Politechnika Wrocławska

Wydział Informatyki i Telekomunikacji

Badania operacyjne i optymalizacja dyskretna

Wtorek, 13:15-15:00

Metoda Ścieżki Krytycznej - Najkrótsza ścieżka

Autorzy:

Aleksandra Rozmus, 252954

Paweł Gołębiowski, 243710

Prowadzący:

dr inż. Mariusz Makuchowski

6 listopada 2023

Politechnika Wrocławska

Spis treści

1 Wstęp

Grafy stanowią podstawowy i uniwersalny obiekt matematyczny stosowany w różnych dziedzinach nauki i techniki, od informatyki po nauki społeczne. Jednym z kluczowych zagadnień dotyczących grafów jest problem znajdowania najkrótszej ścieżki między dwoma wierzchołkami. Istnieje wiele algorytmów służących do rozwiązywania tego problemu, z których każdy ma swoje unikatowe cechy, zalety i ograniczenia [1].

W tym sprawozdaniu skupimy się na trzech klasycznych algorytmach: Dijkstry z użyciem kopca, Dijkstry z użyciem tablicy oraz algorytmie Bellmana-Forda. Algorytm Dijkstry, nazwany tak na cześć swojego twórcy, Edsgera Dijkstry, jest jednym z najbardziej znanych algorytmów do znajdowania najkrótszych ścieżek w grafach ważonych bez krawędzi o ujemnych wagach. Z kolei algorytm Bellmana-Forda, nazwany na cześć jego twórców, Richarda Bellmana i Lestera Forda, jest bardziej ogólnym rozwiązaniem, które potrafi radzić sobie z grafami zawierającymi krawędzie o ujemnych wagach, a także wykrywać cykle o ujemnej wadze [2].

Celem tego sprawozdania jest eksploracja i porównanie tych trzech algorytmów pod kątem ich wydajności, zakresu zastosowań oraz specyficznych cech. Przeanalizujemy ich działanie na różnych typach grafów, badając jak zachowują się w różnych warunkach oraz jakie mają ograniczenia.

2 Dane wejściowe

Jako dane wejściowe wykorzystane przy sprawdzeniu poprawności działania stworzonych algorytmów wykorzystano dane dostępne w pliku *data25.txt* na stronie mariusz.makuchowski.staff.iiar.pwr.wroc.pl.

```
25
 0  0  0  1  1  9  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
 0  0  4  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
 6  5  0  7  0  2  7  2  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
 4  6  7  0  1  5  0  6  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
 0  4  0  4  0  1  0  6  0  6  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
 1  3  3  0  0  0  0  0  4  4  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
 4  7  5  0  0  3  0  0  5  2  7  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
 2  0  9  3  4  2  3  0  9  0  8  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
 0  6  7  2  0  0  0  0  0  0  2  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
 9  0  5  0  0  5  4  6  0  0  0  9  0  8  2  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
 8  3  2  2  0  6  5  7  6  0  0  0  6  0  6  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
 0  3  0  0  6  7  0  0  8  2  6  0  0  0  0  6  0  0  0  0  0  0  0  0  0
 0  0  3  0  6  0  0  0  0  0  7  2  0  3  1  2  0  0  0  0  0  0  0  0  0
 0  6  1  0  0  0  5  0  6  0  4  5  6  0  2  0  8  0  2  0  0  0  0  0  0
 0  0  6  0  8  0  0  0  0  0  6  9  0  0  0  0  0  1  5  0  0  0  0  0  0
 0  0  1  1  0  4  4  0  1  5  8  1  3  0  9  0  0  0  0  7  0  0  0  0  0
 0  0  4  0  0  0  0  9  8  5  8  0  8  0  6  2  0  6  0  6  0  0  0  0  0
 5  8  0  0  3  0  0  0  0  0  8  0  1  5  2  0  9  0  0  1  7  0  4  0  0
 4  3  4  4  6  3  9  0  5  0  1  5  3  9  1  0  0  0  0  1  3  0  0  0  0
 0  3  9  0  7  0  0  6  4  2  0  7  5  2  0  0  2  6  0  0  4  2  7  9  5
 7  0  0  0  0  0  6  0  1  0  0  5  0  2  0  1  0  8  0  8  0  0  7  2  7
 0  0  0  0  2  4  0  0  6  5  7  9  0  5  0  0  0  0  0  4  8  0  0  0  7
 7  0  0  0  0  0  0  0  4  6  0  4  0  0  0  0  7  7  0  6  5  0  0  0  4
 2  0  3  0  0  0  9  3  1  0  0  7  7  0  0  6  8  8  0  0  0  7  2  0  0
 0  9  0  1  8  0  0  8  6  0  0  0  8  7  0  0  0  7  0  0  5  9  8  6  0
```

