6. МОДЕЛІ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ ЗУР

1. Загальні положення

Задача ***багатокритеріальної оптимізації***:

$$f_i(\bar{x}) \to \max_{\bar{x} \in D}, \quad \bar{x} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n); \quad i = \overline{1, m} \qquad (1)$$

$\bar{x} \in D \subseteq X \subset R^n$ (**D – область допустимих значень;**

системи рівнянь / нерівностей)

$$f_i(\bar{x}) \to \min_{\bar{x} \in D} \Rightarrow -f_i(\bar{x}) \to \max_{\bar{x} \in D}$$

Приклад 1. $f_i(\bar{x}) = x_i \to \max\limits_{\bar{x}\in D} \quad (i = \overline{1,2})$

$$D = \{\, \bar{x} = (x_1, x_2) : (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \le 1\}$$

➢ $\max\limits_{\bar{x}\in D} f_1(\bar{x}) = f_1(\bar{a}) = 3;\ \max\limits_{\bar{x}\in D} f_2(\bar{x}) = f_2(\bar{b}) = 3,$

$\bar{a} = (3,2),\ \bar{b} = (2,3);\ \bar{a} \ne \bar{b} \Rightarrow$ **задача не має розв.**! ≺

ОУР – ***принцип компромісу*** $\Rightarrow$ **відкидання** ***домінованих*** **альтернатив** $\oplus$ ***узагальнений*** **скалярний критерій**

2. Порівнюваність критеріїв

Критерії – ***числові***

Порівнюваність **значень різних критеріїв:**

$$f_i(\bar{x}) \to \hat{f}_i(\bar{x}):\ 0 \le a \le \hat{f}_i(\bar{x}) \le b,\ \ \forall \bar{x} \in D,\ i = \overline{1,m} \qquad (2)$$

$$\hat{f}_i(\bar{x}) = a + (b-a)\cdot \frac{f_i(\bar{x}) - \min\limits_{\bar{t}\in D} f_i(\bar{t})}{\max\limits_{\bar{t}\in D} f_i(\bar{t}) - \min\limits_{\bar{t}\in D} f_i(\bar{t})},\ \ i = \overline{1,m} \qquad (3)$$

$\hat{f}_i(\bar{x})$ $(i = \overline{1,m})$ **на** $[a, b]$ **(переважно** $a = 0$, $b = 1$**)**

Приклад 2. $\boldsymbol{D} = \{\bar{\boldsymbol{x}}_1, \bar{\boldsymbol{x}}_2, \bar{\boldsymbol{x}}_3\}$; $\bar{\boldsymbol{f}} = (\boldsymbol{f}_1; \boldsymbol{f}_2; \boldsymbol{f}_3)$:

$\bar{\boldsymbol{f}}(\bar{\boldsymbol{x}}_1) = (10; 10; 3)$; $\bar{\boldsymbol{f}}(\bar{\boldsymbol{x}}_2) = (8; 8; 10)$; $\bar{\boldsymbol{f}}(\bar{\boldsymbol{x}}_3) = (0; 0; 0)$

Здійснити нормування критеріїв на [0, 1].

- $f_1 = \{10; 8; 0\}$, $f_2 = \{10; 8; 0\}$, $f_3 = \{3; 10; 0\}$ $\quad \to [0; 1]$

$$\hat{f}_1 = \hat{f}_2 = \{\frac{10-0}{10-0}; \frac{8-0}{10-0}; \frac{0-0}{10-0}\} = \{1; 0{,}8; 0\}$$

$$\hat{f}_3 = \{\frac{3-0}{10-0}; \frac{10-0}{10-0}; \frac{0-0}{10-0}\} = \{0{,}3; 1; 0\}$$

$\bar{\hat{\boldsymbol{f}}}(\bar{\boldsymbol{x}}_1) = (1; 1; 0{,}3)$; $\bar{\hat{\boldsymbol{f}}}(\bar{\boldsymbol{x}}_2) = (0{,}8; 0{,}8; 1)$

