Remarque préliminaire : vous disposez d'un corrigé pour tous les exercices marqués d'un astérisque (*)

1. BASES D'ALGÈBRE

Commençons par une courte liste de symboles qu'il faut connaître et utiliser correctement.

1.1 Quelques symboles utiles

Egale : $=$ bien connu !

Appartient : $\in$ relation entre un élément et un ensemble :

Exemples : vache $\in$ mammifères squelette $\ni$ tibia
crayon $\notin$ fruits

Pour tout : $\forall$ dans un énoncé, permet de "parcourir" les éléments d'un ensemble

Exemple : $\forall$ les noms $\in$ à la phrase, ajouter un "s"

Il existe : $\exists$

Exemple : $\forall$ $x \in$ "nombres pairs", $\exists$ un nombre entier y tel que $y = \frac{x}{2}$

Implique que : $\Longrightarrow$

Exemple : $\left.\begin{array}{l} a > b \\ b > c \end{array}\right\} \Rightarrow a > c$

Tel que : $|$ (barre verticale)

Exemple : $x \in$ entiers $|$ $x > 3$ et $x < 10$
Que vaut x ?

Infini : ∞ N'est pas un nombre !

Equivalent à : $\Longleftrightarrow$ Arrêtons-nous un instant sur ce symbole très utilisé en mathématique.

Voyons avec un exemple pourquoi il correspond à une double implication :

Proposition 1 : homme grand $\Longrightarrow$ homme suédois
: Tous les grands sont suédois, mais $\exists$ des suédois non grands !

Proposition 2 : homme suédois $\Longrightarrow$ homme grand
: Tous les suédois sont grands, mais $\exists$ des grands non suédois !

Proposition 3 : homme grand $\Longleftrightarrow$ homme suédois

les propositions 1 et 2 sont vraies simultanément :

- Tous les grands sont suédois
- Tous les suédois sont grands

Les deux adjectifs, "grand" et "suédois" sont donc équivalents !

Inclus dans : $\subset$ relation entre deux ensembles

Exemples : ruminants $\subset$ mammifères

mammifères $\not\supset$ poissons

Inclus ou égal : $\subseteq$ relation entre deux ensembles

Exemples : Etudiants présents $\subseteq$ Etudiants de la classe

Liste d'éléments formant un ensemble : $\{a, b, c, d, e\}$

Union : $\cup$ Union de deux ensembles

Intersection : $\cap$ intersection de deux ensembles

Soustraction : $\setminus$ soustraction d'un ensemble à un autre.

Exemple :

$$A = \{5, 6, 7\} \qquad B = \{6, 7\}$$

$$C = A \setminus B = \{5\}$$

↳ Un ensemble contenant un unique élément !

Complémentaire :

$\complement_E A$ complémentaire de l'ensemble A par rapport à l'ensemble E

Les éléments qui appartiennent à E sans être dans A quand $A \subseteq E$

Exemple 1 : $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $A = \{2, 4, 6\}$.

On aura :

$$\complement_E A = \{1, 3, 5\}$$

Exemple 2 : Soient deux ensembles A et B, tels que $A = B$, alors

$$\complement_B A = \emptyset \quad \text{(ensemble vide)}$$

1.2 Les ensembles numériques

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$: l'ensemble des nombres naturels.

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$: les nombres naturels sans le zéro.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$: les nombres entiers.

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$: les entiers sans le zéro.

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^* \right\}$: les nombres rationnels.

(fractions de deux nombres entiers)

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \underbrace{\{\dots, \pi, e, \sqrt{2}, \dots\}}$: les nombres réels.

les nombres qui ne peuvent pas être mis sous forme de fraction = nombres irrationnels

$\mathbb{C}$: les nombres complexes (voir $2^{\text{ème}}$ semestre, maths 1A)

$\emptyset$: l'ensemble vide, inclus dans tous les ensembles.

Exercice 1.1

Ecrire la liste des éléments des ensembles suivants :

a) $A = \{x \mid x = 5n + 1,\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

b) $B = \{x \mid \dfrac{2x+1}{3} \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 1.2

Soient $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ impair}\}$ et $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ premier}\}$.

Expliciter :

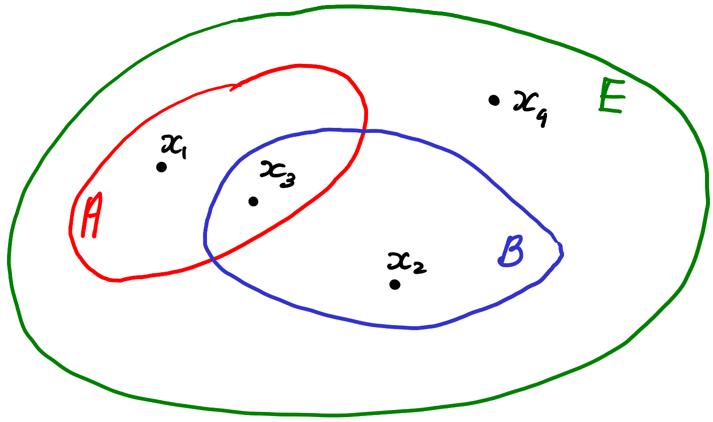
a) $A \cap B$

b) $A \cup B$

c) $B \cap \{x \mid x = 2n + 1,\ n \in \mathbb{N}^*\}$

1.3 Relations entre ensembles et éléments

On résume très rapidement le tout par un diagramme :



On a par exemple les relations suivantes :

$x_1 \in A$ — x_1 appartient à A

$x_2 \in B$ — x_2 appartient à B

$x_3 \in A \cap B$ — x_3 appartient à l'intersection de A et B

$x_4 \in \complement_E A \cup B$ — x_4 appartient au complémentaire de la réunion de A et B, par rapport à E

1.4 Le produit cartésien (de deux ensembles)

$$A \times B = \{ (x,y) \mid x \in A \text{ et } y \in B \}$$

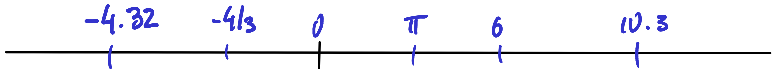
= l'ensemble de <u>tous les couples possibles</u> obtenus en prenant un élément dans A suivi d'un élément dans B, <u>dans cet ordre</u>.