Listing 1: Dane wejściowe

gdzie:

- pierwszy wiersz - liczba wierzchołków grafu,
- kolejne wiersze - macierz połączeń między wierzchołkami.

3 Zaimplementowane algorytmy

Podczas laboratorium zaimplementowano dwa algorytmy. Dla obu algorytmów dane były wczytywane z pliku i zapisywane do pliku wyjściowego.

3.1 Algorytm Dijkstry z użyciem kopca

Algorytm Dijkstry został stworzony przez Edsgera Dijkstry w 1956 roku i od tego czasu stanowi jeden z podstawowych algorytmów stosowanych do znajdowania najkrótszej ścieżki w grafach ważonych. Kluczowym założeniem algorytmu Dijkstry jest to, że nie może on operować na grafach z krawędziami

o ujemnych wagach. Działanie algorytmu opiera się na lokalnym wyborze najkrótszej krawędzi, rozpoczynając od wybranego wierzchołka startowego. W każdym kroku, spośród wierzchołków jeszcze nieprzetworzonych, wybierany jest ten o aktualnie najkrótszym oszacowaniu odległości od źródła. Algorytm kontynuuje działanie, aż wszystkie wierzchołki zostaną przetworzone lub osiągnięte. W tej wersji algorytmu, dla zarządzania zbiorami wierzchołków używany jest kopiec min, który umożliwia szybkie znajdowanie wierzchołka z najmniejszą odległością od źródła, która jeszcze nie została przetworzona. Oto kroki algorytmu:

Inicjalizacja: Każdemu wierzchołkowi przypisywana jest odległość równa nieskończoności, z wyjątkiem wierzchołka startowego, któremu przypisuje się odległość zero. Wszystkie odległości są dodawane do kolejki priorytetowej.

Wybór wierzchołka: W każdej iteracji algorytmu usuwamy z kopca wierzchołek z najmniejszą odległością, który nie został jeszcze przetworzony.

Relaksacja: Dla wybranego wierzchołka aktualizujemy odległości jego sąsiadów. Jeśli odległość od źródła do sąsiada jest większa niż suma odległości od źródła do aktualnie rozważanego wierzchołka i wagi krawędzi między nimi, aktualizujemy odległość sąsiada i ponownie dodajemy go do kopca.

Zakończenie: Proces powtarzamy, aż kolejka priorytetowa będzie pusta. Na tym etapie odległości wszystkich wierzchołków od źródła zostaną ustalone.

Dzięki użyciu kopca min operacje na kolejce priorytetowej mają logarytmiczną złożoność czasową, co daje ogólną złożoność algorytmu $O((E+N)logN)$, gdzie E to liczba krawędzi, a N to liczba wierzchołków.

```python
def dijkstra(n, matrix, start_vertex):
    distances = [float('infinity')] * n
    distances[start_vertex] = 0
    priority_queue = [(0, start_vertex)]
    predecessors = [-1] * n

    while priority_queue:
        current_distance, current_vertex = heapq.heappop(priority_queue)

        if current_distance > distances[current_vertex]:
            continue

        for i in range(n):
            if matrix[current_vertex][i] and current_distance + matrix[current_vertex][i] <
            ↪  distances[i]:
                distances[i] = current_distance + matrix[current_vertex][i]
                predecessors[i] = current_vertex
                heapq.heappush(priority_queue, (distances[i], i))

    paths = {}
    for i in range(n):
        if distances[i] != float('infinity'):
            path = []
            current = i
            while current != -1:
                path.append(current)
                current = predecessors[current]
            path.reverse()
            paths[i] = path
        else:
            paths[i] = []

    return distances, paths
```

