Sbobine laboratorio di elettronica

Lorenzo Ramella

AA 2020-2021

Sommario

Le lezioni del prof. Stefano Riboldi relative al laboratorio di elettronica del secondo anno, sbobinate .

Indice

1 Richiami alle nozioni di base 2 1.1 Generatori . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 1.2 Resistori . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 1.3 Condensatori . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 1.4 Induttori . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 1.5 Circuiti RC nel tempo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5 1.6 Circuiti RL nel tempo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

2 Leggi circuitali e concetti fondamentali 7 2.1 Leggi di Kirchho . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7 2.2 Circuiti partitori di tensione e corrente . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8 2.3 Generatori reali . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11 2.4 Circuiti equivalenti di Thevenin e di Norton . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12 2.5 Impedenza di sorgente, di carico ed e etto di carico . . . . . . . . . . . . . . . . . 14 2.6 Caratterizzazione degli elementi R, L, C nel dominio della frequenza . . . . . . . 15 2.7 I sistemi lineari, tempo invarianti . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16

3 Circuiti passivi con elementi RLC 20 3.1 Circuiti RC e RL . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20 3.2 Circuiti risonanti serie . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24 3.3 Circuiti risonanti parallelo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27

4 Circuiti attivi lineari con ampli catori operazionali 32 4.1 L'ampli catore operazionale . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32 4.2 Circuiti di ampli cazione invertenti e non invertenti . . . . . . . . . . . . . . . . 35

1

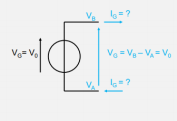


Figura 1: Schizzo di un generatore ideale di tensione

1 Richiami alle nozioni di base

1.1 Generatori

Un generatore ideale di tensione è un dipolo a due terminali il quale matematicamente de nisce una relazione tra i potenziali ai due capi del generatore, ovvero impone la di erenza di potenziale ad un valore sso.

In un dipolo è possibile de nire 1 di erenza di potenziale *V* e una corrente *I*. In un generatore di tensione la prima è imposta dal generatore stesso, mentre la seconda dipende dal circuito esterno. Nel caso schematizzato in gura ??, essendo il circuito aperto, *IG* = 0. La potenza generata è pari a

*PG* = *VG ∗ IG*

Si noti che, usando la convenzione dei generatori, la potenza è generata (quindi positiva) se la corrente è uscente dal lato della tensione positiva, essendo in questa convenzione il verso della tensione concorde con il verso della corrente. Quando si lavora sugli utilizzatori si usa la convenzione opposta. Un esempio di generatore di tensione può essere una classica pila.

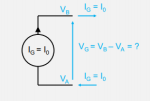


Figura 2: Schizzo di un generatore ideale di corrente

Nel caso di un generatore di corrente, invece, il generatore impone la corrente, mentre la tensione dipende dal circuito esterno.

La potenza generata, con la convenzione dei generatori, è sempre

*PG* = *VG ∗ IG*

Questi generatori sono meno comuni dei generatori di tensione.

2

1.2 Resistori



Figura 3: Schizzo di un resistore

Il resistore o resistenza è il primo esempio di elemento passivo, o di carico, a cui è possibile collegare un generatore. È un dipolo, quindi posso de nire ai suoi capi una di erenza di potenziale *VR* ed una corrente *IR*. Si noti, come schematizzato in gura 3, che il verso della corrente è discorde con il verso della tensione. Questa è la cosiddetta convenzione degli utilizzatori, opposta a quella dei generatori.

Legge diu Ohm: all'interno di un resitore esiste una precisa relazione tra le grandezze *VR* e *IR*:

*VR*

*IR*= costante = *R*[Ω] = 1

*G*[S]

*R* è la resistenza e si misura in ohm (Ω). *G* è la conduttanza e si misura in siemens (S). La legge di Ohm è spesso scritta nella forma

*V* = *R ∗ I* (1)

Poiché *R* non è un parametro che dipende dal tempo, la legge di Ohm evolve nel tempo semplicemente come

*VR*(*t*) = *IR*(*t*) *∗ R*

La potenza, questa volta dissipata, è

*PR*(*t*) = *VR*(*t*) *∗ IR*(*t*) oppure *PR*(*t*) = *V*2*R*(*t*)*/R*

spesso scritta nella forma della legge di Joule:

*PR*(*t*) = *I*2*R*(*t*) *∗ R* (2)

Nota importante: dalla legge di Joule si evince che, facendo passare corrente in un resi store, questo dissipa energia, quindi si scalda. In laboratorio è importante prestare la massima attenzione per evitare ustioni.

3

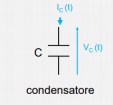


Figura 4: Schizzo di un condensatore

1.3 Condensatori

Un condensatore immagazzina al suo interno una carica *Q*, misurata in coulomb (C). Questa non è che l'integrale della corrente che attraversa il condensatore nel tempo. In un condensatore esiste una relazione tra la carica in esso immagazzinata e la di erenza di potenziale ai suoi capi:

*QC* (*t*)

*VC* (*t*)= *C*[F]

*C* è la capacità, e si misura in farad (F), ed è una costante positiva.

