8: State Space modeller og Kalman Filteret

Tidsrækkeanalyse

Kasper Rosenkrands

State space modeller

Tanken bag **state space modeller** er, at vi har en skjult (latent) proces x_t som ikke er observerbar. (*Denne antages ofte af være en markovkæde*).

Grundet Markov vil der være afhængighed mellem x'erne.

Vi er interesserede i at modellere x_t, dette er dog ikke direkte muligt.

Man kan **inddirekte observere** x_t gennem en lineær transformeret version y_t, hvor der er tilføjet støj.

Betinget på $\{x_t\}_{\approx \in \mathbb{Z}}$ er

Måleligning og tilstandsligning

Generelt skrives en state space model ud fra to ligninger.

$$\underset{p\times 1}{\boldsymbol{x}_t} = \underset{p\times p}{\Phi}\ \underset{p\times 1}{\boldsymbol{x}_{t-1}} + \underset{p\times 1}{\boldsymbol{w}_t} \qquad \text{(Tilstandsligningen)}$$

$$\underset{q\times 1}{\boldsymbol{y}_t} = \underset{q\times p}{A_t}\ \underset{p\times 1}{\boldsymbol{x}_t} + \underset{q\times 1}{\boldsymbol{v}_t} \qquad \text{(Måleligningen)}$$

AR(1) med støj

I en AR(1) med observationel støj har henholdsvis state-ligningen og observationsligningen formen

$$x_t = \phi x_{t-1} + w_t$$
$$y_t = x_t + v_t,$$

hvor $\{w_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ og $\{v_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ er to uafhængige hvide støje. Da er $\mathbf{\Phi} = \phi$, $\mathbf{A}_t = 1$.

Filtrering, udjævning og forecast

Formålet med at studere en state space model er at få estimeret den underliggende uobserverede proces $\mathbf{x}_t$ givet data $Y_s = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_s\}$ til tid s.

- Når $t > s$ så kaldes problemet forecasting
- Når $t = s$ kaldes problemet filtrering
- Når $t < s$ så kaldes probelmet smoothing