Listing 2: Algorytm Dijkstry z użyciem kopca

3.2 Algorytm Dijkstry z użyciem tablicy

Gdy używamy zwykłej tablicy do przechowywania odległości wierzchołków, kroki algorytmu pozostają te same, lecz wybór wierzchołka z najmniejszą odległością odbywa się przez przeszukanie tablicy:

Inicjalizacja: Podobnie jak w wersji z kopcem, wszystkim wierzchołkom przypisywane są odległości, początkowo nieskończone, z wyjątkiem wierzchołka startowego.

Wybór wierzchołka: W każdej iteracji przeszukujemy tablicę, aby znaleźć nieprzetworzony wierzchołek z najmniejszą aktualną odległością.

Relaksacja: Dokładnie tak samo jak w wersji z kopcem aktualizujemy odległości sąsiadów wybranego wierzchołka.

Zakończenie: Proces kontynuujemy aż wszystkie wierzchołki zostaną przetworzone.

W przypadku zwykłej tablicy, każde przeszukanie w celu znalezienia wierzchołka z najmniejszą odległością ma złożoność $O(n)$, a ponieważ wykonujemy to dla każdego wierzchołka, całkowita złożoność wynosi $O(n^2)$, co jest mniej efektywne dla gęstych grafów, gdzie liczba krawędzi zbliża się do n^2. Wybór między tymi dwiema metodami często zależy od gęstości grafu i wymagań co do złożoności czasowej algorytmu.

```python
def dijkstra_table(n, matrix, start_vertex):
    distances = [float('inf')] * n
    distances[start_vertex] = 0
    visited = [False] * n
    predecessors = [-1] * n

    for _ in range(n):
        min_distance = float('inf')
        current_vertex = -1

        for i in range(n):
            if not visited[i] and distances[i] < min_distance:
                min_distance = distances[i]
                current_vertex = i

        if current_vertex == -1:
            break

        visited[current_vertex] = True

        for i in range(n):
            if matrix[current_vertex][i] and distances[current_vertex] +
            ↪  matrix[current_vertex][i] < distances[i]:
                distances[i] = distances[current_vertex] + matrix[current_vertex][i]
                predecessors[i] = current_vertex

    paths = {}
    for i in range(n):
        if distances[i] != float('inf'):
            path = []
            current = i
            while current != -1:
                path.append(current)
                current = predecessors[current]
            path.reverse()
            paths[i] = path
        else:
            paths[i] = []

    return distances, paths
```

Listing 3: Algorytm Dijkstry z użyciem tablicy

3.3 Algorytm Bellmana-Forda

Algorytm Bellmana-Forda, nazwany na cześć Richarda Bellmana i Lestera Forda, jest nieco starszy i oferuje bardziej ogólne podejście do problemu najkrótszej ścieżki. Jego główną zaletą jest zdolność do obsługi grafów z krawędziami o ujemnych wagach oraz wykrywanie cykli o ujemnej wadze. Algorytm

