§2 数集 · 确界原理

确界原理本质上体现了实数的完备性，是本章学习的重点与难点.

一、有界集

二、确界

三、确界的存在性定理

四、非正常确界

记号与术语

$U(a;\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$: 点 a 的 δ 邻域

$U^{\circ}(a;\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$: 点 a 的 δ 空心邻域

$U_{+}(a;\delta)=\{x \mid 0\le x-a<\delta\}$: 点 a 的 δ 右邻域

$U_{-}(a;\delta)=\{x \mid 0\le a-x<\delta\}$: 点 a 的 δ 左邻域

$U(\infty;M)=\{x \mid |x|>M\}$: ∞ 的 M 邻域

$U(+\infty;M)=\{x \mid x>M\}$: $+\infty$ 的 M 邻域

$U(-\infty;M)=\{x \mid x<M\}$: $-\infty$ 的 M 邻域

$\max S$: 数集 S 的最大值 $\min S$: 数集 S 的最小值

一、有界集

定义1 设$S \subset \mathbf{R}, S \neq \varnothing$.

(1) 若$\exists\, M \in \mathbf{R}$, 使得$\forall\, x \in S,\ x \le M$, 则称 M 为 S 的一个上界, 称 S 为有上界的数集.

(2) 若$\exists\, L \in \mathbf{R}$, 使得$\forall\, x \in S,\ x \ge L$,则称 L 为 S的一个下界, 称 S 为有下界的数集.

(3) 若 S 既有上界又有下界, 则称S 为有界集.

其充要条件为:$\exists\, M > 0$, 使 $\forall x \in S$,有$|x| \le M$.

(1′) 若 S 不是有上界的数集, 则称 S 无上界, 即

$\forall M \in \mathbf{R}, \exists\ x_0 \in S,$使得 $x_0 > M$.

(2′) 若 S 不是有下界的数集, 则称 S 无下界, 即

$\forall L \in \mathbf{R},\ \exists\ x_0 \in S,$使得 $x_0 < L$.

(3′) 若 S 不是有界的数集, 则称 S 无界集, 即

$\forall M > 0,\ \exists\ x_0 \in S,$ 使得 $|x_0| > M$.

例1 证明数集 $S=\{2^n \mid n\in \mathrm{N}_+\}$ 无上界, 有下界.

证 取 $L=1$, 则 $\forall x=2^n\in S$, $x\geq L$, 故 S 有下界.

$\forall M\in \mathrm{R}$, 若 $M<1$, 取 $x_0=2^1>M$;若 $M\geq 1$,

取 $x_0=2^{[M]+1}>[M]+1>M$, 因此 S 无上界.

例2 证明数集 $S=\left\{\dfrac{n^2-1}{2n^3}\,\middle|\, n\in \mathrm{N}_+\right\}$ 有界.

证 $\forall n\in \mathrm{N}_+$, $\left|\dfrac{n^2-1}{2n^3}\right|\leq\left|\dfrac{n^2}{2n^3}\right|+\left|\dfrac{1}{2n^3}\right|\leq\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$,

因此 S 有界.

二、确界

若数集 S 有上界，则必有无穷多个上界，而其中最小的一个具有重要的作用. 最小的上界称为上确界. 同样，若S 有下界，则最大的下界称为下确界.

定义2 设 $S \subset \mathbf{R}, S \neq \varnothing$. 若$\eta \in \mathbf{R}$满足：

(i) $\forall\, x \in S,\ x \le \eta$; (ii) $\forall\, \alpha < \eta, \exists x_0 \in S$，使得 $x_0 > \alpha$，则称 η 是 S 的上确界，记为$\eta = \sup S$.

注1 条件(i) 说明 η 是 S 的一个上界，条件(ii)说明比 η 小的数都不是 S 的上界, 从而 η 是最小的上界, 即上确界是最小的上界.

注2 显然, 条件 (ii) 亦可换成:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, x_0 \in S,\ x_0 > \eta - \varepsilon.$$

定义3 设 $S \subset \mathbf{R}$, $S \neq \varnothing$. 若 $\xi \in \mathbf{R}$ 满足:

(i) $\forall x \in S,\ x \geq \xi$;

(ii) $\forall \beta > \xi,\ \exists\, x_0 \in S,\ x_0 < \beta$;

则称 ξ 是 S 的下确界, 记为 $\xi = \inf S$.

