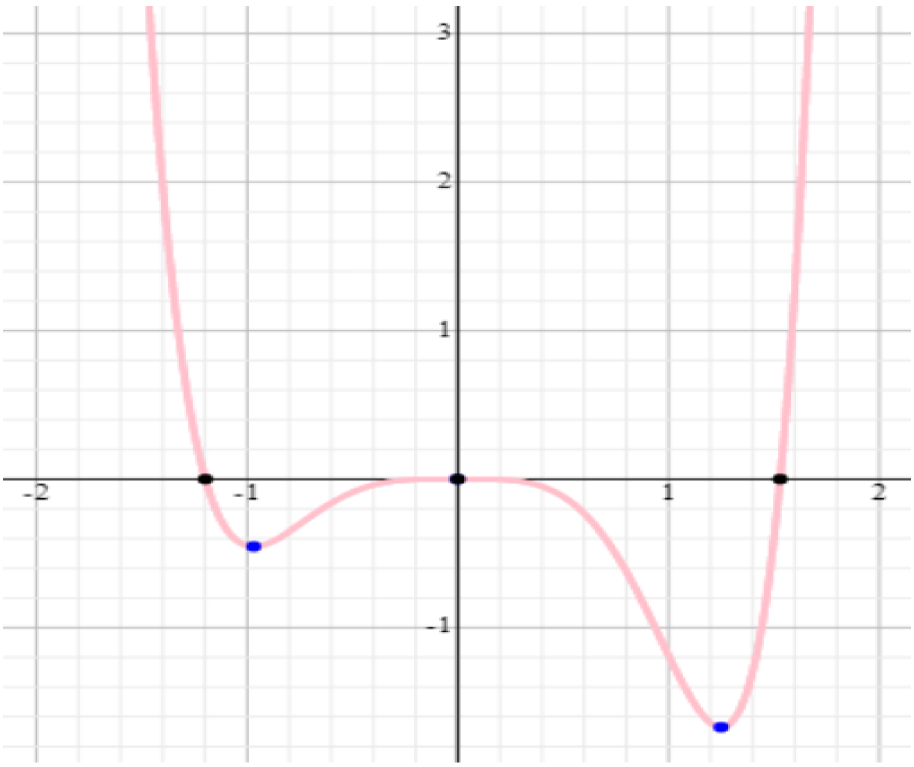
Πρώτη Εργασία Αριθμητικής Ανάλυσης

Ευάγγελος Χαλκιάς

14/12/2020

$$f(x) = e^{sin^3 x} + x^6 - 2x^4 - x^3 - 1$$



Συνάρτηση Διχοτόμησης: Η συνάρτηση διχοτόμησης δέχεται ως ορίσματα τα άκρα του διαστήματος επιλογής του χρήστη και ελέγχει αν ισχύει το θεώρημα Bolzano.Αν δεν ισχύει η συνάρτηση ειδοποιεί τον χρήστη και τελειώνει. Αν πληρεί τις προϋποθέσεις, μπαίνει σε έναν βρόγχο ο οποίος τελειώνει μόνο όταν το σφάλμα δύο διαδοχικών x είναι μικρότερο του 0.000005 ή αν το x είναι ρίζα. Κάθε επόμενο x υπολογίζεται προσθέτοντας τα άκρα του διαστήματος και διαιρώντας με το 2. Έπειτα, κάνοντας πράξεις με τα αποτελέσματα των συναρτήσεων, αλλάζει κατάλληλα τα άκρα του διαστήματος για να συνεχιστεί η σύγκλιση του αλγορίθμου στην ρίζα.

Συνάρτηση Newton-Raphson: Η συνάρτηση Newton-Raphson δέχεται ως ορίσματα τα άκρα του διαστήματος και ένα αρχικό x0. Εκτός από τον έλεγχο για το θεώρημα Bolzano ελέγχει επίσης και αν ισχύει $f(x0)f''(x0) > 0$ για την εξασφάλιση σύγκλισης σε μία ρίζα. Αν πληρούνται οι προϋποθέσεις, η συνάρτηση αρχίζει έναν βρόγχο ο οποίος τερματίζει όταν το σφάλμα δύο διαδοχικών x ειναι μικρότερο του 0.000005 η αν το x0 είναι ρίζα. Κάθε επόμενο x υπολογίζεται από τον τύπο $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$.