↳ Donc $A \times B \neq B \times A$

Remarquez que le "langage" mathématique est plus concis et précis

Exemple : En géométrie on établit souvent une relation entre les les points d'une droite et l'ensemble des réels $\mathbb{R}$:

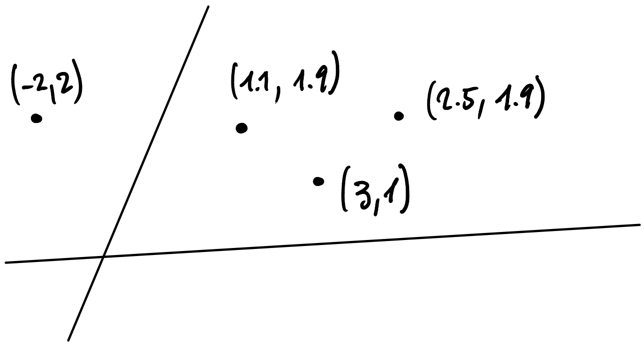
[A chaque point de la droite correspond un nombre réel]



Le produit cartésien de $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}$ est noté

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (tous les couples de 2 nombres réels)

est alors mis en relation avec un plan



De même pour $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ etc.

Exercice 1.3

Est-il correct d'écrire :

a) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

b) $3 \in \mathbb{N}$

c) $-4 \subset \mathbb{Q}$

d) $a \in \{a; b; c\}$

e) $\pi \in \mathbb{R}$

f) $2 \notin \mathbb{Z}$

g) $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$

h) $\varnothing \subseteq \{0\}$

i) $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$

j) $\frac{1}{4} \in \mathbb{R}$

k) $\{2\} \subset \mathbb{Q}$

Exercice 1.4

Soit $E = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ et } |x| < 2\}$ et $F = \{y \mid y \in \mathbb{Z} \text{ et } -1 < y \leq 3\}$.

a) Ecrire tous les éléments de $E \times F$.

b) Expliciter $(E \times F) \cap (F \times E)$.

* Exercice 1.5

Les égalités suivantes sont-elles vraies ?

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$

b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

* Exercice 1.6

On note $P(E)$ l'ensemble de toutes les parties (sous ensembles) d'un ensemble E.

a) Soit $E = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$. Enumérer $P(E)$.
Rappel : Par convention, on considère que $E \subset E$ et $\varnothing \subset E$.

b) Si E contient k éléments, combien en contient $P(\mathrm{E})$? (Ne pas démontrer formellement)

1.5 Les intervalles

Sur $\mathbb{R}$:

$x \in [a,b]$ si $a \leqslant x \leqslant b$ intervalle fermé

$x \in [a,b[$ si $a \leqslant x < b$ intervalle ouvert à droite

$x \in]a,b[$ si $a < x < b$ intervalle ouvert

⚠ Comme $+\infty$ et $-\infty$ n'appartiennent pas à $\mathbb{R}$ on notera $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

Exercice 1.7 Décrire les ensembles suivants à l'aide des notations d'intervalles :

a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } -3 < x \leq 2\}$.

b) $B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } x^2 - 4 \geq 0\}$.

1.6 Inégalités et Inéquations

1.6.1 Manipulation des inégalités

1. Addition :

$$
\begin{aligned}
-5 &< 6 \quad \Big|\, +2 \\
-5+2 &< 6+2 \\
-3 &< 8
\end{aligned}
$$

ok ! Cette inégalité est encore vraie !

Règle 1: On ajoute une valeur à chaque membre, sans changer l'inégalité

2. Multiplication :

$$
\begin{aligned}
-5 &< 6 \quad \Big|\, \cdot 2 \\
-5\cdot 2 &< 6\cdot 2 \\
-10 &< 12
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-5 &< 6 \quad \Big|\, \cdot(-2) \\
-5\cdot(-2) &> 6\cdot(-2) \\
10 &> -12
\end{aligned}
$$

Règle 2: La multiplication de chaque membre par un nombre négatif <u>inverse le sens</u> de l'inégalité !

3. Mise au carré :

a
$$-5 < 6 \quad \Big| \; ^2$$
$$(-5)^2 < 6^2$$
$$25 < 36$$

b
$$5 < 6 \quad \Big| \; ^2$$
$$(5)^2 < 6^2$$
$$25 < 36$$

Pour a et b pas d'inversion du signe "<"

c
$$-6 < 5 \quad \Big| \; ^2$$
$$(-6)^2 > 5^2$$
$$36 > 25$$

d
$$-6 < -5 \quad \Big| \; ^2$$
$$(-6)^2 > (-5)^2$$
$$36 > 25$$

Pour c et d il y a inversion du signe "<"

Règle 3

> La mise au carré demande une inversion du signe "<", seulement si l'inégalité de départ est fausse en valeur absolue

4. Racine carrée des deux membres d'une inégalité :

⚠ Applicable uniquement à des inégalités entre nombres positifs

$$36 > 25 \quad \Big| \; \sqrt{\cdot}$$
$$\sqrt{36} > \sqrt{25}$$
$$6 > 5$$

Pas d'inversion !

Règle 4

> Prendre la racine carrée des 2 membres d'une inégalité ne change pas le sens de l'inégalité

5. Inverse des 2 membres d'une inégalité :

$5 < 6 \quad \Big| \; 1/.$

$\frac{1}{5} > \frac{1}{6}$

$-5 > -6 \quad \Big| \; 1/.$

$-\frac{1}{5} < -\frac{1}{6}$

Inversion

$-5 < 6 \quad \Big| \; 1/.$

$-\frac{1}{5} < \frac{1}{6}$

Pas d'inversion !

Règle 5

> Si les 2 membres de l'inégalité sont de même signe, alors il y a inversion du sens de l'inégalité.

Exemple d'utilisation des règles 1 à 5 ci-dessus : (important)

Soient $x \in [0,1[$ et $t \in [0,x]$, démontrons que les inégalités suivantes sont vraies :

$$\boxed{1 \leqslant \frac{1}{1-t^2} \leqslant \frac{1}{1-x^2}}$$

Nous devons utiliser les règles de "manipulation" des inégalités pour transformer cette expression jusqu'à ce qu'elle devienne évidente !