ten działa poprzez iteracyjne relaksowanie krawędzi, co oznacza aktualizację odległości do wierzchołków docelowych, jeśli znaleziono krótszą ścieżkę przez dany wierzchołek pośredniczący. Proces ten jest powtarzany dla każdej krawędzi w grafie n-1 razy, gdzie n to liczba wierzchołków. Ostatecznym krokiem jest sprawdzenie, czy istnieją krawędzie, które można jeszcze zrelaksować, co wskazywałoby na obecność cyklu o ujemnej wadze.

```python
def bellman_ford(n, matrix, start_vertex):
    distances = [float('infinity')] * n
    distances[start_vertex] = 0
    predecessors = [-1] * n
    edges = []

    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if matrix[i][j]:
                edges.append((i, j, matrix[i][j]))

    for _ in range(n-1):
        for edge in edges:
            u, v, w = edge
            if distances[u] != float('infinity') and distances[u] + w < distances[v]:
                distances[v] = distances[u] + w
                predecessors[v] = u

    for edge in edges:
        u, v, w = edge
        if distances[u] != float('infinity') and distances[u] + w < distances[v]:
            print("Graf zawiera cykl o ujemnej wadze")
            return None, None

    paths = {}
    for i in range(n):
        if distances[i] != float('infinity'):
            path = []
            current = i
            while current != -1:
                path.append(current)
                current = predecessors[current]
            path.reverse()
            paths[i] = path
        else:
            paths[i] = []

    return distances, paths
```

Listing 4: Algorytm Bellmana-Forda

Chociaż oba algorytmy służą do rozwiązywania tego samego problemu, różnią się podejściem, zakre-

sem zastosowań oraz efektywnością w różnych scenariuszach. Algorytm Dijkstry jest zazwyczaj szybszy dla grafów bez krawędzi o ujemnych wagach, podczas gdy algorytm Bellmana-Forda jest bardziej uniwersalny, ale zwykle mniej wydajny dla dużych grafów. [3] [4] [5]

4 Dane wyjściowe

Poniżej przedstawiono uzyskane dane wyjściowe dla pliku *data25.txt* dla obu algorytmów. Dane te pokrywają się z oczekiwanymi.

```
