7. ДИНАМІЧНІ ІГРИ

🖹 План викладу матеріалу

1. Базові положення.
2. Динамічні ігри з довершеною інформацією.
3. Динамічні ігри з недовершеною інформацією.

⊷ Ключові терміни

- *Означення динамічних ігор* (*ДІ*)
- *ДІ з довершеною інформацією*
- *ДІ з недовершеною інформацією*
- *Інформаційна множина*
- *ДІ з вичерпною інформацією*
- *ДІ з неповною інформацією*
- *ДІ з повною пам'яттю*
- *Дерево гри*
- *Термальні вершини*
- *Множина черговості ходів*
- *Метод зворотної індукції*
- *Підігри*, *власні підігри*
- *Динамічна узгодженість*
- *Довершені ситуації рівноваги*
- *Майже довершені ДІ*
- *Дворівневі ігри двох гравців*

7.1. Базові положення

7.1.1. Інформаційні множини

Безліч ситуацій, які полягають у взаємодії індивідуумів, за своїм змістом є *динамічними*: люди взаємодіють між собою у часі і реагують (обирають свою дію) у відповідь на дії, які раніше обрали інші індивідуууми чи Природа (невизначені чинники).

У теорії ігор це означає, що під час ухвалення рішення гравець має деяку інформацію щодо рішень, які ухвалили раніше інші гравці та він сам і/або Природа. Отже рішення (*ходи*) гравцями ухвалюються почергово (тобто існує черговість ходів). У цій ситуації кожен гравець стоїть перед *доконаними* фактами (здійснені раніше і відомі гравцеві ходи), які він зобов'язаний враховувати під час ухвалення свого рішення.

Динамічна гра – це гра, у якій кожен гравець може здійснити декілька ходів, і <u>хоча б один</u> з гравців, здійснюючи хід, знає, які ходи здійснили інші гравці (можливо, тільки він сам) і/або Природа.

Для зображення динамічної гри найчастіше застосовують *позиційну* (*розгорнуту*) форму гри, яка має вигляд дерева (див. 4.4.3).

Вставка 4 розд.

Приклади 4.11 – 4.14 описують ігри *у позиційній* формі, в яких вибір ходу гравцем залежить тільки від поточної позиції, в яку він потрапив. Історія гри (інформація щодо того, як саме гравець потрапив у конкретну позицію) є несуттєвою. Зауважимо, що *стратегії* гравців у прикладах 4.11 – 4.11 складаються з *декількох* ходів.

Ігри *у позиційній* формі є *динамічними* іграми, оскільки відображають процеси, які відбуваються в дискретні моменти часу. Ці процеси можна розглядати як випадкове блукання на множині позицій, впорядкованій у вигляді дерева (від початкової позиції до однієї із кінцевих), під час якого гравці багаторазово приймають *часткові рішення* в умовах інформаційних станів, які постійно змінюються.

Впорядкована у вигляді дерева множина позицій визначає для кожної позиції *єдиний шлях*, який веде до неї із початкової позиції (кореня), а також множину ходів, які можна зробити із цієї позиції безпосередньо у наступні позиції.

Гілкою дерева називають ламану лінію, що налічує відрізки, які починаються у корені і йдуть послідовно через проміжні вершини до листків дерева. Кожна гілка дерева відображає *партію гри*. Наприклад, гілка $4 \to 2 \to 1$ або $2 \to 2 \to 2 \to 1$ для гри на рис. 4.4. Скільки є гілок, стільки є можливих партій гри.

Прикладами позиційних ігор є шахи, салонні ігри у карти, військові операції, дії ігрових автоматів тощо. Точне формальне визначення позиційних ігор вперше дав американський математик Г. Кун.

Отже, в іграх у позиційній формі досліджують математичні моделі конфліктів, що враховують *динаміку*. *Найпростішими* іграми у позиційній формі називають ігри зі *скінченною кількістю* ходів та *вичерпною інформацією* (приклади 4.11 – 4.14).

У цих іграх будь-який гравець у будь-якій позиції може відновити усі попередні позиції. Розглянемо ще один *класичний приклад* найпростішої гри у позиційній формі [6].

