x) = x^2$ est une fonction paire, car $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

Sur le graphe d'une fonction paire, l'axe Oy est un axe de symétrie du graphe.

Fonction impaire

Une fonction f est **impaire** si $f(x) = -f(-x)$.

Ainsi, $f(x) = x^3$ est une fonction impaire, car $-f(-x) = -(-x)^3 = x^3 = f(x)$.

Sur le graphe d'une fonction impaire, l'origine est le centre de symétrie centrale du graphe. Autrement dit, en tournant le graphe de 180° autour de l'origine, on retrouve le même graphe.



Attention ! « Impair » n'est pas le contraire de « pair ».

La plupart du temps, une fonction n'est ni paire ni impaire.

Exercice 1.16

Dites pour chacune des fonctions suivantes si elle est paire, impaire, ni paire ni impaire, ou les deux.

Dessinez ces fonctions dans l'intervalle $[-5 ; 5]$.

a. $f(x) = x^2 + 4$

b. $f(x) = 0$

c. $f(x) = 1$

d. $f(x) = 3x$

e. $f(x) = x^2 + x$

f. $f(x) = x - 2$

g. $f(x) = \sin(x)$

h. $f(x) = \cos(x)$

Attention !

g et h en radians!

1.4. Compositions de fonctions

Attention à ne pas confondre *composition* et *multiplication* !

Soient les fonctions $f(x) = 6x - 4$ et $g(x) = \sqrt{x}$. On peut les appliquer « à la queue leu leu », par exemple : la fonction « f suivie de g ».

Prenons un exemple : $5 \rightarrow \boxed{\text{ }} \rightarrow 16 \rightarrow \boxed{\text{ }}$ $\rightarrow \sqrt{26}$

f g

Pour x , on aura :

$x \rightarrow \boxed{\text{ }} \rightarrow 6x - 4 \rightarrow \boxed{\text{ }} \rightarrow \sqrt{6x - 4}$

f g

On écrira $g(f(x)) = \sqrt{6x - 4}$ ou $g \circ f(x) = \sqrt{6x - 4}$.

De même avec la « fonction g suivie de f » :

$x \rightarrow \boxed{\text{ }} \rightarrow \sqrt{x} \rightarrow \boxed{\text{ }} \rightarrow \sqrt{6\sqrt{x} - 4}$

g f

On écrira $f(g(x)) = 6\sqrt{x} - 4$ ou $f \circ g(x) = 6\sqrt{x} - 4$.

Si f est une bijection, alors on a $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

Dessin tiré de

« Tintin en Amérique », par Hergé



Exercice 1.17

Calculez $f \circ g$ et $g \circ f$ pour les fonctions suivantes :

a. $f(x) = x^2 + 4$

$g(x) = x - 1$

b. $f(x) = 3x + 4$

$g(x) = \frac{x-4}{3}$

c. $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$

$g(x) = \frac{1}{1-x}$

d. $f(x) = ax + b$

$g(x) = cx + d$

Exercice 1.18

Soient les fonctions

$$f(x) = \frac{x}{4} \quad g(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad h(x) = 1 - x$$

Calculez $g \circ f$, $h \circ g$, $h \circ (g \circ f)$, $(h \circ g) \circ f$.

Exercice 1.19

Dans presque tous les langages informatiques, il existe deux fonctions permettant de convertir les caractères en nombres et vice-versa.

La fonction CHR est définie par :

$$\text{CHR}(65) = \text{« A »}, \text{CHR}(66) = \text{« B »}, \dots, \text{CHR}(90) = \text{« Z »}.$$

La fonction réciproque ORD est définie par :

$$\text{ORD}(\text{« A »}) = 65, \text{ORD}(\text{« B »}) = 66, \dots, \text{ORD}(\text{« Z »}) = 90.$$

Calculez

- a. $\text{ORD}(\text{« M »})$
- b. $(\text{CHR} \circ \text{ORD})(\text{« C »})$
- c. $\text{CHR}(\text{ORD}(\text{CHR}(75)) + 5)$

1.5. Ce qu'il faut absolument savoir

Connaître la définition d'une fonction

ok

Trouver le domaine de définition d'une fonction

ok

Lire le graphe d'une fonction

ok

Dessiner le graphe d'une fonction d'après un tableau de valeurs

ok

Identifier l'axe des abscisses et celui des ordonnées

ok

Reconnaître une bijection

ok

Calculer la réciproque d'une bijection

ok

Reconnaître si une fonction est paire ou impaire

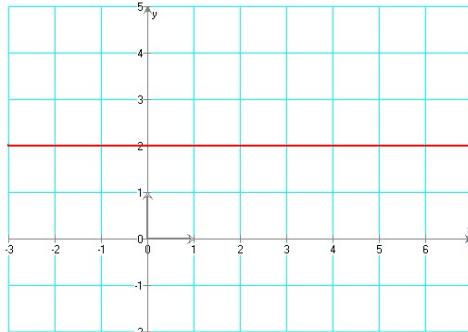
ok

Composer plusieurs fonctions

ok

2. Fonctions affines

2.1. Fonction constante

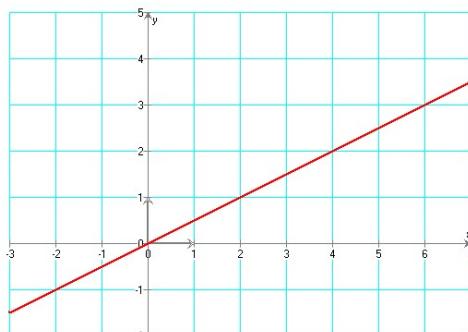


$$f(x) = h \quad (h \in \mathbb{R})$$

C'est une droite horizontale passant par l'ordonnée h .

Exemple : la température dans une salle climatisée.

2.2. Fonction linéaire



$$f(x) = mx \quad (m \in \mathbb{R})$$

C'est une droite de **pente** m passant par l'origine (vous comprendrez au § 2.5 pourquoi m est appelé la pente).

Exemple : la fonction permettant de convertir des dollars en francs.

Propriétés

Toute fonction linéaire satisfait les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= f(x_1) + f(x_2) & (x_1, x_2 \in \mathbb{R}) \\ f(\lambda x) &= \lambda f(x) & (\lambda \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

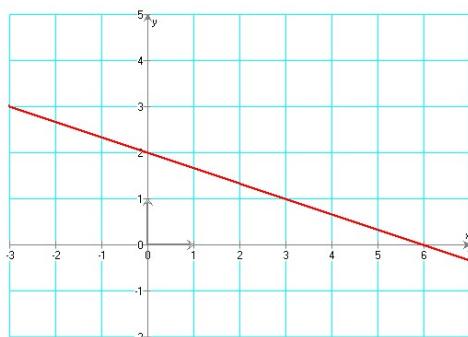
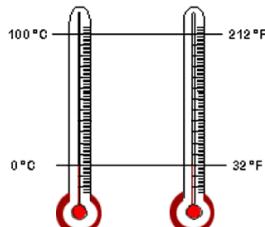
Ces propriétés se vérifient aisément sur le tableau ci-dessous :

x	$f(x) = 3x$
-1	-3
0	0
1	3
2	6
3	9

$$3 = f(1) = f(-1 + 2) = f(-1) + f(2) = -3 + 6$$

$$6 = f(2) = f(2 \cdot 1) = 2 f(1) = 2 \cdot 3$$

2.3. Fonction affine



$$f(x) = mx + h \quad (m, h \in \mathbb{R})$$

C'est une droite de **pente** m et **d'ordonnée à l'origine** h .

Exemple : la fonction permettant de convertir des degrés Celsius en degrés Fahrenheit.

Remarques Les fonctions constantes et les fonctions linéaires sont des cas particuliers des fonctions affines.

Une droite verticale n'est **pas** une fonction.

Exercice 2.1

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des fonctions affines ? Mentionnez celles qui sont linéaires ou constantes.

Indication

L'équation d'une fonction affine est du type $f(x) = ax + b$.

Que vaut a et que vaut b ?

a. $f(x) = |x|$

d. $f(x) = \beta x + \alpha$

g. $f(x) = 1 - x^2$

b. $f(x) = x$

e. $f(x) = \alpha x + \alpha^2$

h. $f(x) = \frac{1}{x}$

c. $f(x) = 1$

f. $f(x) = 1 - x$

i. $f(x) = x^2 - (x - 1)^2$

2.4. Comment dessiner une droite donnée sous la forme d'une fonction ?

Méthode Choisir deux valeurs x_1 et x_2 , calculer $f(x_1)$ et $f(x_2)$, reporter sur le graphique les points $(x_1 ; f(x_1))$ et $(x_2 ; f(x_2))$. Tracer enfin la droite passant par ces deux points.

Exemple Soit la droite : $f(x) = -\frac{x}{2} + 3$.

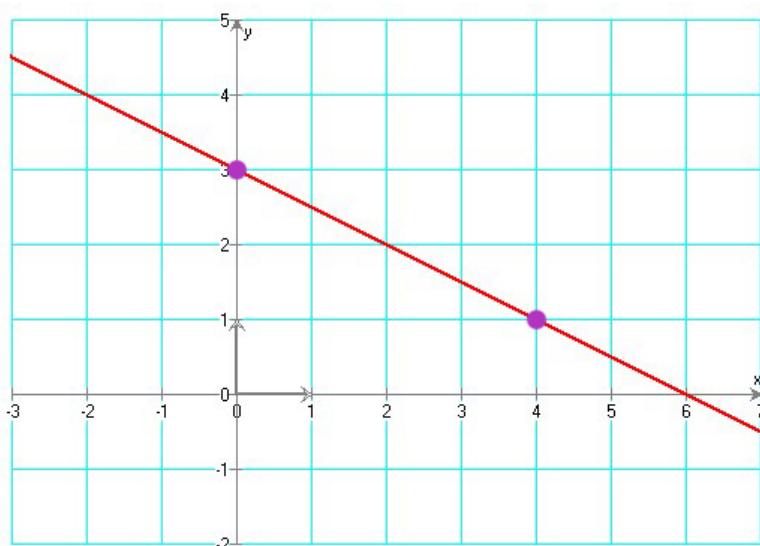
On choisit arbitrairement $x_1 = 0, x_2 = 4$.

On a : $f(0) = -\frac{0}{2} + 3 = 3$

$$f(4) = -\frac{4}{2} + 3 = 1$$

Il est toujours pratique de choisir $x_1 = 0$.

La droite passe donc par les points $(0 ; 3)$ et $(4 ; 1)$. Il n'y a plus qu'à reporter ces points sur un graphique et faire passer la droite par ces deux points. On obtient :



Exercice 2.2

Représentez dans un repère orthonormé les fonctions suivantes :

a. $f(x) = \frac{3}{2}x - 4$

d. $f(x) = 1 - x$

b. $f(x) = -\frac{x}{2}$

e. $f(x) = 1 + x$

c. $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$

f. $f(x) = 2x - 3$

2.5. Notion de pente

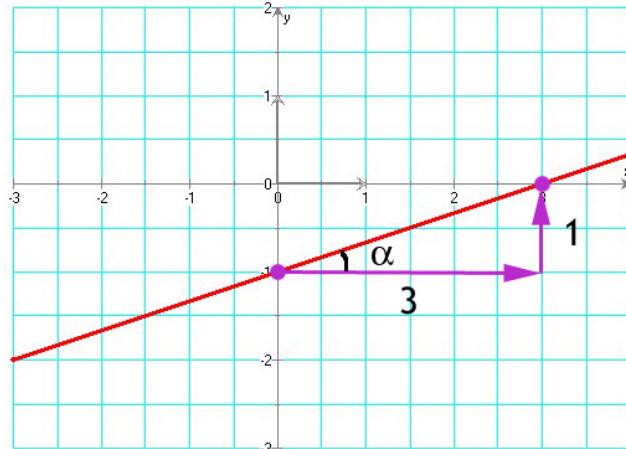
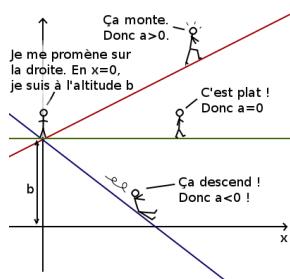


Vous connaissez sans doute ce panneau de circulation indiquant une montée dont la pente est de 10%. Cela signifie que l'on monte **verticalement** de 10 mètres pour un déplacement **horizontal** de 100 mètres.

Soit $P_1(x_1; y_1)$ et $P_2(x_2; y_2)$. Soit la droite passant par ces deux points. On appelle **pente** de cette droite la valeur $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

En « lisant » la représentation graphique de gauche à droite, quand la fonction croît, la pente est positive ; quand elle décroît, la pente est négative. Quand la droite est horizontale, la pente est nulle.

Soit $f(x) = ax + b$:

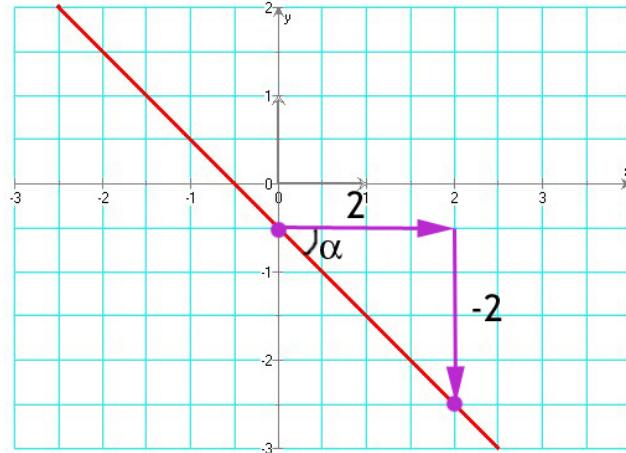


Pente positive

$$P_1(0; -1), P_2(3; 0)$$

$$m = \frac{0 - (-1)}{3 - 0} = \frac{1}{3}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 18.43^\circ$$



Pente négative

$$P_1(0; -0.5), P_2(2; -2.5)$$

$$m = \frac{-2.5 + 0.5}{2 - 0} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\tan(\alpha) = -1 \Rightarrow \alpha = -45^\circ$$

Le signe « - » indique que l'on a mesuré l'angle dans le sens trigonométrique inverse.

On peut facilement trouver l'angle α que fait la droite avec l'axe des x :

$$\tan(\alpha) = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \alpha = \arctan(m)$$

Exercice 2.3

Calculez les pentes des fonctions affines de l'exercice 2.2.

Comparez les équations de ces fonctions avec les pentes que vous avez trouvées. Que constatez-vous ?

Exercice 2.4

Représentez dans un repère orthonormé les fonctions affines suivantes déterminées par deux points de leur graphe. Calculez leur pente.

- a. $f(2) = 3$ et le graphe de f passe par $(-1; 1)$,
- b. $f(-3) = -2$ et $f(1) = 2$,
- c. le graphe passe par les points $(-1; -3)$ et $(3; 2)$.

Exercice 2.5

Représentez dans un même repère les graphes des fonctions affines suivantes (faîtes un dessin pour la question **a** et un autre pour la question **b**).

a. $f(x) = 2x - 3$	$g(x) = 2x + 2$	$h(x) = 2x$
b. $f(x) = -3x + 2$	$g(x) = x + 2$	$h(x) = 2$

Que constatez-vous ?

2.6. Équation d'une droite connaissant sa pente et un point

L'équation d'une droite passant par le point $P_1(x_1; y_1)$ et de pente m est
 $y - y_1 = m(x - x_1)$.

En passant y_1 à droite du signe égal, on retrouve l'équation $y = mx + h$, où $h = y_1 - mx_1$

Exemple Trouvez l'équation de la droite passant par le point $A(-1 ; 2)$ et de pente 3.

On pose $y - 2 = 3(x + 1)$
 on effectue $y - 2 = 3x + 3$
 et on simplifie $y = 3x + 5$

Exercice 2.6

Dessinez le graphe, puis, d'après le dessin, trouvez l'équation d'une fonction affine f , telle que...

- a.** son graphe passe par les points $(3 ; 5)$ et $(6 ; -1)$,
- b.** $f(2) = 5$ et son graphe passe par le point $(5 ; 5)$,
- c.** son graphe passe par le point $(3 ; 6)$ et est de pente 3,
- d.** son graphe passe par le point $(12 ; 5)$ et $f(12) = 9$,
- e.** $f(-1) = 2$ et la pente de son graphe vaut -2 .

Exercice 2.7

Un homme en bonne santé élimine en moyenne 0.15 % d'alcool par heure.
 À minuit, Jean a 1.30 % d'alcool dans le sang. Encore lucide, il décide qu'il est temps d'arrêter de boire...

- a.** À quelle heure son taux d'alcool sera-t-il de 0.5 % ?
- b.** À quelle heure n'aura-t-il plus d'alcool dans le sang ?

2.7. Comment trouver l'équation d'une droite connaissant deux points ?

Méthode L'équation générale d'une droite est $y = f(x) = mx + h$. Il faut calculer m et h connaissant les points $P_1(x_1 ; y_1)$ et $P_2(x_2 ; y_2)$. Il suffit pour cela de remplacer dans l'équation générale x par x_i et y par y_i , (avec $i = 1$ ou 2). On aura alors un système de deux équations à deux inconnues que l'on résoudra pour obtenir m et h .

Exemple Soient les deux points $P_1(3 ; 5)$ et $P_2(-2 ; 1)$ par lesquels passe la droite cherchée.

Le système d'équations que l'on devra résoudre est :

$$\begin{aligned} 5 &= 3m + h \\ 1 &= -2m + h \end{aligned}$$

En soustrayant la deuxième équation à la première (pour éliminer h), on obtient :

$$4 = 5m, \text{ d'où } m = \frac{4}{5} \text{ et } h = 1 + \frac{8}{5} = \frac{13}{5}.$$

L'équation de la droite est donc : $y = \frac{4}{5}x + \frac{13}{5}$

Exercice 2.8

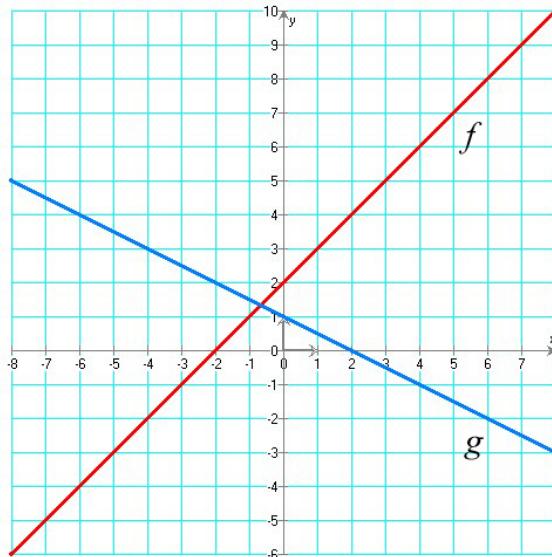
Trouvez l'équation de la droite dont le graphe passe par les points...

- a. $P_1(3 ; 1)$ et $P_2(7 ; -2)$
- b. $Q_1(4 ; 4)$ et $Q_2(4 ; 9)$
- c. $R_1(-2 ; 2)$ et $R_2(5 ; 2)$

2.8. Comment trouver l'intersection de deux fonctions affines ?

Méthode Soient les fonctions $f(x)$ et $g(x)$. Trouver l'intersection des graphes de f et g revient à résoudre l'équation $f(x) = g(x)$. On trouvera la valeur de l'abscisse x_0 où les deux droites se croisent. Pour trouver l'ordonnée, il suffira de calculer $y_0 = f(x_0)$. On aura ainsi trouvé le point $P_0(x_0 ; y_0)$.

Nombre de solutions Il y aura **une** (deux droites sécantes), **aucune** (deux droites parallèles) ou **une infinité** de solutions (deux droites confondues).

