2. Généralités sur les fonctions

2.1 Concepts et définitions

Soit D et F deux ensembles. Une fonction est une correspondance qui, à chaque élément x de D (ensemble de départ), fait correspondre un unique élément y de F (ensemble d'arrivée)

⚠ Les mots en rouge sont primordiaux !

Notation mathématique et nomenclature :

$$f: \quad D \longrightarrow F \qquad \longleftarrow \text{Niveau ensembles}$$
$$\quad x \longmapsto y = f(x) \qquad \longleftarrow \text{Niveau éléments (variables)}$$

x est la variable indépendante
y est la variable dépendante

D est l'ensemble de départ
F est l'ensemble d'arrivée

Si D est un ensemble discret (composé d'éléments discontinus, séparés, distincts) et fini, une fonction peut être donnée sous forme d'une table de correspondance T.

Exercice 2.1

$D = \{-2, 1, 4, 7, 9\}$

$F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$T_1 : D \longrightarrow F$

$-2 \longmapsto 12$
$1 \longmapsto 10$
$4 \longmapsto 6$
$7 \longmapsto 2$
$9 \longmapsto 2$

$T_2 : D \longrightarrow F$

$-2 \longmapsto 12$
$1 \longmapsto 10$
$4 \longmapsto 6$
$7 \longmapsto 2$
$7 \longmapsto 3$

$T_3 : D \longrightarrow F$

$-2 \longmapsto 12$
$1 \longmapsto 10$
$4 \longmapsto 6$
$7 \longmapsto 2$
$9 \longmapsto 1$

Les correspondance T_1, T_2 et T_3 sont-elles des fonctions.
Justifier les réponses.

Il faut bien comprendre que la définition d'une fonction implique

1) Pour tout élément de D il existe un élément de F correspondant (par T)

2) Chaque élément de D a une correspondance unique dans F

Si D est un ensemble continu ou infini il faut remplacer la table de correspondance par une règle de correspondance.

Cette règle est généralement donnée sous forme de formule.

(*) **Exercice 2.2** : Soit $D = \mathbb{N}^*$ et $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

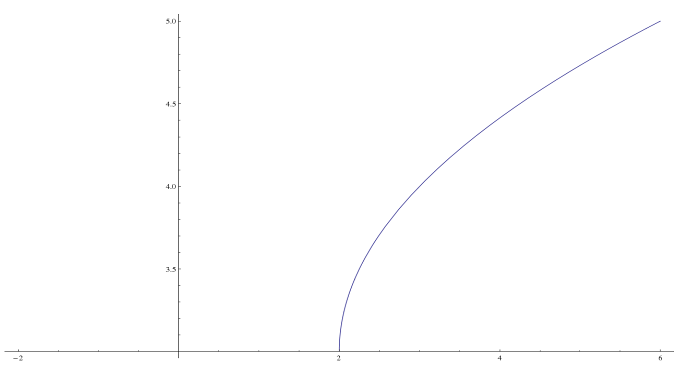
Inventer une fonction $g : D \longrightarrow F$ donnée sous forme de formule.

2.2 Représentation des fonctions

2.2.1 Forme cartésienne explicite

Lorsque la règle de correspondance est donnée sous forme d'une formule permettant de "calculer" $y \in F$ pour chaque $x \in D$, on dit que la fonction est donnée sous forme cartésienne explicite.

Exemple :
$$f : D \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto y = \sqrt{x-2} + 3$$



⚠ f est une fonction seulement si :

$D = \{x \mid x \in [2, \infty[\}$

et $\mathbb{R}^+ \subseteq F$

↳ nombres réels positifs

2.2.2 Forme cartésienne implicite

Parfois, au lieu de disposer d'une règle explicite, on a seulement un lien, une relation qui lie deux variables. C'est très différent !

Considérons par exemple 2 classe A et B. Vous pouvez avoir une règle explicite (sous forme de table) qui dit que Paul de la classe A est lié à Jean de la classe B, etc, etc. Mais vous pouvez aussi avoir une relation ou lien implicite du genre : un élève de la classe A est lié à un élève de la classe B s'ils ont le même âge !

Remarquez bien qu'une telle relation implicite ne vous dit pas quels sont les élèves de la classe B liés à Paul de la classe A ! Pour le savoir, vous devez consulter les cartes d'identités de chaque élève .....

Dans le cas d'une relation implicite, la variable x est mise en relation avec la variable y par une équation du type

$$F(x,y) = 0$$

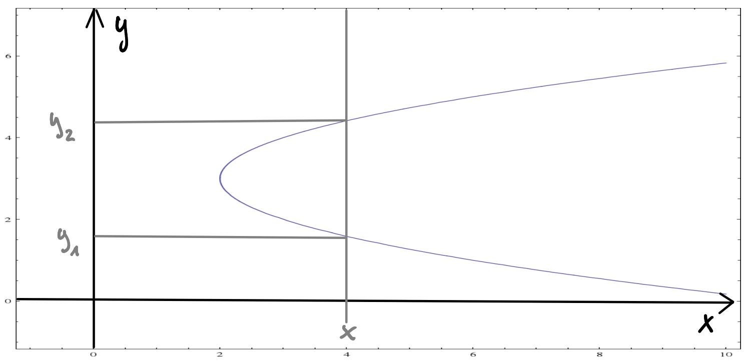
On dit que la fonction est donnée sous forme cartésienne implicite !

Remarque: Parfois on peut trouver la règle permettant d'obtenir y pour un x donné. Mais en général ce n'est pas possible.

Donc il n'est pas toujours possible de trouver $y = f(x)$ telle que $F(x,y)=0$!!

Exemple : Relation implicite : $F(x,y) = (y-3)^2 - x + 2 = 0$

Avec la fonction ContourPlot de Mathematica on obtient :



Important : 1) Ce n'est pas à proprement parler une fonction puisque pour un x donné, il y a plusieurs valeurs de y. Malgré cela on utilise souvent le terme fonction implicite (au lieu de relation implicite)

2) Il faut bien comprendre que les points (x,y) appartenant à la courbe sont ceux pour lesquels la relation $(y-3)^2 - x + 2 = 0$ est vraie !

Exemple : $F(x,y) = 3y - x + 3 = 0$

Dans ce cas, le passage à la forme explicite est facile :

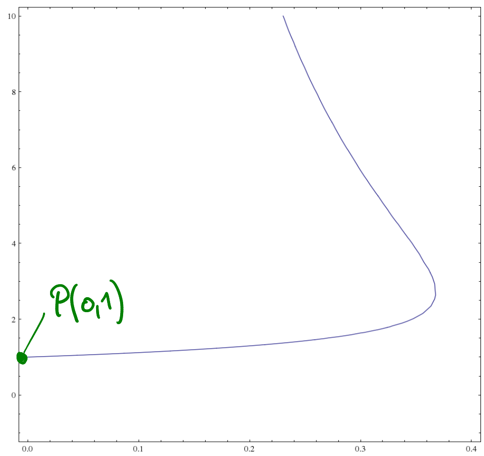
$$3y - x + 3 = 0$$
$$3y - x = -3$$
$$3y = x - 3 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{y = f(x) = \tfrac{1}{3}x - 1}}$$

Important : On voit que $y = \frac{1}{3}x - 1$ vérifie $F(x,y) = 0$, en effet :

$$F(x,y) = F(x, f(x)) = F\left(x, \tfrac{1}{3}x - 1\right) = 3\left(\tfrac{1}{3}x - 1\right) - x + 3 = x - 3 - x + 3 =$$
$$= 0 \text{ pour tout } x \text{ !!!!}$$

Exemple $\quad F(x,y) = y - e^{x\cdot y} = 0$ n'a pas de forme explicite simple !

La fonction ContourPlot de Mathematica donne le graphe suivant :



On peut deviner que le point P(0,1) satisfait l'équation $y - e^{xy} = 0$. En effet $1 - e^{0\cdot 1} = 1 - 1 = 0$

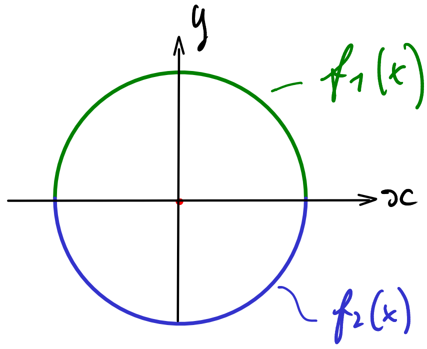
Mais comment diable Mathematica a-t-il trouvé tous les autres points sur la courbe ci-contre ?

Exemple : $\quad F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ est l'équation implicite d'un cercle de rayon 1, centré en (0,0)

Si on cherche une forme explicite, on en trouve 2 !

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ y^2 = 1 - x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = \begin{cases} +\sqrt{1-x^2} = f_1(x) \\ -\sqrt{1-x^2} = f_2(x) \end{cases}$$

En faisant le graphe de $f_1(x)$ et $f_2(x)$ on obtient :



Exercice 2.3

Exprimer les fonctions suivantes sous la forme cartésienne explicite ($y = y(x)$) :

a) $x^5 y - 4x + 2 = 0$ b) $x = \dfrac{2+y}{2-y}$ c) $4x^2 - 4xy + y^2 = 0$

Exercice 2.4

a) Donner l'équation cartésienne explicite de la droite de pente m passant par le point $(x_0; y_0)$.

b) Donner l'équation cartésienne explicite de la droite passant par les points $(x_1; y_1)$ *et* $(x_2; y_2)$.

(*) **Exercice 2.5**

Esquisser les courbes suivantes données sous la forme implicite :

a) $x = -2y^2$

b) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$

c) $x + 2 = \frac{1}{4}(y-3)^2$

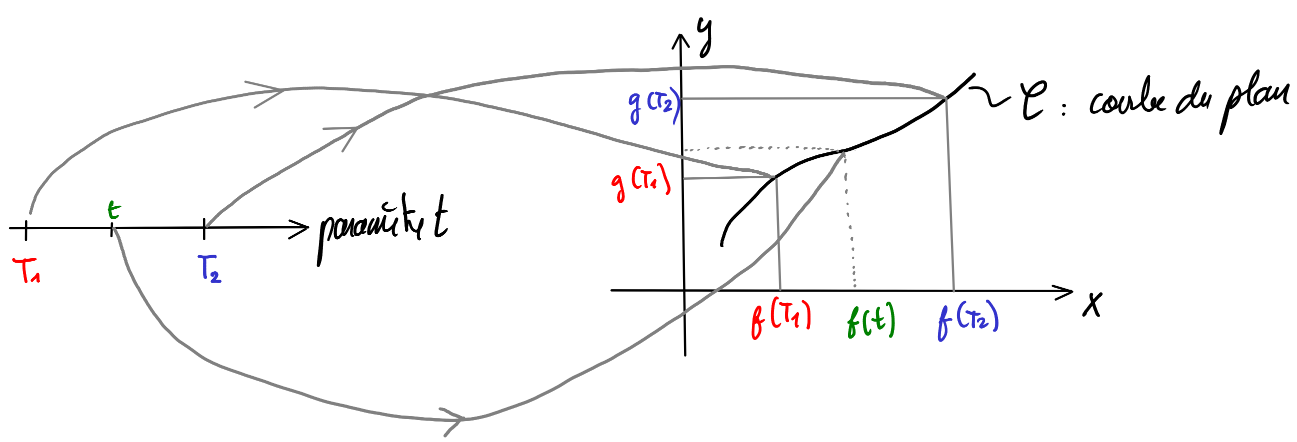
2.2.3 Fonctions données sous forme paramétrique

Soit $(*) \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ où t varie de T_1 à T_2

$$\boxed{\text{A chaque valeur de } t \text{ correspondent deux nombres } \begin{cases} x \\ y \end{cases}}$$

L'ensemble des couples (x, y) ainsi obtenus, représente une courbe $\mathcal{C}$ du plan !

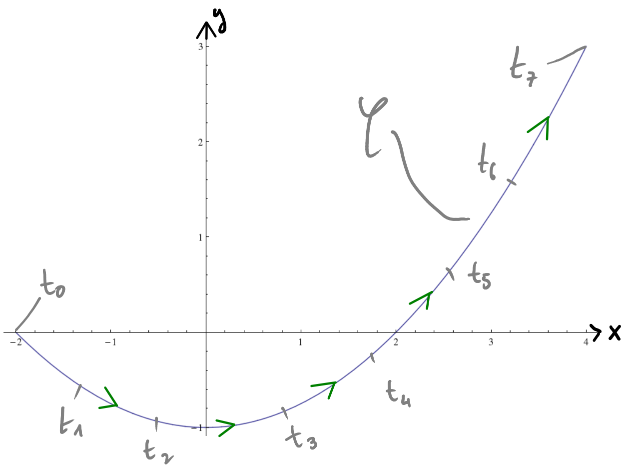
Les équations $(*)$ sont les équations paramétriques de cette courbe $\mathcal{C}$.
t est la variable indépendante, appelée paramètre.
x et y sont les variables dépendantes



Exemple : Soit la courbe $\mathcal{C}$ définie par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x = f(t) = 2t \\ y = g(t) = t^2 - 1 \end{cases}$$

Dessinons la courbe $\mathcal{C}$, pour $t \in [-1, 2]$. On peut facilement le faire "à la main" ou avec la fonction ParametricPlot de Mathematica.



