AALBORG UNIVERSITET

Eksamensnoter

4. semester: *Analyse 2*

Kasper Rosenkrands

Indhold

1 Differentiable funktioner af flere variable

1.1 Differentiabilitetssætningen i det generelle tilfælde

Sætning 9.12. Lad $f : U \to \mathbb{R}$ være en funktion og lad $x_0 \in U$. Antag, at de partielt afledte af f eksisterer i alle punkter i en åben kugle $B_r(x_0) \subseteq U$, og at de derved fremkomne funktioner

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : B_r(x_0) \to \mathbb{R}, \ j = 1, 2, \ldots, n,$$

alle er kontinuerte i x_0. Så er f differentiabel i x_0.

Bevis. Ideerne i beviset er de samme som i beviset for tilfældet $n = 2$, så vi gør ikke så meget ud af detaljerne. Lad x_0 have koordinaterne $x_0 = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ og lad $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ være et vilkårligt punkt i $b_r(x_0)$. Sæt

$$y^k = (x_1, x_2, \ldots, x_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n) \quad \text{for} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Bemærk, at $y^0 = x_0$, $y^n = x$ og $y^k \in B_r(x_0)$ for alle k, samt at

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} f(y^k) - f(y^{k-1}).$$

Idet alle koordinater for y^k og y^{k-1} er de samme med undtagelse af den k'te, fås af Middelværdisætningen, at

$$f(y^k) - f(y^{k-1}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(z_k)(x_k - a_k),$$

hvor z_k er et punkt på linjestykket, der forbinder y^{k-1} med y^k. Vi har altså

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(z_k)(x_k - a_k) \\ &= \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(z_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) \right)(x_k - a_k). \end{aligned}$$

Heraf følger resultatet, hvis vi siger, at der eksisterer en o-funktion φ således, at

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(z_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) \right)(x_k - a_k) = \varphi(x - x_0)\|x - x_0\|.$$

Da denne ligning er opfyldt for $x = x_0$, hvis $\varphi(0) = 0$, skal vi blot bevise, at

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(z_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) \right) \frac{x_k - a_k}{\|x - x_0\|} \to 0 \quad \text{for} \quad x \to x_0.$$

Lad $\varepsilon > 0$ være givet. For ethvert k findes et $\delta_k > 0$ således, at der for alle $x \in B_r(x_0)$ gælder

$$\|x - x_0\|\delta_k \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Vælg δ som det mindste af tallene r og $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$.

Da $|x_k - a_k| \leq \|x - x_0\|$ for alle $k = 1, 2, \ldots, n$, får vi for alle x i den udprikkede kugle $\dot{B}_\delta(x_0)$

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(z_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) \right) \frac{x_k - a_k}{\|x - x_0\|} \right| \\
&\qquad \leq \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(z_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) \right| < n\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

hvormed sætningen er bevist. ■

2 Taylors formel

Sætning 1.1 (Taylors Sætning med restled). Lad $k \in \mathbb{N}$, $x_0, x \in A \subset \mathbb{R}$, $x \neq x_0$ og $f : A \to \mathbb{R}$ opfylde, at den j'te afledede $f^{(j)}$ af f eksisterer og er kontinuert på det lukkede interval mellem x_0 og x og differntiabel på det åbne interval mellem x_0 og x for alle $j \leq k$. Så findes et punkt c strengt mellem x_0 og x så

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}. \tag{2.1}$$

Bevis. For $x \neq x_0$ findes netop én løsning $M \in \mathbb{R}$ til ligningen

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + M(x - x_0)^{k+1}.$$

Vi vil vise, at $M = \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}$ for et c mellem x_0 og x. For at vise dette, definierer vi funktionen $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ på følgende måde:

$$F(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(t)}{j!}(x - t)^j + M(x - t)^{k+1}.$$