Exercice 2.9

- a. À partir du dessin, dessinez les fonctions $f+g$, $f-g$, $-f$, $-2g$.
- b. Écrivez les fonctions $f(x) = \dots$ et $g(x) = \dots$
- c. Quelle sont les pentes des graphes de f , de g , de $f+g$?
- d. Déterminez les coordonnées du point d'intersection de f et de g .
- e. Calculez l'angle que forment ces deux droites.

Exercice 2.10

Un propriétaire doit renouveler son système de chauffage. Pour se décider, il a calculé les coûts d'installation et les coûts énergétiques annuels de quatre systèmes :

Système de chauffage	Coût d'installation	Coût énergétique annuel
Mazout	20'000 CHF	2200 CHF/an
Pellets	35'000 CHF	2000 CHF/an
Pompe à chaleur (air)	40'000 CHF	1100 CHF/an
Pompe à chaleur (sonde)	60'000 CHF	800 CHF/an

- a. Dessinez les quatre droites correspondant à ces coûts pour une période de 20 ans.
- b. Au bout de combien d'années la pompe à chaleur à air sera-t-elle plus avantageuse que le mazout ?
- c. Quel devrait être le coût d'installation d'une pompe à chaleur avec sonde géothermique pour qu'elle soit plus avantageuse que le mazout après 20 ans ?

Exercice 2.11

Pour les enfants entre 6 et 10 ans, la taille y (en cm) est souvent une fonction du premier degré de l'âge t (en années).

La taille d'un enfant est de 121.0 cm à 6 ans et 128.3 cm à 7 ans.

- Exprimez y en fonction de t .
- Dessinez le graphe de la fonction obtenue sous a.
- Prévoyez la taille de l'enfant à 10 ans.

Exercice 2.12

Les produits pharmaceutiques doivent préciser les dosages recommandés aux adultes et aux enfants. Deux formules permettant de modifier le dosage pour adultes en un dosage pour enfants sont

$$\text{la règle de Cowling : } y = \frac{1}{24}(t+1)a$$

$$\text{et la règle de Friend : } y = \frac{2}{25}t \cdot a$$

où a est la dose pour adultes (en milligrammes) et t l'âge de l'enfant (en années).

- Si $a = 100$, représentez graphiquement les deux équations dans un même plan pour $0 \leq t \leq 12$.
- Pour quel âge les deux formules donneront-elles le même dosage ?

2.9. Angle entre deux droites

L'angle **aigu** α de deux droites est donné par $\tan(\alpha) = \left| \frac{m' - m}{1 + m \cdot m'} \right|$

où m et m' sont les pentes des deux droites.

Exercice 2.13

Calculez l'angle d'intersection entre la droite $d : x + y = 2$

- et l'axe des ordonnées
- et la droite $g : 4x + y + 1 = 0$.

Deux droites sont perpendiculaires $\Leftrightarrow m \cdot m' = -1$

Exercice 2.14

Écrivez l'équation de la droite d passant par $A(-5 ; -3)$ et perpendiculaire à la droite $g : 5x + 4y - 20 = 0$.

Exercice 2.15

On donne les points $A(3 ; -2)$, $B(7 ; 1)$.

Écrivez l'équation de la médiatrice du segment AB .

2.10. Ce qu'il faut absolument savoir

Identifier les différents types de droites (constante, linéaire, affine)

ok

Reconnaître l'équation d'une droite

ok

Dessiner une droite dont on connaît l'équation

ok

Donner l'équation d'une droite passant par deux points

ok

Maîtriser la notion de pente

ok

Savoir ce qu'est l'ordonnée à l'origine

ok

Calculer le point d'intersection de deux droites

ok

Calculer l'angle que fait une droite avec l'axe des x

ok

Calculer l'angle entre deux droites

ok

3. Fonctions quadratiques

3.1. Exercices de découverte

Exercice 3.1

Chacune des six **paraboles** suivantes est la représentation graphique d'une fonction du type $f(x) = ax^2$.

Déterminez, pour chacune d'elles, la valeur du réel a .

Que constatez-vous ?

$$a_1 =$$

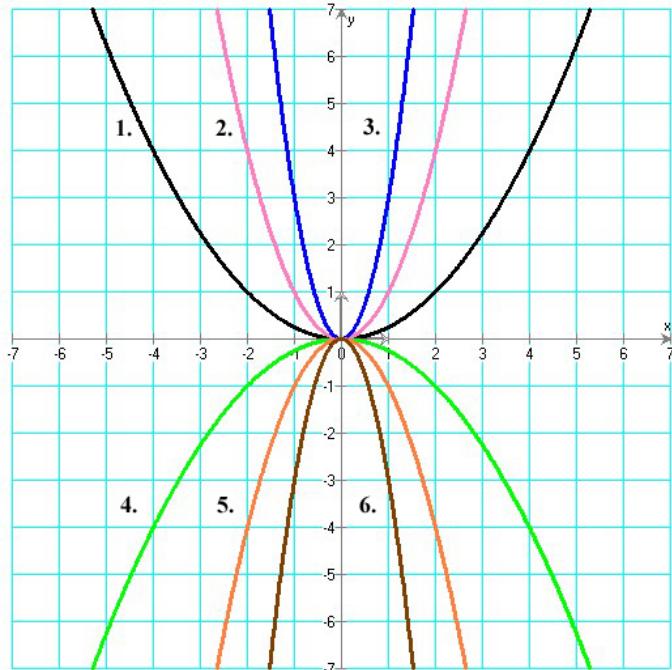
$$a_2 =$$

$$a_3 =$$

$$a_4 =$$

$$a_5 =$$

$$a_6 =$$



Exercice 3.2

Chacune des quatre paraboles suivantes est la représentation graphique d'une fonction du type $f(x) = ax^2 + q$.

Déterminez, pour chacune d'elles, les valeurs des réels a et q .

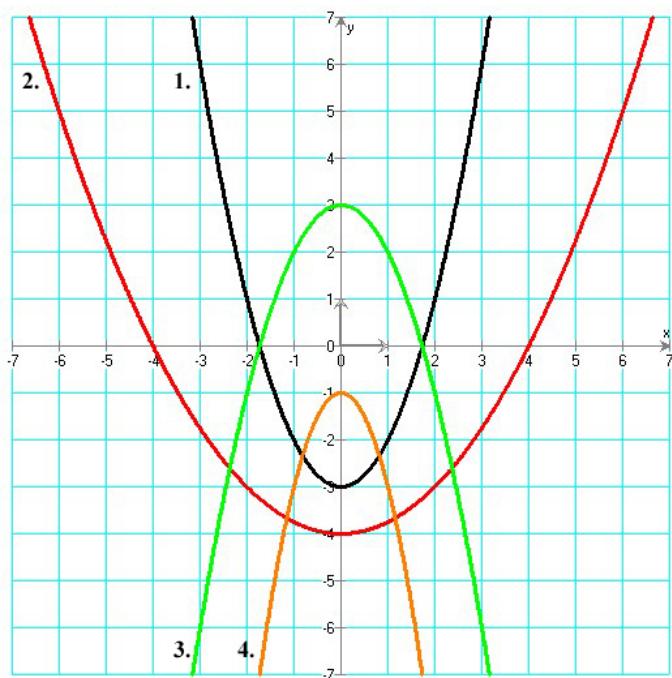
Que constatez-vous ?

$$a_1 = \quad q_1 =$$

$$a_2 = \quad q_2 =$$

$$a_3 = \quad q_3 =$$

$$a_4 = \quad q_4 =$$



Exercice 3.3

Chacune des quatre paraboles suivantes est la représentation graphique d'une fonction du type $f(x) = a(x - p)^2$.

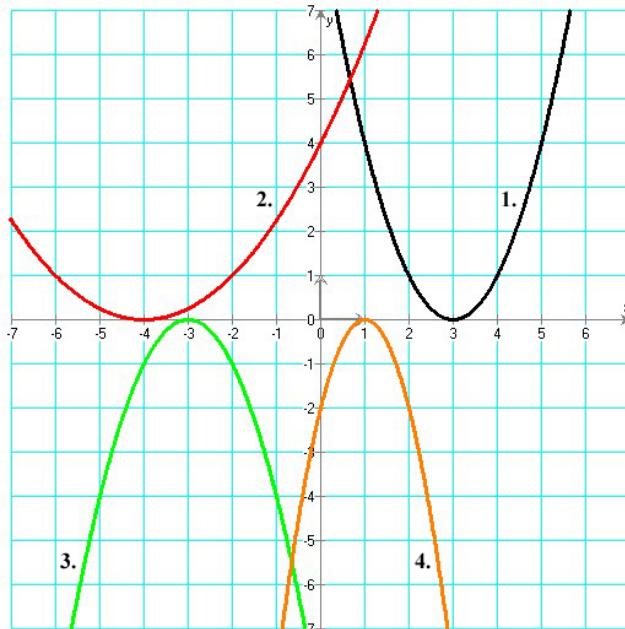
Déterminez, pour chacune d'elles, les valeurs des réels a et p .
Que constatez-vous ?

$$a_1 = \quad p_1 =$$

$$a_2 = \quad p_2 =$$

$$a_3 = \quad p_3 =$$

$$a_4 = \quad p_4 =$$

**Exercice 3.4**

Chacune des quatre paraboles suivantes est la représentation graphique d'une fonction du type $f(x) = a(x - p)^2 + q$.

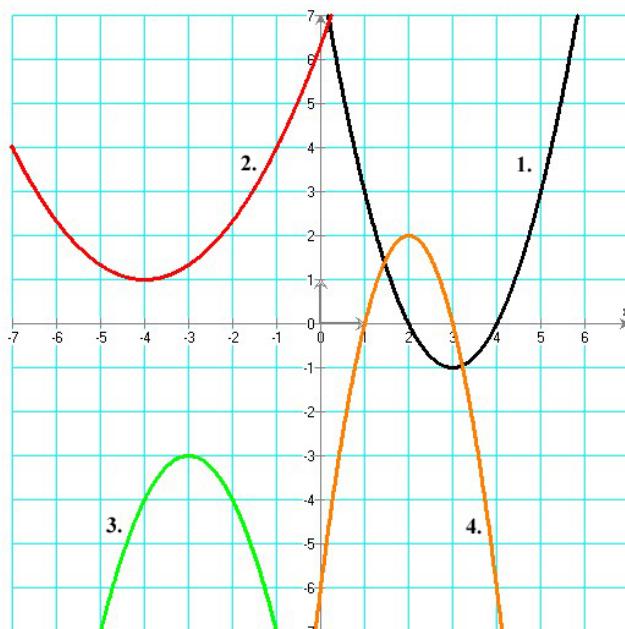
Déterminez, pour chacune d'elles, les valeurs des réels a , p et q . Pour cela, vous utiliserez les constatations faites aux trois exercices précédents.

$$a_1 = \quad p_1 = \quad q_1 =$$

$$a_2 = \quad p_2 = \quad q_2 =$$

$$a_3 = \quad p_3 = \quad q_3 =$$

$$a_4 = \quad p_4 = \quad q_4 =$$



Avec les valeurs a , p et q trouvées ci-dessus, écrivez les quatre fonctions quadratiques sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, qui est la forme la plus générale d'une parabole.

Vérifiez que vous obtenez bien :

$$\mathbf{1.} \ f(x) = x^2 - 6x + 8$$

$$\mathbf{2.} \ f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{19}{3}$$

$$\mathbf{3.} \ f(x) = -x^2 - 6x - 12$$

$$\mathbf{4.} \ f(x) = -2x^2 + 8x - 6$$

Exercice 3.5

Déterminez la fonction quadratique f dont le graphe passe par les points $A(-2 ; 11)$, $B(1 ; -4)$ et $C(3 ; 6)$.

Le sommet d'une parabole est :

- le point le plus élevé (ordonnée maximum) de la courbe si elle est ouverte vers le bas
- le point le plus bas (ordonnée minimum) si elle est ouverte vers le haut.

Pour définir une parabole, il faut :

- soit 3 points non alignés,
- soit le sommet et un autre point.

Exercice 3.6

Soit la fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Montrez que, pour tout nombre réel k , $f\left(-\frac{b}{2a} - k\right) = f\left(-\frac{b}{2a} + k\right)$.

Déduisez-en l'abscisse du sommet de la parabole qui représente f .

Exercice 3.7

Déterminez la fonction quadratique f dont le graphe passe par le point $A\left(1; \frac{3}{2}\right)$ et a pour sommet le point $S(2 ; 1)$.

3.2. Résumé des découvertes

Équation $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Si $a < 0$, la parabole est ouverte vers le bas.

Si $a > 0$, elle est ouverte vers le haut.



Zéros

Résoudre $f(x) = 0$. C'est une équation du deuxième degré.

$$\text{Donc } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Factorisation

Si f possède les zéros x_1 et x_2 , on a : $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Sommet

Le sommet $S(x_s; y_s)$ de la parabole a pour abscisse $x_s = -\frac{b}{2a}$.

$$\text{L'ordonnée est } y_s = f\left(-\frac{b}{2a}\right).$$

3.3. Exercices complémentaires**Exercice 3.8**

Calculez les zéros des fonctions quadratiques suivantes.

Déterminez le sommet de chaque courbe.

Esquissez la parabole.

a. $f(x) = x^2 + x + 1$

b. $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$

c. $f(x) = (x - 2)(5 - x)$

d. $f(x) = x^2 - 9x$

Exercice 3.9

Calculez les abscisses des points d'intersection des graphes des fonctions f et g :

a. $f(x) = x^2 + 3x + 1$

$g(x) = -3x^2 + x + 2$

b. $f(x) = x^2 + 3x - 1$

$g(x) = x + 2$

Exercice 3.10

Déterminez la fonction affine dont le graphe est parallèle à celui de d et tangent à celui de f :

$$d : y = -x \quad f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$$

Exercice 3.11

On veut construire une boîte sans couvercle avec une feuille en carton rectangulaire de dimensions $c \times (c + 2)$ cm. Pour ce faire, on va découper quatre carrés de 4×4 cm dans les coins de la feuille, puis replier les bords. Le volume de la boîte ainsi obtenue sera de 672 cm 3 . Quelles sont les dimensions de la feuille en carton ?

Exercice 3.12

La formule $h(t) = 128t - 16t^2$ donne la hauteur (en mètres) d'un objet au-dessus du sol au temps t (donné en secondes).

- a. Combien de temps mettra l'objet pour atteindre la hauteur maximale ?
- b. Quelle sera la hauteur maximale atteinte par l'objet ?
- c. Combien de temps mettra l'objet pour toucher à nouveau le sol ?
- d. Combien de temps mettra l'objet pour atteindre une hauteur de 192 mètres ?

Pourquoi y a-t-il deux solutions ?

Exercice 3.13

Perché en haut d'une falaise, vous lâchez une pierre et vous entendez le bruit de l'impact 4 secondes plus tard.

Sachant que la pierre parcourt environ $4.9t^2$ mètres en t secondes et que la vitesse du son est de 330 m/s, estimatez la hauteur de la falaise.

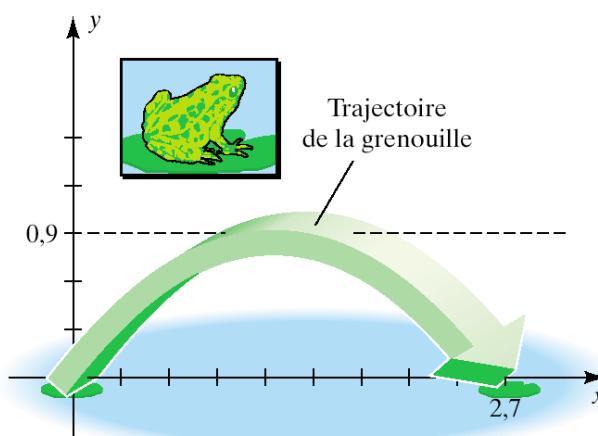
Exercice 3.14

Dans les années 1940, Emmanuel Zacchini réalisait régulièrement le tour de force d'être un boulet humain pour les Ringling Brothers et le cirque Barnum & Bailey. Le bout du canon pointait à 4.5 m du sol et la distance horizontale parcourue était de 52.3 m. Si le canon est orienté à 45° , une équation de la trajectoire parabolique est de la forme $y = ax^2 + bx + c$.

- a. Déterminez une équation du vol.
- b. Donnez la hauteur maximale atteinte par le boulet humain.

Exercice 3.15

Les bonds des animaux sauteurs sont typiquement des trajectoires paraboliques. La figure ci-dessous illustre le bond d'une grenouille superposé à un système de coordonnées. La longueur du saut est de 2.7 m et la hauteur maximale au-dessus du sol est de 0.9 m.



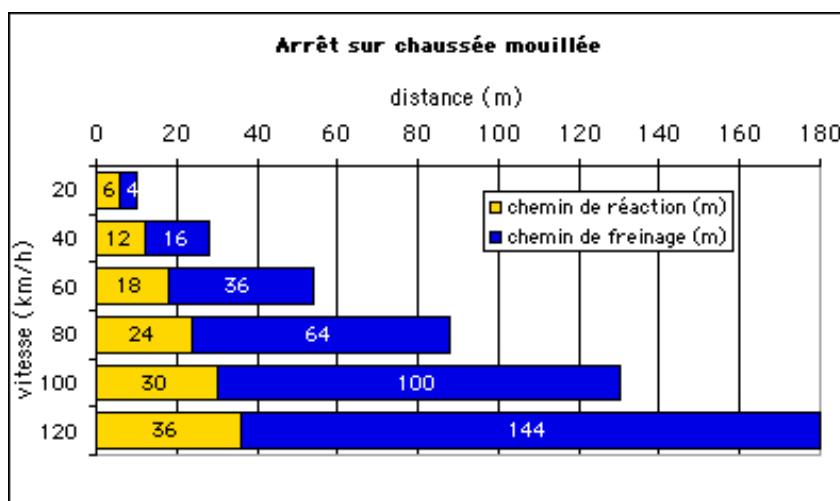
Donnez, sous la forme $y = ax^2 + bx + c$, l'équation de la trajectoire du saut de la grenouille.

Exercice 3.16

Le *Manuel suisse des règles de circulation, édition 1982*, nous donne les indications suivantes sur la distance nécessaire à un véhicule pour s'arrêter (nous n'avons pas modifié le texte original) :

Le chemin de réaction se fonde sur un temps de réaction moyen d'une seconde, de sorte qu'il atteint environ 3 m pour une vitesse de 10 km/h. Le chemin de freinage dépend avant tout de l'état de la route. Sur la chaussée mouillée, il atteint environ 4 m (2 x 2) à une vitesse de 20 km/h, environ 16 m (4 x 4) à 40 km/h et ainsi de suite.

Comme sur route sèche le chemin de freinage est d'un quart plus court, à une vitesse de 60 km/h la distance d'arrêt est d'environ 45 m ($6 \times 3 = 18$ m chemin de réaction et $6 \times 6 - 9 = 27$ m chemin de freinage).



Donnez la relation entre la vitesse v et la distance d'arrêt d ...

- sur route mouillée
- sur route sèche.

Exercice 3.17

On a estimé que 14'000 personnes assistent à un match de basket-ball lorsque le prix d'entrée est de \$7.00. Pour chaque quarter (25¢) ajouté à ce prix, le public diminue de 280 spectateurs.

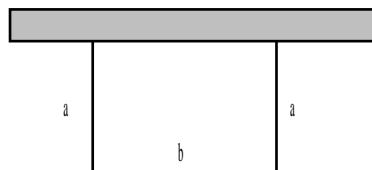
Quel prix d'entrée doit-on fixer pour maximiser la recette ?

Indication

Quand x quarters sont ajoutés au prix d'entrée, le public est composé de $14'000 - 280x$ spectateurs.