$\bar{\hat{f}}(\bar{x}_3)$ = (0; 0; 0). *Сумарна оцінка*: $\bar{x}_2 \succ \bar{x}_1$ **(2,6 > 2,3)**

Delete $\bar{x}_3$ – ***найгірший*** **за усіма критеріями**.

$$f_1 = \{10;8\},\ f_2 = \{10;8\},\ f_3 = \{3;10\} \qquad \to [0;\ 1]$$

$$\hat{f}_1 = \hat{f}_2 = \{\frac{10-8}{10-8};\ \frac{8-8}{10-8}\} = \{1;\ 0\};\ \hat{f}_3 = \{\frac{10-3}{10-3};\ \frac{3-3}{10-3}\} = \{1;\ 0\}$$

$\bar{\hat{f}}(\bar{x}_1)$ = (1, 1, 0); $\bar{\hat{f}}(\bar{x}_2)$ = (0, 0, 1) $\Rightarrow$ $\bar{x}_1 \succ \bar{x}_2$?! $\prec$

Приклад 2 $\Rightarrow$ ***усунення*** **альтернатив, які *домінуються* усіма іншими (*гірші* за інші альтернативи)**

3. Домінування альтернатив

1. Відношення домінування за *Парето* (R_p або $\succ_p$)

⊙ $\bar{x}_t \succ_p \bar{x}_w$, **де** $\bar{x}_t, \bar{x}_w \in D$, **якщо**

$$\forall i: f_i(\bar{x}_t) \geq f_i(\bar{x}_w) \ (i = \overline{1, m}) \qquad (4)$$

і серед нерівностей (4) *хоча б одна* строга!

$\bar{x}_w$ **– домінована (*гірша* за іншу)**

2. Відношення домінування за *Слейтером* (R_s / $\succ_s$)

⊙ $((\bar{x}_t, \bar{x}_w) \in R_s \,/\, \bar{x}_t \succ_s \bar{x}_w)$, **якщо**

$$\forall i:\ f_i(\bar{x}_t) > f_i(\bar{x}_w),\ \text{де}\ i = \overline{1, m}. \qquad (5)$$

⊙ $\bar{x}_t, \bar{x}_w \in D$ **є** ***еквівалентними*** $(\bar{x}_t \sim \bar{x}_w)$, **якщо** $\forall i:\ f_i(\bar{x}_t) = f_i(\bar{x}_w),\ i = \overline{1, m}.$

З $\bar{x}_t \sim \bar{x}_w$ **не випливає** $\bar{x}_t = \bar{x}_w$.

⊙ **Якщо** $\exists\ \bar{x}_0 \in D\ \ \forall\ \bar{x} \in D: (\bar{x}, \bar{x}_0) \notin R_p$, **то** $\bar{x}_0$ – ***ефективний*** **(*Парето-оптимальний*) розв'язок (1)**

⊙ **Множину ефективних (*множину Парето-оптимальних / множину Парето*) розв'язків познач. *P*(*D*).**

***P*(*D*) – альтернативи, *взаємно недоміновані* за відношенням Парето (серед них можуть ∃ еквівалентні).**

⊙ **Образ $P(D) \subset R^m$ називають множиною *ефективних оцінок* (позначення $P(\bar{f})$: $P(\bar{f}) = \bar{f}(P(D))$.**

⊙ **Якщо** $\exists\ \bar{x}_1 \in D\ \forall\ \bar{x} \in D$: $(\bar{x}, \bar{x}_1) \notin R_s$, **то** $\bar{x}_1$ – ***мало-ефективний*** (***опт-ний за Слейтером***) **розв'язок (1).**

⊙ **Множину малоефективних розв'язків (*множину Слейтера*) позначають** $S(D)$.

