Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Факултет по математика и инфоратика

Проект по Числени методи за диференциални уравнения

Вариант 5

Съставил:

Ростислав Стоянов

ф-н 45244

Съдържание

1 Условие на задачата

Дадено ни е уравнението от втори ред:

$$u''(x) - q(x)u(x) = f(x), x \in (a, b),$$

с гранични условия:

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x}(a) = \mu_1,$$
$$\alpha_2 u(b) + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial x}(b) = \mu_2.$$

където $a = 0,\ b = 1,\ q(x) = 1,\ f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 12x,\ \alpha_1 = 0,\ \beta_1 = 1,$
$\alpha_2 = 1,\ \beta_2 = 0,\ \mu_1 = 0,\ \mu_2 = -1.$

След заместване на параметрите в условието получаваме следната гранична задача за ОДУ от втори ред:

$$u''(x) - u(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 12x, x \in (0, 1), \tag{1}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0) = 0, \tag{2}$$
$$u(1) = -1. \tag{3}$$

Решението на задачата трябва да съдържа:

- Диференчна схема с ЛГА О(h^2),
- Реализация на намерената диференчна схема използвайки метода на прогонката,
- Оценка на грешката чрез метода на Рунге с вложени мрежи.

2 Построяване на диференчната схема

Въвеждаме следната равномерна мрежа:

$$\overline{w_h} \coloneqq \{\, x_i = ih \mid h = \frac{1}{N}, i = 0, 1 \ldots, N \,\},$$

където h е големината на стъпката.

Първо намираме приближението на уравнението(1):

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - y_i = {x_i}^4 - 2{x_i}^3 - 12{x_i}^2 + 12x_i,$$

където знаем, че апроксимацията на втората производна е с грешка O(h^2).
Условието (3) се апроксимира точно : $y_N = -1$.
Остава да намерим приближение на условие (2). За целта ще използваме формула с разлика напред:

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = 0.$$

Пресмятаме ЛГА за тази апроксимация:

$$\psi_0 = \frac{u_1 - u_0}{h} - 0 = \frac{1}{h}[u_0 + \frac{h}{1!}{u_0}' + \frac{h^2}{2!}{u_0}'' + O(h^3) - u_0] =$$
$$= {u_0}' + \frac{h}{2}{u_0}'' + O(h^2) = \frac{h}{2}{u_0}'' + O(h^2)$$

Допускаме, че уравнението се удовлетворява и при x = 0, т.е. изпълнено е $u''(0) - u(0) = f(0)$. Тогава ${u_0}'' = u_0$. Заместваме и получаваме

$$\psi_0 = \frac{h}{2}u_0 + O(h^2).$$

Тогава приближението

$$\frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{h}{2}y_0 = 0.$$

ще има ЛГА O(h^2).

Така търсената от нас диференчна схема има вида:

$$\begin{aligned} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - y_i = {x_i}^4 - 2{x_i}^3 - 12{x_i}^2 + 12x_i, \\ \frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{h}{2}y_0 = 0, \\ y_N = -1. \end{aligned}$$