Exercice 3.18

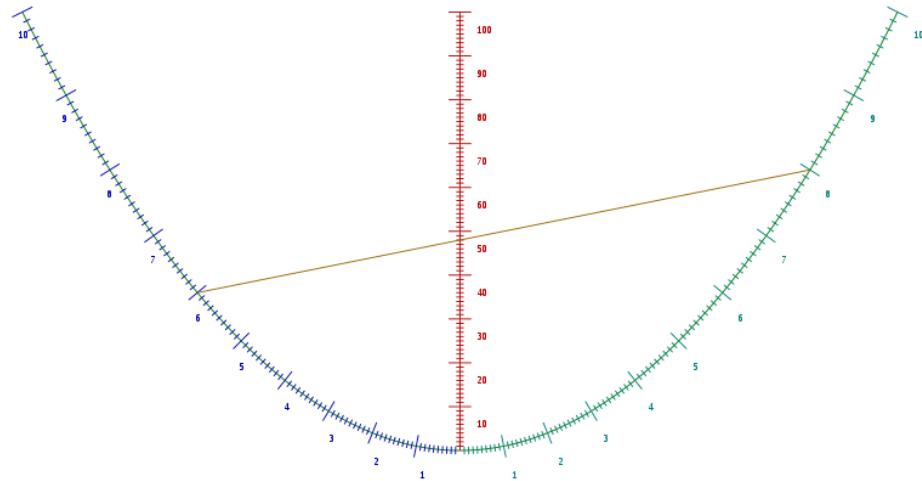
Vous désirez construire un enclos rectangulaire aussi spacieux que possible pour votre animal familial. Le rectangle à construire n'aura que trois côtés, car un des côtés de l'enclos sera collé contre un mur préexistant, comme indiqué ci-dessous.



Vous disposez d'une longueur totale de clôture de 6 mètres. Quelles dimensions de l'enclos garantissent une aire maximale ?

Exercice 3.19**Multiplicateur de Möbius**

On considère la fonction $f(x) = x^2$ représentée ci-dessous sur $[-10; 10]$:



- Déterminez la fonction affine $g(x) = mx + h$ telle que $g(-6) = 36$ et $g(8) = 64$.
- Vérifiez que cette droite passe par le point $(0 ; 48)$.
- Déterminez la fonction affine $q(x) = mx + h$ telle que $q(-a) = a^2$ et $q(b) = b^2$. Que vaut l'ordonnée à l'origine de cette droite ?

3.4. Ce qu'il faut absolument savoir

Donner l'équation d'une parabole en voyant son graphe	<input type="checkbox"/> ok
Dessiner une parabole connaissant son équation	<input type="checkbox"/> ok
Trouver les coordonnées du sommet d'une parabole	<input type="checkbox"/> ok
Trouver les zéros d'une parabole	<input type="checkbox"/> ok
Trouver l'équation d'une parabole connaissant trois de ses points	<input type="checkbox"/> ok
Trouver l'équation d'une parabole connaissant son sommet et un autre de ses points	<input type="checkbox"/> ok
Trouver les points d'intersection de deux paraboles	<input type="checkbox"/> ok
Trouver les points d'intersection d'une parabole et d'une droite	<input type="checkbox"/> ok
Comprendre que le sommet correspond à un maximum ou un minimum (ex. 3.17 et 3.18)	<input type="checkbox"/> ok

4. Puissances et racines

4.1. Puissances à exposants entiers

Définition

La puissance $n^{\text{ième}}$ d'un nombre réel a est un produit de n facteurs tous égaux à a :

$$a^2 = a \cdot a, \quad a^3 = a \cdot a \cdot a, \quad \text{etc.}$$

On dit que a est la **base** de la puissance et n l'**exposant**.

Cette définition est valable lorsque l'exposant n est un entier positif non nul. On remarque vite sur un exemple la propriété suivante :

$$a^2 \cdot a^3 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^{2+3} = a^5$$

Plus généralement : $a^n a^m = a^{n+m}$.

Si on veut que cette propriété essentielle soit conservée pour tout nombre n entier, on doit se poser les questions suivantes : $a^0 = ?$ et $a^{-n} = ?$ (avec $n > 0$)

D'après la propriété ci-dessus, on a $a^k \cdot a^0 = a^{k+0} = a^k \Rightarrow a^0 = 1$

$$\text{De même : } a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1 \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^0 = 1 \text{ et } a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ pour tout réel } a \text{ non nul.}$$

Propriétés

Pour tous les réels a et b non nuls et tous les entiers n et m non nuls, on a les propriétés suivantes :

$$1. \quad a^n a^m = a^{n+m}$$

$$2. \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$3. \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

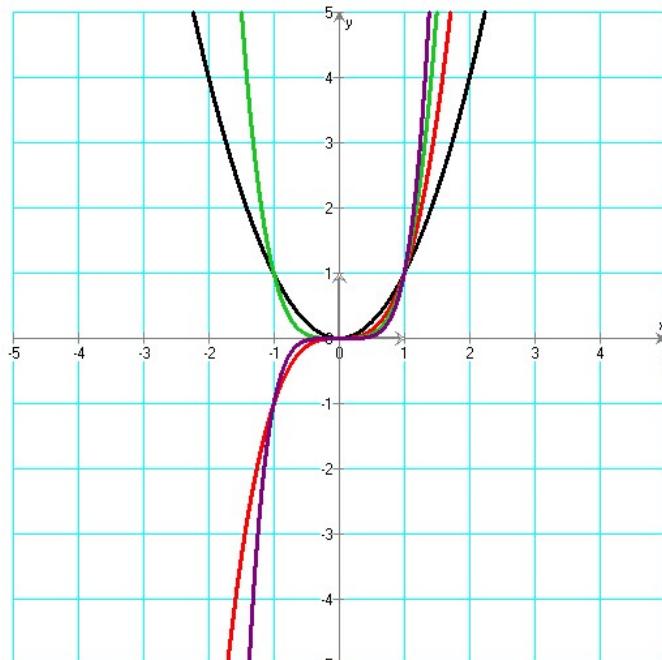
$$4. \quad a^n b^n = (ab)^n$$

$$5. \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b} \right)^n$$

$$6. \quad n = m \Leftrightarrow a^n = a^m$$

Ci-contre, les graphes de

- x^2 (en noir),
- x^3 (en rouge),
- x^4 (en vert),
- x^5 (en violet).



Exercice 4.1Notation : $-a^b = -(a^b)$

a. $\frac{3^6}{3^2}$

b. $4^2 \cdot 2^5 \cdot 8^2$

c. $3^7 \cdot (-3)^7 \cdot \frac{1}{9^2} \cdot \frac{1}{27^2}$

d. $5 \cdot 5^2 \cdot 5^3 \cdot \dots \cdot 5^{10}$

e. $5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{10}$

Exercice 4.2

Simplifiez l'écriture :

a. $a^8 \cdot a^{-5}$

b. $a^{-8} \cdot a^{14}$

c. $a^{m-2} \cdot a^{3-m}$

d. $a^{2n-9} \cdot a^{8-n}$

e. $(a^{-2})^3$

f. $(a^3)^{-2}$

g. $(2^{-3})^0$

h. $(2^0)^{-3}$

i. $(a^{-5})^{-n}$

Exercice 4.3

Résolvez les équations suivantes (utilisez la propriété 6) :

a. $(3^{x-1})^3 = 9 \cdot 3^{x-2}$

b. $27^{x+2} = 3^{5x+8}$

c. $9^x 2^{2x} = 216^{-1}$

Exercice 4.4

Dessinez les graphes des fonctions suivantes :

a. $(x - 2)^3$

b. $x^4 + 1$

c. $-x^3$

4.2. Bases arithmétiques

Nous utilisons le système décimal (base 10) dans nos activités quotidiennes. Ce système est basé sur dix symboles, de 0 à 9, avec une unité supérieure (dizaine, centaine, etc.) à chaque fois que dix unités sont comptabilisées. C'est un système **positionnel**, c'est-à-dire que l'endroit où se trouve le symbole définit sa valeur.



Ainsi, le 2 de 523 n'a pas la même valeur que le 2 de 132. En fait, 523 est l'abréviation de $5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$. La valeur d'un nombre est donc la somme des valeurs de chaque chiffres multipliés par leurs poids respectifs. Cette règle reste toujours la même quelque soit la base considérée. On peut selon ce principe imaginer une infinité de systèmes numériques fondés sur des bases différentes.

En informatique, outre la base 10, on utilise très fréquemment le **système binaire** (base 2) puisque l'algèbre booléenne est à la base de l'électronique numérique. Deux symboles suffisent : 0 et 1.

On utilise aussi le **système hexadécimal** (base 16). Il faut alors six symboles supplémentaires pour représenter les chiffres au-delà de 9 : A (qui représente le 10), B (11), C (12), D (13), E (14) et F (15).

Le tableau ci-dessous montre la représentation des nombres de 0 à 15 dans les bases 10, 2 et 16.

Décimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Binaire	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
Hexadécimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

La base vingt (système vigésimal) a été utilisée par les Mayas et les Aztèques, ainsi que de manière alternative en France (dont on garde en l'héritage pour quatre-vingt).

La base soixante (système sexagésimal), dans la mesure du temps et des angles, a été utilisée par les Sumériens, les Akkadiens, puis les Babyloniens.

Conversion d'une base vers la base 10

Convertir un nombre dans une base quelconque vers la base 10 est facile. Comme on l'a déjà dit, la valeur d'un nombre est la somme des valeurs de chaque chiffres multipliés par leurs poids respectifs, le poids étant la base élevée à une puissance entière indiquant la position. Prenons quelques exemples (l'indice indique la base de départ) :

- $543_6 = 5 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6^1 + 3 \cdot 6^0 = 180 + 24 + 3 = 207$
- $543_7 = 5 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7^1 + 3 \cdot 7^0 = 245 + 28 + 3 = 276$
- $10B4_{16} = 1 \cdot 16^3 + 0 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^0 = 4096 + 0 + 176 + 4 = 4276$

Remarquez que les positions sont numérotées de droite à gauche et commencent à 0.

Exercice 4.5

Convertissez en décimal :

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|----------------------|
| a. 1101001_2 | b. 6432_8 | c. $AF2_{16}$ |
| d. 34221_6 | e. $111A_{12}$ | f. $D45_{11}$ |

Conversion de la base 10 vers une autre base

Méthode intuitive : de gauche à droite

Quelle est la plus grande puissance p de la base B que l'on puisse retrouver dans N et combien de fois y retrouve-t-on la valeur de B^p ? Cela donne le premier chiffre à gauche, en position p .

Exemple : Convertissons 425 en base $B=16$.

425 est supérieur à 16^2

$16^2 = 256$ va une fois dans 425 \Rightarrow le chiffre le plus à gauche est 1.

Reste à représenter $425 - 1 \cdot 16^2 = 425 - 256 = 169$

On répète la même question tant que le reste est supérieur à la base.

169 est supérieur à 16^1

16^1 va 10 fois dans 169 \Rightarrow chiffre suivant est A

Reste $169 - 10 \cdot 16 = 9$

Le nombre qui reste est inférieur à B et est le chiffre le plus à droite, autrement dit en position 0 si les positions sont numérotées de droite à gauche.

Donc : $425_{10} = 1A9_{16}$

Méthode systématique : de droite à gauche

Commençons par rechercher la valeur du premier chiffre à droite. Ce chiffre, les unités, est le reste de la division du nombre N à convertir par la base B . Ce chiffre en position 0 a un poids égal à la base exposant zéro $= B^0 = 1$ = l'unité.

En divisant à nouveau le quotient de la division précédente par la base on obtient le chiffre de position 1 dont le poids est B^1 = la base.

Des divisions répétées par la base donnent successivement les chiffres de poids B^0, B^1, B^2, B^3, B^4 , etc. ce qui nous permet d'écrire le nombre de droite à gauche.

Exemple : Convertissons à nouveau 425 en base 16.

$425 : 16 = 26$ reste 9

$26 : 16 = 1$ reste 10 (A)

$1 : 16 = 0$ reste 1

Donc, en lisant la dernière colonne de bas en haut : $425_{10} = 1A9_{16}$

Exercice 4.6

Convertissez ces nombres écrits en base 10 vers la base demandée, en utilisant les deux méthodes ci-dessus :

- a. 145 en base 2
- b. 145 en base 5
- c. 1004 en base 16
- d. 255 en base 16
- e. 6522 en base 14
- f. 8320 en base 9

4.3. Racines

Définition La racine *n*^{ème} d'un nombre réel positif *a* est le nombre réel positif *r* dont la puissance *n*^{ème} est égale à *a* :

$$r = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow a = r^n$$

On dit que *a* est le **radicande**, *n* l'**indice** et $\sqrt[n]{}$ le **radical**.

Cette définition est valable lorsque l'indice *n* est un entier supérieur ou égal à 2. Dans le cas où *n* = 2, on note \sqrt{n} au lieu de $\sqrt[2]{n}$.

Deux remarques Pour tout réel *a*, on a : $\sqrt{a^2} = |a|$

Si *n* est impair, il est possible de définir la racine d'un nombre négatif. Cette racine est alors également un réel négatif.

Exemple : $\sqrt[3]{-8} = -2$

Propriétés Pour tous les réels positifs non nuls *a* et *b*, tous les entiers *n* et *p* ≥ 2 et tous les entiers *m*, on a les propriétés suivantes :

$$7. (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad 8. \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad 9. \sqrt[n]{a} \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{ab}$$

$$10. \sqrt[pn]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[pn]{a} \quad 11. \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[np]{a^m}$$

Attention à ces erreurs fréquentes !

$$\sqrt{x^2 + y^2} \neq x + y$$

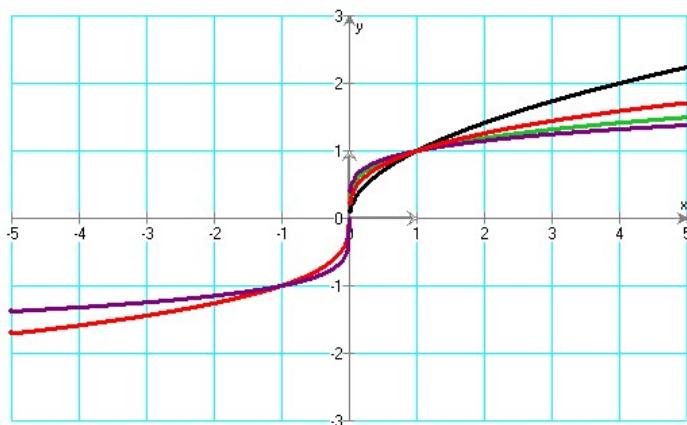
Par exemple : $\sqrt{3^2 + 5^2} \neq 3 + 5$

$$\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

Par exemple : $\sqrt{5+20} \neq \sqrt{5} + \sqrt{20}$

Ci-contre, les graphes de

\sqrt{x} (en noir),
 $\sqrt[3]{x}$ (en rouge),
 $\sqrt[4]{x}$ (en vert),
 $\sqrt[5]{x}$ (en violet).



Exercice 4.5

Calculez sans calculatrice :

- a. $\sqrt{0}$ b. $\sqrt{625}$ c. $\sqrt{\frac{25}{36}}$ d. $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}$ e. $\sqrt{0.04}$
f. $\sqrt{-16}$

Exercice 4.6

Calculez sans calculatrice :

- a. $\sqrt[3]{1000}$ b. $\sqrt[4]{625}$ c. $\sqrt[3]{0.001}$ d. $\sqrt[5]{-32}$ e. $\sqrt[4]{-16}$

Exercice 4.7

Simplifiez sans calculatrice :

- a. $\sqrt{12}\sqrt{3}$ b. $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}$ c. $\sqrt{5^4}$ d. $\sqrt[10]{2^5}$ e. $\sqrt{\sqrt{16}}$
f. $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$ g. $\sqrt{a}\sqrt[3]{a}\sqrt{a}$ ($a > 0$)

Exercice 4.8

Dessinez les graphes des fonctions suivantes :

- a. $\sqrt{x-2}$ b. $\sqrt{x}-1$ c. $-\sqrt[3]{x}$

Exercice 4.9

Le rapport entre la longueur et la masse d'un flétan du Pacifique peut être donné par la formule $L=0.46\sqrt[3]{M}$ où M est la masse en kg et L la longueur en mètres.
Représentez graphiquement la longueur d'un flétan en fonction de sa masse (le plus grand spécimen connu pèse 230 kg).

Exercice 4.10Écrivez différemment, en utilisant la propriété 9. Par exemple : $\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=2\sqrt{3}$.

- a. $\sqrt{24}$ b. $\sqrt{243}$ c. $\sqrt{300}$ d. $\sqrt{125}$ e. $\sqrt{147}$
f. $\sqrt[3]{54}$ g. $\sqrt{80}$ h. $3\sqrt{5}-4\sqrt{20}+5\sqrt{45}-3\sqrt{80}$
i. $2\sqrt{40}-2\sqrt{90}+\sqrt{4000}-5\sqrt{10}$

Exercice 4.11

Calculez sans calculatrice :

- a. $(3-\sqrt{3})(1-2\sqrt{3})$ b. $(4-\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})$
c. $(2\sqrt{3}-1)^2$ d. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

4.4. Puissances à exposants rationnels

Soient m et n des entiers, $n \geq 2$. Sachant que tout nombre rationnel peut être écrit $\frac{m}{n}$, on étend la notion de puissance à des exposants rationnels en posant :

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ pour tout nombre réel positif } a.$$

En effet :

$$\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdots a^{\frac{1}{n}}}_{n \text{ termes}} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a \Rightarrow \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Et donc :

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

En restreignant les bases a et b à des réels positifs non nuls, les propriétés 1 à 6 sont valables pour les puissances à exposants rationnels.

Exercice 4.12 Résolvez $\sqrt{x\sqrt{x}+x\sqrt{x+x\sqrt{x}}}=x$.

Exercice 4.13 Écrivez à l'aide de radicaux :

a. $5^{\frac{1}{2}}$ b. $3^{\frac{5}{6}}$ c. $36^{\frac{3}{2}}$ d. $4^{-\frac{1}{2}}$ e. $7^{-\frac{1}{3}}$ f. $3^{-\frac{5}{6}}$

Exercice 4.14 Écrivez à l'aide d'exposants rationnels :

a. $\sqrt[3]{3^2}$ b. $\sqrt[11]{5^6}$ c. $-\sqrt[4]{a^8}$ d. $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ e. $-\frac{1}{\sqrt[5]{6}}$ f. $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$

Exercice 4.15 L'aire de la surface S d'un corps humain (en m^2) peut être donnée approximativement par

$$S = 0.007 m^{0.425} h^{0.725}$$

où la taille h est donnée en cm et la masse m en kg.

- a. Calculez S pour une personne de 1.83 m pesant 79 kg.
- b. Quel est l'effet sur S d'une augmentation de la masse de 10% ?