*IC* (*t*) = d*QC* (*t*)

d*t*= *C*d*VC* (*t*)

d*t*

Un condensatore è in grado di immagazzinare energia

*EC* (*t*) = 12*QC* (*t*)*VC* (*t*) = 12*CV* 2*C* (*t*)

1.4 Induttori

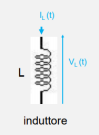


Figura 5: Schizzo di un induttore

L'induttore, meno di uso del condensatore, ne è l'elemento duale. Detto Φ il usso del campo magnetico, misurato in weber (Wb), si ha che

4

Φ*L*(*t*)

*IL*(*t*)= costante positiva = *L*

*L* è detta induttanza e si misura in henry [H]. d*t*= *L*d*IL*(*t*)

*VL* =dΦ*L*(*t*)

d*t*

Mentre nel condensatore era la corrente ad essere proporzionale alla derivata della tensione rispetto al tempo, qui è la tensione ad essere proporzionale alla derivata della corrente rispetto al tempo. L'energia immagazzinata è

*EL*(*t*) = 12Φ*L*(*t*)*IL*(*t*) = 12*LI*2*L*(*t*)

L'induttore, pur essendo analogo al condensatore, ha dei comportamenti controintuitivi. Per esempio, cortocircuitando un condensatore si disperde tutta l'energia in esso immagazzinata, mentre per mantenere l'energia immagazzinata bisogna isolarlo.

Nell'induttore l'energia immagazzinata dipende dalla corrente: a nché si mantenga l'energia immagazzinata in un induttore, quindi, serve che la derivata delle corrente rispetto al tempo sia nulla, ovvero che la di erenza di potenziale ai due poli dell'induttore sia nulla. Quindi, per mantenere l'energia immagazzinata, bisogna cortocircuitare l'induttore.

1.5 Circuiti RC nel tempo

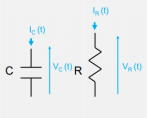


Figura 6: Schizzo di un circuito RC (t<0)

Un circuito RC è un sistema a 4 gradi di libertà (2 tensioni e 2 correnti), essendo costituito da 2 dipoli. Nel caso schematizzato in gura 6, per t<0 le condizioni al contorno sono:

*IR*(*t*) = 0 (dipolo non connesso)

*IC* (*t*) = 0 (dipolo non connesso)

*VR*(*t*) = 0 (legge di Ohm)

*VC* (*t*) = *q*0

*C* = *v*0

Chiudendo il circuito come illustrato in gura 7 si ha che:

*IC* (*t*) = *−IR*(*t*) (dipoli in serie e frecce discordi)

5

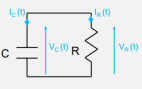


Figura 7: Schizzo di un circuito RC (t>0)

*VC* (*t*) = *VR*(*t*) (dipoli in parallelo e frecce concordi)

d*VC* (*t*)

d*t* =*IC* (*t*)

*C* = *−IR*(*t*)

*C* = *−VR*(*t*)

*C∗R* = *−VC* (*t*)

*C∗R*

*VC* (*t*) = *VR*(*t*) = *v*0 *∗ e−t/*(*CR*)

*IC* (*t*) = *−IR*(*t*) = *v*0

*R∗ e−t/*(*CR*)

Dopo aver notato il fatto che la quantità *CR* ha la dimensione dei secondi, la si può anche riscrivere come *τ* = *CR*

1.6 Circuiti RL nel tempo

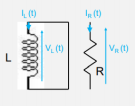


Figura 8: Schizzo di un circuito RL (t<0)

Un circuito RL è un sistema sempre a 4 gradi di libertà (2 tensioni e 2 correnti). Nel caso schematizzato in gura 8, per t<0 le condizioni al contorno sono:

*IR*(*t*) = 0 (dipolo non connesso)

*VR*(*t*) = 0 (legge di Ohm)

*VL*(*t*) = 0

*IL*(*t*) = *φ*0

*L* = *i*0 (la corrente si mantiene perché l'induttore è in cortocircuito)

Chiudendo il circuito come illustrato in gura 9 si ha che:

*IL*(*t*) = *−IR*(*t*) (dipoli in serie e frecce discordi)

*VL*(*t*) = *VR*(*t*) (dipoli in parallelo e frecce concordi)

6

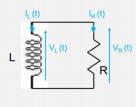


Figura 9: Schizzo di un circuito RL (t>0)

d*IL*(*t*)

d*t* =*VL*(*t*)

*L* =*VR*(*t*)

*L* = *−IR*(*t*)*RL* = *−IL*(*t*)*RL*

*IL*(*t*) = *−IR*(*t*) = *i*0 *∗ e−t/τ*

*VL*(*t*) = *VR*(*t*) = *i*0 *∗ R ∗ e−t/τ*

Dove *τ* = *L/R*.

2 Leggi circuitali e concetti fondamentali

2.1 Leggi di Kirchho

Dato un circuito costituido da dipoli, de niamo:

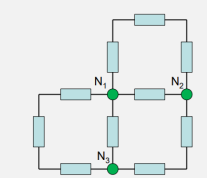


Figura 10: Schizzo di un circuito di dipoli. In verde i nodi

nodi i punti di contatto tra 3 o più dipoli ( gura 10);

rami i percorsi compresi tra due poli ( gura 11);

maglie insiemi chiusi di rami ( gura 12);

Partendo da queste de nizioni, introduciamo le due leggi di Kirchho :

La legge delle correnti (KCL): La somma algebrica delle correnti nei rami a erenti a ciascun nodo è nulla.

7

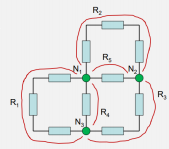


Figura 11: Schizzo di un circuito di dipoli. In rosso i rami

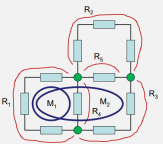


Figura 12: Schizzo di un circuito di dipoli. In blu le maglie

X*In* = 0 (3)

In altre parole: a ciascun nodo, la somma delle correnti entranti è pari alla somma delle correnti uscenti.

La legge delle tensioni (KVL): La somma algebrica delle tensioni sui rami di ciascuna maglia è nulla.

X*Vn* = 0 (4)

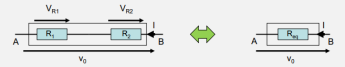
In altre parole: la somma algebrica delle di erenze di potenziale su ogni percorso che unisce due medesimi punti è costante.

