# 7. МОДЕЛІ ЗУР В УМОВАХ КОНФЛІКТУ

***Конфлікт*** – **процес зіткнення інтересів декількох сторін, які беруть участь в операції. Необхідно**:

- **ідентифікувати *учасників* конфлікту**;
- **визначити *взаємозв'язки* між ними**;
- **виокремити можливі *дії***;
- **визначити *переваги* кожного учасника**;
- **описати *інформацію*, яка є в учасників конфлікту + можливість *обміну інформацією***.

***Гра*** **–ідеалізована математична модель колективної поведінки: декілька *учасників* (*гравців*) одночасно впливають на результат гри ( їхні інтереси можуть не збігатися).**

**Завдання ТІ: *опис* та *розв'язання* конфліктів ⇒ побудова *компромісних* взаємовигідних рішень, які цілковито або частково *погоджуватимуть* інтереси усіх гравців.**

**Опис *гри* (моделі конфліктної ситуації):**

1) **виокремлення множини *гравців*;**

2) **визначення множини *допустимих дій* (*стратегій*) кожного гравця;**

3) **визначення *переваг* кожного гравця залежно від сукупних дій усіх гравців;**

4) **встановлення *рівня інформованості* гравців про стратегії та переваги інших гравців;**

5) **встановлення *порядку ходів*.**

**Коротко**:

1) ***хто*** **бере участь у грі** (***гравці***);
2) ***що можуть*** **гравці**;
3) ***чого хочуть*** **гравці**;
4) ***що знають*** **гравці**;
5) ***коли*** **гравці** ***обирають*** **дії**.

**Опис 1 – 3 формалізують** (***множини***, ***функції***, ***графи***);

**інформованість + порядок ходів ⇔ тип гри**

$K = \{1, 2, \ldots, k\}$ – **множина** ***гравців***

$X_l$ – **множина** ***стратегій*** ***l*-го гравця (може відобража-тися змінною, вектором, функцією тощо)**

**У грі** ***кожен*** **гравець** $l \in K$ ***обирає*** **стратегію** $x_l \in X_l$

$\Rightarrow$ ***набір стратегій*** (***ситуація гри***): $x = (x_1, \ldots, x_k)$

$X$ – **множина усіх** ***ситуацій гри***:

$$X = \prod_{l=1}^{k} X_l = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k \qquad (7.1)$$

$\forall\, l \in K:\ g_l : X \to R$ **(функція** ***виграшу*****)**

**<u>Аксіома</u> про *раціональність* гравців: кожен гравець прагне *максимізувати* власний виграш**

**Гру задає набір:**

$$\Gamma = \langle K, \{X_l \mid l = \overline{1,k}\}, \{g_l \mid l = \overline{1,k}\} \rangle \qquad (7.2)$$

## 7.2. Класифікація ігор

**1) *<u>Кількість гравців</u>* (*осіб*): ігри *2-х* і *багатьох* осіб**

**2) *<u>взаємовідносини між гравцями</u>*: *кооперативні* (*коаліційні*) та *безкоаліційні***

***Кооперативна теорія безкоаліційних*** **ігор** $\Rightarrow$ ***тим-часові*** **об'єднання гравців у коаліції в процесі гри (поділ виграшів / узгодження рішень).**

***Безкоаліційна гра*** $\leftrightarrow$ ***стратегічна гра*** $\Rightarrow$ **увага на аналіз *стратегій* гравців**

***Кооперативна гра*** $\Rightarrow$ **увага на аналіз *системи переваг***

**3)** ***Антагоністична гра*** **(гра з *нульовою сумою*):**

**2 особи і** $g_1(x) = -g_2(x)$.

**4) *Скінченна гра* – множини стратегій *усіх* гравців скінченні; *нескінченна* – множина стратегій хоча б 1-го гравця є нескінченною**

**5) *Форми* зображення гри:**

***нормальна* і *позиційна форми* (безкоаліційні);**

**з *характеристичною функцією* (коаліційні).**

***Нормальна* форма ⇒ стратегія кожного гравця – *однокроковий* вибір, а *позиційна* – *багатокроковий***

**Головні компоненти нормальної форми ⇒ (7.2)**

**6)** ***Статична гра*** **– кожен гравець робить <u>тільки</u> один хід *одночасно* з іншими гравцями і *незалежно* від них (*хід = стратегія*)**