Commençons par constater que $1-t^2$ et $1-x^2$ sont de même signe (positif) car $x \in [0,1[$ et $t \in [0,x]$. Donc, en prenant l'inverse nous aurons :

$$1 \leqslant \frac{1}{1-t^2} \leqslant \frac{1}{1-x^2}$$

$$1 \geqslant 1-t^2 \geqslant 1-x^2 \qquad \frac{1}{\cdot} \quad (\text{règle } 5)$$

$$0 \geqslant -t^2 \geqslant -x^2 \qquad -1 \quad (\text{règle } 1)$$

$$x^2 \geqslant t^2 \geqslant 0 \qquad \cdot(-1) \quad (\text{règle } 2)$$

$$x \geqslant t \geqslant 0 \qquad \sqrt{\cdot} \quad (\text{règle } 4)$$

Ces dernières inégalités sont manifestement vraies au vu des hypothèses de départ : $x \in [0,1[$ et $t \in [0,x[$!

1.6.2 Solutions des Inéquations

Elles diffèrent des équations par le fait qu'on les "manipule" avec les règles du paragraphe 1.6.1 <u>et</u> parce que les solutions sont données sous forme d'intervalle

<u>Exemple simple</u> :

$$-5 \leqslant \frac{4-3x}{2} < 1 \qquad \cdot 2$$

$$-10 \leqslant 4-3x < 2 \qquad -4$$

$$-14 \leqslant -3x < -2 \qquad \cdot \frac{1}{3}$$

$$-\frac{14}{3} \leqslant -x < -\frac{2}{3} \qquad \cdot(-1)$$

$$\frac{14}{3} \geqslant x > \frac{2}{3}$$

Donc $x \in \left] \frac{2}{3}, \frac{14}{3} \right]$

(*) Exercice 1.8

Résoudre les inéquations suivantes.

a) $2\,x + 5 \geq 1$

b) $5 - 2\,x \geq 1$

c) $-4\,a - 5 < a + 5$

d) $-(7 - 2\,x) - 8 > 0$

e) $1 - 3\,x \leq \frac{1}{3}\,x + 2$

f) $3\,(1 - x) > \frac{2}{5}\,x$

1.7 Les valeurs absolues

En français : la valeur absolue d'un nombre est le nombre lui-même s'il est positif et son opposé s'il est négatif !

En "matheux" :

$$\boxed{|a| = \begin{cases} a & \text{si } a > 0 \\ (0 & \text{si } a = 0) \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}}$$

On aura donc $|x| \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

A bien comprendre :

Soit $b > 0$

1) $|x| > b \Rightarrow \begin{cases} x > b & \text{si } x > 0 \Rightarrow x > b \\ -x > b & \text{si } x < 0 \Rightarrow x < -b \end{cases} \Rightarrow x \in]-\infty, -b[\cup]b, +\infty[$

2) $|x| < b \Rightarrow \begin{cases} x < b & \text{si } x > 0 \Rightarrow x < b \\ -x < b & \text{si } x < 0 \Rightarrow x > -b \end{cases} \Rightarrow x \in]-b, b[$

Soit $b < 0$

1) $|x| > b \Rightarrow x \in \mathbb{R}$: Inégalité toujours vraie

2) $|x| < b \Rightarrow x \in \emptyset$: Inégalité jamais vraie

Exercice 1.9 a) Dessiner le graphe de la fonction $y = |x|$

b) Illustrer sur ce graphe les inégalités précédentes c'est-à-dire :

1) $|x| > b$
2) $|x| < b$

avec, dans les deux cas, b négatif.

3) $|x| > b$
4) $|x| < b$

avec, dans les deux cas, b positif

Exemple : Résoudre $|x-a| < b$

Par définition : $|x-a| = \begin{cases} x-a & si \quad x-a>0 \\ -(x-a) & si \quad x-a<0 \end{cases}$

Il nous faudra donc résoudre 2 inéquations !!

a) Si $x-a>0$ $\qquad x-a<b$

$x<b+a$

b) si $x-a<0$ $\qquad -(x-a)<b$

$x-a>-b$

$x>a-b$

Si b est négatif, il n'y a pas de solution à $|x-a|<b$

On aura donc $x \in \left]a-b, a+b\right[$, avec $b>0$

Exercice 1.10

Réécrire l'expression sans utiliser le symbole de valeur absolue et simplifier le résultat :

a) $|3+x|$ *si* $x<-3$ $\qquad$ *c*) $|a-b|$ *si* $a<b$

b) $|2-x|$ *si* $x<2$ $\qquad$ *d*) $|x^2+4|$

1.8 Opérations fondamentales dans $\mathbb{R}$

Nous résumons ici les principales règles qui "gouvernent" les calculs dans $\mathbb{R}$.

1.8.1 Addition et multiplication

1. $$\boxed{\begin{array}{l} a \cdot b = b \cdot a \\ a + b = b + a \end{array}}$$

Addition et multiplication sont des opérations commutatives.

2. $$\boxed{\begin{array}{l} (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \\ (a + b) + c = a + (b + c) \end{array}}$$

Addition et multiplication sont des opérations associatives

3. $$\boxed{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$$

La multiplication est distributive par rapport à l'addition

Remarque : l'action "opposée" à la distribution s'appelle la factorisation (mise en facteur)

distribuer

$$a \cdot c + a \cdot b = a \cdot (c + b)$$

factoriser (= mettre "a" en facteur)

Exercice 1.11 Démontrer la propriété 3. ci-dessus, en utilisant les propriétés 1. et 2.

1.8.2 Les puissances

1. $$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a}_{n \text{ fois}}}$$

Définition de a^n (a puissance n)
$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

On peut étendre cette définition aux cas où $n=0$ et $n<0$:

2. $$\boxed{\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \end{aligned}}$$

On peut "justifier" ces définitions en remarquant que $a^{n-1} = \frac{a^n}{a}$, donc :

$$a^0 = a^{1-1} = \frac{a^1}{a} = \frac{a}{a} = 1 \quad \text{et}$$

$$a^{-1} = \frac{a^0}{a} = \frac{1}{a}, \quad a^{-2} = \frac{a^{-1}}{a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2} \quad \text{etc}$$

3. $$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

La démonstration de cette propriété est simple. Elle découle de la définition 1.

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots\cdots a}_{n \cdot \text{fois}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots\cdots a}_{m \text{ fois}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots\cdots a}_{(m+n) \text{ fois}} = a^{m+n}$$

4. $$\boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$$

Démonstration comme ci-dessus !