4.5. Ce qu'il faut absolument savoir

Maîtriser les opérations avec les puissances

ok

Reconnaitre les graphes des puissances

ok

Maîtriser les opérations avec les racines

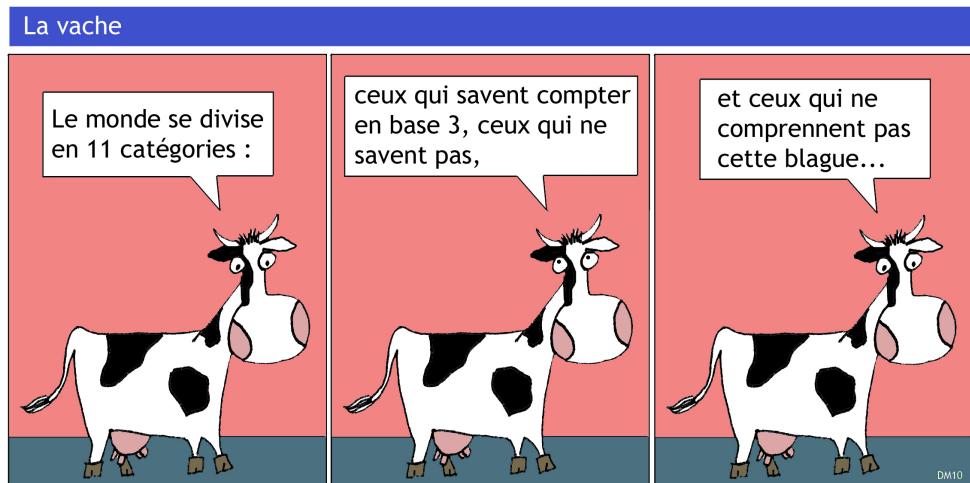
ok

Reconnaitre les graphes des racines

ok

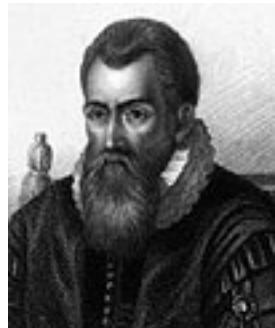
Passer de la représentation avec des radicaux à celle avec des puissances rationnelles et vice versa

ok



5. Logarithmes et exponentielles

5.1. Un peu d'histoire



John Napier (1550-1617)



Jost Bürgi (1552-1632)

John **Napier** est né à Merchiston Castle, aux environs d'Édimbourg. Vers la fin du 16^{ème} siècle, préoccupé par le fait que le progrès scientifique était en quelque sorte freiné par des calculs numériques longs et pénibles, il concentra toutes ses forces au développement de méthodes susceptibles de réduire ce calcul fastidieux. Après vingt ans de travail, il livre en 1614 son célèbre traité intitulé *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, qui décrit son système de logarithmes et l'usage qu'il veut en faire. Un second ouvrage, intitulé *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, publié en 1619, contient le premier traité ainsi que les procédés de construction des tables de logarithmes.

La publication du traité de 1614 eut un impact considérable et, parmi les admirateurs les plus enthousiastes de ce nouveau système, il faut compter Henry **Briggs** (1561-1630), professeur de géométrie d'Oxford. C'est à Briggs que l'on doit la naissance des logarithmes en base 10, aussi appelés à « base vulgaire » ou *logarithmes de Briggs*.

On sait aujourd'hui que Jost **Bürgi** (1552-1632) a développé des idées similaires à celles de Napier, en Suisse, à la même époque. On prétend même de Bürgi a conçu l'idée de logarithme dès 1588, mais il perdit tous ses droits de priorité en publiant ses résultats quelques années après le *Mirifici* de Napier. Les travaux de Bürgi furent en effet publiés à Prague en 1620 sous le titre *Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen*.

L'invention des logarithmes a eu un impact considérable sur la structure des mathématiques et déculpa les méthodes de calcul des astronomes.

5.2. Introduction

Dans la réalité, c'est plutôt 1 ou 2 % !

Imaginons un millionnaire qui place son argent dans une banque très généreuse qui propose un taux d'intérêt à 100 %, ce qui signifie que la fortune du millionnaire doublera chaque année. S'il place un million à la banque l'année 0, voici donc comment augmentera sa fortune :

années (n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
fortune en millions (F)	1	2	4	8	16	32	64	128	256

On remarque que la première ligne du tableau est une progression arithmétique, tandis que la seconde est une progression géométrique.

S'il cherche le numéro de l'année où il possédait une fortune F , il l'appellera le *logarithme* de sa fortune, soit $n = \log F$. Nous dirons que ce logarithme est en *base 2*, parce que F est multiplié par 2 tous les ans. Ainsi, $0 = \log_2(1)$, $1 = \log_2(2)$, $2 = \log_2(4)$, etc. On a la relation générale :

Exemple

$$10^x = 9 \Leftrightarrow x = \log_{10}(9)$$

$$b^x = u \Leftrightarrow x = \log_b(u) \quad (b > 0, b \neq 1, u > 0)$$

Regardons à nouveau le tableau pour voir apparaître une relation très intéressante : on sait que $2 \cdot 16 = 32$ et si l'on regarde la relation qui lie les logarithmes de ces trois nombres, on voit que $\log_2(2) + \log_2(16) = \log_2(32)$. Ce n'est pas une coïncidence, comme nous le verrons dans la démonstration du § 5.3.

Ce livre existe vraiment (les pages sont numérotées de façon classique). Il s'intitule « Les puissances de dix », aux éditions Pour la Science, diffusion Belin (ISBN 2-9029-1833-X).

Imaginons maintenant que nous voulions réaliser un livre d'images carrées (de même taille) dont la numérotation des pages sera un peu spéciale : à la page 0, on verra une image carrée dont la longueur du côté correspondra à 1 mètre dans la réalité. Chaque fois que l'on tournera une page en avançant dans le bouquin, la longueur réelle sera multipliée par 10. Inversement, en revenant en arrière d'une page, la longueur réelle sera divisée par 10. Ainsi, à la page -1, le côté de l'image correspondra à une longueur de 0.1 mètre.

On peut donc faire le tableau de correspondances suivant :

$-n$...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	n
10^{-n}	...	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000	...	10^n

La base utilisée ici est 10. Par analogie avec le tableau de la fortune, on peut dire que le logarithme en base 10 de 10 est 1, parce que $10^1 = 10$; le logarithme en base 10 de 100 est 2 car $10^2 = 100$, etc.

Généralisons ce que nous venons de dire et prenons une base b quelconque. Écrivons les deux suites, infinies dans les deux sens, (a) et (g). Notre tableau devient :

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	(a)
b^{-4}	b^{-3}	b^{-2}	b^{-1}	1	b	b^2	b^3	b^4	(g)

(a) est une progression arithmétique de raison 1 ; (g) est une progression géométrique de raison b .

Cherchons à calculer les nombres qui auront pour logarithmes 0.1, 0.2, 0.3, ..., 0.9. Il faut simplement insérer 9 **moyens géométriques** entre 0 et 1. On aura $t_1 = b^0$, $t_{11} = b^1$, avec $t_{11} = t_1 \cdot r^{10}$.

La raison de la progression géométrique sera donc $r = \sqrt[10]{\frac{t_{11}}{t_1}}$.

Essayons par exemple de raffiner la table entre 0 et 1 en travaillant en base $b = 10$. Alors $t_1 = 1$, $t_{11} = 10$ et nous avons donc $r^{10} = 10$, d'où $r = \sqrt[10]{10} \approx 1.259$. On obtient la table ci-dessous. En suivant le même principe, on pourra encore raffiner cette table par exemple entre 0.7 et 0.8, et ainsi de suite (voir exercice 5.4).

0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
1	1.259	1.585	1.995	2.512	3.162	3.981	5.012	6.309	7.94	10

Exercice 5.1

Évaluez sans calculatrice (par convention, quand on écrit « $\log(x)$ », cela signifie « $\log_{10}(x)$ ») :

- a. $\log(1)$
- b. $\log(10^7)$
- c. $\log\left(\frac{1}{10}\right)$
- d. $\log\left(\frac{1}{\sqrt[4]{10}}\right)$
- e. $\log(\sqrt[3]{100})$
- f. $\log(-10)$
- g. $\log(x)$, quand $x \rightarrow 0^+$ (x tend vers 0)

Exercice 5.2

Évaluez sans calculatrice :

- a. $\log_2(8)$
- b. $\log_2(64)$
- c. $\log_3(729)$
- d. $\log_9(729)$
- e. $\log_3(\sqrt[4]{27})$
- f. $\log_2\left(\frac{1}{4}\right)$
- g. $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$
- h. $\log_2\left(\frac{1}{128}\right)$
- i. $\log_{16}\left(\frac{1}{2}\right)$
- j. $\log_9\left(\frac{1}{3}\right)$

Exercice 5.3

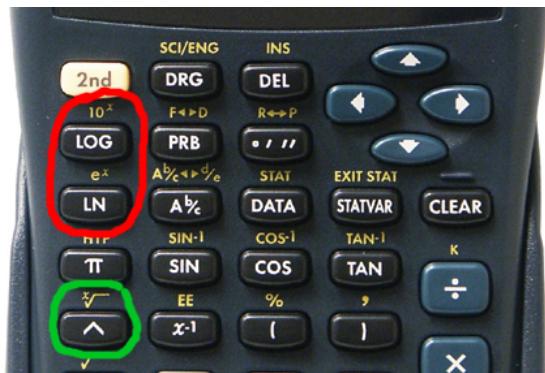
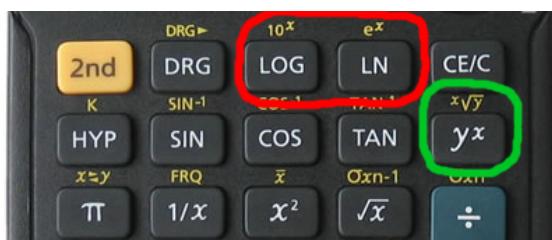
Résolvez les équations :

a. $x = \log_2(32)$

b. $\log_4(x) = 3$

c. $\log_x(125) = 3$

Votre calculatrice a deux touches pour calculer les logarithmes : LOG (base 10) et LN (base e que nous verrons plus tard).

**Exercice 5.4**

À l'aide de votre calculatrice, évaluez $\log_{10}(9)$ de trois façons différentes (prenez 3 chiffres après la virgule) :

- en utilisant la touche LOG de votre calculatrice (en rouge ci-dessus) ;
- par encadrements en utilisant la touche y^x (ou \wedge) de votre calculatrice (en vert ci-dessus) ;
- par la méthode des moyens géométriques.

5.3. Propriétés

Les relations suivantes sont vérifiées quelle que soit la base b (avec $b > 0$ et $b \neq 1$) :



1.a	$\log_b(1)=0$	1.b	$b^0=1$
2.a	$\log_b(b)=1$	2.b	$b^1=b$
3.a	$\log_b(b^x)=x$	3.b	$b^{\log_b(x)}=x$
4.a	$\log_b(u \cdot v)=\log_b(u)+\log_b(v)$	4.b	$b^x \cdot b^y=b^{x+y}$
5.a	$\log_b\left(\frac{u}{v}\right)=\log_b(u)-\log_b(v)$	5.b	$\frac{b^x}{b^y}=b^{x-y}$
6.a	$\log_b(u^v)=v \log_b(u)$	6.b	$(b^x)^y=b^{x \cdot y}$

Exercice 5.5

On appelle **caractéristique** d'un logarithme la partie du nombre située avant la virgule et **mantisso** la partie située après la virgule.

- Calculez sur votre machine les logarithmes suivants :

$$\log(1270), \log(127), \log(12.7), \log(1.27), \log(0.127), \log(0.0127).$$

- Que constatez-vous ?
- Par quelle propriété des logarithmes l'expliquez-vous ?

Exercice 5.6

Mettez sous la forme $m\log(a) + n\log(b)$:

a. $\log(a^2 b^3)$

b. $\log\left(\frac{a^3}{b^2}\right)$

c. $\log\left(\frac{a \cdot \sqrt[d]{d}}{c \cdot \sqrt[3]{b}}\right)$

5.4. Définition du nombre e

Revenons à notre millionnaire. Une banque concurrente apparaît qui propose elle aussi un taux d'intérêt à 100%, mais les intérêts sont capitalisés tous les mois au lieu de tous les ans. Ainsi, chaque mois, on ajoute à la fortune 1/12 du capital du mois précédent.

En mathématiques, un taux de 3% s'écrit 0.03, 100% s'écrit 1.

Formule des intérêts composés : $C_n = C_0(1+i)^n$
avec i : taux, C_0 : capital initial, C_n : capital après n « périodes ».

Si le millionnaire met 1 million le mois 0, sa fortune sera de $1 + \frac{1}{12}$ le mois 1,
 $\left(1 + \frac{1}{12}\right)^2$ le mois 2, etc.

Au bout d'une année, il aura, au lieu de 2 millions, $\left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = 2.613$ millions.

Capitalisé tous les jours, ce million serait devenu en un an $\left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} = 2.714$ millions. Si enfin nous supposons que la fortune est capitalisée à chaque instant, le capital au bout d'un an sera la limite de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ quand n tend vers l'infini.

À la limite, on démontre que cette somme n'est pas du tout infinie, mais égale à 2.718281828459045... Il est facile de constater ce phénomène sur une calculatrice. Depuis **Euler**, on désigne ce nombre par la lettre e .

Sur votre machine il faut calculer e^1 pour obtenir e .

e est un nombre **transcendant**, comme π .

On écrira $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718281828459045\dots$

Exercice 5.7

Si la base du logarithme est e , on parle de logarithme **naturel** ou **népérien** (de Lord Napier, Neper en français) ; son symbole est \ln .

Évaluez sans machine :

- a. $\ln(e)$ b. $\ln(1)$ c. $\ln(e^7)$ d. $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$ e. $\ln(\sqrt{e})$ f. $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

5.5. Résolution d'équations



Avant de pouvoir éliminer les logarithmes, il faut transformer l'équation en utilisant les propriétés du § 5.3 pour obtenir une équation du genre :

$$\log_b(x) = \log_b(y) \Rightarrow x = y$$

Remarquez bien que la base doit être la même.

De plus, il faudra vérifier les résultats dans l'équation de départ, car il n'est pas sûr que toutes les solutions soient valides. N'oubliez pas que le logarithme d'un nombre négatif ou nul n'existe pas !

Les équations où interviennent des logarithmes sont souvent sources d'erreurs. En voici quelques-unes, parmi les plus fréquentes :



- $\log_b(x) = k \cdot \log_b(y)$ n'implique pas que $x = k \cdot y$
- $\log_a(x) = \log_b(y)$ n'implique pas que $x = y$
- $\log_b(x) = \log_b(y) + \log_b(z)$ n'implique pas que $x = y + z$.
- $\frac{\log_b(x)}{\log_b(y)} \neq \log_b\left(\frac{x}{y}\right)$ et $\frac{\log_b(x)}{\log_b(y)} \neq \frac{x}{y}$
- Ne pas oublier que si $0 < x < 1$, alors $\log_b(x) < 0$.

Exercice 5.8

Résolvez les équations :

- a. $\log(x+1) - \log(3) = \log(2x-3) + \log(7)$
 b. $\log_3(2x-5) + \log_3(3x+7) = 4\log_3(2)$
 c. $\ln(x^2-7) = 2\ln(x+3)$
 d. $\log(\sqrt{x+1}) + \log(\sqrt{x-1}) - \log(5) = 0$
 e. $\log(x^2+3x-1) = 2$

Exercice 5.9

Résolvez :

a. $3^x + 9^x = 90$ b. $e^{3x} = 5$ c. $4e^{-3x} - 3e^{-x} - e^x = 0$

*Indication pour a : Posez $y = 3^x$.***Exercice 5.10**

Résolvez :

a. $2^{x^2} = 512$ b. $7^{x^2+x} = 49$ c. $\frac{1}{10^x} = 10000$

Exercice 5.11

Résolvez les systèmes :

a. $\begin{cases} \log(x) + \log(y) = 2 \\ x + y = 25 \end{cases}$ b. $\begin{cases} \ln(x) - \ln(y) = 1 \\ x \cdot y = e \end{cases}$

5.6. Passage d'une base à une autre

Il existe deux bases de logarithme très utilisées : la base 10 et la base e . Les calculatrices ne comprennent d'ailleurs que ces deux bases.

On peut cependant utiliser comme base n'importe quel nombre **strictement positif et différent de 1**.



On passe d'une base à une autre par la formule :

$$\log_a(u) = \frac{\ln(u)}{\ln(a)} = \frac{\log(u)}{\log(a)} = \frac{\log_b(u)}{\log_b(a)}$$

Démonstration Nous avons d'abord les équations équivalentes

$$w = \log_a(u) \text{ et } a^w = u$$

et nous procérons comme suit :

$$a^w = u$$

On prend \log_b des deux côtés

$$\log_b(a^w) = \log_b(u)$$

On applique la propriété 6.a

$$w \log_b(a) = \log_b(u)$$

$$w = \frac{\log_b(u)}{\log_b(a)}$$

Puisque $w = \log_a(u)$, nous obtenons bien la formule de passage. □

Exercice 5.12

Calculez à l'aide de votre calculatrice $\log_b 16$, pour $b = 2, 3, \dots, 16$.

Exercice 5.13

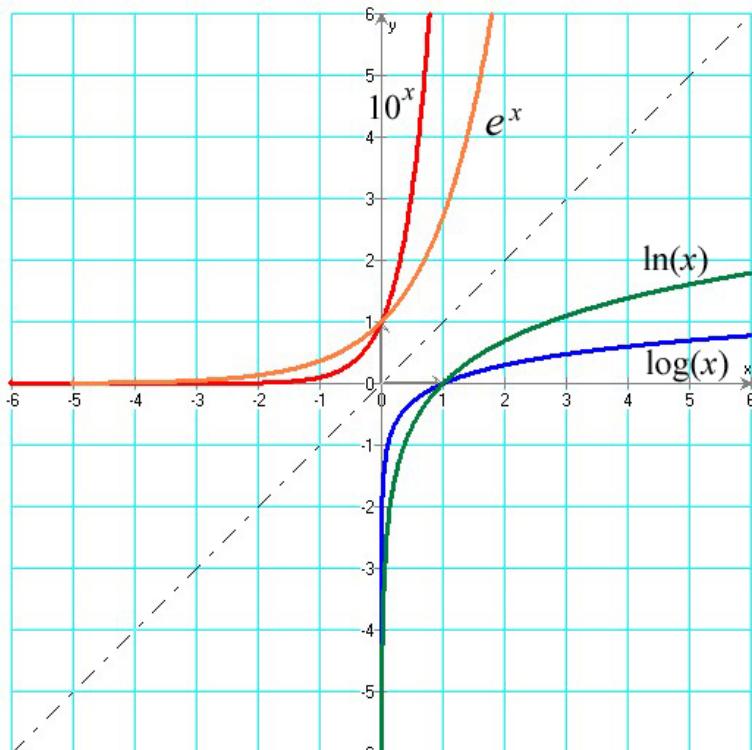
Résolvez :

- a. $\log(x) - \log(x+1) = 3\log(4)$
- b. $\log_2(x+7) + \log_2(x) = 3$
- c. $\log_3(x) = \frac{1}{2} + \log_9(4x+15)$
- d. $\log_4(x) = \frac{1}{8} \log_2(x^2+2)$
- e. $\log_4(x) = -3 + \log_2(x+16)$
- f. $\log_3(x) \cdot \log_9(x) = 2$
- g. $\log(x^2) = \log^2(x)$

5.7. Graphes

Les deux courbes exponentielles (la rouge et l'orange) passent par le point $(0, 1)$. Il en est ainsi quelle que soit la base de la puissance.

Les deux courbes logarithmiques (la verte et la bleue) passent par le point $(1, 0)$. Il en est ainsi quelle que soit la base du logarithme.

**Remarques**

- Il existe une symétrie axiale par rapport à la bissectrice du premier quadrant. Les fonctions $\ln(x)$ et e^x sont **réciproques** l'une de l'autre. Idem pour $\log(x)$ et 10^x .
- $a^x > 0$ pour tout x , si $a > 0$.
- Si $a > 1$, a^x croît extrêmement vite. On parle alors de *croissance exponentielle*.
- À l'inverse, les fonctions logarithmiques croissent très lentement. Elles sont négatives quand $0 < x < 1$.

Exercice 5.14

Représentez graphiquement les fonctions :

- a. $-\ln(x)$
- b. $2 - \ln(x)$
- c. $\ln(x - 3)$
- d. $-e^x$
- e. $2e^x$

5.8. Applications

Exercice 5.15



Tout corps radioactif se désintègre au cours du temps. Le nombre d'atomes radioactifs $N(t)$ au temps t (en années) est donné par :

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\mu t}$$

où N_0 est le nombre d'atomes radioactifs au temps $t = 0$ et μ un coefficient dépendant de la matière.

