1.1

I Prova Intermedia
CALCOLO NUMERICO
07/04/2022
Primo turno

Esercizio 1

Implementare in Matlab un codice per la rappresentazione di una matrice H di Hilbert di ordine generico n, le cui componenti sono:

$$H_{ij} = (i + j - 1)^{-1}.$$

Confrontare l'output con l'output fornito dal comando **hilb** per $n = 100$.

Esercizio 2

- Scrivere la definizione generale di condizionamento.
- Definire il condizionamento di un sistema lineare e dimostrare che è sempre maggiore o uguale ad 1.

① [da fare con PC]

② a. Un modello $f(x)$ si dice ben condizionato se vale una relazione del tipo

$$\frac{\| f(x+\delta x) - f(x) \|}{\| f(x) \|} \leq k \cdot \frac{\| \delta x \|}{\| x \|} \qquad x, f(x) \neq 0 \quad k \text{ piccolo}$$

ovvero se l'ordine di grandezza dell'errore rimane lo stesso in input e output. k è il numero di condizionamento.

b. Il condizionamento in un sistema lineare indica quanto può risultare inaccurata la soluzione rispetto all'errore in input. Possiamo quindi pensarlo come un rapporto tra i due err. rel.

1.2

Sia quindi δb l'errore assoluto sul dato b, allora

$$E_R(b) = \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \qquad \tilde{b} = b + \delta b$$

Si supponga di trovare un risultato $\tilde{x}$, allora

$$\delta x = \tilde{x} - x \qquad e \qquad E_R(x) = \frac{\|\delta x\|}{\|b\|}$$

Partendo da queste definizioni, si procede come segue:

$$Ax = b \iff x = A^{-1} b \qquad A\tilde{x} = \tilde{b} \iff \tilde{x} = A^{-1}\tilde{b}$$

$$A\tilde{x} = A(x + \delta x) = b + \delta b$$

Da cui:

$$\|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\|$$

$$\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

$$\Rightarrow \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \overbrace{\boxed{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}}^{k} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Per cui il condizionamento di un sistema lineare è k

$$\|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq \|A \cdot A^{-1}\| = \|I_d\| = 1$$

Dimostrazione disuguaglianza triangolare [...]

2.1

I Prova Intermedia
CALCOLO NUMERICO
07/04/2022
SECONDO TURNO

Esercizio 1

Creare un codice in Matlab per generare una matrice di quadrata di ordine n contenente i primi n^2 numeri naturali in ordine crescente disposti come nell'esempio sottostante, ottenuto per $n = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2

- Definire la norma 1,2, e inf di un vettore.
- Dimostrare che il metodo di bisezione è globalmente convergente.

① Da fare con PC

② a. Le definizioni della norma 1 e 2 sono analoghe:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \qquad p = 1, 2 \text{ a seconda dei 2 casi}$$

La norma infinito assume il valore dell'elemento maggiore in valore assoluto, ovvero:

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Note: La norma 1 è la somma degli elementi

La norma 2 è la norma euclidea

2.2

b. Sia f una funzione continua in a, b. Sia $a<b$ e per ipotesi $f(a)f(b) < 0$. Le opzioni sono 2:

1. $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$
2. $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$

Scegliamo la 1 per semplicità. Dal teorema di esistenza degli zeri sappiamo che $\exists \alpha \in (a,b) : f(\alpha) = 0$.
L'obiettivo è quello di avvicinarsi il più possibile alla soluzione.

- Si trova il punto medio $c = (a+b)/2$
- se $f(c) < 0$ allora $a^{(1)} = c$, $b^{(1)} = b$
  se $f(c) > 0$ allora $a^{(1)} = a$, $b^{(1)} = c$
- Si procede iterativamente fino ad un errore ideale

In questo modo ad ogni passo si dimezza l'intervallo di lavoro e ci si avvicina al punto in cui il valore di f è 0.

3.1

I PROVA INTERMEDIA
CALCOLO NUMERICO
13/04/2023
PRIMO TURNO

Esercizio 1

- Creare una function che ricevuto in input un intero n, restituisce l'n-esimo elemento $F(n)$ della successione di Fibonacci:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

in cui ciascun numero, dal terzo in poi, è la somma dei due numeri precedenti.

- Realizzare uno script per osservare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F(n)}{F(n-1)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Esercizio 2

- Dimostrare che il metodo di bisezione è globalmente convergente.
- Descrivere un test d'arresto per il metodo di bisezione.

① Da fare con PC [...]