2.2 Circuiti partitori di tensione e corrente

Due dipoli sono detti in serie se (e solo se) condividono la stessa corrente. Dalle equazioni 1 e 4 sappiamo rispettivamente che

*VR*1 = *I ∗ R*1 e *VR*2 = *I ∗ R*2

8

Figura 13: Schizzo di un sistema di due dipoli in serie

*VR*1 + *VR*2 = *V*0

quindi

*V*0 = *I ∗* (*R*1 + *R*2) *⇒ I* =*V*0

*R*1 + *R*2=*V*0

*Req*

*Req* = *R*1 + *R*2

Se ho due o più resistenze collgate in serie, esse equivalgono ad un unico resistore la cui resistenza equivalente è pari alla somma delle singole resistenze.

Se si volesse ora trovare il valore di *VR*1 basta pensare che

*VR*1 = *I ∗ R*1 = *V*0*R*1

*Req*

**Figura 14: Schizzo di un sistema di due dipoli in parallelo

Due dipoli sono detti in parallelo se (e solo se) condividono la stessa tensione. Dalle equazioni 1 e 3 sappiamo rispettivamente che

*V* = *I*1 *∗ R*1 e *V* = *I*2 *∗ R*2

*IR*1 + *IR*2 = *I*0

quindi

*I*0 =*VR*1+*VR*2*⇒ I*0 = *V* 1*R*1+1*R*2= *V**R*1 + *R*2

*R*1*R*2

*R*1 + *R*2oppure1*Req*= 1*R*1+1*R*2

*Req* =*R*1*R*2

9

Se ho due o più resistenze collgate in parallelo, esse equivalgono ad un unico resistore la cui resistenza equivalente è pari alla somma armonica delle singole resistenze. Se si volesse ora trovare il valore di *IR*1 basta pensare che

*IR*1 =*VR*1= *I*0*Req*

*R*1= *I*0*R*2

*R*1 + *R*2

10

2.3 Generatori reali

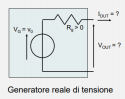


Figura 15: Schizzo di un generatore reale di tensione

In un generatore reale, si distingue la di erenza di potenziale ai capi del generatore *VG* dalla di erenza di potenziale ai capi del sistema a cui il generatore è collegato:

*VOUT* = *VG − VR*

dove *VR* è la caduta di tensione ai capi del resistore *Rg* dovuta alla corrente che scorre all'esterno del circuito. Quindi:

*VOUT* dipende anche dal circuito esterno

*IOUT* dipende anche dal circuito esterno

*POUT* (generata) = *VOUT ∗ IOUT*

**

Figura 16: Schizzo di un generatore reale di corrente

Con un discorso analogo a quello del caso precedente ricaviamo che

*IOUT* dipende anche dal circuito esterno

*VOUT* dipende anche dal circuito esterno

*POUT* (generata) = *VOUT ∗ IOUT*

11

2.4 Circuiti equivalenti di Thevenin e di Norton

Figura 17: Il dipolo ignoto

Si immagini di prendere il dipolo rappresentato in gura 17. Come caratterizzarlo senza aprire la scatola?

Poiché le uniche due grandezze misurabili sono la tensione e la corrente, l'unico strumento che si ha a disposizione è la curva caratteristica *I − V* :

*IOUT* = *fY* (*VOUT* ) oppure *VOUT* = *fz*(*IOUT* )

Due dipoli sono equivalenti se e solo se hanno la stessa curva caratteristica. Se le relazioni sono lineari basta determinarne 2 punti. Come nell'esempio mostrato in gura 18

Figura 18: Esempio di due dipoli di cui determinare l'equivalenza

Imponendo *IOUT* (0) = *I0OUT* (0) e *VOUT* (0) = *V0OUT* (0) si trovano le relazioni *Rg* = *R0g*

*Vg* = *I0g ∗ R0g*

Ne segue che i due circuiti (quando soddisfano queste due condizioni), pur essendo circuiti diversi, sono equivalenti.

Questo risultato ha un'importante conseguenza: ogni rete elettrica composta da resistori, generatori di tensione e corrente ha 2 equivalenti circuitali (ad eccezione dei generatori ideali).

12

Figura 19: Ogni rete elettrica ha 2 equivalenti circuitali

Figura 20: Modelli equivalenti di una generica rete LTI

Nota importante: nella realtà del laboratorio i circuiti non sopportano tutto. Bisogna fare attenzione a come vengono fatti i collegamenti per evitare macelli.

Se ci si aspetta che un circuito sia un generatore di tensione, sarà ragionevolmente sicuro misurare *Veq* (ma non *Ieq*). Viceversa, se ci si aspetta che sia un generatore di corrente, sarà ragionevolmente sicuro misurare *Ieq* (ma non *Veq*). Leggere sempre e comunque le istruzioni d'uso prima di fare qualunque cosa.

Nella realtà, per determinare l'equivalenza di due circuiti, ci si muove all'inerno di un ristretto intervallo di parametri:

per i generatori di tensione: *|Ieq| < Imax*

per i generatori di corrente: *|Veq| < Vmax*

13

Esempio: il caricatore del cellulare (USB) è equivalente ad un generatore di tensione (reale), con di erenza di potenziale in uscita pari a *VOUT* = +5V e corrente in uscita *IOUT <* 1A.

2.5 Impedenza di sorgente, di carico ed e etto di carico Figura 21: Impedenze di sorgente e di cariche

Ad un generatore di tensione è possibile collegare carichi diversi. Il carico migliore che è possibile collegare al generatore di tensione è il carico cosiddetto ideale (non collegare), mentre il carico peggiore , in questo senso, è il cortocircuito (collegare una resistenza nulla). Quest'ultimo carico è particolarmente problematico perché, facendo uire liberamente la corrente ai due capi del generatore, impedisce al generatore di imporre una di erenza di potenziale ai suoi due capi. Un generatore vero potrebbe rompersi.