Les $t_i \in [-1, 2]$ ont été choisis croissants, donc $t_{i+1} > t_i \ \forall i$

Il est très important de comprendre qu'on définit ainsi un "sens de parcours" de la courbe $\mathcal{C}$! (flèches)

Exemple : Soit la courbe $\mathcal{C}$ donnée par les équations paramétriques

$$x = f(t) = 1 + 2t$$
$$y = g(t) = -1 + 3t \quad , \quad t \in [-1, 1]$$

En éliminant le paramètre t entre ces 2 équations, on obtient une équation cartésienne explicite reliant les variables y et x :

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \quad \Big| \cdot 3 \\ y &= -1 + 3t \quad \Big| \cdot (-2) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 3x &= 3 + 6t \\ + \quad -2y &= 2 - 6t \\ \hline 3x - 2y &= 5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}}}$$

On reconnait l'équation d'une droite de pente $\frac{3}{2}$, coupant l'axe des y en $-\frac{5}{2}$.

Mais attention : Dans la définition de la courbe $\mathcal{C}$, on a précisé que $t \in [-1, 1]$. Il faut donc préciser le domaine des valeurs de x. On a

$$x \in [x_{min}, x_{max}] \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} x_{min} &= 1 + 2\cdot(-1) = -1 \\ x_{max} &= 1 + 2(1) = 3 \end{aligned}$$

En donnant la forme cartésienne explicite il faudra préciser :

$$\mathcal{C} : \; y = f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \; , \quad \text{avec} \quad x \in [-1, 3]$$

L'exemple ci-dessus, nous montre que les équations paramétriques d'une droite ont la forme :

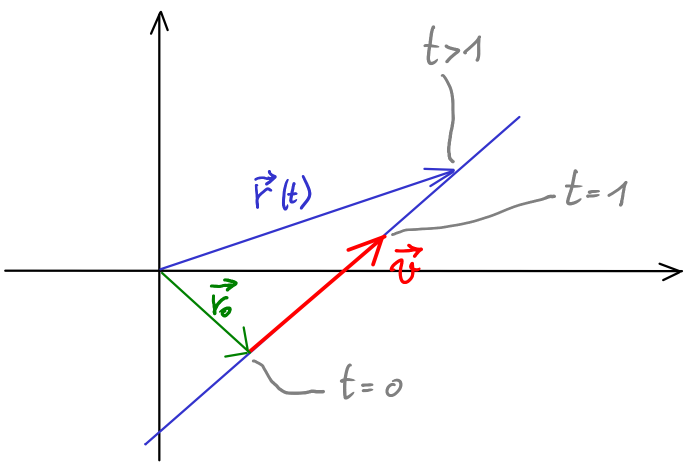
$$\boxed{d : \begin{cases} x = a + \alpha \cdot t \\ y = b + \beta \cdot t \end{cases}}$$

Cette formulation est très importante et doit être connue ! Souvent on écrit ces équations sous forme vectorielle :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \cdot t}$$

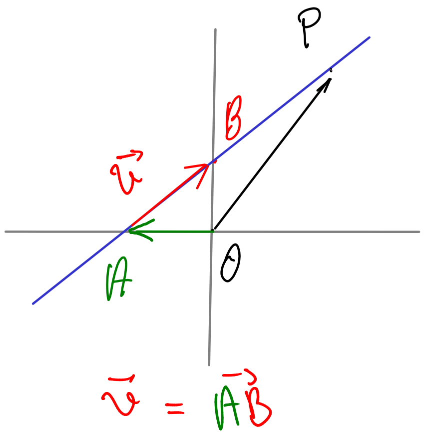
on définit alors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{r}(t)$ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \vec{r}_0$ et $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \vec{v}$

Finalement on a $\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot t}$



A bien comprendre ! Utile en physique.

(*) <u>Exercice 2.6</u> Soient $A(-1,0)$ et $B(0,1)$ deux points du plan.
Soit d, la droite qui passe par ces 2 points.
Soit encore $P(x,y)$ un point quelconque sur la droite d



① Donner l'équation vectorielle de la droite d

② En déduire les équations paramétriques

③ Eliminer le paramètre pour obtenir l'équation cartésienne implicite, puis explicite.

(*) **Exercice 2.7**

Transformer en équations cartésiennes et représenter :

a) $\begin{cases} x = 4t^2 - 5 \\ y = 2t + 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-2t} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin t \end{cases}$ $t \in [-\pi \; ; \; \pi]$

(*) **Exercice 2.8** Soit l'équation cartésienne implicite
$3x^2-2x-y=0$ représentée par une parabole du plan.
Trouver <u>deux</u> formes paramétriques pour cette même courbe.

(*) **Exercice 2.9**

A l'aide de Mathematica, représenter les courbes suivantes dans le même système d'axes.

$$C_1:\begin{cases}x=2\sin 3t\\ y=3\cos 2t\end{cases}\quad -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\quad;\quad C_2:\begin{cases}x=\frac{1}{4}\cos t+\frac{3}{4}\\ y=\frac{1}{4}\sin t+\frac{3}{2}\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi\quad;\quad C_3:\begin{cases}x=\frac{1}{4}\cos t-\frac{3}{4}\\ y=\frac{1}{4}\sin t+\frac{3}{2}\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi$$

$$C_4:\begin{cases}x=\frac{3}{4}\cos t\\ y=\frac{1}{4}\sin t\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi\quad;\quad C_5:\begin{cases}x=\frac{1}{4}\cos t\\ y=\frac{1}{8}\sin t+\frac{3}{4}\end{cases}\quad \pi\le t\le 2\pi$$

Exemple : Soit $\begin{cases}x = r\cdot\cos(\alpha)\\ y = r\cdot\sin(\alpha)\end{cases}$. Ce sont les équations paramétriques, de paramètre α, d'une courbe du plan. Laquelle ?

Si on ne reconnait pas immédiatement la courbe en question on peut élever au carré les 2 membres des équations et les sommer !

$$\begin{array}{rl} & x^2=r^2\cos^2(\alpha)\\ + & y^2=r^2\sin^2(\alpha)\\ \hline \end{array}$$

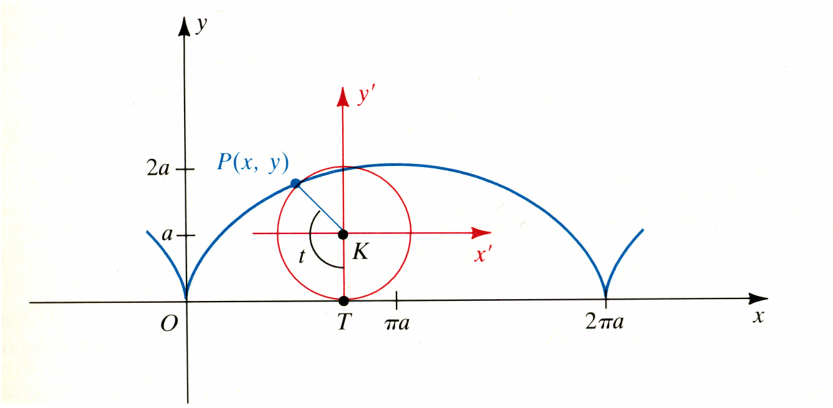
$$x^2+y^2=r^2\cos^2(\alpha)+r^2\sin^2(\alpha)=r^2\big(\underbrace{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)}_{1}\big)=r^2$$

$x^2+y^2=r^2 \Rightarrow$ Equation d'un cercle de rayon r, centré en $(0,0)$

Rappel : Avec mathematica, utiliser ParametricPlot[ ]

F1, pour avoir de l'aide !

Exemple : Equations paramétriques de la cycloïde



La cycloïde est la trajectoire d'un point d'un cercle qui "roule" sur l'axe des x.

t est la mesure de l'angle $\widehat{TKP}$

Les coordonnées de T sont $T_x = a \cdot t$ $T_y = 0$

Les coordonnées de P sont $P_x = a \cdot t - a\sin(t) = a(t - \sin(t))$
$P_y = a - a\cos(t) = a(1 - \cos(t))$

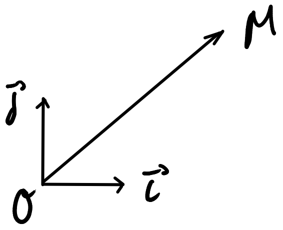
Ce sont en fait les équations paramétriques de la cycloïde :

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= a(t - \sin(t)) \\ y(t) &= a(1 - \cos(t)) \end{aligned}}$$

A connaître par coeur...
Mais NON je plaisante.

2.2.4 Courbe donnée en coordonnées polaires

Habituellement, on localise les points du plan à l'aide d'un repère orthonormé défini par un point (l'origine) et deux vecteurs orthogonaux de longueur unité :

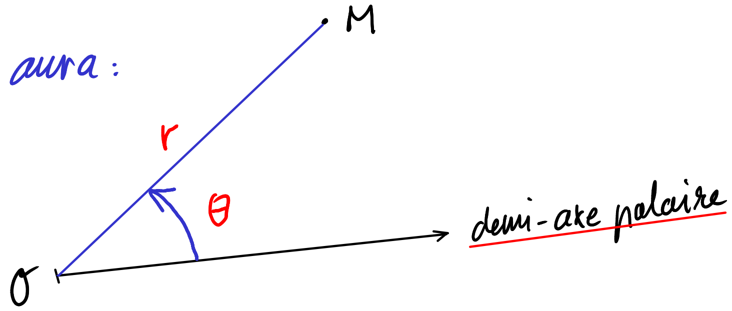


Chaque point M est alors repéré par un vecteur $\vec{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$

Les valeurs (x, y) sont les coordonnées cartésiennes du point M

Mais on peut aussi procéder différemment ! En choisissant comme repère un point origine O et un demi-axe polaire.

On aura :



$$\boxed{\begin{array}{l} r \in [0, \infty[\\ \theta \in [0, 2\pi[\end{array}}$$

et chaque point M du plan pourra être localisé en donnant la longueur r du segment OM et l'angle θ entre OM et le demi-axe polaire.

Remarque

Il est souvent pratique de lever les contraintes sur r et θ. Alors $r \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Mais le prix à payer est que la localisation des points n'est plus univoque !

La fonction Mathematica pour tracer un graphe en coordonnées polaires est PolarPlot. Par défaut elle autorise les valeurs négatives pour r θ

> **Définition :** r et θ sont les **coordonnées polaires** du point M

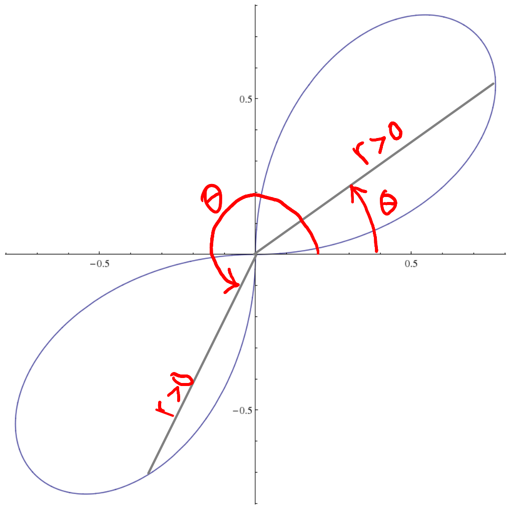
Comme pour les courbes données en coordonnées cartésiennes, les courbes données en coordonnées polaires peuvent s'exprimer sous **forme explicite** ou sous **forme implicite** :

$$\mathcal{C} : \begin{array}{ccc} [0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & r = f(\theta) \end{array} \qquad \text{Forme explicite}$$

$$\mathcal{C} : \quad F(r,\theta) = 0 \;, \quad r \in \mathbb{R},\ \theta \in [0,2\pi[\qquad \text{Forme implicite}$$

Remarque : en physique on trouve souvent la notation
$r = r(\theta)$ au lieu et place de $r = f(\theta)$
cette notation est quelque peu ambigüe car le symbole
r désigne à la fois une variable et une fonction.
Cela évite toutefois d'introduire trop de symboles.....

Exemple : Traçons la courbe $r = f(\theta) = a \cdot \sin(2\theta)$, $a > 0$

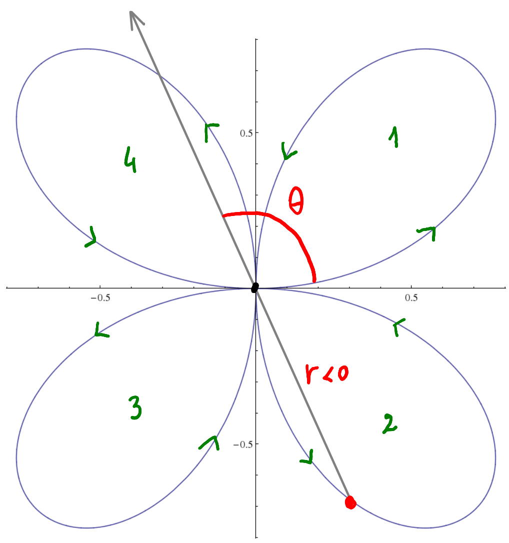


⚠ Pour $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $2\theta \in [\pi, 2\pi]$
donc $\sin(2\theta) < 0$ et $r < 0$

$\Rightarrow$ Il faut supprimer ces valeurs !