② a. < già risposto nella prima simulazione >

b. Un possibile test di arresto per il metodo può essere costruito da una combinazione di "incremento" e "residuo".
Fissata quindi una tolleranza $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ e avendo ricavato la successione $\{x_k\}$ tale che $\lim_{k\to+\infty} \{x_k\} = \alpha$ si ha:

- CRITERIO DEL RESIDUO

  in cui il metodo iterativo si interrompe quando $f(x_k) < \varepsilon$.
  Con questo approccio non garantiamo la vicinanza con la soluz. esatta.

- CRITERIO DELLO STEP (INCREMENTO)

  in cui il metodo si interrompe quando $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$.
  Con questo approccio si rischia un arresto anticipato se la convergenza è particolarmente lento.

4.1

I PROVA INTERMEDIA
CALCOLO NUMERICO
13/04/2023
SECONDO TURNO

- Creare una function che ricevuto in input un intero n, restituisce l'n-esimo elemento $F(n)$ della successione di Fibonacci:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

in cui ciascun numero, dal quarto in poi, è la somma dei due numeri precedenti.

- Realizzare uno script per osservare che

$$F(n-1)F(n+1) - F(n)^2 = (-1)^{n+1}$$

Esercizio 2

- Dare la definizione di condizionamento di un problema.
- Dimostrare che l'operazione di somma è mal condizionata.

① Da fare con PC [...] ✱

② a. Il condizionamento di un problema indica quanto il problema è sensibile alla perturbazione di un dato. Un problema si dice ben condizionato se vale la relazione

$$\frac{\| f(x+\delta x) - f(x) \|}{\| f(x) \|} \leq k \cdot \frac{\| \delta x \|}{\| x \|} \qquad k \text{ arbitrariamente piccolo}$$

- f è la funzione che calcola la soluzione (output)
- δx è l'errore assoluto nel dato x
- k è il numero di condizionamento

4.2

b. CONDIZIONAMENTO DELLA SOMMA

Siamo $x, y \in \mathbb{R}$ $\quad \bar{x} = fl(x) = x + x\varepsilon_1$

$$\bar{y} = fl(y) = y + y\varepsilon_2$$

Cerchiamo di ricondurci alla formula del condizionamento:

$$\frac{|(\bar{x}+\bar{y})-(x+y)|}{|(x+y)|} = \frac{|\cancel{x}+x\varepsilon_1+\cancel{y}+y\varepsilon_2-\cancel{x}-\cancel{y}|}{|x+y|} =$$

$$= \frac{|x\varepsilon_1+y\varepsilon_2|}{|x+y|} \leq \frac{|x||\varepsilon_1|}{|x+y|} + \frac{|y||\varepsilon_2|}{|x+y|}$$

Le zone evidenziate rappresentano il condizionamento sui 2 numeri.

Quindi avremo $k_1 = \frac{|x|}{|x+y|}$ e $k_2 = \frac{|y|}{|x+y|}$

Notiamo che i due indici k crescono quando $|x+y|$ tende a 0.

$$* \quad F(n-1)\,F(n+1) - F(n)^2 = (-1)^{n+1}$$

Per realizzare uno script Matlab serve quindi una successione per i dati "xrange" $\subseteq \mathbb{R}^n$ e due funzioni

$L : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad : \quad L(n) = F(n-1)F(n+1) - F(n)^2$

$R : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad : \quad R(n) = (-1)^{n+1}$ $\qquad \forall n \in \mathbb{N}$

Le due funzioni vanno estese nel dominio $\mathbb{R}^n$

5.1

1. Radici di equazioni non lineari.
1a) Descrivere l'algoritmo di Newton.
1b) Fare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{x} - 3x^2 + x$$

nell'intervallo [0, 1].
1c) Implementare il metodo di Newton con il criterio d'arresto dell'incremento e tolleranza$=10^{-4}$.
1d) Usare il punto di innesco $x_0 = 0.8$. Usare il punto di innesco $x_0 = 0.3$. Commentare rispetto ai risultati ottenuti.

2. 2a) Descrivere la formule dei trapezi composita per approssimare un integrale definito.
2b) Implementare in Matlab la formula per approssimare l'integrale

$$\int_{-1}^{1} 1 + \frac{e^{-x^2}}{2} dx$$

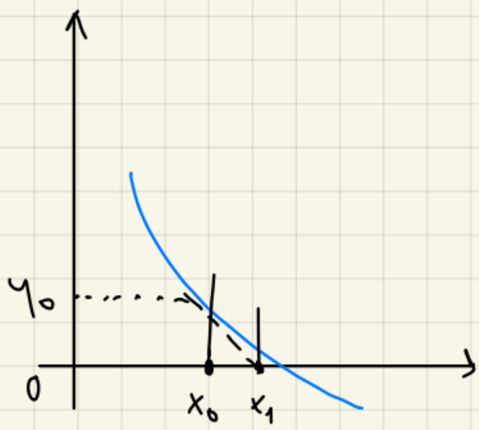
2c) Approssimare l'integrale con il comando **quad**.
2d) Costruire una tabella con il decadimento dell'errore (rispetto al risultato ottenuto in 2c) della formula dei trapezi composita all'aumentare dei sottointervalli di decomposizione.

