# 7: ARCH og GARCH modeller, herunder specielt ARCH(1) og GARCH(1,1)

**Tidsrækkeanalyse**

Kasper Rosenkrands

# Afkast definitioner

Først vil jeg definere forskellige former for afkast. Vi starter med at lade $p_t$ være prise til tid $t$ af et aktiv.

Det simple **netto afkast** fra tid $t-1$ til tid $t$ givet ved

$$R_t = \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}} \quad \text{(Procentændring i } p_t\text{)}.$$

Bemærk at vi kan lave omskrivningen

$$\frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}} = \frac{p_t}{p_{t-1}} - 1,$$

for at få det simple **brutto afkast** der er defineret ved

$$1 + R_t = \frac{p_t}{p_{t-1}}.$$

# Log afkast

Hvis $R_t$ er defineret som på forrige slide, så er **log afkastet** defineret som

$$r_t = \log(1 + R_t) = \log\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right) = \log p_t - \log p_{t-1} = \nabla \log p_t .$$

# Finansielle tidsrækker

Lader vi prisen for et aktiv være $x_t$ og afkastet være $y_t$ så gælder den følgende relation

$$y_t = \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}} \quad \text{eller} \quad y_t = \nabla \log x_t.$$

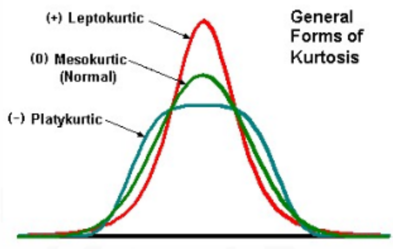
Empirien for afkast-tidsrækker fortæller os at:

1. Fravær af autokorrelation i $y_t$
2. Signifikant autokorrelaion i $y_t^2$ og $|y_t|$
3. Tunge haler
4. Volatilitets klyngning

# Topstejlhed

Topstejlhed eller **kurtosis** er det 4. moment og er defineret som

$$\kappa = \frac{\mathbb{E}\left[X-\mu\right]^4}{\left(\mathbb{E}\left[X-\mu\right]^2\right)^2} - 3.$$



# ARCH(1)

Hvis vi lader $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ være i.i.d. og $\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0$. Så kaldes

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2$$

for en ARCH(1) model.