Dijkstra - kopiec: ([0, 5, 5, 1, 1, 2, 10, 7, 6, 6, 8, 8, 10, 12, 8, 12, 12, 9, 13, 10, 14,
↪  12, 13, 16, 15], {0: [0], 1: [0, 4, 1], 2: [0, 4, 5, 2], 3: [0, 3], 4: [0, 4], 5:
[0, 4, 5], 6: [0, 4, 5, 9, 6], 7: [0, 3, 7], 8: [0, 4, 5, 8], 9: [0, 4, 5, 9], 10: [0, 4, 5,
↪  8, 10], 11: [0, 3, 7, 11], 12: [0, 4, 5, 9, 14, 17, 12], 13: [0, 4, 5, 9, 14, 17, 19,
↪  13], 14: [0, 4, 5, 9, 14], 15: [0, 4, 5, 9, 14, 17, 12, 15], 16: [0, 4, 5, 9, 14, 17,
↪  19, 16], 17: [0, 4, 5, 9, 14, 17], 18: [0, 4, 5, 9, 14, 18], 19:
[0, 4, 5, 9, 14, 17, 19], 20: [0, 4, 5, 9, 14, 17, 19, 20], 21: [0, 4, 5, 9, 14, 17, 19,
↪  21], 22: [0, 4, 5, 9, 14, 17, 22], 23: [0, 4, 5, 9, 14, 17, 19, 20, 23], 24: [0, 4, 5,
↪  9, 14, 17, 19, 24]})
Dijkstra - tablica: ([0, 5, 5, 1, 1, 2, 10, 7, 6, 6, 8, 8, 10, 12, 8, 12, 12, 9, 13, 10, 14,
↪  12, 13, 16, 15], {0: [0], 1: [0, 4, 1], 2: [0, 4, 5, 2], 3: [0, 3], 4: [0, 4], 5: [0, 4,
↪  5], 6: [0, 4, 5, 9, 6], 7: [0, 3, 7], 8: [0, 4, 5, 8], 9: [0, 4, 5, 9], 10: [0, 4, 5, 8,
↪  10], 11: [0, 3, 7, 11], 12: [0, 4, 5, 9, 14, 17, 12], 13: [0, 4, 5, 9, 14, 17, 19, 13],
↪  14: [0, 4, 5, 9, 14], 15: [0, 4, 5, 9, 14, 17, 12, 15], 16: [0, 4, 5, 9, 14, 17, 19,
↪  16], 17: [0, 4, 5, 9, 14, 17], 18: [0, 4, 5, 9, 14, 18], 19: [0, 4, 5, 9, 14, 17, 19],
↪  20: [0, 4, 5, 9, 14, 17, 19, 20], 21: [0, 4, 5, 9, 14, 17, 19, 21], 22: [0, 4, 5, 9, 14,
↪  17, 22], 23: [0, 4, 5, 9, 14, 17, 19, 20, 23], 24: [0, 4, 5, 9, 14, 17, 19, 24]})
Bellman-Ford: ([0, 5, 5, 1, 1, 2, 10, 7, 6, 6, 8, 8, 10, 12, 8, 12, 12, 9, 13, 10, 14, 12,
↪  13, 16, 15], {0: [0], 1: [0, 4, 1], 2: [0, 4, 5, 2], 3: [0, 3], 4: [0, 4], 5: [0, 4, 5],
↪  6: [0, 3, 7, 6], 7: [0, 3, 7], 8: [0, 4, 5, 8], 9: [0, 4, 5, 9], 10: [0, 4, 5, 8, 10],
↪  11: [0, 3, 7, 11], 12: [0, 4, 5, 9, 14, 17, 12], 13: [0, 4, 5,
9, 14, 17, 19, 13], 14: [0, 4, 5, 9, 14], 15: [0, 4, 5, 9, 14, 17, 12, 15], 16: [0, 4, 5, 9,
↪  14, 17, 19, 16], 17: [0, 4, 5, 9, 14, 17], 18: [0, 4, 5, 9, 14, 18], 19: [0, 4, 5, 9,
↪  14, 17, 19], 20: [0, 4, 5, 9, 14, 17, 19, 20], 21: [0, 4, 5, 9, 14, 17, 19, 21], 22: [0,
↪  4, 5, 9, 14, 17, 22], 23: [0, 4, 5, 9, 14, 17, 19, 20, 23], 24: [0, 4, 5, 9, 14, 17, 19,
↪  24]})
```

