ESERCIZI / NOTE

DISTRIBUZIONE BINOMIALE : $B_{n,p}(m)$

Descrive la probabilità di m realizzazioni su n tentativi di un evento che ha probabilità p di realizzarsi. E' caratterizzata dalla formula

$$B_{n,p}(m) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$$

↳ coefficiente binomiale

Si prenda come esempio n = numero di lanci di un dado con l facce.
Il numero possibile di esiti e' dato da

$$\underbrace{l \cdot l \cdot l \cdot l \cdots l}_{n} = l^n$$

Si prenda come riferimento un valore $x \in [1, \ldots, l]$.
Si supponga di voler calcolare la probabilità di ottenere 0 volte il valore x su tutti gli n = 5 lanci, nel caso di un dado a 2 facce ($l = 2$).
Esiste solo un caso in cui questo si verifica, per cui la probabilità associata è $p = 1/2^5 = 1/32$
Ragionando in termini più generici

$$P(X = x) = \frac{m!}{x!(m-x)!} / n = \binom{m}{x} / n$$

Valore medio : $M[m] = np$

si dimostra verificando che $M[m] = \sum_{m=0}^{n} m \cdot B_{n,p}(m) = np$

perché non $\cdot 1/m$?
→ $B_{n,p}(m)$ già normalizzato

Varianza : $D[m] = M[(m - M[m])^2] = M[m^2] - (M[m])^2 = np(1-p)$

Note : Per comprendere meglio il concetto, si consideri $\binom{n}{m}$ in termini di n = dimensione dell'insieme (es. $\{p_0, p_1, p_2\} = 3$) e
m = dimensione del sottoinsieme (es. $\{q_a, q_b\}$)

indici possibili

indici per esito positivo

Dimostrazione momenti - valore atteso

Partendo dalla formula del binomio di Newton si ha

$$(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} p^m q^{n-m}$$

La dimostrazione per induzione consiste nella definizione di un passo base

$$(p+q)^1 = \sum_{m=0}^{1} \binom{1}{m} p^m q^{1-m} = \binom{1}{0} p^0 q^1 + \binom{1}{1} p^1 q^0 = p+q$$

per poi procedere con il passo induttivo

$$(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} p^m q^{n-m}$$

$$\Rightarrow \quad (p+q)^{n+1} = (p+q)(p+q)^n$$

$$= (p+q) \cdot \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} p^m q^{n-m} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} p^{m+1} q^{n-m} + \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} p^m q^{n-m+1}$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} p^{m+1} q^{n-m} + \binom{n}{n} p^{n+1} + \binom{n}{0} q^{m+1} + \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m+1} p^{m+1} q^{n-(m+1)+1}$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} \left(\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} \right) p^{m+1} q^{n-m} + \binom{n}{n} p^{n+1} + \binom{n}{0} q^{m+1}$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n+1}{m+1} p^{m+1} q^{n-m} + \binom{n}{n} p^{n+1} + \binom{n}{0} q^{m+1}$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \binom{n+1}{m} p^m q^{n-m+1} + \overset{1=\binom{n+1}{n+1}}{\binom{n}{n}} p^{n+1} + \overset{1=\binom{n+1}{0}}{\binom{n}{0}} q^{m+1} = \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} p^m q^{n+1-m} \qquad \blacksquare$$

Perché deriviamo?

La derivata su p applicata ad entrambe le parti della formula dà risultato

$$(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} p^m q^{n-m} \quad \Rightarrow \quad n(p+q)^{n-1} = \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} m p^{m-1} q^{n-m}$$

Moltiplicando ambo i lati per p, si ottiene

Perché $\cdot p$?

$$np(p+q)^{n-1} = \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} m p^m q^{n-m} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} m p^m q^{n-m}$$

Si impone ora la condizione $q=1-p$ e quindi $q+p=1$, da cui segue proprio

$$np = \sum_{m=0}^{n} m \binom{n}{m} p^m q^{n-m} \qquad \blacksquare$$

Dimostrazione momenti - varianza

Dato che i passaggi sono analoghi, si riprende dalla fase di derivazione, ma stavolta applichiamo la derivata 2 volte:

$$n(n-1)(p+q)^{n-2} = \sum_{m=2}^{n} \binom{n}{m} m(m-1) p^{m-2} q^{n-m}$$

Si procede in maniera analoga al caso del valore atteso, moltiplicando ambo i lati per p^2

$M[m^2] \stackrel{?}{=} \sum_{m=0}^{n} m^2 B_{n,p}(m)$

perchè non m^2 ?

$$n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} m(m-1) p^{m} q^{n-m}$$

$$q = 1-p \Rightarrow n(n-1)p^2 = \sum_{m=0}^{n} m(m-1)\, B_{n,p}(m) = \sum_{m=0}^{n} m^2 B_{n,p}(m) - \sum_{m=0}^{n} m B_{n,p}(m)$$

$$n^2p^2 - np^2 = M[m^2] - M[m] = (M[m])^2 - np^2 = M[m^2] - np$$

A questo punto riscriviamo la formula per la varianza diventa

$$D[m] = M[m^2] - (M[m])^2 = np - np^2 = np(1-p) \qquad \blacksquare$$

PREPARAZIONE PROVA DI AUTOVALUTAZIONE

- Qual è la probabilità di pescare per j volte l'asso di denari, estraendo per 37 volte una carta da un mazzo contenente le canoniche 40 carte?

prove ripetute ~ binomiale $\rightarrow$ $B_{n,p}(j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$

$n = 37$

disposizioni
permutazioni
· probabilità

$p = 1/40$

$= \binom{37}{j} (1/40)^j (39/40)^{37-j}$

- Si scriva la probabilità di pescare per z volte un asso estraendo per 29 volte una carta da un mazzo di 39 carte (manca il fante di denari)

$B_{n,p}(z)$ $\qquad n = 29$ $\qquad p = 4/39$

- Da una certa stazione ferroviaria in un giorno feriale transitano in media 7500 persone. Qual è la probabilità che in una data settimana nei 4 giorni fra lunedì e giovedì ne transitino 27500? Qual è la probabilità che in un' altra settimana con stesso traffico ne transitino 17500 nei giorni tra lunedì e mercoledì?

densità ~ poissoniana $\rightarrow$ $P_\lambda(n) = \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda}$

$\lambda = 7500 \cdot 4 = 30\,000$

$n = 27\,500$

$$P_\lambda(n) = \frac{30\,000^{27500}}{27500!} \cdot e^{-30\,000} \quad \tilde{\approx} \quad \mathcal{N}(\lambda ; \sqrt{\lambda})$$

Fixing a Machine

Dopo 10'000 utilizzi 20 macchinari su 100 risultano danneggiati.

Si stima che dopo il loro intervento i macchinari sani su 100 dopo lo stesso numero di utilizzi siano (a) 88 (b) 92

All' 1% di confidenza, riteniamo efficace l'intervento ? $\alpha = 0.99$

Valutiamo le probabilità di rotture

$$B_{100, 0.2}(k)$$

Si nota graficamente che la gaussiana che approssima è abbastanza "OK"

Abbiamo quindi

(a) 12 rotture (b) 8 rotture

$\mu = np = 20$ $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 4$

(a) $12 = 20 - 2\sigma$ (b) $8 = 20 - 3\sigma$