8. СТАТИЧНІ ІГРИ

8.1. Загальні положення

Статична гра – **кожен** **гравець ходить тільки** ***один*** **раз** ***одночасно*** **з іншими гравцями і** ***незалежно*** **від них. Після цього – розподіл виграшів згідно з** g_l.

Незалежний вибір стратегій ⇒ ***невизначеність*** **у грі**.

Означення 8.1. ***Біматрична*** **гра: 2 осіб,** ***кожен*** **обирає 1-у стратегію зі** ***скінченного*** **числа стратегій, а після цього отримує виграш (1-й – з матриці** A, **2-й –** B).

m **стратегій 1-го гравця і** ***n*** **стратегій 2-го гравця;**

парі стратегій (i, j) $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$ $\Rightarrow a_{ij}/b_{ij} \Rightarrow$ **окремо**

$A = (a_{ij})$ **і** $B = (b_{ij})$ **чи** ***суміщена*** **матриця** $\left((a_{ij}, b_{ij})\right)$.

Означення 8.2. ***Матрична*** **гра (*МГ*)– це біматрична гра, в якій для** $\forall\ (i, j)$ **суміщеної матриці:** $a_{ij} + b_{ij} = 0$.

МГ – ***скінченна антагоністична*** **гра, тільки** $A = (a_{ij})$:

1) $a_{ij} > 0$ – **виграш 1-го гравця** ($-a_{ij}$ – **програш 2-го);**
2) $a_{ij} = 0$ – **нічия;**
3) $a_{ij} < 0$ – **програш 1-го гравця** ($-a_{ij}$ – **виграш 2-го).**

Приклад 8.1. **Гру прикладу 7.1 зобразити у формі матричної гри**.

$$\succ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \prec$$

Позначення: $l \in K$ **обирає** $x_l \in X_l$, **тоді**:

$x_{-l} \in X_{-l}$ – **набір стратегій гравців з множини** $K \setminus \{l\}$,

(x_l, x_{-l}) – **набір стратегій усіх гравців, тобто**:

$$(x_l, x_{-l}) = (x_1, \ldots, x_{l-1}, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_k) = x \in X. \quad (8.1)$$

У (8.1) виокремлено довільного *l*-го гравця.

У біматричній грі: $(x_l, x_{-l}) \Rightarrow (i, j)$

Статична гра з вичерпною інформацією (***СГВІ***) **–кожен гравець знає *власні характеристики* (множини стратегій та функції виграшів) і *характеристики інших* гравців**.

Якщо у гравців відсутня інформація про *функції виграшів* інших гравців, то отримуємо *статичну гру з частковою інформацією* (***СГЧІ***).

8.2. Концепція домінування

8.2.1. Домінування стратегій

Означення 8.3. $x_l \in X_l$ **гравця** $l \in K$ **строго домінує над стратегією** $w_l \in X_l$ **цього ж гравця** ($x_l \succ w_l$):

$$\forall x_{-l} \in X_{-l} : \quad g_l(x_l, x_{-l}) > g_l(w_l, x_{-l}). \qquad (8.2)$$

w_l ***строго домінується*** **(чи** ***строго домінована*** **страт.);**

SND_l **– мн-на** ***строго недом. ст.*** **(*СНС*) гравця** $l \in K$;

множина ***ситуацій*** **СНС гравців:** $SND = \prod_{l=1}^{k} SND_l$.

Означення 8.4. $x_l \in X_l$ **гравця** $l \in K$ $(l = \overline{1,k})$ **домінує** (**не строго чи слабо**) **над стратегією** $w_l \in X_l$ $(x_l \succeq w_l)$:

$$\forall x_{-l} \in X_{-l} : g_l(x_l, x_{-l}) \geq g_l(w_l, x_{-l}), \qquad (8.3)$$

де <u>хоча б одна</u> з нерівностей (8.3) є строгою.

w_l ***домінується*** **(чи *домінована* стратегія);**

ND_l **– мн-на *недомінованих страт*. (*НС*) гравця** $l \in K$;

множина *ситуацій* НС гравців: $ND = \prod_{l=1}^{k} ND_l$.

Домінування стратегій (строго/слабо) – ∀ типу СГ!

$\forall$ дві стратегії гравця $l \in K$ задовольняють (8.2) $\Rightarrow$

водночас задовольнятимуть і (8.3)

Кількість **елементів *SND*$_l$ $\geq$ кількості елементів *ND*$_l$**

$\Rightarrow$ $ND_l \subseteq SND_l$, отож $ND \subseteq SND$

У біматричній грі: верхній індекс $\leftrightarrow$ № стратегії:

ситуація (2; 3) $\leftrightarrow$ $(x_1^{(2)}; x_2^{(3)})$,

ситуація (1; 4) $\leftrightarrow$ $(x_1^{(1)}; x_2^{(4)})$

Приклад 8.2. ND_1 і NSD_1 у грі:

$i \setminus j$	1	2	3
1	(2; 1)	(3; 3)	(5; 3)
2	(3; 2)	(3; 3)	(4; 2)
3	(2; 3)	(4; 4)	(5; 4)
4	(1; 4)	(3; 5)	(3; 5)
5	(1; 5)	(3; 6)	(4; 6)