① a. ALGORITMO DI NEWTON (delle tangenti)

Si applica dopo aver identificato un intervallo $[a, b]$ continuo che contiene una sola soluzione α.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

5.2



$y = mx + q \longrightarrow m = \dfrac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = f'(x_0)$

$y = mx + q \leftarrow$ 1 PUNTO

$q = \ldots$

$y = mx + q \Rightarrow 0 = f'(x_0)\,x_1 + q \Rightarrow q = -f'(x_0)\,x_1$

$\Rightarrow x_1 = -q / f'(x_0)$

$y = mx + q \Rightarrow y_0 = f'(x_0)x_0 + q \Rightarrow q = y_0 - f'(x_0)\,x_0$

$$= y_0 - \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}\,x_0$$

$$= \frac{\cancel{y_0 x_0} - y_0 x_1}{x_0 - x_1} - \frac{\cancel{x_0 y_0} - x_0 y_1}{x_0 - x_1}$$

$$= \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{x_0 - x_1}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-y_0 + f'(x_0)x_0}{f'(x_0)} \Leftrightarrow x_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + x_0$$

② a. $$(b-a)\cdot f(a) + (b-a)\cdot \frac{f(b)-f(a)}{2}$$

5.3

$$(b-a)\left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{2} \right)$$

$$(b-a)\left(\frac{2f(a)+f(b)-f(a)}{2} \right)$$

$$= (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}$$ → calcolo area trapezio

La formula dei trapezi composta fornisce un procedimento per la stima di un integrale definito. Nella sua forma elementare, essa propone di stimare l'integrale

$\int_a^b f(x)\,dx$ calcolando l'area del trapezio distinto dai punti

$(a, f(a)), (b, f(b)), (a, 0), (b, 0)$. È banale osservare che questa approssimazione va bene per funzioni lineari o simili. Per utilizzare lo stesso metodo in funzioni più elaborate, si ricorre alla suddivisione della funzioni in sottointervalli e sommare le stime eseguite localmente. Maggiore sarà la suddivisione, più accurata sarà l'approssimazione.

$$\int_{-1}^{1} 1 + \frac{e^{-x^2}}{2}\,dx$$

6.1

Esercizi

1. a) Ricavare le radici del polinomio

$$p(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$$

b) Fare il grafico del polinomio evidenziando le radici.
c) Costruire $\tilde{p}(x)$ ottenuto dal polinomio $p(x)$ aggiungendo 10^{-8} al coefficiente del termine di grado massimo.
d) Ricavare le radici di $\tilde{p}(x)$ e quantificare l'errore indotto nel calcolo delle radici rispetto a $p(x)$.
e) Definire il condizionamento di un problema in generale e associare questo concetto al problema del calcolo delle radici.

2. Una matrice A simmetrica definita positiva può essere scritta attraverso la fattorizzazione di Cholesky: ossia esiste una matrice R triangolare superiore tale che: $R' * R = A$.
a) La matrice di dimensione 100×100 di elementi diagonali uguali a 200 ed i restanti elementi uguali ad 1

$$A = \begin{pmatrix} 200 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 200 & 1 & \ddots \\ 1 & 1 & 200 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

è simmetrica definita positiva? Riportare le definizioni.
b) Creare un algoritmo che verifichi queste due proprietà di una matrice
c) Verificare computazionalmente che la function *Chol* di Matlab restituisca come output la matrice R della fattorizzazione di Cholesky
d) Impostare sul foglio il calcolo della matrice inversa di A sfruttando la fattorizzazione di Cholesky

---

1) a, b, c, d svolti su file matlab "es_6_1"

e) Il condizionamento di un problema f indica quanto viene influenzato l'output dagli errori generati nei parametri di input.
Un problema si dice ben condizionato se vale

$$(\mathrm{I}e) \qquad \frac{\| f(x+\delta x) - f(x) \|}{\| f(x) \|} \leq k \cdot \frac{\| \delta x \|}{\| x \|}$$

k arbitrariamente piccolo

CONDIZIONAMENTO DEL CALCOLO DELLE RADICI

Si suppone che f abbia almeno una derivata continua in r, che è una radice di f. Supponiamo di perturbare la funzione f in modo che $\tilde{f}(x) = f(x) + \varepsilon$. La radice cambierà in $\tilde{r} = r + \delta$, in modo che $\tilde{f}(\tilde{r}) = 0$.