***Динамічна гра*** **– гравці ходять *за чергою* один за одним (*стратегія = послідовність ходів*)**

***Диференціальна гра*** **– динамічна гра, що моделюється диференціальними рівняннями**

**Статичні ігри ↔ *нормальна* ф., динамічні ↔ *позиційна* ф. (дерево); норм. ⇒ позиційної (і навпаки)**

**7) Ігри з *неперервними* функціями виграшів: класи *опуклих*, *увігнутих*, *опукло-ввігнутих* ігор.**

**8) За *інформаційною* структурою:**

***статичні*** **⇒ ігри з *вичерпною* або *частковою* ін-цією;**

***динамічні*** **⇒ ігри з *довершеною* або *недовершеною* інформацією, із *повною* або *частковою* пам'яттю тощо.**

**9) Зовнішній *контекст*: 1) *унікальні*; 2) ігри *популяцій* (знання про ігри, що відбувалися раніше); 3) *повторювані* ігри у тому ж складі (обмін погрозами).**

**У класичній теорії ігор гравців, апріорі, вважають *раціональними*, а знання про раціональність гравців є *спільним* (загальним) *знанням*.**

**Термін "*спільне знання*" (common knowledge), позначає факт, який задовольняє таким вимогам:**

1) **про нього відомо *усім* гравцям;**
2) ***усім* гравцям відомо 1;**
3) ***усім* гравцям відомо 2 і т.д. до безконечності.**

**Усі *параметри* гри теж є спільним знанням**

**У реальності можливі випадки, в яких кожен гравець може мати *власне уявлення* про параметри гри (тобто гравець бере участь в грі, однак об'єктивно не знає, в якій саме) ⇒ *рефлексивні ігри***

## 7.3. Приклади ігор у нормальній формі

**Відображення значень виграшів <u>двох</u> гравців у *статичній скінченній* грі: $g_1(x)$, $g_2(x)$ ⇒ *таблиця* (*матриця*) виграшів: *рядки* – стратегії 1-го гравця;**

***стовпці* – стратегії 2-го гравця**

**1-й обирає стратегію $i$ ($i = \overline{1, m}$), а 2-й – $j$ ($j = \overline{1, n}$) $\Rightarrow$**

**у клітинці ($i, j$) виграші – пару чисел ($g_1(i, j)$; $g_2(i, j)$)**

$\Rightarrow$ ***біматрична гра***

**Приклад 7.1 (<u>приклад 4.8</u>).**

| 1 \ 2 | 1 | 2 |
|---|---|---|
| **1** | **(–1, 1)** | **(1, –1)** |
| **2** | **(1, –1)** | **(–1, 1)** |

**Функції виграшів гравців:**

$$g_1(i,j)=\begin{cases}-1; & i=j,\\ 1; & i\neq j,\end{cases}\quad g_2(i,j)=\begin{cases}1; & i=j,\\ -1; & i\neq j,\end{cases}\quad i,j=1;2 \prec$$

**Приклад 7.2** (***координація***). ➢ **1 – футбол**; **2 – балет**.

| **1 \ 2** | **1** | **2** |
|---|---|---|
| **1** | **(3, 2)** | **(0, 0)** |
| **2** | **(0, 0)** | **(2, 3)** |

$$g_1(i,j)=\begin{cases}3; & i=j=1,\\ 2; & i=j=2,\\ 0; & i\neq j,\end{cases}\quad g_2(i,j)=\begin{cases}2; & i=j=1,\\ 3; & i=j=2,\ i,j=1;2\\ 0; & i\neq j,\end{cases}$$

**Приклад 7.3** (**<u>приклад 4.9</u>**, ***дилема ув'язнених***). **Не зізнатися** (***стратегія 1***) **чи зізнатися** (***стратегія 2***):

➢ **Таблиця виграшів**:

| 1 \ 2 | **1** | **2** |
|---|---|---|
| **1** | **(–1, –1)** | **(–10, 0)** |
| **2** | **(0, –10)** | **(–7, –7)** |