Idem pour $\theta \in \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$!

⚠ Attention toutefois : si on trace le graphe avec Mathematica on obtiendra :



Exercice 2.10 : Donner la commande Mathematica (complète !) qui produit ce graphe.

↳ Sans ce qui a été ajouté à la main bien sûr !

Exercice 2.11

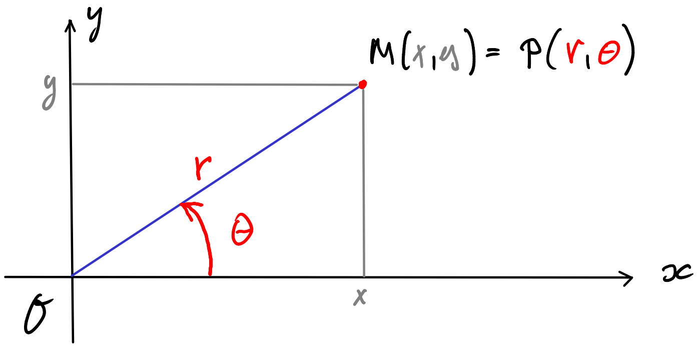
Tracer le graphique de l'équation polaire :

a) $r = -2$ b) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ c) $r = -2\sin\theta$

⚠ $r < 0$ si $\theta \in [0, \pi]$

$\Rightarrow \theta \in [\pi, 2\pi]$

2.2.5 Passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes (et vice-versa)



Polaires $\longrightarrow$ Cartésiennes

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}}$$

Cartésiennes $\longrightarrow$ Polaires

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x>0 \\ \pm\frac{\pi}{2} & \text{si } x=0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\pi & \text{si } x<0 \end{cases} \end{aligned}}$$

Ainsi le point $M(-1,1)$ en coordonnée cartésiennes correspond à $P(r,\theta)$ avec $\begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{4}\pi \end{cases}$

Exercice 2.12 a) Donner les coordonnées polaires du point $M(-1, \sqrt{3})$

b) Donner les coordonnées cartésiennes du point $P\left(r=3, \theta=\frac{-\pi}{4}\right)$

Exercice 2.13 a) Dessiner la fonction polaire $r = f(\theta) = 2$

b) Donner l'équation cartésienne implicite de $r = f(\theta) = 2$

Exercice 2.14 Soit la fonction polaire $\theta = f(r) = \frac{\pi}{6}$. Dessiner son graphe et donner sa forme cartésienne explicite

rappel : $\sin(\pi/6) = 1/2$ $\cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(*) **Exercice 2.15**

Déterminer les équations cartésiennes des courbes suivantes données sous forme polaire :

a) $r\sin\theta = -2$ b) $r = 2$ c) $r^2\sin 2\theta = 4$

d) $r^2(\cos^2\theta + 4\sin^2\theta) = 16$ e) $r(\sin\theta + r\cos^2\theta) = 1$ f) $r = \tan\theta$

(*) **Exercice 2.16** Déterminer les équations polaires des courbes suivantes données par leur équation cartésienne :

a) $y = 4$ b) $x^2 - y^2 = 16$ c) $y = 8 - x^2$

d) $(x-1)^2 + y^2 - 1 = 0$ e) $xy = 8$

2.3 Propriétés des fonctions

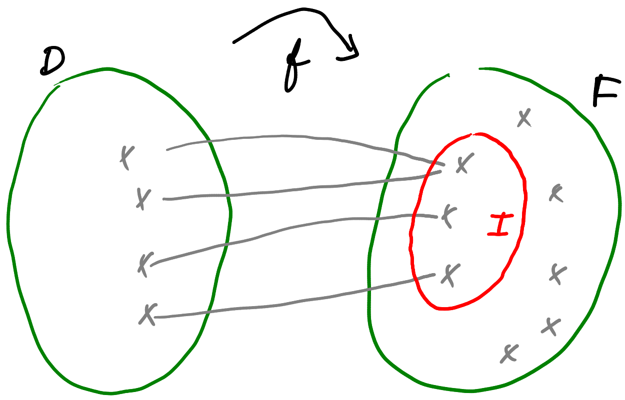
2.3.1 Domaine et image

Le **domaine** D d'une fonction f est l'ensemble des valeurs de la variable indépendante x pour lesquelles $f(x)$ est définie

$$D = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R} \}$$

L'**ensemble image** I de la fonction f, est le sous-ensemble de de l'ensemble d'arrivée F, constitué de toutes les valeurs possibles de $f(x)$, avec $x \in D$

$$\boxed{\begin{array}{l} f: \; D \longrightarrow F \\ \qquad x \longrightarrow y = f(x) \\ \\ I \subseteq F, \quad I = f(D) \end{array}}$$



Exemple Donner le domaine D et l'ensemble image I de $f(x) = \dfrac{\sqrt{4+x}}{1-x}$

Pour D c'est simple : il faut $4+x \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$

et $1-x \neq 0 \Rightarrow x \neq +1$

donc $D = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq -4 \text{ et } x \neq +1 \}$

Pour I, on remarquera que :

1) $x = -4 \Rightarrow f(x) = 0$

2) $x \in]-4,+1[$ $\Rightarrow$ $f(x) > 0$ et $f(x)$ devient très grand quand on s'approche de $+1$ depuis la gauche.

3) $x \in]+1,\infty[$ $\Rightarrow$ $f(x) < 0$, $f(x)$ devient très grand mais négatif quand on s'approche de $+1$ depuis la droite !

On conclu donc que $\underline{\underline{f(x) \in \mathbb{R}}}$! Elle prend toutes les valeurs entre 0 et $+\infty$ quand x varie de -4 à $+1$ (non compris) et toutes les valeurs entre $+\infty$ et 0 quand x varie de $+1$ (non compris) à $+\infty$

__Exercice 2.17__ Déterminer le domaine D et l'image I des fonctions suivantes :

1) $r : D \longrightarrow I$

$x \longmapsto y = r(x) = \sqrt{x}$

2) $s : D \longrightarrow I$

$x \longmapsto y = s(x) = \sqrt{x} + a$

3) $t : D \longrightarrow I$

$x \longmapsto y = t(x) = \sqrt{x-a}$

⊛ **Exercice 2.18**

Soit $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

a) Trouver le domaine de définition de f.

b) Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(-1/2)$, $f(2)$ et $f(-2)$.

c) Montrer que $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$ *et que* $f\left(-\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{1}{f(x)}$.

(*) **Exercice 2.19** Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes :

a) $y = x^2 + 4$ b) $y = \sqrt{x^2 + 4}$ c) $y = \sqrt{x^2 - 4}$ d) $y = \dfrac{x}{x+3}$

e) $y = \dfrac{2x}{x^2 - x - 2}$ f) $y = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$ g) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ h) $y = \sqrt{\dfrac{x}{2 - x}}$

2.3.2 Le graphe d'une fonction

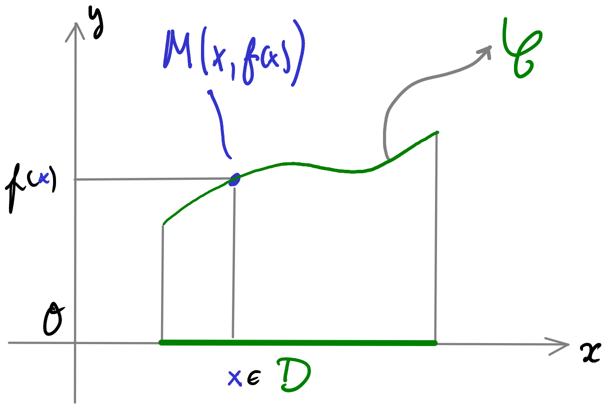
Une courbe $\mathcal{C}$ du plan Oxy représente la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : D & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

Si :

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y) \in \mathcal{C} \\ x \in D \end{array}\right\} \iff y = f(x)$$

↳ On établit ici le lien entre l'expression algébrique d'une fonction et le graphe de cette même fonction. Il est important d'apprendre à lire (et comprendre) ce type de langage.



Les coordonnées des points M sur la courbe $\mathcal{C}$ sont $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$

La courbe $\mathcal{C}$ est alors appelée **graphe de f**

Définition : Les points où le graphe de $f(x)$ (c'est-à-dire la courbe $\mathcal{C}$) coupe l'axe de x sont appelés **les racines de $f(x)$**

Synonymes : Racines de $f(x)$ $\equiv$ Solutions de $f(x) = 0$ $\equiv$ Zéros de $f(x)$

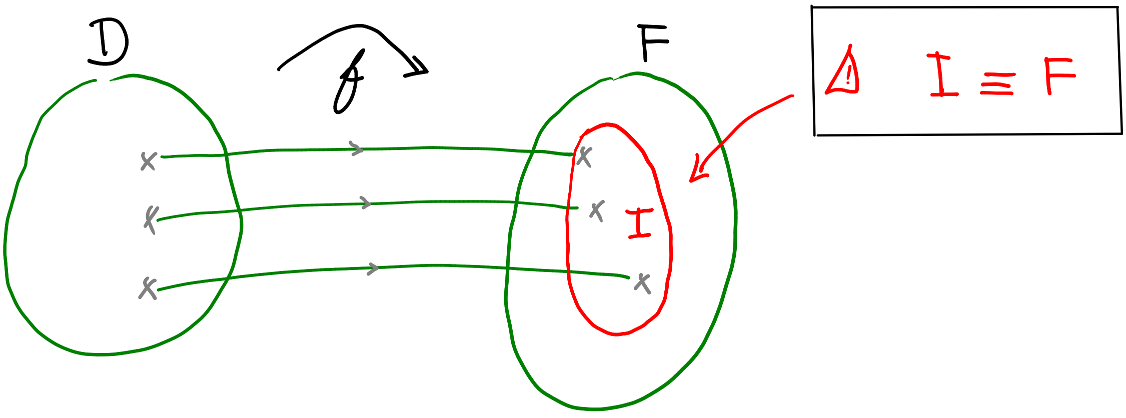
Exercice 2.20 Soit la courbe $\mathcal{C}$ qui représente la fonction

$$f : \mathbb{R} \to D$$
$$x \mapsto y = f(x) = x^2 - \left(\frac{bs + 3a}{b}\right)x + \frac{3as}{6}$$

Le point $M(s, 0)$ appartient-il à cette courbe $\mathcal{C}$?

2.3.3 Fonctions bijectives

$f : D \longrightarrow F$ est dite <u>bijective</u> si elle établit une <u>correspondance biunivoque</u> entre F et D



Tous les éléments de F sont image d'un UNIQUE élément de D

Exercice 2.21 (important !)

Soit $f : D \longrightarrow F$
$\quad x \longmapsto y = x^2$

Déterminer D et F de manière que f soit bijective !

Exercice 2.22 (important !)

Soit $\sin : D \longrightarrow F$
$\quad x \longmapsto y = \sin(x)$

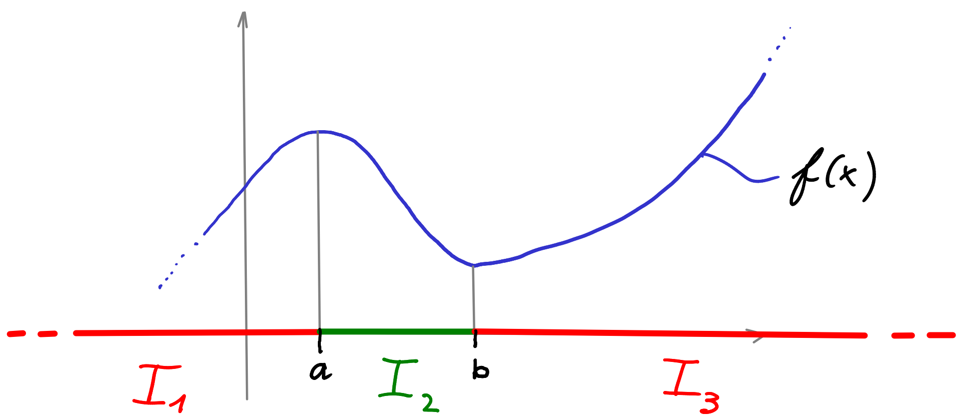
Déterminer D et F de manière que $\sin$ soit bijective !

↳ voir aussi cours de math1a !!

