



Università degli Studi di Padova

---

DEPARTMENT OF SOMETHING

*Master Thesis in* MASTER IN SOMETHING

**Implementazione di modelli di  
programmazione matematica per  
problemi di bin packing**

*Supervisor*

BIGNAME SCIENTIST  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

*Co-supervisor*

DELIGHTFUL RESEARCHER  
UNIVERSITÀ BLABLA

*Master Candidate*

DANIEL ROSSI



THIS IS THE DEDICATION.



# Abstract

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Morbi commodo, ipsum sed pharetra gravida, orci magna rhoncus neque, id pulvinar odio lorem non turpis. Nullam sit amet enim. Suspendisse id velit vitae ligula volutpat condimentum. Aliquam erat volutpat. Sed quis velit. Nulla facilisi. Nulla libero. Vivamus pharetra posuere sapien. Nam consectetur. Sed aliquam, nunc eget euismod ullamcorper, lectus nunc ullamcorper orci, fermentum bibendum enim nibh eget ipsum. Donec porttitor ligula eu dolor. Maecenas vitae nulla consequat libero cursus venenatis. Nam magna enim, accumsan eu, blandit sed, blandit a, eros.

Quisque facilisis erat a dui. Nam malesuada ornare dolor. Cras gravida, diam sit amet rhoncus ornare, erat elit consectetur erat, id egestas pede nibh eget odio. Proin tincidunt, velit vel porta elementum, magna diam molestie sapien, non aliquet massa pede eu diam. Aliquam iaculis. Fusce et ipsum et nulla tristique facilisis. Donec eget sem sit amet ligula viverra gravida. Etiam vehicula urna vel turpis. Suspendisse sagittis ante a urna. Morbi a est quis orci consequat rutrum. Nullam egestas feugiat felis. Integer adipiscing semper ligula. Nunc molestie, nisl sit amet cursus convallis, sapien lectus pretium metus, vitae pretium enim wisi id lectus. Donec vestibulum. Etiam vel nibh. Nulla facilisi. Mauris pharetra. Donec augue. Fusce ultrices, neque id dignissim ultrices, tellus mauris dictum elit, vel lacinia enim metus eu nunc.



# Sommario

LOREM IPSUM DOLOR SIT AMET, consectetur adipiscing elit. Morbi commodo, ipsum sed pharetra gravida, orci magna rhoncus neque, id pulvinar odio lorem non turpis. Nullam sit amet enim. Suspendisse id velit vitae ligula volutpat condimentum. Aliquam erat volutpat. Sed quis velit. Nulla facilisi. Nulla libero. Vivamus pharetra posuere sapien. Nam consectetur. Sed aliquam, nunc eget euismod ullamcorper, lectus nunc ullamcorper orci, fermentum bibendum enim nibh eget ipsum. Donec porttitor ligula eu dolor. Maecenas vitae nulla consequat libero cursus venenatis. Nam magna enim, accumsan eu, blandit sed, blandit a, eros.





# Indice

ABSTRACT	v
LIST OF FIGURES	xi
LIST OF TABLES	xiii
1 INTRODUZIONE	1
1.1 L'azienda . . . . .	1
1.2 L'idea . . . . .	1
1.3 Organizzazione del testo . . . . .	3
1.4 Convenzioni tipografiche . . . . .	3
1.5 Convenzioni modelli . . . . .	4
2 PROCESSI E METODOLOGIE	5
2.1 Contesto . . . . .	5
2.2 Introduzione al progetto . . . . .	6
2.3 Vincoli temporali, tecnologici e metodologici . . . . .	6
2.4 Requisiti e obiettivi . . . . .	7
2.5 Pianificazione . . . . .	8
2.5.1 Formazione . . . . .	8
2.5.2 Preparazione ambiente . . . . .	9
2.5.3 Scelta framework . . . . .	9
2.5.4 Realizzazione modelli . . . . .	9
2.5.5 Validazione . . . . .	9
2.5.6 Esecuzione test . . . . .	9
2.5.7 Documentazione dei risultati . . . . .	9
2.6 Organizzazione oraria . . . . .	9
2.7 Ambiente di lavoro . . . . .	10
2.7.1 Metodi di sviluppo . . . . .	10
2.7.2 Gestione di progetto . . . . .	11
2.7.3 Linguaggio di programmazione e ambiente di sviluppo . . . . .	11
2.8 Analisi dei rischi . . . . .	12

<b>3</b>	<b>INQUADRAMENTO DELLE ATTIVITÀ DI STAGE</b>	<b>15</b>
3.1	Il progetto aziendale . . . . .	15
3.2	Il progetto di stage . . . . .	16
3.3	Astrazione del problema . . . . .	16
3.4	Variante del Bin Packing . . . . .	17
<b>4</b>	<b>MODELLI PER IL BIN PACKING</b>	<b>19</b>
4.1	Modelli di programmazione matematica . . . . .	19
4.2	Modelli di programmazione lineari . . . . .	20
4.3	Modello 2D . . . . .	21
4.4	Modello 2D con rotazione . . . . .	23
4.5	Modello 2D con rotazione e sequenza scarico . . . . .	25
4.6	Modello 3D con rotazione e sovrapposizione . . . . .	29
<b>5</b>	<b>CONCLUSION</b>	<b>35</b>
	<b>REFERENCES</b>	<b>36</b>
	<b>ACKNOWLEDGMENTS</b>	<b>37</b>

## Listing of figures

3.1	Bin packing figures . . . . .	17
4.1	Veduta area - piano cartesiano . . . . .	21
4.2	pacchi ruotati . . . . .	23
4.3	Vie scaricamento pacco . . . . .	25
4.4	corretta sequenza di scarico . . . . .	28
4.5	ciucia . . . . .	33



# Listing of tables

2.1	A nice table . . . . .	10
-----	------------------------	----



# 1

## Introduzione

### L'AZIENDA

Trans-Cel è un'azienda di trasporti che opera nel settore da oltre trent'anni, ha una numerosa flotta composta da bilici e motrici con cui trasporta merci nel nord e centro Italia, tra le qualità che contraddistinguono questa azienda c'è la tecnica del groupage ed il trasporto di merci pericolose.

L'azienda ha sede ad Albignasego in provincia di Padova, qui nell'ufficio operativo vengono organizzati in tempo reale i viaggi dei mezzi per trasportare le merci dei clienti, fornendo magari anche un servizio di deposito.

Da questa realtà si evince come si debba essere sempre pronti a rispondere tempestivamente ad ogni cliente, fornendo loro una soluzione di trasporto adeguata che soddisfi i clienti ma che permetta di far fatturare l'azienda, è da qui che nasce la necessità di un software decisionale di supporto.

### L'IDEA

Ad oggi l'azienda ha sviluppato un'euristica che permette di organizzare al meglio le merci all'interno del container del camion. L'idea è quella di valutare la bontà delle soluzioni fornite dall'euristica, confrontando suddette soluzioni con quelle fornite dal modello e individuare se e con quali tipi di oggetti queste riportino

differenze maggiori.



