8: State Space modeller og Kalman Filteret

Tidsrækkeanalyse

Kasper Rosenkrands

State space modeller

Tanken bag **state space modeller** er, at vi har en skjult (latent) proces $\mathbf{x}_t$ som ikke er observerbar. (*Denne antages ofte af være en markovkæde*).

Grundet Markov vil der være afhængighed mellem $\mathbf{x}$'erne.

Vi er interesserede i at modellere $\mathbf{x}_t$, dette er dog ikke direkte muligt.

Man kan **inddirekte observere** $\mathbf{x}_t$ gennem en lineær transformeret version $\mathbf{y}_t$, hvor der er tilføjet støj.

Betinget på $\{\mathbf{x}_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ er $\mathbf{y}_t$'erne uafhængige og $\mathbf{y}_t$ afhænger kun af $\mathbf{x}_t$

Måleligning og tilstandsligning

Generelt skrives en state space model ud fra to ligninger.

$$\underset{p\times 1}{\boldsymbol{x}_t} = \underset{p\times p}{\Phi}\ \underset{p\times 1}{\boldsymbol{x}_{t-1}} + \underset{p\times 1}{\boldsymbol{w}_t} \qquad \text{(Tilstandsligningen)}$$

$$\underset{q\times 1}{\boldsymbol{y}_t} = \underset{q\times p}{A_t}\ \underset{p\times 1}{\boldsymbol{x}_t} + \underset{q\times 1}{\boldsymbol{v}_t} \qquad \text{(Måleligningen)}$$

Bemærk at $\boldsymbol{w}_t \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{Q})$ og $\boldsymbol{v}_t \sim \mathcal{N}_q(\mathbf{0}, \boldsymbol{R})$.

AR(1) med støj

I en AR(1) med observationel støj har henholdsvis state-ligningen og observationsligningen formen

$$\begin{aligned} x_t &= \phi x_{t-1} + w_t \\ y_t &= x_t + v_t, \end{aligned}$$

hvor $\{w_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ og $\{v_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ er to uafhængige hvide støje. Da er $\mathbf{\Phi} = \phi$, $\mathbf{A}_t = 1$.

Filtrering, udjævning og forecast

Formålet med at studere en state space model er at få estimeret den underliggende uobserverede proces $\mathbf{x}_t$ givet data $Y_s = \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s\}$ til tid s.

- Når $t > s$ så kaldes problemet forecasting
- Når $t = s$ kaldes problemet filtrering
- Når $t < s$ så kaldes probelmet smoothing

Udover estimaterne for $\mathbf{x}_t$ er vi også interesseret i deres usikkerhed.

Kalman filter

Problemer af denne type kan løses vha. det såkaldte **Kalman filter**.

Vi benytter følgende notation:

- $\mathbf{x}_t^s = E[\mathbf{x}_t | \mathbf{Y}_s]$
- $P_{t_1,t_2}^s = E[(\mathbf{x}_{t_1} - \mathbf{x}_{t_1}^s)(\mathbf{x}_{t_2} - \mathbf{x}_{t_2}^s)^T | \mathbf{Y}_s]$
- Når $t_1 = t_2 (= t)$ i ovenstående ligning så skrives P_t^s

Fremgangsmåde

- Kalman filteret er en direkte anvendelse af state space formuleringen, som tillader en estimation at blive opdateret når nye observationer er til rådighed.
- Processen udføres i to dele. Den første del består i at konstruere en optimal prædiktor for den næste observation givet information op til den aktuelle tid, man nu står i.
- Dette gøres vha. de såkaldte prædiktionsligninger.
- Den nye observationsvektor indgår herefter i estimationen af tilstandsvektoren ved at bruge de såkaldte opdateringsligninger.
- Kalman filtret giver en optimal løsning til prædiktions og opdateringsproblemet.

Prædiktionsligningerne

Prædiktionsligningerne benyttes i første del til at konstruere en optimal prædiktor, givet information til tiden $t-1$. Ligningerne er givet ved:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_t^{t-1} &= \Phi \boldsymbol{x}_{t-1}^{t-1} \\ P_t^{t-1} &= \Phi P_{t-1}^{t-1} \Phi^\top + Q. \end{aligned}$$

eftersom

$$\begin{aligned} x_t^{t-1} &= \mathbb{E}(x_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1) \\ &= \mathbb{E}(\Phi_t x_{t-1} + w_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1) = \Phi x_{t-1}^{t-1} \end{aligned}$$

Til tid $t-1$ er al information indeholdt i $\mathbf{x}_{t-1}^{t-1}$. Her vil $\mathbf{x}_t^{t-1}$ defineres som estimatoren for $\mathbf{x}_t$ til tid $t-1$

Opdateringsligningerne

Det nye forecast af x_t og P_t indgår i anden del af Kalman Filteret. Her opnås filtrerede værdier af x_t, som er de værdier af x_t, hvor vi har information af y op til tiden t. De filtrerede værdier fås ved brug af **opdateringsligninger**:

$$\boldsymbol{x}_t^t = \boldsymbol{x}_t^{t-1} + K_t \varepsilon_t$$
$$P_t^t = P_t^{t-1} - K_t A_t P_t^{t-1},$$

hvor

- $\Sigma_t = A_t P_t^{t-1} A_t^\top + R$.
- $K_t = P_t^{t-1} A_t^\top \Sigma_t^{-1}$.

K kaldes for **Kalman gain**.