⊙ **Образ** $S(D) \subset R^m$ **називають множиною *малоефек-тивних оцінок*** (**позначення** $S(\bar{f})$): $S(\bar{f}) = \bar{f}(S(D))$

Пр. 2: $\bar{f}(\bar{x}_1) = (10;\ 10;\ 3)$; $\bar{f}(\bar{x}_2) = (8;\ 8;\ 10)$; $\bar{f}(\bar{x}_3) = (0;\ 0;\ 0)$

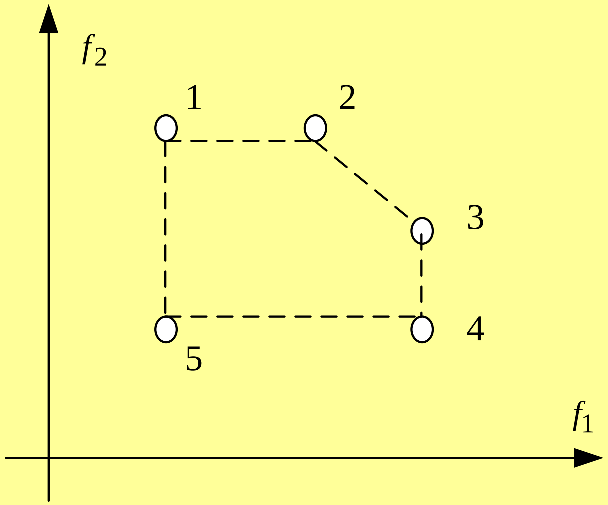
$\bar{x}_3$ – ***домінована*** **альт-ва** (за Парето / Слейтером)

$\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ – ***взаємно-недоміновані*** (за Парето / Слейтером)

Пр-п *Парето/Слейтера*–вилучення *домінованих* ал.

$$\boxed{\boldsymbol{P(D) \subseteq S(D)}}$$

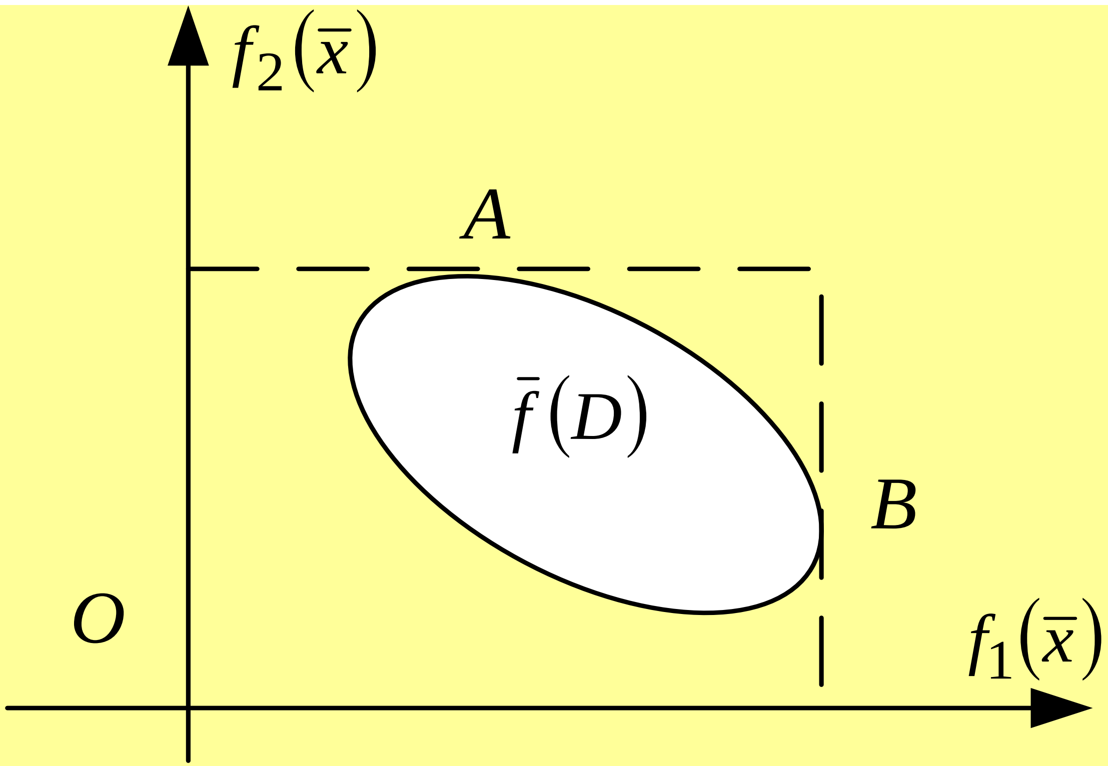
Приклад 3. $\boldsymbol{f = (f_1, f_2)}$ **на** $\boldsymbol{D = \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_5\}}$. $\boldsymbol{P(D)/S(D)}$?