La bijectivité est une propriété fondamentale ! En effet si et seulement si une fonction est bijective, alors il existe une fonction réciproque ! Voir § 2.4.2

2.3.4 Croissance et décroissance

C'est une notion intuitive qu'il suffit de préciser et formaliser :



$f(x)$ est croissante sur l'intervalle $I_1 =]-\infty, a[$

$f(x)$ est décroissante sur l'intervalle $I_2 =]a, b[$

$f(x)$ est croissante sur l'intervalle $I_3 =]b, +\infty[$

Formellement :

f croissante sur I $\Longleftrightarrow$ $\forall (x_1 \text{ et } x_2) \in I$ avec $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) < f(x_2)$

f décroissante sur I $\Longleftrightarrow$ $\forall (x_1 \text{ et } x_2) \in I$ avec $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) > f(x_2)$

f constante sur I $\Leftrightarrow$ $\forall (x_1 \text{ et } x_2) \in I$, avec $x_1 \neq x_2$
on a $f(x_1) = f(x_2)$

Remarque : nous n'avons pas ici défini la croissance et la décroissance en un point donné x_0 !!
Nous attendons pour cela d'introduire la notion de "pente de la tangente en x_0"

2.3.5 Fonctions paire et impaire

$f(x)$ est paire si $f(-x) = f(x)$

Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe Oy (ordonnée) $\Rightarrow$ Symétrie axiale

$f(x)$ est impaire si $f(-x) = -f(x)$

Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine $\Rightarrow$ symétrie centrale

⚠ La plupart des fonctions ne sont Ni paire Ni impaire

Exercice 2.23 Soit $f(x)$ impaire et $g(x)$ paire
Quelle est la "parité" de :

1) $h_1(x) = f(x) + g(x)$ 2) $h_2(x) = f(x) \cdot g(x)$

Exercice 2.24 : Quelle est la "parité" de

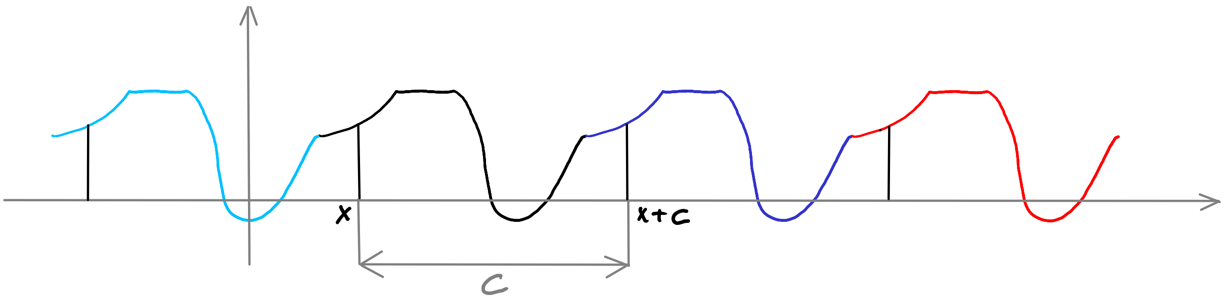
1) $f(x) = \sqrt{|x-2|}$ 2) $g(x) = \sqrt{|x|-2}$

(*) **Exercice 2.25** Examiner si f est paire, impaire ou ni l'une ni l'autre.

a) $y = 5x^3 + 2x$ b) $y = |x| - 3$ c) $y = (8x^3 - 3x^2)^3$

2.3.6 Périodicité

Intuitivement : une fonction est "périodique" si elle se répète :



Formellement :

f est périodique s'il existe une constante c telle que

$f(x+c) = f(x) \quad \forall x \in D$ (domaine de f)

(*) Exercice 2.26 Quelle est la période de $f(x) = \sin(3x)$?

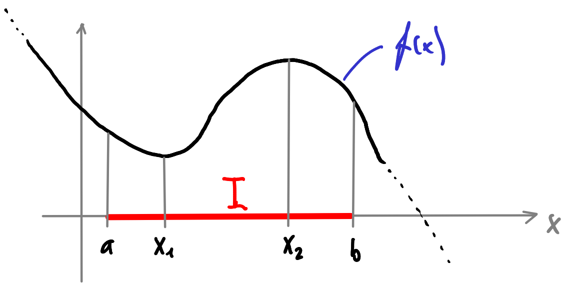
2.3.7 Maximum et minimum sur un intervalle.

Encore une fois, c'est un concept très intuitif qu'il suffit de préciser et formaliser :

$f(x)$ possède un **maximum** en x_0 appartenant à l'intervalle I si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \leqslant f(x_0)$

$f(x)$ possède un **minimum** en x_0 appartenant à l'intervalle I si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \geqslant f(x_0)$

Exemple



$I = [a, b]$

Sur I, $f(x)$ possède un **minimum** en x_1 car $f(x_1) \leqslant f(x)$ pour tout $x \in I$

Sur I, $f(x)$ possède un **maximum** en x_2 car $f(x_2) \geqslant f(x)$ pour tout $x \in I$

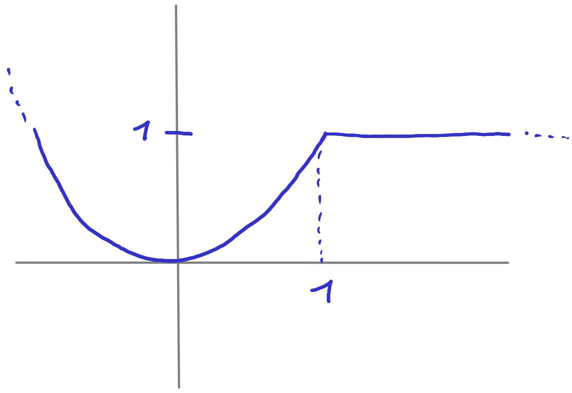
2.3.8 Fonction définie par morceau

Il est important de savoir que les fonctions n'ont pas toujours une expression algébrique simple !

En particulier, on est très souvent amené à définir une fonction "par morceaux".

Exemple

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



Mathematica: Essayez la combinaison de touche:

"Esc p w Esc" puis "Ctrl Enter"

(*) Exercice 2.27 Avec Mathematica, faire le graphe de

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & si \;\; x \leq -1 \\ x^3 & si \;\; |x| < 1 \\ -x+3 & si \;\; x \geq 1 \end{cases}$$

2.4 Opérations sur les fonctions

On peut évidemment comparer des fonctions sur un intervalle I, on peut les sommer, les multiplier ou les diviser.
Il faut simplement faire attention à ce que ces fonctions soient définies sur I.

Dans le cas de la division, il faut en plus faire attention aux points où la fonction au dénominateur s'annule !!

Exercice 2.28 Esquisser le graphe de

$$S_1(x) = f(x) + g(x)$$
$$S_2(x) = f(x) \cdot g(x)$$

où $f(x) = x$ et $g(x) = \sin(x)$

Exercice 2.29 Donner le domaine et l'image de $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ où :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto y = f(x) = x^2$$

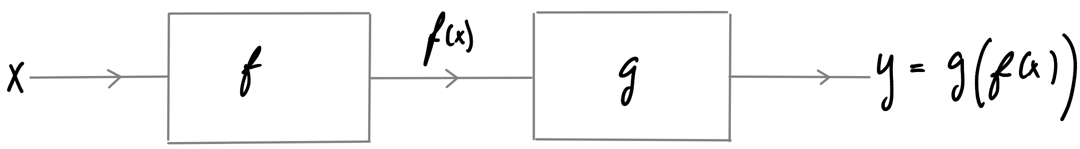
$$g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad x \longmapsto y = g(x) = \sqrt{x}$$

En plus des opérations élémentaires citées ci-dessus, il est intéressant de **composer** et **inverser** des fonctions.
Plus loin, nous apprendrons également à "dériver" et "intégrer" des fonctions

2.4.1 Composition des fonctions

Il est facile de comprendre la **composition** des fonctions si on considère ces dernières comme des opérateurs (boîtes) qui reçoivent une valeur par un canal d'entrée, effectuent toujours les mêmes opérations et restituent une autre valeur par un canal de sortie :

La composition des fonctions f et g consiste simplement à brancher "en série" les deux "boîtes" :



On appellera h la **fonction composée**. On note souvent :

$$h(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

symbole de composition de fonction

Remarque : Si f est une fonction de $A \longrightarrow B$
et g " " " $C \longrightarrow D$
Alors $h = g \circ f$ est une fonction de $A \longrightarrow D$
pour autant que l'ensemble image I de f soit dans C
$I = f(A) \subseteq C$

Exemple Soient :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = f(x) = x^2$$
$$I_f = \mathbb{R}^+$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = g(x) = \sin(x)$$
$$I_g = [-1, 1]$$

On considère :

$h_1(x) = (f \circ g)(x)$: Comme $I_g \subset \mathbb{R}$, pas de soucis !

On a : $$h_1 : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = [\sin(x)]^2 \equiv \sin^2(x)$$
↳ notation courante !

$h_2(x) = (g \circ f)(x)$: Comme $I_f \subset \mathbb{R}$, ok !

On a : $$h_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = \sin(x^2)$$

Remarque très importante : $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$

Exercice 2.30

Soient :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] \qquad x \longmapsto y = \cos(x)$$

$$g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \qquad x \longmapsto y = \sqrt{x}$$

Définir $h(x) = (g \circ f)(x)$, son domaine et son image.

Exercice 2.31 (important !)

(A) Décomposer $z(x) = \sin\left(\ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right)$ en une composition de 5 fonction : $a(x)$; $b(x)$; $c(x)$; $d(x)$; $e(x)$

Bien préciser l'expression fonctionnelle de chacune de ces fonctions !

(B) Ecrire sous forme de composition, en essayant de rendre maximum le nombre de composition

1) $y = \left(x^2 + 3x\right)^{\frac{1}{3}}$ 2) $y = \dfrac{1}{(x-3)^4}$ 3) $y = \left(x^4 - 2x^2 + 5\right)^5$ 4) $y = \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+4} + 2}$

Exercice 2.32

Soient les fonctions:

1) $f(x)=\sqrt{x+5}$ et $g(x)=\sqrt{x+5}$

2) $f(x)=\dfrac{2x}{x-4}$ et $g(x)=\dfrac{x}{x+5}$

a) Définir $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$ et $(f/g)(x)$.

b) Quel est le domaine de définition de $f+g, f-g, f\cdot g$?

c) Quel est le domaine de définition de f/g ?

(*) **Exercice 2.33**

On considère les fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$f(x)=x^3,\quad g(x)=x-1,\quad h(x)=\frac{1}{x^2-1}\quad et\quad k(x)=\frac{x^2}{1-x}$$

a) Préciser le domaine de définition de chacune de ces fonctions et esquisser leur graphe.

b) Ces fonctions sont-elles bijectives ? (de $D \to \mathbb{R}$)

c) Ces fonctions sont-elles paires ? impaires ?

(*) **Exercice 2.34**

Soient les fonctions $f(x) = x^2 - 3x$ *et* $g(x) = \sqrt{x+2}$

Chercher $(f \circ g)(x)$ et le domaine de définition de $(f \circ g)$.

Chercher $(g \circ f)(x)$ et le domaine de définition de $(g \circ f)$.

2.4.2 Fonctions réciproques

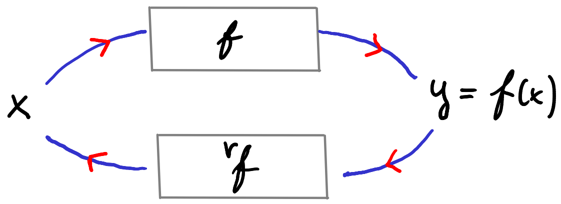
Soit : $f : D \longrightarrow F$
$\quad x \longmapsto y = f(x)$ si f est **bijective**

Alors on peut trouver ${}^r f$, la **fonction réciproque** de f, telle que

$$\left(f \circ {}^r f\right)(x) = \left({}^r f \circ f\right)(x) = I(x)$$

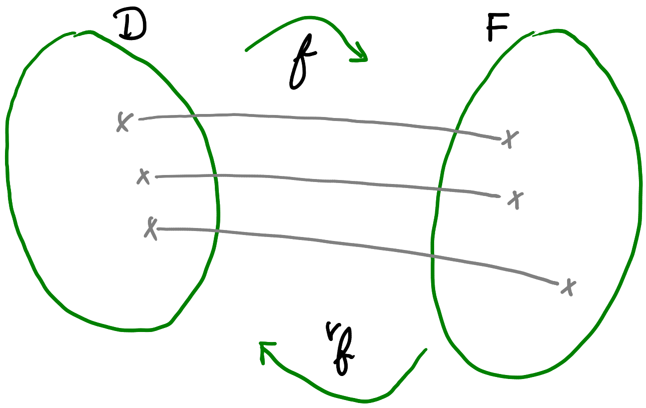
et I est la **fonction identité**, c'est-à-dire que $I(x) = x$.

Donc :



Ou encore : $x \overset{f}{\longmapsto} y \overset{{}^r f}{\longmapsto} x$

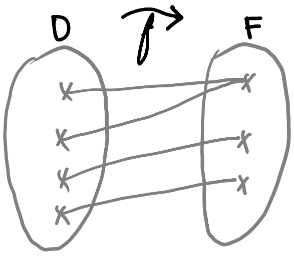
Du point de vue des ensembles on a :



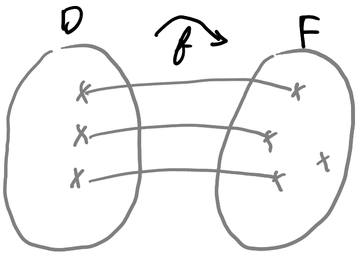
$\boxed{\text{Il est donc clair que, si } f : D \to F, \text{ alors } {}^r f : F \longrightarrow D}$

Exercice 2.35 Pourquoi f doit-elle être bijective pour que ${}^r f$ existe ?