Приклад 4.15. Гра складається із трьох ходів:

перший хід робить перший гравець – обирає число $x \in \{1; 2\}$;

другий хід робить другий гравець – обирає число $y \in \{1, 2\}$, знаючи число x, яке обране на першому ході;

третій хід робить перший гравець – обирає число $z \in \{1, 2\}$, знаючи числа x та y, обрані на попередніх ходах.

На цьому гра закінчується. Другий гравець платить першому суму, яка визначається величиною $M(x, y, z)$:

$M(1, 1, 1) = –2$; $M(1, 1, 2) = –1$; $M(1, 2, 1) = 3$; $M(1, 2, 2) = –4$;
$M(2, 1, 1) = 5$; $M(2, 1, 2) = 2$; $M(2, 2, 1) = 2$; $M(2, 2, 2) = 6$.

Побудувати дерево гри.

➢ Ця гра є *антагоністичною* (другий гравець сплачує першому гравцеві суму $M(x, y, z)$ у випадку $M(x, y, z) > 0$. І навпаки: перший гравець сплачує другому гравцеві суму $–M(x, y, z)$ у випадку $M(x, y, z) < 0$).

Дерево гри прикладу 4.15 зображено на рис. 4.6.

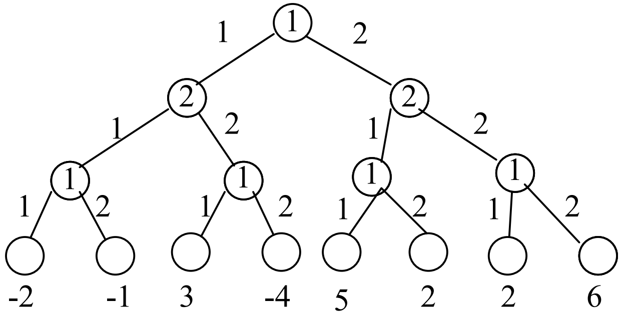

Рис. 4.6. Дерево гри прикладу 4.15

Оптимальна партія для першого гравця: $2 \to 1 \to 1$ (другий гравець вимушено обирає 1 з програшем 5, оскільки за вибору 2 його програш буде ще більшим – 6). ≺

Гру у позиційній формі іноді ще називають грою у *розгорнутій формі*. Здавалося б, що у грі у розгорнутій формі дії одного гравця обмежують можливості іншого. Це дійсно стосується *ходів*. Однак якщо ми правильно визначимо поняття *стратегії*, то одержимо *стратегічну незалежність* і, відповідно, гру в *нормальній* формі.

Що назвати стратегією для найпростішої гри у розгорнутій формі? Кожен гравець у будь-якій позиції, якою він керує, має обрати деякий хід. Якщо усі гравці вибрали стратегії, то з кожної проміжної (не кінцевої) вершини виходить зазначений хід, і можна рухатися від кореневої вершини за цими відрізками (дугами).

Зрештою ми доберемося до кінцевої вершини, в якій зазначено виграші. Отже, для найпростіших ігор у розгорнутій формі (тобто ігор зі скінченною кількістю ходів і вичерпною інформацією) *стратегія* гравця – це послідовність його ходів на дереві гри у напрямі від кореня до листка дерева. За допомогою *комбінування* стратегій різних гравців кожну гру у *розгорнутій формі* можна зобразити у *нормальній* формі.

Приклад 4.16. Гру прикладу 4.15 зобразити у нормальній формі.

➢ Стратегії *першого гравця* позначимо (i, i_1, i_2):

i – вибір числа на першому ході;

i_1 – вибір числа на третьому ході, якщо другий гравець обрав $y = 1$ на другому ході;

i_2 – вибір числа на третьому ході, якщо другий гравець обрав $y = 2$ на другому ході.

Наприклад, стратегія (1, 2, 1) означає: перший хід – $x = 1$, третій хід – $z = 2$, якщо $y = 1$; $z=1$, якщо $y = 2$. Таких стратегій буде 8 (див. рис. 4.6).