➢ $\bar{x}_1 \succ_p \bar{x}_5;\ \bar{x}_2 \succ_p \bar{x}_5;\ \bar{x}_2 \succ_p \bar{x}_1;\ \bar{x}_3 \succ_p \bar{x}_4;\ \bar{x}_2 \succ_s \bar{x}_5.$

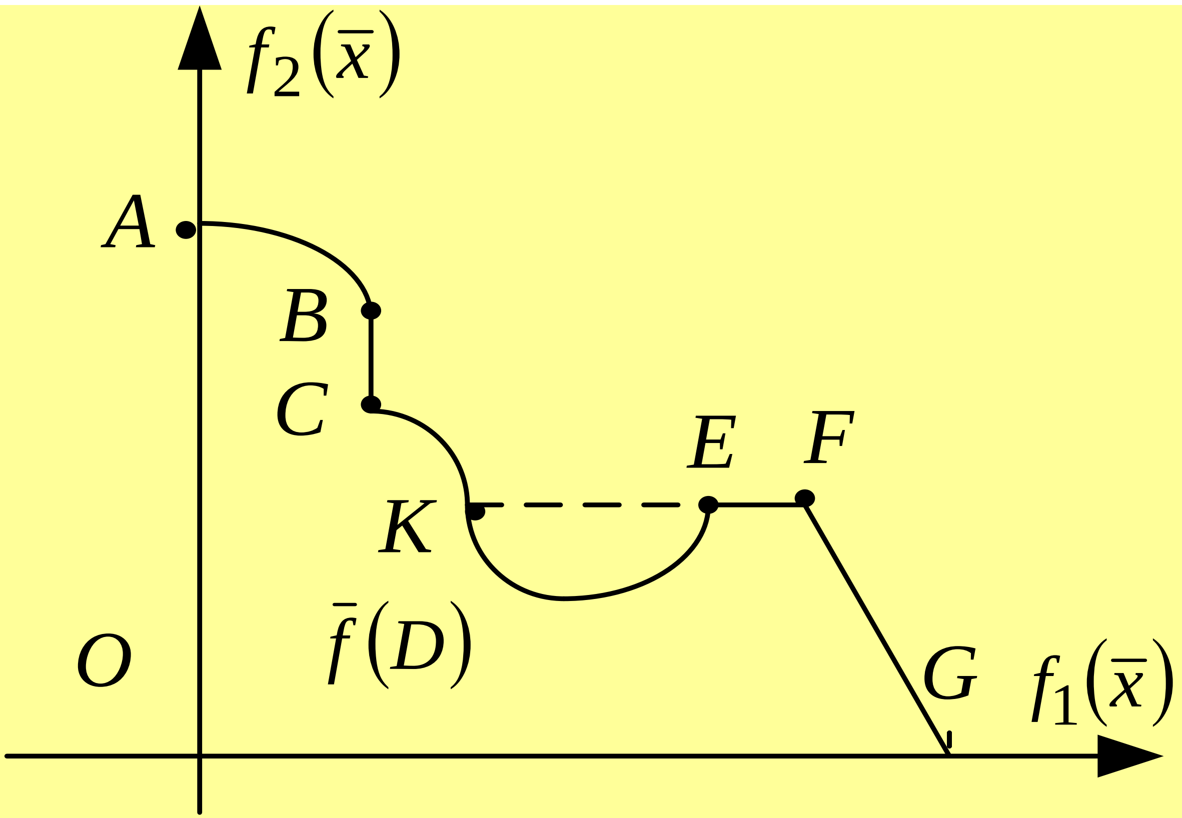
$P(D) = \{\bar{x}_2; \bar{x}_3\} \Rightarrow$ **образи на *північно-східній* межі**