(laissée au lecteur)

5. $\boxed{(a^n)^m = a^{n\cdot m}}$ Encore une fois, la démonstration découle de la définition 1.

$$(a^n)^m = (\underbrace{a\cdot a\cdot \cdots a}_{n \text{ fois}})^m = \overbrace{(\underbrace{a\cdot\cdots a}_{n})\cdot(\underbrace{a\cdots a}_{n})\cdot(\underbrace{a\cdots a}_{n})\cdots\cdots(\underbrace{a\cdots a}_{n})}^{m \text{ fois}}$$

$$= a^{n\cdot m}$$

1.8.3 Racine $n^{\text{ième}}$ $\quad n \in \mathbb{N},\ n > 1$

On la définit comme l'opération inverse de la puissance $n^{\text{ième}}$.
Donc :

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n} = a}$$

On utilise de préférence la notation $\sqrt[n]{a} \equiv a^{\frac{1}{n}}$

↳ Ainsi les règles du calcul avec les puissances s'appliquent très simplement :

$$\sqrt[3]{a^2} = (a^2)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

Mais attention aux racines paires : elles ne sont définies que pour des nombres positifs ou nuls

Démonstration: On pose $b^{\frac{1}{2n}} = a = (a^{2n})^{1/2n}$

$$\Rightarrow \quad b = a^{2n} \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad b \geqslant 0$$

* **Exercice 1.12** Simplifier les racines suivantes :

$a)\ \sqrt[3]{x^7} =$ $\qquad$ $b)\ \sqrt[4]{x^6 y^3} =$

$c)\ \sqrt[3]{16x^3y^8z^4} =$ $\qquad$ $d)\ \sqrt{3a^2b^3}\cdot\sqrt{6a^5b} =$

* **Exercice 1.13** Simplifier les expressions suivantes :

$a)\ (-27)^{2/3}\cdot(4)^{-5/2} =$ $\qquad$ $b)\ \left(r^2s^6\right)^{1/3} =$

$$c)\ \left(\frac{2x^{2/3}}{y^{1/2}}\right)^2\cdot\left(\frac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right) =$$

1.9 Les Polynômes

Ce sont des expressions de la forme :

$$\boxed{P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$$

→ c'est un polynôme en x, de degré n, $n \in \mathbb{N}$

c'est simplement une somme de puissances de x, où chaque terme de la somme est multiplié par un nombre réel quelconque

Exercice 1.14 Est-ce que ce sont des polynômes ? Si oui, de quel degré et dans quelle variable ?

1) x
2) $y + x$
3) $a^2 + 2ab + b^2$
4) $\sin(y) \cdot x^2 + a x^3 - \cos(x)$
5) $a\sqrt{x} + x$
6) $\frac{1}{a} + a^2 + a^3$

Notation très utile (pas seulement pour les polynômes) :

On emploie la lettre grecque "Sigma majuscule" $\sum$ pour indiquer une somme :

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i x^i}$$

Somme de $i=0$ jusqu'à $i=n$ des termes $a_i x^i$ ← exposant = nombre

indice de numérotation, sert à nommer les coefficients !

Exemples :

$$\sum_{i=1}^{4} i = 1+2+3+4$$

$$\sum_{\substack{i>0 \\ i \text{ pair}}} \left[\frac{1}{2^i} \cdot z_i\right](i-1) = \left(\frac{1}{2^2} \cdot z_2\right)(2-1) + \left(\frac{1}{2^4} \cdot z_4\right)(4-1) + \ldots\ldots$$

1.10 Les identités remarquables

En fait elles n'ont rien de remarquable ! Elles découlent naturellement de l'application des règles de distributivité !

Exemple bien connu ... $(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + \underbrace{a\cdot b + ba}_{2ab} + b^2$

donc $\underline{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

Les identités que nous allons voir sont TRÈS utiles pour les opérations de factorisation. (voir 1.11)

1.10.1 Le triangle de Pascal

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

etc, etc, ...

$$\begin{array}{l|llllllll}
n=0 & 1 \\
n=1 & 1 & 1 \\
n=2 & 1 & 2 & 1 \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
n=7 & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
\hline
 & k=0 & & & & & & & k=7 \quad k
\end{array}$$

Règle de construction

$$\begin{array}{c}
\cdots \; a \;\; b \; \cdots \\
\cdots \; a+b \; \cdots
\end{array}$$

n numérote les lignes
k numérote les colonnes } $\Rightarrow$ On note C_n^k un élément du triangle

La règle de construction ci-dessus est récursive. C'est-à-dire que pour trouver un élément C_n^k du triangle de Pascal, on doit construire toute la partie du triangle qui précède !

Il serait plus pratique de pouvoir calculer directement un élément particulier du tableau.
On peut le faire grâce à la FORMULE DU BINÔME :

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

Les C_n^k sont appelés coefficients binômiaux

Remarque : $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ se dit n factoriel
exemple : $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Le triangle de Pascal et sa règle de construction (ou la formule du binôme) nous permettent d'écrire facilement les développements de $(a+b)^n$.

Exercice 1.15

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

Vérifier le coefficient "rouge" à l'aide de la formule du binôme

Exercice 1.16

Ecrire $(a+b)^n$ à l'aide de la notation avec le signe $\sum$ et des coefficients binômiaux

1.10.2 Quelques identités "remarquables"

Souvenez-vous, ces identités découlent toutes des règles du calcul algébrique : ON PEUT FACILEMENT LES RETROUVER (exercice conseillé)

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Ça commence à faire beaucoup ....
Essayons de généraliser .....

Pour n impair :

$$a^n + b^n = (a+b)\cdot(\ldots\ldots\ldots)$$
$$a^n - b^n = (a-b)\cdot(\ldots\ldots)$$

Pour n pair :

$$a^n + b^n = \text{Ne peut pas être factorisé en général}$$
$$a^n - b^n = (a+b)(a-b)\cdot(\ldots\ldots)$$

Dans chaque cas, on trouve $(\ldots\ldots)$ par simple division polynômiale !

Exemple :

$$\begin{array}{llll|l}
a^3 & & & -b^3 & a-b \\ \cline{5-5}
a^3 - a^2b & & & & a^2+ab+b^2 \\ \cline{1-1}
/ \quad a^2b & & & -b^3 & \\
\quad a^2b & -ab^2 & & & \\ \cline{1-2}
\quad / & ab^2 & -b^3 & & \\
 & ab^2 & -b^3 & & \\ \cline{2-3}
 & / & / & &
\end{array}$$

Donc

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

1.11 Factorisation

C'est le processus inverse de la distribution !