Nel caso invece del generatore di corrente, il carico ideale è il cortocircuito, poiché permette alla corrente da questo generata di uire liberamente, mentre il carico peggiore è una resistenza in nita (non collegare), perché la corrente generata non può andare da nessuna parte.

Con l'espressione togliere il carico si intende, per il generatore di tensione, scollegare; per il generatore di corrente, cortocircuitare.

Figura 22: E etto di carico

Con l'espressione e etto di carico si intende l'e etto per il quale, collegando un carico non ideale ad un generatore:

14

di tensione, la tensione e ettiva *VOUT* generata è minore, in modulo, rispetto al valore *VS* idealmente prodotto dal generatore

di corrente, la corrente e ettiva *IOUT* generata è minore, in modulo, rispetto al valore *IS* idealmente prodotto dal generatore

L'e etto di carico non sarebbe presente se non esistesse la resistenza *RS*, ovvero se ci trovas simo in presenza di un generatore ideale. Purtroppo questi generatori non esistono.



Figura 23: Tabella dell'impedenza ottimale

È possible tuttavia provare a limitare questo e etto entro dei limiti accettabili, cercando di ridurre i termini moltiplicativi *RC /*(*RC* + *RS*) e *RS/*(*RC* + *RS*).

Per limitare l'e etto di carico è quindi opportuno avere:

*RC >> RS* per generatori di tensione

*RC << RS* per generatori di corrente

2.6 Caratterizzazione degli elementi R, L, C nel dominio della frequen za

Figura 24: Gli elementi RLC

15

dove *s* è una variabile complessa, e abbiamo ipotizzato che la corrente segua l'evoluzione *i*(*t, s*) = *es∗t* per la resistenza e per l'induttore e che la tensione segua l'evoluzione *v*(*t, s*) = *es∗t* per il condensatore.

Otteniamo così l'impedenza Z, che si misura in ohm, e l'ammettenza Y, che si misura in siemens. Queste due grandezza sono legate dalla relazione Z= Y*−*1. Essendo tuttavia il paraetro *s* complesso, anche le grandezze Z e Y sono complesse.

D'ora in avanti, per evitare fraintendimenti con l'intensità di corrente, l'unità immaginaria verrà indicata con il simbolo *j*.

Ricordiamo la formula di Eulero:

*est* = *e*(*σ*+*j∗*2*πf*)*t* = *eσt*(cos(2*πf ∗ t*) + *j*sin(2*πf ∗ t*))

Se *s* = *jω ⇒ est* = cos(*ωt*) + *j*sin(*ωt*) *⇒ |est|* = 1 *∀t*

De niamo la fase di un numero complesso come

](*a* + *jb*) = atan (*b/a*)

Abbiamo quindi che:

*ZR*(*jω*) = *R ⇒ |ZR*(*jω*)*|* = *R* e ](*ZR*(*jω*)) = 0

*ZL*(*jω*) = *jωL ⇒ |ZL*(*jω*)*|* = *ωL* e ](*ZL*(*jω*)) = *π*2

*ZC* (*jω*) = 1*/*(*jωC*) *⇒ |ZC* (*jω*)*|* = 1*/*(*ωC*) e ](*ZC* (*jω*)) = *−π*2

Figura 25: Gra co impedenze

2.7 I sistemi lineari, tempo invarianti

Un sistema lineare è più complesso di un dipolo. Possiamo vederlo, per il momento, come un doppio dipolo:

Un doppio dipolo ha quattro gradi di libertà, due tensioni e due correnti. I segnali in ingresso e in uscita nel sistema possono essere sia tensioni che correnti. Il doppio dipolo schematizzato in

16



Figura 26: Un doppio dipolo

gura 26 è un caso particolare, essendo i due poli ra gurati in basso equipotenziali (essendoci un collegamento diretto tra di loro).

Ma cos'è un sistema lineare? Dato un sistema *f*, dotato di un ingresso (formato eventualmente anche da un certo numero di entrate elementari) ed un'uscita, questo è lineare se e solo se l'uscita è combinazione lineare delle uscite che il sistema avrebbe applicandogli i singoli ingressi elementari:

*f*(*C*1 *∗ IN*1 + *C*2 *∗ IN*2) = *C*1 *∗ f*(*IN*1) + *C*2 *∗ f*(*IN*2)

*f* è un sistema tempo invariante se e solo se le sue proprietà non dipendono dal tempo. È detta funzione di trasferimento (FdT) la relazione (H), espressa nei domini trasformati di Laplace (s) o di Fourier (f, *ω*), tra un ingresso e un'uscita di *f*.

Figura 27: Esempi di funzioni di trasferimento in doppi bipoli

Nel caso del primo circuito, la funzione di trasferimento H(s) è la relazione tra un'entrata di tensione e un uscita di corrente. la FdT è quindi l'ammettenza del condensatore. Nel caso del secondo circuito ho collegato al doppio dipolo un voltmetro ideale, a impedenza in nita, che misura la di erenza di potenziale ai capi della resistenza *R*2. La FdT H(s) è il rapporto di partiziobne tra la resistenza *R*1 e la resistenza *R*2.

Il concetto di doppio dipolo e di FdT è importante per l'analisi di circuiti complessi. Un circuito è generalmente modellizzabile in blocchi, posti in cascata uno dopo l'altro. In assenza di e etti di carico (o se le singole Funzioni di Trasferimento sono ricavate consi derano le impedenze di sorgente e di carico), la FdT complessiva corrisponde al prodotto delle singole FdT.