Розглянемо можливі стратегії другого гравця:

1) обрати $y = 1$, незважаючи на x;
2) обрати $y = 2$, незважаючи на x;
3) обрати $y = x$;
4) обрати: $y = 1$, якщо $x = 2$;
   $y = 2$, якщо $x = 1$.

Зв'язок виграшів гравців та їхніх стратегій:

1 \ 2	1	2	3	4
	$y = 1$	$y = 2$	$y = x$	y=1 для x=2 y=2 для x=1
(1,1,1)	M(1,1,1)= –2	M(1,2,1)=3	M(1,1,1)= –2	M(1,2,1)=3
(1,1,2)	M(1,1,1)= –2	M(1,2,2)= –4	M(1,1,1)= –2	M(1,2,2)= –4
(1,2,1)	M(1,1,2)= –1	M(1,2,1)=3	M(1,1,2)= –1	M(1,2,1)=3
(1,2,2)	M(1,1,2)= –1	M(1,2,2)= –4	M(1,1,2)= –1	M(1,2,2)= –4
(2,1,1)	M(2,1,1)=5	M(2,2,1)=2	M(2,2,1)=2	M(2,1,1)=5
(2,1,2)	M(2,1,1)=5	M(2,2,2)=6	M(2,2,2)=6	M(2,1,1)=5
(2,2,1)	M(2,1,2)=2	M(2,2,1)=2	M(2,2,1)=2	M(2,1,2)=2
(2,2,2)	M(2,1,2)=2	M(2,2,2)=6	M(2,2,2)=6	M(2,1,2)=2

Таблиця виграшів (нормальна форма гри):

1 \ 2	1	2	3	4
	$y = 1$	$y = 2$	$y = x$	y=1 для x=2 y=2 для x=1
(1,1,1)	(–2; 2)	(3; –3)	(–2; 2)	(3; –3)
(1,1,2)	(–2; 2)	(–4; 4)	(–2; 2)	(–4; 4)
(1,2,1)	(–1; 1)	(3; –3)	(–1; 1)	(3; –3)
(1,2,2)	(–1; 1)	(–4; 4)	(–1; 1)	(–4; 4)
(2,1,1)	(5; –5)	(2; –2)	(2; –2)	(5; –5)
(2,1,2)	(5; –5)	(6; –6)	(6; –6)	(5; –5)
(2,2,1)	(2; –2)	(2; –2)	(2; –2)	(2; –2)
(2,2,2)	(2; –2)	(6; –6)	(6; –6)	(2; –2)

Оскільки гра – *антагоністична*, то таблицю виграшів спрощують:

1 \ 2	1	2	3	4
	$y = 1$	$y = 2$	$y = x$	y=1 для x=2 y=2 для x=1
(1,1,1)	–2	3	–2	3
(1,1,2)	–2	–4	–2	–4
(1,2,1)	–1	3	–1	3
(1,2,2)	–1	–4	–1	–4
(2,1,1)	5	2	2	5
(2,1,2)	5	6	6	5
(2,2,1)	2	2	2	2
(2,2,2)	2	6	6	2

$\prec$

Зворотне твердження про можливість переходу від нормальної форми гри до позиційної форми не зовсім очевидне. Справді, якщо повернутися до прикладів 4.8 – 4.10, то ми відразу побачимо, що жодну з цих ігор не можна представити як гру у розгорнутій формі. Чому це так?

Справа у тому, що в іграх у нормальній формі гравці роблять ходи одночасно, і жодному гравцеві невідомі ходи суперників. А в іграх у розгорнутій формі порядок ходів чітко визначено, і другому гравцеві відомий хід першого гравця. Гравцям у нормальній формі невідомо, що обрали інші. Щоб урахувати таку *необізнаність*, необхідно модифікувати розгорнуту форму гри, увівши поняття *інформаційної множини* (див. сьомий розділ).

Приклади 4.11 – 4.15 описують динамічні ігри з *довершеною* (чи *цілковитою*) *інформацією* (від *perfect information*), тобто такі ігри, в яких кожен гравець, обираючи хід, знає всю попередню історію гри (тобто знає, в якій вершині дерева він заходиться).