Les trois techniques principales qui permettent de factoriser une expression sont :

- mise en évidence (E)
- Reconnaissance d'identité remarquable (I)
- Regroupement (R)

Il n'y a pas de méthode infaillible pour factoriser une expression, il faut bien souvent s'en remettre à son intuition !
D'où l'importance d'exercer cette technique autant que possible.

Exemples

1. $x^2-9 = x^2-3^2 \overset{I}{=} (x+3)\cdot(x-3)$

2. $x^4-18x^2+81 = (x^2)^2-2\cdot 9x^2+9^2 \overset{I}{=} (x^2-9)^2 \overset{I}{=} (x-3)^2(x+3)^2$

3. $a+2b+a^2+2ab \overset{R}{=} a+a^2+2b+2ab$
$\overset{E}{=} a(1+a)+2b(1+a)$
$\overset{E}{=} (1+a)(a+2b)$

4. $2x^2-14x+24 \overset{E}{=} 2(x^2-7x+12) = 2\left[x^2-2\cdot\frac{7}{2}x+\left(\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2+12\right]$
$\overset{I}{=} 2\left[\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+\frac{48}{4}\right]$
$\overset{R}{=} 2\left[\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]$
$\overset{I}{=} 2\left[\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \overset{I}{=} 2\left[\left(x\underbrace{-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(x\underbrace{-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}}\right)\right]$
$\overset{R}{=} 2(x-3)(x-4)$

On reprend le même problème en remarquant que
$(x+a)\cdot(x+b) = x^2 + \underbrace{(a+b)}x + \underbrace{a\cdot b}$:

$2x^2 - 14x + 24 = 2(x^2 - 7x + 12)$, on cherche donc a et b

tels que $a+b = -7$ et $a\cdot b = 12$. Clairement $a=-3$ et $b=-4$!

$2x^2 - 14x + 24 = 2(x-3)(x-4)$

⊗ **Exercice 1.17** Factoriser les expressions suivantes jusqu'à obtenir la forme irréductible :

$a)\ 3x^2-12x+12=$

$b)\ 5x^2-20=$

$c)\ 4x^5y-9x^3y^3=$

$d)\ 3x^2-15x+18=$

$e)\ 25x^2+25x-150=$

$f)\ x^4+x^3-x-1=$

$g)\ 3x^3+2x^2-12x-8=$

(*) Exercice 1.18

Simplifier les expressions suivantes :

a) $\dfrac{6x^2-7x-5}{4x^2+4x+1}$

b) $\dfrac{6x^2-5x-6}{x^2-4} \div \dfrac{2x^2-3x}{x+2}$

c) $\dfrac{7}{x+2}+\dfrac{3x}{(x+2)^2}-\dfrac{5}{x}$

Factoriser numérateur et dénominateur et simplifier.

1.12 Fonctions quadratiques

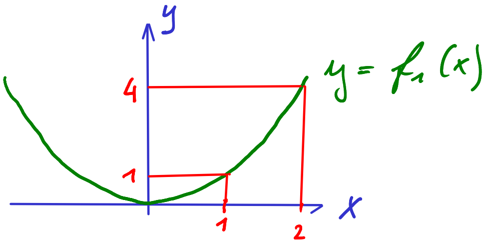
On appelle <u>fonction quadratique</u> une fonction qui prend la forme d'un <u>polynôme du 2ième degré</u> :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = \underbrace{a x^2 + b x + c}_{\text{Polynôme du 2ème degré en } x}$$

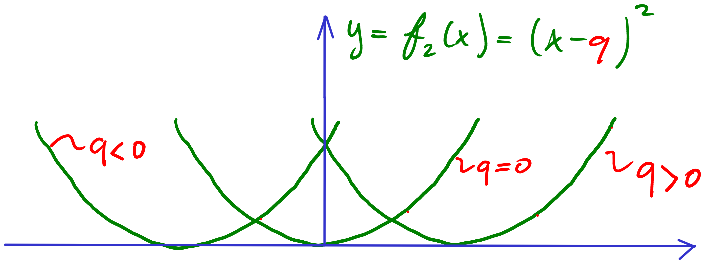
1.12.1 Extrémums (Extréma)

Commençons par une rapide analyse graphique :

1. $f_1(x) = x^2$



2. $f_2(x) = (x-q)^2$



Intersection avec l'axe Ox : $y = 0 \Rightarrow (x-q)^2 = 0$

$$x - q = 0$$
$$x = q$$

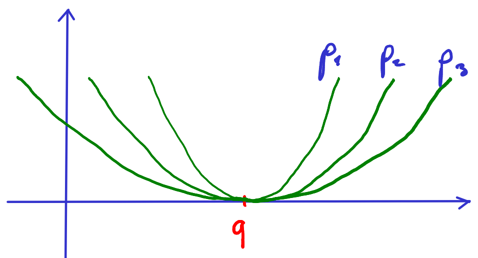
Donc la courbe $y = f_2(x) = (x-q)^2$ <u>s'annule</u> au point $(q, 0)$

c'est-à-dire qu'elle coupe ou touche l'axe des x !!

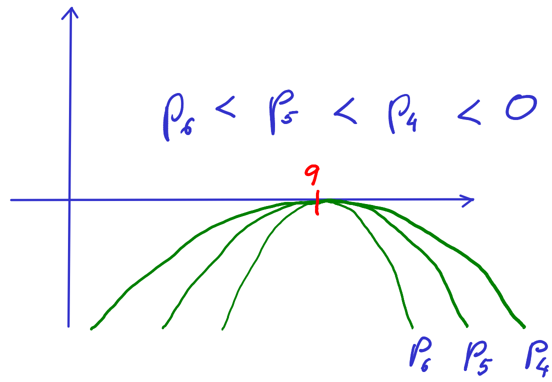
On remarque donc que :

> Soustraire q à la variable, décale la courbe vers la droite si $q > 0$
> vers la gauche si $q < 0$

3. $f_3(x) = p(x-q)^2$

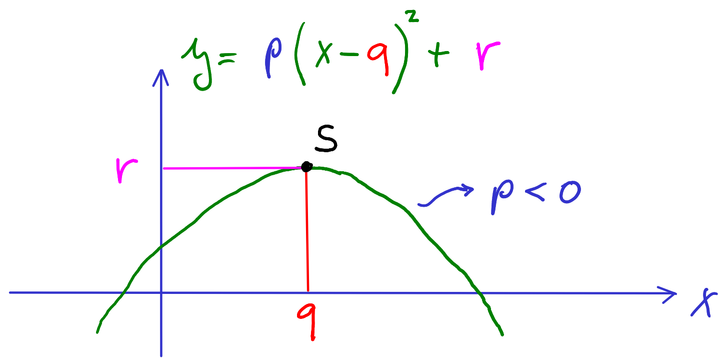


$p_1 > p_2 > p_3 > 0$



> Multiplier par un facteur p resserre ou élargit la courbe. Si p est négatif, la courbe est "retournée"