En particulier, le gaz carbonique de l'air contient en faible quantité du carbone 14, isotope radioactif du carbone. Tout être vivant participe au cycle du carbone. Tant qu'il est vivant, la proportion d'atomes de C14 par rapport à la masse de carbone qu'il contient est constante, soit $5 \cdot 10^{11}$ atomes de C14 par 12 g de carbone. Quand il meurt, les atomes de C14 commencent à se désintégrer suivant la loi énoncée ci-dessus, avec $\mu = 1.2 \cdot 10^{-4}$.

Pour estimer l'âge d'un objet d'origine animale ou végétale, il suffit donc d'évaluer le nombre d'atomes de C14 contenus dans 12 g de carbone prélevé sur cet objet.

- a. On découvre un reste végétal contenant $5 \cdot 10^{10}$ atomes de C14 pour 12 g de carbone. Quel est son âge ?
- b. On appelle *période* ou *demi-vie* d'un élément radioactif le temps nécessaire à la désintégration de la moitié du nombre initial d'atomes radioactifs.
Déterminez la demi-vie du carbone 14.

Exercice 5.16

La *chronologie glossienne* est une méthode permettant de dater un langage, fondée sur une théorie selon laquelle, durant une longue période, les changements linguistiques prennent place à un taux constant.

Supposons qu'un langage ait à l'origine N_0 mots de base et qu'au temps t , mesuré en millénaires, le nombre $N(t)$ de mots de base qui restent dans le langage courant est donné par :

$$N(t) = N_0 \cdot 0.805^t$$

- a. Donnez approximativement le pourcentage de mots de base perdus tous les cent ans.
- b. Si $N_0 = 200$, représentez le graphique de N pour $0 \leq t \leq 20$.
- c. Combien d'années faudra-t-il pour que 3/4 des mots disparaissent ?

Exercice 5.17



Dans des conditions ordinaires de pression et de température, la pression atmosphérique $P(h)$ mesurée à l'altitude h est donnée par :

$$P(h) = P_0 \cdot e^{-\alpha h}$$

où P_0 est la pression au niveau de la mer et α un coefficient qui vaut 0.125 si h est exprimé en km et $P(h)$ en pascals (Pa). On suppose que la pression atmosphérique vaut 100'000 Pa à l'altitude 0.

- a. Que vaut-elle à 2000 m d'altitude ?
- b. À quelle altitude vaudra-t-elle 60'000 Pa ?

Exercice 5.18

La *loi de Beer-Lambert* stipule que la quantité de lumière I qui pénètre à une profondeur de x mètres dans l'océan est donnée par :

$$I = I_0 \cdot c^x$$

avec $0 < c < 1$ et où I_0 est la quantité de lumière à la surface.

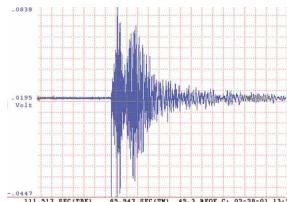
- a. Exprimez x en fonction de logarithmes décimaux.
- b. Si $c = 0.25$, calculez la profondeur à laquelle $I = 0.01I_0$ (cela détermine la zone où la photosynthèse peut avoir lieu).

Exercice 5.19

Sur l'échelle de Richter, la magnitude R d'un tremblement de terre d'intensité I est donnée par la relation :

$$R = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

I_0 étant une intensité minimale donnée.



- Si l'intensité d'un tremblement de terre est $1000 \cdot I_0$, calculez R .
- Exprimez I en fonction de I_0 et R .
- Les plus grandes magnitudes de séismes enregistrées se sont situées entre 8 et 9 sur l'échelle de Richter. Calculez les intensités correspondantes en fonction de I_0 .
- Au centre des États-Unis, l'aire A (en m^2) touchée par un séisme est liée à la magnitude par la formule $R = 2.3 \log(A + 14'000) - 6.6$. Calculez l'aire de la région touchée pour une magnitude 4.
- Le nombre annuel moyen n de séismes qui ont une magnitude entre R et $R+1$ vérifie plus ou moins la formule $\log(n) = 7.7 - 0.9R$. Combien y a-t-il en une année de séismes de magnitude comprise entre 4 et 5 ?

Exercice 5.20

- En septembre 1983, le plus grand nombre premier connu était $2^{132'049} - 1$. Combien ce nombre a-t-il de chiffres ?
- Début 2013, un chercheur américain de l'université du Missouri, Curtis Cooper, rapporte la découverte du plus grand nombre premier jamais trouvé : $2^{57885161} - 1$. Combien ce nombre a-t-il de chiffres ?

Cela correspond à un fichier texte de 22 Mo. Comptez environ 4000 feuilles A4 si vous souhaitez l'imprimer avec une taille de police classique (Times New Roman 12). Il est impossible d'appréhender ce que représente un tel nombre. À titre de comparaison, il faut moins de cent chiffres pour effectuer le décompte du nombre de particules (neutrons, protons et électrons) contenues dans tout l'univers !

Il aura fallu 39 jours à son ordinateur pour vérifier la primalité du petit nouveau, le 25 janvier 2013. Trois preuves indépendantes réalisées par des chercheurs différents, sur des machines différentes, avec des algorithmes différents, ont permis de s'assurer qu'il ne s'agissait pas d'un « faux positif ». Ce résultat a valu à son découvreur et à son institution un prix de 3000\$ versé par la fondation GIMPS. Celui qui découvrira le premier nombre premier à plus de 100 millions de chiffres touchera, lui, le jackpot : il pourra partager avec les fondateurs de GIMPS la récompense de 150.000\$ promise par l'Electronic Frontier Foundation. Un prix de 250.000\$ est aussi prévu pour le franchissement de la barrière du milliard de chiffres.

Exercice 5.21

Le nombre de bactéries $N(t)$ que renferme une culture au temps t (exprimé en jours) est donné par :

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\beta t}$$



où N_0 est le nombre initial de bactéries et β un coefficient dépendant du type de bactéries et du milieu ambiant.

On a estimé le nombre de bactéries d'une culture à 200'000 après 3 jours et à 1'600'000 après 4.5 jours.

- Quel est le nombre de bactéries après 5 jours ?
- Quand la culture contient-elle 800'000 bactéries ?
- Représentez le nombre de bactéries en fonction du temps sur un graphique muni d'une échelle linéaire, puis sur un graphique muni d'une échelle semi-logarithmique, que vous trouverez à la dernière page de ce chapitre.

Exercice 5.22

Une **courbe logistique** est le graphe d'une équation de la forme :

$$y = \frac{k}{1 + b e^{-cx}}$$



où k , b et c sont des constantes positives. On utilise une courbe de ce genre pour décrire une population y dont la croissance d'abord rapide a ensuite diminué après que x ait atteint une certaine valeur.

Dans une étude fameuse de Gause sur la croissance des protozoaires, une population de *Paramecium caudata* a pu être décrite par une équation logistique, avec $c = 1.1244$, $k = 105$ et x est le temps en jours.

- Calculez b si la population initiale est de 3 individus.
- Dans cette étude, la croissance maximale se situe en $y = 52$. À quel moment cela s'est-il produit ?
- Montrez qu'après une longue période de temps, la population décrite par une courbe logistique tend vers une constante k .
- Esquissez la courbe logistique de cette étude.

Exercice 5.23

La longueur (en cm) de beaucoup de poissons de t années communément mis en vente peut être donnée par une fonction de croissance de *von Bertalanffy* de la forme :



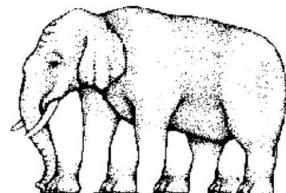
$$f(t) = a(1 - b e^{-kt})$$

où a , b et k sont des constantes.

- Pour le flétan du Pacifique, $a = 200$, $b = 0.956$ et $k = 0.18$. Donnez la longueur d'un flétan de 10 ans.
- On a pêché un flétan d'une longueur de 1 mètre. Quel est son âge ?
- Déterminez la longueur maximale que peut atteindre un flétan du Pacifique.

Exercice 5.24

La masse m (en kg) d'une éléphante d'Afrique à l'âge t (en années) peut être donnée approximativement par :



$$m(t) = 2600(1 - 0.51 e^{-0.075t})^3$$

- Donnez sa masse à la naissance.
- Représentez graphiquement la fonction $m(t)$.
- Du graphique obtenu en b, évaluez l'âge d'une éléphante d'Afrique pesant 1800 kg. Vérifiez ce résultat en utilisant la fonction $m(t)$.

5.9. Ce qu'il faut absolument savoir

Connaitre parfaitement les propriétés des logarithmes et exponentielles ok

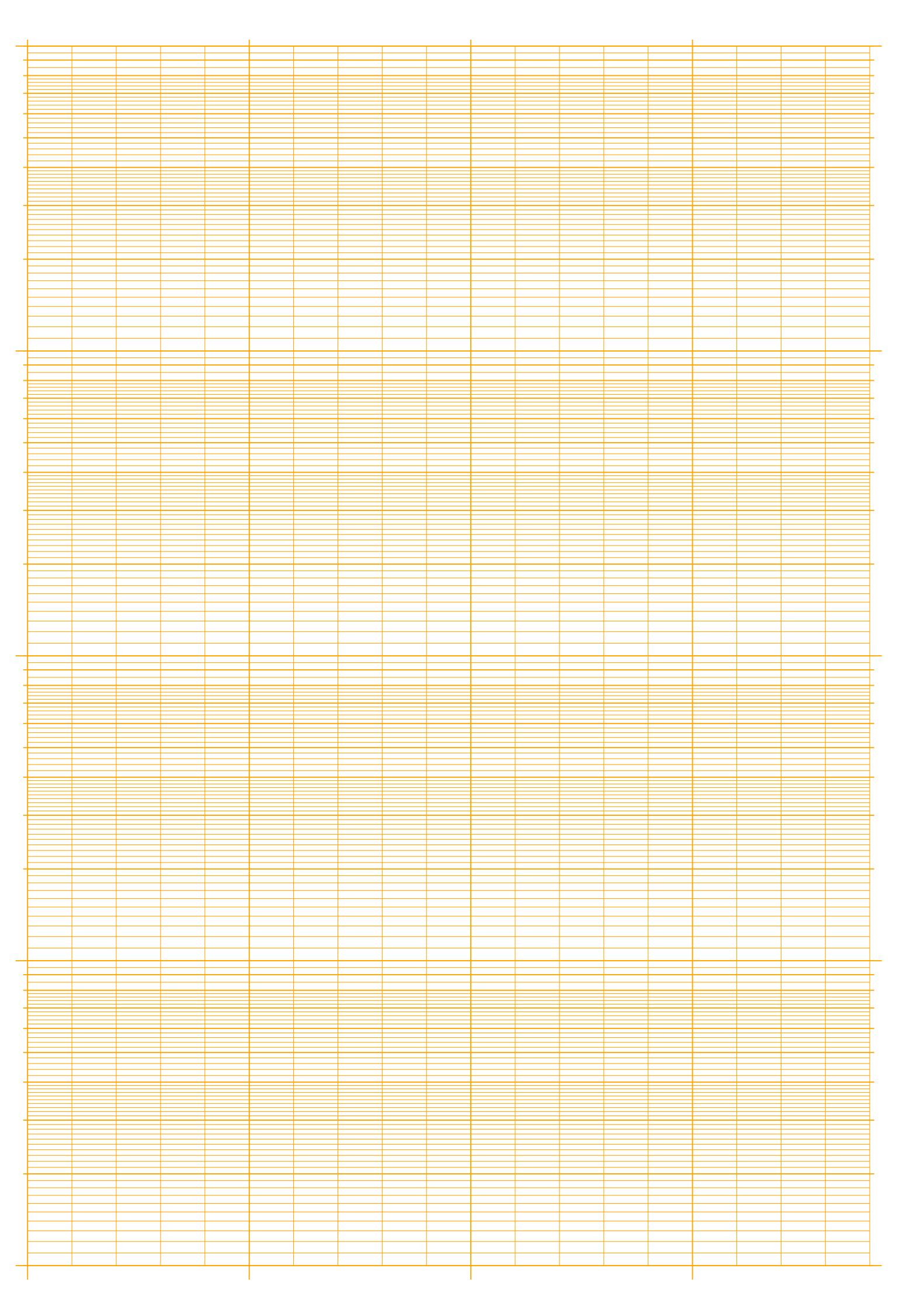
Retrouver la valeur du nombre e sur sa calculatrice ok

Changer la base d'un logarithme ok

Résoudre une équation avec des logarithmes et des exponentielles ok

Reconnaître et dessiner la courbe d'un logarithme ok

Reconnaître et dessiner la courbe d'une exponentielle ok



6. Fonctions trigonométriques

6.1. Fonctions périodiques et fonctions trigonométriques

Les traces les plus anciennes d'utilisation de sinus apparaissent dans le *Sulba Sutras* écrit en indien ancien dans la période du 8^{ème} siècle av. J.-C. au 6^{ème} siècle av. J.-C.

Les fonctions trigonométriques furent plus tard étudiées par Hyppârque de Nicée (185-125 av. J.-C.), Âryabhata (476-550), Varahamihira, Brahmagupta, Muhammad ibn Musa al-Khuwarizmi, Abu l-Wafa, Omar Khayyam, Bhaskara II, Nasir ad-Din at-Tusi, Regiomontanus (1464), Al-Kachi (14^{ème} siècle), Ulugh Beg (14^{ème} siècle), Madhava (1400), Rheticus et son disciple Valentin Otho. L'ouvrage *Introductio in analysin infinitorum* (1748) de Leonhard Euler fut en grande partie à l'origine des considérations analytiques des fonctions trigonométriques en Europe.

On peut trouver une analogie entre les fonctions périodiques et la tapisserie. En effet, on peut construire une fonction périodique en juxtaposant des bouts de la fonction de largeur p , exactement comme on le fait pour couvrir un mur avec des rouleaux de tapisserie. Le même motif réapparaît périodiquement.

Toutes les fonctions trigonométriques sont périodiques.

Bon nombre de processus qui se produisent dans la nature sont aussi périodiques : le niveau d'eau d'un bassin de marée, la pression sanguine du cœur, le courant alternatif et la position des molécules d'air qui transmettent un son, par exemple. On peut représenter de tels phénomènes par des fonctions trigonométriques.

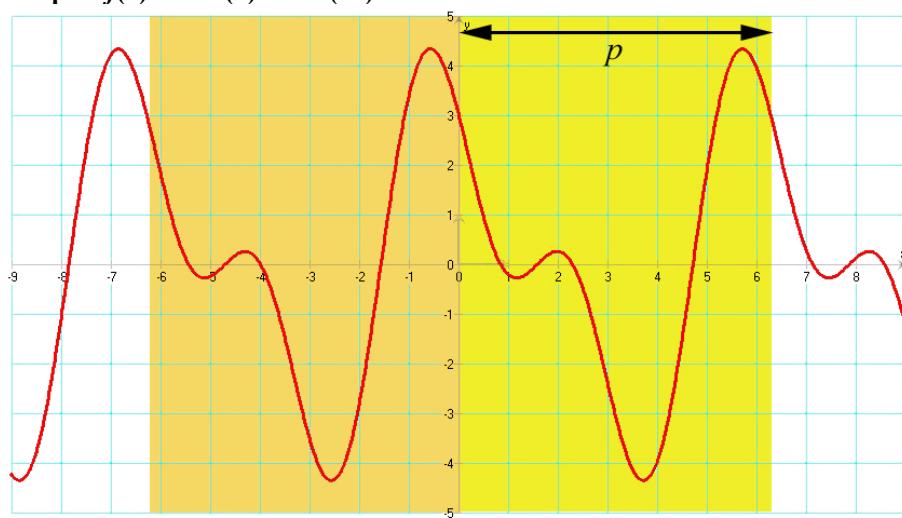
Les fonctions trigonométriques peuvent se définir à partir du cercle trigonométrique (cercle de rayon 1 centré à l'origine), définition qui les rend périodiques.

Une fonction f de la variable x définie sur D ($D \subset \mathbb{R}$) est dite **périodique** si, quel que soit x , il existe un nombre réel p tel que :

$$(x + p) \in D \text{ et } f(x + p) = f(x)$$

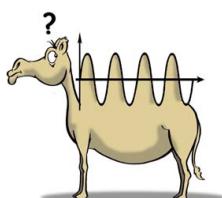
Le plus petit nombre réel positif p satisfaisant à cette condition est appelé **période** de f .

Exemple : $f(x) = 3\cos(x) - 2\sin(2x)$



L'unité des x est toujours le radian !

Glossaire



Fonction sinusoïdale : Fonction dont le graphique « ressemble » au graphique de la fonction sinus ; fonctions sinus et cosinus et toutes leurs formes qui ont subi des translations, des étirements ou des compressions.

Amplitude : Distance entre la moyenne d'une fonction sinusoïdale et sa valeur maximale ; moitié de la distance entre le minimum et le maximum d'une fonction sinusoïdale.

Déphasage : Translation horizontale d'une fonction sinusoïdale.

Fonction sinus

Sur l'axe des x , les angles sont en radians.

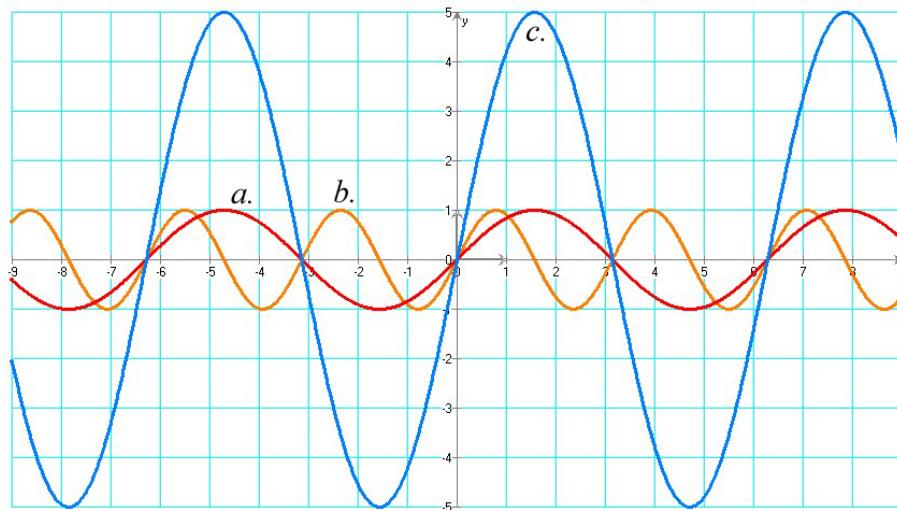
- a. En rouge : $\sin(x)$
- b. En orange : $\sin(2x)$
- c. En bleu : $5\sin(x)$

En utilisant le cercle trigonométrique, pouvez-vous expliquer la forme de cette courbe, ainsi que la longueur de sa période ?

La fonction sinus varie entre -1 et 1 . C'est une fonction bornée.

La période de la fonction $\sin(x)$ est 2π .

La fonction sinus est une fonction impaire : pour tout réel x on a $\sin(-x) = -\sin(x)$.



Fonction cosinus

Sur l'axe des x , les angles sont en radians.