Listing 5: Dane wyjściowe

Czas obliczeń dla poszczególnych algorytmów:

- algorytm Dijkstry z wykorzystaniem kopca: 0.0003842000000000012s,
- algorytm Dijkstry z wykorzystaniem tablicy: 0.0004213999999999954s
- algorytm Bellmana-Forda: 0.001581100000000002s.

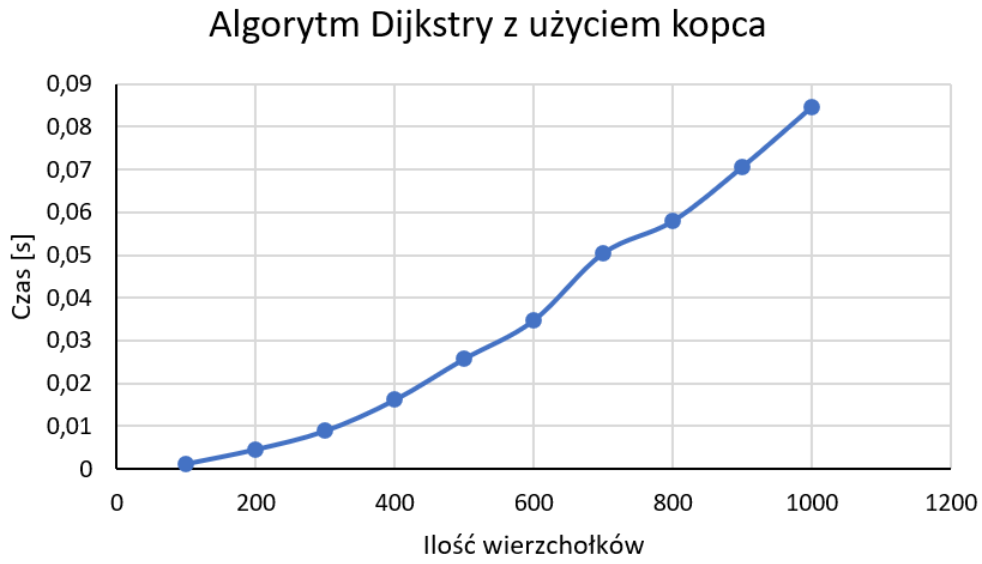
5 Badania

Nasze badania koncentrowały się głównie na pomiarze czasu wykonania algorytmów Dijkstry i Bellmana-Forda. W tym celu:

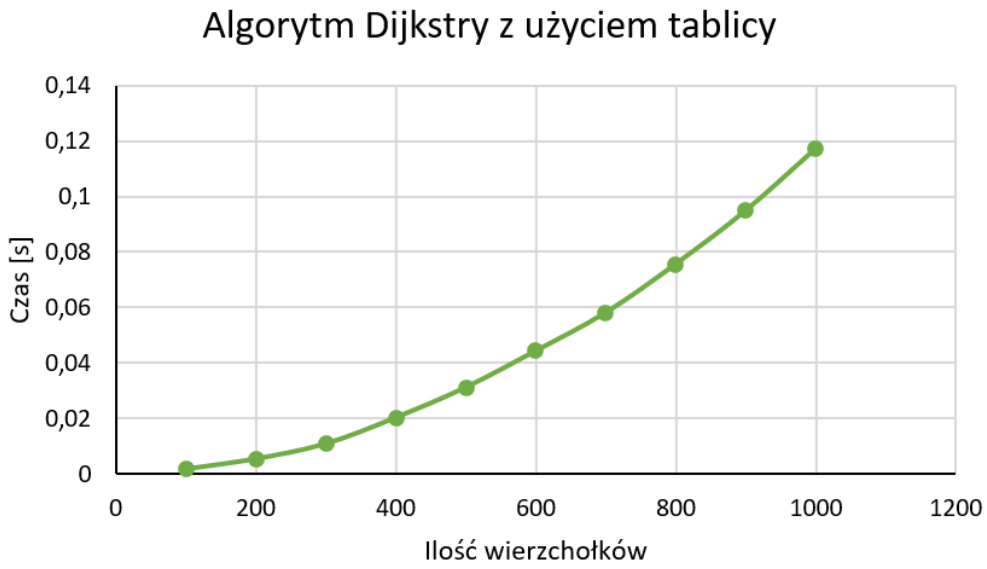
- Wybraliśmy różnorodne grafy o różnych rozmiarach i gęstościach. To pozwoliło nam na analizę zachowania algorytmów w szerokim zakresie warunków, od grafów rzadkich po grafy gęste.
- Algorytmy zostały zaimplementowane z uwzględnieniem najlepszych praktyk programistycznych, aby zapewnić ich optymalne działanie.
- Dla każdego wybranego grafu algorytmy były uruchamiane wielokrotnie, a wynikowy czas wykonania był rejestrowany. Wszystkie testy były przeprowadzane w kontrolowanym środowisku, aby minimalizować wpływ czynników zewnętrznych na wyniki.
- Po zebraniu danych przeprowadziliśmy analizę, aby zidentyfikować tendencje, wzorce i wyjątki w zachowaniu algorytmów w zależności od charakterystyki grafu.

