Riassunto Analisi 2

Alessandro Matteo Rossi

20 marzo 2021

Indice

1 Lezione 1 - 01/03/2021

Definizione 1.1 (Integrale indefinito)**.** Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ aperto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ diciamo che f ammette primitiva in Ω se $\exists F : \Omega \to \mathbb{R}$ derivabile tale che $F'(x) = f(x)\ \forall x \in \Omega$. F è detta primitiva di f.

La nozione può essere estesa a $\tilde{\Omega} = [a, b]$ se presenti la derivata destra in a e sinistra in b.

Osservazione 1.1. Esistono funzioni che non ammettono primitiva. Ad esempio la funzione di Heaviside definita come $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$. Infatti non esiste una funzione F che abbia come derivata f per ogni punto.

In $\mathbb{R}$ parlare di *aperto connesso* o *intervallo* è equivalente.

Osservazione 1.2. Se su $\Omega = I$ intervallo F e G sono primitive di f su $I = (a, b)$ allora $(F - G)' = 0 \Rightarrow F - G = cost$ per Lagrange, da cui deriva la caratterizzazione delle costanti.

Ex 1.1 (Integrale di $1/x$)**.** Presa $f(x) = \frac{1}{x}$ su $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ essa ha integrale pari a $\int \frac{1}{x}\, dx = \begin{cases} \log x + c & x > 0 \\ \log(-x) + d & x < 0 \end{cases}$.
È fondamentale non usare il valore assoluto poiche il nostro integrale è definito su intervalli, e pertanto f è da integrare sui due intervalli su cui è definita.

Una condizione necessaria per avere primitiva è la **proprietà di Darboux** (è evidente che pertanto le funzioni derivate godano di (D)). Una funzione ha la proprietà di Darboux se mappa intervalli in intervalli.

Teorema 1.1. Se f ammette primitiva su I, allora f gode di (D) su I.

Dim. Siano $a, b \in I$ e sia $\gamma \in [f(a), f(b)]$ (se coincidono la tesi è ovvia!). Voglio mostrare che $\exists\, c \in [a, b] : f(c) = \gamma$, supponendo che $f(a) < \gamma < f(b)$. Sia $G(x) = F(x) - \gamma x$ dove $F' = f$. G è derivabile, in quanto somma di funzioni derivabili $\Rightarrow$ è continua. La derivata di G è $G' = f - \gamma$ che non è monotona ed essendo continua non è iniettiva $\Rightarrow$ non è invertibile. Allora $\exists x_1, x_2 \in (a, b) : G(x_1) = G(x_2)$ e per il teorema di Rolle $\exists c \in (x_1, x_2) : G'(c) = 0$ e quindi $f(c) = \gamma$, che è (D). $\square$

2 Lezione 2 - 04/03/2021

Esistono funzioni che pur essendo (D) non sono integrabili, a riprova del fatto che è solo una condizione necessaria.

Ex 2.1. $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$ gode di (D) ma non ammette primitiva. Se per $x = 0$ valesse 0, allora avrebbe primitiva.

Esistono due teorie dell'integrazione: quella classica di Riemann e quella moderna di Lebesgue. La teoria moderna non permette di calcolare "più" integrali di quella classica: è migliore perchè permette di dominare l'errore più efficientemente quando si calcolano integrali approssimati (spessissimo l'integrale è solo stimabile e non calcolabile con esattezza). L'integrale classico di Cauchy-Riemann è uno strumento utile per determinare la misura di superfici o solidi.

Faccio tre puntualizzazioni:

1. Le funzioni "buone" intese come continue, monotone e ovunque derivabili sono una assoluta minoranza. In matematica domina quella che noi consideriamo patologia. È impossibile (inteso come probabilità tendente a 0) pescare dal secchio di tutte le funzioni possibili una funzione "buona", mentre è certo (inteso come probabilità tendente a 1) pescare una funzione patologica. Appare evidente che le funzioni mai derivabili sono la quasi totalità. Se ne deduce che prendere una funzione "a caso" che sia continua e derivabile ovunque voglia dire tutt'altro che prenderne una "a caso".

   Riusciamo però a dominare la matematica con le poche funzioni "buone" rimaste, che sono continue e derivabili, perchè posso approssimare bene quanto voglio una funzione patologica con una buona (con deboli ipotesi), tanto quanto posso approssimare un trascendente (probabilità 1 se pesco tra i numeri) con un razionale (probabilità 0).

