4: Spektralanalyse

Tidsrækkeanalyse

Kasper Rosenkrands

Tidsdomænet og frekvensdomænet

Når vi prøver at analysere en tidsrække i **tidsdomænet**, betyder at vi prøver at forklare den nuværende værdi som funktion af værdier tilbage i tiden på en eller anden vis.

Frekvensdomænet adskiller sig fra denne tilfgang og prøver i stedet at beskrive en (oscillerende) tidsrække ved hjælp af sinus (og/eller cosinus) funktionen.

Periodisk proces

Vi kalder en proces for periodisk hvis den opfylder

$$x_t = A\cos(2\pi\omega t + \phi) \quad \text{for } t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

hvor ω angiver frekvensen (svingninger per tid), A er bestemmer "højden" eller amplituden and ϕ, der kaldes fasen, bestemmer forskydningen af kurven.

Det stokatiske element fremkommer idet vi tillader A og ϕ at være stokastiske.

Omskriving med trigonometrisk identitet

Ved at bruge den trigonometriske identitet

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta),$$

kan vi lave følgende omskrivning

$$\begin{aligned} x_t &= A\cos(2\pi\omega t + \phi) \\ &= U_1 \cos(2\pi\omega t) + U_2 \sin(2\pi\omega t), \end{aligned}$$

hvor $U_1 = A\cos(\phi)$ og $U_2 = -A\sin(\phi)$.

Under visse antagelser er U_1 og U_2 uafhængige standard normalt fordelte, hvilket vi vil antage i det følgende.

Autokovarians funktion

For at udlede autokovarians funktionen for en periodisk proces, starter vi med at introducere

$$c_t = \cos(2\pi\omega t) \quad \text{og} \quad s_t = \sin(2\pi\omega t),$$

ved brug at denne notation har vi autokovariansen givet ved[1]

$$\begin{aligned}
\gamma(h) &= \operatorname{cov}(x_{t+h}, x_t) \\
&= \operatorname{cov}(U_1 c_{t+h} + u_2 s_{t+h}, U_1 c_t + u_2 s_t) \\
&= \operatorname{cov}(U_1 c_{t+h}, U_1 c_t) + \operatorname{cov}(U_1 c_{t+h}, U_2 s_t) \\
&\quad + \operatorname{cov}(U_2 s_{t+h}, U_1 c_t) + \operatorname{cov}(U_2 s_{t+h}, U_2 s_t) \\
&= \sigma^2 c_{t+h} c_t + \sigma^2 s_{t+h} s_t \\
&= \sigma^2 \cos(2\pi\omega(t+h) - 2\pi\omega t) \\
&= \sigma^2 \cos(2\pi\omega h).
\end{aligned}$$

[1] ved at bruge den førnævnte trigonometriske identitet

Den spektrale fordelingsfunktion

Betragter vi en periodisk proces med fast frekvens, givet ved ω_0, så kan autokovariansfunktionen udtrykkes som

$$\gamma(h) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i \omega h} dF(\omega),$$

hvor den kumulative fordelingsfunktion (spektrale fordelingsfunktion) er givet ved

$$F(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } \omega < -\omega_0 \\ \frac{\sigma^2}{2} & \text{hvis } -\omega_0 \leq \omega < \omega_0 \\ \sigma^2 & \text{ellers} \end{cases}$$

Visualisering af den kumulative fordelingsfunktion

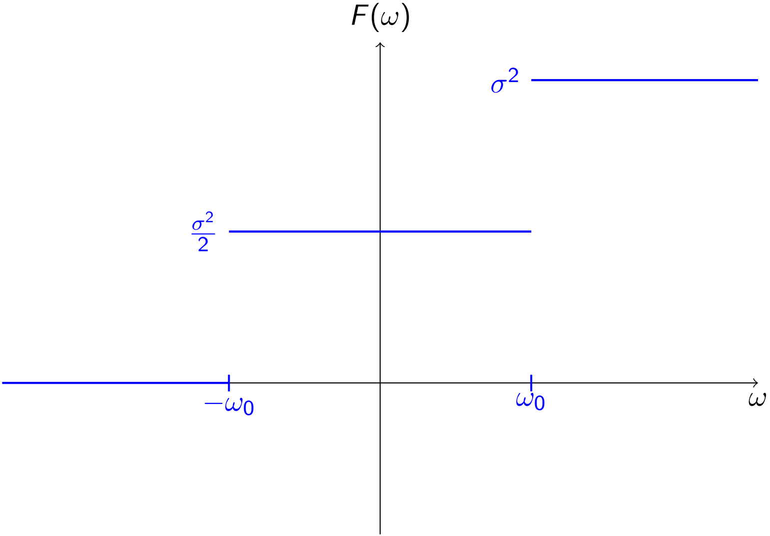


Figure 1: Kumulativ fordelingsfunktion.

Spektraltætheden

Hvis en tidsrække $\{x_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ opfylder betingelsen, $\sum_{h=-\infty}^{\infty}|\gamma(h)| < \infty$ (autokovariansfunktionen er absolut summabel), så definerer vi spektraltætheden for tidsrækken ved

$$f(\omega) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-2\pi i\omega h} \quad \text{for } -\infty < \omega < \infty.$$

AR, MA og hvid støj

Hvis $\phi > 0$ (positiv autokorrelation) er tætheden domineret af lave frekvenser og er glat i tidsdomænet

Hvis $\phi < 0$ (negativ autokorrelation) er tætheden domineret af høje frekvenser og er grov i tidsdomænet

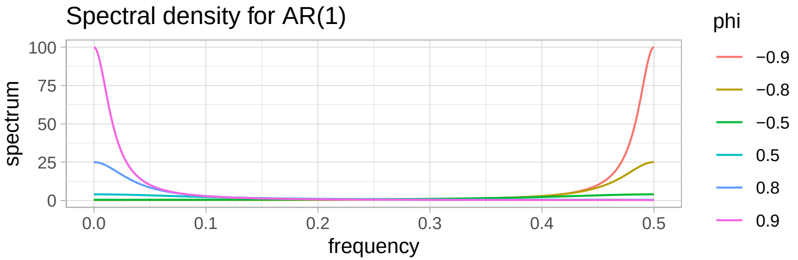
Hvis $\theta > 0$ (positiv autokorrelation) er tætheden domineret af lave frekvenser og er glat i tidsdomænet

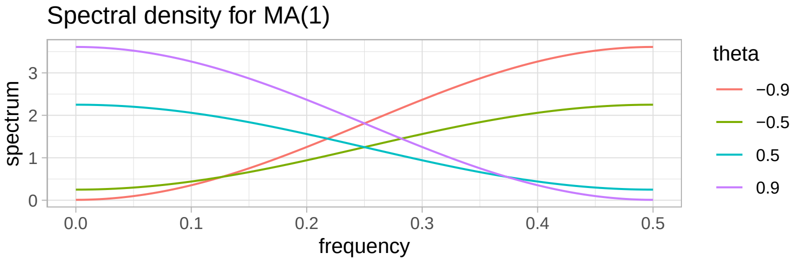
Hvis $\theta < 0$ (negativ autokorrelation) er tætheden domineret af høje frekvenser og er grov i tidsdomænet

Betragtes spektraltætheden for en hvidstøjsproces ses det at

$$f(\omega) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-2\pi i \omega h} = \gamma(0) e^{0} = \sigma_w^2$$

Spektraltæthed eksempler





Spektraltæthed eksempler