Досить часто під час вибору ходу гравець може не знати, в якій з позицій гри (вершині дерева) він перебуває, оскільки не володіє інформацією про попередній хід (чи попередні ходи). І всі такі *нерозрізнені* для нього позиції об’єднують в одну *інформаційну* *множину* (на рисунках цю множину обводять пунктирним контуром). У цьому випадку отримуємо динамічну гру з *недовершеною інформацією* (від *imperfect information*).

Оскільки в інформаційній множині гравець не розрізняє позицій, то для кожної інформаційної множини необхідно зазначати відповідну *множину ходів*.

Приклад 7.1. Модифікуємо умови прикладу 4.16, вважаючи, що на третьому кроці гри перший гравець забув свій хід на першому кроці і не знає вибору другого гравця на другому кроці гри. Зобразити гру у розгорнутій та нормальній формах.

➢ Розгорнуту форму гри прикладу 7.1 зображено на рис. 7.1.

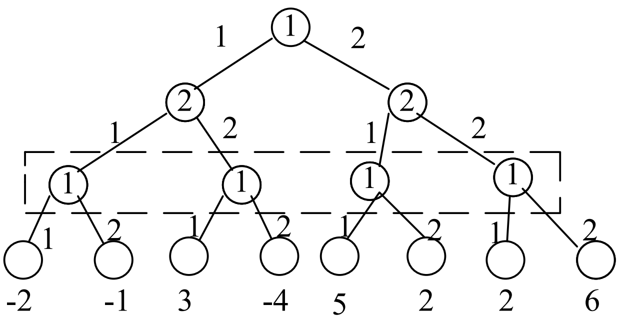

Рис. 7.1. Дерево гри прикладу 7.1

Усі чотири вершини на третьому кроці утворюють інформаційну множину (перший гравець не знає, в якій вершині він знаходиться. Зведемо гру до нормальної форми, побудувавши *таблицю виграшів*. Стратегії другого гравця залишились без змін. Стратегії першого гравця – це пара чисел (x, z), де x – вибір на 1-му кроці; z – вибір на 3-му.

Таблиця виграшів:

1 \ 2	1	2	3	4
	$y = 1$	$y = 2$	$y = x$	y=1 для x=2 y=2 для x=1
(1, 1)	–2	3	–2	3
(1, 2)	–1	–4	–1	–4
(2, 1)	5	2	2	5
(2, 2)	2	6	6	2

∢

Приклад 7.2. Модифікуємо умови прикладу 4.16, вважаючи, що на третьому кроці гри перший гравець забув свій хід на першому кроці і не знає вибору другого гравця на другому кроці гри, а другий гравець не знає числа, яке обрав перший гравець на першому кроці. Зобразити гру у нормальній та розгорнутій формах.

➢ Дерево гри прикладу 7.2 зображено на рис. 7.2.

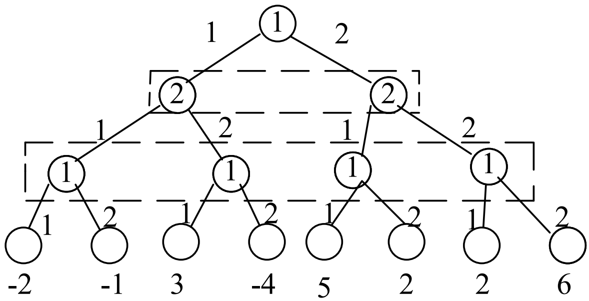

Рис. 7.2. Дерево гри прикладу 7.2

Стратегії першого гравця – це пара чисел (x, z) , де x – вибір на 1-му кроці; z – вибір на 3-му. Стратегії другого гравця: 1-ша – обрати $y = 1$; 2-га – обрати $y = 2$.

Таблиця виграшів:

1 \ 2	1	2
(1, 1)	–2	3
(1, 2)	–1	–4
(2, 1)	5	2
(2, 2)	2	6

∢

Приклад 7.3. Гру прикладу 4.9 зобразити у розгорнутій формі.