Συνάρτηση Τέμνουσας: Η συνάρτηση τέμνουσας δέχεται ως ορίσματα τα άκρα του διαστήματος και δύο αρχικά σημεία τα οποία στην συγκεκριμένη υλοποίηση είναι παντα τα άκρα του διαστήματος. Γίνεται έλεγχος για το θεώρημα Bolzano και έπειτα αν ισχύει μπαίνει σε έναν βρόγχο ο οποίος τερματίζει αν το σφάλμα δύο διαδοχικών x είναι μικρότερο του 0.000005 η αν το x0 είναι ρίζα. Κάθε επόμενο x υπολογίζεται από τον τύπο $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

Η πρώτη ρίζα της συνάρτησης χρησιμοποιώντας την μέθοδο διχοτόμησης και ως διάστημα το [-1.4,-1]: -1.1976226806640624 σε 17 βήματα

Η πρώτη ρίζα της συνάρτησης χρησιμοποιώντας την μέθοδο Newton-Raphson με αρχικό σημείο το $\frac{a+b}{2} = -1.2$ και ως διάστημα το [-1.4,-1]: -1.19762372213357 σε 3 βήματα

Η πρώτη ρίζα της συνάρτησης χρησιμοποιώντας την μέθοδο τέμνουσας με αρχικά σημεία τα άκρα του διαστήματος [-1.4,-1]: -1.1976237221330575 σε 3 βήματα

Η δεύτερη ρίζα της συνάρτησης χρησιμοποιώντας την μέθοδο διχοτόμησης και ως διάστημα το [-1.25,1.25]: 0.0 σε 1 βήμα

Η δεύτερη ρίζα της συνάρτησης χρησιμοποιώντας την μέθοδο Newton-Raphson με αρχικό σημείο το 0.01 και ως διάστημα το [-1.25,1.25]: $3.789746359499114 * 10^{-5}$ σε 17 βήματα

Η δεύτερη ρίζα της συνάρτησης χρησιμοποιώντας την μέθοδο τέμνουσας με αρχικά σημεία τα άκρα του διαστήματος [-1.25,1.25] παρουσιάζει μετά απο 50 επαναλήψεις σφάλμα στον παρανομαστή $> 10^{-16}$ και έτσι γίνεται στρογγυλοποίηση στο 0 με αποτέλεσμα να γίνει διαίρεση με 0. Το x της τελευταίας επανάληψης ειναι 0.00012299933425415332

Η τρίτη ρίζα της συνάρτησης χρησιμοποιώντας την μέθοδο διχοτόμησης και ως διάστημα το [1.30,1.80]: 1.5301368713378907 σε 17 βήματα

Η τρίτη ρίζα της συνάρτησης χρησιμοποιώντας την μέθοδο Newton-Raphson με αρχικό σημείο το $\frac{a+b}{2} = 1.55$ και ως διάστημα το [1.30,1.80]: 1.5301335082105794 σε 3 βήματα

Η τρίτη ρίζα της συνάρτησης χρησιμοποιώντας την μέθοδο τέμνουσας με αρχικά σημεία τα άκρα του διαστήματος [1.30,1.80]: 1.5301335045988704 σε 8 βήματα

Τετραγωνική σύγκλιση με την μέθοδο Newton-Raphson παρουσιάζεται στις ρίζες 1 και 3 καθώς τα δεκαδικά ακρίβειας σε κάθε επανάληψη διπλασιάζονται.

1η ρίζα		3η ρίζα	
1η επανάληψη	-1.1976439570093023	1η επανάληψη	1.5312542105949298
2η επανάληψη	-1.197623723615836	2η επανάληψη	1.5301373111018937
3η επανάληψη	-1.19762372213357	3η επανάληψη	1.5301335082105794

Το χαρακτηριστικό των ριζών για τις οποίες η μέθοδος Newton-Raphson δεν συγκλίνει τετραγωνικά και ο λόγος για τον οποίο η δεύτερη ρίζα χρειάστηκε τόσες επαναλήψεις για να καταλήξει σε αποτέλεσμα είναι η παράγωγος της ρίζας να είναι 0. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο σε σημεία πολύ κοντά στην ρίζα μας δίνει τέμνουσες σχεδόν παράλληλες, με αποτέλεσμα να παίρνουμε σημεία πολύ μακριά. Στην συγκεκριμένη περίπτωση για διάστημα επαρκώς κοντά στην ρίζα η μέθοδος, έστω και αργά, εξακολουθεί να συγκλίνει.