**Приклад 7.4 (<u>приклад 4.10</u>, *перехрестя*). 1 – знизити швидкість до безпечної (*безпечна* стратегія);**

**2 – не знижувати швидкість (*ризикована* стратегія).**

- **Таблиця виграшів**:

| 1 \ 2 | 1 | 2 |
|---|---|---|
| **1** | **(1, 1)** | **(0, 3)** |
| **2** | **(3, 0)** | **(–9, –9)** |

**Приклад 7.5** (***держава та платник податків – ПП***).

**Прибуток *ПП* = 4 одиницям. Держава обирає податок: *В* = 50% або *Н* = 25%. ПП може заплатити / ухилитися від сплати податку (*р* = 50% податкові органи виявляють це й змушують заплатити весь податок і штраф = 1 одиниці). Виграш держави –очікуваний обсяг податкових надходжень, а виграш ПП – очікуваний прибуток (після сплати всіх податків і штрафів). Сформувати таблицю виграшів.**

- **Стратегії 1-*го* гравця (*ПП*): 1 – *платити* податки; 2 – *не платити* податки.**

***Стратегії 2-го гравця (держави)*: 1 – встановити *високий* податок; 2 – встановити *низький* податок.**

**Таблиця виграшів**:

| **1 \ 2** | **1** | **2** |
|---|---|---|
| **1** | **(2; 2)** | **(3; 1)** |
| **2** | **(2,5; 1,5)** | **(3; 1)** |

**Очікуваний виграш 1-*го* гравця**

$$\text{у ситуації } (2;\ 1)\text{: } 4\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=2{,}5;$$

$$\text{у ситуації } (2;\ 2)\text{: } 4\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}=3. \quad \prec$$

**Приклад 7.6**. **За умовами прикладу 7.5 сформувати таблицю виграшів, якщо податкові органи з імовірністю 75% виявляють ухиляння від сплати податків. Відобразити також цю біматричну гру у вигляді матриці виграшів**.

➢ **Таблиця виграшів**:

| 1 \ 2 | 1 | 2 |
|---|---|---|
| **1** | **(2; 2)** | **(3; 1)** |
| **2** | **(1,75; 2,25)** | **(2,5; 1,5)** |

**Очікуваний виграш 1-*го* гравця у ситуації (2; 1)**:

$4\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{3}{4}=1{,}75$;**у ситуації (2; 2)**: $4\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}=2{,}5$.