➢ У кожного з арештованих є дві стратегії – не признатися у скоєнні злочину (стратегія 1) чи признатися (стратегія 2). Умовно вважаємо, що перший хід робить перший в’язень. Розгорнуту форму (дерево гри) прикладу 4.9 зображено на рис. 7.3.

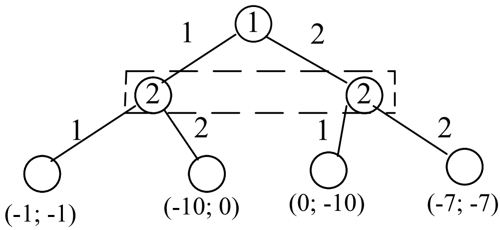

Рис. 7.3. Дерево гри прикладу 4.9

∢

7.1.2. Класифікація динамічних ігор

Існує ще одне джерело невизначеності гравців щодо стану позиції – *випадок*. Наприклад, в іграх з картами гравці, зазвичай, не знають карт партнерів (недарма їх ретельно перетасовують перед роздачею), і це теж потрібно відобразити в описі гри.

Однак, на відміну від попередньої невизначеності щодо позицій гри, ця невизначеність є ймовірнісною і вводиться у розгляд порівняно легко. Формально до списку гравців додається *фіктивний гравець* – <u>Природа</u> (на дереві гри це гравець з номером 0), що теж обирає свої ходи, але робить це не вільно, як звичайні гравці, а із певними ймовірностями. Розглянемо приклад.

Приклад 7.4. Нехай перший гравець (Ярослав) одержує карту, що в 1/6 випадків сприятлива для нього. Подивившись карту, він може або "*підвищити ставку*" (*R*), або "*спасувати*" (*P*). У другому випадку гра закінчується, і Ярослав віддає другому гравцеві (Миколі) 10 грн. У першому випадку Микола, не бачачи карти, може або "*прийняти підвищення*" (*r*), або теж "спасувати" (*p*). Виграші Ярос-
лава (гра з *нульовою сумою*) у різних ситуаціях наведено на рис. 7.4.

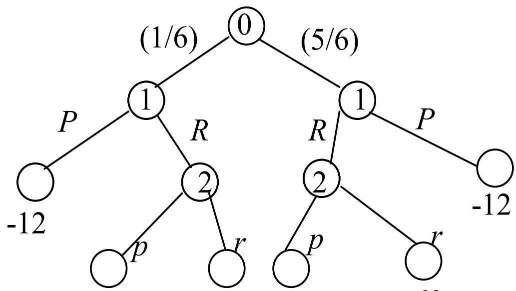

Рис. 7.4. Виграші першого гравця

Зобразити гру у розгорнутій та нормальній формах.

➢ У цій грі у Ярослава дві інформаційні множини (сприятлива карта, несприятлива карта), а у Миколи – одна, оскільки він не бачить карту. Чи можна у такій грі утворити нормальну форму?

Зі стратегіями особливих проблем немає. Знову кожен гравець має вирішити, як він поводиться (який хід обирає) у кожній своїй інформаційній множині. Ярослав має вирішити, що він робить за сприятливої карти чи за несприятливої карти.

Стратегії першого гравця (Ярослава) – це пара чисел (x, z), де x – вибір за сприятливої карти; z – за несприятливої карти. Вважаємо, що 1 –це “*спасувати*” (P), а 2 – це “*підвищити ставку*” (R). Отож можливі такі комбінації: (1, 1); (1, 2); (2, 1); (2, 2).

Стратегії другого гравця (Миколи): 1 –це “*спасувати*” (p), а 2 – це “*підвищити ставку*” (r).

З виграшами гравців виникає деяка проблема. Нехай Ярослав обрав стратегію (2, 2), а Микола – другу стратегію. Якщо карта сприятлива, то Ярослав одержує 90 грн, якщо погана – втрачає 60 грн.

Як же оцінити його виграш? Найпростіший вихід – це розіграти та оцінити усі *лотереї* для першого гравця.