Τα διαστήματα επιλέχθηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει

$$\forall x \in [a,b] f'(x), f''(x) \neq 0$$

. Συνάρτηση τροποποιημένης μεθόδου Newton-Raphson:

Η συνάρτηση δέχεται ως ορίσματα τα άκρα του διαστήματος και ενα αρχικό σημείο x0. Στην συνέχεια ελέγχεται αν πληρείτε το θεώρημα Bolzano και αν ισχύει $f(x0)f''(x0) > 0$. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις ξεκινάει ένας βρόγχος ο οποίος σταματάει μόνο όταν 2 διαδοχικές εκτιμήσεις έχουν σφάλμα μεταξύ τους μικρότερο του 0.000005. Κάθε επόμενη εκτίμηση υπολογίζεται από τον τύπο $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}\frac{f(x_n)^2 f''(x_n)}{f'(x_n)^3}$.

Συνάρτηση τροποποιημένης μεθόδου Διχοτόμησης:

Η συνάρτηση δέχεται ως ορίσματα τα άκρα του διαστήματος. Αρχικά ελέγχει αν ισχύει το θεώρημα Bolzano και αν ισχύει μπαίνει σε έναν βρόγχο ο οποίος τερματίζει μόνο αν 2 διαδοχικές εκτιμήσεις έχουν σφάλμα μεταξύ τους μικρότερο του 0.000005 η αν το x είναι ρίζα της συνάρτησης. Κάθε επόμενο x δεν είναι πια το μέσο του διαστήματος, αλλά ένα ψευδοτυχαίο σημείο στο $[a, b]$. Για την επιλογή ενός τυχαίου αριθμού γίνεται χρήση της βιβλιοθήκης random και πιο συγκεκριμένα της συνάρτησης random.uniform. Οι συνθήκες που ελέγχονται είναι οι ίδιες που ισχύουν και στην απλή μέθοδο Διχοτόμησης.

Συνάρτηση τροποποιημένης μεθόδου Τέμνουσας:

Η συγκεκριμένη υλοποίηση της μεθόδου της Τέμνουσας απαιτεί 3 αρχικά σημεία για την λειτουργία της. Έτσι, εκτός από τα άκρα του διαστήματος, δινόνται ως ορίσματα σημεία x0, x1 και x2. Μετά τον έλεγχο των απαιτήσεων, εκτελείτε βρόγχος για τον υπολογισμό του x3. Αν η διαφορά ανάμεσα στο x3 και στο x2 είναι επαρκώς μικρή σταματάει. Διαφορετικά, κάνοντας τις κατάλληλες μεταθέσεις τιμών των x, προχωράει στην επόμενη επανάληψη.

1η ρίζα	
Mod Bisection	0.8410636178942326
Mod Newton-Raphson	0.8410686705679232
Mod Secant Method	0.8410670321691277
2η ρίζα	
Mod Bisection	1.0490802410831521
Mod Newton-Raphson	1.047201941359627
Mod Secant Method	1.047214047512819
3η ρίζα	
Mod Bisection	2.300531073888029
Mod Newton-Raphson	2.3005239830218627
Mod Secant Method	2.300523989995453

Τρέχοντας τον αλγόριθμο β διαπιστώνουμε ότι κάθε φορά ο αριθμός επαναλήψεων που χρειάζεται για να υπάρξει σύγκλιση διαφέρει, κάτι που περιμένουμε από την στιγμή που προσθέτουμε κάποιον τυχαίο παράγοντα στον κώδικα μας.