$S(D) = \{\bar{x}_1; \bar{x}_2; \bar{x}_3; \bar{x}_4\} \Rightarrow$ **–//– *півн+ півн-схід + схід***



Дотичні – в одній точці!

$\boldsymbol{P(\bar{f}) = S(\bar{f})}$**= дуга *AB* (*північно-східна* межа)**



P*(*f̄*) = дуги *AB* + *CK* (без точок *C* і *K*) + *FG

S*(*f̄*) = дуги *ABCK* + *EFG

Визначення **множин Парето і Слейтера**

D **– скінченна ⇒ *перебирання*** **(∀ кількості** $f_i(\cdot)$**)**

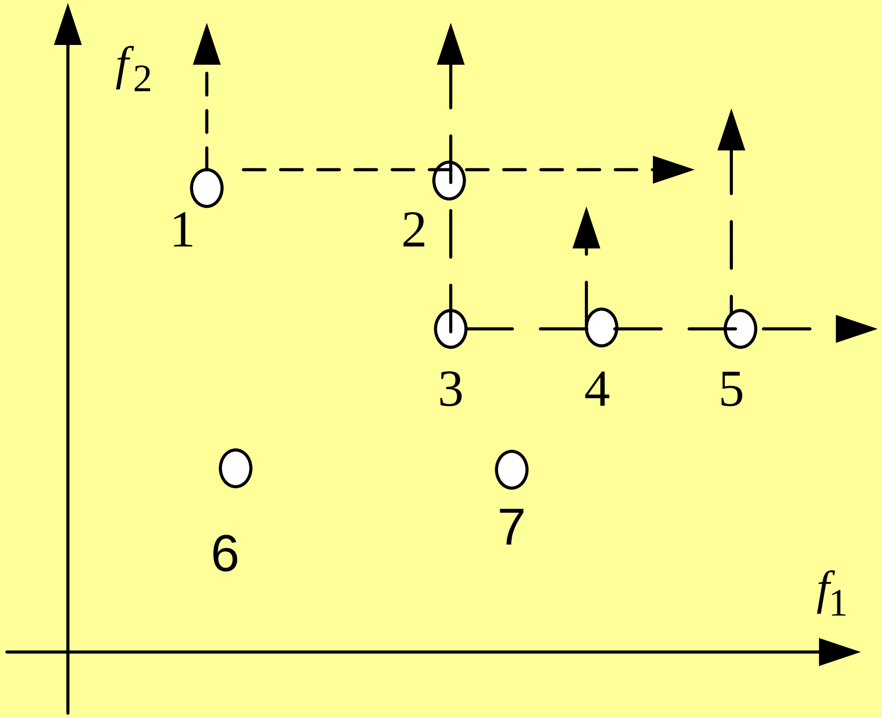
Приклад 4.1. Множини Слейтера/Парето?