6.2

$$\left.\frac{\|\delta\|}{\|r\|} \leq k \cdot \frac{\|\varepsilon\|}{\underbrace{\|f(r)\|}_{=0}}\right\}$$ Tentativo (fallito) di utilizzare la logica sopra

$\rightarrow$ condizionamento relativo

Usando il polinomio di Taylor per stimare la funzione in r, si ottiene:

$$\tilde{f}(\tilde{r}) = f(\overbrace{r+\delta}^{x}) + \varepsilon \approx f(\overset{x_0}{r}) + f'(r)\overset{x-x_0}{\delta}\,(1!) + \varepsilon = 0$$

Dato che r è radice per ipotesi, $f(r) = 0$

(IIe) $\rightarrow \quad f'(r)\delta + \varepsilon = 0$

Possiamo riscrivere questa ipotesi in termini di condizionamento assoluto:

valore assoluto

(IIIe) $$\|\delta\| \leq k\|\varepsilon\| \iff k \geq \frac{\|\delta\|}{\|\varepsilon\|} = \frac{\|\cancel{\delta}\|}{\|\cancel{\delta} f'(r)\|} = \frac{1}{\|f'(r)\|}$$

Da (IIe) otteniamo:

$$\varepsilon = -f'(r)\delta$$

In questo specifico caso, il polinomio

$$f(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$$

ha radici in $4, 3, 2, 1$

Calcoliamo $f'(x)$ generica:

$$f'(x) = 4x^3 - 30x^2 + 70x - 50$$

$$f'(4) = 6 \qquad f'(3) = -2 \qquad f'(2) = 2 \qquad f'(1) = -6$$

Le derivate sono lontane dal valore 0, il problema e' ben condizionato ∎

C'è un altro modo per ricavare questo condizionamento:

Cerchiamo $\alpha : f(\alpha) = 0$ sapendo che $f(x) = \varphi(x) - d = 0$ se x è radice. Supponiamo ora di perturbare il dato d:

$$(Ie)' \quad \cancel{d} + \delta d = \varphi(x + \delta x) = \cancel{\varphi(x)} + \varphi'(x)\delta x + \dots + \frac{\varphi^{k}(x)}{k!}(\delta x)^k + o(\delta x)^m$$

Sappiamo che $\varphi(x) + d = 0$ quando x è radice.

Supponiamo ora che x sia una radice di ordine m di f, allora:

$$(IIe)' \quad \varphi^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) = 0 \qquad \forall k \in [1, m-1]$$

Da cui otteniamo la nuova uguaglianza

$$(IIIe)' \quad \delta d = \frac{\varphi^{(m)}(x)}{m!}(\delta x)^m + o(\delta x)^m$$

(assoluto)

Se vediamo il condizionamento come $\dfrac{\|\delta x\|}{\|\delta d\|}$ e riscriviamo δx in termini di δd da $(IIIe)'$, otteniamo:

$$(\delta x)^m = \frac{\delta d \cdot m!}{\varphi^{(m)}(x)} \iff \delta x = \sqrt[m]{\frac{\delta d \cdot m!}{\varphi^{(m)}(x)}}$$

$$(IVe)' \quad \text{cond:} \left\| \sqrt[m]{\frac{\delta d \cdot m!}{\varphi^{(m)}(x)}} \right\| \cdot \frac{1}{\|\delta d\|}$$

Da $(IIe)'$ possiamo sostituire $\varphi^{(m)}(x)$ con $f^{(m)}(x)$.

Se vogliamo adattare il condizionamento per il problema delle radici di ordine 1, poniamo $m = 1$. Facendo questo, otteniamo:

$$\text{cond:} \frac{\cancel{\|\delta d\|}}{\|f'(x)\|} \cdot \frac{1}{\cancel{\|\delta d\|}} = \frac{1}{\|f'(x)\|}$$

2)

(a) $A = \begin{pmatrix} 200 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 200 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 200 \end{pmatrix}$ $\quad A \in M_{100 \times 100}$

- A è simmetrica se $\forall i, j \in [1, 100]$ $a_{ij} = a_{ji}$ o ugualmente se $A = A^T$. Calcolando A^T si nota che è uguale ad A