Αριθμός Επανάληψης	1η ρίζα	2η ρίζα	3η ρίζα
1	23	17	15
2	21	19	20
3	19	7	18
4	13	20	13
5	18	12	10
6	15	14	22
7	8	16	20
8	22	10	22
9	17	7	31
10	8	22	27

Συγκρίνοντας πειραματικά τις τροποποιημένες μεθόδους με τις κλασσικές παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα για τις απαιτούμενες επαναλήψεις:

Διχοτόμηση		
Ρίζα	Κλασσική	Τροποποιημένη
1)	14	13
2)	12	11
3)	15	12
$Newton - Raphson$		
Ρίζα	Κλασσική	Τροποποιημένη
1)	4	3
2)	15	11
3)	4	3
Τέμνουσα		
Ρίζα	Κλασσική	Τροποποιημένη
1)	6	3
2)	21	17
3)	4	4

Για τις μεθόδους της Τέμνουσας και Newton-Raphson διαπιστώνουμε ότι οι τροποποιημένες μέθοδοι συγκλίνουν σε λιγότερα βήματα απο τις κλασσικές. Για την τροποποιημένη μέθοδο της διχοτόμησης, όπως είδαμε και παραπάνω, κάποιες φορές συγκλίνει πιο γρήγορα και κάποιες πιο αργά λόγο της τυχαιότητας που υπάρχει στον αλγόριθμο.

3.1 Αποσύνθεση PA=LU Ο σκοπός αυτού του προγράμματος είναι, δοθέντος ενός πίνακα A και ενός διανύσματος b, με χρήση της μεθόδου PA=LU να επιστρέψει το διάνυσμα των αγνώστων x. Ο ρόλος της PA=LU είναι να αποσυνθέσει τον A σε γινόμενο 2 διαφορετικών πινάκων, τον L και U.Η μέθοδος PA=LU παράγει και έναν 3ο πίνακα P ο οποίος αποτελείται από τις αντιμεταθέσεις γραμμών που έγιναν κατά την διάρκεια της αποσύνθεσης έτσι ώστε να μειωθεί η πιθανότητα σφάλματος στις πράξεις. Ο πίνακας P πολλαπλασιάζει και το διάνυσμα b έτσι ώστε να παραμείνουν σωστές οι αντιστοιχίσεις.

Η συνάρτηση PALU

Η συνάρτηση δέχεται ως ορίσματα έναν πίνακα nxn και ένα διάνυσμα nx1. Το πρώτο που κάνει είναι να ελέγξει ότι οι διαστάσεις των A και b συμβιβάζονται έτσι ώστε να μπορεί να σχεδιαστεί γραμμικό σύστημα τόσων αγνώστων όσο και εξισώσεων. Στη συνέχεια, αρχικοποιούνται οι πίνακες P και L καλώντας την μέθοδο InitIdentityMatrix η οποία δέχεται δύο ορίσματα, το πρώτο είναι οι διαστάσεις του πίνακα που θα επιστρέψει και το δεύτερο είναι η ο αριθμός 0 ή ο 1. Όταν δίνεται ο αριθμός 0 επιστρέφει τον μηδενικό πίνακα των ζητούμενων διαστάσεων, και αν είναι 1 τον μοναδιαίο. Μετά, οριστικοποιούνται οι μεταβλητές loops και n οι οποίες χρησιμοποιούνται αργότερα για τον κατάλληλο υπολογισμό επαναλήψεων και επιλογή στοιχείων. Πριν αρχίσει η επανάληψη ο A και ο b πολλαπλασιάζονται με τον αριθμό 10^{10} έτσι ώστε να αποφευχθούν σφάλματα που παρουσιάζονται στα δεκαδικά κατά την διάρκεια υπολογισμών.
Ο βρόγχος που αρχίζει εκτελείται για n-1 φορές καθώς η πρώτη σειρά δεν τροποποιείται. Η μεταβλητή times υπολογίζει πόσα στοιχεία πρέπει να μηδενιστούν κάτω από το τρέχων στοιχείο της διαγωνίου. Πρωτού αρχίσουν οι πράξεις καλείται η μέθοδος PALUkize η οποία παίρνει ως ορίσματα τον A, L, U και P και βρίσκοντας το κατά απόλυτη τιμή μεγαλύτερο στοιχείο της αντίστοιχης στήλης του A κάνει όλες τις απαραίτητες αντιμεταθέσεις στους αναφερόμενους πίνακες. Στην συνέχεια, σε έναν εσωτερικό βρόγχο που εκτελείται times φορές προσθέτει τους αριθμούς με τους οποίους πολλαπλασιάζονται οι γραμμές του A για να μηδενιστούν τα στοιχεία, στον πίνακα L και στην συνέχεια γίνεται ο μηδενισμός των στοιχείων. Τέλος, προσθέτονται τα απαραίτητα μηδενικά στην διαγώνιο του L και καλείται η μέθοδος system solver.