Результати лотерей наведено у такій таблиці:

Стратегія 1-го, стратегія 2-го	Результат лотереї
(1, 1), 1	$\frac{1}{6}\cdot(-12)+\frac{5}{6}\cdot(-12)=-12$
(1, 1), 2	$\frac{1}{6}\cdot(-12)+\frac{5}{6}\cdot(-12)=-12$
(1, 2), 1	$\frac{1}{6}\cdot(-12)+\frac{5}{6}\cdot 30=23$
(1, 2), 2	$\frac{1}{6}\cdot(-12)+\frac{5}{6}\cdot(-60)=-52$
(2, 1), 1	$\frac{1}{6}\cdot 36+\frac{5}{6}\cdot(-12)=-4$
(2, 1), 2	$\frac{1}{6}\cdot 90+\frac{5}{6}\cdot(-12)=5$
(2, 2), 1	$\frac{1}{6}\cdot 36+\frac{5}{6}\cdot 30=31$
(2, 2), 2	$\frac{1}{6}\cdot 90+\frac{5}{6}\cdot(-60)=-35$

Формально кажучи, у цій грі результат для першого гравця – це не число, а складніший об’єкт – лотерея, вартість якої залежить від випадку. Дерево цієї гри (рис. 7.5) уже *не може* містити виграшів першого гравця біля листків дерева, оскільки вони не матимуть змісту (виграш першого гравця залежить від лотереї).

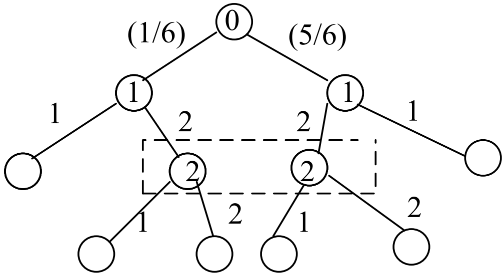

Рис. 7.5. Дерево гри прикладу 7.4

Таблиця виграшів:

1 \ 2	1	2
(1, 1)	–12	–12
(1, 2)	23	–52
(2, 1)	–4	5
(2, 2)	31	–35

≺

Отже, структура динамічної гри у розгорнутій формі визначається сім'ями інформаційних множин гравців та їхнім взаємним розташуванням. Приклади 7.1 – 7.4 дають змогу краще усвідомити *класифікацію* динамічних ігор:

- *динамічна гра з довершеною інформацією* – це гра, в якій кожна інформаційна множина містить тільки одну позицію (вершину);
- *динамічна гра з недовершеною інформацією* – це гра, в якій хоча б одна інформаційна множина містить декілька позицій;
- *динамічна гра з неповною інформацією* (від *incomplete information*) – це гра, в якій Природа здійснює перший хід і він не спостерігається хоча б одним з гравців. Інакше одержуємо динамічну гру з *вичерпною інформацією.*

У *динамічній грі з довершеною інформацією* кожен гравець завжди чітко знає, в якій вершині дерева гри він знаходиться, немає одночасних ходів, і всі гравці спостерігають випадкові ходи Природи (якщо такі ходи є). На множині випадкових ходів Природи задають деякий закон розподілу ймовірностей.

Динамічна гра з *неповною інформацією* є водночас і динамічною грою з *недовершеною інформацією* (приклад 7.4), оскільки інформаційні множини деяких гравців містять декілька вершин.

Іноді вирізняють класи динамічних ігор з *майже довершеною інформацією* (кожен гравець знає все про решту гравців), з *повною пам'яттю* (кожен гравець не забуває те, що він знав раніше, у тім числі ходи, здійснені ним раніше) тощо.

Як слідує з прикладу 7.4, під час аналізу динамічних ігор з *неповною інформацією* неможливо обійтися без нормальної форми гри. За допомогою прикладів 7.1 – 7.4 нами продемонстровано можливість переходу від розгорнутої до нормальної форми для довільної динамічної гри.

7.1.3. Стратегії гравців

Зазвичай, динамічні ігри зображають у розгорнутій формі. Ця форма передбачає наявність таких компонент:

1) скінченної множини *гравців* $K = \{1, 2, \dots, k\}$;
2) дерева гри Γ;
3) розподілу вершин (позицій) між гравцями;
4) розбиття на інформаційні множини вершин кожного l-го гравця ($l = \overline{1,k}$);
5) розподіл виграшів між гравцями.