Tabela 1: Czasy obliczeń dla wybranej ilości wierzchołków

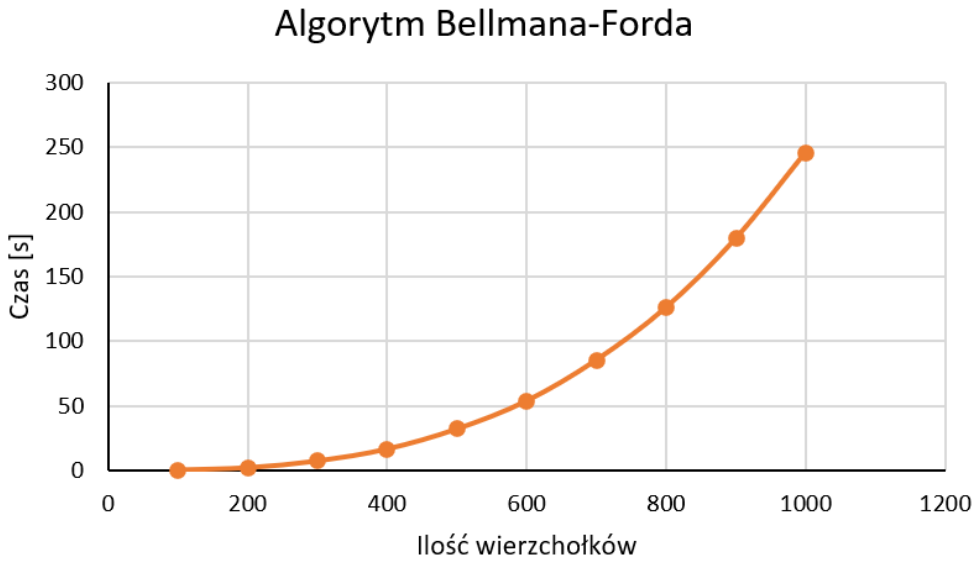
	Dijkstra - kopiec	Bellman-Ford	Dijkstra - tablica
Ilość krawędzi	Czas [s]		
100	0,001243	0,254338	0,0017237
200	0,004601	1,964812	0,0054133
300	0,008926	7,169732	0,0108797
400	0,016136	16,45437	0,0202839
500	0,02574	31,95524	0,0312061
600	0,034733	53,67267	0,0443354
700	0,050433	85,31411	0,0581198
800	0,05795	126,0185	0,0755985
900	0,070608	179,3666	0,0948734
1000	0,084636	245,8798	0,1171796



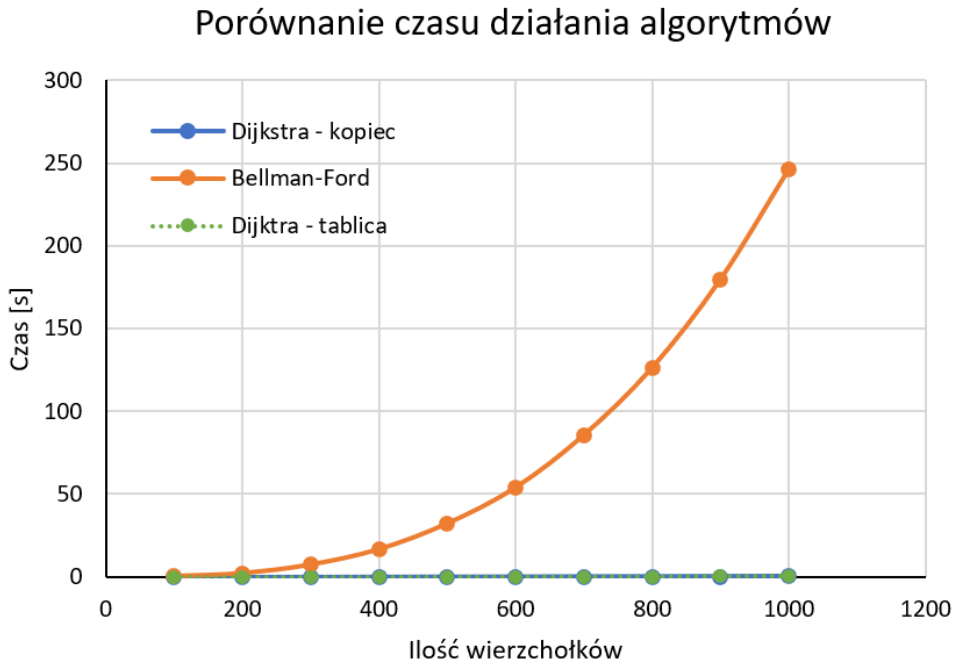
Rysunek 5.1: Czas wykonywania algorytmu Dijkstry wykorzystującego kopiec