## ORGANIZZAZIONE DEL TESTO

Di seguito viene riportata per ogni capitolo una piccola descrizione delle tematiche trattate:

- **Capitolo 1:** in questo capitolo vengono riportati gli obiettivi generali e la pianificazione concordata con l'azienda, inoltre vengono riportate anche le metodologie e strumenti utilizzati, infine una analisi dei rischi.
- **Capitolo 2:** viene descritto il problema generale e come è stato risolto dall'azienda, viene illustrato lo scopo dello stage, viene data una definizione astratta del problema dell'azienda.
- **Capitolo 3:** vengono riportati i modelli utilizzati e una descrizione dell'idea di fondo, per ciascuno di essi verrà riportato integralmente la lista delle variabili utilizzate, descrivendo inoltre anche cosa modellino, riportando per ciascun modello anche le criticità riscontrate e come sono state risolte anche attraverso l'ausilio di materiale grafico.
- **Capitolo 4:** vengono riportate le modalità con cui si sono eseguiti i test illustrando come siano stati strutturati e come sia stato possibile verificare le soluzioni fornite dai modelli.
- **Capitolo 5:** verrà data una descrizione delle funzionalità sviluppate per la verifica delle soluzioni fornite dal modello e successivamente implementate nell'euristica.
- **Capitolo 6:** vengono riportati gli strumenti adottati per lo svolgimento delle attività, corredati da una breve descrizione che riporti come sono stati utilizzati.
- **Capitolo 7:** verranno riportati i risultati ottenuti descrivendo dettagliatamente le informazioni ricavate e fornendo una serie di osservazioni sulle peculiarità dei gruppi di istanze usate nei test, infine si forniranno le conclusioni dello stage.

## CONVENZIONI TIPOGRAFICHE

Il testo adotta le seguenti convenzioni tipografiche:

- ogni acronimo, abbreviazione, parola ambigua o tecnica viene spiegata e chiarificata alla fine del testo presso il glossario.
- ogni parola di glossario alla prima apperizione verrà etichetta come segue:  
*parola*<sup>[g]</sup>
- nel riportare i modelli verranno adottate alcune convenzione riportate tra le quali .

## CONVENZIONI MODELLI

Ogni qual volta si dovrà fare riferimento ad un modello vi si farà riferimento attraverso le seguenti sigle:

- 2D: modello in 2 dimensioni, considera solo profondità e larghezza;
- 2DR: modello in 2 dimensioni con la rotazione;
- 2DRS: modello in 2 dimensioni con rotazione e sequenza di scarico;
- 3D: modello in 3 dimensioni con rotazione e sovrapposizione, la rotazione è rispetto la base e si considerano larghezza, profondità e altezza.

# 2

## Processi e metodologie

In questo capitolo verranno riportati in modo approfondito lo scopo e gli obiettivi dello stage, riportando lo scadenziario delle attività e contestualizzandole alla realtà dell'azienda.

### CONTESTO

Il progetto generale nasce dalla visione di Filippo Sottovia, titolare dell'azienda, di realizzare un software decisionale di supporto che permettesse di sopperire a molteplici obiettivi quali:

- agevolazione degli operatori nello svolgimento delle loro mansioni;
- facilitazione del processo decisionale richiedendo così un lavoratore meno esperto;
- nuove attività frutto del tempo risparmiato grazie all'aumento della produttività;
- condivisione in tempo reale delle informazioni sullo stato dei trasporti;
- stima di costi e profitti disponibile in ogni momento.

Il software, fornisce un'interfaccia grafica web intuitiva che fa dell'usabilità la propria punta di diamante, essa infatti persegue l'idea di rendere il più semplice possibile operare sul sistema senza però peccare di professionalità, il sistema

inoltre è equipaggiato con algoritmi che permettono di ottimizzare gli ordini organizzando al meglio le merci da trasportare ripartendole ai camion della flotta, tenendo conto degli orari di carico e scarico delle sedi dei clienti/fornitori, delle condizioni di traffico sulle strade, delle pause dovute per legge agli autisti e della particolarità delle merci.

## INTRODUZIONE AL PROGETTO

L'azienda per permettere di stimare lo spazio occupato dalle merci ha sviluppato un'euristica, questa riceve in input le merci da trasportare divise nei diversi ordini, le approssima a parallelepipedi e le dispone al meglio sul pianale del camion, sovrapponendole dove possibile, con l'obiettivo di ridurre al minimo lo spazio lineare occupato dalle stesse, così facendo si risparmia spazio per eventuali altre merci da caricare qualora arrivassero nuovi ordini. A rendere ancora più complicato il lavoro dell'euristica riportiamo tre principali problemi da tenere in considerazione:

- Stabilità degli oggetti: la faccia inferiore di ciascun oggetto deve poggiare per intero sulle facce superiori di altri oggetti sotto di sé o sul pianale del camion;
- Sequenza di scarico: ogni oggetto deve poter essere scaricato lateralmente o frontalmente, questo implica che non può avere in torno a sé merci che ne blocchino lo scarico, in quanto appartenenti ad ordini maggiori;
- Baricentro degli oggetti: peso delle merci deve essere equamente distribuito sul pianale del camion.

## VINCOLI TEMPORALI, TECNOLOGICI E METODOLOGICI

Nel periodo di stage svolto presso l'azienda mi è stato chiesto di tenere un *diario* condiviso utilizzando *dropbox*, nel suddetto diario mi si richiedeva di annotare giornalmente l'avanzare del lavoro riportando l'avanzamento dei lavori, idee, osservazioni riguardanti criticità rilevate e positività riscontrate negli strumenti utilizzati, nella cartella condivisa mi è stato chiesto di includere anche gli articoli accademici letti e le presentazioni fatte in azienda man mano che si proseguiva

con lo stage. L'ambiente di lavoro si è dimostrato molto stimolante ed è stato molto utile confrontarsi con i colleghi per ricevere opinioni e consigli su come indirizzare il lavoro. Ogni mattina prima di iniziare a lavorare facevamo un rapido *brainstorming* individuando gli obiettivi della giornata e per fare il punto. Un'altra cosa importante è stata la presentazione di metà stage, alla quale ha presenziato tutto il team di sviluppo, parte del personale d'amministrazione e il Professor De Giovanni che mi ha fornito preziosi consigli su come orientare gli sforzi al meglio per la seconda metà dello stage. Prima di iniziare lo stage è stato concordato con l'azienda un piano di lavoro su un totale di 320 ore, lavorando 5 giorni a settimana, 8 ore per ciascun giorno.

## REQUISITI E OBIETTIVI

Nella tabella riportata di seguito vengono riportati gli obiettivi dello stage, a corredo degli stessi vi sarà un codice univoco ed una breve descrizione.

Ogni obiettivo è provvisto di un codice che lo identifica formato da una delle seguenti stringhe **ob,de,op**] rappresentante il livello di importanza e da un numero incrementale positivo, che rispetta la seguente nomenclatura:

[importanza][identificativo].

Il livello di importanza di ciascun obiettivo può essere uno tra i seguenti:

- **Obbligatorio:** individuato dalla stringa *ob*, sono obiettivi fondamentali per la riuscita del progetto, il loro soddisfacimento dovrà verificarsi assolutamente entro la fine dello stage, pena il fallimento dello stesso;
- **Desiderabile:** individuato dalla stringa *de*, sono obiettivi secondari su cui però si nutre dell'interesse, il loro soddisfacimento è auspicabile entro la fine dello stage;
- **Opzionale:** individuato dalla stringa *op*, sono obiettivi di contorno su cui si nutre poco interesse, la loro realizzazione si verificherà nel momento in cui si dovesse soddisfare tutti gli obiettivi obbligatori e desiderabili prima della fine dello stage.

Si prevede lo svolgimento dei seguenti obiettivi:

- Obbligatori

- ob01: individuazione e analisi *constraints* modello 2D;
  - ob02: modello matematico 2D con *framework* di modellazione algebrica;
  - ob03: traduzione modello in Python con l’ausilio di Google OR-Tools;
  - ob04: test sul modello 2D e confronto con l’euristica;
  - ob05: individuazione e analisi *constraints* modello 2DR;
  - ob06: modello matematico 2DR con *framework* di modellazione algebrica;
  - ob07: traduzione modello in Python con l’ausilio di Google OR-Tools;
  - ob08: test sul modello 2DR e confronto con l’euristica;
- Desiderabili
    - de01: individuazione e analisi *constraints* modello 3D;
    - de02: modello matematico 3D con *framework* di modellazione algebrica;
    - de03: traduzione modello in Python con l’ausilio di Google OR-Tools;
    - de04: test sul modello 3D e confronto con l’euristica;
  - Opzionali
    - op01: evoluzione euristica, fornita dall’azienda, con nuove funzionalità;

## PIANIFICAZIONE

Con le ore a disposizione per questo stage si è proceduto a organizzare come segue le attività.