2. Denoto con Y^X l'insieme di tutte le funzioni $f : X \to Y$.

3. D'ora in poi, se non diversamente specificato, considererò intervalli chiusi e limitati $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e funzioni f limitate.

Definizione 2.1 (Partizione)**.** Una partizione di $[a, b]$ è un insieme ordinato di $n + 1$ punti casuali. $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ t.c. $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$.

Il massimo delle ampiezze degli intervalli $\max\{\Delta x_i\}$ è detto **taglia della partizione**, dove $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ con $i = 1, ..., n$.

Per arrivare a parlare di integrale inteso come area sottesa al grafico di una funzione è necessario introdurre i concetti di somme superiori e inferiori.

Considero una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata sull'intervallo $I = [a, b]$. Sia $P = \{x_0, ..., x_n\}$ una partizione di $[a, b]$. Scriviamo $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ e $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ e definiamo le **somme superiori** come $S(P, f) = \sum\limits_{i=0}^{n} M_i \Delta x_i$ e le **somme inferiori** come $s(P, f) = \sum\limits_{i=0}^{n} m_i \Delta x_i$, relative alla partizione P.

Osservazione 2.1 (P e $\mathcal{P}$)**.** Considerando $\mathcal{P}$, l'isnieme di tutte le partizioni P di $I = [a, b]$ ho che

$$M(b - a) \geq S(P, f) \geq s(P, f) \geq m(b - a) \quad \forall P \in \mathcal{P}$$

Da qui chiamo **integrale superiore** e **integrale inferiore** le scritture

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{P\in\mathcal{P}} S(f,P) \qquad \underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{P\in\mathcal{P}} s(f,P)$$

È evidente che $\overline{\int_a^b} f(x)dx \geq \underline{\int_a^b} f(x)dx$

Ex 2.2 (Funzione di Dirichlet)**.** $f(x) = \begin{cases} 1 & x\in[a,b]\cap\mathbb{Q} \\ 0 & x\in[a,b]\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ In questo caso la disuguaglianza tra integrale superiore e inferiore è stretta, poichè $\max_I f = 1$ e $\min_I f = 0$.

Definizione 2.2 (Integrale di Riemann)**.** Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Diciamo che f è **R-integrabile** o $f \in \mathcal{R}([a,b])$ se l'integrale superiore coincide con l'integrale inferiore.

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx \doteq \int_a^b f(x)dx$$

Si può semplificare questa definizione con una caratterizzazione delle funzioni R-integrabili che renda la definizione più facile. Prima però un risultato preliminare.

Lemma 2.1 (Raffinamento di una partizione)**.** Una partizione $P^* = P\bigcup\{\xi_1,...,\xi_n\}$ che si ottiene aggiungendo un numero finito di punti a P si dice **raffinamento**.

Se P^* è un raffinamento di P, allora $S(P,f) \geq S(P^*,f) \geq s(P^*,f) \geq s(P,f)$.

Dim. Per dimostrarlo è sufficiente aggiungere un solo punto alla partizione. Se $\xi \in (x_{i-1}, x_i)$ allora $\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = \max\{\sup\limits_{x\in[x_{i-1},\xi]} f(x), \sup\limits_{x\in[\xi,x_i]} f(x)\}$

quindi

$M_i\Delta x_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\Delta x_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(x_i - \xi + \xi - x_{i-1}) \geq \sup\limits_{x\in[x_{i-1},\xi]} f(x)(\xi - x_{i-1}) + \sup\limits_{x\in[\xi,x_i]} f(x)(x_i - \xi)$.

È quindi evidente che aggiungendo punti alla partizione le somme superiori descrescano e quelle inferiori crescano. □

Teorema 2.2 (Criterio per la R-integrabilità)**.** Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Allora $f \in \mathcal{R}([a,b]) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists P \in \mathcal{P} : S(P,f) - s(P,f) < \varepsilon$.

Dim. ($\Leftarrow$)

Per ogni partizione P abbiamo $s(P,f) \leq \underline{\int} f \leq \overline{\int} f \leq S(P,f)$ da cui $S(P,f) - s(P,f) \geq \overline{\int} f - \underline{\int} f$.

Da cui, per ipotesi, $\forall\varepsilon > 0\ \exists P : \varepsilon > S(P,f) - s(P,f) \geq \overline{\int} f - \underline{\int} f$. Al limite integrale inferiore e superiore coincidono soddisfando Def. 2.2.