È possibile de nire le proprietà di questi sistemi anche nel dominio del tempo 17

Figura 28: Un circuito complesso, modellizzato in 3 blocchi in cascata



Figura 29: Sistema caratterizzato nel tempo

Carico il condensatore con un generatore di corrente che ha un andamento impulsivo, quindi la corrente emessa dal generatore ha valore 0 per ogni *t* diverso da 0. Al tempo *t* = 0 il generatore emette un impulso di corrente che carica il condensatore di una carica *q*0 .

*iIN* = *δ*(*t*) *∗* (*C ∗ v*0)

*vOUT* = *v*0 *∗ e−t/*(*C/∗R*)

il sistema è lineare, quindi immettendo in ingresso una corrente generica *δ*(*t*) *iIN* = *δ*(*t*)

*vOUT* = (1*/C*) *∗ e−t/*(*C/∗R*) = *h*(*t*)

dove *h*(*t*) è la risposta all'impulso *δ*(*t*) di un sistema lineare e tempo invariante. Rappresentare la proprietà di un sistema LTI i termini di risposta all'impulso *h*(*t*) o in termini di FdT *H*(*f*) consente di rappresentare la risposta del sistema LTI per qualsiasi segnale in ingresso, posto che questo sia a sua volta rappresentabile sulla base di impulsi di Dirac o di funzioni armoniche:

*in*(*t*) =

Z inf *−* inf

*in*(*ξ*) *· δ*(*t − ξ*) *·* d*ξ* =

Z inf *−* inf

*IN*(*f*) *· ejωf t·* d*f*

De niamo la traformata di Fourier (*F*) e la sua anti-trasformata (*F−*1) 18

Figura 30: Sistema caratterizzato nel tempo

Z inf

*IN*(*f*) = *F*(*in*(*t*)) = *−* inf

*in*(*t*) *· e−j*2*πf t·* d*t*

*IN*(*t*) *· ej*2*πf t·* d*t*

Consegue in ne che:

*in*(*t*) = *F−*1(*IN*(*f*)) =

Z inf *−* inf

*−→ H*(*f*)*F−*1

*h*(*t*)*F*

*−−−→ h*(*t*)

19

3 Circuiti passivi con elementi RLC

3.1 Circuiti RC e RL

L'analisi nel dominio della frequenza sarà la più semplice e diretta, applicando i concetti di partitore di tensione e di corrente alle impedenze.

Figura 31: Le impedenze

Cominciamo con il circuito RC ( gura 32):



Figura 32: Circuito RC

Generalizzando alle impedenze quanto visto per le resistenze:

*VOUT* (*s*) = *VIN* (*s*) *∗ZC* (*s*)

*ZC* (*s*) + *ZR*(*s*)

da cui

*H*(*s*) = *VOUT* (*s*)

*VIN* (*s*)=*ZC* (*s*)

*ZC* (*s*) + *ZR*(*s*)

sostituendo adesso alle impedenze le loro espressioni esplicite:

1*/sC* + *R*=1

*H*(*s*) = 1*/sC* 20

1 + *sRC*

e, per *s* = *jω*,

1 + *jωRC |H*(*s*)*|* =1

*H*(*s*) = 1

*~~√~~*1 + *ω*~~2~~ *· R*~~2~~ *· C*~~2~~](*H*(*jω*)) = atan (*−ωRC*)

Figura 33: La funzione di trasferimento al variare della pulsazione

Concentrandoci ora sul circuito CR ( gura 34):



Figura 34: Circuito CR

*VOUT* (*s*) = *VIN* (*s*) *∗ZC* (*s*)

*ZC* (*s*) + *ZR*(*s*)

da cui

*H*(*s*) = *VOUT* (*s*)

*VIN* (*s*)=*ZC* (*s*)

*ZC* (*s*) + *ZR*(*s*)

sostituendo adesso alle impedenze le loro espressioni esplicite:

21

*R* + 1*/sC* =*sRC*

1 + *sRC*

e, per *s* = *jω*,

*H*(*s*) = *jωRC*

*H*(*s*) = *R*

1

1 + *jωRC |H*(*s*)*|* =*ωRC*

*~~√~~*1 + *ω*~~2~~ *· R*~~2~~ *· C*~~2~~](*H*(*jω*)) = atan

*ωRC*

**Figura 35: La funzione di trasferimento al variare della pulsazione

Analogamente si procede per le induttanze. Con il circuito RL ( gura 36): 

Figura 36: Circuito RL

*VOUT* (*s*) = *VIN* (*s*) *∗ZL*(*s*)

*ZL*(*s*) + *ZR*(*s*)

da cui

22

*H*(*s*) = *VOUT* (*s*)

*VIN* (*s*)=*ZL*(*s*)

*ZL*(*s*) + *ZR*(*s*)

sostituendo adesso alle impedenze le loro espressioni esplicite: *sL* + *R*=*sL/R*

1 + *sL/R*

e, per *s* = *jω*,

*H*(*s*) = *jωL/R*

*H*(*s*) = *sL*

*R*

1 + *jωL/R |H*(*s*)*|* =*ωL/R*

~~p~~1 + *ω*2 *· L*2*/R*2](*H*(*jω*)) = atan

*ωL*

**Figura 37: La funzione di trasferimento al variare della pulsazione

Concentrandoci ora sul circuito LR ( gura 38):



Figura 38: Circuito LR

23

*VOUT* (*s*) = *VIN* (*s*) *∗ZR*(*s*)

*ZL*(*s*) + *ZR*(*s*)

da cui

*VIN* (*s*)=*ZR*(*s*)

*H*(*s*) = *VOUT* (*s*)