## FORMAZIONE

Si è visto necessario approfondire la programmazione lineare e la letteratura correlata al problema del bin packing, imparare il linguaggio di programmazione Python e l’ambiente fornito dallo strumento *Jupyter*.

## PREPARAZIONE AMBIENTE

La preparazione dell'ambiente di lavoro ha richiesto l'installazione di numerose librerie e framework sia pubblici che aziendali per riuscire a integrare i modelli con le librerie aziendali.

## SCELTA FRAMEWORK

La scelta finale del framework di modellazione algebrica è ricaduta sullo stesso Or-Tools in quanto forniva una interfaccia Python ed era quello che forniva una documentazione migliore oltre che una community di sviluppatori molto attiva.

## REALIZZAZIONE MODELLI

Periodo di maggior peso rispetto ad altri, esso ha portato allo sviluppo dei modelli e delle loro varianti, includendo in sé varie attività.

## VALIDAZIONE

Periodo richiesto per la validazione delle soluzioni fornite dai diversi modelli per verificare la loro correttezza.

## ESECUZIONE TEST

Periodo in cui sono stati eseguiti test massivi sia dei modelli che dell'euristica con cui successivamente estrapolare informazioni utili al confronto.

## DOCUMENTAZIONE DEI RISULTATI

Analisi dei risultati ottenuti e conseguente documentazione al fine di capire dove e come si potesse migliorare l'euristica.

## ORGANIZZAZIONE ORARIA

La pianificazione, in termini di quantità di ore di lavoro, è stata così distribuita:

Durata in ore		Descrizione dell'attività
56		<b>A:</b> Formazione
	8	• Ricerca <i>framework</i> di modellazione algebrica
	24	• Studio di tale <i>framework</i>
	24	• Studio Google OR - Tools
104		<b>B:</b> Versione algoritmo 2D
	8	• Individuazione ed analisi <i>constraints</i>
	48	• Prototipazione modello
	24	• Traduzione in Python - Google OR - Tools
	24	• Test e confronto con euristica
72		<b>C:</b> Versione algoritmo 2D con rotazione
	8	• Individuazione ed analisi <i>constraints</i>
	24	• Prototipazione modello
	16	• Traduzione in Python - Google OR - Tools
	16	• Test e confronto con euristica
72		<b>D:</b> Versione algoritmo 3D con sovrapposizione
	8	• Individuazione ed analisi <i>constraints</i>
	32	• Prototipazione modello
	16	• Traduzione in Python - Google OR - Tools
	24	• Test e confronto con euristica
16		<b>E:</b> Lavoro sviluppo euristica
	16	• Realizzazione nuove funzioni euristica
<b>Totale: 320</b>		

Table 2.1: A nice table

## AMBIENTE DI LAVORO

## METODI DI SVILUPPO

Il ciclo di vita di un prodotto in Trans-Cel segue il metodo incrementale, in particolare il tutto inizia da una fase di concezione dell'idea, analisi della stessa, progettazione ed infine partendo dagli obiettivi più importanti si realizza il prodotto rilasciando periodicamente una versione dello stesso che mostri il procedere dei lavori e delle nuove funzionalità inserite. In quest'ottica lo sviluppo di un modello



può essere associato ad un incremento, la cui *milestone* è la ricezione dei risultati, a sua volta lo sviluppo di ciascun modello segue il metodo incrementale, lo sviluppo di un modello può essere visto come l'insieme di tre principali attività:

- Analisi letteratura: lettura articoli accademici riportanti modelli simili o idee per lo sviluppo degli stessi.
- Scrittura: scrittura del modello e integrazione con il sistema grazie al framework Or-Tools.
- Verifica: testing massimo e verifica delle soluzioni fornite.

Inoltre è possibile cogliere analogie con il metodo *agile*<sup>[g]</sup> se si pensa ai brainstorming, momenti importanti in quanto ci si confronta in modo critico e si fa il punto della situazione oltre che esporre le problematiche che si stanno incontrando.

## GESTIONE DI PROGETTO

Per quanto riguarda la gestione di progetto sono stati utilizzati alcuni strumenti descritti con maggiore dettaglio nel capitolo, in generale per la gestione dei task da eseguire si è fatto uso di *Taiga*<sup>[g]</sup>, uno strumento di gestione delle task molto simile per funzionamento a *Trello*<sup>[g]</sup>, per la gestione della comunicazione e condivisione informazioni si è fatto uso dell'applicazione *Telegram*<sup>[g]</sup>, per la condivisione di documentazione e articoli si è fatto uso del servizio Dropbox, per il versionamento si è fatto uso del servizio *GitHub*<sup>[g]</sup> per la familiarità dello strumento, per quanto riguarda l'interfaccia con cui versionare ho utilizzato *git*<sup>[g]</sup> da terminale.

## LINGUAGGIO DI PROGRAMMAZIONE E AMBIENTE DI SVILUPPO

Per la totalità dello stage si è lavorato utilizzando Jupyter Notebook, con questo strumento è stato possibile scrivere programmi in linguaggio Python in modo molto agevole. Questo linguaggio di programmazione è orientato agli oggetti ed interpretato dinamicamente al momento dell'esecuzione da un interprete. Python risulta veramente versatile in quanto fornisce incredibili funzionalità utilizzabili in modo semplice e intuitivo, dispone di moltissimi moduli che permettono di fare le più svariate cose, il linguaggio inoltre permette di esporre costrutti *C++*<sup>[g]</sup> in Python permettendo di utilizzarli nei propri programmi, questo permette di

mantenere efficienza e modularità. L'unico punto a suo sfavore è la non possibilità di realizzare programmi *multithreading*<sup>[g]</sup> se non utilizzando il modulo *multiprocessing*<sup>[g]</sup> che comporta però dei compromessi.

## ANALISI DEI RISCHI

In questa sezione vengono riportati i principali rischi che si prefiggevano iniziando lo stage, ciascuno di essi oltre ad avere una breve descrizione riportano un livello di rischio e come si possa fare per evitarli:

- **Difficoltà nelle tecnologie adottate**

Fin da quando si è concordato lo stage si era capito che Python avrebbe avuto un ruolo dominante ma la mole di librerie e estensioni rendeva il linguaggio troppo vasto da poter approfondire nella sua interezza, ed oltre a questo vi era il modulo Or-Tools e *Pandas*<sup>[g]</sup> da approfondire e utilizzare.

- **Livello di rischio:** Basso;
- **Contromisure:** Studiare in modo il più possibile approfondito Python e i moduli sopra citati.

- **Difficoltà di integrazione nel team**

Di fondamentale importanza per la riuscita di un progetto è la cooperazione con i colleghi e la creazione di un ambiente di lavoro sano e che stimoli la creatività, essendo un nuovo arrivato inserito in un ambiente a forte stress per le stringenti scadenze vi era la possibilità di entrare in conflitto con taluni colleghi.

- **Livello di rischio:** Basso;
- **Contromisure:** Perseguire un atteggiamento positivo, critico e oggettivo.

- **Contrattempi dovuti a malattie e impegni**

Un rischio da tenere in considerazione è quello dovuto a impegni o malattie che precludano la possibilità di recarsi nel luogo di lavoro, data la durata dello stage è sicuramente possibile possa verificarsi.

- **Livello di rischio:** Basso;

- **Contromisure:** Organizzare precedentemente ogni impegno non lavorativo e tempo di *slack*<sup>[g]</sup> per evitare contrattempi.

