- Momenti

Dall'ultima lezione sul modello di Ehrenfest si era arrivati alla conclusione che la probabilità di trovare n biglie nell'urna di riferimento (ed $N-n$ nell'altra) ad un tempo t significativo (ovvero che tende a ∞) è descritta da una *distribuzione binomiale*.

Questa tipologia di distribuzione descrive un esperimento di prove ripetute. In particolare, la formula $$ \mathcal{B}_{N, ,p} (n) = \binom{N}{n} , p^n(1-p)^{N-n} $$ contiene i parametri:

- N : numero di prove totali;
- n : numero di prove vincenti;
- p : probabilità di successo sulla singola prova.

Momenti

I *momenti* principali della distribuzione binomiale sono il *valore atteso*(anche *media/speranza matematica*) e la *varianza*(anche *secondo momento centrato*).

La definizione del valore atteso di una variabile aleatoria è $$ \mathbb{E}\left[m\right] = \sum_{i=1}^{\infty} m_i , p_i $$ Mentre per la varianza vale $$ \sigma_{m}^2 = \mathbb{E} \left[(m - \mathbb{E}\left[m \right])^2 \right] $$ Queste definizioni sono entrambe ricavabili partendo dal binomio di Newton $$ (p+q)^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} p^m , q^{n-m} $$ Il primo passo è quello di derivare una volta rispetto a p $$ n,(p+q)^{n-1} = \sum_{m=1}^n \binom{n}{m}m,p^{m-1}q^{n-m} $$ Poi, moltiplicando ambo i membri per p $$ n,p,(p+q)^{n-1} = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m}m,p^m q^{n-m} $$ e assegnando $q = 1-p$ e dunque $p+q=1$, si ottiene il risultato che si voleva dimostrare inizialmente $$ n,p = \sum_{m=0}^n m\binom{n}{m} , p^m(1-p)^{n-m} $$ Allo stesso modo, per ricavare la varianza si utilizza la derivata seconda partendo dal binomio $$ n,(n-1), \left(p+q\right)^{n-2} = \sum_{m=2}^n \binom{n}{m} m \left(m-1\right) , p^{m-2} q^{n-m} $$ e si moltiplica per il termine p^2 $$ n,(n-1),p^2 , \left(p+q\right)^{n-2} = \sum_{m=2}^n \binom{n}{m} m \left(m-1\right) , p^m q^{n-m} $$ si aggiunge poi il vincolo $p+q=1$ $$ n,(n-1),p^2 = \sum_{m=0}^n m \left(m-1\right) , \mathcal{B}{n,p}(m) = \sum{m=0}^n m^2,\mathcal{B}{n,p}(m) - \sum{m=0}^n m,\mathcal{B}_{n,p}(m) $$ $$ n^2p^2 - np^2 = \mathbb{E}\left[m^2\right] - \mathbb{E}\left[m\right] = \left(\mathbb{E}\left[m\right]\right)^2 - np^2 = \mathbb{E}\left[m^2\right] - np $$ da cui $$ \sigma_m^2 = \mathbb{E}\left[m^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[m\right]\right)^2 = np - np^2 = n,p,(1-p) $$