*ZL*(*s*) + *ZR*(*s*)

sostituendo adesso alle impedenze le loro espressioni esplicite: *H*(*s*) = *R*

*R* + *sL*=1

1 + *sL/R*

e, per *s* = *jω*,

*H*(*s*) = 1

1 + *jωL/R |H*(*s*)*|* =1

~~p~~1 + *ω*2 *· L*2*/R*2](*H*(*jω*)) = atan

*−ωLR*

Figura 39: La funzione di trasferimento al variare della pulsazione

3.2 Circuiti risonanti serie

Concentrandoci ora sul circuito LC mostrato in gura 40:

*VOUT* (*s*) = *VIN* (*s*) *∗ZC* (*s*)

*ZL*(*s*) + *ZC* (*s*)

da cui

*H*(*s*) = *VOUT* (*s*)

*VIN* (*s*)=*ZC* (*s*)

*ZL*(*s*) + *ZC* (*s*)

sostituendo adesso alle impedenze le loro espressioni esplicite:

24



Figura 40: Circuito risonante serie LC

*H*(*s*) = 1*/sC*

1*/sC* + *sL*=1

1 + *s*2*LC*

e, per *s* = *jω*,

( 1

(0 se *ω < √*1*LC*

*H*(*s*) = 1

1 *− ω*2*LC |H*(*s*)*|* =

1*−ω*~~2~~*·LC* se *ω < √*1*LC*

*ω*~~2~~*·LC−*1se *ω > √*1*LC*](*H*(*jω*)) = 1

*±π* se *ω > √*1*LC*

**Figura 41: La funzione di trasferimento al variare della pulsazione

Concentrandoci ora sul circuito CL mostrato in gura 42:

*VOUT* (*s*) = *VIN* (*s*) *∗ZL*(*s*)

*ZL*(*s*) + *ZC* (*s*)

25



Figura 42: Circuito risonante serie CL

da cui

*H*(*s*) = *VOUT* (*s*)

*VIN* (*s*)=*ZL*(*s*)

*ZL*(*s*) + *ZC* (*s*)

sostituendo adesso alle impedenze le loro espressioni esplicite: 1*/sC* + *sL*=*s*2*LC*

1 + *s*2*LC*

e, per *s* = *jω*,

*H*(*s*) = *sL*

*H*(*s*) = *−ω*2*LC*

1 *− ω*2*LC |H*(*s*)*|* =

( *ω*2*·LC*

1*−ω*~~2~~*·LC* se *ω < √*1*LC*

*ω*~~2~~*·LC−*1se *ω > √*1*LC*](*H*(*jω*)) = *ω*2*·LC*

(*±π* se *ω < √*1*LC* 0 se *ω > √*1*LC*

Concentrandoci ora sul circuito RLC mostrato in gura 44: *VOUT* (*s*) = *VIN* (*s*) *∗ZC* (*s*)

*ZR*(*s*) + *ZL*(*s*) + *ZC* (*s*)

da cui

*H*(*s*) = *VOUT* (*s*)

*VIN* (*s*)=*ZC* (*s*)

*ZR*(*s*) + *ZL*(*s*) + *ZC* (*s*)

sostituendo adesso alle impedenze le loro espressioni esplicite: 1*/sC* + *sL* + *R*=1

1 + *sRC* + *s*2*LC*

e, per *s* = *jω*,

*H*(*s*) = 1*/sC*

*H*(*s*) = 1

1 + *jωRC − ω*2*LC |H*(*s*)*|* =

1

~~p~~(1 *− ω*2*LC*)2 + (*ωRC*)2

*|H*(*s*)*|ω*=*ωR* =1*R·*r*LC≈ PR* dove *ωR* =1 *~~√~~LC*

26

Figura 43: La funzione di trasferimento al variare della pulsazione

q

Per *R ≥* 2 *·*

*L*

*C*non ci sono e etti di risonanza.

Il fattore di merito (o qualità) *Q* esprime la relativa prevalenza degli e etti risonanti / dissipativi:

∆*ω−*3*dB*=1*R·*r*LC*

*Q* =*ωR*

3.3 Circuiti risonanti parallelo

Concentrandoci ora sul circuito LC mostrato in gura 46:

*VOUT* (*s*) = *IIN* (*s*) *∗* (*ZC* (*s*)*//ZL*(*s*))

da cui

*H*(*s*) = *VOUT* (*s*)

*IIN* (*s*)= (*ZC* (*s*)*//ZL*(*s*))

sostituendo adesso alle impedenze le loro espressioni esplicite:

*H*(*s*) = 1

*sC* + 1*/sL* =*sL*

1 + *s*2*LC*

e, per *s* = *jω*,

*H*(*s*) = *jωL*

1 *− ω*2*LC |H*(*s*)*|* =

( *ω·L*

1*−ω*~~2~~*·LC* se *ω < √*1*LC*

*ω*~~2~~*·LC−*1se *ω > √*1*LC*](*H*(*jω*)) = *ω·L*

(+*π*2se *ω < √*1*LC −π*2se *ω > √*1*LC*

Concentrandoci ora sul circuito RLC mostrato in gura 48: 27



Figura 44: Circuito risonante serie RLC

*VOUT* (*s*) = *IIN* (*s*) *∗* (*ZC* (*s*)*//ZL*(*s*)*//ZR*(*s*))

da cui

*H*(*s*) = *VOUT* (*s*)

*IIN* (*s*)= (*ZC* (*s*)*//ZL*(*s*)*//ZR*(*s*))

sostituendo adesso alle impedenze le loro espressioni esplicite: *sC* + 1*/sL* + 1*/R* =*sL*

1 + *sL/R* + *s*2*LC*

e, per *s* = *jω*,

*H*(*s*) = 1

*H*(*s*) = *jωL*

1 + *jωL/R − ω*2*LC |H*(*s*)*|* =

*ωL*

~~p~~(1 *− ω*2*LC*)2 + (*ωL/R*)2

*|H*(*s*)*|ω*=*ωR* = *R ≈ PR* dove *ωR* =1

*~~√~~LC*

Per *R ≥*12*·*

q

*L*

*C*non ci sono e etti di risonanza.

