

8: State Space modeller og Kalman Filteret

Tidsrækkeanalyse

Kasper Rosenkrands

State space modeller

Tanken bag **state space modeller** er, at vi har en skjult (latent) proces x_t som ikke er observerbar. (*Denne antages ofte af være en markovkæde*).

Grundet Markov vil der være afhængighed mellem x 'erne.

Vi er interesserede i at modellere x_t , dette er dog ikke direkte muligt.

Man kan **inddirekte observere** x_t gennem en lineær transformeret version y_t , hvor der er tilføjet støj.

Betinget på $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ er

Måleligning og tilstandsligning

Generelt skrives en state space model ud fra to ligninger.

$$\underset{p \times 1}{\mathbf{x}_t} = \underset{p \times p}{\Phi} \underset{p \times 1}{\mathbf{x}_{t-1}} + \underset{p \times 1}{\mathbf{w}_t} \quad (\text{Tilstandsligningen})$$

$$\underset{q \times 1}{\mathbf{y}_t} = \underset{q \times p}{A_t} \underset{p \times 1}{\mathbf{x}_t} + \underset{q \times 1}{\mathbf{v}_t} \quad (\text{Måleligningen})$$

AR(1) med støj

I en AR(1) med observationel støj har henholdsvis state-ligningen og observationsligningen formen

$$x_t = \phi x_{t-1} + w_t$$

$$y_t = x_t + v_t,$$

hvor $\{w_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ og $\{v_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ er to uafhængige hvide støje. Da er $\Phi = \phi$, $\mathbf{A}_t = 1$.

Filtrering, udjævning og forecast

Formålet med at studere en state space model er at få estimeret den underliggende uobserverede proces \mathbf{x}_t givet data $Y_s = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_s\}$ til tid s .

- ▶ Når $t > s$ så kaldes problemet forecasting
- ▶ Når $t = s$ kaldes problemet filtrering
- ▶ Når $t < s$ så kaldes problemet smoothing

Udover estimererne for \mathbf{x}_t er vi også interesseret i deres usikkerhed.

Kalman filter

Problemer af denne type kan løses vha. det såkaldte **Kalman filter**.

Vi benytter følgende notation:

- ▶ $\mathbf{x}_t^s = E[\mathbf{x}_t | \mathbf{Y}_s]$
- ▶ $P_{t_1, t_2}^s = E[(\mathbf{x}_{t_1} - \mathbf{x}_{t_1}^s)(\mathbf{x}_{t_2} - \mathbf{x}_{t_2}^s)^T | \mathbf{Y}_s]$
- ▶ Når $t_1 = t_2 (= t)$ i ovenstående ligning så skrives P_t^s

Fremgangsmåde

- ▶ Kalman filteret er en direkte anvendelse af state space formuleringen, som tillader en estimation at blive opdateret når nye observationer er til rådighed.
- ▶ Processen udføres i to dele. Den første del består i at konstruere en optimal prædiktør for den næste observation givet information op til den aktuelle tid, man nu står i.
- ▶ Dette gøres vha. de såkaldte prædiktionsligninger.
- ▶ Den nye observationsvektor indgår herefter i estimationen af tilstandsvektoren ved at bruge de såkaldte opdateringsligninger.
- ▶ Kalman filteret giver en optimal løsning til prædiktions og opdateringsproblemet.

Prædiktionsligningerne

Prædiktionsligningerne benyttes i første del til at konstruere en optimal prædiktør, givet information til tiden $t - 1$. Ligningerne er givet ved:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_t^{t-1} &= \Phi \mathbf{x}_{t-1}^{t-1} \\ P_t^{t-1} &= \Phi P_{t-1}^{t-1} \Phi^\top + Q.\end{aligned}$$

eftersom

$$\begin{aligned}x_t^{t-1} &= \mathbb{E}(x_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1) \\ &= \mathbb{E}(\Phi_t x_{t-1} + w_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1) = \Phi x_{t-1}^{t-1}\end{aligned}$$

Til tid $t - 1$ er al information indeholdt i \mathbf{x}_{t-1}^{t-1} . Her vil \mathbf{x}_t^{t-1} defineres som estimatoren for \mathbf{x}_t til tid $t - 1$

Opdateringsligningerne

De nye forecastet værdi af x_t og P_t indgår i anden del af Kalman Filteret. Her opnås filtrerede værdier af x_t , som er de værdier af x_t , hvor vi har information af y op til tiden t . De filtrerede værdier fås ved brug af **opdateringsligninger**:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t^t &= \mathbf{x}_t^{t-1} + K_t \varepsilon_t \\ P_t^t &= P_t^{t-1} - K_t A_t P_t^{t-1}, \end{aligned}$$

hvor

- ▶ $\Sigma_t = A_t P_t^{t-1} A_t^\top + R.$
- ▶ $K_t = P_t^{t-1} A_t^\top \Sigma_t^{-1}.$

K kaldes for **Kalman gain**.