4. $f_3(x) = p(x-q)^2 + r$



> Ajouter une constante r décale la courbe verticalement

Définition : l'expression $y = p(x-q)^2 + r$ est appelée **forme canonique** des fonctions quadratiques

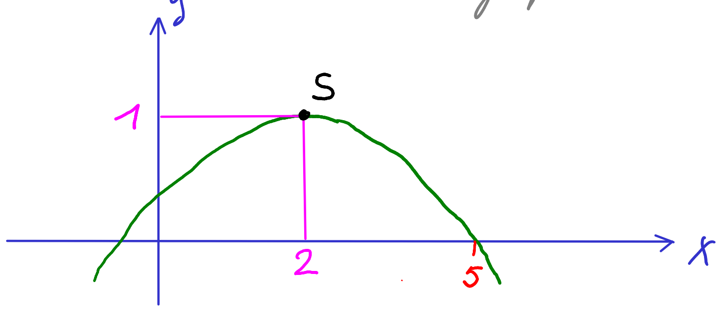
Conclusions importantes :

Si une fonction quadratique est donnée sous sa forme canonique $y = \alpha(x-\beta)^2 + \gamma$ alors le point $S = (\beta, \gamma)$ est :

- le MAXIMUM de la fonction si $\alpha < 0$
- le MINIMUM de la fonction si $\alpha > 0$

Le terme EXTREMUM se réfère aussi bien à un minimum qu'à un maximum.

Exercice 1.19 Trouver le polynôme du second degré en x dont le graphe est la parabole ci-dessous

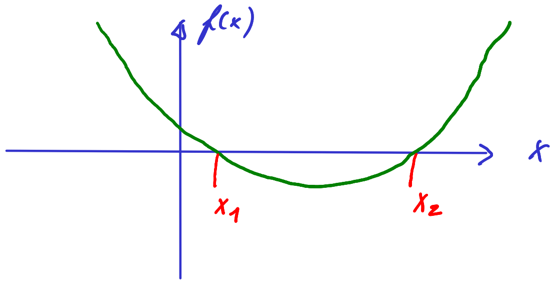


1.12.2 Les Racines

On considère la forme canonique des fonctions quadratiques : $f(x) = p(x-q)^2 + r$ et on cherche les valeurs x_1 et x_2 pour lesquelles $f(x) = 0$.

Ces valeurs x_1 et x_2 sont appelées Racines de $f(x)$

Graphiquement :



Algébriquement :

$$p(x-q)^2 + r = 0$$
$$p(x-q)^2 = -r$$
$$(x-q)^2 = \frac{-r}{p}$$

$$x - q = \pm\sqrt{\frac{-r}{p}}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{-r}{p}} + q$$

On voit donc qu'à partir de la forme canonique il est très facile de trouver les racines de $f(x)$:

$$x_1 = +\sqrt{\frac{-r}{p}} + q \qquad x_2 = -\sqrt{\frac{-r}{p}} + q$$

Mais comment procéder dans le cas (fréquent) où la fonction quadratique nous est connue sous sa forme polynômiale ?

Et bien, simplement en transformant la forme polynômiale en une forme canonique !!!

$$f(x) = ax^2+bx+c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\underbrace{x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}\ \underbrace{-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}}\right]$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right]$$

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$$

On a bien obtenu la forme canonique $p(x-q)^2+r$ du polynôme ax^2+bx+c, avec

$$r = -\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$q = -\frac{b}{2a}$$

$$p = a$$

Il est donc facile maintenant d'obtenir le sommet (extremum) de la parabole correspondante et ses intersections avec l'axe Ox (≡ les racines du polynôme)

(mais d'abord un exercice ....)

Exercice 1.20 Mettre sous forme canonique

a) $p(x) = 3a\,x^2 - 2x + 2$ rép : $p(x) = 3a\left(x - \frac{1}{3a}\right)^2 + \frac{6a-1}{3a}$

b) $p(x) = 6x^2 + 5x - 6$ rép : $p(x) = 6\left[\left(x + \frac{5}{12}\right)^2 - \frac{169}{144}\right]$

Utilisons maintenant les relations obtenues précédemment pour déterminer les racines et les coordonnées de l'extrémum S de $p(x) = ax^2 + bx + c$

Racines :

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-r}{p}} + q = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} - \frac{b}{2a}$$

$$= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Nous avons retrouvé une formule bien connue !!!

Extrémum :

$$\boxed{S = (q, r) = \left(\frac{-b}{2a} \, ; \, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)}$$

Remarquons encore que :

1. Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors $ax^2 + bx + c = 0$ est vraie pour deux valeurs de x :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Si $\Delta = 0$, alors $x_1 = x_2$ et $ax^2 + bx + c = 0$ est vraie pour $x = -\frac{b}{2a}$ uniquement.

3. Si l'expression $b^2 - 4ac = \Delta$ est négative, alors $ax^2 + bx + c = 0$ n'est vrai pour aucune valeur de $x \in \mathbb{R}$

1.13 Factorisation des polynômes

Commençons par les polynômes du second degré et considérons l'expression suivante :

$p(x) = a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$ et effectuons le produit, il vient :

$$p(x) = a\left(x^2 - x\cdot x_2 - x\cdot x_1 + x_1 x_2\right)$$

$$= a\,x^2 - a(x_1+x_2)\cdot x + a\,x_1\cdot x_2 \,,$$ en posant $b = -a(x_1+x_2)$ et $c = a\,x_1\cdot x_2$

on peut écrire : $p(x) = ax^2 + bx + c$. On constate donc que notre expression de départ $p(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ est en fait un polynôme du second degré, mis sous une forme factorisée !

De plus : $\boxed{x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont les Racines de ce polynôme}}$

puisque

pour $x = x_1$ on a $p(x_1) = a\underbrace{(x_1 - x_1)}_{0}(x_1 - x_2) = 0$!

pour $x = x_2$ on a $p(x_2) = a(x_2 - x_1)\underbrace{(x_2 - x_2)}_{0} = 0$

Question : Nous venons de voir qu'il est très simple et toujours possible de passer de la forme factorisée $a(x-x_1)(x-x_2)$ à la forme polynômiale ax^2+bx+c !