- **Difficoltà di stima dei tempi previsti**

Con un progetto di così lunga durata e l'inesperienza che ci portiamo appresso è possibile che vengano fatti degli errori di valutazione in termini di tempistiche per lo svolgimento delle diverse attività pianificate.

- **Livello di rischio:** Medio;
- **Contromisure:** Rendere partecipi nella definizione del piano di lavoro persone esperte, come il tutor aziendale.



*This is some random quote to start off the chapter.*

Firstname lastname

# 3

## Inquadramento delle attività di stage

### IL PROGETTO AZIENDALE

Per riuscire ad inquadrare al meglio lo scopo del progetto di stage è importante capire a fondo il progetto generale che l'azienda porta avanti da ormai alcuni anni, poiché essi sono tra loro intrinsecamente legati. Il progetto generale mira a fornire un prodotto che possa far progredire il mercato del trasporto attraverso la digitalizzazione dello stesso, questo attraverso il superamento dei vecchi gestionali, utilizzati concretamente solo per la fatturazione, e l'introduzione di una piattaforma web attraverso cui gestire ogni passaggio nel rapporto cliente-operatore. Il software permette di gestire la flotta di mezzi e organizzare gli ordini di carico e scarico commissionati dai clienti, questa organizzazione può essere fatta manualmente da un operatore esperto oppure affidandosi ad algoritmi che organizzino gli ordini utilizzando i camion disponibili nel miglior modo possibile. Il sistema dispone di un algoritmo per il *vehicle routing*<sup>[g]</sup>, su cui si può dire faccia capo l'intero progetto, questo si occupa di ottimizzare i viaggi dei camionisti tenendo conto di un numero incredibile di variabili, questo algoritmo ha subito diverse upgrade in un'ottica di miglioramento continuo, per renderlo più efficiente, più versatile e più preciso. In questo contesto l'euristica che fornisce la valutazione approssimativa dello spazio occupato da un certo numero di merci è molto importante, questo perché è necessario sapere quanti mezzi siano necessari per trasportare le merci

richieste e quanto spazio sia ancora disponibile per ordini futuri.

## IL PROGETTO DI STAGE

Il progetto di stage dopo l'evento *StageIt*<sup>[g]</sup> ed alcune riunioni presso l'azienda è stato studiato dettagliatamente e riportato nel documento piano di lavoro, nello stesso sono riportati gli obiettivi e la pianificazione delle attività. L'importanza di ottenere una valutazione reale dello spazio occupato da un certo numero di oggetti è fondamentale, per fare ciò lo stage prevede la realizzazione di diversi modelli, lo sviluppo di tali modelli sarà incrementale in quanto ciascun modello eredita quanto sviluppato nel precedente. Ogni modello per definizione permetterà di individuare la disposizione ottima dell'*istanza*<sup>[g]</sup> corrente, questa potrà poi essere confrontata con quella fornita dall'euristica, da questo confronto potremo individuare informazioni utili che permettano di valutare oggettivamente la bontà delle soluzioni fornite dall'euristica, questo permette di capire se con il passare delle versioni rilasciate l'euristica sta migliorando e di quanto rispetto al passato.

## ASTRAZIONE DEL PROBLEMA

Il problema sopra riportato può essere approssimato considerando il container del camion e le merci come se fossero dei parallelepipedi, questa astrazione è necessaria per poter approssimare il tutto come richiesto dal *Bin Packing Problem*, problema su cui si è studiato e discusso molto in ambito accademico portando alla realizzazione di algoritmi esatti ed euristiche.

Si consideri un insieme  $I = \{1, \dots, n\}$  di oggetti aventi dimensioni  $w_i$ ,  $d_i$  e  $h_i$  con  $i \in I$ , un insieme di contenitori di uguale dimensione  $W$ ,  $D$  e  $H$ , ogni oggetto ha la possibilità di essere ruotato di  $90^\circ$  rispetto la propria base e si dà per ipotesi che  $w_i \leq W$ ,  $d_i \leq D$  e  $h_i \leq H$ , inoltre è possibile che gli oggetti possano essere sovrapposti, l'obiettivo è di utilizzare il minor numero di contenitori che riescano a contenere tutti gli oggetti dell'insieme  $I$ .

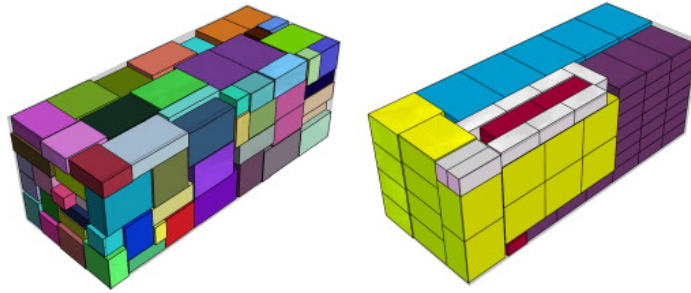


Figure 3.1: Due contenitori completamente pieni

#### VARIANTE DEL BIN PACKING

Il problema del Bin Packing appartiene ad una famiglia di problemi e ne è il rappresentante più famoso, una variante di questo problema è lo *Strip Packing Problem*, le differenze principali dal precedente possono essere individuate di seguito:

- **Numero di contenitori:** viene utilizzato un singolo contenitore;
- **profondità:** la profondità del contenitore è infinita;
- **Oggetti:** come obiettivo si quello di occupare minor spazio lineare possibile rispetto la profondità del contenitore.





# 4

## Modelli per il Bin Packing

In questo capitolo presenteremo prima una rapida introduzione ai modelli matematici per poi analizzare nel dettaglio ciascun modello utilizzato spiegando vincolo per vincolo il loro funzionamento.

### MODELLI DI PROGRAMMAZIONE MATEMATICA

Quando si parla di problemi di ottimizzazione spesso si fa riferimento alla ricerca operativa e ai modelli matematici, questi modelli producono una soluzione che massimizza o minimizza una funzione obiettivo su un certo dominio, questa funzione può rappresentare un aspetto di costo o guadagno, inoltre la soluzione restituita ha la proprietà di restituire una soluzione ottima. La funzione obiettivo solitamente viene rappresentata come segue:

$$\max z = f(x) \quad (\text{oppure } \min z = f(x))$$

s.t.

$$g_i(x) = \begin{cases} \leq b_i \\ = b_i, & i = 1, \dots, m \\ \geq b_i \end{cases}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in X \subseteq \mathbb{R}^n$$

In un modello sono presenti:

- **Variabili decisionali:** sono variabili con un dominio prefissato, vengono utilizzate per formulare tutti gli altri elementi del modello, agendo sui valori assunti dalle stesse si troverà la soluzione ottima;
- **Funzione obiettivo:** funzione che deve essere massimizzata o minimizzata in base agli altri elementi su un dominio dato;
- **Vincoli:** serie di vincoli che correlano tra loro le variabili decisionali e permettono di descrivere condizioni fisiche o requisiti particolari richiesti dalla soluzione.

## MODELLI DI PROGRAMMAZIONE LINEARI

Particolari tipi di problemi di programmazione matematica sono quelli in cui la funzione obiettivo  $f(x)$  e i vincoli  $g_i(x)$  sono funzioni lineari, in tal caso si può parlare di modello di *programmazione lineare*, espresso nel seguente modo:

$$\max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \begin{cases} \leq b_i \\ = b_i, \\ \geq b_i \end{cases} \quad i = 1, \dots, m$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in X \subseteq \mathbb{R}^n$$

Nonostante i modelli non lineari siano a volte molto più compatti ed intuitivi da capire, i modelli lineari mantengono comunque semplicità e sono facilmente risolvibili, sono molti i solver *commerciali*<sup>[g]</sup> e *open source*<sup>[g]</sup> disponibili per la loro risoluzione, quello utilizzato durante lo stage è il solver open source di programmazione lineare intera CBC scritto in C++ con interfacciato con Python grazie a Or-Tools. La creazione di un modello lineare parte dall'osservazione di un problema reale, fissando un obiettivo e creando vincoli che descrivano i requisiti

estratti dal problema reale astraendo il tutto ad un insieme di vincoli lineari. Ogni variabile può avere un dominio differente, continua ( $x_j \in \mathbb{R}$ ), intera positiva ( $x_j \in \mathbb{Z}^+$ ) o binaria ( $x_j \in \{0, 1\}$ ) a seconda dell'utilizzo che si deve farne.