Η συνάρτηση system solver

Ο σκοπός αυτής της συνάρτησης είναι η επίλυση 2 γραμμικών συστημάτων που είναι μέρος του αλγορίθμου PA=LU και μας δίνουν το τελικό διάνυσμα αποτελεσμάτων x. Ως ορίσματα δέχεται τον πίνακα L, U, P καθώς και το διάνυσμα b . Το πρώτο γραμμικό σύστημα που επιλύει είναι το Ly=Pb. Μετα την αρχικοποίηση του L και τον πολλαπλασιασμου του P με τον b βρίσκει κατευθείαν το πρώτο στοιχείο του **y** καθώς ο L είναι κάτω τριγωνικός. Στην συνέχεια και με έναν βρόγχο γίνονται οι κατάλληλες αφαιρέσης και στο τέλος μια διαίρεση για τον υπολογισμό των υπόλοιπων y.
Στην συνέχεια γίνεται ο υπολογισμός του γραμμικού συστήματος Ux=y. Το τελευταίο x υπολογίζεται κατευθείαν με μία διαίρεση καθώς ο U είναι άνω τριγωνικός. Τα υπόλοιπα x υπολογίζονται πάλι με έναν βρόγχο ο οποίος εκτελεί τις κατάλληλες αφαιρέσεις και διαιρέσεις έτσι ώστε να απομονωθούν τα x αυτή την φορά όμως από κάτω προς τα πάνω. Η συνάρτηση επιστρέφει το ζητούμενο διάνυσμα με τα αποτελέσματα.

Για είσοδο $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ και $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ παίρνουμε:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και ως διάνυσμα αποτελεσμάτων: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.2 Αποσύνθεση Cholesky Η μέθοδος της αποσύνθεσης Cholesky δέχεται έναν συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα A τον οποίο αποσυνθέτει σε ένα γινόμενο 2 πινάκων, εναν κάτω τριγωνικό πίνακα L και τον ανάστροφό του. Ισχύει $A = LL^T$. Η μέθοδος αυτή επιτυγχάνει πολύ πιο γρήγορη επίλυση γραμμικών συστημάτων απο την μέθοδο αποσύνθεσης PA=LU.

Συνάρτηση Cholesky Decomposition Η συνάρτηση δέχεται ως όρισμα τον πίνακα A στον οποίο θέλει ο χρήστης να κάνει αποσύνθεση Cholesky. Αρχικά οριστικοποιεί τον πίνακα L καλώντας την συνάρτηση InitL, η οποία δέχεται σαν όρισμα τις επιθυμητές διαστάσεις και επιστρέφει τον μηδενικό πίνακα. Στην συνέχεια, αρχίζει ένας διπλός βρόγχος για τον υπολογισμό και την κατάλληλη τοποθέτηση των αποτελεσμάτων στον πίνακα. Κάθε στοιχείο υπολογίζεται με βάση τους εξής τύπους:

Για $k \neq i$ έχουμε:

$$L_{ki} = \frac{A_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} L_{kj}}{L_{ii}}$$

και για $k = i$ έχουμε:

$$L_{kk} = \sqrt{A_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} L_{kj}^2}$$

Για είσοδο πίνακα $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{pmatrix}$ παίρνουμε αποτέλεσμα

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 2.44948 & 0 & 0 \\ 6.12372 & 4.18330 & 0 \\ 22.45365 & 20.91650 & 6.11010 \end{pmatrix}$$

3.3 Μέθοδος Gauss-Seidel Η μέθοδος Gauss-Seidel χρησιμοποιείται για την επίλυση γραμμικών συστημάτων και είναι μία βελτιωμένη έκδοση της μεθόδου Jacobi. Ξεκινώντας από ένα τυχαίο σημείο x0 η μέθοδος αυτη λύνει για ένα x σε κάθε εξίσωση και για την επίλυση της επόμενης χρησιμοποιεί την τρέχουσα εκτίμηση των προηγούμενων μεταβλητών. Αυτό γίνεται σε αντίθεση με την μέθοδο Jacobi όπου η ενημέρωση γίνεται σε κάθε καινούρια επανάληψη.