Mais peut-on toujours faire le chemin inverse, c'est-à-dire passer de la forme polynômiale à la forme factorisée ???

Vous connaissez la réponse ! C'est NON, pas toujours ! Il faudrait pour cela pouvoir déterminer les racines x_1 et x_2 de $p(x) = ax^2+bx+c$!

Or on sait que ces racines n'existent pas si la parabole correspondante ne coupe pas l'axe Ox

Le message positif qu'on retire de tout cela, c'est que :

1. Si on connait les racines x_1 et x_2 du polynôme $p(x) = ax^2 + bx + c$, alors on peut facilement le mettre sous sa forme factorisée qui est
$p(x) = a(x - x_1)\cdot(x - x_2)$

2. Si les racines de $p(x)$ sont confondues, $x_1 = x_2$, la forme factorisée sera :
$p(x) = a(x - x_1)^2 = a(x - x_2)^2$

3. Si $p(x)$ n'a pas de racines réelles, alors on ne pourra pas mettre le polynôme $p(x) = ax^2 + bx + c$ sous forme factorisée, on dira que $p(x)$ est IRRÉDUCTIBLE.

1.13.1 Cas des polynômes de degré n

Partant de la forme factorisée, $P_n(x) = a(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot \ldots \cdot (x - x_n)$ il est facile de construire une forme polynômiale, comme on l'a fait pour les polynômes de degré 2.

Comme pour le degré 2, on a évidemment :
$P_n(x_1) = 0$, $P_n(x_2) = 0$, $P_n(x_3) = 0$, ... $P_n(x_n) = 0$
$x_1, x_2, \ldots x_n$ sont donc les racines, de $P_n(x)$.

Quant à la question de savoir si on peut, et sous quelles conditions, passer de la forme polynômiale à la forme factorisée, elle est résolue par un théorème célèbre (et difficile à démontrer) appelé

Théorème Fondamental de l'algèbre ou bien Théorème de D'Alembert-Gauss

Sans énoncer ce théorème (car il nous faudrait pour cela introduire les nombres complexes), intéressons-nous à une de ses conséquences (corollaire)

Un corollaire du théorème fondamental de l'algèbre :

Tout polynôme $P_n(x)$ de degré n, peut s'écrire comme le produit de k polynômes du premier degré et m polynômes irréductibles du second degré :

$k^{ième}$ polynôme du 1^{er} degré

$$P_n(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)\cdot$$
$$\cdot(\alpha_1 x^2+\beta_1 x+\gamma_1)\cdot(\alpha_2 x^2+\beta_2 x+\gamma_2)\cdot\ldots\cdot\underbrace{(\alpha_m x^2+\beta_m x+\gamma_m)}_{m^{ième}\text{ polynôme du } 2^{ème} \text{ degré}}$$

k correspond au nombre de racines réelles de $P_n(x)$.
De plus, on aura toujours $n = k + 2m$

Exercice 1.21 Sachant qu'un polynôme de degré 3 a au moins 2 racines réelles, comment pourra-t-on le factoriser ?

Solution : $n = k + 2m$ avec $n = 3$ (polynôme de degré 3)
et $k = 2$ ou 3 (au moins 2 racines réelles)

On a donc 2 cas :

a) $n=3$, $k=3$: on aura $3 = 3 + 2m \Rightarrow m = 0$

$$P_3(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

b) $n=3$, $k=2$: on aura $3 = 2 + 2m \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

ce qui n'est pas possible, car m doit être entier !

(*) **Exercice 1.22**

On sait qu'un certain polynôme de degré 4 a au moins 2 racines réelles. Comment pourra-t-on le factoriser ?

(*) **Exercice 1.23**

Soit $P_3(x) = x^3 - x^2 + 4x - 30$.

On sait que $x_1 = 3$ est une racine de $P_3(x)$

Factoriser complètement $P_3(x)$

1.14 Décomposition en fractions simples

C'est une technique utile, entre autres, pour le calcul de certaines intégrales et dans le calcul des transformées de Laplace ($2^{ième}$ année).

La décomposition en fractions simples concerne les fonctions rationelles irréductibles :

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

où $N(x)$ et $D(x)$ sont des polynômes tels que le degré de $N(x)$ est inférieur au degré de $D(x)$.

Exercice 1.24 Dites si ce sont des fonctions rationelles irréductibles

$$\frac{3x^3+2}{x^2-x} \qquad \frac{\sin(x)+2}{3x^3+2x^2} \qquad \frac{x^4-x^2+x-3}{x^7-5}$$

Toutefois, si le degré du numérateur est supérieur ou égal au degré du dénominateur, on peut effectuer une division polynômiale, dont le résultat sera la somme d'un polynôme et d'une fonction rationnelle :

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \underbrace{P(x)}_{\text{Polynôme}} + \underbrace{\frac{R(x)}{D(x)}}_{\text{Fonction rationnelle irréductible}}$$

$R(x)$: Reste de la division

Division polynômiale (≡ Division euclidienne)

La technique que nous allons étudier pourra alors s'appliquer à la partie $\frac{R(x)}{D(x)}$. Revoyons rapidement, au travers d'un exemple, comment on procède à une division polynômiale :

Exemple de division polynômiale : considérons la fonction rationnelle réductible

$$R(x) = \frac{x^3-6x^2-5x-3}{x^2-1} = \underbrace{x-6}_{P(x)} \quad - \underbrace{\frac{4x+9}{x^2-1}}_{\frac{n(x)}{d(x)}}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-6x^2-5x-3 & x^2-1 \\ \hline x^3 \qquad\quad -x & x-6 \\ \hline / \; -6x^2-4x-3 & \\ -6x^2 \qquad +6 & \\ \hline / \quad -4x-9 & \end{array}$$

$\frac{n(x)}{d(x)}$ irréductible, sur cette partie, on pourra essayer une décomposition en fractions simples

Les fonctions rationnelles irréductibles sont difficiles à traiter ! Il est souvent utile de pouvoir les écrire comme une somme de fractions simples (dites aussi fractions partielles). Pour cela on se base sur le théorème suivant (que nous ne démontrerons pas) :

