

§ 4 具有某些特性的函数

本节将着重讨论函数的有界性、单调性、奇偶性与周期性.

一、有界函数

二、单调函数

三、奇函数与偶函数

四、周期函数

一、有界函数

定义1 设 f 定义在 D 上.

若 $\exists M \in \mathbf{R}, \forall x \in D, f(x) \leq M$, 则称 f 在 D 上有上界;

若 $\exists L \in \mathbf{R}, \forall x \in D, f(x) \geq L$, 则称 f 在 D 上有下界;

若 $\exists M \in \mathbf{R}, \forall x \in D, |f(x)| \leq M$, 则称 f 在 D 上有界.

易证 f 在 D 上有界 $\Leftrightarrow f$ 在 D 上既有上界又有下界.

若 $\forall M \in \mathbf{R}, \exists x_0 \in D, f(x_0) > M$, 则称 f 在 D 上无上界;

若 $\forall L \in \mathbf{R}, \exists x_0 \in D, f(x_0) < L$, 则称 f 在 D 上无下界;

若 $\forall M \in \mathbf{R}, \exists x_0 \in D, |f(x_0)| > M$, 则称 f 在 D 上无界.

例1 求证: $f(x) = \tan x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 上无上界, 有下界.

证 $L = 0$, 则 $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2})$, $f(x) \geq L$, 因此 f 在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 上有下界. $\forall M \in \mathbf{R}$, 令 $x_0 = \arctan(M + 1)$, 则 $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2})$, 且 $\tan x_0 = M + 1 > M$, 因此 f 在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 上无上界.

例2 设函数 $f(x), g(x)$ 是 D 上的正值有界函数.

求证: $\sup_{x \in D} \{f(x)g(x)\} \leq \sup_{x \in D} \{f(x)\} \sup_{x \in D} \{g(x)\}.$

证 $\forall x \in D, \quad f(x) \leq \sup\{f(x)\},$

$$g(x) \leq \sup\{g(x)\},$$

因此 $f(x)g(x) \leq \sup\{f(x)\} \sup\{g(x)\},$

由 x 的任意性, 可知 $\sup\{f(x)\} \sup\{g(x)\}$

是 $\{f(x)g(x)\}$ 的一个上界,

因此 $\sup_{x \in D} \{f(x)g(x)\} \leq \sup_{x \in D} \{f(x)\} \sup_{x \in D} \{g(x)\}.$

前页

后页

返回

例3 设 $f(x), g(x)$ 在 D 上有界, 证明:

$$\inf_{x \in D} \{f(x) + g(x)\} \leq \inf_{x \in D} \{f(x)\} + \sup_{x \in D} \{g(x)\}.$$

证 $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in D, f(x_0) < \inf_{x \in D} \{f(x)\} + \varepsilon.$

又 $g(x_0) \leq \sup_{x \in D} \{g(x)\}$, 故

$$f(x_0) + g(x_0) < \inf_{x \in D} \{f(x)\} + \sup_{x \in D} \{g(x)\} + \varepsilon.$$

因此

$$\begin{aligned} \inf_{x \in D} \{f(x) + g(x)\} &\leq f(x_0) + g(x_0) \\ &\leq \inf_{x \in D} \{f(x)\} + \sup_{x \in D} \{g(x)\}. \end{aligned}$$

注: 看课本第15页例2。

前页

后页

返回

二、单调函数

定义2 设 f 是定义在 D 上的函数.

若 $\forall x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 < x_2$ 时,

(i) 有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称 f 为 D 上的增函数;

特别有 $f(x_1) < f(x_2)$ 时, 称 f 为严格增函数.

(ii) 有 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 则称 f 为 D 上的减函数;

特别有 $f(x_1) > f(x_2)$ 时, 称 f 为严格减函数.