Συνάρτηση Gauss-Seidel

Η συνάρτηση δέχεται ως ορίσματα έναν πίνακα συντελεστών A και το διάνυσμα b για την κατασκευή του γραμμικού συστήματος. Αρχικά γίνεται η κατασκευή 2 πινάκων x, ένας για την αποθήκευση των αποτελεσμάτων της τρέχουσας επανάληψης και ένας για την διατήρηση των αποτελεσμάτων της προηγούμενης έτσι ώστε να ελέγχεται η απόκλιση τους. Στην συνέχεια αρχίζει ένας βρόγχος ο οποίος σταματάει μόνο όταν το σφάλμα μεταξύ των δύο διανυσμάτων κατά την απόλυτη τιμή της άπειρης νόρμας τους είναι < 0.00005. Κάθε στοιχείο x_i υπολογίζεται από τον εξής τύπο:

$$x_i^{m+1} = \frac{1}{A_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{m+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{m})$$

Για την κατασκευή των ζητούμενων A και b χρησιμοποιούνται οι συναρτήσεις Matrix Constructor και Vector Constructor αντίστοιχα.

Για n=10 το αποτέλεσμα που παίρνουμε είναι:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.99999479 \\ 0.99999232 \\ 0.99999174 \\ 0.99999236 \\ 0.99999361 \\ 0.99999509 \\ 0.99999653 \\ 0.99999778 \\ 0.99999878 \\ 0.999999514 \end{pmatrix}$$

Με ακριβώς τον ίδιο τρόπο υπολογίζεται και για n=10.000 με παρόμοια αποτελέσματα, κάτι που μπορεί να επαληθευθεί στο αρχείο main33.py.

4.1 Αναλυτική απόδειξη στοχαστικότητας του G

Για να αποδείξουμε ότι ο πίνακας G είναι στοχαστικός, αρκεί να δειχθεί ότι για οποιαδήποτε στήλη k του πίνακα και αν πάρουμε, το άθροισμα θα βγει ίσο με ένα.

Απο τον τύπο $G_{(i,j)} = \frac{q}{n} + \frac{A_{(j,i)}(1-q)}{n_j}$ και για μία τυχαία στήλη του πίνακα A που ονομάζουμε k έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{n} G_{(i,k)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{n} + \frac{A_{(k,i)}(1-q)}{n_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_{(k,i)}(1-q)}{n_k}$$

$$= \frac{qn}{n} + \frac{(1-q)}{n_k} \sum_{i=1}^{n} A_{(k,i)}$$

το οποίο άθροισμα μας δίνει το άθροισμα των στοιχείων της k γραμμής και άρα ισχυει $\sum_{i=1}^{n} A_{(k,i)} = n_k$. Τελικά παίρνουμε:

$$q + (1-q) = 1.$$

Επομένως αυτό ισχύει για κάθε στήλη του πίνακα και έτσι ο A αποδεικνύεται ότι είναι στοχαστικός.

4.2 Κατασκευή πίνακα G και χρήση της μεθόδου δυνάμεων

Ο σκοπός του συγκεκριμένου προγράμματος είναι να πάρει τον πίνακα γειτνίασης A και μέσω αυτού να παράγει έναν στοχαστικό πίνακα G στον οποίο και θα εφαρμοστεί η μέθοδος της δυνάμεως για την εύρεση του ιδιοδιανύσματος.

Συνάρτηση Construct G Η συνάρτηση δέχεται ως όρισμα τον πίνακα γειτνίασης A και για q=0.15, αφού αρχικοποιήσει τον πίνακα G με μηδενικά, υπολογίζει το κάθε στοιχείο με βάση τον τύπο $G_{(i,j)} = \frac{q}{n} + \frac{A_{j,i}(1-q)}{n_j}$. Τέλος, επιστρέφει τον πίνακα G και εκτελείται με την σειρά της η μέθοδος της δυνάμεως.