- A è definita positiva se $\forall x \in \mathbb{C}^n : x \neq 0 \wedge x^* A x > 0$
In questo caso $\forall a_{ij} \in A : a_{ij} \in \mathbb{R}$, per cui A è definita positiva se $\forall x \in \mathbb{R}^n : x \neq 0 \wedge x^T A x > 0$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 200 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \cdots & & 200 \end{pmatrix}}_{M = x^T A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$m_{1j} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} x_i \cdot \underset{\underset{1}{\parallel}}{a_{ij}} + 200 \cdot x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i + 199 x_j$$

$$= m \cdot x_1 + m_{12} \cdot x_2 + \dots + m_{1n} \cdot x_n = \sum_{j=1}^{n} m_{1j} \cdot x_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i + 199 x_j \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{j=1}^{n} (x_j \cdot 199 x_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_j x_i + 199 \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

$$= \underset{\underset{0}{\vee}}{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2} + 199 \cdot \underset{\underset{0}{\vee}}{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} > 0 \qquad \blacksquare$$

(b) ALGORITMO DI VERIFICA

Controllare il file "es_6_2b" su Matlab.

Per verificare che la matrice sia definita positiva ricicliamo la porzione dedicata alla verifica della simmetria.

A questo punto definiamo i minori nord-ovest come:

- minori di testa di ordine k per $k = 1, \dots, n$ sono i determinanti delle sottomatrici A_k ottenute da A eliminando le ultime $n-k$ righe e colonne.

Dal criterio di Sylvester una matrice è definita positiva sse tutti i suoi minori nord-ovest sono positivi.

In alternativa, la matrice è definita positiva se e solo se tutti i suoi autovalori sono positivi.

Utilizziamo questo approccio per comodità della funzione Matlab che calcola gli autovalori.

Un'alternativa potrebbe essere quella di verificare il segno dei pivot eseguendo l'eliminazione di Gauss, in quanto il segno dei pivot corrisponde al segno degli autovalori

(c) VERIFICA FUNZIONE Chol DI MATLAB

Algoritmo di Cholesky $\quad A = LL^T \quad A = R^T R$

- $$A = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}}_{L = R^T} \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}}_{L^T = R}$$

- $Ax = b \Leftrightarrow L\underbrace{L^T x}_{y} = b \Leftrightarrow Ly = b$

- $L^T x = y$

esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix}$$

$l_{11}^2 = 4 \Leftrightarrow l_{11} = 2$

$2 \cdot l_{21} = 12 \Leftrightarrow l_{21} = 6$

$2 \cdot l_{31} = -16 \Leftrightarrow l_{31} = -8$

/

$6^2 + l_{22}^2 = 37 \Leftrightarrow l_{22}^2 = 37 - 36 \Leftrightarrow l_{22} = 1$

$6 \cdot (-8) + l_{32} = -43 \Leftrightarrow l_{32} = 5$

$64 + 25 + l_{33}^2 = 98 \Leftrightarrow l_{33}^2 = 9 \Leftrightarrow l_{33} = 3$

6.7

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad L \cdot L^T = A$$

In giallo è evidenziato un passaggio superfluo

$$\Rightarrow \quad l_{ij} = \begin{cases} \sqrt{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}^2} & \text{se } i = j \\ \dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} (l_{ik} \cdot l_{jk})}{l_{jj}} & \text{se } i \in \{j+1, \dots, n\} \end{cases}$$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} \qquad l_{21} = a_{21} / l_{11} \qquad l_{31} = a_{31} / l_{11}$$

$$l_{12} = 0 \qquad l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{11}^2} \qquad [\dots]$$

(d) CALCOLO MATRICE INVERSA TRAMITE CHOLESKY

$$A A^{-1} = Id$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \overbrace{x_{11}}^{x_1} & \overbrace{x_{12}}^{x_2} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \overbrace{1}^{id_1} & \overbrace{0}^{id_2} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{Id}$$

$A x_1 = id_1$ o più in generale $A_{x_j} = id_j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$.
È necessario risolvere n sistemi lineari. È più conveniente farlo attraverso una fattorizzazione (in questo caso Chol):
La risoluzione di $A_{x_j} = id_j$ per un generico j richiede di

68 ricorrere al MdE di Gauss, mentre la risoluzione dei sistemi lineari $L^T x_J = y_J$ e $L y_J = id_J$ ha un costo minore se eseguita tramite sostituzione. Per cui:

$$\forall_J \in \{1, \dots, n\} \quad y_J = Sol(L \mid id_J), \; x_J = Sol(L^T \mid y_J)$$