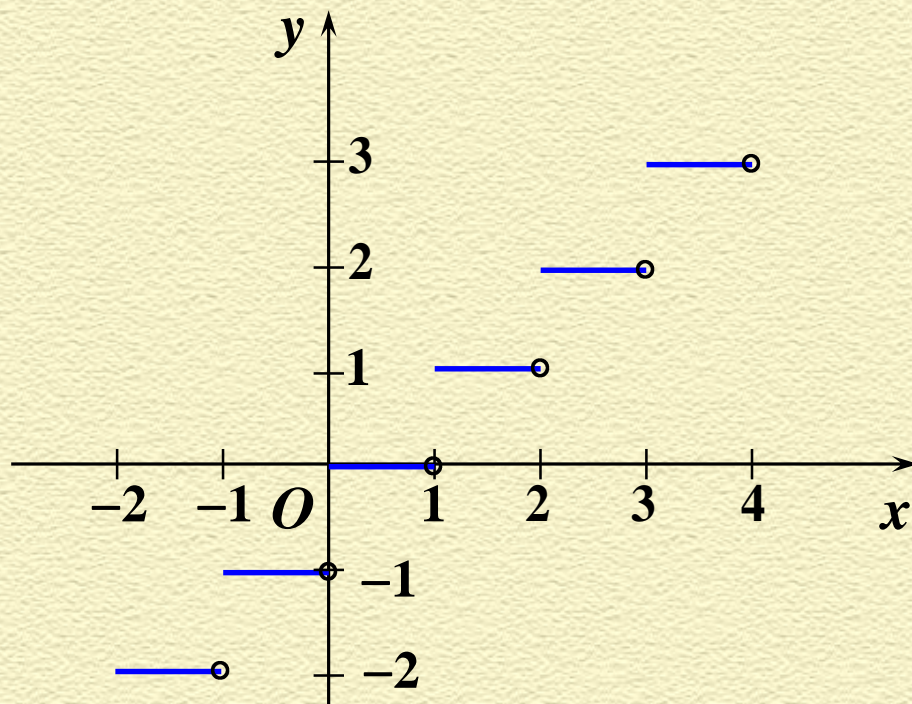
不难知道, 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是正值严格增的, 则 $f(x)g(x)$ 也是正值严格增的.

前页

后页

返回

例4 易证函数 $y = [x]$ 在 \mathbf{R} 上是增函数, 但非严格增.



定理1.2 设 $y = f(x), x \in D$ 为严格增函数, 则 f 必有反函数 f^{-1} , 且 f^{-1} 在其定义域 $f(D)$ 上也是严格增函数.

类似地, 严格减函数 f 必有反函数 f^{-1} , 且 f^{-1} 在其定义域上也是严格减函数.

证 设 f 在 D 上严格增, 则 $\forall y \in f(D)$ 只有一个 $x \in D$, 使 $f(x) = y$.

事实上, 若 $\exists x_1 < x_2$, 使 $f(x_1) = y = f(x_2)$, 则与 f

的严格增性质相矛盾. 再证 f^{-1} 必是严格增的:

$$\forall y_1, y_2 \in f(D), \quad y_1 < y_2,$$

$$x_1 = f^{-1}(y_1), \quad x_2 = f^{-1}(y_2),$$

由于 $y_1 < y_2$ 及 f 的严格增性, 必有 $x_1 < x_2$, 即 $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, 因此 f^{-1} 也是严格增函数.

例5 证明: $y = a^x$ 当 $a > 1$ 时, 在 \mathbf{R} 上严格增; 当 $0 < a < 1$ 时, 在 \mathbf{R} 上严格减.

证 设 $a > 1$. $\forall x_1, x_2, x_1 < x_2$. 由 Q 的稠密性,

$\exists r_1, r_2 \in Q$, 使 $x_1 < r_1 < r_2 < x_2$, 因此

$$\begin{aligned} a^{x_1} &= \sup\{a^r \mid r \in Q, r < x_1\} \leq a^{r_1} < a^{r_2} \\ &\leq \sup\{a^r \mid r \in Q, r < x_2\} = a^{x_2}. \end{aligned}$$

类似可证 a^x 当 $0 < a < 1$ 时, 在 \mathbf{R} 上严格减.