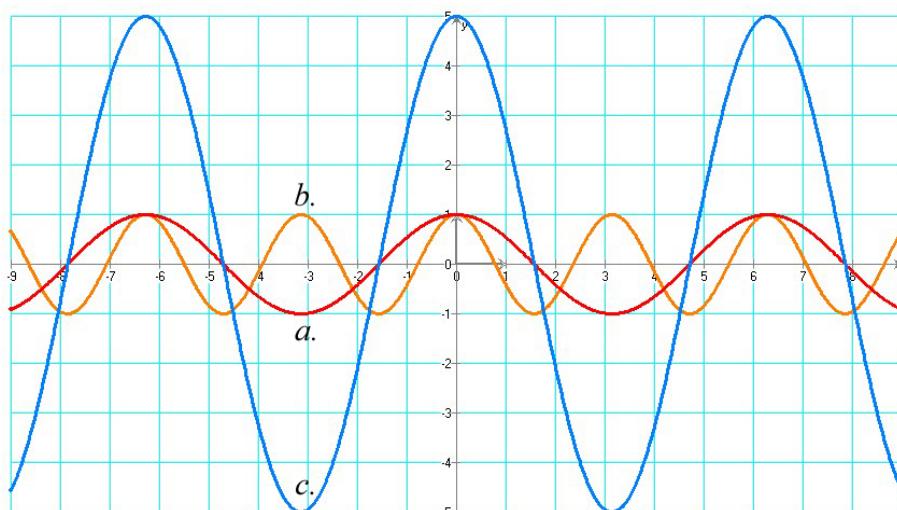
- a. En rouge : $\cos(x)$
- b. En orange : $\cos(2x)$
- c. En bleu : $5\cos(x)$

En utilisant le cercle trigonométrique, pouvez-vous expliquer la forme de cette courbe, ainsi que la longueur de sa période ?

La fonction cosinus varie entre -1 et 1 . C'est une fonction bornée.

La période de la fonction $\cos(x)$ est 2π .

La fonction cosinus est une fonction paire : pour tout réel x on a $\cos(-x) = \cos(x)$.



Remarquez que la fonction cosinus est décalée de $\frac{\pi}{2}$ vers la gauche par rapport à la fonction sinus.

Exercice 6.1

Vous pouvez aussi utiliser un ordinateur pour tracer ces courbes.

Une fonction sinusoïdale est donnée par la formule $f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$.

Dessinez le graphe des fonctions suivantes et constatez les effets de a , b , c et d :

a. $\sin(2x)$
d. $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

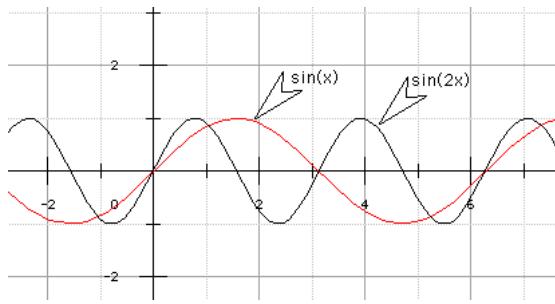
b. $2\sin(x)$

e. $\sin(2x - 1)$

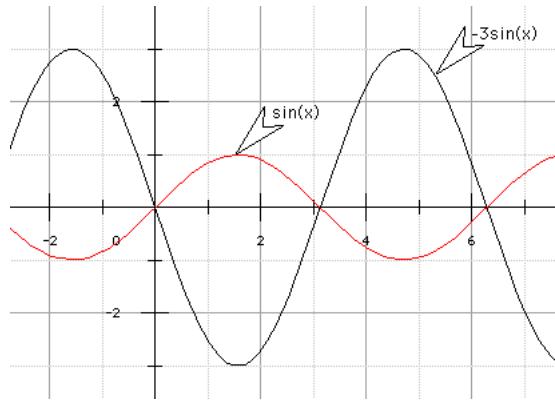
c. $-3\sin(x)$

f. $3 + \sin(x)$

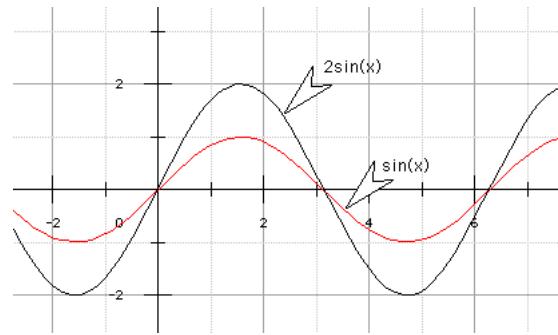
Solution de l'exercice 6.1



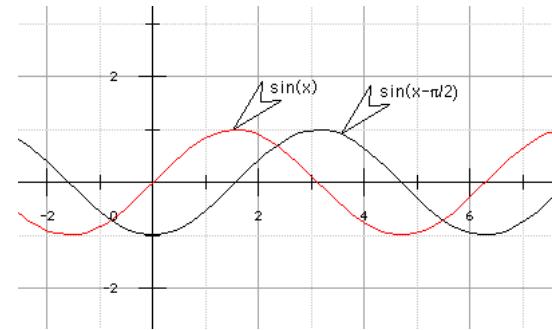
- a. Par rapport à $\sin(x)$, la période de $\sin(2x)$ est divisée par 2. D'une manière générale, la période de la fonction $\sin(bx)$ est de $\frac{2\pi}{b}$.



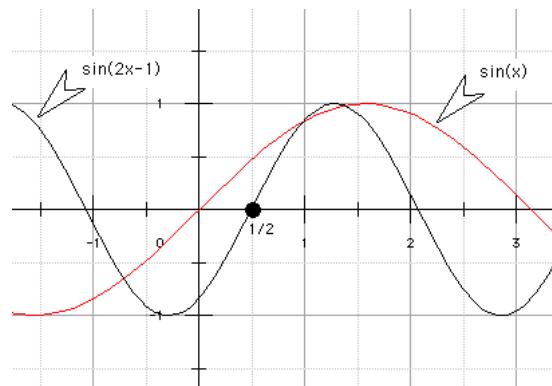
- c. L'amplitude de $-3\sin(x)$ est de 3. Le signe « - » provoque un « effet miroir » par rapport à l'axe des x .



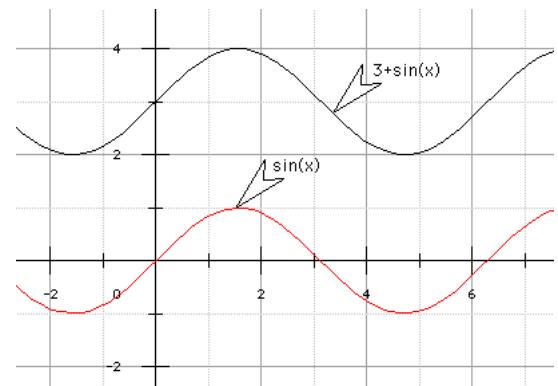
- b. L'amplitude de $\sin(x)$ est 1 (la moyenne est 0 et le maximum 1). L'amplitude de $2\cdot\sin(x)$ est 2 . On voit donc que l'amplitude de la fonction $a\cdot\sin(x)$ est $|a|$.



- d. La courbe de $\sin(x - \pi/2)$ est décalée de $\pi/2$ vers la droite. D'une manière générale, la fonction $\sin(x - c)$ ($c > 0$) est décalée de c vers la droite par rapport à $\sin(x)$. Par contre, $\sin(x + c)$ ($c > 0$) est décalée de c vers la gauche par rapport à $\sin(x)$.



- e. D'une manière générale, $\sin(bx + c)$ « commence » à $-\frac{c}{b}$. Il en va de même pour les fonctions du type $a\cdot\sin(bx+c)+d$. Ci-dessus, avec $b = 2$ et $c = -1$, la fonction $\sin(2x-1)$ commence à $\frac{1}{2}$.



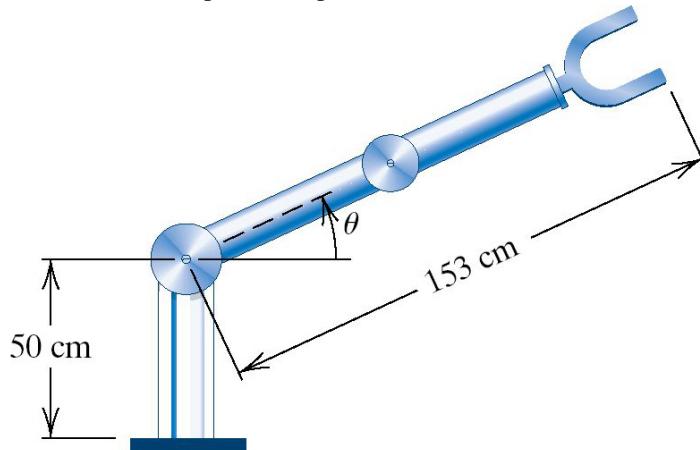
- f. Par rapport à $\sin(x)$, $3+\sin(x)$ est décalée de 3 vers le haut. D'une manière générale, une fonction $\sin(x)+d$ est décalée de d vers le haut (vers le bas si d est négatif). On dit que d est la valeur moyenne.

Exercice 6.2

Les fonctions trigonométriques sont utilisées pour la conception de robots industriels.

Supposons que l'articulation de l'épaule d'un robot soit motorisée de façon à ce que l'angle θ augmente à une vitesse constante de $\pi/12$ radians par seconde à partir d'un angle initial $\theta = 0$. Supposons que l'articulation du coude est maintenue rigide et que le bras a une longueur constante de 153 centimètres, comme sur la figure.

- Supposez que $h = 50$ cm si $\theta = 0$. Construisez le tableau qui énumère l'angle θ et la hauteur h de la main du robot chaque seconde lorsque $0 \leq \theta \leq \pi/2$.
- Déterminez si une augmentation constante de l'angle θ entraîne une augmentation constante de la hauteur de la main.
- Trouvez la distance totale parcourue par la main.

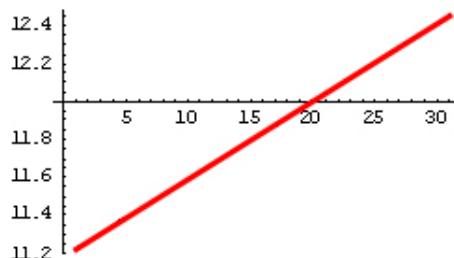
**Exercice 6.3**

À Madrid, la longueur du jour D (exprimée en heures) est donnée en fonction de la date par la formule approchée :

$$D(t) = 12 + 2.4 \cdot \sin(0.0172(t - 80))$$

où t est le numéro du jour depuis le début de l'année.

La figure ci-dessous montre le graphe de D durant un mois de l'année. On a en abscisse le nombre de jours écoulés depuis le début du mois en question, et en ordonnée la durée du jour en heures.



- Pourquoi le graphe apparaît-il comme une ligne droite, bien que ce soit une fonction sinus ?
- Quel mois montre le graphe ?
- Quelle est la pente approximative de cette « droite » ? Que représente cette pente ?
- Quelle était la durée du jour le 23 mai 2007 ?

Exercice 6.4

L'évolution de la population P d'une harde de cerfs est modélisée par la fonction :

$$P(t) = 4000 + 500 \cdot \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{où } t \text{ est mesuré en années.}$$

- Dessinez le graphe de $P(t)$ pour un an.
- Quand dans l'année la population est-elle à son maximum ? Quelle est la population à ce moment-là ?
- Y a-t-il un minimum ? Si oui, quand ?
- Quelle est la période de la fonction $P(t)$?

Exercice 6.5

La théorie, ne pouvant être vérifiée par l'approche scientifique, est assimilée à une pseudo-science.

La théorie des biorythmes est au programme de formation des naturopathes.

Les **biorythmes** sont une croyance qui affirme que depuis la naissance et jusqu'au moment de la mort, chaque être vivant subirait l'influence de trois cycles principaux : physique, émotionnel et intellectuel. Le principe des biorythmes fait appel aux graphiques de trois fonctions sinus élémentaires données sous la forme $y = \sin(b \cdot t)$, pour t en jours, avec $t = 0$ correspondant à la date de naissance. Une valeur $y = 1$ indique un potentiel de 100%.

- Trouvez la valeur de b pour le cycle physique, qui a une période de 23 jours ; pour le cycle émotionnel (période de 28 jours) ; pour le cycle intellectuel (période de 33 jours).
- Calculez les trois potentiels d'une personne âgée de 7670 jours (21 ans).
- Les potentiels sont une 1^{ère} fois tous à 0 quand $t = 0$. Quand seront-ils à nouveau tous les trois à 0 pour la 2^{ème} fois ?

Exercice 6.6

On calcule la variation annuelle de température T (en °C) à Ottawa, au Canada, par

$$T(t) = 15.8 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}(t - 3)\right) + 5$$

où t représente le temps en mois et $t = 0$ correspond au 1^{er} janvier.

- Représentez graphiquement $T(t)$ pour $0 \leq t \leq 12$.
- Déterminez la température maximale de l'année et la date à laquelle cela se produit.

Exercice 6.7

Les scientifiques utilisent parfois la formule

$$f(t) = a \sin(b \cdot t + c) + d$$

pour simuler les variations de température durant le jour, avec le temps t exprimé en heures, la température $f(t)$ en °C et $t = 0$ correspondant à minuit. Supposons que f soit décroissante à partir de minuit.

Soient les deux cas suivants :

- La température maximale est de 10°C, et la température minimale de -10°C survient à 4 heures du matin.
- La température varie entre 10°C et 30°C, et la température moyenne de 20°C survient pour la première fois à 9 heures du matin.

Déterminez les valeurs de a , b , c et d qui décrivent ces informations. Représentez graphiquement f pour $0 \leq t \leq 24$.

Exercice 6.8

Lorsqu'un fleuve se jette dans l'océan, la profondeur de ce fleuve varie en fonction des marées. Le tableau suivant donne la profondeur (en m) de la Tamise, à Londres, sur une durée de 24 heures.

Heure	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Profondeur	8.1	9.0	9.9	10.3	10.1	9.3	8.1	7.0	6.0	5.4	5.5	6.2
Heure	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Profondeur	7.3	8.4	9.5	10.1	10.2	9.7	8.7	7.6	6.6	5.9	5.6	5.9

- Reportez les données sur un graphique avec le temps sur l'abscisse et la profondeur sur l'ordonnée.
- Déterminez une fonction $P(t) = a \sin(b \cdot t + c) + d$ approchant les données du tableau.
- Si un bateau a besoin d'au moins 7 m d'eau pour naviguer en toute sécurité sur la Tamise, déterminez graphiquement les intervalles de temps pendant lesquels la navigation n'est pas sûre.

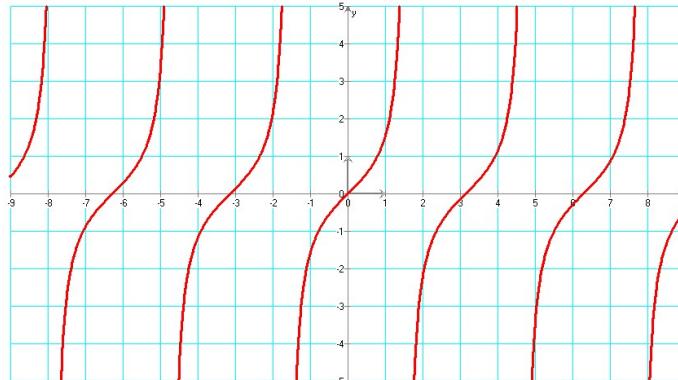
Fonction tangente

La fonction tangente varie entre $-\infty$ et $+\infty$. C'est une fonction non bornée.

La période de la fonction $\tan(x)$ est π .

La fonction tangente est une fonction impaire : pour tout réel x on a $\tan(-x) = -\tan(x)$.

En utilisant le cercle trigonométrique, pouvez-vous expliquer la forme de cette courbe, ainsi que la longueur de sa période ?

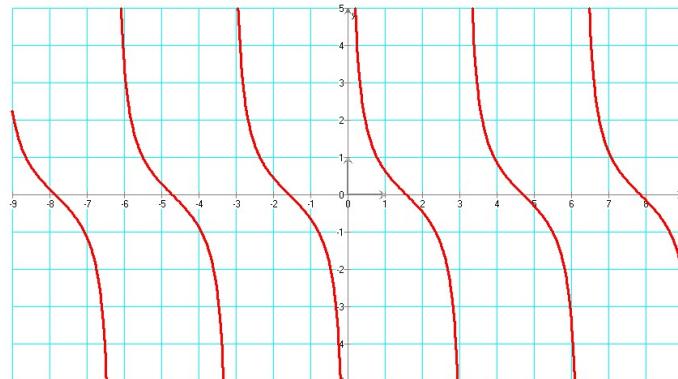
**Fonction cotangente**

La fonction cotangente varie entre $-\infty$ et $+\infty$. C'est une fonction non bornée.

La période de la fonction $\cot(x)$ est π .

La fonction cotangente est impaire : pour tout réel x on a $\cot(-x) = -\cot(x)$.

En utilisant le cercle trigonométrique, pouvez-vous expliquer la forme de cette courbe, ainsi que la longueur de sa période ?

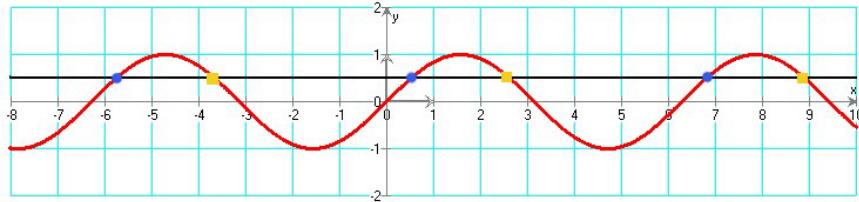
**6.2. Équations trigonométriques simples**

On appelle **équation trigonométrique** toute équation comportant des fonctions trigonométriques de l'inconnue (ou des inconnues). Rappelons que l'on travaille toujours en radians (sauf indication contraire).

Sinus

Pour résoudre une équation du type $\sin(u) = c$, avec $|c| \leq 1$, on utilise l'équivalence :

$$\sin(u) = c \Leftrightarrow u = \arcsin(c) + 2k\pi \text{ ou } u = \pi - \arcsin(c) + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Illustration

Le schéma ci-dessous montre les intersections de la courbe de $\sin(x)$ avec la droite horizontale $y = 0.5$. On voit qu'il y a deux familles de solutions (les ronds bleus et les carrés orange), chaque famille comprenant une infinité de solutions.

Exemple 1 Trouver toutes les solutions de $\sin(x) = 0.5$.

Première famille de solutions :

$$x = \arcsin(0.5) + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Seconde famille de solutions :

$$x = \pi - \arcsin(0.5) + 2k\pi$$

$$x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

On peut, si c'est demandé, énumérer les deux ensembles :

$$S = \left\{ \dots, \frac{-11\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{25\pi}{6}, \dots \right\} \cup \left\{ \dots, \frac{-7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \frac{29\pi}{6}, \dots \right\}$$

$$k=-1 \quad k=0 \quad k=1 \quad k=2$$

$$k=-1 \quad k=0 \quad k=1 \quad k=2$$

et éventuellement les réunir et les ordonner :

$$S = \left\{ \dots, \frac{-11\pi}{6}, \frac{-7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \frac{25\pi}{6}, \frac{29\pi}{6}, \dots \right\}$$

Pour résoudre une équation du type **sin(u) = sin(v)**, on utilise l'équivalence :

$$\sin(u) = \sin(v) \Leftrightarrow u = v + 2k\pi \text{ ou } u = \pi - v + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Exemple 2 Trouver toutes les solutions de $\sin(x) = \sin(1-2x)$.

Première famille de solutions :

$$x = 1 - 2x + 2k\pi$$

$$3x = 1 + 2k\pi$$

$$x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Seconde famille de solutions :

$$x = \pi - (1 - 2x) + 2k\pi$$

$$-x = \pi - 1 + 2k\pi$$

$$x = (1 - \pi) - 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Ici arrive une petite subtilité : il y a une infinité de manières d'écrire la solution. Il s'agit en effet d'énumérer les éléments d'un ensemble. On peut donc commencer l'énumération depuis n'importe quel élément (voir exemple 1). On choisit traditionnellement le plus petit supérieur ou égal à 0. On préfère aussi écrire mettre un « + » à la place d'un « - », devant le terme contenant k , ce qui ne change pas l'ensemble des solutions (l'ordre d'énumération sera simplement inversé). Fort de ces considérations « esthétiques », on écrira donc de préférence la seconde famille de solutions ainsi :

$$x = (1 + \pi) + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

On a choisi comme première solution la valeur correspondant à $k=1$, car quand $k=0$, $1 - \pi < 0$. Si bien que $(1 - \pi) + 2\pi = 1 + \pi$.