Considérer :



et



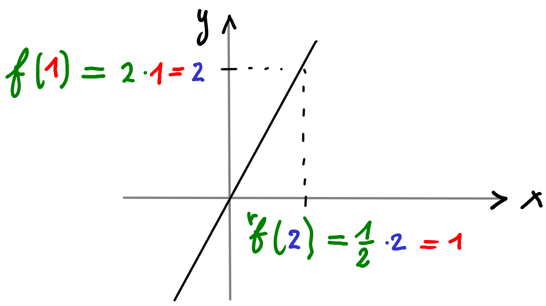
2.4.3 Réciproque des fonctions bijectives

On aborde ici le problème pratique : si on connaît $f(x)$ bijective, comment trouver ${}^r f(x)$?

Procéder :

1. Résoudre $y = f(x)$ par rapport à x
2. Echanger le nom des variables x et y

L'échange du nom des variables permet de bien considérer f et ${}^r f$ comme des fonctions différentes, avec chacune un graphe différent !! Sans "échange" : $y = f(x) = 2x$ et $x = {}^r f(y) = \frac{1}{2} y$ ont le même graphe :



Exemple : $$f : [+1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto y = \sqrt{x-1}$$

Sur les ensembles indiqués, f est bien **bijective**, on peut donc l'inverser (≡ trouver sa réciproque) !

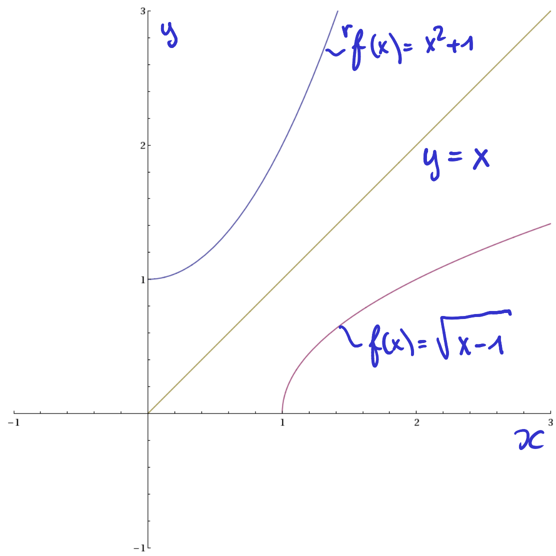
① : Résoudre par rapport à x : $y^2 = x - 1 \Rightarrow x = y^2 + 1$

② : Echanger les variables et inverser Domaine et Image :

$${}^{r}f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [+1, \infty[$$
$$x \longmapsto y = x^2 + 1$$

Traçons encore le graphe de $f(x)$ et celui de ${}^{r}f(x)$:

```
Plot[{x^2 + 1, √(x - 1), x}, {x, 0, 3}, AspectRatio → Automatic, PlotRange → {{-1, 3}, {-1, 3}}]
```



Les graphes de f et ${}^{r}f$ sont **symétriques** par rapport à la droite $y = x$

Le domaine de ${}^{r}f$ est l'image de f et vice-versa

Exercice 2.36 Dans l'exemple qui précède, vérifier que

$$(f \circ f)(x) = I(x)$$

Exercice 2.37 Déterminer la fonction réciproque $f^{-1}(x)$ et faire une représentation graphique de la fonction et de sa réciproque sur le même système d'axes :

$$\begin{aligned} f :\ & \mathbb{R}^{+} \to [-3;\infty[\\ & x \mapsto f(x) = y = x^2 - 3 \end{aligned}$$

2.4.4 Réciproque des fonctions non bijectives

Si f n'est pas bijective, on peut essayer de la rendre bijective en modifiant son domaine et/ou son image

Exemple :
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = x^2$$

(a) $x = 1$ et $x = -1$ ont même image !
(b) $y = -2$ n'est image d'aucun élément !

$\Rightarrow$ NON BIJECTIVE

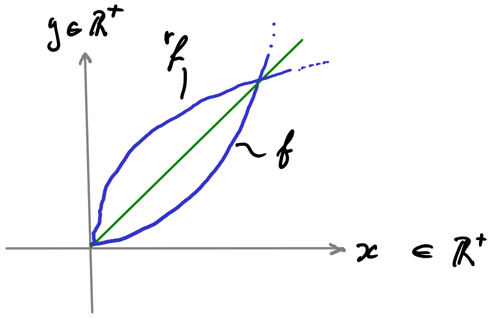
Modifions donc le domaine pour résoudre le problème (a) :

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = x^2$$

Ok, tous les éléments de $\mathbb{R}^+$ ont des images différentes ! Mais ce n'est pas suffisant, il faut encore résoudre le point (b) :

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto y = x^2$$

Maintenant f est bijective et donc inversible ! Inversons f graphiquement en utilisant la propriété de symétrie par rapport à la droite $y = x$:



(x) Exercice 2.38

Trouver les fonctions réciproques des fonctions suivantes après avoir choisi le domaine de définition et l'ensemble image appropriés (c'est-à-dire ceux pour lesquels la fonction est bijective) :

a) $f(x) = x$ b) $f(x) = x^2 + 1$ c) $f(x) = x^3 - 1$

d) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

2.4.5 Quelques réciproques à connaître

$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto y = x^2$	$^r f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto y = \sqrt{x}$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $x \mapsto y = e^x$	$^r f : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = \ln(x)$
$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$, $x \mapsto y = \sin(x)$	$^r f : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \mapsto y = \arcsin(x)$
$f : [0,\pi] \mapsto [-1,1]$, $x \mapsto y = \cos(x)$	$^r f : [-1,1] \to [0,\pi]$, $x \mapsto y = \arccos(x)$
$f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = \tan(x)$	$^r f : \mathbb{R} \to [-\pi/2, \pi/2]$, $x \mapsto y = \arctan(x)$
$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \mapsto y = \frac{1}{x}$	$^r f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \mapsto y = \frac{1}{x}$

Exercice 2.39 : Regardez la fonction $y = \frac{1}{x}$! On dit qu'elle est "autoinverse" ! Quelle propriété doit avoir son graphe ?

Résumé sur les fonctions réciproques :

Pour trouver la réciproque de f :

1. S'assurer que f est bijective. Redéfinir domaine et image, si nécessaire !

2. Résoudre $y = f(x)$ pour x (trouver $x = \dots$)

3. Echanger le nom des variables x et y

4. Vérifier que $\left(f^{r} \circ f\right)(x) = I(x) = x$

5. Vérifier que le graphe de f^{r} et celui de f sont symétriques par rapport à la droite $y = x$

6. S'assurer que le domaine de f est l'image de f^{r} et vice-versa !

2.5 Fonctions continues

On peut donner une définition précise d'une fonction continue sur un intervalle donné. Mais nous allons opter pour une définition simple et très intuitive:

> Une fonction f est continue sur un intervalle I si on peut tracer son graphe, sur I, sans lever le crayon

Mais comment dire qu'une fonction est continue en un point donné ?
Pas si simple ! On comprend bien qu'elle est continue en x_0 si on peut tracer autour de x_0 "un petit bout de graphe" sans lever le crayon !
Donc :

> f est continue en x_0 s'il existe un intervalle ouvert, contenant x_0, sur lequel f est continue

Réflexion: Pourquoi, dans la définition ci-dessus de la continuité en un point, parle-t-on d'intervalle ouvert ?

2.5.1 Les discontinuités

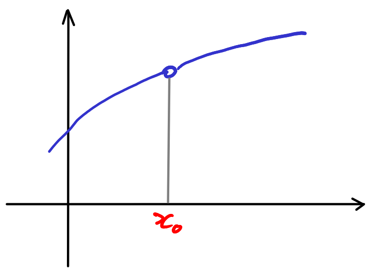
> f non continue en x_0, est dite discontinue en x_0

Mais il existe des discontinuités de différents types :

1. Discontinuités réductibles : Type trou.

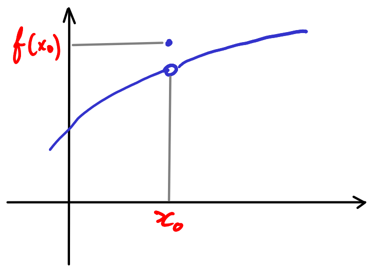
Deux cas :

(a)



$f(x_0)$ n'est pas définie

(b)



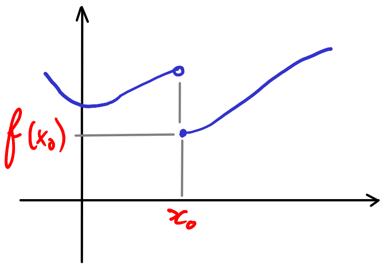
$f(x_0)$ est "séparé" du reste !

Exemple : $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x-1}$ a une discontinuité de type trou en $x=1$!

En effet : $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x-1} = \dfrac{(x-3)(x-1)}{x-1}$

Cette fonction est identique à $\tilde{f}(x) = x-3$ à ceci près que $f(x)$ n'est pas définie en $x=1$!

2. Discontinuités de type "saut"



$\circ$: indique la valeur manquante en x_0

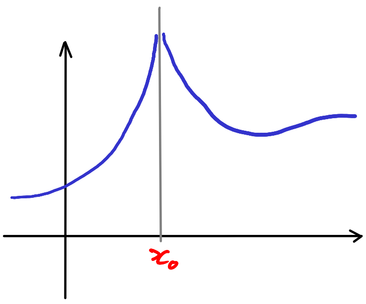
$\bullet$: indique la valeur en x_0

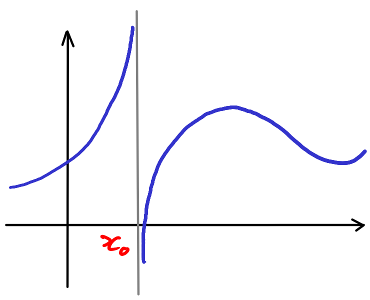
Exercice 2.40 Esquisser le graphe de $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x < 1 \\ x^2 & , x \geqslant 1 \end{cases}$

et celui de $g(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x \leqslant 1 \\ x^2 & , x > 1 \end{cases}$

3. Discontinuités infinies

dites aussi irréductibles ou asymptotiques



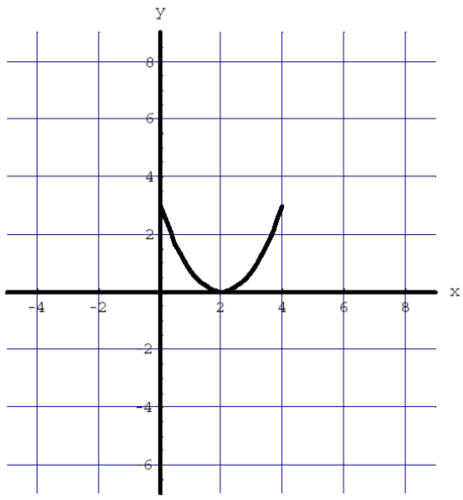


Quand on s'approche de x_0 la fonction va vers plus ou moins l'infini !

Exercice 2.41 Esquisser le graphe de $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x-2} = \dfrac{(x-3)(x+1)}{x-2}$

Exercice 2.43

Si le graphique de la figure ci-contre est celui d'une fonction f sur $[0\,;\,4]$, dessiner le graphique de :



a) $y=f(x+3)$ b) $y=f(x-3)$ c) $y=f(x)+3$ d) $y=f(x)-3$

e) $y=-3f(x)$ f) $y=-\dfrac{1}{3}f(x)$ g) $y=f(3x)$ h) $y=f\left(\dfrac{1}{3}x\right)$

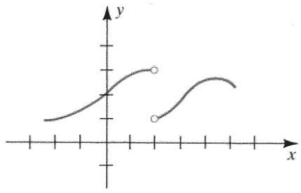
i) $y=-f(x+2)-3$ j) $y=f(x-2)+3$

Important de consulter le corrigé !!

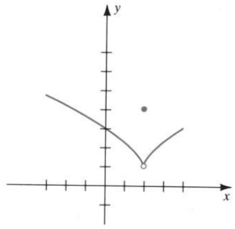
Exercice 2.44

Voici les graphes de différentes fonctions. Qualifier les discontinuités de f de réductibles (type trou), par sauts ou infinies (asymptotiques).

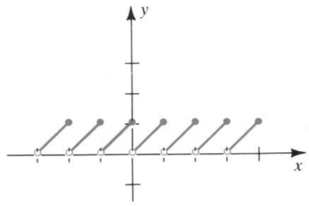
1.



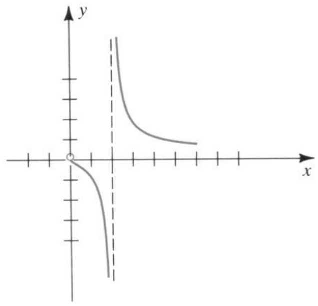
2.



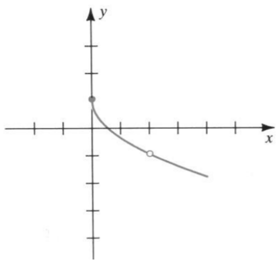
3.



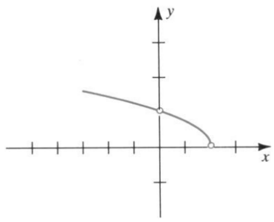
4.



5.



6.