Номер альтернативи	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_1(\overline{x})$	9	7	6	9	11	13	3	7	10
$f_2(\overline{x})$	2	–17	0	3	1	–5	–1	3	1
Слейтера	+	–	–	+	+	+	–	+	+
Парето	–	–	–	+	+	+	–	–	–

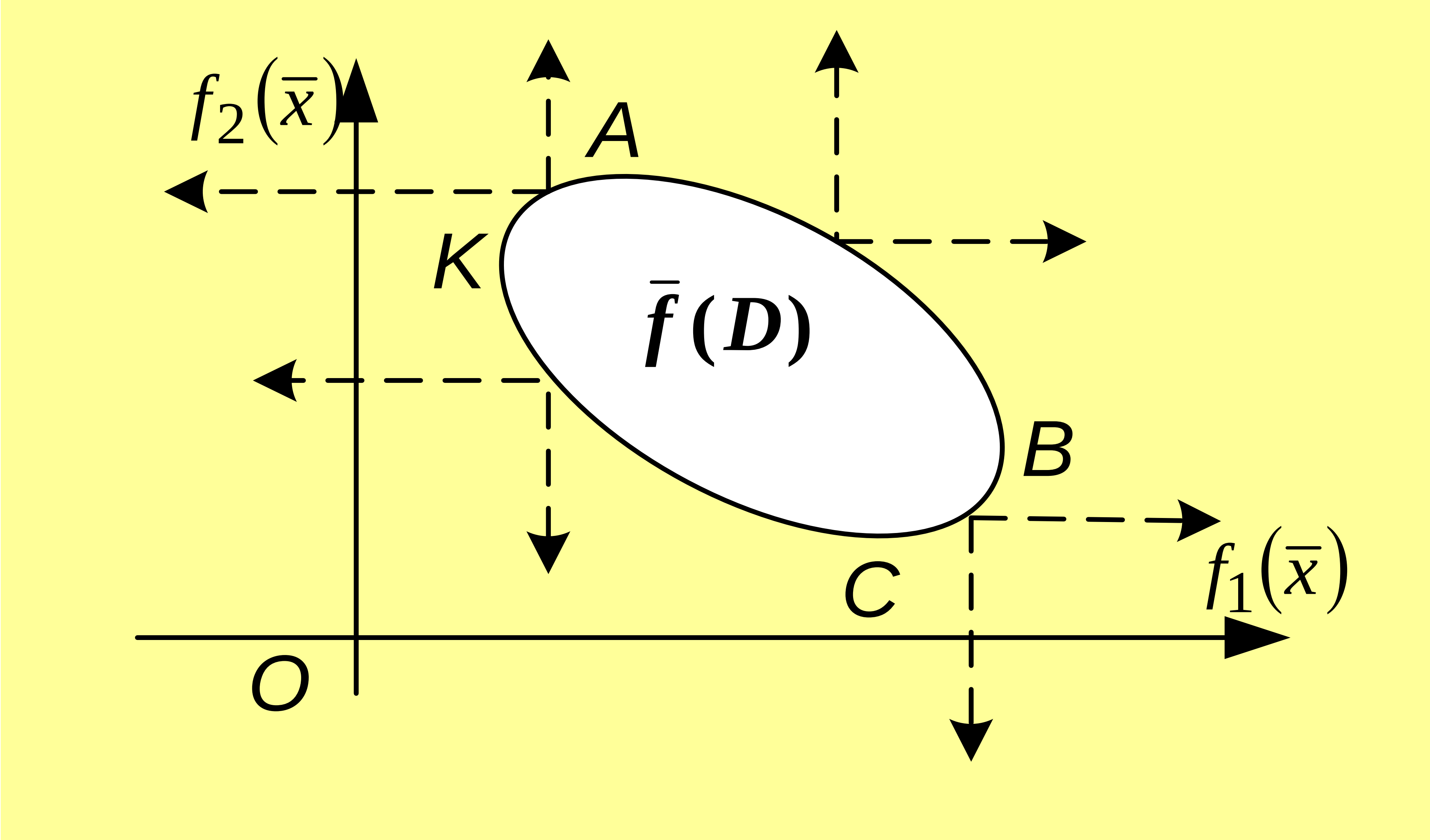
$S(D) = \{\overline{x}_1; \overline{x}_4; \overline{x}_5; \overline{x}_6; \overline{x}_8; \overline{x}_9\}$; $P(D) = \{\overline{x}_4; \overline{x}_5; \overline{x}_6\}$ ∢

$m = 2$ **⇒ *графічниий*** **спосіб**

Приклад 5. Цільові функції –*максимізувати*.