Ifølge antagelserne er F kontinuert på det lukkede intercal mellem x_0 og x og differentiable på det åbne intercal mellem x_0 og x. Vi har valgt M, således at $F(x_0) = f(x)$, og vi har desuden, at $F(x) = \frac{f^{(0)}(x)}{0!}0^0 + \sum_{j=1}^{k} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} \cdot 0^j + M \cdot 0^{k+1} = f(x)$. Dermed kan vi anvende Middelværdisætningen på F på intervallet mellem x_0 og x og får eksistensen af et c mellem x_0 og x så

$$F'(c) = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Men

$$F'(c) = f'(c) + \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{f^{(j+1)}(c)}{j!}(x - c)^j - \frac{f^{(j)}(c)}{(j-1)!}(x - c)^{j-1} \right) - M(k+1)(x - c)^k,$$

hvor alle led umiddelbart går ud med hinanden parvist, borset fra de to led i

$$\frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(x - c)^k - M(k+1)(x - c)^k,$$

som dermed må smumme til 0, da $F'(c) = 0$, og dermed er

$$M = \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)k!} = \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}$$

som påståaet. ∎

2.1 Taylors Sætning for funktioner af flere variable

Før vi formulerer og beviser Taylors Sætning for funktioner af flere variable, vil vi først introducere en meget nyttig og - anvendt notation.

Definition 2.1 (Multi-indeks-notation). Et *multi-indeks* er en n-tupel af ikke-negative heltal $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. For to multi-indices $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$ og et $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ defineres:

1. Sum/differens: $\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \alpha_2 \pm \beta_2, \ldots, \alpha_n \pm \beta_n)$.
2. Absolutværdi: $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.
3. Fakultet: $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$.
4. Potens: $x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$.
5. Partielt afledet af højere orden: $\partial^\alpha = \prod_{i=1}^n \partial_i^{\alpha_i}$ hvor $\partial_i^{\alpha_i} = \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}$.

Sætning 2.2 (Taylors Sætning med restled). Lad $k \in \mathbb{N}$, $x, x_0 \in A \subset \mathbb{R}^n$, $x \neq x_0$ og $f : A \to \mathbb{R}$ opfylde, at $\partial^\alpha f$ eksisterer og er differentiabel på linjestykket $L = \{(1-t)x_0 + tx \in \mathbb{R}^n \mid t \in [0,1]\}$ mellem x_0 og x for $|\alpha| \leq k$. Så eksisterer et $y \in \{(1-t)x_0 + tx \in \mathbb{R}^n \mid t \in (0,1)\}$ så

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{\partial^\alpha f(y)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha.$$

Bevis. Da $\partial^\alpha f$ er antaget differentiabel på L for alle $|\alpha| \leq k$, så må $L \subset A$ og $x_0, x \in A$ være indre punkter, og vi kan finde et $r > 0$ så $F : (-r, 1+r) \to \mathbb{R}$ givet ved $F(t) = f((1-t)x_0 + tx)$ er veldefineret og $k+1$ gange differentiabel på $[0,1]$. Dermed kan vi anvende Sætning 1.1 på F med $x_0 = 0$ og $x = 1$:

$$F(1) = \sum_{j=0}^k \frac{F^{(j)}(0)}{j!} + \frac{F^{(k+1)}(c)}{(k+1)!},$$

hvor $c \in (0,1)$. Kædereglen giver nu:

$$F^{(j)}(t) = \sum_{|\alpha| = j} \frac{j!}{\alpha!}(\partial^\alpha f)((1-t)x_0 + tx)(x - x_0)^\alpha,$$

se Opgave 1, hvoraf resultatet følger med $y = (1-c)x_0 + cx$. ■

3 Sætningen om inverse funktioner

3.1 Sætningen om inverse funktioner

Sætning 8.3 (Sætningen om inverse funktioner). Lad

* $\underline{u}_0 \in U_0 \dot{\subset} \mathcal{O} \dot{\subset} \mathbb{R}^m$
* $g \in C^1(\mathcal{O}; \mathbb{R}^m)$ hvor $[Dg(u_0)]$ er invertibel
* U_0 er en kugle omkring $\underline{u}_0$ så $g_{|U_0}$ er injektiv

så findes $g(\underline{u}_0) \in E \dot{\subset} \mathbb{R}^m$, $f \in C^1(E; \mathbb{R}^m)$ og