➢

$$x_1^{(3)} \succeq x_1^{(1)}; x_1^{(2)} \succeq x_1^{(4)};$$

$$x_1^{(2)} \succeq x_1^{(5)} \Rightarrow ND_1 = \{2; 3\}$$

$$x_1^{(3)} \succ x_1^{(4)}; x_1^{(3)} \succ x_1^{(5)}$$

$$\Rightarrow SND_1 = \{1; 2; 3\} \prec$$

Означення 8.5. $x_l \in X_l$ – ***строго домінуюча стратегія*** **гравця** $l \in K$, **якщо вона** ***строго домінує*** **над** $\forall$ **іншою стратегією цього ж гравця**.

SD_l – **множина строго домінуючих стратегій гр.** $l \in K$

Лема 8.1. **У СГ** $SD_l \neq \varnothing \Leftrightarrow$

1) SD_l **містить** ***тільки одну*** **стратегію;**

2) $SND_l = SD_l$.

Оз-ня 8.6. **Якщо** $\forall l \in K\ \exists\ x'_l \in SD_l$, **то** $x' = (x'_l, x'_{-l})$ **–** ***ситуація рівноваги*** **(equilibrium) у строго домінуючих стратегіях (*СРСДС*).**

$$SDE = \prod_{l=1}^{k} SD_l$$

– множина СРСДС (лема 8.1 $\Rightarrow$ **містить** ***не більше*** **однієї СРСДС).**

Приклад 8.3 (прик. 5.1). $\begin{pmatrix} (3;\,4) & (4;\,1) & (5;\,6) \\ (2;\,5) & (3;\,7) & (3;\,8) \\ (1;\,8) & (2;\,3) & (2;\,9) \end{pmatrix}$; SDE?

- $x_1^{(1)} \succ x_1^{(2)}; x_1^{(1)} \succ x_1^{(3)} \Rightarrow \quad x_1^{(1)}$ – **строго домінуюча**;

$x_2^{(3)} \succ x_2^{(1)}; x_2^{(3)} \succ x_2^{(2)} \Rightarrow \quad x_2^{(3)}$ – **строго домінуюча**;

$SDE = \{(1;\,3)\}$. $\prec$

Озн-ня 8.7. $x_l \in X_l$ ***еквівалентна*** $w_l \in X_l$ $(x_l \sim w_l)$:

$$\forall\, x_{-l} \in X_{-l} : g_l(x_l,\, x_{-l}) = g_l(w_l,\, x_{-l}). \qquad (8.4)$$

Означення 8.8. $x_l \in X_l$ ***домінуюча*** **стратегія, якщо вона** ***домінує*** **над $\forall$ іншою стратегією гравця $l \in K$ або їй** ***еквівалентна***.

D_l **– множина домінуючих стратегій гравця $l \in K$;**

якщо $SD_l \neq \varnothing$, то $D_l = SD_l$

Лема 8.2. **У СГ $D_l \neq \varnothing \Leftrightarrow$**

1) D_l містить ***тільки одну*** **стратегію або декілька** ***еквівалентних*** **стратегій;**

2) $ND_l = D_l$.

Оз-ня 8.9. **Якщо** $\forall l \in K\ \exists\ x_l'' \in D_l$**, то** $x'' = (x_l'',\ x_{-l}'')$ **– ситуація рівноваги у домінуючих стратегіях (*СРДС*).**

$DE = \prod_{l=1}^{k} D_l$ **– множина СРДС (лема 8.2 $\Rightarrow$ містить одну або декілька еквівалентних СРСДС).**

Якщо $SDE \neq \varnothing$**, то** $DE = SDE$.

Приклад 8.4. **Дослідити біматричні ігри прикладів 7.1 – 7.6 на виявлення у них *домінуючих* і *строго домінуючих* стратегій.**

7.1	$\begin{pmatrix} (-1;\ 1) & (1;\ -1) \\ (1;\ -1) & (-1;\ 1) \end{pmatrix}$	$DE = SDE = \varnothing$
7.2	$\begin{pmatrix} (3;\ 2) & (0;\ 0) \\ (0;\ 0) & (2;\ 3) \end{pmatrix}$	$DE = SDE = \varnothing$
7.3	$\begin{pmatrix} (-1;\ -1) & (-10;\ 0) \\ (0;\ -10) & (-7;\ -7) \end{pmatrix}$	$x_1^{(2)} \succ x_1^{(1)}; x_2^{(2)} \succ x_2^{(1)}$ $\Rightarrow SDE = \{(2;\ 2)\};\ DE = SDE$
7.4	$\begin{pmatrix} (1;\ 1) & (0;\ 3) \\ (3;\ 0) & (-9;\ -9) \end{pmatrix}$	$DE = SDE = \varnothing$