**Матриця виграшів**: $\begin{pmatrix} (2;2) & (3;1) \\ (1{,}75;2{,}25) & (2{,}5;1{,}5) \end{pmatrix}$ ⋖

## 7.4. Позиційна форма

**Приклад 7.7 (приклад 4.12).**

**Приклад 7.8 (приклад 4.14). Умови прикладу 7.7, однак на кожному ході гравцям дозволено брати 1, 2 або 4 сірники.**

- ***Дерево гри*** **(рис. 7.1) для 7-ми сірників.**

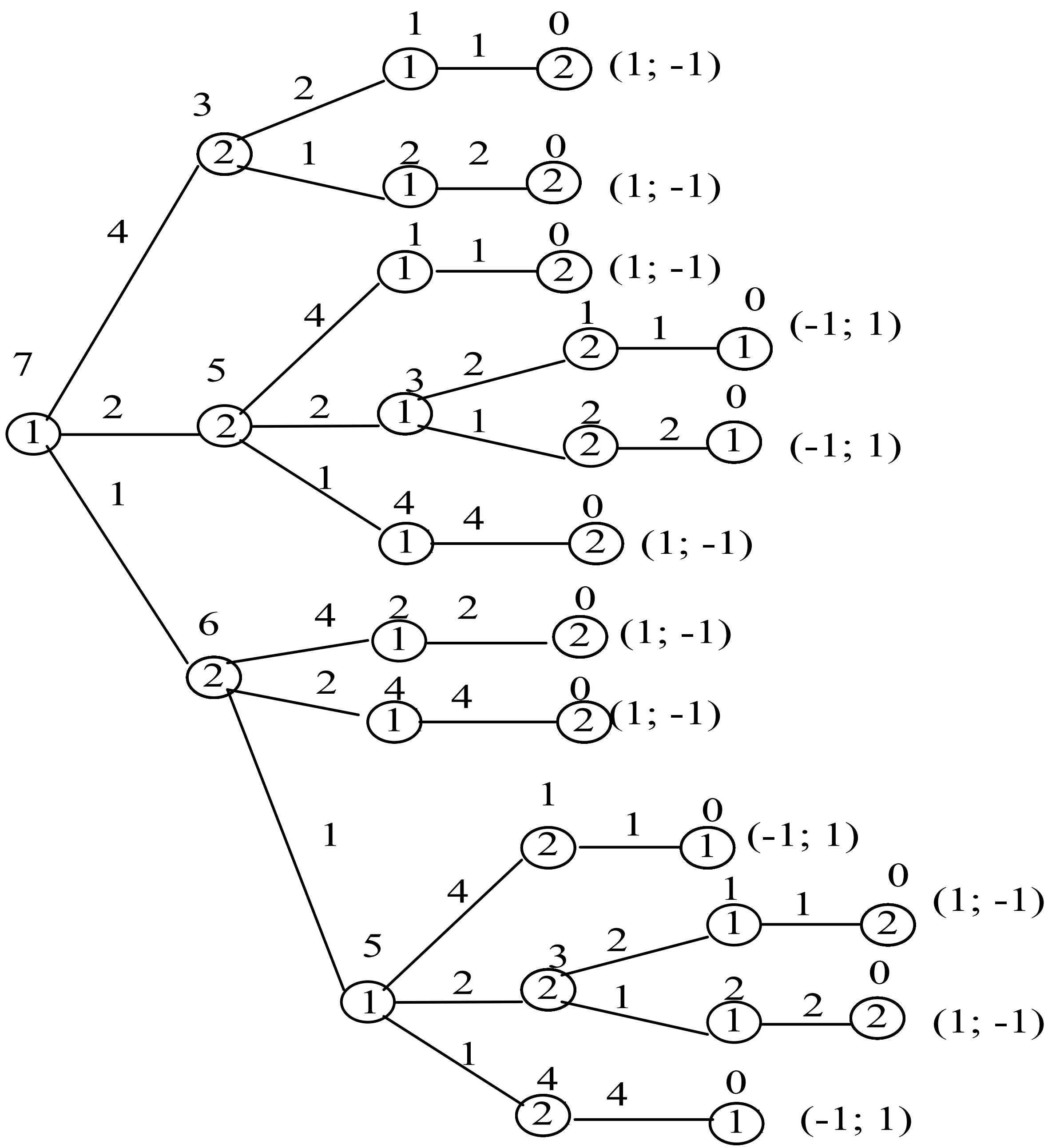

7
1
4
2
1
3
2
5
2
6
2
2
1
1
2
1
1
0
2
(1; -1)
1
2
1
2
2
0
2
(1; -1)
4
1
1
1
1
0
2
(1; -1)
2
3
1
2
1
1
2
1
1
0
1
(-1; 1)
1
2
2
2
2
0
1
(-1; 1)
1
4
1
4
0
2
(1; -1)
4
2
1
2
0
2
(1; -1)
2
4
1
4
0
2
(1; -1)
1
5
1
4
1
2
1
0
1
(-1; 1)
2
3
2
2
1
1
1
1
0
2
(1; -1)
1
2
1
2
0
2
(1; -1)
1
4
2
4
0
1
(-1; 1)