Réponses :

1) saut
2) trou
3) saut
4) infinie
5) trou
6) trou

(*) **Exercice 2.45**

Qualifier les discontinuités de f de réductibles, par sauts ou infinies :

1. $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si\ x<1 \\ 4-x & si\ x\geq 1 \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} |x+3| & si\ x\neq -2 \\ 2 & si\ x=-2 \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si\ x<1 \\ 1 & si\ x=1 \\ x+1 & si\ x>1 \end{cases}$

2.5.2 Expression fonctionnelle d'une grandeur variant continuement.

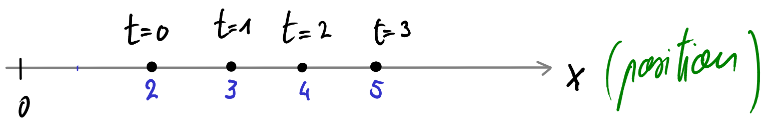
Il existe une infinité de situations très différentes, pour lesquelles il est utile d'exprimer une grandeur comme une fonction continue d'une autre grandeur ! Voici simplement un exemple et un exercice pour illustrer cette affirmation :

Exemple classique :

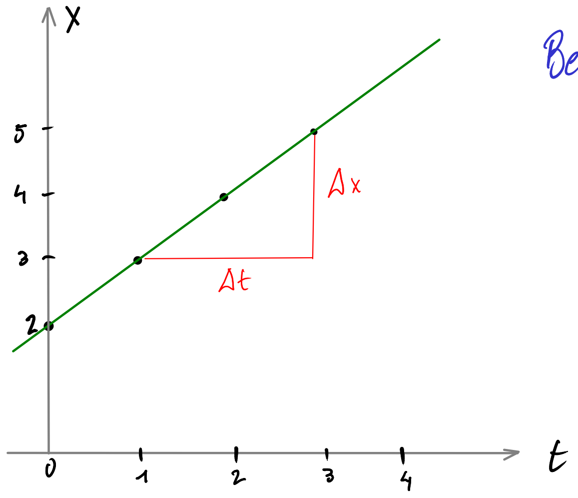
Position x d'un véhicule en fonction du temps t : $x = f(t)$

Deux représentations possibles :

① "Réaliste" mais très incomplète et pas très utile.



② Représentation de la fonction $x = f(t)$



Beaucoup plus d'informations :

- La pente donne une idée de la vitesse, qui est donc constante !
- Il est facile d'extrapoler la position pour tout temps t

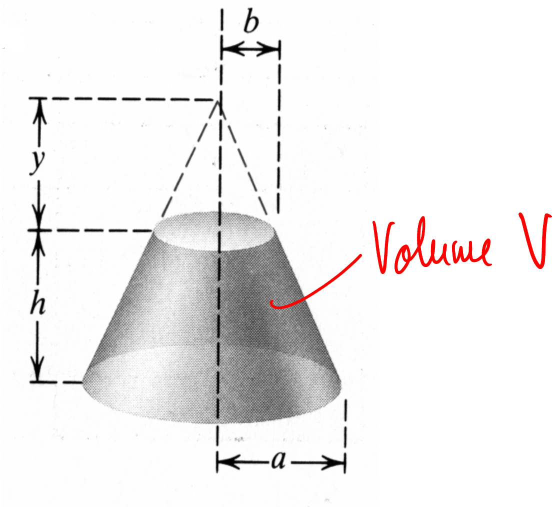
On peut même facilement, dans ce cas, trouver l'expression fonctionnelle de $f(x)$:

$$x = f(t) = v \cdot t + 2 = \underbrace{\frac{\Delta x}{\Delta t}}_{v=1} \cdot t + 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = t + 2}}$$

(*)

Exercice 2.46

On considère le "tronc de cône" de la figure ci-contre :



1) Exprimer y en fonction de h, a et b.

2) Exprimer le volume V en fonction de h, a et b :

Remarque : le principal intérêt de connaître le volume V en fonction des dimensions a, b et h, pourrait être celui d'optimiser les dimensions du "tronc de cône" pour rendre le volume maximum ou minimum, tout en respectant certaines contraintes sur les dimensions a, b et h.

2.6 Les Limites

2.6.1 Naissance du concept de limite

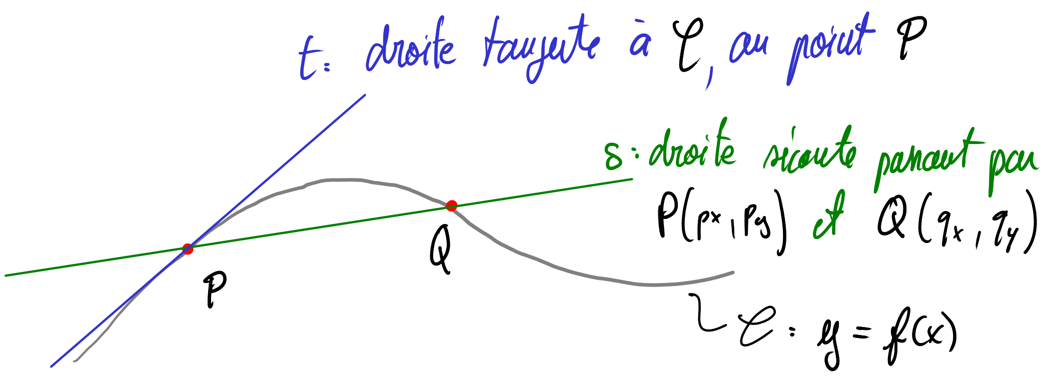
Historiquement, le concept de limite a été développé pour résoudre 2 problèmes dits :

- Problème de Leibnitz
- Problème de Newton

Le concept de limite est à la base d'une branche des Mathématiques qu'on nomme l'analyse. (Ce cours de maths 1b est une introduction à l'analyse)

Problème de Leibnitz :

> Trouver une méthode générale qui permette de donner l'équation de la droite tangente à une courbe, en un point donné.



Idée générale : on peut obtenir la droite tangente t comme le cas limite d'une droite sécante s passant par P et Q, quand Q s'approche de P, le long de la courbe $\mathcal{C}$.

Cette idée vraiment excellente posait d'énormes problèmes. La pente α_s de la droite sécante s s'écrit :

$$\alpha_s = \frac{q_y - p_y}{q_x - p_x}$$

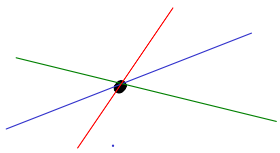
Quand on fait glisser Q vers P on obtient la pente α_t de la droite tangente, mais hélas

$$\alpha_t = \alpha_s = \frac{q_y - p_y}{q_x - p_x} = \frac{0}{0} \quad !! \quad ??$$

↳ Quand Q rejoint P

<u>A méditer</u> : la pente de la tangente en P semble indéterminée ! .... et pourtant la droite tangente existe !

Ce qui est indéterminé c'est la tangente à un point isolé !



: toutes ces droites pourraient être considérées tangentes au point •

Problème de Newton

Comment définir la vitesse instantanée ?

$s(t_0)$: Position du mobile au temps t_0

$s(t)$: Position du mobile au temps t

Vitesse moyenne : $v_m = \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$

Comment définir la vitesse instantanée au temps t_0 ?!

Impossible de dire que $t = t_0$, nous aurions une division par 0 !

Newton résout son problème en proposant de faire tendre t vers t_0 ($t \to t_0$) sans jamais atteindre t_0. Mais t doit pouvoir s'approcher de t_0 autant qu'on veut.

Il regarde alors la valeur de $v_m = \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$.

S'il existe une valeur v_i telle que $v_m \longrightarrow v_i$ quand $t \to t_0$, alors v_i sera la vitesse instantanée

Exemple : Supposons que $s(t) = 3t - 5$ (mouvement uniforme)

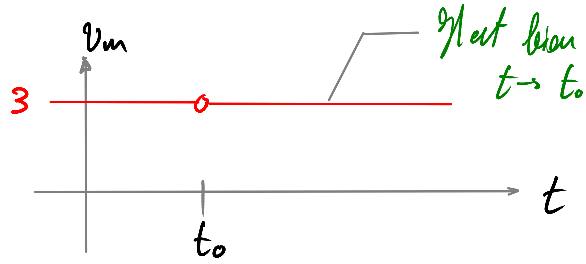
$$v_m = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \frac{3t - 5 - (3t_0 - 5)}{t - t_0} = \frac{3(t - t_0)}{t - t_0}$$

Important : v_m n'est pas définie pour $t = t_0$, mais pour $t \neq t_0$ on peut simplifier la fraction et on aura :

$$v_m = 3 \quad \forall t \neq t_0$$

Donc $v_m \longrightarrow 3$ quand $t \to t_0$

Le graphe de $v_m(t)$ est simplement :



Il est bien clair que $v_m \to 3$ quand $t \to t_0$ puisque $v_m = 3 \ \forall t \neq t_0$

(*) **Exercice 2.47** Trouver la vitesse instantanée au temps t_0 d'un mobile dont la position est donnée en fonction du temps par : $s(t) = \frac{1}{2} g t^2$

Stimulés par ces problèmes les mathématiciens ont précisé le concept de limite et ont démontré certaines "règles de calcul" avec les limites qui nous seront bien utiles. Nous allons voir cela après avoir précisé les notations et défini de manière un peu plus précise l'objet de notre attention.

2.6.2 Définitions et notations

Les 2 exemples historiques que nous venons de voir se généralisent en parlant de limite d'une fonction $f(x)$ quand $x \to x_0$ qu'on note :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

[Dans l'exercice 2.47 ci-dessus nous avons obtenu pour la vitesse moyenne $v_m(t) = \dfrac{\frac{1}{2}g(t^2 - t_0^2)}{t - t_0}$ et la vitesse instantanée en t_0 s'écrit

$$\lim_{t \to t_0} \underbrace{\frac{\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) \cdot g}{t - t_0}}_{f(x)} = v_i$$

Il s'agit bien de trouver $\lim_{t \to t_0} f(t) = v_i$]

Précisons :

On dit que x tend vers a quand x s'approche d'autant qu'on veut de a, tout en restant différent de a.

On note $x \longrightarrow a$ (x tend vers a)

x tend vers a par la gauche : $x \longrightarrow a^-$ — Si x s'approche de a tout en restant strictement inférieur à a

x tend vers a par la droite : $x \longrightarrow a^+$ — Si x s'approche de a tout en restant strictement supérieur à a

2.6.3 Limite d'une fonction en un point

Soit $f : E \longrightarrow F$
$\quad x \longmapsto y = f(x)$
si $y \longrightarrow b$ (tend vers) lorsque $x \longrightarrow a$ (tend vers)

alors la limite de f lorsque $x \longrightarrow a$ est b

On note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

ou bien : $f(x) \xrightarrow{x \to a} b$

Cette manière de définir la limite d'une fonction, bien que suffisante pour nous, est loin de satisfaire un mathématicien. Pour les plus curieux, voici la définition complète de limite d'une fonction laquelle sert de base pour les démonstrations des propriétés des limites (démonstrations que nous ne ferons pas ☹)

Soient : I_a un intervalle ouvert contenant a
et
$f(x)$ une fonction définie pour tout $x \in I_a$
sauf éventuellement pour $x = a$.

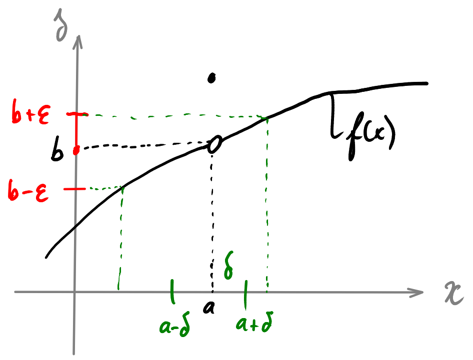
Alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ si et seulement si

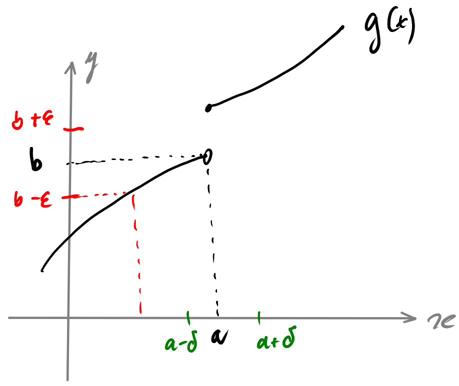
pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\delta > 0$

tel que $|f(x) - L| < \varepsilon$ si $0 < |x - a| < \delta$

(*) Exercice 2.48 (FACULTATIF)

Se convaincre que la "définition complète" ci-dessus permet de conclure que $\lim_{x \to a} f(x) = b$ alors que $\lim_{x \to a} g(x) \neq b$.





