5: Unit-root modeller og test herfor

Tidsrækkeanalyse

Kasper Rosenkrands

Test for enhedsrod

Betragt en ARMA(p, q) model der opfylder

$$\phi(B)x_t = \theta(B)w_t.$$

Hvis man ønsker at afgøre om den ARMA(p, q) proces er stationær, skal man kigge på AR polynomiet der er givet ved

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z - \cdots - \phi_p z^p.$$

Hvis alle dette polynomiums rødder liger udenfor enhedscirklen siger vi at tidsrækken $\{x_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ er stationær.

Hvis der derimod er en eller flere **enhedsrødder** er tidsrækken ikke stationær.

Det vil derfor være gavnligt at have en værktøj der kan teste for disse såkaldte enhedsrødder.

Derfor introduceres nu **unit-root** test.

Dickey-Fuller test

Jeg vil introducere både en DF-0 en DF-μ samt en DF-τ test. Lad os starte med DF-0.

Her antages det at x_t er en AR(1) proces

$$x_t = \phi x_{t-1} + w_t.$$

Hvis vi trækker x_{t-1} fra på begge sider fåes

$$\begin{aligned}\nabla x_t &= (\phi - 1)x_{t-1} + w_t \\ &= \delta x_{t-1} + w_t,\end{aligned}$$

hvor $\delta = (\phi - 1)$.

Hypoteserne i DF-0

Hypoteserne i DF-O er de følgende

$$\mathcal{H}_0 : \delta = 0,$$
$$\mathcal{H}_1 : |\delta| < 1.$$

Nulhypotesen svarer til at $\phi = 1$ (**random walk**). Dette svarer til at der haves en enhedsrod, idet

$$\phi(z) = (1 - \phi z) = (1 - 1 \cdot z) = 0 \iff z = 1,$$

og dermed vil processen ikke være stationær.

Den alternative hypotese svarer til at $|\phi| < 1$, som svarer til at processen ikke har en enhedsrod, og dermed er stationær.

Hypotesetest i DF-0

For at teste hypoteserne, anvendes en t-test. **Teststatistikken** er givet ved

$$t_{DF} = \frac{\hat{\delta}}{\mathrm{se}\left(\hat{\delta}\right)},$$

hvor $\hat{\delta}$ opnås ved OLS. (Regression af ∇x_t på x_{t-1}).

Under nulhypotesen vil teststatistikken dog ikke følge en t-fordeling.

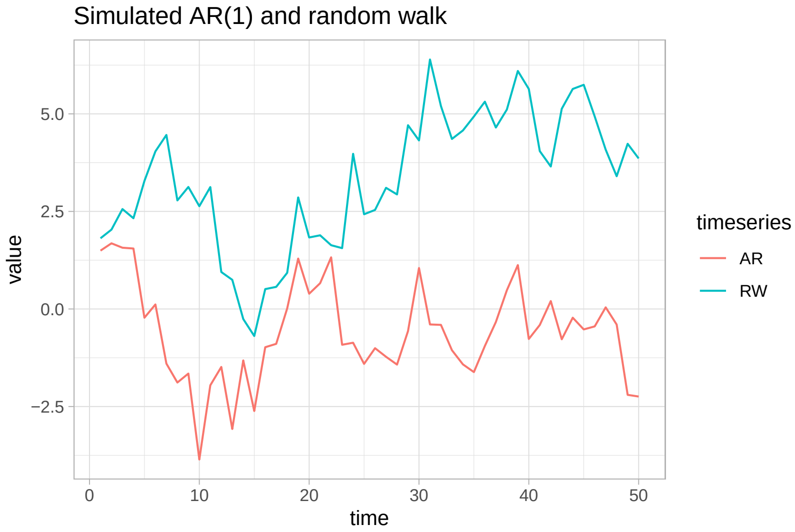
Der findes ikke en lukket form for denne fordeling så det er nødvendigt at slå kritiske værdier op i en tabel.

DF-0 eksempel

Som et eksempel på anvendelsen af DF-0 testen har jeg simuleret to tidsrækker.

Den første er en **AR(1)** proces med $\phi = 0.9$ og den anden er en **random walk**.

Plot af de simulerede tidsrækker



DF-0 test på AR(1) processen

```
##
## ###############################################
## # Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
## ###############################################
##
## Test regression none
##
##
## Call:
## lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 - 1 + z.diff.lag)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -2.5302 -0.7610 -0.2103  0.4272  1.6536
##
## Coefficients:
##            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## z.lag.1     -0.2245     0.1135  -1.978   0.0539 .
## z.diff.lag  -0.1911     0.1472  -1.298   0.2007
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.9608 on 46 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.1665, Adjusted R-squared:  0.1303
## F-statistic: 4.594 on 2 and 46 DF,  p-value: 0.01516
##
##
## Value of test-statistic is: -1.9783
##
## Critical values for test statistics:
##       1pct  5pct 10pct
## tau1 -2.62 -1.95 -1.61
```

DF-0 test på random walk processen

```
##
## ###############################################
## # Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
## ###############################################
##
## Test regression none
##
##
## Call:
## lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 - 1 + z.diff.lag)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.03345 -0.60551 -0.00145  0.62925  2.43262
##
## Coefficients:
##            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## z.lag.1    -0.01824    0.03829  -0.476    0.636
## z.diff.lag -0.17659    0.14677  -1.203    0.235
##
## Residual standard error: 0.9813 on 46 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.04024,    Adjusted R-squared:  -0.001493
## F-statistic: 0.9642 on 2 and 46 DF,  p-value: 0.3888
##
##
## Value of test-statistic is: -0.4763
##
## Critical values for test statistics:
##       1pct  5pct 10pct
## tau1 -2.62 -1.95 -1.61
```

DF-μ og DF-τ

Vi kan udvide DF-0 testen til en DF-μ test ved at inkludere et drift led, i det tilfælde bliver nulhypotesen til: **random walk med drift**

$$x_t = \mu + \phi x_{t-1} + w_t.$$

Ydermere kan vi udvide til DF-τ testen ved at inkludere en lineær trend, foruden drift leddet, i det tilfælde bliver nulhypotesen så: **random walk med drift plus en lineær trend**

$$x_t = \mu + \tau t + \phi x_{t-1} + w_t.$$

ADF test

Ofte er antagelsen om AR(1) for restriktiv, derfor findes der en udvidelse til DF-testen som kaldes **ADF**-test (augmented Dickey-Fuller).

Det antages at x_t er en AR(p) model

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + w_t.$$

Her kan man igen omskrive ved at trække x_{t-1} fra på begge sider,

$$\nabla x_t = \delta x_{t-1} - \sum_{j=1}^{p-1} \tilde{\delta}_j \nabla x_{t-j} + w_t,$$

hvor

$$\begin{aligned} \delta &= \phi_1 + \cdots + \phi_p - 1 \\ \tilde{\delta}_j &= \phi_{j+1} + \cdots + \phi_p \quad \text{for} \quad j = 1, \ldots p-1. \end{aligned}$$

ADF hypoteserne

Hypoteserne for ADF-testen er de samme som for DF-testen.

$$\mathcal{H}_0 : \delta = 0,$$
$$\mathcal{H}_1 : |\delta| < 1.$$

Nulhypotesen svarer til at $\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p = 1$. Dette svarer til at der haves en enhedsrod, idet

$$\begin{aligned}
\phi(z) &= (1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p) \\
&\Downarrow \\
\phi(1) &= (1 - \phi_1 \cdot 1 - \phi_2 \cdot 1^2 - \cdots - \phi_p \cdot 1^p) \\
&= 1 - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

og dermed vil processen ikke være stationær.