1. Distribuzione BINOMIALE (o Bernoulliana...)

$B_{n,p}(m)$ assume valori su un INSIEME DISCRETO e FINITO

$$m = 0, 1, 2, \dots, n$$

dipende da 2 PARAMETRI : n e p

- Esprime la PROBABILITA' di m REALIZZAZIONI su n TENTATIVI di un EVENTO che si realizza con PROBABILITA' p (e NON si realizza con probabilità $q = 1-p$)

$$B_{n,p}(m) = \binom{n}{m} p^m q^{n-m} \qquad (q = 1-p)$$

con $\binom{n}{m}$ COEFFICIENTE BINOMIALE (cfr PROVE RIPETUTE...)

VALOR MEDIO e VARIANZA della BINOMIALE

$$M[m] = np$$

$$D[m] = M[(m - M[m])^2]$$

$$= M[m^2] - (M[m])^2 = npq = np(1-p)$$

che si ricavano facilmente a partire dalla FORMULA del BINOMIO di NEWTON

$$(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} p^m q^{n-m}$$

N.B. Lavoreremo su p e q generici. Poi porremo $p + q = p + (1-p) = 1$

Derivo ambo i membri rispetto a p

$$n(p+q)^{n-1} = \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} m\, p^{m-1} q^{n-m}$$

il termine $m=0$, ovvero p^0 è la costante $1 = p^0$ e ha derivata nulla...

Moltiplico ora ambo i membri per p

$$np(p+q)^{n-1} = \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} m\, p^m q^{n-m}$$
$$= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} m\, p^m q^{n-m}$$

posso sommare anche il contributo $m=0$...
esso non dà alcun contributo (è proporzionale a $m=0$...)

Ora faccio $q=1-p$ e dunque $p+q=1$ e ottengo

$$np = \sum_{m=0}^{n} m \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$$

ché è proprio ciò che volevo dimostrare $M[m] = \sum_{m'=0}^{n} m' B_{n,p}(m') = np$

Notare che se <u>derivo 2 volte</u> $(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} p^m q^{n-m}$

$$n(n-1)(p+q)^{n-2} = \sum_{m=2}^{n} \binom{n}{m} m(m-1)\, p^{m-2} q^{n-m}$$

ora, derivando, ho perso un ulteriore termine...
cfr $\frac{d}{dp} p = 1$ e $\frac{d^2}{dp^2} p = \frac{d}{dp} 1 = 0$ ...

Moltiplico ora per p^2 e ottengo

$$n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} m(m-1)\, p^m q^{n-m}$$

m si annulla per $m=0$
$m-1$ si annulla per $m=1$
e dunque posso aggiungere i due termini $m=0$ e 1
che non danno contributo (non cambiano la somma...)

Faccio ora $p+q=1$ e ottengo

$$n(n-1)p^2 = \sum_{m=0}^{n} m(m-1)\, B_{n,p}(m)$$
$$= \sum_{m=0}^{n} m^2 B_{n,p}(m) - \sum_{m=0}^{n} m\, B_{n,p}(m)$$

ma al secondo membro riconosco $M[m^2] - M[m]$

ovvero $n^2p^2 - np^2 = M[m^2] - M[m]$

ma $M[m] = np$ (lo sostituiso al 2° membro) e dunque anche $n^2p^2 = (M[m])^2$ (lo sostituisco al 1° membro)

$$\downarrow$$

$$(M[m])^2 - np^2 = M[m^2] - np$$

questo vuol dire che la VARIANZA vale

$$D[m] = M[m^2] - (M[m])^2 = np - np^2 = np(1-p) = npq$$

CONDIZIONE di NORMALIZZAZIONE $\sum_{m=0}^{n} B_{n,p}(m) = 1 = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} p^m q^{n-m} = (p+q)^n = (p+1-p)^n = 1^n$

CVD