2.6.4 Limite à gauche et limite à droite

$\lim_{x \to a^-} f(x) = b$ est la limite de f à gauche

$\lim_{x \to a^+} f(x) = b$ est la limite de f à droite

Théorème :

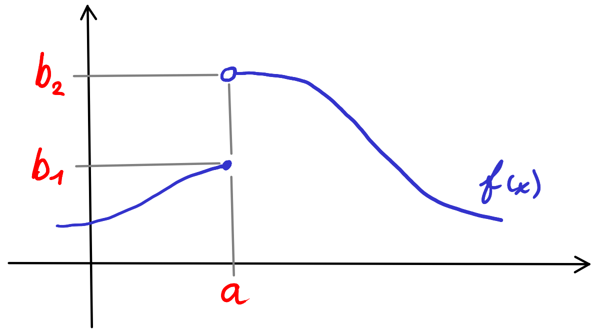
$\lim_{x \to a} f(x)$ existe si et seulement si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

La limite de $f(x)$ quand x tend vers a existe si et seulement si la limite à gauche égale la limite à droite

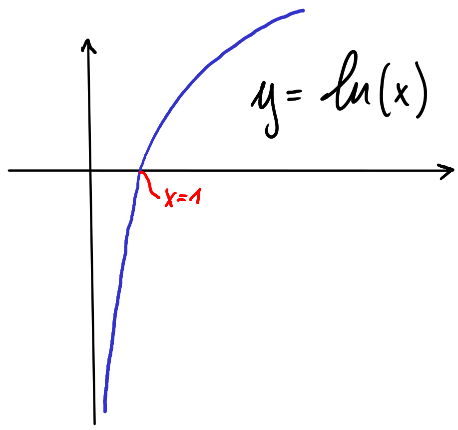
2.6.5 **Exemples de non-existence de la limite**

1.



$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b_1 \\ \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b_2 \end{array}\right\} \text{ mais } b_1 \neq b_2 \text{ donc } \lim_{x \to a} f(x) \text{ n'existe pas !!}$$

2.



On a bien $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) =$ "$-\infty$"

mais comme $\ln(x)$ n'est pas définie pour $x \leq 0$, la limite à gauche n'existe pas !

On a donc $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x)$ n'existe pas !

2.6.6 Limite d'une fonction discontinue

Même si $f(x_0)$ n'existe pas (n'est pas définie), la limite de $f(x)$ quand $x \to x_0$ peut exister ! Par exemple :

$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ est discontinue en $x=2$.

Pourtant $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-2^2}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$

$$= \lim_{x\to 2^+} (x+2) = 4$$

De plus : $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x+2) = 4$

$\left.\right\}$ $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ existe !

Exercice 2.49 Quelle est la limite quand $x \to 2$ de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x<2 \\ 2 & \text{si } x=2 \\ x+1 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

(*)

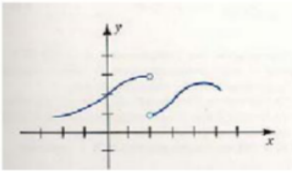
Exercice 2.50

1) Qualifier les discontinuités des fonctions suivantes (réductibles (type trou), par sauts ou infinies (type asymptotique)).

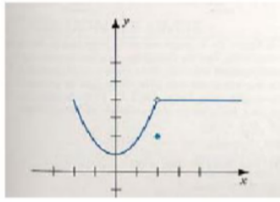
2) Donner, si elles existent, les limites suivantes en les lisant sur les graphes :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \;;\quad \lim_{x\to 2^+} f(x) \;;\quad \lim_{x\to 2} f(x) \;;\quad \lim_{x\to 0^-} f(x) \;;\quad \lim_{x\to 0^+} f(x) \;;\quad \lim_{x\to 0} f(x)$$

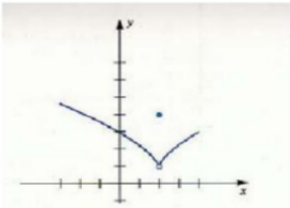
a)



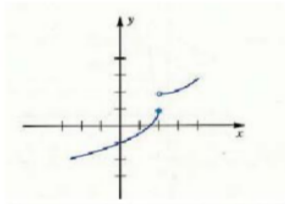
b)



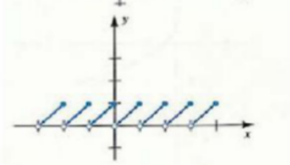
c)



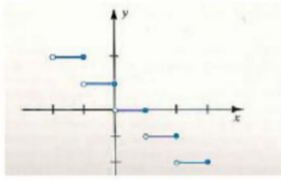
d)



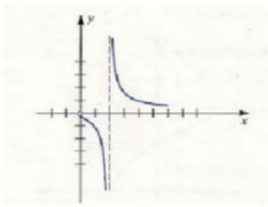
e)



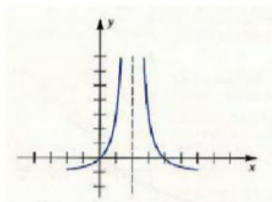
f)



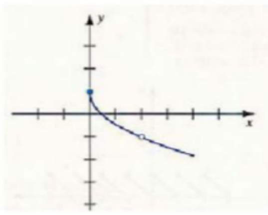
g)



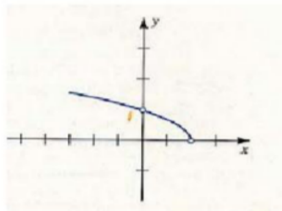
h)



i)



j)



2.6.7 Limite à l'infini

Quand x croît sans bornes (devient arbitrairement grand) on note

$$x \longrightarrow +\infty$$

Inversément, quand x décroît sans bornes, on note

$$x \longrightarrow -\infty$$

Remarquez que cette formulation est un peu abusive car x ne s'approche pas de $\pm\infty$! En fait il en reste toujours infiniment distant.

Il se peut que, quand $x \longrightarrow \pm\infty$, $f(x)$ reste bornée et s'approche d'une certaine valeur b.

On écrit alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ et on dit que b est la limite à l'infini de $f(x)$

(Idem pour $x \longrightarrow -\infty$, évidemment)

Exercice 2.51 Trouver la limite quand $x \longrightarrow +\infty$ et quand $x \longrightarrow -\infty$ de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2$$

2.6.8 Les limites infinies

Parfois $f(x)$ <u>croît</u> ou <u>décroît</u> indéfiniment quand $x \longrightarrow a^+$ ou bien $x \longrightarrow a^-$. On écrira alors

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \longrightarrow +\infty \quad \text{ou bien} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) \longrightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \longrightarrow +\infty \quad \text{ou bien} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) \longrightarrow -\infty$$

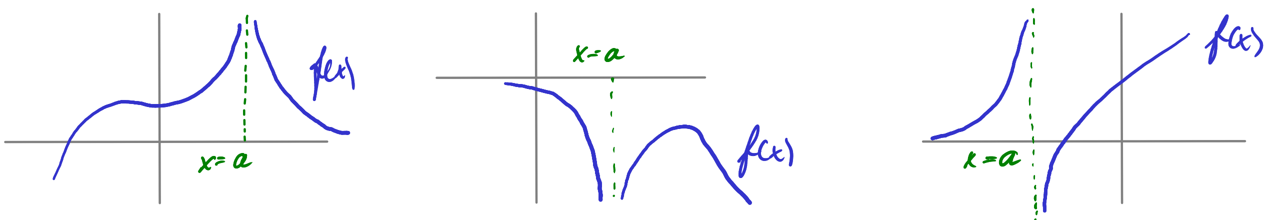
Toutefois, pour pouvoir écrire

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \text{il faut que} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \underline{+\infty} \\ \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \underline{+\infty} \end{array} \right.$$

et bien sûr, pour que

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad \text{il faut que} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \underline{-\infty} \\ \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \underline{-\infty} \end{array} \right.$$

<u>Exemple graphique:</u>



$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \nexists$

On alors la définition suivante :

La droite verticale $x = a$ est alors appelée **ASYMPTOTE VERTICALE** de la fonction $f(x)$

(*) <u>Exercice 2.52</u> Donner $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ $\lim_{x \to 1} f(x)$

pour $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

2.6.9 Propriétés des limites. (à connaître absolument !)

Voici une série de 5 propriétés des limites qui aident à calculer les limites.

Malheureusement, les démonstrations, qui se font à partir de la "définition complète", sortent un peu du cadre de ce cours ☹

P1

La limite d'une constante est égale à cette constante :

$$\lim_{x \to a} C = C$$

P2

La limite d'une somme est la somme des limites

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) + g(x) \right) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

P3

> La limite d'un produit est le produit des limites
>
> $$\lim_{x \to a} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

Remarque : Si dans P3 on pose $g(x) = C$ (constante), il nous vient :

$$\lim_{x \to a} \left(C \cdot f(x) \right) = \lim_{x \to a} C \cdot \lim_{x \to a} f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ P1}}{=} C \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

d'où la règle suivante.

P3b

> On peut "sortir" de la limite les facteurs constants.
>
> $$\lim_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

P4

> La limite d'un quotient est le quotient des limites :
>
> $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$
>
> pour autant que $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

P5

Si f est continue, on peut <u>permuter</u> la limite et la fonction.

$$\lim_{x \to a} f(\quad) = f\left(\lim_{x \to a} \quad\right)$$

Autrement dit : $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$

Exemples

1) $\lim_{x \to a} x = a$

2) $\lim_{x \to a} (mx + b) \overset{P2}{=} \lim_{x \to a} m \cdot x + \lim_{x \to a} b$

$\overset{P3b}{=} m \lim_{x \to a} x + \lim_{x \to a} b$

$\overset{P1}{=} m \cdot a + b$

3) $\lim_{x \to a} x^n \overset{P3}{=} \lim_{x \to a} x \cdot \lim_{x \to a} x \cdot \ldots \cdot \lim_{x \to a} x$

$= \left(\lim_{x \to a} x\right)^n = a^n$

On peut aussi invoquer la propriété P5 :

$x^n = g(f(x))$ ou $f(x) = x$ et $g(x) = x^n$

$\lim_{x \to a} x^n = \left(\lim_{x \to a} x\right)^n$

4) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} \overset{P5}{=} \sqrt[n]{\lim_{x \to a} x} = \sqrt[n]{a}$

5) $\lim_{x \to a} [f(x)]^n \overset{P5}{=} \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$ pour autant que $\lim_{x \to a} f(x)$ existe !!

6) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} \overset{P5}{=} \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$

⚠ Souvenez-vous : si n impair on peut toujours prendre la $\sqrt[n]{\ast}$. Si n pair, il faut que $\ast \geq 0$ donc :

si n paire, il faut que $\lim_{x \to a} f(x) \geq 0$

(*) **Exercice 2.53**

Calculer, si elle existe, la limite suivante, <u>en indiquant pour chaque étape la propriété utilisée.</u>

$\lim_{x \to 2} (5x^3 + 3x^2 - 6)^2$ (n'oubliez pas de comparer lim à gauche et limite à droite)

(*) **Exercice 2.54** Vérifiez si elle existe, et calculez la limite suivante :

$$\lim_{x \to 5} \sqrt{\frac{x^2-25}{x-5}}$$

(*) **Exercice 2.55** Vérifier si elle existe et calculer $\displaystyle\lim_{x \to -3} \frac{|x+3|}{x+3}$

(souvenez-vous de la définition de $|x|$!!)

Remarque : Attention lors du calcul des limites avec Mathematica :

$$\text{Limit}\left[\frac{\text{Abs}[x+3]}{x+3},\ x \to -3\right] \rightsquigarrow 1$$

Raison probable : Mathematica travaille avec $x \in \mathbb{C}$

Donc pour le calcul des limites sur $\mathbb{R}$, il vaut mieux calculer "à la main"

2.6.10 Limites à l'infini pour les fonctions rationnelles

On trouve assez facilement les limites à l'infini des fonctions rationnelles simplement en divisant numérateur et dénominateur par la plus grande puissance de x apparaissant au dénominateur.
Il suffit ensuite d'appliquer les règles du paragraphe 2.6.9.

Exemples : $f(x) = \dfrac{3x^3 - 2x + 1}{x^3 - 3}$

x^3 est la plus grande puissance de x au dénominateur donc :

$$f(x) = \frac{\frac{3x^3 - 2x + 1}{x^3}}{\frac{x^3 - 3}{x^3}} = \frac{\frac{3x^3}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{3}{x^3}}$$

$$= \frac{3 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{3}{x^3}}$$

On prend ensuite la limite $x \longrightarrow \pm\infty$ en appliquant P4 et P2 :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{3}{x^3}} = \frac{3}{1} = 3$$

Voir aussi exercice 2.57 !

Voici de quoi vous exercer au calcul des limites. Les questions marquées d'un ✓ font l'objet d'un corrigé. Pour les autres vous avez seulement la réponse.

Mais avant de vous lancer, remarquez que :

1) Vous n'aurez probablement pas le temps de faire tous les exercices. Donnez la priorité aux exercices corrigés.