I vettori x_J ottenuti corrispondono alle colonne della matrice inversa

7.1

II Prova Intermedia
CALCOLO NUMERICO
31/05/2023
Primo turno

Esercizio

1. Scrivere il sistema lineare che occorre risolvere per ricavare il polinomio interpolatore passante per 3 punti.

2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sin(\pi x) + 2\cos(\pi x)$$

nell'intervallo $[0.5, 1.5]$.
Si calcolino in Matlab, utilizzando la matrice di Vandermonde, i coefficienti del polinomio interpolatore di f sui nodi

$$x_0 = 0.5 \quad x_1 = 0.75 \quad x_2 = 1.5.$$

3. Fare il grafico dell'errore commesso rispetto alla funzione f nell'intervallo $[0.5, 1.5]$.

4. Descrivere il metodo di Gauss-Seidel per la risoluzione di sistemi lineari.

5. Implementare il metodo di Gauss-Seidel per risolvere il sistema lineare definito al punto 2.

6. Con il metodo di Gauss-Seidel è possibile risolvere il sistema lineare? Motivare la risposta.

7. Scrivere la formula dei trapezi composita applicabile con i 3 punti a disposizione.

8. Con tale formula calcolare un'approssimazione dell'integrale

$$\int_{0.5}^{1.5} \sin(\pi x) + 2\cos(\pi x) dx$$

9. Calcolare l'errore di approssimazione, rispetto ad un valore di riferimento.

INTERPOLAZIONE

Nella realtà può capitare di conoscere una funzione solo attraverso i suoi valori in determinati punti, detti nodi di interpolazione, indicati con x_i $i \in \{0, \dots, n\}$. Il problema dell'interpolazione consiste nel trovare un polinomio p tale che

$$f(x_i) = p(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots a_n x_i^m = \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j$$

Si hanno quindi $m+1$ coefficienti incogniti e $n+1$ equazioni, che possono essere rappresentati come sistema lineare in forma matriciale

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{bmatrix}}_{\text{Matrice di Vandermonde } V} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}}_{\substack{\text{coefficienti} \\ A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{\substack{\text{valori di } f \\ \text{nei nodi} \quad Y}}$$

$$VA = Y \iff V^{-1} Y = A \qquad \det(V) = \prod_{0 \le i \le j}^{n} (x_j - x_i)$$

1

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2 \end{cases}$$

METODO DI JACOBI

È un metodo iterativo per la risoluzione dei sistemi lineari.

Per approssimare il vettore x, possiamo vedere la matrice dei coefficienti A come somma di matrici D e C, dove

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Per cui, se $Ax = b \Rightarrow (D+C)x = b$

$$\Leftrightarrow Dx = -Cx + b$$

$$\Leftrightarrow x = -D^{-1}Cx + D^{-1}b$$

Si sceglie quindi un vettore $x^{(0)}$ di valori iniziali, tipicamente 0

$$\Rightarrow x^{(k+1)} = -\underbrace{D^{-1}C}_{B_J}x^{(k)} + \underbrace{D^{-1}b}_{q_J}$$

<u>esempio</u> + <u>procedimento</u>

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \\[2ex] x_2 = \dfrac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \\[2ex] x_3 = \dfrac{b_3 - a_{32}x_2 - a_{31}x_1}{a_{33}} \end{cases}$$

Grazie a questo possiamo riscrivere per componenti

$$\Rightarrow \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right)$$

④ METODO DI GAUSS-SEIDEL

Questo metodo deriva dal metodo di Jacobi, in particolare, si riscrive A come somma di L_*, U in modo che:

$$Ax = b \Rightarrow (L_* + U)x = b \Leftrightarrow L_* x = -Ux + b$$

$$\Leftrightarrow x = -L_*^{-1} U x + L_*^{-1} b$$

$$\Rightarrow \quad x^{(k+1)} = L_*^{-1} b - L_*^{-1} U x^{(k)}$$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{L_*} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{U}.$$

Un vantaggio può essere tratto dall'utilizzo degli elementi appena calcolati sfruttando la formula per componenti:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$c_i = \frac{1}{x_{ii}}\left(y_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ij}\, c_j\right)$$

⑥ Convergenza metodo se vale una delle proprietà seguenti:

- A è simmetrica definita positiva ✗ (non è simmetrica)
- A è irriducibilmente diagonale dominante ✓ (riga 1)

$$A = \text{vander}(\text{nodes}) = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 1 & 0{,}75 & 0{,}5625 \\ 1 & 1{,}5 & 2{,}25 \end{pmatrix}$$