注1 由定义, 下确界是最大的下界.

注2 下确界定义中的 (ii), 亦可换成

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, x_0 \in S,\ x_0 < \xi + \varepsilon.$$

前页 后页 返回

例3 设 $S=\left\{x \,\middle|\, x=1-\dfrac{1}{n}, n=1,2,\cdots\right\}$, 求证

$$\sup S=1,\ \inf S=0.$$

证 先证 $\sup S=1$.

(i) $\forall x\in S,\ x=1-\dfrac{1}{n}\le 1$;

(ii) 设 $\alpha<1$. 若 $\alpha\le 0$, 则取 $x_0=1-\dfrac{1}{2}\in S,\ x_0>\alpha$.

若 $\alpha>0$, 则令 $\varepsilon=1-\alpha>0$, 由阿基米德性, $\exists\, n_0$,

使得 $\dfrac{1}{n_0}<\varepsilon$. 令 $x_0=1-\dfrac{1}{n_0}\in S$, 则 $x_0>1-\varepsilon=\alpha$.

因此, $\sup S=1$.

再证 $\inf S = 0$.

(i) $\forall x \in S,\ x = 1 - \dfrac{1}{n} \geq 0$;

(ii) $\forall \alpha > 0, \exists\ x_0 = 0 \in S,\ x_0 < \alpha$.

因此 $\inf S = 0$.

虽然我们定义了上确界，但并没有证明上确界的存在性，这是由于上界集是无限集，而无限数集不一定有最小值, 例如 $(0, \infty)$ 无最小值.

以下确界原理也可作公理, 不予证明.

三、确界存在性定理

定理1.1 (确界原理)

设$S \subset \mathbf{R}$, $S \neq \varnothing$. 若 S 有上界, 则 S 必有上确界;

若 S 有下界, 则 S 必有下确界.

证法 不妨设

$$S_+ = \{x \mid x \in S,\ x > 0\} \neq \varnothing.$$

S_+ 中每个数都用正规的十进位小数表示

$$x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,$$

把 S 的每个数 x 的整数部分取出来,

$$M_0 = \{a_0 \mid x = a_0.a_1\cdots a_n\cdots \in S_+\}.$$

若 M 是 S 的一个上界, 令 $K = [M]+1$, 则

$$M_0 \subset \{0, 1, 2, \cdots, K\}.$$

因此 M_0 是有限集, 必有最大值 $n_0=\max M_0$. 令

$$S_0=\{x \mid x\in S_+,\ \ x=n_0.a_1a_2\cdots\},$$

则 $S_0\neq\varnothing$. $\exists\, x_0\in S_0,\ x_0>n_0;\forall x\in S,\ x\le n_0+1$. 设

$$M_1=\{a_1 \mid x=n_0.a_1a_2\cdots\in S_0\}.$$

由于 $M_1\subset\{0,1,2,\cdots,9\}$, 因此有 $n_1=\max M_1$. 令

$$S_1=\{x \mid x\in S_+,\ x=n_0.n_1a_2\cdots\},$$

则 $S_1\neq\varnothing,\ \exists\, x_1\in S_1,\ \ x_1>n_0.n_1;\forall\ x\in S,$

$$x<n_0.n_1+\frac{1}{10}.$$

一般地用归纳法可证明存在 $n_k \in \mathbf{N}$ 及

$$S_k = \{x \mid x \in S_+, x = n_0.n_1 \cdots n_k a_{k+1} \cdots\},$$

则 $S_k \neq \varnothing, \exists\, x_k \in S_k, x_k > n_0.n_1 \cdots n_k; \forall x \in S,$

$$x < n_0.n_1 \cdots n_k + \frac{1}{10^k}.$$

……

令 $\eta = n_0.n_1 n_2 \cdots n_k \cdots$.

以下证明 $\eta = \sup S$.