Il fattore di merito (o qualità) *Q* esprime la relativa prevalenza degli e etti risonanti / dissipativi:

*Q* =*ωR*

∆*ω−*3*dB*= *R ·*

28

r*C L*

**Figura 45: La funzione di trasferimento al variare della pulsazione



Figura 46: Circuito risonante parallelo LC

29

Figura 47: La funzione di trasferimento al variare della pulsazione



Figura 48: Circuito risonante parallelo RLC

30

Figura 49: La funzione di trasferimento al variare della pulsazione

31

4 Circuiti attivi lineari con ampli catori operazionali 4.1 L'ampli catore operazionale



Figura 50: L'ampli catore operazionale

Un ampli catore operazionale è un dispositivo ad almeno 5 terminali (anche se molto spes so ne hanno in numero maggiore). Questi 5 terminali sono così suddivisi: due ingressi, tipi camente di tensione (esistono anche degli ampli catori operazionali detti current mode che hanno un ingresso di tensione e un ingresso di corrente); un'uscita di tensione; due terminali di alimentazione.

È un dispositivo attivo. Un dispositivo attivo è un dispositivo che trasferisce potenza dai terminali di alimentazione all'uscita (una popolare de nizione sbagliata di dispositivo attivo è quella di un dispositivo in cui l'uscita, in tensione, è maggiore degli ingressi applicati. Per accertarne la falsità è su ciente pensare ad un circuito risonante che ha in ingresso un segnale alla frequenza di risonanza).

Un ampli catore operazionale ha due terminali di alimentazione: un terminale di alimenta zione positiva e uno di alimentazione negativa (dove per positività e negatività non si intende che uno dà e l'altro assorbe, ma che uno dei due alimenta più dell'altro ed è importante evitare di confondere i due terminali per evitare di danneggiare circuiti reali).



Figura 51: L'ampli catore operazionale ideale

Un ampli catore operazionale ideale, ovvero la più semplice modellizzazione possibile di un ampli catore, ha:

Ingressi di tensione a impedenza in nita (non c'è passaggio di corrente) Uscirta di tensione a impedenza nulla (generatore di tensione ideale)

32

Alimentazione con di erenza di potenziale in nita

Modellizzabile con un sistema lineare:

*VOUT* = *f*(*VIN*+ *− VIN−*) = *f*(∆*VIN* ) = *A*0 *∗* ∆*VIN* (*A*0 cost. *→ ∞*)

Per valori niti di *VOUT* :

∆*VIN* = *VOUT /A*0 *→* 0*V ⇒ VIN*+ *≈ VIN−*

Un modello è valido quando riesce ad prevedere correttamente il comportamento di un sistema senza aggiungere complicazioni non necessarie. Il modello sovradescritto è sempre valido?

Figura 52: L'invalidità del modello

No. Cambiando il potenziale di riferimento non cambio la di erenza di potenziale tra i due ingressi, quindi il potenziale in uscita resta invariato. Ma questo, come visibile dai conti in gura 52, è un paradosso.

Figura 53: Un modello alternativo

33

Il modello altrenativo schematizzato in gura 53, invece, resta valido al variare del potenziale di riferimento, ma non è realistico in quanto prevede un ulteriore terminale che l'ampli catore operazionale non ha.



Figura 54: Un ampli catore operazionale meno ideale

Allontanandoci dal caso ideale e avvicinandosi a quello reale:

Guadagno nito: *A*0 *>>* 1 (es. 104- 106)

Correnti all'ingresso non nulle ma trascurabili (di diversi ordini di grandezza più piccole rispetto alle altre correnti in gioco)

Alimentazione con di erenza di potenziale nita:

∆*VM IN ≤ VCC* + *VEE ≤* ∆*VMAX* con∆*VM IN >* 0

Potenziale in uscita limitato dalle alimentazioni:

*−VEE* + ∆*VEE ≤ VOUT ≤* +*VCC −* ∆*VCC*

con ∆*VCC* e ∆*VEE* compresi tra 0 e qualche Volt a seconda del tipo di Op. Amp. *VIN*+ *≈ VIN−*, ma solo in certe condizioni

Quando accade che *VIN*+ *≈ VIN−*? Guardando il gra co in gura 55, si evince che ∆*x* = ∆*y/A*0: essendo *A*0 molto grande (104- 106), la di erenza di potenziale ∆*x* sarà piccola re lativamente a ∆*y* e *VIN*+ *≈ VIN−* sarà veri cata. Questo è vero ntantoché l'uscita non è in saturazione, ovvero dipende dagli ingressi. Quando l'uscita è in saturazione, essa è determinata dall'alimentazione e non dagli ingressi, e non varrà più la relazione sopra descritta; in questo caso è evidentemente possibile aumentare la di erenza di potenziale ∆*x*  no all'ordine di grandezza di ∆*y* senza alcun e etto su quest'ultima.

Un modello carta e penna di un ampli catore operazionale può essere come quello riportato in gura 56 e onestamente non troppo diverso dai primi schizzi visti in questa sezione. Questo modello ha le seguenti caratteristiche:

Potenziale in uscita limitato dalle alimentazioni:

*−VEE ≤ VOUT ≤* +*VCC*

(non sempre è possibile che l'uscita raggiunga le alimentazioni, ma per i ni di questo modello è un'assunzione ragionevole e la faremo)

34



Figura 55: Gra co della tensione in uscita in funzione della di erenza di potenziale tra gli ingressi 

Figura 56: Modello di ampli catore operazionale carta e penna

se l'uscita non è in saturazione, *VIN*+ *≈ VIN−*

Correnti agli ingressi trascurabili *IIN*+ *≈ IIN− ≈* 0

4.2 Circuiti di ampli cazione invertenti e non invertenti

La con gurazione circuitale invertente, schematizzata in gura 58, è una con gurazione basilare. È un doppio dipolo con ingresso e uscita in tensione.