Cosinus

Faites un schéma qui montre les intersections de la courbe de $\cos(x)$ avec la droite horizontale $y = -0.5$.

Pour résoudre une équation du type **cos(u) = c**, avec $|c| \leq 1$, on utilise l'équivalence :

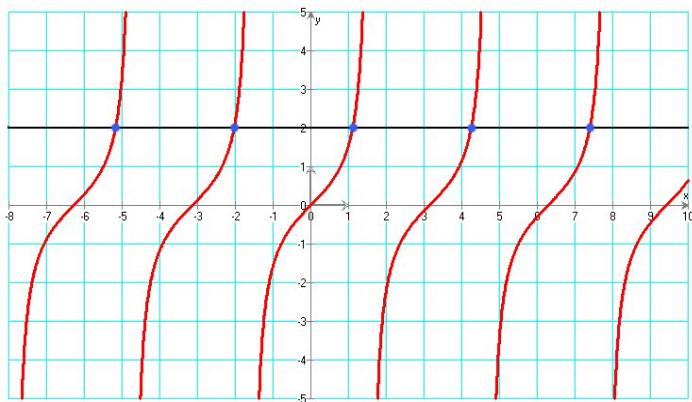
$$\cos(u) = c \Leftrightarrow u = \arccos(c) + 2k\pi \text{ ou } u = -\arccos(c) + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Pour résoudre une équation du type **cos(u) = cos(v)**, on utilise cette équivalence :

$$\cos(u) = \cos(v) \Leftrightarrow u = v + 2k\pi \text{ ou } u = -v + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Tangente

Avec les fonctions tangente et cotangente, il n'y a qu'une seule famille de solutions.



Pour résoudre une équation du type $\tan(u) = c$, on utilise l'équivalence :

$$\tan(u) = c \Leftrightarrow u = \arctan(c) + k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Pour résoudre une équation du type $\tan(u) = \tan(v)$, on utilise cette équivalence :

$$\tan(u) = \tan(v) \Leftrightarrow u = v + k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Cotangente

Faites un schéma qui montre les intersections de la courbe de $\cot(x)$ avec la droite horizontale $y = -3$.

Exercice 6.9

Résolvez les équations suivantes (en radians) :

a. $\sin(3t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ b. $\tan\left(\frac{2\pi}{3} - t\right) = \tan(2t)$

c. $\cos\left(\frac{2t}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{3t}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$

Exercice 6.10

Donnez **toutes** les solutions des équations suivantes :

Travaillez en radians

Travaillez en degrés

a. $\cos(t) = -0.5$

e. $\sin(t) = 0.8473$

b. $\cot(t) = -0.5773$

f. $\tan(t) = -0.9042$

c. $\sin(3t) = -0.866$

g. $\tan(5t) = 3.492$

d. $\sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

h. $\cos\left(\frac{2t}{3} - 45^\circ\right) = -\frac{1}{2}$

Une difficulté sera de vérifier que votre manière d'écrire la solution correspond à la solution du corrigé...

Énumérez les solutions de l'équation a. comprises dans l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

Exercice 6.11

Résolvez les équations suivantes (en radians) :

a. $\cos^2(t) = \frac{1}{4}$

b. $2\cos^2(t) - 3\cos(t) + 1 = 0$

Exercice 6.12

Résolvez l'équation $\sin(x) = \cos(x)$ de 5 façons différentes :

a. en utilisant le cercle trigonométrique ;

b. en dessinant les fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$;

en utilisant les relations :

c. $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$; d. $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$; e. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$

Exercice 6.13

Le but de cet exercice est de tracer sur une carte du monde la ligne de partage entre le jour et la nuit.

Au moment précis où le Soleil se lève à Porrentruy, il se lève évidemment aussi ailleurs. Mais où précisément ? Pour le savoir, on va utiliser la formule suivante, **valable pour tous les lieux où le Soleil se lève au même instant** :

$$\cos(h - \lambda) = -\tan(\delta) \tan(\phi) \quad (*)$$

Cette formule relie quatre nombres, h , λ , δ et ϕ , tous exprimés en degrés :

- λ et ϕ sont les coordonnées géographiques du lieu :

λ est la *longitude*, comptée positivement vers l'Est et négativement vers l'Ouest

ϕ est la *latitude*, comptée positivement vers le Nord et négativement vers le Sud

- h et δ ne dépendent pas du lieu, mais de la date :

h est l'*angle horaire*, qui dépend de l'heure qu'il est à Greenwich

δ est la *déclinaison* du Soleil, qui varie au cours de l'année.

(la déclinaison est l'une des deux coordonnées équatoriales permettant de repérer la position d'un point sur la sphère céleste, analogue à la latitude sur la Terre)

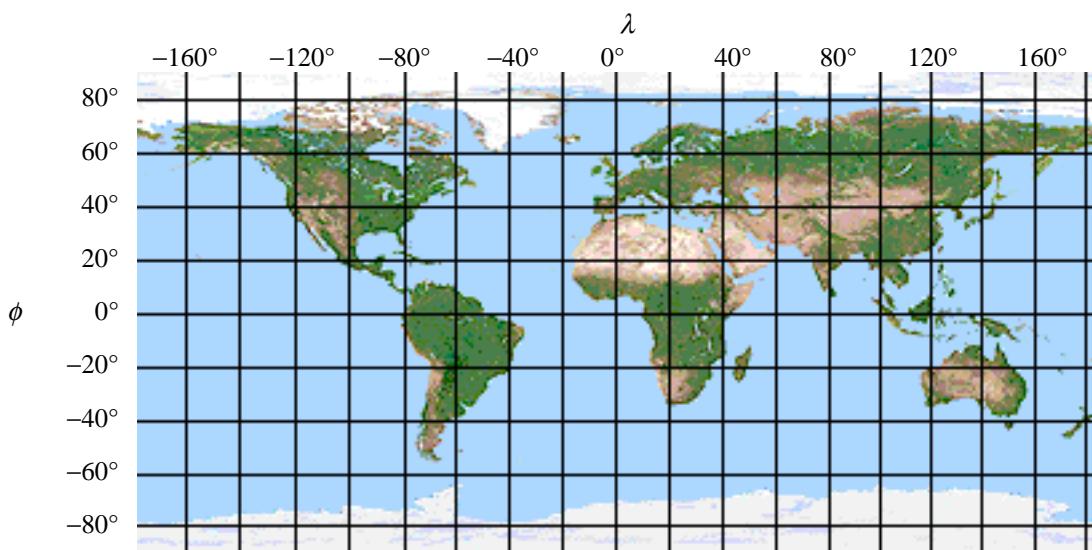
Le 21 juin, à 5h38 (heure locale, horaire d'été)

Le Soleil se lève à Porrentruy ($\lambda = 7^\circ 05' E$; $\phi = 47^\circ 25' N$). Ce jour-là, la déclinaison vaut $\delta = 23.44^\circ$.

1. **Détermination de h** : à l'aide de la formule (*), déterminez avec votre calculatrice la valeur de h .

2. **Calcul de longitudes** : à l'aide de la formule (*), déterminez avec votre calculatrice la valeur de λ à partir de celles de h , δ et ϕ , pour des latitudes $\phi = -60^\circ, -50^\circ, -40^\circ, \dots, 50^\circ, 60^\circ$.

3. **Tracé de la courbe** : tracez sur la carte ci-dessous les points de coordonnées $(\lambda; \phi)$, et reliez-les par une courbe.



4. **Prolongement de la courbe** : cherchez par le calcul à prolonger la courbe à des points de latitude supérieure à 60° , ou inférieure à -60° .
5. **Fermiture de la courbe** : quelle est, sur le globe terrestre, la forme de la frontière entre le jour et la nuit ? Que se passe-t-il aux antipodes quand le Soleil se lève à Porrentruy ?

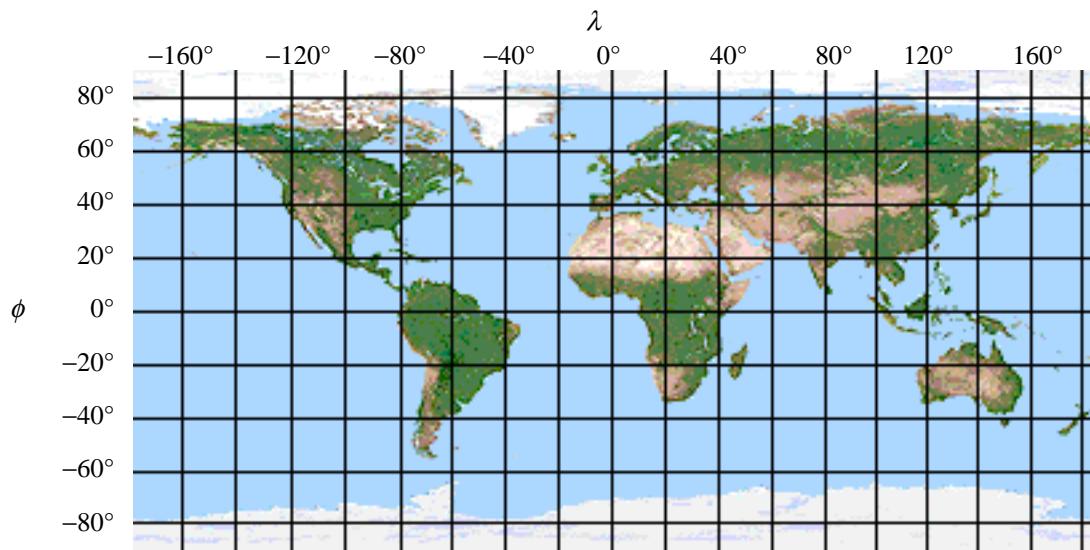
Comment faut-il compléter la courbe pour obtenir la frontière entre le jour et la nuit ? Comment calculer les points manquants ? Assombrissez la partie de la Terre plongée dans la nuit.

Le 10 novembre, à 7h28 (heure locale, horaire d'hiver)

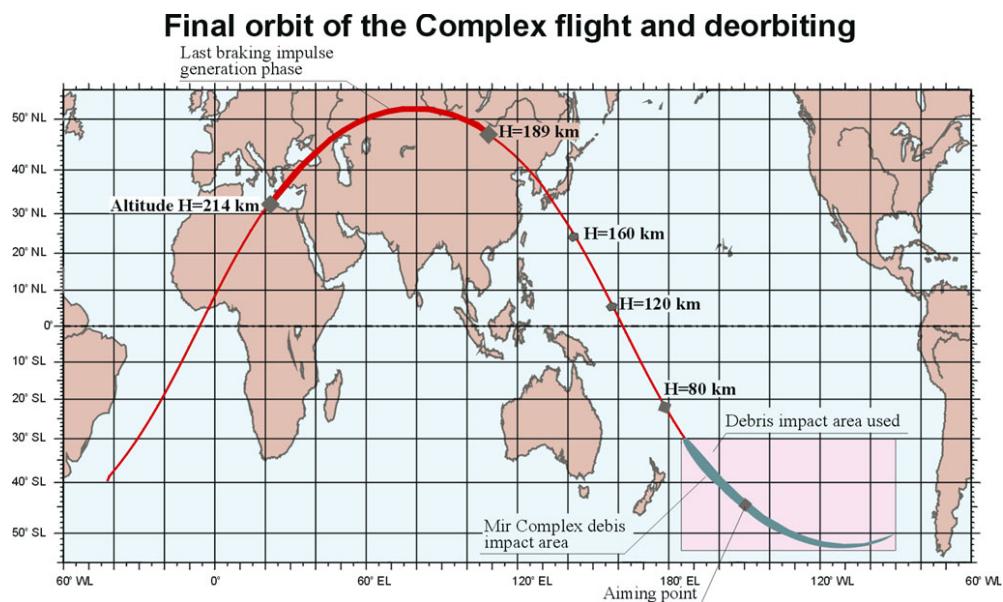
À cette heure-là, le Soleil se lève à Porrentruy.

Ce jour-là, la déclinaison vaut $\delta = -16.93^\circ$.

Refaites les points 1 à 5 de la première situation en utilisant le dessin ci-dessous.



Dans les salles de contrôle des centres spatiaux, les orbites affichées sur les écrans géants des engins spatiaux ont la même forme que la frontière entre le jour et la nuit.

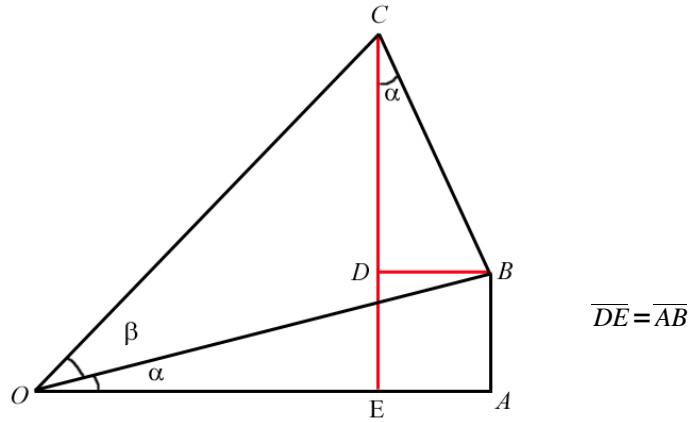


Fin de la dernière orbite de la station Mir avant son impact dans le Pacifique (23 mars 2001)

6.3. Relations trigonométriques

Il s'agit d'établir des relations qui permettront de résoudre des équations impliquant des fonctions trigonométriques différentes.

Le dessin ci-dessous va nous servir à établir une relation pour $\sin(\alpha+\beta)$. Toutes les autres relations découlent de celle-là.



$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \frac{\overline{CD} + \overline{DE}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}} + \frac{\overline{DE}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{CB}} + \frac{\overline{DE}}{\overline{OC}} \cdot \frac{\overline{OB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{OC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}} + \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} \\ &= \sin \beta \cdot \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha\end{aligned}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \Rightarrow \sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin(\alpha) \cdot \cos(-\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(-\beta)$, ce qui implique :

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \sin\left(\alpha + \left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \sin \alpha \cdot \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) + \cos \alpha \cdot \sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin \alpha \cdot (-\sin \beta) + \cos \alpha \cdot \cos \beta\end{aligned}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \Rightarrow \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos(\alpha) \cdot \cos(-\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(-\beta)$, ce qui implique :

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \beta} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \beta} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}\end{aligned}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} \Rightarrow \tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \tan(\alpha + (-\beta)) = \frac{\tan \alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan \alpha \cdot \tan(-\beta)} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}, \text{ ce qui implique :}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

Il existe beaucoup d'autres formules que vous trouverez dans les formulaires mathématiques ou sur le web.

Problème résoluRésoudre $2\sin^2(x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 3$

L'idée est de s'arranger pour n'avoir plus qu'un seul type de fonction trigonométrique (éventuellement élevée à une puissance), par exemple $\sin(x)$.

$$2\sin^2(x) + 2\sqrt{3}\sin(x)\cos(x) = 3$$

Car $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

$$2\sin^2(x) + 2\sqrt{3}\sin(x)\sqrt{1-\sin^2(x)} = 3$$

Car $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

$$2\sin^2(x) - 3 = -2\sqrt{3}\sin(x)\sqrt{1-\sin^2(x)}$$

On a isolé le radical

$$4\sin^4(x) - 12\sin^2(x) + 9 = 12\sin^2(x)(1 - \sin^2(x))$$

On a élevé le tout au carré pour éliminer les racines

$$4\sin^4(x) - 12\sin^2(x) + 9 = 12\sin^2(x) - 12\sin^4(x)$$

On a développé la ligne précédente

$$16\sin^4(x) - 24\sin^2(x) + 9 = 0$$

On pose ici $y = \sin^2(x)$

$$16y^2 - 24y + 9 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 36 \cdot 16}}{32} = \frac{24 \pm 0}{32} = \frac{3}{4}$$

On a trouvé la racine (double)

$$\sin^2(x) = \frac{3}{4}$$

On se souvient que $y = \sin^2(x)$

$$\sin(x) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

On a pris la racine carrée du tout (ne pas oublier le \pm !)

Pour le signe « + », on a : $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ et $x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$

Pour le signe « - », on a : $x_3 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ et $x_4 = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

Après vérification, on constate que seules les solutions x_1 et x_4 satisfont l'équation de départ (les solutions non valides sont apparues quand on a élevé le tout au carré).

On peut combiner ces deux solutions et le résultat final est : $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

Exercice 6.14Résolvez les équations suivantes (**a** et **b** en degrés, **c** et **d** en radians) :

- a.** $\sin^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) - 3\cos^2(x) = 0$
- b.** $5\sin^2(3t) + 3\sin(3t)\cos(3t) - 4 = 0$
- c.** $2\sin(t) + 3\cot(t) = 0$
- d.** $\cos(2x) + 2\sin(x)\cos(x) = 0$

6.4 Ce qu'il faut absolument savoirReconnaître les fonctions trigonométriques $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ et $\cot(x)$ d'après leur graphe okDessiner les fonctions trigonométriques $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ et $\cot(x)$ okDessiner une équation sinusoïdale du type $y = a\sin(bx+c)+d$ okTrouver les valeurs a , b , c et d d'une équation sinusoïdale du type $y = a\sin(bx+c)+d$ d'après son graphe okConnaitre les définitions des termes *amplitude*, *période*, *déphasage* ok

Trouver toutes les solutions d'une équation trigonométrique simple

 ok

Connaitre les principales relations trigonométriques

 ok

Solutions des exercices

Chapitre 1

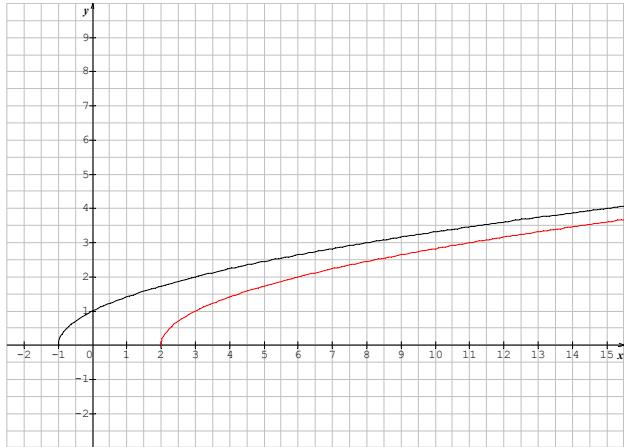
1.1. Réponses pour la 1^{ère} fonction

- a. 1 b. n'existe pas c. $\frac{4}{x-3}$
d. $\frac{1}{4x-3}$ e. $\frac{1}{x+1}$ f. $\frac{x-2}{x-3}$
g. $\frac{1}{-x-3}$ h. $-\frac{1}{x-3}$

- 1.2. a. faux b. faux c. vrai d. faux
e. vrai f. faux

- 1.3. a. \mathbb{R} b. $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ c. \mathbb{R} d. fonction
e. $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ f. fonction g. \mathbb{R}^* h. $\{x | x \leq 2\}$

1.4.