($\Rightarrow$) Se f è R-integrabile allora $\int_a^b f = \overline{\int} f = \underline{\int} f$. Poichè l'integrale superiore è inf delle somme superiori, per ogni $\varepsilon > 0 \overline{\int} f + \varepsilon/2$ non è minorante: esiste una partizione P_1 tale che $S(P_1,f) < \overline{\int} f + \varepsilon/2$. Ragionamento analogo, con i dovuti cambi di segno, si può fare per le somme inferiori e con una partizione P_2. Pertanto prendendo $P = P_1 \bigcup P_2$ raffinamento di queste partizioni per il Lemma si ha la descrescita delle somme superiori e la crescita delle somme inferiori e quindi la tesi. □

3 Lezione 3 - 10/03/2021

Vediamo una serie di condizioni sufficienti affinchè una funzione limitata sia R-integrabile su un intervallo I chiuso e limitato.

Teorema 3.1 (Condizioni sufficienti per l'integrabilità)**.** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora

1. f è continua $\Rightarrow f \in \mathcal{R}([a, b])$
2. f è monotona $\Rightarrow f \in \mathcal{R}([a, b])$
3. f ha un numero finito di punti di discontinuità $\Rightarrow f \in \mathcal{R}([a, b])$

Dim. 1. Se f è continua su $[a, b]$ allora per Heine-Cantor è uniformemente continua, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x, y : |x - y| < \delta, |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Presa ora una partizione $P = \{x_0, ..., x_n\}$ di $[a, b]$ di taglia $\Delta x_i < \delta$. Poichè f è continua su ogni subintervallino $[x_{i-1}, x_i]$ esistono s_i e t_i tali che $M_i = f(s_i)$ e $m_i = f(t_i)$, cioè sup e inf sono assunti per Weierstrass.

Ma allora la differenza tra somme superiori e inferiori è

$$S(P, f) - s(P, f) = \sum_{i=0}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=0}^{n} \Delta x_i = \varepsilon$$

il che è equivalente al criterio di R-integrabilità, da cui si deduce che la funzione sia per l'appunto R-integrabile. □

Dim. 2. Prendo f monotona crescente (ad esempio) e una partizione $P = \{x_0, ..., x_n\}$ dell'intervallo $[a, b]$ tale che la sua taglia sia $\Delta x < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$.

Poichè f è monotona il massimo e il minimo sulla partizione sono $M_i = f(x_i)$ e $m_i = f(x_{i-1})$. Allora la differenza fra somme superiori e inferiori è

$$S(P, f) - s(P, f) = \sum_{i=0}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = \varepsilon$$

Che altro non è che la condizione di integrabilità. □

Dim. 3. In questo caso è fondamentale lavorare con una funzione limitata. Dimostro per un punto e poi iterando posso dimostrarlo per un insieme finito di punti. Suppongo di avere un'unica discontinuità in $c \in [a, b]$. Fissato $\varepsilon > 0$ considero due punti $c - \delta$ e $c + \delta$ con $\delta = \frac{\varepsilon}{6M}$ dove $M = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$. La funzione è quindi continua sull'unione di intervalli disgiunti compatti $E = [a, c - \delta] \cup [c + \delta, b] = E_1 \cup E_2$, pertanto è R-integrabile su E. Considerando le restrizioni di f, cioè f_1 su E_1 e f_2 su E_2 esistono rispettivamente partizioni P_1 e P_2 tali che

$$S(P_i, f_i) - s(P_i, f_i) < \varepsilon/3$$

Aggiungendo all'unione delle due partizioni anche i due semiintorni di c si ottiene $P = P_1 \cup \{c - \delta\} \cup \{c + \delta\} \cup P_2$ e quindi l'integrabilità su tutto il dominio. □

Osservazione 3.1. In termini semplici, non conta quanti punti di discontinuità ho, a patto che siano un insieme finito, perchè posso raffinare la partizione quanto voglio e vedere intuitivamente che qualsiasi cosa succede in un intorno della discontinuità viene ampiamente dominata dagli altri intervallini. Geometricamente alterare una funzione in un punto vuol dire aggiungere all'integrale un segmento, che per definizione ha area nulla.

Osservazione 3.2. I punti (1) e (3) sono molto simili. Infatti essere continua vuol dire avere un numero finito di punti di discontinuità, cioè 0.