(1) $V \;:=\; g^{-1}_{|U_0} = f(E) \dot{\subset} \mathbb{R}^m$

(2) $g(f(w)) = w$ på E og $f(g(u)) = u$ på V

(3) $[Dg(f(w))]$ er invertibel og $[Df(w)] = [Dg(f(w))]^{-1}$

Bevis. $g_{|U_0}$ er injektiv som følge af Proposition 8.2

Sæt

$$\begin{aligned} U = U_0 \times \mathbb{R}^m \dot{\subset} \mathbb{R}^{m+m} \\ h \in C^1(U; \mathbb{R}^m) \\ h(u,w) = g(u) - w \end{aligned}$$

Definér $a = [u_0, g(u_0)] = [u_0, w_0]$, således at $h(a) = 0$.

Ideen er nu at vise at h opfylder antagelserne i Sætningen om implicit givne funktioner

(1) $U \dot{\subset} \mathbb{R}^d$

(2) $h \;:\; U \to \mathbb{R}^m \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$

(3) $h(a) = 0$ så $[D_u h(a)]$ er invertibel

Differentier h m.h.t. u

$$[D_u h(u,w)] = [Dg(u)]$$

indsæt a

$$[D_u h(a)] = [Dg(u_0)]$$

hvor vi ved at højre side er invertibel, derfor må venstre side også være det.

Dermed er antagelserne i Sætninge om implicit givne funktioner opfyldt og vi ved derfor at der findes

$$g(u_0) = w_0 \in E$$

$$f \in C^1(E; \mathbb{R}^m)$$

så

$$\begin{aligned} h\Big([f(w), w]\Big) &= 0 \\ g(f(w)) - w &= 0 \\ g(f(w)) &= w \end{aligned} \tag{3.1}$$

Vi beviser først **(1)**, det gør vi ved at vise det følgende

$$f(E) \subseteq g_{|U_0}^{-1}(E) \quad \text{og} \quad f(E) \supseteq g_{|U_0}^{-1}(E)$$

Vi starter med ($\subseteq$)

Lad $u \in f(E)$, dvs.

$$\exists\, w \in E \quad : \quad u = f(w)$$

ifølge (3.1) må

$$g(u) = w$$

derfor kan vi konkludere at $g(u) \in E$ og dermed $u \in g_{|U_0}^{-1}(E)$. Dette leder os til konklusionen

$$f(E) \subset g_{|U_0}^{-1}(E)$$

Herefter tager vi ($\supseteq$)

Lad $x \in g_{|U_0}^{-1}(E)$, dvs.

$$\exists\, w \in E \quad : \quad w = g(x)$$

hvilket vil sige, ifølge (3.1), at

$$w = g(f(w))$$

det medfører at

$$f(w) = x$$

$g_{|U_0}$ er injektiv, $f(w) \in U_0$ og vi kan derfor konkludere at

$$g_{|U_0}^{-1}(E) \subseteq f(E)$$

hvilket beviser **(1)**.

Vi beviser nu **(2)**, men dog kun den ene vej da fremgangsmåden er den samme.

Vælg $u \in V$, med andre ord

$$\exists\, w \in E \quad : \quad w \in g(u)$$

fra (3.1) ser vi at

$$g(f(w)) = w = g(u)$$

og derfor må $f(w) = u$, hvis vi nu anvender f på det ovenstående får vi

$$f(g(u)) = u$$

Vi beviser nu **(3)**

Vi ved at $w = g(f(w))$ resultatet fås ved at differentiere denne ligning

$$\begin{aligned} [D_w w] &= [D_w = g(f(w))] \\ [I_m] &= [Dg(f(w))][Df(w)] \\ [Dg(f(w))]^{-1} &= [Df(w)] \end{aligned}$$

hvilket konkluderer beviset. $\blacksquare$

4 Sætningen om implicit givne funktioner

4.1 Lemma 7.2

Lemma 7.2.

* Lad $\mathcal{O} \dot{\subset} \mathbb{R}^d$, $K \subset \mathcal{O}$ hvor K er konveks og kompakt
* $\varphi \in C^1(\mathcal{O})$, dvs. at de partielt afledte eksisterer og er kontinuerte.
* Definér
$$\|\partial_j \varphi\|_\infty := \sup_{x \in \mathcal{O}} |\partial_j \varphi(x)| < \infty$$

Så er φ lipschitz-kontinuert på K, dvs.