(i) $\forall x \in S$, 若 $x \le 0$, 则 $x \le \eta$.

若 $x > 0$, 则 $x \in S_+$, 亦有 $x \le \eta$.

事实上,设 $x = a_0.a_1 \cdots a_k \cdots$, 若 $x > \eta$, 则

$\exists k$, 使 $a_0.a_1a_2 \cdots a_k = n_0.n_1n_2 \cdots n_k$, 而 $a_{k+1} > n_{k+1}$,

此与 $\forall x \in S$, $x < n_0.n_1 \cdots n_k + \dfrac{1}{10^k}$ 矛盾.

(ii) $\forall \alpha < \eta$, 设 $\alpha = \alpha_0.\alpha_1 \cdots \alpha_k \cdots$.

则 $\exists k$, 使 $\alpha_0.\alpha_1 \cdots \alpha_k = n_0.n_1 \cdots n_k$, 而 $\alpha_{k+1} < n_{k+1}$.

由定义$\exists\, x_{k+1} \in S_{k+1}, x_{k+1} > n_0.n_1 \cdots n_{k+1}$. 则

$$x_{k+1} > n_0.n_1 \cdots n_{k+1} \geq \alpha_0.\alpha_1 \cdots \alpha_{k+1} \cdots = \alpha.$$

由 (i) (ii) 的证明, 我们得到 $\eta = \sup S$.

注： 后面第七章用数列的柯西准则证明确界原理。

例4 设 A, B 为非空数集.满足:

$$\forall\ x \in A, \forall\ y \in B, \text{有}\ x \le y.$$

证明：数集 A 有上确界，数集 B 有下确界，

且 $\sup A \le \inf B$.

证 由假设, B 中任一数 y 都是 A 的上界, A 中的任一数 x 都是 B 的下界. 因此由确界原理, A 有上确界, B 有下确界.

由定义, 上确界 $\sup A$ 是最小的上界, 因此, 任意

$y\in B$; $\sup A\le y$. 这样, $\sup A$ 又是 B 的一个下界,

而 $\inf B$ 是最大的下界, 因此 $\sup A\le\inf B$.

例5 设 S 是 R 中非空有上界的数集,

(i) 若 $a\in \mathbf{R}$, 定义 $S+a=\{x+a \mid x\in S\}$,则

$$\sup\{S+a\}=\sup S+a;$$

(ii) 若 $b\in \mathbf{R}_+$, 定义 $bS=\{bx \mid x\in S\}$, 则

$$\sup\{bS\}=b\cdot\sup S.$$

证 (i) $\forall x+a\in S+a$, 其中 $x\in S$, 必有 $x\le\sup S$,

于是

$$x+a\le\sup S+a.$$

对于$\forall\varepsilon>0$, $\exists\, x_0\in S$, 使 $x_0>\sup S-\varepsilon$, 从而

$$x_0+a\in S+a,$$

且

$$x_0+a>(\sup S+a)-\varepsilon,$$

因此

$$\sup(S+a)=\sup S+a.$$

前页 后页 返回

(ii) $\forall\, bx \in bS$，其中 $x \in S$，必有 $x \le \sup S$，于是

$$bx \le b\sup S.$$

$\forall \varepsilon > 0$，令 $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{b} > 0$，则存在 $x_0 \in S$，使

$$x_0 > \sup S - \varepsilon',$$

因此

$$bx_0 > b\sup S - b\varepsilon' = b\sup S - \varepsilon.$$

这就证明了

$$\sup\{bS\} = b\sup S.$$

四、非正常确界

1. 规定 (i) $\forall a \in \mathbf{R}, -\infty < a < +\infty$;

(ii)若 S 无上界, 记 $\sup S = +\infty$.

若 S 无下界, 记 $\inf S = -\infty$.

2. 推广的确界原理：非空数集必有上、下确界.

例1 $\sup \mathbf{N} = +\infty, \ \inf\{-2^n \mid n \in \mathbf{N}_+\} = -\infty.$

复习思考题

1. 课本第8页：6（1）；7（1）

作业题：课本第8页：1（1）（3）；3；4（1）（3）；5.

前页 后页 返回