由于 $y = \log_a x$ 是 $y = a^x$ 的反函数, 因此

$y = \log_a x$ 当 $a > 1$ 时, 在 \mathbf{R}_+ 上严格增;

$y = \log_a x$ 当 $0 < a < 1$ 时, 在 \mathbf{R}_+ 上严格减.

三、奇函数和偶函数

定义3 设 D 关于原点对称,即: $\forall x \in D$, 必有 $-x \in D$.

若 $\forall x \in D$, $f(-x) = -f(x)$, 称 f 为 D 上的奇函数.

若 $\forall x \in D$, $f(-x) = f(x)$, 称 f 为 D 上的偶函数.

显然, 若记 $G(f)$ 为 f 的图象, 则 $f(x)$ 是奇函数或偶函数的充要条件是:

$$(x, y) \in G(f) \Leftrightarrow (-x, -y) \in G(f);$$

或
$$(x, y) \in G(f) \Leftrightarrow (-x, y) \in G(f).$$

例如, $y = \sin x$, $y = \tan x$, $y = x^{2n+1}$ 是奇函数, 而 $y = \cos x$, $y = x^{2n}$ 是偶函数.

$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ 是奇函数 $y_1 = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ 的反函数, 从而由奇函数的图象性质可知它也是奇函数.

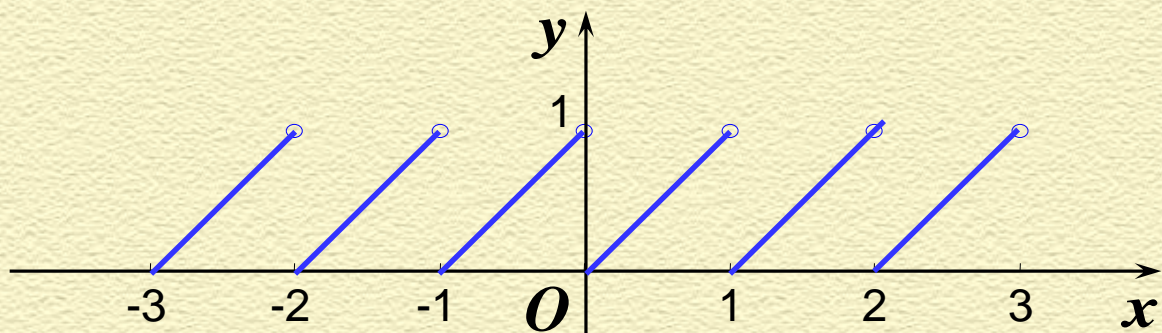
四、周期函数

定义4 设 f 为 D 上定义的函数. 若 $\exists \sigma > 0$, 使 $\forall x \in D$ 必有 $x \pm \sigma \in D$, 且 $f(x \pm \sigma) = f(x)$,

则称 f 为周期函数, σ 为 f 的一个周期.

若周期函数 f 的所有正周期中有一个最小的周期, 则称此最小正周期为 f 的基本周期, 简称周期.

例如函数 $f(x) = x - [x]$ 的周期为 1. 见后图.



例6 $\sin x$ 的周期为 2π , $\tan x$ 的周期为 π ,

注1 周期函数的定义域不一定是 \mathbf{R} . 例如:

$$f(x) = \sqrt{\sin x}.$$

注2 周期函数不一定有最小周期. 例如狄利克雷函数以任意正有理数为周期, 但没有最小周期.

前页

后页

返回

例7 任意正有理数是狄利克雷函数 $D(x)$ 的周期.

证 设 $r \in \mathbf{Q}_+, x \in \mathbf{R}$.

若 $x \in \mathbf{Q}$, 则 $x + r \in \mathbf{Q}, D(x + r) = 1 = D(x)$;

若 $x \notin \mathbf{Q}$, 则 $x + r \notin \mathbf{Q}, D(x + r) = 0 = D(x)$.

因此, r 是 $D(x)$ 的一个周期.

复习思考题：课本第18页：2；11

作业题：课本第18-19页：1；3（2）；
4（4）；5（3）；6；8（1）；
9（1）。

练习题：第一章总练习题：1；3；4；8；
12（1）

前页

后页

返回