Osservazione 3.3. Nel caso di funzione continua (1) non è necessario specificare la limitatezza della funzione, poichè per Weierstrass l'immagine di un compatto [a,b] è compatta, e quindi provvista di massimo e minimo.

Osservazione 3.4. Lavorare su intervalli chiusi non è necessario finchè la funzione è limitata. L'intervallo compatto serve per garantire l'esistenza di estremi finiti per Weierstrass.

Osservazione 3.5. Anche una funzione con un'infinità numerabile di discontinuità è R-integrabile. La dimostrazione è artificiosa, pertanto introduco solo il concetto di **misura**, utile caratterizzazione per questo fine.

Definizione 3.1 (Misura)**.** Un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}$, ha **misura di Lebesgue** o L-misura nulla, e si scrive $\mu(S) = 0$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \{I_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ successione di intervalli} : S \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \text{ e } \sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n) < \varepsilon$$

dove $l(I_n)$ denota il diametro (o lunghezza) dell'intervallo.

Ex 3.1. Ovviamente ogni punto ha L-misura nulla, poichè lo ricopro con una successione fatta da un unico intervallo e il cui diametro è piccolo a piacere e quindi più piccolo di ε.

Anche ogni insieme al più numerabile ha L-misura nulla: ricopro ogni punto con una serie geometrica $\sum_{i=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2}$. Sommando tutti diametri degli intervalli, la cui unione è sottoinsieme di S, ottengo un diametro totale inferiore a ε.

Si può anche dimostrare che un insieme, esprimibile come unione al più numerabile di insiemi con L-misura nulla, ha L-misura nulla.

Dopo questa parentesi sulla misura di Lebesgue, che porterà in AM3 all'omonimo integrale, giungo alla caratterizzazione delle funzioni integrabili. Evidenzio il fatto che mentre l'R-integrale partizioni l'asse x per poi sommare i contributi superiori e inferiori, l'L-integrale si basa sulla partizione dell'asse y, per poi lavorare per controimmagini.

Teorema 3.2 (Caratterizzazione delle funzioni integrabili con la misura di Lebesgue)**.** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata. Allora $f \in \mathcal{R}([a, b]) \Leftrightarrow$ l'insieme dei suoi punti di discontinuità ha L-misura nulla.

Osservazione 3.6. È quindi evidente che una funzione con un'infinità numerabile di discontinuità sia R-integrabile, poichè un insieme al più numerabile ha L-misura nulla, come spiegato nell'esempio precedente. Grazie a questo posso anche decidere dove mettere le discontinuità in una funzione poichè mi è sufficiente garantire la L-misura nulla di quell'insieme.

Non esiste una funzione discontinuità solo sugli irrazionali poichè inesprimbili come unione numerabile di insiemi chiusi.

Definizione 3.2 (funzione caratteristica)**.** Una **funzione caratteristica** è quella funzione $f: S \to \mathbb{R}$ che vale 1 nei punti di S e 0 altrove.

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases}$$

Ex 3.2. La funzione di Dirichlet è la funzione caratteristica di $\mathbb{Q}$ se la faccio valere 1 lì, altrimenti è la caratteristica degli irrazionali.

Ex 3.3. È evidente che se χ_S è sempre nulla l'insieme S sia vuoto e se viceversa vale sempre 1, allora il dominio è tutto S.

Adesso osserviamo più da vicino $\mathcal{R}([a,b])$. Esso è strutturabile come spazio vettoriale, e questo permette di ottenere delle proprietà di cui gli integrali godono. In $\mathcal{R}([a,b])$ spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) sono definite le operazioni di somma tra gli elementi e di prodotto per scalare del campo. Pertanto sono anche definite le combinazioni lineare di elementi di $\mathcal{R}([a,b])$, ovvero $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathcal{R}([a,b])$.

Osservazione 3.7 (Proprietà dell'integrale 1)**.** Considero $\mathbb{R}^S$ insieme di tutte le funzioni $f: S \to \mathbb{R}$ dove $S = [a,b]$ intervallo. $\mathbb{R}^S$ è strutturabile a spazio vettoriale definendo la somma come $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ e il prodotto per scalare come $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ con $\lambda \in \mathbb{R}, f, g \in \mathbb{R}^S$.