## MODELLO 2D

Il modello 2D considera solo larghezza e profondità degli oggetti e non ne permette la rotazione, l'idea di base è quella di considerare solo la *visione aerea* del contenitore che viene così approssimata ad un rettangolo, questo rettangolo ha larghezza (x) prefissita e profondità (y) infinita, le due dimensioni posso essere considerate come assi di un piano cartesiano aventi origine nel punto di intersezione tra i due assi, per convenzione diciamo che l'asse x sarà quello della larghezza e l'asse y quello della profondità.

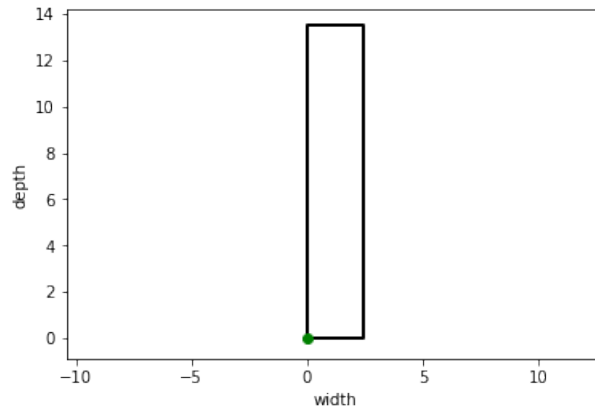


Figure 4.1: Veduta area del container, piano cartesiano con origine nel punto verde.

Il modello consiste delle seguenti variabili continue positive:

- la variabile intera  $x_i$  con  $i \in I$  individua la coordinata sull'asse x dell'angolo in basso a sinistra dell'oggetto  $i$ ;
- la variabile intera  $y_i$  con  $i \in I$  individua la coordinata sull'asse y dell'angolo in basso a sinistra dell'oggetto  $i$ ;

Il modello consiste delle seguenti variabili binarie:

- la variabile binaria  $l_{ij}$  con  $i, j \in I$  assume il valore 1 se l'oggetto  $i$  è situato alla sinistra dell'oggetto  $j$ , altrimenti è 0;
- la variabile binaria  $b_{ij}$  con  $i, j \in I$  assume il valore 1 se l'oggetto  $i$  è situato al di sotto dell'oggetto  $j$ , altrimenti è 0.

$$\min D \quad (4.1)$$

$$\text{s.t.} \quad l_{ij} + l_{ji} + b_{ij} + b_{ji} \geq 1 \quad i < j \quad i, j \in I \quad (4.2)$$

$$y_i - y_j + M_d b_{ij} \leq M_d - d_i \quad i, j \in I \quad (4.3)$$

$$x_i - x_j + M_w l_{ij} \leq M_w - w_i \quad i, j \in I \quad (4.4)$$

$$x_i + w_i \leq W \quad i \in I \quad (4.5)$$

$$y_i + d_i \leq D \quad i \in I \quad (4.6)$$

$$b_{ij}, l_{ij} \in \{0, 1\} \quad i \neq j \quad i, j \in I \quad (4.7)$$

$$x_i, y_i \in \mathbb{R}^+ \quad i \in I \quad (4.8)$$

Spieghiamo ora il significato di ciascun vincolo:

- il vincolo (4.2) impone che presi due oggetti almeno uno dei due si trovi o a sinistra o a destra dell'altro;
- il vincolo (4.3) dice che se  $b_{ij} = 1$  allora impone che l'oggetto  $i$  si trovi dietro l'oggetto  $j$ , altrimenti il vincolo viene disattivato.
- il vincolo (4.4) dice che se  $l_{ij} = 1$  allora impone che l'oggetto  $i$  si trovi alla sinistra l'oggetto  $j$ , altrimenti il vincolo viene disattivato.
- il vincolo (4.5) impone che dato il valore  $x_i$ , corrispondente alla coordinata  $x$  dell'angolo sinistro più arretrato dell'oggetto, sommandoci la larghezza  $w_i$  dell'oggetto e ottenendo quindi la coordinata  $x$  dell'angolo destro più arretrato, questa sia contenuta nell'intervallo  $[0, W]$ ;
- il vincolo (4.6) impone che dato il valore  $y_i$ , corrispondente alla coordinata  $y$  dell'angolo sinistro più arretrato dell'oggetto, sommandoci la profondità  $d_i$  dell'oggetto e ottenendo quindi la coordinata  $y$  dell'angolo sinistro più avanzato, questa sia contenuta nell'intervallo  $[0, D]$ ;

## MODELLO 2D CON ROTAZIONE

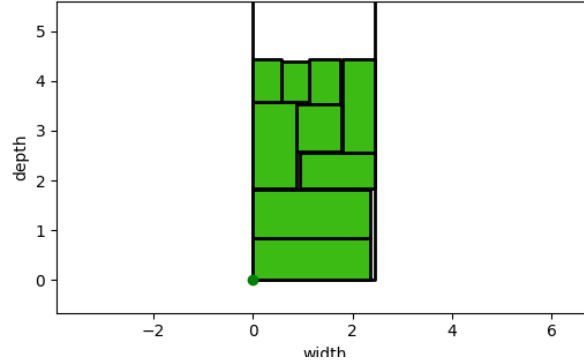


Figure 4.2: Veduta aerea di 9 pacchi, alcuni ruotati.

Il modello consiste delle seguenti variabili continue positive:

- la variabile intera  $x_i$  con  $i \in I$  individua la coordinata sull'asse x dell'angolo in basso a sinistra dell'oggetto  $i$ ;
- la variabile intera  $y_i$  con  $i \in I$  individua la coordinata sull'asse y dell'angolo in basso a sinistra dell'oggetto  $i$ ;
- la variabile intera  $\Omega_i$  con  $i \in I$  assume il valore  $d_i$  se l'oggetto è stato ruotato altrimenti  $w_i$ ;
- la variabile intera  $\Delta_i$  con  $i \in I$  assume il valore  $d_i$  se l'oggetto è stato ruotato altrimenti  $w_i$ ;

Il modello consiste delle seguenti variabili binarie:

- la variabile binaria  $l_{ij}$  con  $i, j \in I$  assume il valore 1 se l'oggetto  $i$  è situato alla sinistra dell'oggetto  $j$ , altrimenti è 0;
- la variabile binaria  $b_{ij}$  con  $i, j \in I$  assume il valore 1 se l'oggetto  $i$  è situato al di sotto dell'oggetto  $j$ , altrimenti è 0.
- la variabile binaria  $r_i$  con  $i \in I$  assume il valore 1 se l'oggetto  $i$  è ruotato su se stesso di  $90^\circ$ , ne risulta che  $w_i$  e  $d_i$  sono invertiti, altrimenti è 0;

$$\min D \quad (4.9)$$

$$\text{s.t.} \quad l_{ij} + l_{ji} + b_{ij} + b_{ji} \geq 1 \quad i < j \quad i, j \in I \quad (4.10)$$

$$\Delta_i = d_i(1 - r_i) - w_i r_i \quad i, j \in I \quad (4.11)$$

$$\Omega_i = w_i(1 - r_i) - d_i r_i \quad i, j \in I \quad (4.12)$$

$$y_i - y_j + M_d b_{ij} \leq M_d - \Delta_i \quad i, j \in I \quad (4.13)$$

$$x_i - x_j + M_w l_{ij} \leq M_w - \Omega_i \quad i, j \in I \quad (4.14)$$

$$x_i + \Omega_i \leq W \quad i \in I \quad (4.15)$$

$$y_i + \Delta_i \leq D \quad i \in I \quad (4.16)$$

$$b_{ij}, l_{ij} \in \{0, 1\} \quad i \neq j \quad i, j \in I \quad (4.17)$$

$$x_i, y_i \in \mathbb{R}^+ \quad i \in I \quad (4.18)$$

Spieghiamo ora il significato di ciascun vincolo:

- il vincolo (4.10) impone che presi due oggetti almeno uno dei due si trovi o a sinistra o a destra dell'altro;
- il vincolo (4.11) impone che  $\Delta_i$  corrisponda alla profondità corretta considerando la rotazione;
- il vincolo (4.12) impone che  $\Omega_i$  corrisponda alla larghezza corretta considerando la rotazione;
- il vincolo (4.13) dice che se  $b_{ij} = 1$  allora impone che l'oggetto  $i$  si trovi dietro l'oggetto  $j$ , altrimenti il vincolo viene disattivato.
- il vincolo (4.14) dice che se  $l_{ij} = 1$  allora impone che l'oggetto  $i$  si trovi alla sinistra l'oggetto  $j$ , altrimenti il vincolo viene disattivato.
- il vincolo (4.15) impone che dato il valore  $x_i$ , corrispondente alla coordinata  $x$  dell'angolo sinistro più arretrato dell'oggetto, sommandoci la larghezza  $w_i$  dell'oggetto e ottenendo quindi la coordinata  $x$  dell'angolo destro più arretrato, questa sia contenuta nell'intervallo  $[0, W]$ ;
- il vincolo (4.16) impone che dato il valore  $y_i$ , corrispondente alla coordinata  $y$  dell'angolo sinistro più arretrato dell'oggetto, sommandoci la profondità  $d_i$  dell'oggetto e ottenendo quindi la coordinata  $y$  dell'angolo sinistro più avanzato, questa sia contenuta nell'intervallo  $[0, D]$ ;

## MODELLO 2D CON ROTAZIONE E SEQUENZA SCARICO

Con questo modello ci proponiamo di disporre nel miglior modo possibile gli oggetti sul pianale del camion tenendo conto anche della sequenza di scarico, un oggetto può essere scaricato lateralmente da destra o da sinistra, oppure dal fondo del camion.

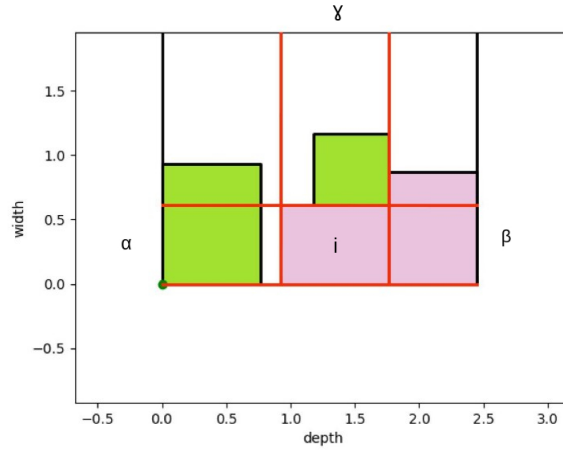


Figure 4.3: Vie con cui scaricare un pacco.

Nel momento in cui l'oggetto verrà scaricato questo dovrà avere almeno una di queste vie libere affinché possa essere scaricato.

Come si può notare nella figura 4.3, le vie attraverso cui può essere effettuato uno scarico vengono deciso attraverso l'indice  $v \in \theta = \{\alpha, \beta, \gamma\}$  che individua rispettivamente:

- $v = \alpha$ : via alla sinistra del pacco da cui può essere sfilato;
- $v = \beta$ : via alla destra del pacco da cui può essere sfilato;
- $v = \gamma$ : via di fronte al pacco da cui può essere sfilato;

Il modello introduce le seguenti variabili continue positive:

- la variabile intera  $x_i$  con  $i \in I$  individua la coordinata sull'asse x dell'angolo in basso a sinistra dell'oggetto  $i$ ;

- la variabile intera  $y_i$  con  $i \in I$  individua la coordinata sull'asse y dell'angolo in basso a sinistra dell'oggetto i;
- la variabile intera  $\Omega_i$  con  $i \in I$  assume il valore  $d_i$  se l'oggetto è stato ruotato altrimenti  $w_i$ ;
- la variabile intera  $\Delta_i$  con  $i \in I$  assume il valore  $d_i$  se l'oggetto è stato ruotato altrimenti  $w_i$ ;
- la parametro binario  $o_{ij}$  assume il valore 1 se l'oggetto i appartiene ad un ordine che deve essere scaricato prima dell'ordine a cui appartiene l'oggetto j, altrimenti è 0;

Il modello introduce le seguenti variabili binarie:

- la variabile binaria  $l_{ij}$  con  $i, j \in I$  assume il valore 1 se l'oggetto i è situato alla sinistra dell'oggetto j, altrimenti è 0;
- la variabile binaria  $b_{ij}$  con  $i, j \in I$  assume il valore 1 se l'oggetto i è situato al di sotto dell'oggetto j, altrimenti è 0.
- la variabile binaria  $r_i$  con  $i \in I$  assume il valore 1 se l'oggetto i è ruotato su se stesso di  $90^\circ$ , ne risulta che  $w_i$  e  $d_i$  sono invertiti, altrimenti è 0;
- la variabile binaria  $\alpha_{ij}$  con  $i, j \in I$  assume il valore 1 se l'oggetto i ha alla sua sinistra l'oggetto j e questo gli impedisca di essere sfilato da sinistra, altrimenti è 0;
- la variabile binaria  $\beta_{ij}$  con  $i, j \in I$  assume il valore 1 se l'oggetto i ha alla sua destra l'oggetto j e questo gli impedisca di essere sfilato da destra, altrimenti è 0;
- la variabile binaria  $\gamma_{ij}$  con  $i, j \in I$  assume il valore 1 se l'oggetto i ha davanti a se l'oggetto j e questo gli impedisca di essere sfilato centralmente, altrimenti è 0;
- la variabile binaria  $s_{vi}$  con  $i \in I$  e  $v \in \theta$  assume il valore 1 se l'oggetto i ha nella direzione v almeno un oggetto che gli impedisca di essere sfilato nella rispettiva direzione, altrimenti è 0;



$$\min D \quad (4.19)$$

$$\text{s.t.} \quad l_{ij} + l_{ji} + b_{ij} + b_{ji} \geq 1 \quad i < j \quad i, j \in I \quad (4.20)$$

$$y_i - y_j + M_d b_{ij} \leq M_d - \Delta_i \quad i, j \in I \quad (4.21)$$

$$x_i - x_j + M_w l_{ij} \leq M_w - \Omega_i \quad i, j \in I \quad (4.22)$$

$$x_i + \Omega_i \leq W \quad i, j \in I \quad (4.23)$$

$$y_i + \Delta_i \leq D \quad i, j \in I \quad (4.24)$$

$$\Delta_i = d_i(1 - r_i) - w_i r_i \quad i, j \in I \quad (4.25)$$

$$\Omega_i = w_i(1 - r_i) - d_i r_i \quad i, j \in I \quad (4.26)$$

$$\alpha_{ij} \leq l_{ij} \quad i, j \in I \quad (4.27)$$

$$\alpha_{ij} \leq 1 - (b_{ij} + b_{ji}) \quad i, j \in I \quad (4.28)$$

$$\alpha_{ij} \geq l_{ij} - M_\alpha(b_{ij} + b_{ji}) \quad i, j \in I \quad (4.29)$$