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq L\|x - x'\|, \quad \forall x, x' \in K$$

hvor

$$L := \sqrt{\sum_{j=1}^{d} \|\partial_j \varphi\|_\infty^2}$$

At K er en konveks mængde betyder at

$$(1-t)x' + tx \in K, \quad \forall x, x' \in K, \ \forall t \in [0,1]$$

Bevis. Lad $x, x' \in K$. Definér $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ som

$$f(t) = \varphi\Big((1-t)x' + tx\Big), \quad 0 \leq t \leq 1$$

Vi ved $\varphi \in C^1(\mathcal{O})$, så da $K \subset \mathcal{O}$ og konveks er f differentiabel og kædereglen fortæller os at

$$f'(t) = \langle \nabla\varphi\big((1-t)x' + tx\big), x - x' \rangle$$

Nu kigger på vi venstre siden af den ulighed vi gerne vil vise

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| = |f(1) - f(0)| = \left| \int_0^1 f'(t) \right| \leq \int_0^1 |f'(t)| dt$$

vi kan nu indsætte det kendte udtryk for $f'(t)$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |\langle \nabla\varphi\big((1-t)x' + tx\big), x - x' \rangle| dt &\leq \int_0^1 \|\nabla\varphi\big((1-t)x' + tx\big)\| \cdot \|x - x'\| dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{\sum_{j=1}^{d} |\partial_j \varphi\big((1-t)x' + tx\big)|^2} \cdot \|x - x'\| dt \\
&\leq \int_0^1 \sqrt{\sum_{j=1}^{d} \|\partial_j \varphi\|^2} \cdot \|x - x'\| dt \\
&= L\|x - x'\| \int_0^1 1 dt
\end{aligned}$$

■

Nu vil den tredje del af beviset for Sætningen om implicit givne funktioner blive gennemgået

Bevis. Lad $w, w' \in P_n\left(\frac{\varepsilon}{2C}\right)$. Vi ved at $f(w), f(w') \in \overline{Q_m(\varepsilon)}$.

Sæt

$$x = [f(w), w],\ x' = [f(w'), w'] \in \overline{Q_m(\varepsilon)} \times P_n\left(\frac{\varepsilon}{2C}\right)$$

Vi ved at h er differentiabel i x' dvs.

$$h(x) = h(x') + [Dh(x')](x - x') + \varphi_{x'}(x - x')\|x - x'\| \tag{4.1}$$

Betragt funktionen

$$x \mapsto \det[D_u h(x)]$$

$[D_u h(a)]$ er antaget invertibel derfor må $\det[D_u h(a)] \neq 0$. h er desuden kontinuert differentiabel hvilket mefører at

$$\exists\ r > 0\ \forall x \in B_r(a)\ :\ \det[D_u h(x)] \neq 0.$$

Der kan derfor vælges $\varepsilon \leq r$ så $[D_u h(x)]$ er defineret for $x \in E = B_\varepsilon(a)$

Vi kan nu omskrive (4.1) med vores $x = [f(w), w]$ og $x' = [f(w'), w']$, samt opdelingen af Jacobi matricen

$$[Dh(x)] = \Big[[D_u h(x)], [D_w h(x)]\Big]$$

$$\begin{aligned} h([f(w), w]) = h([f(w'), w']) + &\Big[[D_u h([f(w'), w'])], [D_w h([f(w'), w'])]\Big]([f(w), w] - [f(w'), w'])+ \\ &\varphi_{x'}([f(w), w] - [f(w'), w'])\|[f(w), w] - [f(w'), w']\| \\ = h(&[f(w'), w']) + [D_u h([f(w'), w'])](f(w) - f(w')) + [D_w h(f(w'), w'])](w - w')+ \\ &\varphi_{x'}\Big([f(w) - f(w')], [w - w']\Big)\|[f(w) - f(w')], [w - w']\| \end{aligned}$$