Théorème

Soit : la fonction rationnelle $\frac{N_k(x)}{D_n(x)}$ irréductible $(k < n)$

Alors :

$$\frac{N_k(x)}{D_n(x)} \equiv F_1(x) + F_2(x) + \ldots\ldots + F_r(x)$$

Avec :

$$F_i(x) = \frac{A_i}{(p_i x + q_i)^\alpha} \quad \text{ou bien} \quad \frac{A_i x + B_i}{(a_i x^2 + b_i x + c_i)^\beta}$$

$i = 1, 2, \ldots r$

Ce théorème nous assure de l'existence d'une telle décomposition, il nous reste à mettre au point une technique (marche à suivre) pour l'obtenir

Marche à suivre pour obtenir la décomposition en fractions simples d'une fonction rationnelle irréductible :

E1 : Si nécessaire, effectuer la division euclidienne et considérer, pour ce qui suit, uniquement la partie irréductible

$$\frac{N_k(x)}{D_n(x)} \quad (\text{On doit avoir } k < n \;!!!)$$

E.2 : Factoriser le dénominateur $D_n(x)$ de manière à le transformer en produit :

- de facteurs linéaires : $(px+q)^n$

et / ou

- de facteurs quadratiques irréductibles : $(ax^2+bx+c)^m$

↳ Pas de racines réelles, donc pas factorisables

E3 : Pour chaque facteur $(px+q)^n$, écrire la somme de fractions simples :

$$\frac{A_1}{px+q} + \frac{A_2}{(px+q)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(px+q)^n}$$

E4 : Pour chaque facteur $(ax^2+bx+c)^m$, écrire la somme de fractions simples :

$$\frac{B_1\cdot x + C_1}{ax^2+bx+c} + \frac{B_2\cdot x + C_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_m\cdot x + C_m}{(ax^2+bx+c)^m}$$

E5 : Calculer les constantes A_i, B_i, C_i en posant que la fraction rationnelle $\frac{N_k(x)}{D_n(x)}$ doit être IDENTIQUE à sa décomposition en fractions simples

Pas de panique ! Les exemples vont clarifier ce charabia... mais il est important que vous fassiez l'effort d'établir une correspondance entre la procédure décrite ci-dessus et les exemples qui vont suivre !

Exemple 1 : Décomposer en fractions simples $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-2x-8} = \dfrac{N_1(x)}{D_2(x)}$

E1 : Pas de division, la fonction est déjà irréductible !

E2 : Factorisation du dénominateur :

$$x^2-2x-8 = \underbrace{x^2 - 2\cdot 1\cdot x + (1)^2} - (1)^2 - 8$$
$$= (x-1)^2 - 9 = (x-1)^2-(3)^2 = (x-1-3)(x-1+3)$$
$$= (x-4)(x+2)$$

E3 : $(x-4) \rightsquigarrow \dfrac{A_1}{x-4}$

$(x+2) \rightsquigarrow \dfrac{A_2}{x+2}$

E4 : Rien à faire, pas de facteurs quadratiques

E5 : On identifie la fonction et sa décomposition :

$$\frac{3x}{x^2-2x-8} = \frac{3x}{(x-4)(x+2)} \equiv \frac{A_1}{x-4} + \frac{A_2}{x+2} \quad \Big| \cdot (x-4)(x+2)$$

$$3x \equiv \frac{A_1\cancel{(x-4)}\cdot(x+2)}{\cancel{(x-4)}} + \frac{A_2(x-4)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}}$$

$$3x \equiv A_1(x+2) + A_2(x-4) \equiv (A_1+A_2)\cdot x + 2A_1 - 4A_2$$

$$\underbrace{3x}_{\text{Polynôme}} \equiv \underbrace{(A_1+A_2)\cdot x + 2A_1 - 4A_2}_{\text{Polynôme}}$$

OR, deux polynômes sont IDENTIQUES seulement si leurs coefficients sont identiques donc : $3 = A_1 + A_2$ | Deux équations pour deux inconnues

$0 = 2A_1 - 4A_2$ | A_1 et A_2

$\Rightarrow \quad A_1 = 3 - A_2$

$\Rightarrow \quad 0 = 2(3-A_2) - 4A_2 = 6 - 2A_2 - 4A_2 = 6 - 6A_2$

$\Rightarrow \quad 6A_2 = 6 \Rightarrow \underline{\underline{A_2 = 1}}$

$\Rightarrow \quad \underline{A_1} = 3 - 1 = \underline{2}$

Finalement, notre décomposition en fraction est :

$$\frac{3x}{x^2-2x-8} \equiv \frac{2}{x-4} + \frac{1}{x+2}$$

Exemple 2 : $f(x) = \dfrac{2x^2+4x-4}{x^3+4x^2+4x}$

E1: Division inutile

E2: $x^3+4x^2+4x = x(x^2+4x+4) = x(x+2)^2$

E3: $x \rightsquigarrow \dfrac{A_1}{x}$

$(x+2)^2 \rightsquigarrow \dfrac{A_2}{x+2} + \dfrac{A_3}{(x+2)^2}$

E4: Rien, pas de facteur quadratique irréductible au dénominateur

E5: Identité :

$$\frac{2x^2+4x-4}{x^3+4x^2+4x} = \frac{2x^2+4x-4}{x(x+2)^2} \equiv \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{(x+2)^2}$$

On multiplie les 2 membres de l'identité par $x(x+2)^2$:

$$2x^2+4x-4 \equiv A_1(x+2)^2 + A_2\, x\,(x+2) + A_3\, x$$
$$\equiv A_1\left(x^2+4x+4\right) + A_2 x^2 + 2A_2 x + A_3 x$$
$$\equiv \left(A_1+A_2\right)x^2 + \left(4A_1+2A_2+A_3\right)x + 4A_1$$

Coefficients identiques:

$$2 = A_1 + A_2$$
$$4 = 4A_1 + 2A_2 + A_3$$
$$-4 = 4A_1$$

3 équations pour 3 inconnues !

$\underline{A_1 = -1}$ $\quad \underline{A_2 = 3}$ $\quad 4 = -4 + 6 + A_3$

$\underline{A_3 = 2}$

Finalement: $$\underline{\underline{\frac{2x^2+4x-4}{x^3+4x^2+4x} \equiv \frac{-1}{x} + \frac{3}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2}}}$$

(*) **Exercice 1.25** Décomposer en fractions simples

(1) $\dfrac{4x^3-x^2+4x+2}{(x^2+1)^2}$ (2) $\dfrac{2x^4-2x^3+6x^2-5x+1}{x^3-x^2+x-1}$