$*$ $\forall i \in \text{rows}(A): \; |a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

- riga 1 : $|1| \geq |0{,}5| + |0{,}25|$

(7) Formula dei trapezi applicabile con i punti

$x_0 = 0{,}5 \qquad x_1 = 0{,}75 \qquad x_2 = 1{,}5$

In generale $\quad (b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$

Componendo nei vari intervalli, otteniamo

$$(x_1 - x_0)\frac{f(x_1)+f(x_0)}{2} + (x_2 - x_1)\frac{f(x_2)+f(x_1)}{2}$$

Formula dei trapezi composta

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\text{ampiezza intervallo}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1}\Bigg(\underbrace{\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}}_{\text{"altezza"}}\Bigg)$$

Si nota facilmente che, nella sommatoria, solo gli estremi $f(a)$ e $f(b)$ non vengono ripetuti, per cui

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}\left(f(a) + 2\sum_{k=0}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right)$$

INTERPOLAZIONE DI LAGRANGE

Come per gli altri metodi, si parte da un insieme di dati $(x_i, f(x_i))$.

I nodi $x_i : i = 0, \dots, n$ producono i polinomi l_i in questo modo:

$$l_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = x_i \\ 0 & \text{se } x \neq x_i \end{cases} \qquad \boxed{x \in \text{nodi}}$$

negli altri punti si può ottenere un valore arbitrario

Da questi polinomi costruiti per ogni nodo, calcoliamo

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x)$$

Per costruire il polinomio l_i, partiamo con l'idea che per avere

$l_i(x) = 0 \Leftrightarrow x \neq x_i$ serve che $x = x_j \;\; \forall j \neq i : x_j \in$ nodi

Costruiamo quindi una prima ipotesi

$$l_i^*(x) = \prod_{j=0;\, j\neq i}^{n} (x - x_j) \Rightarrow l_i^*(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_j \;\; \forall j \neq i,\; x_j \in \text{nodi}$$

Tuttavia, questa forma non garantisce $l_i^*(x) = 1 \Leftrightarrow x = x_i$. Tuttavia, conosciamo il valore che $l_i^*(x)$ assume per $x = x_i$, e possiamo quindi aggiungerlo al denominatore per rendere il risultato $= 1$.

$$l_i(x) = \frac{l_i^*(x)}{l_i^*(x_i)} = \prod_{j=0;\, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

In questo modo, le proprietà vengono rispettate

8.1

Esame di Calcolo Numerico

28/06/2022

Portare alla propria postazione solo la penna.

Con l'avverbio "analiticamente" si richiede di effettuare i calcoli solo con carta e penna, senza comandi Matlab.
Per ogni esercizio che richiede esecuzione di comandi Matlab creare file script con tutte le istruzioni programmate per risolverlo (non utilizzare la Command Window).
Salvare i file contenenti le figure, corredate da tutti i dati necessari per la loro interpretazione (legende e/o axis label e/o titolo...).
Riportare e salvare eventuali tabelle in file di testo.

Tempo a disposizione per lo svolgimento: ***90 minuti****.*

1. Approssimazione di dati e funzioni.
1a) Descrivere il problema dell'interpolazione polinomiale.
1b) Impostare "analiticamente" il calcolo del polinomio interpolante i punti di coordinate (x, y) seguenti

x	-1	0	1	2
y	-0.1	2.03	3.5	6

1c) In Matlab, in una stessa finestra fare il grafico del polinomio interpolante, dei punti di interpolazione e della retta di approssimazione ai minimi quadrati.
1d) Su una griglia opportuna, misurare in Matlab la differenza tra i due polinomi approssimanti graficati nel punto 1c).

2. Risoluzione di sistemi lineari.
2a) Dato il sistema lineare $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \beta \\ -1 & 2 & 0.2 \\ 1 & -0.1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

scegliere un valore β per cui il sistema abbia un'unica soluzione e il metodo di Jacobi converga alla soluzione del sistema. Motivare la scelta.
2b) Implementare il metodo di Jacobi e approssimare la soluzione, fissata una tolleranza 10^{-3}.