- 1.7. $f(-5) = -4.47$, $f(-4) = -1.07$, $f(-3) = 0.73$, $f(-2) = 1.33$,
 $f(-1) = 1.15$, $f(0) = 0.53$, $f(1) = -0.07$, $f(2) = -0.27$,
 $f(3) = 0.33$, $f(4) = 2.13$, $f(5) = 5.57$

- 1.8. a. $x_1 = -3.5$, $x_2 = 1$ b. $y = -7$

1.9. $V = \pi r^2 \left(\frac{4}{3}r + 10 \right)$

- 1.10. a. $d(t) = 100\sqrt{1+4t+20t^2}$ b. 1 heure

1.11. $T = \frac{\sqrt{x^2 - 30x + 306}}{4} + \frac{x}{5}$

- 1.12. a. ni injective, ni surjective :

-7 n'a pas d'antécédent donc f n'est pas surjective,
4 a deux antécédents donc f n'est pas injective

- b. surjective

4 a deux antécédents

- c. injective

-2 n'a pas d'antécédents

- d. bijective

- e. surjective

7 a une infinité d'antécédents

- f. injective

2 n'a pas d'antécédent

- g. injective

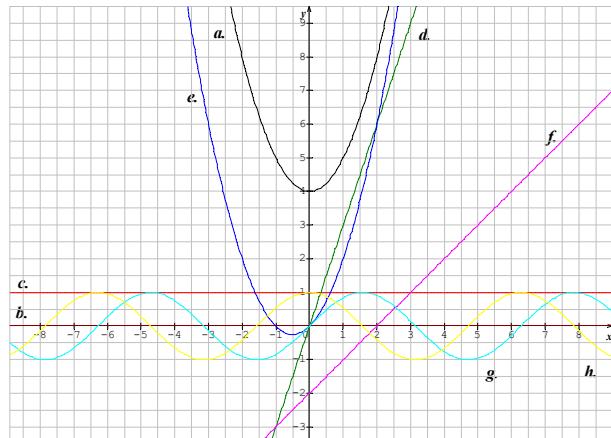
0 n'a pas d'antécédent

- 1.13. une fonction est bijective si toute droite horizontale ne la coupe qu'au plus une fois.

- 1.14. a. oui b. oui c. oui d. non
e. oui f. non

- 1.15. a. \sqrt{x} ($\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$) b. n'existe pas
c. $\sqrt[3]{x+1}$ d. x^2 ($\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$)

- 1.16. a. paire b. les deux c. paire d. impaire
e. rien f. rien g. impaire h. paire



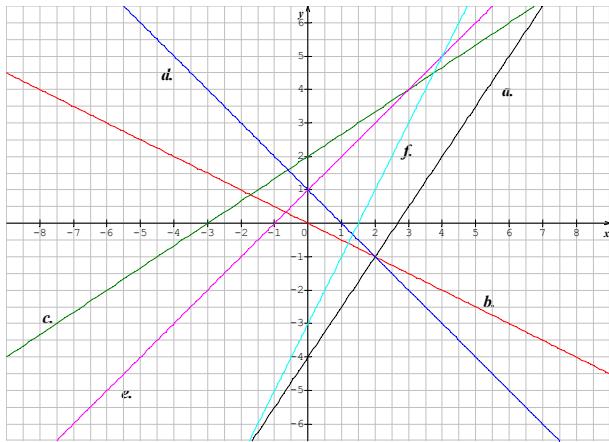
- 1.17. a. $(x-1)^2 + 4$; $x^2 + 3$ b. x ; x
c. x ; x d. $acx + ad + b$; $acx + bc + d$

1.18. $g \circ f(x) = \frac{16}{x^2 + 16}$; $h \circ g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$;
 $(h \circ g) \circ f(x) = h \circ (g \circ f)(x) = \frac{x^2}{x^2 + 16}$

- 1.19. a. 77 b. C c. P

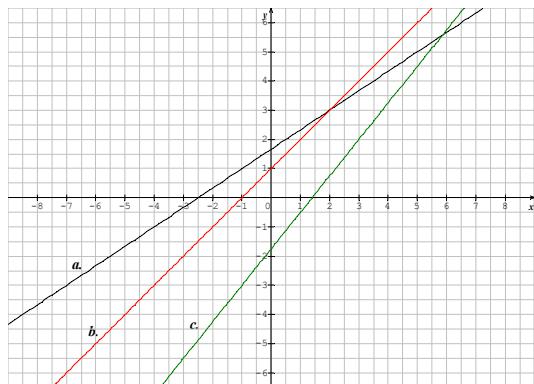
Chapitre 2

- 2.1. a. affine b. linéaire c. constante d. affine
e. affine f. affine g. affine h. affine
i. affine

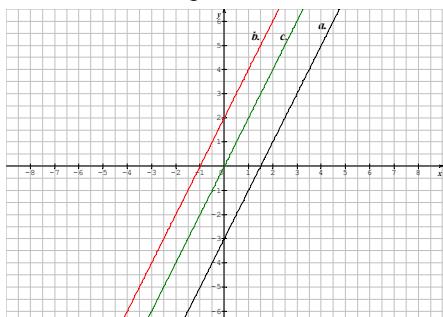
2.2.

- 2.3.** a. 1.5 b. $-1/2$ c. $2/3$ d. -1
e. 1 f. 2

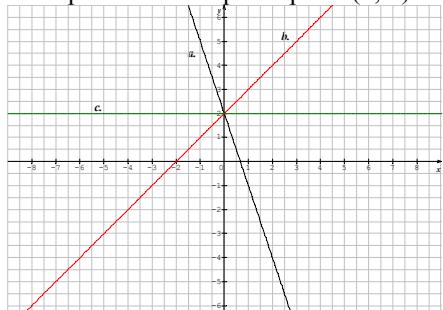
- 2.4.** pentes: a. $2/3$ b. 1 c. $5/4$



- 2.5.** a. Les droites sont parallèles



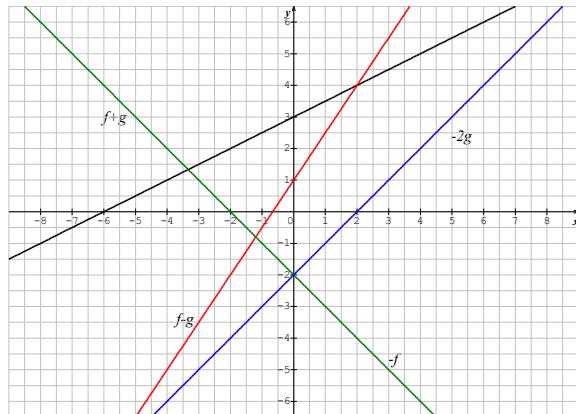
- b. Les droites passent toutes par le point $(0; 2)$



- 2.6.** a. $f(x) = -2x + 11$ b. $f(x) = 5$
c. $f(x) = 3x - 3$ e. $f(x) = -2x$

- 2.7.** a. 5h20 b. 8h40

- 2.8.** a. $y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$ b. $x = 4$ c. $y = 2$

2.9. a.

- b.** $f(x) = x + 2$, $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$
c. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ d. $(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3})$ e. 71.565°

- 2.10.** b. 18 ans et 3 mois c. moins de 48'000 CHF

- 2.11.** a. $y = 7.3t + 77.2$ c. 150.2 cm

- 2.12.** b. $25/23$ année

- 2.13.** a. 45° b. 30.9°

- 2.14.** $y = \frac{4}{5}x + 1$

- 2.15.** $y = -\frac{4}{3}x + \frac{37}{6}$

Chapitre 3

- 3.1.** $a_1 = 1/4$ $a_2 = 1$ $a_3 = 3$
 $a_4 = -1/4$ $a_5 = -1$ $a_6 = -3$

- 3.2.** $a_1 = 1$ $q_1 = -3$ $a_2 = 1/4$ $q_2 = -4$
 $a_3 = -1$ $q_3 = 3$ $a_4 = -2$ $q_4 = -1$

- 3.3.** $a_1 = 1$ $p_1 = 3$ $a_2 = 1/4$ $p_2 = -4$
 $a_3 = -1$ $p_3 = -3$ $a_4 = -2$ $p_4 = 1$

3.4. $a_1 = 1$ $p_1 = 3$ $q_1 = -1$
 $a_2 = 1/3$ $p_2 = -4$ $q_2 = 1$
 $a_3 = -1$ $p_3 = -3$ $q_3 = -3$
 $a_4 = -2$ $p_4 = 2$ $q_4 = 2$

3.5. $f(x) = 2x^2 - 3x - 3$

3.7. $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 3$

3.8. **a.** $-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}$ **b.** $\frac{1}{2}$ et 2 ; $S\left(\frac{5}{4}; -\frac{9}{8}\right)$
c. 2 et 5 ; $S\left(\frac{7}{2}; \frac{9}{4}\right)$ **d.** 0 et 9 ; $S\left(\frac{9}{2}; -\frac{81}{4}\right)$

3.9. **a.** $x_1 = -0.809017$ $x_2 = 0.309017$
b. $x_1 = -3$ $x_2 = 1$

3.10. $y = -x + \frac{7}{2}$

3.11. $20 \times 22 \text{ cm}$

3.12. **a.** 4 secondes **b.** 256 mètres
c. 8 secondes **d.** 2 et 6 secondes

3.13. 70.27 mètres

3.14. **a.** $y \equiv -0.02076x^2 + x + 4.5$ **b.** 16.54 m

3.15. $y \equiv -0.494x^2 + 1.334x$

3.16. **a.** $d = \frac{v^2}{100} + \frac{3v}{10}$ **b.** $d = \frac{3v^2}{400} + \frac{3v}{10}$

3.17. \\$ 9.75

3.18. $a = 1.5 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$

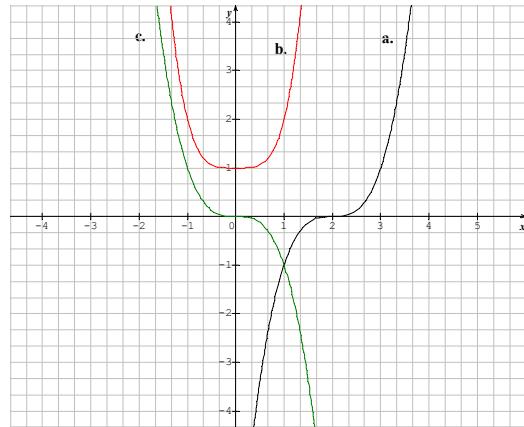
Chapitre 4

4.1. **a.** 3^4 **b.** 2^{15} **c.** -3^4 **d.** 5^{55}
e. $12 \cdot 207 \cdot 030$

4.2. **a.** a^3 **b.** a^6 **c.** a **d.** a^{n-1}
e. a^{-6} **f.** a^{-6} **g.** 1 **h.** 1
i. a^{5n}

4.3. **a.** $x = \frac{3}{2}$ **b.** $x = -1$ **c.** $x = -\frac{3}{2}$

4.4.



4.5. **a.** 105 **b.** 3354 **c.** 2802 **d.** 4837
e. 1894 **f.** -

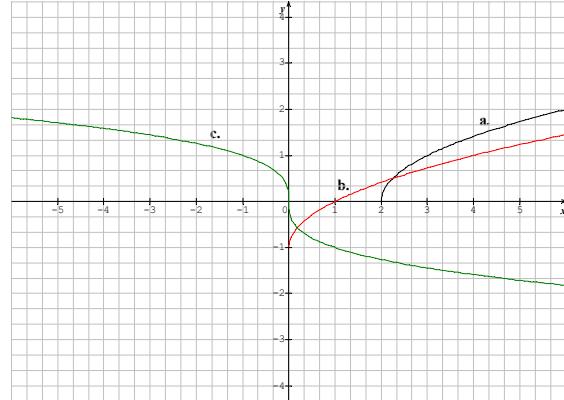
4.6. **a.** 10010001 **b.** 1040 **c.** 3EC
d. FF **e.** 253C **f.** 12364

4.7. **a.** 0 **b.** 25 **c.** $\frac{5}{6}$ **d.** $\frac{5}{6}$
e. 0.2 **f.** -

4.8. **a.** 10 **b.** 5 **c.** 0.1 **d.** -2 **e.** -

4.9. **a.** 6 **b.** 2 **c.** 25 **d.** $\sqrt{2}$
e. 2 **f.** $\sqrt{2}$ **g.** $\sqrt[4]{a^3}$

4.10.



4.12. **a.** $2\sqrt{6}$ **b.** $9\sqrt{3}$ **c.** $10\sqrt{3}$ **d.** $5\sqrt{5}$
e. $7\sqrt{3}$ **f.** $3\sqrt[3]{2}$ **g.** $4\sqrt{5}$ **h.** $-2\sqrt{5}$
i. $13\sqrt{10}$

4.13. **a.** $9 - 7\sqrt{3}$ **b.** $16 - 11\sqrt{2}$ **c.** $13 - 4\sqrt{3}$ **d.** 1

4.14. $x_1 = 0$, $x_2 = 9$

4.15. **a.** $\sqrt{5}$ **b.** $\sqrt[6]{3^5}$ **c.** 6^3 **d.** $\frac{1}{2}$
e. $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$ **f.** $\frac{1}{\sqrt[6]{3^5}}$

4.16. a. $3^{\frac{2}{3}}$ b. $5^{\frac{6}{11}}$ c. $-a^2$ d. $3^{-\frac{1}{2}}$
e. $-\left(6^{-\frac{1}{5}}\right)$ f. $2^{\frac{2}{3}}$

4.17. a. 1.958 m^2 b. S augmente d'environ 4.1%

Chapitre 5

5.1. a. 0 b. 7 c. -1 d. $-\frac{1}{4}$ e. $\frac{2}{3}$
f. n'existe pas g. quand $x \rightarrow 0$, $\log x \rightarrow -\infty$

5.2. a. 3 b. 6 c. 6 d. 3 e. $\frac{3}{4}$
f. -2 g. -4 h. -7 i. $-\frac{1}{4}$ j. $-\frac{1}{2}$

5.3. a. 5 b. 64 c. 5

5.5. c. la propriété 5.a

5.6. a. $2 \log(a) + 3 \log(b)$
b. $3 \log(a) - 2 \log(b)$
c. $\log(a) + \frac{1}{2} \log(d) - \log(c) - \frac{1}{3} \log(b)$

5.7. a. 1 b. 0 c. 7 d. -1 e. $\frac{1}{2}$
f. $-\frac{1}{2}$

5.8. a. $x = 64/41$

b. $x = 3$
c. $x = -8/3$
d. $x = \sqrt{26}$

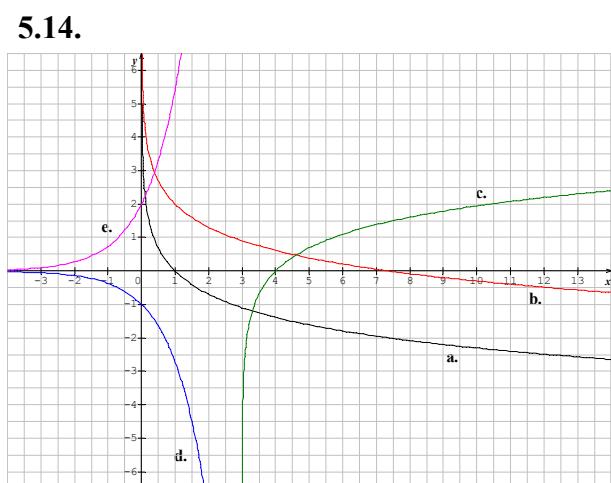
e. $x_1 = 8.66$, $x_2 = -11.66$

5.9. a. $x = 2$ b. $x = \ln(5) / 3$ c. $x = 0$

5.10. a. ± 3 b. $-2 ; 1$ c. -4

5.11. a. $x = 5$, $y = 20$ ou $x = 20$, $y = 5$
b. $x = e$, $y = 1$

5.13. a. pas de solution
b. $x = 1$
c. $x = 15$
d. $x = \sqrt{2}$
e. $x = 16$
f. $x_1 = 1/9$; $x_2 = 9$
g. $x_1 = 1$; $x_2 = 100$



5.15. a. 19'188 ans b. 5776 ans

5.16. a. 2.2 % c. environ 6400 ans

5.17. a. 77'880 pascals b. à environ 4000 m

5.18. a. $x = \frac{\log(I) - \log(I_0)}{\log(c)}$ b. $x = 3.32 \text{ m}$

5.19. a. $R = 3$ b. $I = I_0 \cdot 10^R$
c. $I_0 \cdot 10^8 \leq I \leq I_0 \cdot 10^9$ d. 26'616 m²
e. environ 12'600

5.20. a. 39'751 chiffres b. 17'425'170 chiffres

5.21. a. 3'200'000 b. 4 jours

5.22. a. $b = 34$ b. 3.12 jours

5.23. a. environ 168 cm b. 3.6 ans
c. 200 cm

5.24. a. 305.9 kg c. 19.8 ans

Chapitre 6

6.2. b. non c. 240.33 cm

6.3. b. mars c. 0.04 d. env. 14 h et 7 min

6.4. b. au milieu de l'année ($t=0.5$), il y a 4500 cerfs.
c. oui

6.5. a. $b_{ph} = \frac{2\pi}{23}$; $b_e = \frac{2\pi}{28}$; $b_i = \frac{2\pi}{33}$
b. physique : +13.6 %
émotionnel : -43.4 %
intellectuel : +45.8 %
c. $t = 21'252$ jours

6.6. b. 20.8°C le 1^{er} juillet

6.7. a. $a = 10$, $b = \frac{\pi}{12}$, $c = -\frac{5\pi}{6}$, $d = 0$

b. $a = 10$, $b = \frac{\pi}{12}$, $c = -\frac{3\pi}{4}$, $d = 20$

6.8. b. $P(t) = 2.4 \sin\left(\frac{4\pi}{25}t\right) + 7.9$

6.9. a. $\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4} + k\pi$

b. $\frac{2\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}$

c. $\frac{\pi}{2} + k\frac{12\pi}{13}$, $\frac{7\pi}{10} + k\frac{12\pi}{5}$

6.10. a. $\pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

b. $\frac{2\pi}{3} + k\pi$

c. $\frac{4\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$

d. $\pm\frac{3\pi}{2} + 4k\pi$

e. $57.92^\circ + k \cdot 360^\circ$, $122.08^\circ + k \cdot 360^\circ$

f. $137.88^\circ + k \cdot 180^\circ$

g. $14.8^\circ + k \cdot 36^\circ$

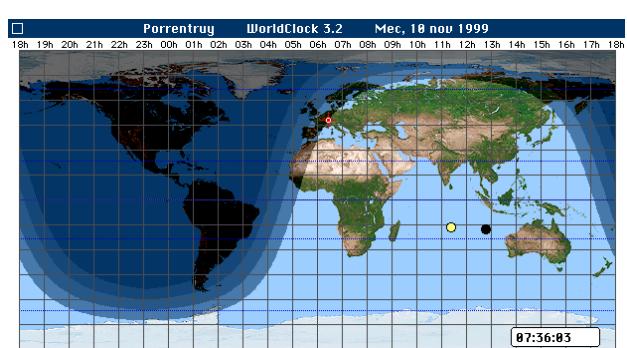
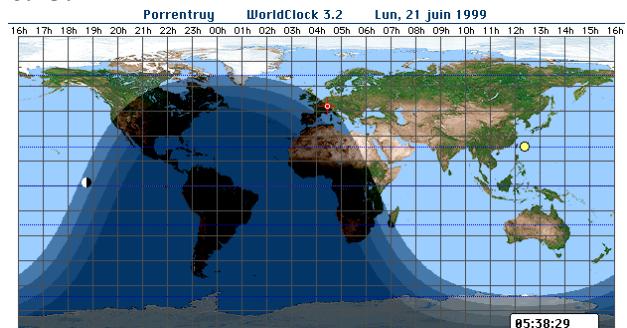
h. $247.5^\circ + k \cdot 540^\circ$, $-112.5^\circ + k \cdot 540^\circ$

6.11. a. $\pm\frac{\pi}{3} + k\pi$

b. $2k\pi$, $\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

6.12. $\frac{\pi}{4} + k\pi$

6.13.



6.14. a. $135^\circ + k \cdot 180^\circ$; $71.57^\circ + k \cdot 180^\circ$

b. $15^\circ + k \cdot 60^\circ$; $34.68^\circ + k \cdot 60^\circ$

c. $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

d. $\frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$