7.5	$\begin{pmatrix} (2;2) & (3;1) \\ (2{,}5;1{,}5) & (3;1) \end{pmatrix}$	$x_1^{(2)} \succeq x_1^{(2)};\ x_2^{(1)} \succ x_2^{(2)} \Rightarrow$ $\Rightarrow DE = \{(2;\ 1)\};\ SDE = \varnothing$
7.6	$\begin{pmatrix} (2;2) & (3;1) \\ (1{,}75;2{,}25) & (2{,}5;1{,}5) \end{pmatrix}$	$x_1^{(1)} \succ x_1^{(2)};\ x_2^{(1)} \succ x_2^{(2)} \Rightarrow$ $\Rightarrow SDE = \{(1;\ 1)\};\ DE = SDE$

8.2.2. Викреслювання домінованих стратегій

Вик-ня *строго домінованих стратегій* (*СДС*) у СГВІ:

викреслюють СДС одного з гравців; в новій підмножині ситуацій викреслюють СДС цього ж чи іншого гравця і т.д. Викреслювання СДС триває доти, доки ці стратегії *наявні*.

ISND **– множина *ітераційно строго недомінованих ситуацій*** **(ситуації, які залишаються після послідовного викреслювання СДС).**

ISND містить *тільки одну* ситуацію ⇒ раціональний гравець, зазвичай, *обиратиме* власну стратегію з цієї ситуації-залишку.

Приклад 8.5 (прик. 5.3). $\begin{pmatrix} (3;\,4) & (4;\,1) & (3;\,2) \\ (2;\,5) & (3;\,7) & (5;\,3) \\ (1;\,8) & (2;\,3) & (4;\,9) \end{pmatrix}$.

➢ $x_1^{(2)} \succ x_1^{(3)} \Rightarrow$ викресл. $x_1^{(3)}$: $\begin{pmatrix} (3;\ 4) & (4;\ 1) & (3;\ 2) \\ (2;\ 5) & (3;\ 7) & (5;\ 3) \end{pmatrix}$.

$x_2^{(1)} \succ x_2^{(3)} \Rightarrow$ викреслюємо $x_2^{(3)}$: $\begin{pmatrix} (3;\ 4) & (4;\ 1) \\ (2;\ 5) & (3;\ 7) \end{pmatrix}$.

$x_1^{(1)} \succ x_1^{(2)} \Rightarrow$ викреслюємо $x_1^{(2)}$: $\begin{pmatrix} (3;\ 4) & (4;\ 1) \end{pmatrix}$.

$x_2^{(1)} \succ x_2^{(2)} \Rightarrow$ викреслюємо $x_2^{(2)}$; $ISND = \{(1;\ 1)\}$ ≺

Викреслювання (*слабо*) *домінованих* стратегій (ДС) ⇔ викреслюванню *строго* *домінованих* стратегій

IND **– множина *ітераційно недомінованих* (*слабо*) *ситуацій* (ситуації після викреслювання ДС).**

***IND* *залежить* від порядку викреслювання**

Приклад 8.6 (прик. 5.4). $\begin{pmatrix} (20;20) & (10;10) \\ (20;20) & (30;20) \\ (10;10) & (30;20) \end{pmatrix}$.

➢ $\boldsymbol{x}_1^{(2)} \succeq \boldsymbol{x}_1^{(1)}$: $\begin{pmatrix} (20;20) & (30;20) \\ (10;10) & (30;20) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (30;20) \\ (30;20) \end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{IND} = \{(2;2), (3;2)\}$

$\boldsymbol{x}_1^{(2)} \succeq \boldsymbol{x}_1^{(3)}$: $\begin{pmatrix} (20;20) & (10;10) \\ (20;20) & (30;20) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (20;20) \\ (20;20) \end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{IND} = \{(1;1), (2;1)\}$ ◄

Викреслюють слабо доміновані стратегії ⇒ <u>водночас</u> викреслюють і строго доміновані стратегії.

Якщо $ISND \neq \varnothing$ містить *тільки одну* ситуацію або $IND \neq \varnothing$ і $\forall\ l \in K\ X_l$ містить *тільки еквівалентні стратегії*, то $SoE = ISND$ ($SoE = IND$) – множина ***складних рівноваг*** **(sophisticated equilibrium); СГ розв'язана за домінуванням (строго/слабо)**

Приклад 8.5 ⇒ $SoE = ISND = \{(1;\ 1)\}$

Пр-д 8.6 ⇒ $SoE = IND = \{(2;\ 2),\ (3;\ 2)\}\ /\ \{(1;\ 1),\ (2;\ 1)\}$

Якщо $IND \neq \varnothing$ *тільки еквівалентні* ситуації $\Rightarrow$ не означає, що усі ситуації дають однакові виграші

Приклад 8.7. $\begin{pmatrix} (2;\ 2) & (0;\ 2) \\ (2;\ 0) & (0;\ 0) \end{pmatrix}$

$$SoE = IND = \{(1;\ 1),\ (1;\ 2),\ (2;\ 1),\ (2;\ 2)\}$$

Якщо $ISND \neq \varnothing$ *> однієї* ситуації або $IND \neq \varnothing$ *не тільки* еквівалентні ситуації $\Rightarrow SoE = \varnothing \Rightarrow$

ISND* / *IND* – *звуження (можливо) X_l