① a. L'interpolazione polinomiale di una funzione $f(x)$ consiste nella costruzione di un polinomio $p(x)$ tale che i valori di p ed f nei punti $x_0, \dots, x_n$ siano uguali. I punti vengono chiamati "nodi di interpolazione" b.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}}_{\text{Matrice di Vandermonde generata dai nodi}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}}_{\text{coefficienti}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0,1 \\ 2,03 \\ 3,5 \\ 6 \end{bmatrix}}_{f(x_i)}$$

La risoluzione del sistema lineare rappresenta i coefficienti del polinomio interpolante

MINIMI QUADRATI

Consiste nel trovare una retta che rappresenta un insieme di dati formati da coppie $(x_i, f(x_i))$. In questo caso:

x	-1	0	1	2
y	-0.1	2.03	3.5	6

Cerchiamo una retta della forma $y = mx + q$ che al meglio rappresenti i dati raccolti. Riscriviamo $y = \beta_0 + \beta_1 x$, da cui si ottiene il sistema lineare sovradeterminato

$$\begin{cases} y_0 = \beta_0 + \beta_1 x_0 \\ y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_1 \\ \vdots \\ y_n = \beta_0 + \beta_1 x_n \end{cases}$$

→ Si introduce quindi un residuo per ogni componente

$$\forall i = 0, \dots, n : \quad r_i = \beta_0 + \beta_1 x_i - y_i$$

Sia $S(\beta_0, \beta_1)$ la somma dei quadrati dei residui, ovvero

$$S = S(\beta_0, \beta_1) = r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2$$

La soluzione migliore è quella che minimizza S rispetto a β_0 e β_1; per farlo, occorre calcolare le derivate parziali, cioè:

(I) $$0 = \frac{\partial S}{\partial \beta_0} \qquad\qquad 0 = \frac{\partial S}{\partial \beta_1}$$

Il risultato di queste equazioni ci fornisce dei valori per i due parametri β_0 e β_1.

1c. $\Rightarrow$ In questo caso, si ha:

$$\begin{cases} r_1 = \beta_0 - \beta_1 + 0,1 \\ r_2 = \beta_0 - 2,03 \\ r_3 = \beta_0 + \beta_1 - 3,5 \\ r_4 = \beta_0 + 2\beta_1 - 6 \end{cases} \xrightarrow{\boxed{\text{da cui}}} \begin{cases} r_1^2 = \beta_0^2 + \beta_1^2 + 0,1^2 + \frac{1}{5}\beta_0 - \frac{1}{5}\beta_1 - 2\beta_0\beta_1 \\ r_2^2 = \beta_0^2 - 4,06\beta_0 + 2,03^2 \\ r_3^2 = \beta_0^2 + \beta_1^2 + 3,5^2 - 7\beta_0 - 7\beta_1 + 2\beta_0\beta_1 \\ r_4^2 = \beta_0^2 + 4\beta_1^2 + 36 - 12\beta_0 - 24\beta_1 + 4\beta_0\beta_1 \end{cases}$$

$$S = S(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{4} r_i^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2$$

$$= 4\beta_0^2 + 6\beta_1^2 - 22,86\beta_0 - 31,2\beta_1 + 4\beta_0\beta_1 + 52,38$$

Integriamo il risultato con le eq. al punto (I)

$$0 = \frac{\partial S}{\beta_0} = 8\beta_0 + 4\beta_1 - 22,86$$

$$0 = \frac{\partial S}{\beta_1} = 4\beta_0 + 12\beta_1 - 31,2$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22,86 \\ 31,2 \end{pmatrix}$$

Si prosegue su Matlab - 1c.

8.4

② a. Il metodo di Jacobi, generalmente, converge alla soluzione se la matrice A è irriducibilmente diagonale dominante, ovvero se

$$\forall a_{i,j} \in A : \exists k \,.\, a_{kk} > \sum_{i=0, i\neq k}^{n} a_{ik} \quad \text{dove} \quad A \in M_{n\times n}, \; k \in \{0, \dots n\}$$

Per cui, in questo caso, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \beta \\ -1 & 2 & 0,2 \\ 1 & -0,1 & 2 \end{bmatrix}$$ rispetta la proprietà $\forall \beta \in \mathbb{R}$ (riga 2 e 3)

Per fare in modo che il sistema lineare $Ax = b$ abbia un'unica soluzione, con $b = (1 \; 2 \; 3)^T$, dobbiamo scegliere β per cui $\det(A) \neq 0$ oppure, $\#\text{colonne}(A) - rg(A) = 0$

Per esempio, per $\beta = 1 \Rightarrow \det(A) = 108/25 \neq 0$

$\Rightarrow rg(A) = 3 \Rightarrow n - r = 0 \Rightarrow \infty^0$ ~~soluzioni~~ 1 soluzioni

b. $\varepsilon = 10^{-3}$ [MATLAB, es_8_2]

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \Rightarrow x_1 = \frac{b_1 - \sum_{j=1; j\neq i}^{n} a_{1j} \cdot x_j}{a_{11}}$$