# §1　实数

数学分析研究的是实 数集上定义的函数，因此我们首先要掌握实数的基本概念与性质.

一、实数的十进制小数表示

二、实数的大小

三、实数的四则运算

四、实数的阿基米德性

五、实数的稠密性

六、实数与数轴上的点一一对应

七、实数的绝对值与三角形不等式

# 记号与术语

$\mathbf{R}$ : 实数集

$\mathbf{R}_+$ : 正实数集

$\mathbf{R}_-$ : 负实数集

$\mathbf{Q}$ : 有理数集

$\mathbf{Z}$ : 整数集

$\mathbf{N}$ : 自然数集(包含0)

$\mathbf{N}_+$ : 正整数集

$\forall$ : 任意

$\exists$ : 存在

前页 后页 返回

## 一、实数的十进制小数表示

**1. 任何一个实数都可以用十进制小数表示.**

若 $x \in \mathbf{R}_+$, 则 $x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$;

$x \in \mathbf{R}_-$, 则 $x = -a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ .

其中 $a_0 \in \mathrm{N}, a_n \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}, n = 1, 2, \cdots$.

**2. 有限小数** $x = a_0.a_1a_2\cdots a_k$ (其中$a_k \neq 0$), 又可表示为

$$x = a_0.a_1a_2\cdots a_{k-1}(a_k - 1)99\cdots$$

$$= a_0.a_1a_2\cdots a_{k-1}(a_k - 1)\dot{9}.$$

前页 后页 返回

若实数都用无限小数表示，则表达式是唯一的.

即：若 $x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,$

$y = b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots,$

则 $x = y \Leftrightarrow a_n = b_n, n = 0, 1, 2, \cdots.$

用无限小数表示实数，称为正规表示.

3. $Q = \{x \mid x = \frac{m}{n}$,其中 $m, n \in Z, n \neq 0\}$表示有理数集.

$\forall x \in Q$, $x$ 可用循环十进制小数表示，

如 $\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}.$

前页 后页 返回

**定义**：实数x的 n位不足近似；x的n位过剩近似.

**4.** 无理数为无限不循环小数.

如:$\pi = 3.1415926\cdots$;

$x = 0.1010010001\cdots$.

## 二、实数的大小

**定义1** $\forall x, y \in \mathbf{R}_+$， 若

$$x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,\ y = b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$$

是正规的十进制小数表示，规定

$$x > y \Leftrightarrow a_0 > b_0 \text{ 或 } \exists n \in \mathbf{N}_+, \text{使}$$

$$a_0.a_1a_2\cdots a_n = b_0.b_1b_2\cdots b_n, \text{而} a_{n+1} > b_{n+1}.$$

$\forall x, y \in \mathbf{R}_-$, 规定 $x > y \Leftrightarrow -x < -y.$

$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ y \in \mathbf{R}_-$, 规定 $y < 0 < x.$

实数的大小关系有以下性质:

(1) $x > y, x = y, x < y$.

三者必有其中之一成立，且只有其中之一成立.

(2) 若 $x > y$, $y > z$, 则 $x > z$.

即大小关系具有传递性.

注：两个实数x > y的等价条件也可以由命题（课本P2）给出。

## 三、实数的四则运算

有理数集 **Q** 对加、减、乘、除（除数不为 0）是封闭的.

实数集 **R** 对加、减、乘、除（除数不为 0）亦是封闭的.

实数的四则运算与大小关系, 还满足:

(1) $\forall x, y \in \mathbf{R}, \lambda \in \mathbf{R}_{+}$, 若 $x < y$, 则 $\lambda x < \lambda y$.

(2) $\forall x_1 < x_2, y_1 < y_2$, 则 $x_1 + y_1 < x_2 + y_2$.