Rysunek 5.2: Czas wykonywania algorytmu Dijkstry wykorzystującego tablicę



Rysunek 5.3: Czas wykonywania algorytmu Bellmana-Forda



Rysunek 5.4: Porównanie czasu wykonywania algorytmów

6 Wnioski

- Obie metody, zarówno algorytm Dijkstry, jak i Bellmana-Forda, są efektywnymi narzędziami do rozwiązywania problemu najkrótszej ścieżki w grafach. Jednakże algorytm Dijkstry jest bardziej

odpowiedni dla grafów, które nie mają krawędzi o ujemnych wagach, podczas gdy algorytm Bellmana-Forda może być stosowany do grafów z krawędziami o dowolnej wadze.

- W testach wydajnościowych algorytm Dijkstry zazwyczaj okazywał się być szybszym rozwiązaniem dla większości grafów, zwłaszcza tych bez krawędzi o ujemnych wagach. Algorytm Bellmana-Forda, chociaż bardziej uniwersalny, może być znacznie mniej efektywny w przypadku dużych grafów, ze względu na jego złożoność czasową.
- Jednym z kluczowych atutów algorytmu Bellmana-Forda jest jego zdolność do wykrywania cykli o ujemnej wadze w grafie. Jest to cecha nieosiągalna dla algorytmu Dijkstry.
- Mimo, że algorytm Dijkstry jest zazwyczaj szybszy, jego implementacja, zwłaszcza z użyciem struktur danych takich jak kopce, może być bardziej skomplikowana niż bardziej intuicyjna i prosta implementacja algorytmu Bellmana-Forda.
- Wybór odpowiedniego algorytmu zależy od specyficznych wymagań problemu. Jeśli pewne jest, że graf nie zawiera krawędzi o ujemnych wagach, algorytm Dijkstry jest zazwyczaj preferowany ze względu na jego wydajność. Jeśli jednak graf może zawierać krawędzie o ujemnych wagach lub istnieje potrzeba wykrycia cykli o ujemnej wadze, algorytm Bellmana-Forda staje się niezbędny.
- Złożoność czasowa algorytmu Bellmana-Forda dla grafu liczącego n wierzchołków i e krawędzi w przypadku pesymistycznym jest równa O(en). Biorąc pod uwagę, że w przypadku braku krawędzi wielokrotnych liczba krawędzi jest zawsze mniejsza od $O(n^2)$, można powiedzieć, że złożoność czasowa algorytmu to $O(n^3)$.
- Złożoność czasowa algorytmu Dijkstry dla przypadku kiedy dane są przechowywane w postaci kopca wynosi $O(logn)$, a w przypadku tablicy $O(n^2)$
- Implementacja algorytmu Dijkstry z wykorzystaniem zwykłej tablicy, chociaż prostsza, jest mniej efektywna niż z wykorzystaniem kopca, ale może być bardziej praktyczna dla małych lub gęsto połączonych grafów.

7 Bibliografia

[1] Leiserson C. E. Rivest R. L. Stein C. Cormen, T. H. *Introduction to algorithms (3rd ed.)*. MIT press, 2009.

[2] Zbigniew Czech, Sebastian Deorowicz, and Piotr Fabian. *Algorytmy i struktury danych: wybrane zagadnienia*. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, 2010.

[3] E. W. Dijkstra. *A note on two problems in connexion with graphs*. Numerische mathematik, 1(1), 269-271, 1959.

[4] R. Bellman. *On a routing problem*. Quarterly of applied mathematics, 16(1), 87-90, 1958.

[5] L. R. Ford. *Network flow theory*. Rand Corporation, 1956.