2) Il est préférable de faire 3 exemples soigneusement plutôt que 10 de manière approximative

3) Le calcul des limites est parfois trivial. Les cas intéressants sont ceux qui conduisent à des expressions indéterminées (comme pour les problèmes de Leibnitz et Newton).
Dans ces cas, les seuls "outils" que vous avez actuellement sont : - simplification par factorisation
- identités remarquables

4) Les limites sont parfois difficiles à déterminer.
Nous verrons plus loin des techniques un peu plus puissantes que celles dont vous disposez actuellement

(Règle de L'Hospital, développement de Taylor)

Exercice 2.56

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to -2} (3x-1)$ b) $\lim_{x\to 4} x$ c) $\lim_{x\to 100} 7$

d) $\lim_{x\to -1} \pi$ e) $\lim_{x\to -1} \frac{x+4}{2x+1}$ f) $\lim_{x\to -3} \frac{(x+3)(x-4)}{(x+3)(x+1)}$

g) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x-2}$ h) $\lim_{r\to 1} \frac{r^2-r}{2r^2+5r-7}$ i) $\lim_{k\to 4} \frac{k^2-16}{\sqrt{k}-2}$

j) $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$ k) $\lim_{\Delta x\to -2} \frac{\Delta x^3+8}{\Delta x+2}$ l) $\lim_{x\to -2} \frac{x-4}{x^2-2x-8}$

Réponses:

a) -7 ; b) 4 ; c) 7 ; d) π ; e) -3 ; f) $\frac{7}{2}$

g) 0 ; h) $\frac{1}{9}$; i) 32 ; j) $2x$; k) 12 ; l) n'existe pas !

(*) **Exercice 2.57**

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-3x+1}{2x^2+4x-7}$ ✓

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4-7x}{2+3x}$ ✓

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2-3}{4x^3+5x}$ ✓

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^3+2x}{2x^2-3}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2-x^2}{x+3}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{8+x^2}{x(x+1)}}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x-3}{\sqrt{x^2+1}}$ ✓

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ ✓

Réponses:

$a)\ \dfrac{5}{2}$ $\quad b)\ -\dfrac{7}{3}$ $\quad c)\ 0$

$d)$ -∞ $\quad e)\ +\infty$ $\quad f)\ 1$

$g)$ -4 $\quad h)$ n'existe pas

*

Exercice 2.58

a) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} (x^2+3)(x-4)$

b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{6x-1}{2x-9}$

c) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2+5x-3}{6x^2-7x+2}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{(x-2)^2}$

e) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x^4-16}$

f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{2\sqrt{x}+x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt[4]{x}+5}$

i) $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt[3]{x^2-5x-4}$

j) $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt[3]{\dfrac{2+5x-3x^3}{x^2-1}}$

k) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{4-\sqrt{16+h}}{h}$

l) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^5-1}$

m) $\lim\limits_{x\to 5^+} \left(\sqrt{x^2-25}+3\right)$

n) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$

o) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$

p) $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{\sqrt[4]{x^2-16}}{x+4}$

Réponses:

a) $5\left(-4+\sqrt{2}\right)$ b) -23 c) -7 d) n'existe pas ! e) $-\dfrac{3}{8}$

f) $-\dfrac{1}{4}$ g) 2 h) $\dfrac{72}{7}$ i) -2 j) -2

k) $-\dfrac{1}{8}$ l) $\dfrac{3}{5}$ m) 3 n) 1 o) -1

p) n'existe pas dans $\mathbb{R}$

2.6.11 Définition de la continuité à l'aide de la notion de limite

Souvenez-vous, sous 2.5 nous avions eu quelques difficultés à définir la continuité en un point. Ici la notion de limite nous vient en aide pour préciser ce concept.

La fonction $f(x)$ est continue en x_0 si et seulement si

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

↳ Pour que ceci ait un sens, il faut que la limite existe (égale à gauche et à droite) et que la fonction soit définie en x_0 !

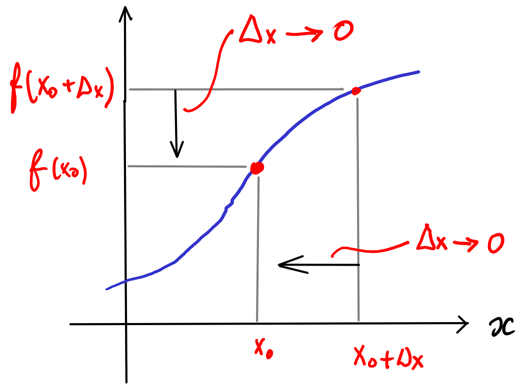
Formulé de manière légèrement différente, cela donne :

Si $\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0+\Delta x) = L$ et $f(x_0) = L$
Alors $f(x)$ est continue en x_0

Remarquez que la seule différence entre "existence d'une limite pour $x \to x_0$" et "continuité en x_0" sont des notions très proches.

Voyons cela sur quelques exemples !

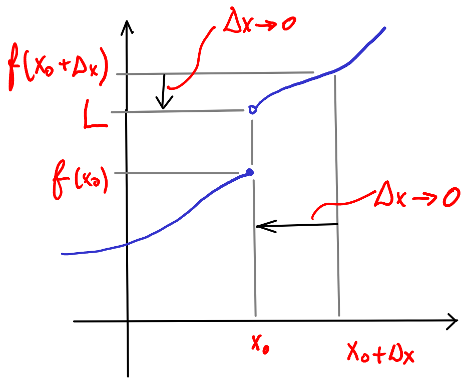
1.



la fonction est continue en x_0 car

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} f(x_0+\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} f(x_0+\Delta x) = f(x_0)$$

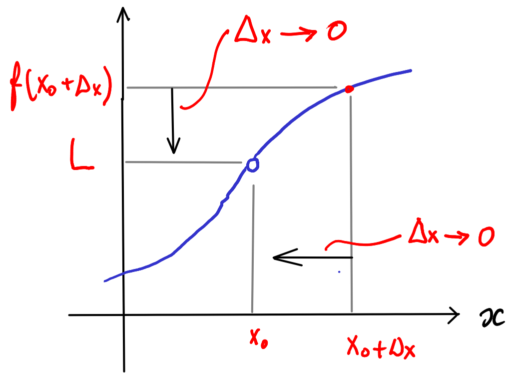
2.



fonction non continue en x_0 car

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} f(x_0+\Delta x) \neq \lim_{\Delta x \to 0^-} f(x_0+\Delta x)$$

3.



la fonction $f(x)$ n'est pas définie en x_0

Elle n'est donc pas continue en x_0

MAIS : $$\lim_{\Delta x \to 0^+} f(x_0+\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} f(x_0+\Delta x) = L$$

(limite à gauche = limite à droite)

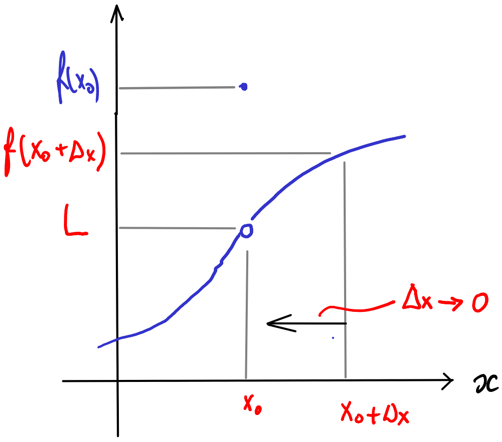
Il est alors possible de redéfinir $f(x)$ pour la rendre continue :

$$f(x) = \begin{cases} L & \text{si } x = x_0 \\ f(x) & \text{si } x \neq x_0 \end{cases}$$

↳ est maintenant continue

C'est pour cette raison que les discontinuités de type "trou" sont dites aussi "réductibles"

4.



la fonction $f(x)$ est définie en x_0

elle n'est pas continue en x_0 (point isolé)

On a bien : $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} f(x_0+\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} f(x_0+\Delta x) = L$

(limite à gauche $\equiv$ limite à droite)

De plus $f(x)$ est définie en x_0. Par contre on a $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0+\Delta x) \neq f(x_0)$

ce qui implique que $f(x)$ n'est pas continue en x_0 comme on le voit clairement sur le graphe.

Exercice 2.59

Expliquer, à l'aide de la notion de limites, pourquoi la fonction f n'est pas continue en x_0 dans chacun des cas ci-dessous :

a) $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$; $x_0 = -2$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & si\ x \neq 3 \\ 4 & si\ x = 3 \end{cases}$; $x_0 = 3$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \neq 3 \\ 0 & si\ x = 3 \end{cases}$; $x_0 = 3$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3} & si\ x \neq 3 \\ 1 & si\ x = 3 \end{cases}$; $x_0 = 3$

2.6.12 Comportement asymptotique des fonctions rationnelles. (pour $x \to \pm\infty$)

Soit $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ une fonction rationnelle

donc $P_m(x)$ et $Q_n(x)$ sont deux polynômes de degré m et n respectivement !

Nous avons vu que, en effectuant la division polynômiale, $f(x)$ peut se mettre sous la forme

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = D(x) + \frac{R(x)}{Q_n(x)}$$

Reste de la division

où $D(x)$ est un polynôme et $\dfrac{R(x)}{Q_n(x)}$ est une fraction rationnelle irréductible

car le $\text{Degré}[R(x)] < \text{Degré}[Q_n(x)]$

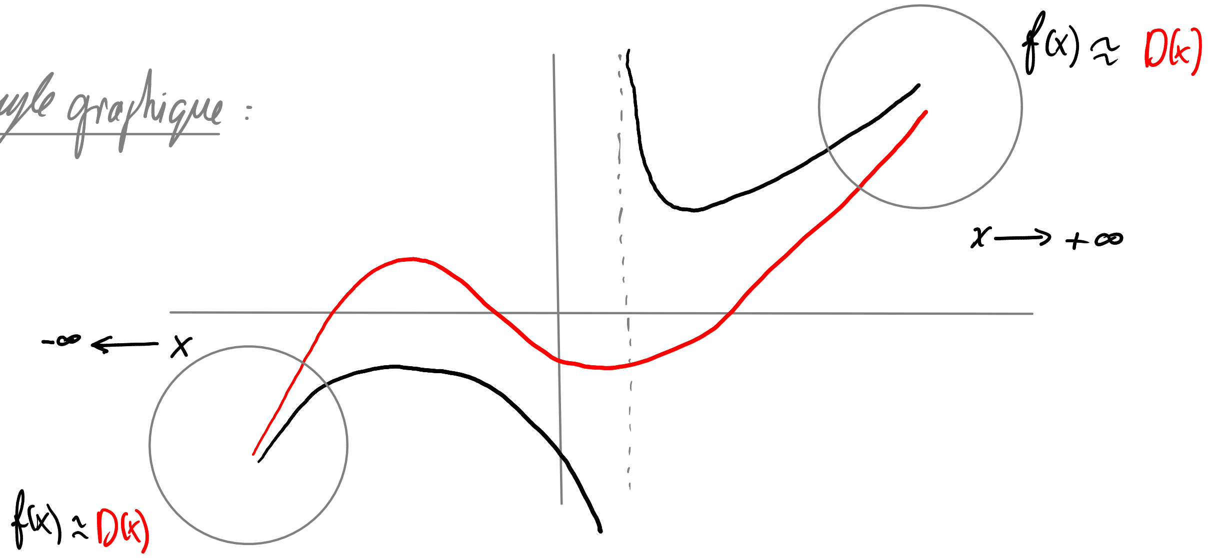
Mais quand $x \to \pm\infty$, la fraction $\dfrac{R(x)}{Q_n(x)} \to 0$

↳ voir exercice 2.60.

On constate donc que, pour $x \to +\infty$ ou bien $x \to -\infty$, la fonction rationnelle $f(x)$ tend vers le polynôme $D(x)$:

$$\underline{\underline{f(x)}} = D(x) + \underbrace{\frac{R(x)}{Q_n(x)}}_{\xrightarrow{x \to \pm\infty}\ 0} \approx \underline{\underline{D(x)}}$$

Exemple graphique :



Exercice 2.60 Vérifier qu'une fraction rationnelle irréductible $I(x)$ tend toujours vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$ l'infini

Indications : Poser $I(x) = \dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n}$ avec $m < n$

et diviser numérateur et dénominateur par x^n.

Faire ensuite $x \longrightarrow +\infty$
$x \longrightarrow -\infty$

(important)

Encore une question pour vérifier que tout est bien compris :

> Indiquez sur le graphe du haut de la page à quoi correspond $\delta(x) = f(x) - D(x)$

Cas particuliers (mais importants)

① : Si le résultat de la division polynômiale est une constante $D(x) = C$ (Polynôme de degré 0)

Alors $f(x)$ a une asymptote horizontale $y = C$

② : Si le résultat de la division polynômiale est un polynôme de degré 1 : $D(x) = Ax + B$

Alors $f(x)$ a une asymptote oblique $y = Ax + B$

Question : la constante C peut être nulle. Dans quels cas ?

Exercice 2.61

Donner les asymptotes horizontales ou obliques des fonctions rationnelles suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{4x^3 - 3x + 3}{x^3 - 2}$

2) $f(x) = \dfrac{3x^2 - x + 4}{3x + 2}$

3) $f(x) = \dfrac{4x^3 - 3x^3 + 3}{x^2 - 1}$

Réponses :

1) $f(x) = 4 + \dfrac{-3x + 11}{x^3 - 2} \Rightarrow y = 4$ est asymptote horiz.

2) $f(x) = x - 1 + \dfrac{6}{3x + 2} \Rightarrow y = x - 1$ est asym. oblique

3) $f(x) = x + \dfrac{x + 3}{x^2 - 1} \Rightarrow y = x$ est asym. oblique

Les termes en gris tendent vers 0 quand $x \to \pm\infty$ (ce sont des fractions irréductibles)

[Remarques : essayez d'utiliser les fonctions PolynomialQuotient et PolynomialRemainder de Mathematica]