Дерево гри Γ складається зі скінченної множини вершин X і множини дуг (ходів) $A \subset X \times X$. Серед вершин множини X вирізняють початкову вершину (корінь дерева) $x_0 \in X$. Множину дуг, які виходять з вершини $x \in X$, позначають $A(x)$. Оскільки напрям руху на дереві – це рух від кореня, то стрілки на дугах, зазвичай, не зображають. Множину вершин X розбивають на ($k+1$)-у підмножину:

$$X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \text{ де } \bigcup_{l=1}^{k+1} X_l = X;\ X_r \bigcap X_p = \varnothing,\ r \neq p.$$

Множина X_l містить вершини, в яких здійснює хід l-й гравець ($l = \overline{1,k}$), а множина X_{k+1} – це множина кінцевих (термальних) позицій гри. Вершину $x \in X$ називають термальною, якщо $A(x) = \varnothing$. Множину термальних вершин надалі позначатимемо T (тобто $X_{k+1} = T$). Множину X_l ще інколи називають *множиною* *черговості* (ходів) l-го гравця ($l = \overline{1,k}$). Множину X_l ($l = \overline{1,k}$), у свою чергу, розбивають на n_l *інформаційних* підмножин

$$H_l^{(1)},..., H_l^{(n_l)}, \text{ де } \bigcup_{i=1}^{n_l} H_l^{(i)} = X_l;\ H_l^{(r)} \bigcap H_l^{(p)} = \varnothing,\ r \neq p.$$

Для кожної інформаційної множини задається множина доступних ходів. Опис цієї множини залежить від типу динамічної гри. Для кожної термальної вершини $t \in T$ зазначають k –вимірний вектор $\overline{g}(t)$, l-та координата якого $g_l(t)$ визначає виграш l-го гравця ($l = \overline{1,k}$), якщо гра закінчується у вершині t.

У прикладах 7.1 – 7.4 під *стратегією* гравця ми розуміли деякий послідовний набір ходів. Розглянемо це поняття детальніше на прикладі динамічних ігор з *довершеною інформацією*.

Нехай $x_0 \in X_{l_1}$, тоді у вершині (позиції) x_0 ходить гравець l_1 ($l_1 = \overline{1,k}$) та обирає вершину $x_1 \in F_{x_0}$ (F_{x_0} – множина тих позицій, які можуть реалізуватися безпосередньо після позиції x_0).

Якщо $x_1 \in X_{l_2}$, то у вершині x_1 ходить гравець l_2 ($l_2 = \overline{1,k}$) і обирає вершину $x_2 \in F_{x_1}$ і т.д. Гра припиняється, як тільки досягається кінцева вершина $x_p \in X_{k+1}$ (тобто $F_{x_p} = \varnothing$).

У результаті послідовного вибору позицій однозначно реалізується деяка послідовність $x_0, x_1,..., x_p$, яка визначає *шлях* у дереві гри від кореня до деякої з термальних вершин. Цей шлях називають *партією*.

В іграх з довершеною інформацією гравець l ($l = \overline{1,k}$) під час вибору ходу у деякій вершині $x \in X_l$ чітко знає, що він перебуває саме у цій позиції і може *однозначно* обрати наступний хід.

Означення 7.1. Однозначне *відображення* u_l, яке кожній вершині $x \in X_l$ ставить у відповідність деяку вершину $y \in F_x$, називають *чистою стратегією* l-го гравця ($l = \overline{1,k}$).

Множина чистих стратегій l-го гравця ($l = \overline{1,k}$) у динамічній грі з довершеною інформацією – це *докладний план* дій гравця: що він робитиме у *кожній* вершині, в якій хід належить йому. Якщо $X_l = \bigcup\limits_{i=1}^{n_l} H_l^{(i)}$, то цей план міститиме перелік $\left|H_l^{(1)}\right| \times \ldots \times \left|H_l^{(n_l)}\right|$ чистих стратегій, де $\left|H_l^{(i)}\right|$ – кількість вершин в інформаційній множині $H_l^{(i)}$ $(i = \overline{1,n_l})$.