La DISTRIBUZIONE STAZIONARIA/ASINTOTICA del PROCESSO di EHRENFEST

Ricordiamo il PROCESSO di Ehrenfest: ho N biglie da distribuire in 2 URNE

Noto che sarà $\boxed{m}$ $\boxed{N-m}$ ovvero in una urna avrò a un dato istante $0 \leq m \leq N$ biglie (e nell'altra $0 \leq N-m \leq N$ ...)

La DINAMICA era data dicendo che ad ogni istante si estraeva un numero K con $1 \leq K \leq N$ e si CAMBIAVA di POSTO la biglia recante il numero K (ovvero "la biglia num. K" ...)

Attenzione! In termini di MACROSTATI-numero le biglie perdono la loro identità (diventano indistinguibili i MICROSTATI) e una ETICHETTA UNIVOCA delle CONFIGURAZIONI (MACROSTATI di COLORE)

è m

Il sistema ha dunque $N+1$ diverse CONFIGURAZIONI, corrispondenti ai possibili valori di $m = 0, 1, 2, \ldots, N$

La nostra OSSERVAZIONE EMPIRICA (sperimentale... abbiamo SIMULATO il processo al calcolatore) è che

ASINTOTICAMENTE registriamo lo stesso numero di biglie nelle 2 urne, ovvero la MEDIA ARITMETICA di m sulla EVOLUZIONE del SISTEMA (che possiamo dunque chiamare una MEDIA TEMPORALE)

vale
$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} m(t) \xrightarrow[T \to \infty]{} \frac{N}{2}$$
(dove $m(t)$ è il valore di m al tempo t...)

Il PROCESSO di EHRENFEST è un PROCESSO di MARKOV. Potremmo dunque scrivere la sua MATRICE STOCASTICA W_E, studiarne lo SPETTRO, etc...

... ma per prima cosa procediamo per altra via e studiamo

$P_n(t)$ = PROBABILITA' di avere $\lfloor n \rfloor$ (e $\lfloor N-n \rfloor$) al tempo t
(ovvero PROB. di avere n biglie nell'urna di riferimento al tempo t)

Notare che chiederci se esista una DISTRIBUZIONE STAZIONARIA equivale a chiedersi se

$$P_n(t) \xrightarrow[t\to\infty]{?} P_n \quad \text{(\underline{INDIPENDENTE da } t \text{ per } t \text{ GRANDI !})}$$

Per provarlo scriviamo la EQUAZIONE di EVOLUZIONE TEMPORALE di $P_n(t)$...

Vale che $$P_n(t+1) = P_{n-1}(t)\,\frac{N-n+1}{N} + P_{n+1}(t)\,\frac{n+1}{N}$$

Infatti posso avere al tempo $t+1$ $\lfloor n \rfloor$ $\lfloor N-n \rfloor$

<u>SOLO SE</u> al tempo t era $\lfloor n-1 \rfloor$ $\lfloor N-n+1 \rfloor$ e ho estratto da così che $n-1 \to n$

oppure $\lfloor n+1 \rfloor$ $\lfloor N-n-1 \rfloor$ e ho estratto da così che $n+1 \to n$

La relazione scritta prima vuol dunque dire ... chiamo $U_1 \lfloor n \rfloor$ e $U_2 \lfloor N-n \rfloor$
(ovvero U_1 è l'urna di riferimento, da cui leggo n...)

$$P_n(t+1) = P_{n-1}(t)\cdot(\text{Prob. di aver estratto da } U_2) + P_{n+1}(t)\cdot(\text{Prob. di aver estratto da } U_1)$$

calcolabile "a priori" $\dfrac{\#\text{ favorevoli}}{\#\text{ totali}} = \dfrac{N-n+1}{N}$ → # biglie in U_2...

idem... calcolabile "a priori" $\dfrac{\#\text{ favorevoli}}{\#\text{ Totali}} = \dfrac{n+1}{N}$ → # biglie in U_1.

Dunque abbiamo provato che

$$P_n(t+1) = P_{n-1}(t)\,\frac{N-n+1}{N} + P_{n+1}(t)\,\frac{n+1}{N}$$

Ora passo ad un' ALTRA DESCRIZIONE in termini di quella che chiamo la

FUNZIONE GENERATRICE $\rho(x,t) = \sum_{n=0}^{N} P_n(t)\, x^n$

Nota che

1. $\rho(x,t)$ é un POLINOMIO di GRADO N nella variabile x, che era totalmente estranea al problema originario...

2. La DIPENDENZA di $\rho(x,t)$ dal tempo é tramite i COEFFICIENTI $P_n(t)$

3. Calcolare la $\rho(x,t)$ o le sue derivate in $x=1$ o $x=0$ mi dice tutto delle $P_n(t)$ (che sono le quantità di interesse...)

Infatti per $x=1$ $\quad \rho(x=1,t) = \sum_{n=0}^{N} P_n(t) \longrightarrow$ CONDIZ. di NORMALIZZAZIONE... (sono probabilità...)

per $x=0$ $\quad \rho(x=0,t) = P_0(t)$

Viceversa $\frac{d}{dx}\rho(x,t) = \sum_{n=1}^{N} P_n(t)\, n\, x^{n-1}$ e dunque $\frac{d}{dx}\rho(x,t)\Big|_{x=0} = P_1(t)$

mentre $\frac{d^2}{dx^2}\rho(x,t) = \sum_{n=2}^{N} P_n(t)\, n(n-1)x^{n-2}$ e dunque $\frac{d^2}{dx^2}\rho(x,t)\Big|_{x=0} = 2\,P_2(t$