Συνάρτηση Power Method

Η συνάρτηση δέχεται ως όρισμα τον πίνακα G ο οποίος έχει παραχθεί από την προηγούμενη συνάρτηση. Το πρώτο βήμα του αλγορίθμου είναι να πολλαπλασιαστεί ο πίνακας G με ένα τυχαίο διάνυσμα το οποίο φυσικά πρέπει να έχει τις απαραίτητες διαστάσεις. Στην συγκεκριμένη υλοποίηση το αρχικό σημείο ειναι παντού άσοι. Αφού γίνει ο πολλαπλασιασμός και αποθηκευτεί σε μία μεταβλητή b1, αρχίζει ένας βρόγχος που αυτό που κάνει αρχίκα είναι να βρει το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο του νέου διανύσματος. Αν η τρέχων επανάληψη δεν είναι η τελευταία, υπολογίζει το νέο b1 πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα A με το τρέχων b1 διαιρεμένο κατα ένα δια το πρώτο μη μηδενικό του στοιχείο ενώ αν η επανάληψη είναι η τελευταία, επιστρέφει το ιδιοδιάνυσμα.

Στην συνέχεια, διαιρείται το ιδιοδιάνυσμα με την άπειρη νόρμα του που μας εμφανίζει ότι όντως ισχύει:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.02682457 \\ 0.02986108 \\ 0.02986108 \\ 0.02682457 \\ 0.03958722 \\ 0.03958722 \\ 0.03958722 \\ 0.03958722 \\ 0.07456439 \\ 0.10631995 \\ 0.10631995 \\ 0.07456439 \\ 0.12509164 \\ 0.11632789 \\ 0.12509164 \end{pmatrix}$$

4.3 Βελτίωση βαθμού σελίδας

Σκοπός της συγκεκριμένης άσκησης είναι, αφότου διαλέξουμε μια ιστοσελίδα, να αλλάξουμε το γράφημα με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να βελτιωθεί ο βαθμός της. Η ιστοσελίδα που επιλέχθηκε είναι η πρώτη καθώς έχει και την μικρότερη σημαντικότητα μαζι με την ιστοσελίδα 4. Για να επιτευχθεί η μεγαλύτερη δυνατή σημαντικότητα έβαλα τις ιστοσελίδες με τον μεγαλύτερο βαθμό να δείχνουν σε αυτήν. Συγκεκριμένα, τροποποίησα την ιστοσελίδα 15, 14, 13 και 11. Στην συνέχεια, έσβησα την σύνδεση μεταξύ της 3 και της 1 καθώς η σημαντικότητας της 3 είναι μικρη και έτσι δεν θα μειώσει την ταξη της 1 κατά πολύ. Πήρα τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.12778223 \\ 0.08168269 \\ 0.04088292 \\ 0.01821056 \\ 0.06080332 \\ 0.05503514 \\ 0.0424624 \\ 0.01931897 \\ 0.09762316 \\ 0.1148771 \\ 0.07890533 \\ 0.03289049 \\ 0.11758488 \\ 0.05846671 \\ 0.0534741 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι τώρα η πρώτη ιστοσελίδα έχει την μεγαλύτερη σημαντικότητα που σημαίνει ότι καταφέραμε να αυξήσουμε τον βαθμό της.

4.4 Αλλαγή της τυχαιότητας μετακίνησης σε διαφορετική σελίδα Αλλάζοντας το q από 0.15 σε 0.02 και 0.6 παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.13939251 \\ 0.08511851 \\ 0.03159764 \\ 0.00501823 \\ 0.06665661 \\ 0.05433407 \\ 0.03532557 \\ 0.00752019 \\ 0.1148507 \\ 0.1275385 \\ 0.06723062 \\ 0.01893936 \\ 0.13841338 \\ 0.06169546 \\ 0.04636865 \end{pmatrix}, q = 0.02 \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.09254706 \\ 0.07036792 \\ 0.05929256 \\ 0.04955085 \\ 0.05861377 \\ 0.0610899 \\ 0.05713666 \\ 0.04775427 \\ 0.06923538 \\ 0.08931728 \\ 0.08566826 \\ 0.05815703 \\ 0.08044474 \\ 0.05897283 \\ 0.06185148 \end{pmatrix}, q = 0.6$$