Husk at $h(f(w), w) = h(f(w'), w') = 0$, og at $\det[D_u h(f(w'), w')] \neq 0\ \forall w \in P_n\left(\frac{\varepsilon}{2C}\right)$ Dermed fås det følgende ved at gange med den inverse og indse at nogle af ledene er nul

$$f(w) - f(w') = -[D_u h(f(w'), w')]^{-1}[D_w h(f(w'), w')](w - w') - [D_u h(f(w'), w')]^{-1}\varphi_{x'}(\ldots)\|\ldots\|$$

Det er nok at vise at

$$f(w) - f(w') = L(w - w') + \varphi(w - w')\|w - w'\|$$

for L lineær og φ en lille-o funktion. Vi ser straks at matrix-vektor produktet er en lineær afbildning. Nu mangler vi blot at vise o-funktionen, bemærk at

$$\|[f(w) - f(w'), w - w']\|$$

er begrænset.

Vi har altså nogle konstanter og en lille-o funktion. f er derfor differentiabel i w' og dermed på $P_n\left(\frac{\varepsilon}{2C}\right)$. ■

5 Banachs fikspunktsætning

Definition 5.1.

* (X, d) metrisk rum
* $F : X \to X$ kaldes en kontraktion hvis $\exists\ \alpha \in [0, 1)$ så

$$d(F(x), F(y)) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in X$$

* Et punkt kaldes et fikspunkt for F hvis $F(x) = x$

Sætning 5.2. (X, d) fuldstændigt metrisk rum, $F : X \to X$ kontraktion så har F et unikt fiksprunkt.

Bevis. **Først viser vi unikhed**

Antag $a, b \in X$ så $F(a) = a$ og $F(b) = b$.

$$d(a, b) = d(F(a), F(b)) \leq \alpha d(a, b)$$

$$d(a, b) \leq \alpha d(a, b)$$

$$1 \leq \alpha$$

hvilket er en modstrid. Derfor kan det konkluderes at hvis der findes et fikspunkt, så er det unikt.

Nu konstruerer vi et fikspunkt

Betragt følgen $\{y_n\}_{n \geq 1} \subset X$, hvor y_1 er vilkårlig og

$$y_n := F(y_{n-1}), \quad n \geq 2$$

Betragt tilfældet hvor $y_2 = F(y_1) = y_1$, det vil betyde y_1 er vores fikspunkt og vi er færdige.

Vi kan derfor antage at $d(y_2, y_1) > 0$.

Vi viser to ting

(1) Følgen er Cauchy i X, derfor konvergerer den til $y \in X$

(2) y er fikspunkt for F

Vi starter med (1)

For ethvert $\varepsilon > 0$ vil vi finde $N(\varepsilon) > 0$ så $p \geq q \geq N(\varepsilon)$ medfører $d(y_p, y_q) < \varepsilon$. Med andre ord

$$d(y_q, y_{q+k}) < \varepsilon, \quad \forall k \geq 0,\ \forall q \geq N(\varepsilon) \tag{5.1}$$

Hvis $k \geq 0$ følger af trekantsuligheden at

$$\begin{aligned} d(y_q, y_{q+k}) &\leq d(y_q, , y_{q+1}) + d(y_{q+1}, y_{q+k}) \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} d(y_{q+i}, y_{q+i+1}) \end{aligned} \tag{5.2}$$

For ethvert $n \leq 1$ har vi

$$d(y_n, y_{n+1}) = d(F(y_{n-1}), F(y_n)) \leq \alpha d(y_{n-1}, y_n) \leq \ldots \leq \alpha^{n-1} d(y_1, y_2), \quad \forall n \geq 1$$

Det vil sige

$$d(y_{q+i}, y_{q+i-1}) \leq \alpha^{q+i-1} d(y_1, y_2), \quad \forall q \geq 1,\ i \geq 0$$

Det ovenstående sammen med (5.2) medfører at

$$d(y_q, y_{q+k}) \leq \alpha^{q-1} d(y_1, y_2)(1 + \ldots + \alpha^{k-1}) \leq \frac{\alpha^{q-1}}{1-\alpha} d(y_1, y_2)$$

Da $\alpha < 1$ følger det at $\lim \alpha^q = 0$.