**Рис. 7.1.**

**Вершина дерева (*позиція*) – число = номеру гравця**, **який робить хід**.

***Вага вершини* – кількість сірників, які є у розпорядженні гравця.**

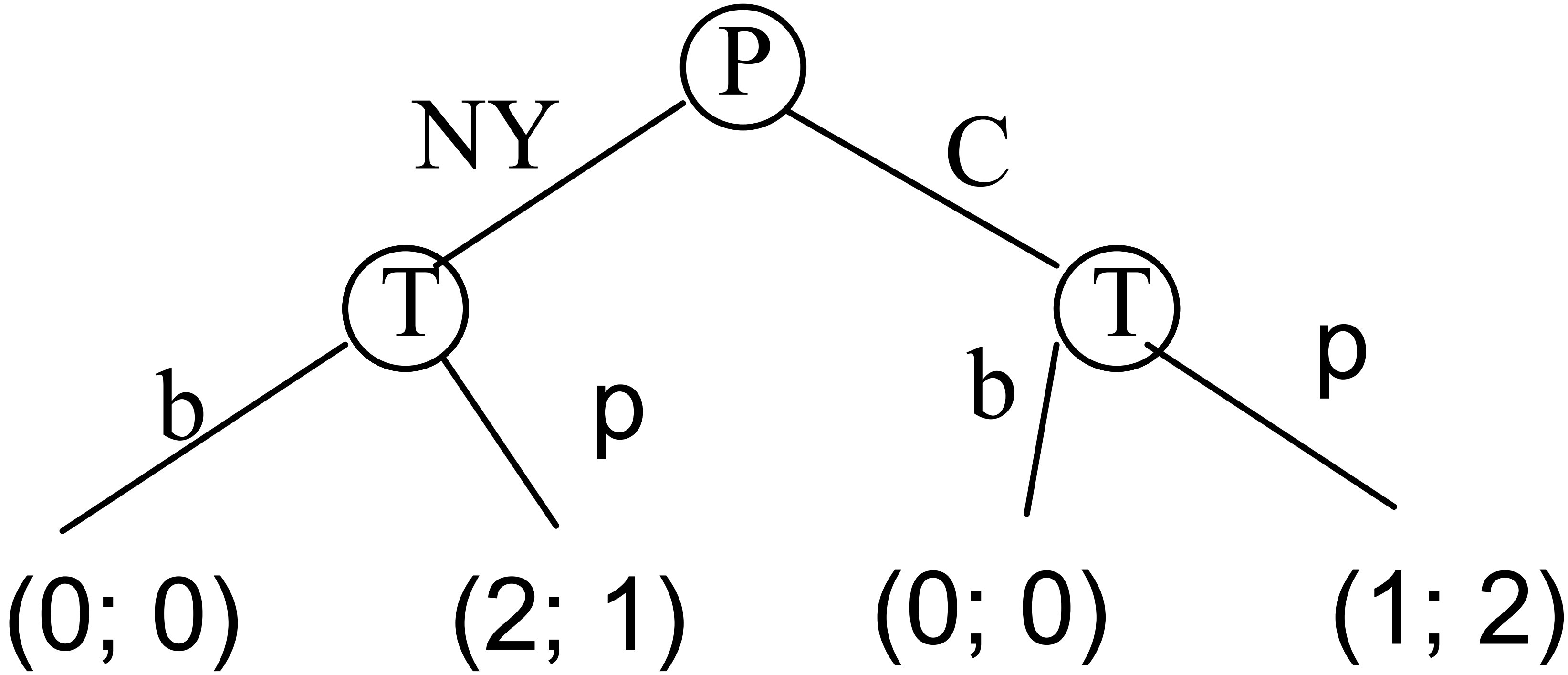
***Вага дуги* – кількість сірників, які вибирає гравець на цьому ході (*дузі*).**

**Вершина з вагою 0 – *кінцева* вершина (не можна зробити ходу)** $\Rightarrow$ ***листок* дерева** – **виграші гравців:** (***виграш_1-го_гравця***; ***виграш_2-го_гравця***).

**Якщо вага вершини = 3, то ця позиція є *програшною* для гравця, який у неї потрапив.**

**У грі з 20-ма сірниками *перший* гравець *виграє*. Для цього йому достатньо ставити другого гравця у *програшну позицію*, тобто стежити, щоб після його ходу кількість сірників була *кратною трьом* (зокрема, на початку гри йому необхідно взяти 2 сірники, щоб залишилося 18).** ≺

## Приклад 7.9




| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | NY; C | NY; C | NY; C | NY; C |
| | (*b*; *b*) | (*b*; *p*) | (*p*; *b*) | (*p*; *p*) |
| NY | (0; 0) | (0; 0) | (2; 1) | (2; 1) |
| C | (0; 0) | (1; 2) | (0; 0) | (1; 2) |