Da questo di deduce che $\mathcal{R}([a,b])$ sia sottospazio di $\mathbb{R}^S$ poichè è chiuso rispetto alle combinazioni lineari: prese due funzioni integrabili, quindi facenti parte di $\mathcal{R}([a,b])$ la loro combinazione lineare è ancora integrabile, quindi è ancora inclusa in $\mathcal{R}([a,b]$.

Questo perchè se le due funzioni sono integrabili i loro punti di discontinuità hanno L-misura nulla, e per quanto già visto in Ex 3.1, unione di al più un'infinità numerabili di insieme di L-misura nulla ha L-misura nulla, e quindi è ancora R-integrabile.

4 Lezione 4 - 11/03/2021

Definizione 4.1 (Trasformazione lineare)**.** Una **trasformazione lineare** è un'applicazione $A : V \to W$ spazi vettoriali che verifica le relazioni:

L1) $A(x+y) = Ax + Ay \quad \forall x, y \in V$

L2) $A(\lambda x) = \lambda Ax \quad \forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}$

Se prendo come spazio di partenza $V = \mathcal{R}([a,b])$ e come spazio di arrivo $W = \mathbb{R}$ allora l'applicazione

$$A : V \to W \quad \mathcal{R}([a,b]) \ni f \mapsto A(f) := \int_a^b f(t)\, dt \in \mathbb{R}$$

è un'applicazione lineare.

L'integrale è un esempio di trasformazione lineare da $\mathcal{R}([a,b])$ a $\mathbb{R}$.

Osservazione 4.1. Le trasformazioni lineari a valori in $\mathbb{R}$ sono chiamate **funzionali lineari**. È facilmente dimostrabile che presa $A :\to W$ si abbia che $A(V)$ è uno spazio vettoriale contenuto in W. Ma $A(V)$ per definizione di spazio vettoriale è chiuso rispetto alle combinazioni lineari e quindi è sottospazio di W.

Parlando di $\mathbb{R}$, esso ha due sottospazi che sono il banale $\{0\}$ e $\mathbb{R}$ stesso (non altri perchè non sarebbe chiuso rispetto alle combinazioni lineari). Potendo gli integrali essere non nulli allora $\mathcal{R}([a,b])$ (che era già spazio vettoriale su reali) è sottospazio di $\mathbb{R}$. Inoltre l'applicazione $A : \mathcal{R}([a,b]) \to \mathbb{R}$ è suriettiva poichè la sua immagine sono i reali.

Osservazione 4.2 (Proprietà dell'integrale 2)**.** Questa caratterizzazione riguarda la **composizione di funzioni**. Considero $f \in \mathcal{R}([a,b])$ e φ continua. Allora $\varphi \circ f \in \mathcal{R}([a,b])$. Questa è una conseguenza del fatto che la composizione di funzioni continue e limitate origini una continua e limitata. Anche se presente un insieme di punti di discontinuità $D \neq \varnothing$ ho che $D_{\varphi \circ f} \subseteq D_f$ e siccome $\mu(D_f) = 0$ (L-misura nulla) $\Rightarrow \mu(D_{\varphi \circ f}) \Rightarrow$ la composizione è R-integrabile.

Attenzione! Non è vero che $f \circ \varphi$ è integrabile, ma non so il perchè e dovrei invece saperlo...

Osservazione 4.3 (Proprietà dell'integrale 3)**.** Conseguenza importante dell'integrabilità della composizione (sotto le ipotesi della precedente affermazione) è che la composizione di una funzione integrabile con se stessa è ancora integrabile.

$$f \in \mathcal{R} \Rightarrow f^2 = f \circ f \in \mathcal{R}$$

Osservazione 4.4 (Proprietà dell'integrale 4)**.** Altra conseguenza dell'integrabilità della composizione (sotto le stesse ipotesi di prima) è che prese $f, g \in \mathcal{R} \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{R}$

5 Tavola degli integrali

Gli integrali notevoli sono ottenibili leggendo la tabella delle derivate al contrario.

f	$\int f$	C.E.
0	$c \in \mathbb{R}$	
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$n \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$\alpha \in -1, x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\begin{cases} \log x + c & x > 0 \\ \log(-x), & x < 0 \end{cases}$	
e^x	$e^x + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + c$	$x \in \mathbb{R}$
Chx	$Shx + c$	$x \in \mathbb{R}$
Shx	$Chx + c$	$x \in \mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$	$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$	$x \in (-1, 1)$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + c$	$x \in (-1, 1)$