... e in generale ... $\quad \frac{d^n}{dx^n}\rho(x,t)\Big|_{x=0} = n!\,P_n(t)$

Ora prendo $P_n(t+1) = P_{n-1}(t)\,\frac{N-n+1}{N} + P_{n+1}(t)\,\frac{n+1}{N}$ e la RISCRIVO in termini di $\rho(x,t)$

Basta moltiplicare entrambi i membri per x^n e sommare su n da 0 a N... Ottengo

$$\sum_{n=0}^{N} P_n(t+1)\,x^n = \rho(x,t+1) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} P_{n-1}(t)\,(N-n+1)x^n + \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} P_{n+1}(t)\,(n+1)\,x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{N} P_{n-1}(t)\,x^n - \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} P_{n-1}(t)\,(n-1)\,x^n + \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} P_{n+1}(t)\,(n+1)\,x^n$$

e ora noto che $\sum_n P_{n-1}(t)\,(n-1)\,x^n = x^2\sum_n P_{n-1}(t)\,(n-1)\,x^{n-2} = x^2\frac{d}{dx}\rho(x,t)$

$$\sum_n P_{n-1}(t)\,x^n = x\sum_n P_{n-1}(t)\,x^{n-1} = x\,\rho(x,t)$$

$$\sum_n P_{n+1}(t)\,(n+1)\,x^n = \frac{d}{dx}\rho(x,t)$$

(CONVINCETEVENE!) ... per cui ... (moltiplico per N...)

$$N\rho(x,t+1) = Nx\,\rho(x,t) - x^2\frac{d}{dx}\rho(x,t) + \frac{d}{dx}\rho(x,t)$$

$$= Nx\,\rho(x,t) + (1-x^2)\frac{d}{dx}\rho(x,t)$$

Ma ATTENZIONE! Se $\exists \lim_{t\to\infty} P_n(t) = P_n$ allora anche $\rho(x,t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \rho(x) = \sum_n P_n x^n$

e dunque ottengo che entrambi i membri perdono la dipendenza da t (in questo limite)

ovvero $N\rho(x) = Nx\,\rho(x) + (1-x^2)\frac{d}{dx}\rho(x)$

che riscrivo $N(1-x)\,\rho(x) = (1-x^2)\frac{d}{dx}\rho(x)$

ovvero ancora ($\rho(x) \neq 0$) $\dfrac{\frac{d}{dx}\rho(x)}{\rho(x)} = \dfrac{N}{1+x}$ che è una EQUAZIONE DIFFERENZIALE (del 1° ordine

E' una EQUAZIONE DIFFERENZIALE perché l' INCOGNITA è la FUNZIONE $p(x)$, differenziale perché la incognita (la $p(x)$ appunto...) deve soddisfare delle relazioni che legano fra di loro una funzione di x ($\frac{N}{1+x}$), la funzione incognita ($p(x)$) e la sua derivata prima ($\frac{d}{dx}p(x)$). Il fatto che la derivata di grado max coinvolta sia la prima qualifica la equazione differenziale del primo ordine.

Osserviamo che la funzione $p(x) = \mathcal{N}(1+x)^N$ soddisfa la equazione $\forall \mathcal{N}$ costante

Infatti $\frac{d}{dx}\mathcal{N}(1+x)^N = \mathcal{N}N(1+x)^{N-1}$ e dunque $\dfrac{\frac{d}{dx}\mathcal{N}(1+x)^N}{\mathcal{N}(1+x)^N} = \dfrac{N}{1+x}$

Qual è il SIGNIFICATO di $\mathcal{N}$? Tecnicamente ha a che fare con la CONDIZIONE INIZIALE, ovvero al VALORE di $p(x)$ per un determinato valore di x.

Infatti $p(x)\big|_{x=1} = \sum P_M = 1$, come già osservato...

NOTA che (binomio di Newton) $(1+x)^N = \sum_{M=0}^{N} \binom{N}{M} x^M$

ma allora $p(x) = \sum_{M=0}^{N} P_M x^M = \mathcal{N}\sum_{M=0}^{N}\binom{N}{M} x^M$ da cui concludo

che $P_M = \mathcal{N}\binom{N}{M}$ con $\mathcal{N}$ fissato da $\sum_{M=0}^{N}\mathcal{N}\binom{N}{M} = 1 = p(x=1)$

Ma $p(x) = \mathcal{N}(1+x)^N$ e dunque $p(x=1) = (1+1)^N\mathcal{N} = \mathcal{N}2^N = 1 \Rightarrow \mathcal{N} = 2^{-N}$

e infine $\boxed{p(x) = 2^{-N}\sum_{M=0}^{N}\binom{N}{M}x^M = \sum_{M=0}^{N} P_M x^M \quad e \quad P_M = 2^{-N}\binom{N}{M}}$

Con questo risultato sappiamo tutto della DISTRIBUZIONE STAZIONARIA del processo di EHRENFEST

<u>NOTA</u> in particolare che $P_m = 2^{-N}\binom{N}{m} = \binom{N}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^m\left(1-\frac{1}{2}\right)^{N-m}$ ... una ovvietà che ci consente di

RICONOSCERE che $P_m = B_{N,\frac{1}{2}}(m)$ ovvero la DISTRIBUZ. STAZ. di Ehrenfest è una

BINOMIALE di parametri N e $\frac{1}{2}$

Sappiamo allora ricavare $M[m] = N\cdot\frac{1}{2} = \frac{N}{2}$ come visto dagli esperimenti

e $D[m] = N\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{N}{4}$

<u>P.S.</u> Una volta scritta la MATRICE STOCASTICA del PROCESSO, chiamiamola W_E, verificheremo che

$$W_E\, B_{N,\frac{1}{2}} = B_{N,\frac{1}{2}}$$ (la nostra π, AUTOVETT. corrispondente ad AUTOVAL. 1)