- $\boldsymbol{P(D)} = \{\bar{x}_2; \bar{x}_5\}, \quad \boldsymbol{S(D)} = \{\bar{x}_1; \bar{x}_2; \bar{x}_3; \bar{x}_4; \bar{x}_5\}$



$f_2(\overline{x})$
A
K
$\bar{f}(D)$
B
C
$f_1(\overline{x})$
O

Комбінації критеріїв	$P(\bar{f})$
$f_1, f_2 \to \max\limits_{\bar{x} \in D}$	**BA**
$f_1 \to \min\limits_{\bar{x} \in D}; f_2 \to \max\limits_{\bar{x} \in D}$	**AK**
$f_1, f_2 \to \min\limits_{\bar{x} \in D}$	**KC**
$f_1 \to \max\limits_{\bar{x} \in D}; f_2 \to \min\limits_{\bar{x} \in D}$	**CB**

4. *Метод лінійного згортання критеріїв*

$$F(\overline{\alpha}, \overline{x}) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(\overline{x}) \to \max_{\overline{x} \in D}; \quad \overline{\alpha} \in A, \qquad (6)$$

де $A = \left\{ \overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^T \;\middle|\; \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \right\}.$

Теорема 1. Розв'язок (6) є *ефективним* вектором.

➢ ***Від супротивного*. $\overline{x}_0 \in D$ – р-зок (6) і $\exists\, \overline{x}_1 \in D$:**

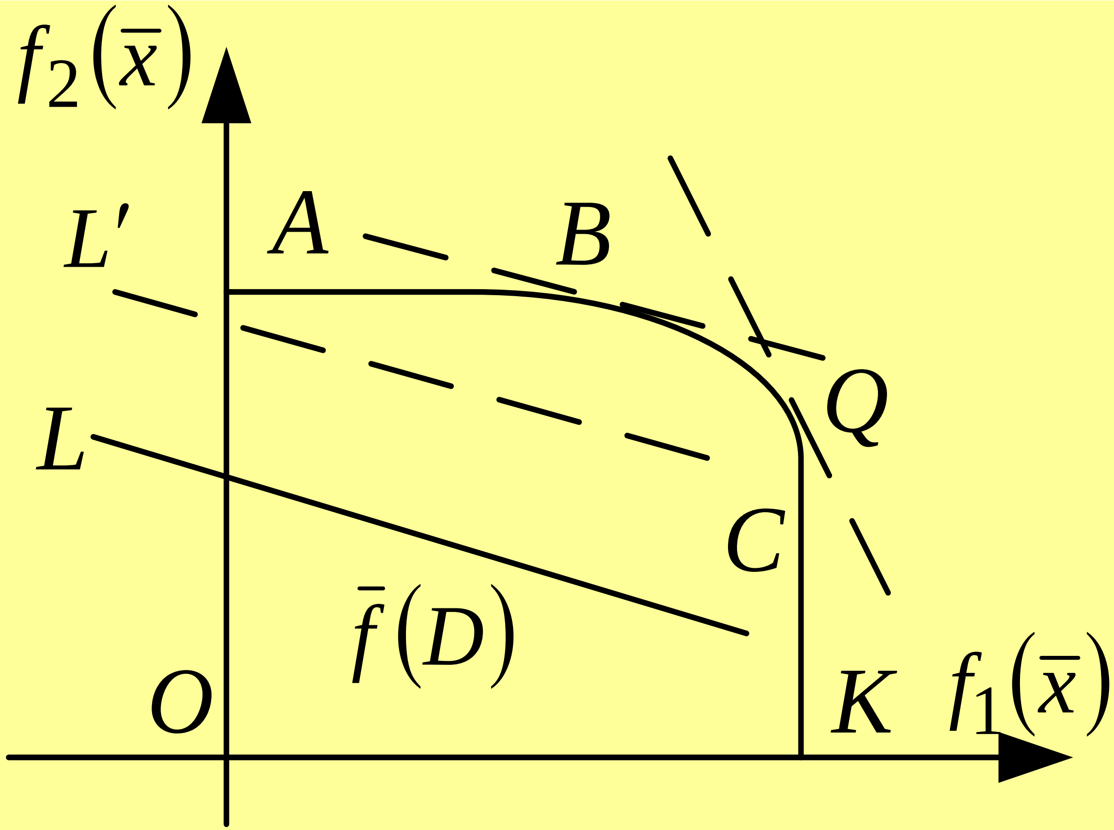
$$f_i(\overline{x}_1) \geq f_i(\overline{x}_0),\ \exists\, i = s:\ f_i(\overline{x}_1) > f_i(\overline{x}_0) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(\bar{x}_1) > \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(\bar{x}_0)$$