Supponendo i due ingressi equipotenziali, *V*+ = *V−* = 0*V* . Si applica ora la legge di Ohm: *IR*1 =*VR*1

*R*1=*VIN*

*R*1

Per la prima legge di Kirchho (3)

*IR*1 = *IR*2 + *I−*

ma, supponendo *I*+ *≈ I− ≈* 0,

35



Figura 57: Modello di ampli catore operazionale più realistico, che funziona sempre , ma è anche più complicato...

*IR*1 = *IR*2

Applicando ancora la legge di Ohm

*VR*2 = *IR*2 *∗ R*2

Ora, per la seconda legge di Kirchho (4)

*VOUT* = *V− − VR*2 = *−VR*2 = *−IR*2 *∗ R*2 = *−IR*1 *∗ R*2 = *−VIN ∗R*2

*R*1

da cui

*VOUT*

*VIN*= *−R*2

*R*1= *−Z*2

*Z*1

La con gurazione circuitale non invertente, schematizzata in gura 59, è analoga a quella invertente, salvo una modi ca: lo spostamento dell'ingresso di tensione.

Supponendo i due ingressi equipotenziali, *V*+ = *V−* = *VIN* . Per la seconda legge di Kirchho (4):

*VR*1 = *V−* = *VIN*

Applicando ora la legge di Ohm

*IR*1 =*VR*1

*R*1=*VIN*

*R*1

e supponendo *I*+ *≈ I− ≈* 0

*IR*1 = *IR*2

36



Figura 58: Circuito in con gurazione invertente



Figura 59: Circuito in con gurazione non invertente

Applicando ancora la legge di Ohm

*VR*2 = *IR*2 *∗ R*2

Ora, per la seconda legge di Kirchho (4)

*VOUT* = *VR*1 + *VR*2 = *VIN* + *VIN ∗R*2

*R*1

da cui

*VOUT*

*VIN*= 1 +*R*2

*R*1= 1 +*Z*2

*Z*1

Si noti che il rapporto *VOUT /VIN* deve essere sempre maggiore di 1. Questa con gurazione può solo ampli care.

La con gurazione circuitale non invertente a bu er, schematizzata in gura 60, è una con - gurazione non invertente con *R*2 = 0 e *R*1 *→ ∞*.

Non serve partire dalla formula generale ricavata in precedenza, analizzando con le leggi di Kirchho e ricordando che gli ingressi sono equipotenziali si ha che:

37



Figura 60: Circuito in con gurazione non invertente a bu er

*V−* = *V*+ = *VIN* = *VOUT*

ovvero i segnali in ingresso e in uscita sono uguali. L'utilità di questo circuito è quella di essere un lettore ideale di tensione, avendo un'alta impedenza in ingresso, e di essere un generatore ideale di tensione avendo bassa impedenza in uscita. Il circuito permette quindi di riproporre un segnale in tensione in entrata ad un'impedenza più bassa.

Figura 61: Circuito sommatore invertente

Il circuito ra gurato in gura 61 è un circuito con più ingressi. È possibile analizzarlo, per il principio di sovrapposizione, spegnendo un ingresso ed analizzando l'e etto dell'altro, spegnendo quindi il secondo e analizzando il primo e sommare quanto trovato.

Notiamo che, spegnendo l'ingresso 1, la tensione ai capi della resistenza *R*11 è pari a *VR*11 = *V− −* 0. Ma, essendo gli ingressi equipotenziali, *V*+ = *V−* = 0*V* e *VR*11 = 0. Dunque, spegnendo l'ingresso 1, non scorre corrente attraverso *R*11 e il circuito si riduce ad un semplice invertente:

*VOUT*2 = *−VIN*2*R*2

*R*12

Analogamente, spegnendo l'ingresso 2, si ha che

38

*VOUT*1 = *−VIN*1*R*2

*R*11

e in ne

*VOUT* = *VOUT*1 + *VOUT*2 = *−VIN*1*R*2

*R*11*− VIN*2*R*2

*R*12= *−R*2 *∗*

facilmente generalizzabile a

*VIN*1

*R*11+*VIN*2 *R*12

*VOUT* = *−R*2 *∗*

*VIN*1

*R*11+*VIN*2

*R*12+*VIN*3

*R*13+ *...*

Figura 62: Circuito sottrattore

Analogamente si risolve il circuito sottrattore ( gura 62). Spegnendo *VIN*2 ci si ricollega ad un normale invertente

*VOUT*1 = *−VIN*1 *∗R*2

*R*1

Spegnendo però *VIN*1, le cose sono meno semplici. La con gurazione è non invertente, ma la tensione non è direttamente applicata all'ingresso, ma attraverso un partitore di tensione. Il potenziale *V*+ sarà:

*V*+ = *VIN*2 *∗R*4

*R*3 + *R*4

adesso la con gurazione si è ridotta ad un normale non invertente, per cui *VOUT*2 = *V*+ + *V*+ *∗R*2

*R*1= *V*+ *∗R*2 + *R*1

*R*1= *VIN*2 *∗R*4

*R*3 + *R*4*∗R*2 + *R*1

*R*1

*R*1+ *VIN*2 *∗R*4

*VOUT* = *−VIN*1 *∗R*2

caso particolare, se *R*4*/R*3 = *R*2*/R*1,

*R*3 + *R*4*∗R*2 + *R*1 *R*1

*VOUT* = (*VIN*2 *− VIN*1) *∗R*2

*R*1

La tensione in uscita è proporzionale alla di erenza tra i due ingressi. 39