Vi vil gerne opfylde (5.1)

$$\frac{\alpha^{q-1}}{1-\alpha} d(y_1, y_2) < \varepsilon$$
$$\alpha^q < \varepsilon \frac{\alpha(1-\alpha)}{d(y_1, y_2)}$$

vælg $N(\varepsilon)$ så det ovenstående er opfyldt.

Det vil sige at

$$\lim_{n \to \infty} d(y_n, y_{infty}) = 0$$

Vi viser nu (2)

For $n \geq 1$:

$$d(F(y), y) \leq d(F(y), F(y_n)) + d(F(y_n), y)$$

men

$$d(F(y), F(y_n)) \leq \alpha d(y, y_n) \to 0$$

og

$$d(F(y_n), y) = d(y_{n+1}, y) \to 0$$

afstanden mellem to punkter er nul hvis og kun hvis de to punkter er ens! Dermed konkluderer vi at

$$F(y) = y$$

hvilket afslutter beviset. $\blacksquare$

6 Eksistens og entydighed af løsninger til ODE'er

Sætning 6.3. Antag $U \dot{\subseteq} \mathbb{R}^d$, $I \dot{\subseteq} \mathbb{R}$. Antag $y_0 \in U$ og $r_0, \delta_0 > 0$ så $\overline{B_{r_0}(y_0)} \subset U$, $[t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \subset I$. Betragt $f : I \times U \to \mathbb{R}^d$ kontinuert hvor om der gælder for $L > 0$.

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0], \quad \forall x, y \in B_{r_0}(y_0) \tag{6.1}$$

så for IVP:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0. \tag{6.2}$$

Definer $\delta_1 := \min\{\delta_0, r_0/M, 1/L\}$. Da eksisterer en entydig løsning

$$y : (t - \delta_1, t_0 + \delta_1) \to \overline{B_{r_0}(y_0)}$$

Bevis. Tag $0 < \delta < \delta_1$, og definer $K := [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset \mathbb{R}$ enhver kontinuert funktion $\phi : K \to \mathbb{R}^d$ er født begrænset og fordi $\mathbb{R}^d$ er et Banach rum siger proposition 6.2 at rummet $(C(K; \mathbb{R}^d), d_\infty)$ er et fuldstændigt metrisk rum.

Definer

$$X := \{g \in C(K; \mathbb{R}^d) : g(t) \in \overline{B_{r_0}(y_0)}, \forall t \in K\} \tag{6.3}$$

Lemma 6.4. Det metriske rum (X, d_∞) er fuldstændigt.

Bevis. Betragt en Cauchy følge $\{g_n\}_{n\geq 1} \subset X$. Fordi $(C(K; \mathbb{R}^d), d_\infty)$ er fuldstændigt har vi en $g \in (C(K; \mathbb{R}^d)$ hvor $\lim_{n\to\infty} d_\infty(g_n, g) = 0$. Vi har med andre ord for ethvert $t \in K$

$$g(t) = \lim_{n\to\infty} g_n(t), \quad \lim_{n\to\infty} \|g_n(t) - g(t)\| = 0.$$

Fordi følgen er i X er det følgende opfyldt $\|g_n(t) - y_0\| \leq r_0 \quad \forall t, n$ hvilket medfører at

$$\|g(t) - y_0\| = \lim_{n\to\infty} \|g_n(t) - y_0\| \leq r_0$$

og g tilhører dermed X hvilket konkluderer beviset. ■

Lemma 6.5. Definer $F : X \to C(K; \mathbb{R}^d)$

$$[F(g)](t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, g(s))ds, \quad \forall t \in K$$

hvor f opfylder (6.1). Hvorfor (i) $vm_f \subseteq X$ og (ii) $F : X \to X$ er en kontraktion.

Bevis. **udeladt** ■

Forsættelse af beviset for Sætning 6.3

F kontraktion altså siger Banach at der eksisterer et entydig kontinuert funktion $y : K \to \overline{B_{r_0}(y_0)}$ så

$$y(t) = [F(y)](t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds, \quad t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

dette kan differentieres som følge af Analysens Fundamental Sætning

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds\right) = f(t, y(t)) = y'(t)$$

hvilket viser (6.2). ■