Μελετώντας τους δύο πίνακες γίνεται φανερό ότι στην πρώτη περίπτωση, η τάξη των ιστοσελίδων με ήδη μεγάλο βαθμό, αυξήθηκε περαιτέρω, ενώ ο βαθμός των ιστοσελίδων που είχαν μικρή τάξη μειώθηκε κι΄ άλλο.Στην δεύτερη περίπτωση παρατηρείται μία ισοστάθμιση. Ο σκοπός της πιθανότητας μεταπήδησης είναι να καθορίσει την σημαντικότητα της συνδεσιμότητας των ιστοσελίδων. Όσο μεγαλύτερο είν αι το q τόσο λιγότερη σημασία έχουν οι διασυνδέσεις μεταξύ των ιστοσελίδων καθώς υπάρχει μεγαλύτερη πιθανότητα ο χρήστης να τις αγνοήσει εντελώς και να επιλέξει από μόνος του μία τυχαία σελίδα χωρίς την πλοήγηση μέσω υπερσυνδέσμων που βρίσκονται στον ιστότοπο που ήταν. Αυτό γίνεται περισσότερο φανερό αν θέσουμε το q ίσο με 1 όπου όλες οι σελίδες έχουν ακριβώς την ίδια τάξη. Από την άλλη, όταν κατεβάζουμε το q σε πολύ μικρή πιθανότητα όπως το 0.02 διαπιστώνουμε ότι, καθώς η πιθανότητα ο χρήστης να μεταβεί στην συνέχεια σε μία τυχαία σελίδα είναι πολύ μικρή, δίνεται μεγαλύτερη βαρύτητα στην διασύνδεση των ιστοσελίδων καθώς έτσι θα καθοριστεί, τις περισσότερες φορές, που θα μεταβεί ο χρήστης στην συνέχεια.

4.5 Αλλαγή του πίνακα γειτνίασης Έχοντας ως στόχο την αύξηση της τάξης της σελίδας 11 στον πίνακα γειτνίασης γίνεται αύξηση δύο διασυνδέσεων απο 1 σε 3 και λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα:

Πριν τις αλλαγές	Μετά τις αλλαγές
10=0.10631995	10=0.10289328
11=0.10631995	11=0.12400837

Άρα διαπιστώνουμε ότι η μέθοδος αυτή αυξάνει επιτυχώς την τάξη της ιστοσελίδας 11.

4.6 Διαγραφή ιστοσελίδας

Διαγράφοντας την 10η σελίδα από τον πίνακα γειτνίασης λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα:

Πριν την διαγραφή	Μετά την διαγραφή
1) 0.02682457	0.04709499
2) 0.02986108	0.04091142
3) 0.02986108	0.03593562
4) 0.02682457	0.03207005
5) 0.03958722	0.04280083
6) 0.03958722	0.04139102
7) 0.03958722	0.05165866
8) 0.03958722	0.05024885
9 0.07456439	0.04822346
11) 0.10631995	0.1709627
12) 0.07456439	0.10359814
13) 0.12509164	0.0411619
14) 0.11632789	0.10746218
15) 0.12509164	0.18648019

Παρατηρούμε ότι σε όλες τις ιστοσελίδες ο βαθμός αυξήθηκε εκτός από τις ιστοσελίδες 9, 13 και 14. Αυτό είναι αναμενόμενο καθώς η 10η σελίδα είχε διασύνδεση με την 13 και αυτή με την 14 και 9. Διαγράφοντας την 10η σελίδα σημαίνει ότι η σημαντικότητα που κέρδιζε η 13η από αυτή την διασύνδεση χάνεται και έτσι η σημαντικότητα που παίρνουν οι ιστότοποι 9 και 14 από το να έχουν διασύνδεση με την 13 μειώνεται. Η μείωση στην τάξη των σελίδων αυτών ισοσταθμίζεται με την αύξηση των βαθμών όλων των άλλων που δεν έχουν κάποια επαφή με τις σελίδες αυτές και έτσι δεν επηρεάζονται αρνητικά.