Dall'ultima lezione sul modello di Ehrenfest si era arrivati alla conclusione che la probabilità di trovare n biglie nell'urna di riferimento (ed $N-n$ nell'altra) ad un tempo t significativo (ovvero che tende a ∞) è descritta da una *distribuzione binomiale*.

Questa tipologia di distribuzione descrive un esperimento di prove ripetute. In particolare, la formula

$$\mathcal{B}_{N,\,p}(n) = \binom{N}{n}\,p^n(1-p)^{N-n}$$

contiene i parametri:

- N : numero di prove totali;
- n : numero di prove vincenti;
- p : probabilità di successo sulla singola prova.

Momenti

I *momenti* principali della distribuzione binomiale sono il *valore atteso*(anche *media/speranza matematica*) e la *varianza*(anche *secondo momento centrato*).

La definizione del valore atteso di una variabile aleatoria è

$$\mathbb{E}\left[m\right] = \sum_{i=1}^{\infty} m_i\,p_i$$

Mentre per la varianza vale

$$\sigma_m^2 = \mathbb{E}\left[\left(m-\mathbb{E}\left[m\right]\right)^2\right]$$

Queste definizioni sono entrambe ricavabili partendo dal binomio di Newton

$$(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}p^m\,q^{n-m}$$

Il primo passo è quello di derivare una volta rispetto a p

$$n\,(p+q)^{n-1} = \sum_{m=1}^{n}\binom{n}{m}m\,p^{m-1}q^{n-m}$$

Poi, moltiplicando ambo i membri per p

$$n\,p\,(p+q)^{n-1} = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}m\,p^{m}q^{n-m}$$

e assegnando $q = 1 - p$ e dunque $p + q = 1$, si ottiene il risultato che si voleva dimostrare inizialmente

$$n\,p = \sum_{m=0}^{n} m \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$$

Allo stesso modo, per ricavare la varianza si utilizza la derivata seconda partendo dal binomio

$$n\,(n-1)\,(p+q)^{n-2} = \sum_{m=2}^{n} \binom{n}{m} m\,(m-1)\,p^{m-2} q^{n-m}$$

e si moltiplica per il termine p^2

$$n\,(n-1)\,p^2\,(p+q)^{n-2} = \sum_{m=2}^{n} \binom{n}{m} m\,(m-1)\,p^{m} q^{n-m}$$

si aggiunge poi il vincolo $p + q = 1$

$$n\,(n-1)\,p^2 = \sum_{m=0}^{n} m\,(m-1)\,\mathcal{B}_{n,p}(m) = \sum_{m=0}^{n} m^2\,\mathcal{B}_{n,p}(m) - \sum_{m=0}^{n} m\,\mathcal{B}_{n,p}(m)$$

$$n^2p^2 - np^2 = \mathbb{E}\left[m^2\right] - \mathbb{E}\left[m\right] = \left(\mathbb{E}\left[m\right]\right)^2 - np^2 = \mathbb{E}\left[m^2\right] - np$$

da cui

$$\sigma_m^2 = \mathbb{E}\left[m^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[m\right]\right)^2 = np - np^2 = n\,p\,(1-p)$$