$$\beta_{ij} \leq l_{ji} \quad i, j \in I \quad (4.30)$$

$$\beta_{ij} \leq 1 - (b_{ij} + b_{ji}) \quad i, j \in I \quad (4.31)$$

$$\beta_{ij} \geq l_{ji} - M_\beta(b_{ij} + b_{ji}) \quad i, j \in I \quad (4.32)$$

$$\gamma_{ij} \leq b_{ij} \quad i, j \in I \quad (4.33)$$

$$\gamma_{ij} \leq 1 - (l_{ij} + l_{ji}) \quad i, j \in I \quad (4.34)$$

$$\gamma_{ij} \geq b_{ij} - M_\gamma(l_{ij} + l_{ji}) \quad i, j \in I \quad (4.35)$$

$$\alpha_{ij} o_{ij} \leq s_{ai} \quad i, j \in I \quad (4.36)$$

$$\beta_{ij} o_{ij} \leq s_{\beta i} \quad i, j \in I \quad (4.37)$$

$$\gamma_{ij} o_{ij} \leq s_{\gamma i} \quad i, j \in I \quad (4.38)$$

$$\sum_{v \in \theta} s_{vi} \leq 2 \quad i \in I \quad (4.39)$$

$$b_{ij}, l_{ij}, r_i \in \{0, 1\} \quad i \neq j \quad i, j \in I \quad (4.40)$$

$$x_i, y_i \in \mathbb{Z}^+ \quad i \in I \quad (4.41)$$

$$s_{vi} \in \{0, 1\} \quad i \in I \quad v \in \theta \quad (4.42)$$

$$(4.43)$$

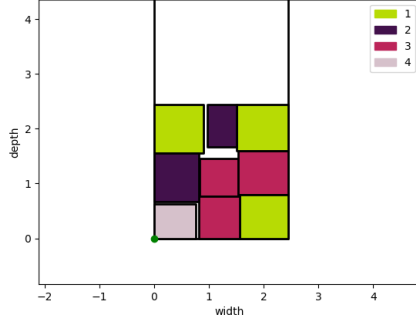


Figure 4.4: 9 pacchi con corretta sequenza di scarico.

Spieghiamo ora il significato di ciascun vincolo:

- il vincolo (4.20) impone che presi due oggetti almeno uno dei due si trovi o a sinistra o a destra dell'altro;
- il vincolo (4.21) dice che se  $b_{ij} = 1$  allora impone che l'oggetto  $i$  si trovi dietro l'oggetto  $j$ , altrimenti il vincolo viene disattivato;
- il vincolo (4.22) dice che se  $l_{ij} = 1$  allora impone che l'oggetto  $i$  si trovi alla sinistra l'oggetto  $j$ , altrimenti il vincolo viene disattivato;
- il vincolo (4.23) impone che dato il valore  $x_i$ , corrispondente alla coordinata  $x$  dell'angolo sinistro più arretrato dell'oggetto, sommandoci la larghezza  $w_i$  dell'oggetto e ottenendo quindi la coordinata  $x$  dell'angolo destro più arretrato, questa sia contenuta nell'intervallo  $[0, W]$ ;
- il vincolo (4.24) impone che dato il valore  $y_i$ , corrispondente alla coordinata  $y$  dell'angolo sinistro più arretrato dell'oggetto, sommandoci la profondità  $d_i$  dell'oggetto e ottenendo quindi la coordinata  $y$  dell'angolo sinistro più avanzato, questa sia contenuta nell'intervallo  $[0, D]$ ;
- il vincolo (4.25) impone che  $\Delta_i$  corrisponda alla profondità corretta considerando la rotazione;
- il vincolo (4.26) impone che  $\Omega_i$  corrisponda alla larghezza corretta considerando la rotazione;
- i vincoli (4.27), (4.28) e (4.29) impongono che se  $l_{ij} = 1 \wedge t_{ij} + t_{ji} = 0 \Rightarrow \alpha_{ij} = 1$ , che significa che se un'oggetto  $i$  si trovi a destra di un oggetto  $j$  ma nessuno

dei due è dietro all'altro, allora l'oggetto i non può essere sfilato dalla sponda sinistra del camion;

- i vincoli (4.30), (4.31) e (4.32) impongono che se  $l_{ji} = 1 \wedge t_{ij} + t_{ji} = 0 \Rightarrow \beta_{ij} = 1$ , che significa che se un'oggetto i si trovi a sinistra di un oggetto j ma nessuno dei due è dietro all'altro, allora l'oggetto i non può essere sfilato dalla sponda destra del camion;
- i vincoli (4.33), (4.34) e (4.35) impongono che se  $b_{ij} = 1 \wedge l_{ij} + l_{ji} = 0 \Rightarrow \gamma_{ij} = 1$ , che significa che se un'oggetto i si trovi dietro un oggetto j ma nessuno dei due è alla sinistra dell'altro, allora l'oggetto i non può essere sfilato centralmente del camion;
- il vincolo (4.36) impone che se  $s_{1i} = 1$  allora potranno esservi dei pacchi posizionati alla sua sinistra che ne blocchino lo scarico, se  $s_{1i} = 0$  allora la via dovrà essere libera permettendo così lo scarico;
- il vincolo (4.37) impone che se  $s_{2i} = 1$  allora potranno esservi dei pacchi posizionati alla sua destra che ne blocchino lo scarico, se  $s_{2i} = 0$  allora la via dovrà essere libera permettendo così lo scarico;
- il vincolo (4.38) impone che se  $s_{3i} = 1$  allora potranno esservi dei pacchi posizionati davanti a sè che ne blocchino lo scarico, se  $s_{3i} = 0$  allora la via dovrà essere libera permettendo così lo scarico;
- il vincolo (4.39) impone che  $\sum_{v \in \theta} s_{vi} \leq 2$  ossia che possano essere occupate al massimo 2 vie di scarico lasciandone libera almeno 1.

## MODELLO 3D CON ROTAZIONE E SOVRAPPOSIZIONE

Con questo modello, evoluzione del modello 2D con rotazione, ci si propone di introdurre la sovrapposizione degli oggetti, considerando però che alcuni oggetti potranno avere come condizione quella di non poter avere altri oggetti sopra di sè. Un problema non indifferente inerente questo modello viene individuato nella stabilità degli oggetti, soluzioni che riportino oggetti sopraelevati, le cui aree di base non poggino completamente sugli oggetti sottostanti sono da ritenersi non valide. Per risolvere questo problema si è deciso di optare per una semplificazione, se un oggetto i si trova sopra ad un oggetto j, allora l'area di base dell'oggetto i dovrà essere interamente appoggiata alla faccia superiore dell'oggetto j.

Il modello 3D con rotazione e sovrapposizione introduce in più rispetto al precedente le seguenti variabili continue positive:

- la variabile intera  $x_i$  con  $i \in I$  individua la coordinata sull'asse x dell'angolo in basso a sinistra dell'oggetto i;
- la variabile intera  $y_i$  con  $i \in I$  individua la coordinata sull'asse y dell'angolo in basso a sinistra dell'oggetto i;
- la variabile intera  $z_i$  con  $i \in I$  individua la coordinata sull'asse z dell'angolo in basso a sinistra dell'oggetto i;
- la variabile intera  $\Omega_i$  con  $i \in I$  assume il valore  $d_i$  se l'oggetto è stato ruotato altrimenti  $w_i$ ;
- la variabile intera  $\Delta_i$  con  $i \in I$  assume il valore  $d_i$  se l'oggetto è stato ruotato altrimenti  $w_i$ ;

Introduce in più rispetto al precedente anche le seguenti variabili binarie:

- la variabile binaria  $l_{ij}$  con  $i, j \in I$  assume il valore 1 se l'oggetto i è situato alla sinistra dell'oggetto j, altrimenti è 0;
- la variabile binaria  $b_{ij}$  con  $i, j \in I$  assume il valore 1 se l'oggetto i è situato al di sotto dell'oggetto j, altrimenti è 0.
- la variabile binaria  $r_i$  con  $i \in I$  assume il valore 1 se l'oggetto i è ruotato su se stesso di  $90^\circ$ , ne risulta che  $w_i$  e  $d_i$  sono invertiti, altrimenti è 0;
- la variabile binaria  $t_{ij}$  assume il valore 1 se l'oggetto i ha sopra di sé l'oggetto j, altrimenti è 0;
- la variabile binaria  $f_{ij}$  assume il valore 1 se l'oggetto i ha sopra di sé l'oggetto j e la faccia superiore dell'oggetto i è a contatto con la faccia inferiore dell'oggetto j, altrimenti è 0;
- la variabile binaria  $k_{ij}$  con  $i, j \in I$  assume il valore 1 se l'oggetto i si trova alla sinistra o/e dietro un oggetto j oppure al di sotto di esso.