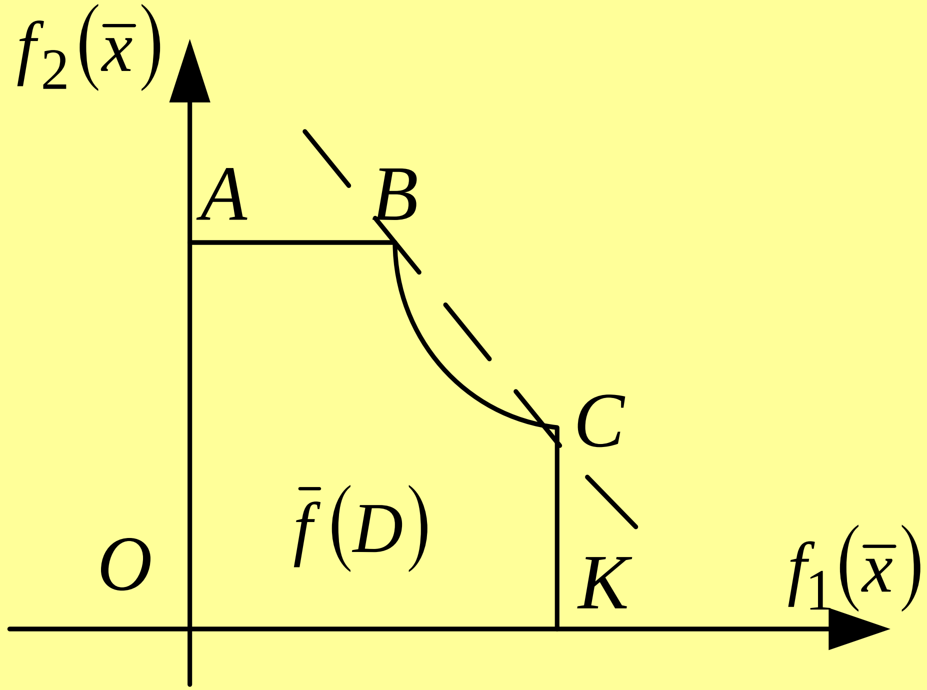
$(\bar{x}_0$ ***<u>не максимізує</u>*** $F(\bar{\alpha}, \bar{x})$, ***нптр***$)$ $\prec$

Геометричний зміст:

$$h(f_1, f_2) = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = c = \text{const}; \quad \bar{\alpha} \in A \qquad (7)$$



Кутовий коефіцієнт нахилу прямої $L = -\alpha_1/\alpha_2$



BC **–** **ефективні оцінки, та жодна з них (окрім *B*, *C*)**

не може бути точкою дотику ліній рівня.