# 四、实数的阿基米德性

实数具有阿基米德性:

$\forall a,b \in \mathbf{R}_+,\ \exists n \in \mathbf{N}_+,$ 使得 $nb > a.$

理由如下：设

$$a = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots, \quad a_0 = k \in \mathbf{N},$$

则 $a \le k+1 < 10^{k+1}.$

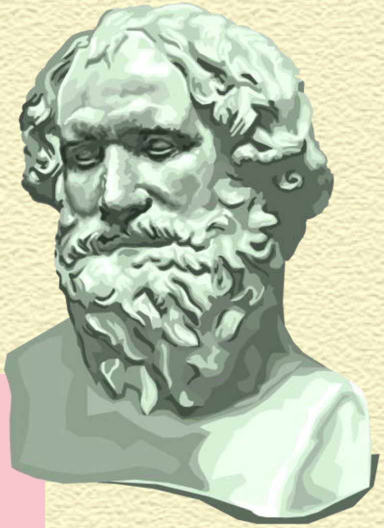
设 $b = b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$, $b_p$为第一个不为零的正整数,

令 $n = 10^{p+k+1}$, 则 $nb \ge 10^{k+1} > a.$

**例1** 若 $b>0$, 则 $\exists n \in \mathrm{N}_+$, 使得 $\dfrac{1}{n}<b$.

**证** 令 $a=1$, 由阿基米德性, $\exists n \in \mathrm{N}_+$, 使 $nb>1$, 即

$$\frac{1}{n}<b.$$



阿基米德 ( Archimedes, 287B.C.－212B.C. , 希腊 )

## 五、实数的稠密性

**1.** 任意两个不相等的实数 $a$ 与 $b$ 之间，必有另一个实数 $c$. 例如 $c=\dfrac{a+b}{2}$.

**2.** 任意两个不相等的实数 $a$ 与 $b$ 之间，既有有理数又有无理数.

证 若 $a<b$，则由例 1，存在 $n\in\mathbf{N}_+$，使

$$\frac{1}{n}<\frac{1}{2}(b-a).$$

前页 后页 返回

设 $k$ 是满足 $\frac{k}{n}\le a$ 的最大的正整数，即 $\frac{k+1}{n}>a$.

于是，$a<\frac{k+1}{n}<\frac{k+2}{n}<b$，则 $\frac{k+1}{n}$，$\frac{k+2}{n}$ 是 $a$ 与 $b$ 之间的有理数，而 $\frac{k+1}{n}+\frac{\pi}{4n}$ 是 $a$ 与 $b$ 之间的无理数.

例2 若$a,b\in \mathbf{R}$,对 $\forall\varepsilon>0$，$a<b+\varepsilon$，则 $a\le b$.

证 倘若$a>b$，设$\varepsilon=a-b>0$，则 $a=b+\varepsilon$，与 $a<b+\varepsilon$ 矛盾.

# 六、实数与数轴上的点一一对应

**实数集 R与数轴上的点可建立一一对应关系.**

**1. 这种对应关系，粗略地可这样描述:**

**设 $P$ 是数轴上的一点 (不妨设在0的右边), 若 $P$ 在整数 $n$与 $n+1$之间，则 $a_0 = n$.**

**把$(n,n+1]$十等分, 若点 $P$ 在第 $i$ 个区间, 则 $a_1 = i$.**

**类似可得到$a_n$, $n = 2, 3, \cdots$. 这时, 令点 $p$ 对应于 $a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$.**

前页 后页 返回

反之, 任何一实数也对应数轴上一点.

2.实数集与数轴上点的一一对应关系反映了实数的完备性.  我们将在后面有关章节中作进一步讨论.

# 七、实数的绝对值与三角形不等式

**1. 实数 $a$ 的绝对值 $|a|$ 定义为:**

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}.$$

**2. 实数的绝对值性质:**

(1) $|a| = |-a| \geq 0$; 当且仅当 $a = 0$ 时 $|a| = 0$.

(2) $-|a| \leq a \leq |a|$.

(3) $|a| < h \Leftrightarrow -h < a < h$, $|a| \leq h \Leftrightarrow -h \leq a \leq h$.

(4) $|a|-|b| \le |a+b| \le |a|+|b|$ (三角形不等式).

(5) $|ab|=|a||b|$.

(6) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}\ (b \ne 0)$.

3. 三角形不等式 $|a|-|b| \le |a+b| \le |a|+|b|$ 的证明:

由 $-|a| \le a \le |a|,\ -|b| \le b \le |b|$ 得

$$-(|a|+|b|) \le a+b \le |a|+|b|,$$

即 $|a+b| \le |a|+|b|$.

又 $|a| = |a-b+b| \le |a-b|+|b|$, 即 $|a|-|b| \le |a+b|$.

# 作业题

课本第4页：1（1）；3；5（1）

前页 后页 返回