Inoltre la variabile binaria  $k_{ij}$  viene utilizzata per imporre che un oggetto possa trovarsi alla sinistra o dietro ad un altro oggetto ma non al di sotto di un altro e viceversa, imponendo ciò che segue:

$$\begin{aligned}
\min \quad & D & (4.44) \\
\text{s.t.} \quad & k_{ij} \leq l_{ij} + l_{ji} + b_{ij} + b_{ji} & i < j, \quad i, j \in I & (4.45) \\
& 2k_{ij} \geq l_{ij} + l_{ji} + b_{ij} + b_{ji} & i < j, \quad i, j \in I & (4.46) \\
& 1 - k_{ij} = t_{ij} + t_{ji} & i < j, \quad i, j \in I & (4.47) \\
& x_i + \Omega_i \leq W & i, j \in I & (4.48) \\
& y_i + \Delta_i \leq D & i, j \in I & (4.49) \\
& z_i + h_i \leq H & i \in I & (4.50) \\
& y_i - y_j + M_d b_{ij} \leq M_d - \Delta_i & i, j \in I & (4.51) \\
& x_i - x_j + M_w l_{ij} \leq M_w - \Omega_i & i, j \in I & (4.52) \\
& z_i - z_j + M_b t_{ij} \leq M_b - h_i & i, j \in I & (4.53) \\
& z_i - z_j + M_b f_{ij} \geq -M_b - h_i & i, j \in I & (4.54) \\
& x_i - x_j \leq M_w(1 - f_{ij}) & i, j \in I & (4.55) \\
& y_i - y_j \leq M_d(1 - f_{ij}) & i, j \in I & (4.56) \\
& x_i - x_j + \Omega_i - \Omega_j \geq -M_w(1 - f_{ij}) & i, j \in I & (4.57) \\
& y_i - y_j + \Delta_i - \Delta_j \geq -M_d(1 - f_{ij}) & i, j \in I & (4.58) \\
& f_{ij} \leq t_{ij} & i \in I & (4.59) \\
& M_b \sum_{i \in I} f_{ij} \geq z_j & i \in I & (4.60) \\
& \Delta_i = d_i(1 - r_i) - w_i r_i & i, j \in I & (4.61) \\
& \Omega_i = w_i(1 - r_i) - d_i r_i & i, j \in I & (4.62) \\
& b_{ij}, l_{ij}, t_{ij}, f_{ij}, k_{ij} \in \{0, 1\} & i \neq j, \quad i, j \in I & (4.63) \\
& x_i, y_i, z_i, r_i \in \mathbb{Z}^+ & i \in I & (4.64) \\
& & & (4.65)
\end{aligned}$$

Spieghiamo ora il significato di ciascun vincolo:

- i vincoli (4.45), (4.46) e (4.47) impongono che presi due oggetti uno sia dietro e/o alla sinistra dell'altro oppure sia sotto di esso;
- il vincolo (4.48) impone che dato il valore  $x_i$ , corrispondente alla coordinata  $x$  dell'angolo sinistro più arretrato dell'oggetto, sommandoci la larghezza  $w_i$  dell'oggetto e ottenendo quindi la coordinata  $x$  dell'angolo destro più arretrato, questa sia contenuta nell'intervallo  $[0, W]$ ;
- il vincolo (4.49) impone che dato il valore  $y_i$ , corrispondente alla coordinata  $y$  dell'angolo sinistro più arretrato dell'oggetto, sommandoci la profondità  $d_i$  dell'oggetto e ottenendo quindi la coordinata  $y$  dell'angolo sinistro più avanzato, questa sia contenuta nell'intervallo  $[0, D]$ ;
- il vincolo (4.50) impone che dato il valore  $z_i$ , corrispondente alla coordinata  $z$  dell'angolo sinistro più arretrato dell'oggetto, sommandoci l'altezza  $h_i$  dell'oggetto e ottenendo quindi la coordinata  $z$  dell'angolo sinistro più in alto, questa sia contenuta nell'intervallo  $[0, H]$ ;
- il vincolo (4.51) dice che se  $b_{ij} = 1$  allora impone che l'oggetto  $i$  si trovi dietro l'oggetto  $j$ , altrimenti il vincolo viene disattivato;
- il vincolo (4.52) dice che se  $l_{ij} = 1$  allora impone che l'oggetto  $i$  si trovi alla sinistra l'oggetto  $j$ , altrimenti il vincolo viene disattivato;
- il vincolo (4.53) dice che se  $t_{ij} = 1$  allora impone che l'oggetto  $i$  si trovi al di sotto dell'oggetto  $j$ , altrimenti il vincolo viene disattivato;
- il vincolo (4.54) dice che se  $f_{ij} = 1$  allora impone che l'oggetto  $i$  si trovi al di sotto dell'oggetto  $j$  e a contatto con lo stesso, altrimenti il vincolo viene disattivato;
- i vincoli (4.55) e (4.56) impongono che se un oggetto  $i$  è sotto e a contatto con un oggetto  $j$ , allora la coordinata dell'angolo più vicino all'origine dovrà trovarsi all'interno del piano individuato dalla base superiore dell'oggetto  $i$ ;
- i vincoli (4.57) e (4.58) impongono che se un oggetto  $i$  è sotto e a contatto con un oggetto  $j$ , allora la coordinata dell'angolo più lontano all'origine dovrà trovarsi all'interno del piano individuato dalla base superiore dell'oggetto  $i$ ;
- il vincolo (4.59) impone che un oggetto  $i$  possa essere al di sotto e a contatto con un oggetto  $j$  solo se l'oggetto  $i$  è al di sotto dell'oggetto  $j$ ;

- 
- A 3D plot showing a rectangular box with internal shelves. The box is defined by the axes X, Y, and Z. The X-axis ranges from 0.0 to 2.5, the Y-axis from 0 to 14, and the Z-axis from 0.0 to 2.5. The box is filled with a light blue color, and the internal shelves are represented by horizontal lines within the box.

33





# 5

## Conclusion



# Acknowledgments

LOREM IPSUM DOLOR SIT AMET, consectetur adipiscing elit. Morbi commodo, ipsum sed pharetra gravida, orci magna rhoncus neque, id pulvinar odio lorem non turpis. Nullam sit amet enim. Suspendisse id velit vitae ligula volutpat condimentum. Aliquam erat volutpat. Sed quis velit. Nulla facilisi. Nulla libero. Vivamus pharetra posuere sapien. Nam consectetur. Sed aliquam, nunc eget euismod ullamcorper, lectus nunc ullamcorper orci, fermentum bibendum enim nibh eget ipsum. Donec porttitor ligula eu dolor. Maecenas vitae nulla consequat libero cursus venenatis. Nam magna enim, accumsan eu, blandit sed, blandit a, eros.