REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

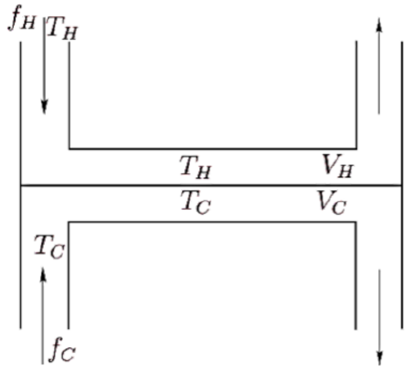
Université des Sciences et de la Technologie Mohammed Boudiaf Oran
Faculté De Génie Electrique
Département D'Automatique

Examen : **Techniques de Commande et Régulation Avancée**	**Master II :** **Electromécanique**
Durée :01h30	

Exercice 01 (07 points) (test2) :

Soit l'échangeur de chaleur de la figure ci-dessous. Il comporte un étage chaud (température d'entrée THi, température TH, débit fH) et un étage froid (température d'entrée TCi, température TC, débit fC). Pour chaque étage, les équations de la physique s'écrivent :

$$\begin{aligned} V_C \frac{dT_C}{dt} &= f_C(T_{Ci} - T_C) + \beta(T_H - T_C) \\ V_H \frac{dT_H}{dt} &= f_H(T_{Hi} - T_H) - \beta(T_H - T_C) \end{aligned}$$



Où β est une constante dépendant du coefficient de transfert de chaleur, de la capacité calorifique des fluides... En supposant les flux constants fH = fC = f, les variables d'état (x1; x2) = (TC; TH), les températures d'entrée comme les commandes et on prend comme sortie les températures (TC; TH). Pour les valeurs numériques $f = 0.01 m^3/min$, $\beta = 0.2 m^3/min$ et $V_H = V_C = 1 m^3$.

1) Déduire sa représentation d'état.
2) Déduire les pôles du système.
3) Es ce que le système est stable ? Justifier.
4) Quel est l'ordre du système ?
5) Quel est le nombre d'entrées et de sorties de ce système ? Justifier.
6) On cherche à commander notre système en minimisant le critère quadratique suivant :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(2x_2(t)\left(x_2(t)+x_1(t)\right)+2x_1(t)\left(x_2(t)+x_1(t)\right)+0.5u^2(t)\right)dt$$

a. Déduire les matrices de pondération.

b. Donner l'expression de l'équation de Riccati. A quoi sert cette équation ?

c. Pour la matrice $p = \begin{bmatrix} 50 & 50 \\ 50 & 50 \end{bmatrix}$ calculer le gain de retour d'état de la commande LQR.

Exercice 02 (04 points) :

Soit un système défini par la représentation d'état suivante :

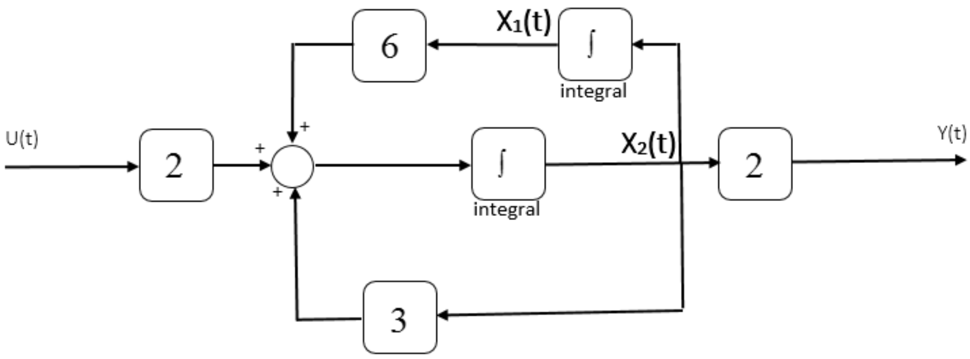
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

1) Déterminer l'expression de gain de la commande Backstepping.

2) Calculer le gain de retour d'état obtenu précédemment avec les pôles désirés en boucle fermée suivants : P_1=-3 et P_2=-5.

Exercice 03 (09 points) :

Soit le système représenté par le schéma fonctionnel suivant :



1) Extrayez les équations d'état à partir du schéma fonctionnel ci-dessus, puis déduire la représentation d'état du système.
2) Calculer le gain par retour d'état qui nous donne à la sortie, un temps de réponse $t_r = 0.8\,\text{sec}$ et un dépassement $D = 5\%$.
3) Calculer la surface de glissement ainsi que le gain de la partie discontinue.
4) Donner le schéma fonctionnel en boucle fermée détaillé.
5) Calculer la surface de glissement pour un degré relatif r=2.
6) Déduire la commande par retour d'état pour cette nouvelle surface de glissement.

Solution

Exercice 01 7pts :

1. Les équations d'états : 0.5

$$\begin{cases}\dot{T}_C = 0.01T_{Ci} - 0.01T_C + 0.2T_H - 0.2T_C \\ \dot{T}_H = 0.01T_{Hi} - 0.01T_H - 0.2T_H + 0.2T_C\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{x}_1 = -0.21x_1 + 0.2x_2 + 0.01u_1 \\ \dot{x}_2 = 0.2x_1 - 0.21x_2 + 0.01u_2\end{cases}$$

0.5 $$\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.21 & 0.2 \\ 0.2 & -0.21\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.01 & 0 \\ 0 & 0.01\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1 \\ u_2\end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix}y_1 \\ y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix}$$

2. Les pôles du système :

$$\det(sI - A) = 0 \Rightarrow \det\left(\begin{bmatrix}s & 0 \\ 0 & s\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-0.21 & 0.2 \\ 0.2 & -0.21\end{bmatrix}\right) = s^2 + 0.42s + 0.0041 = (s+0.41)(s+0.01) = 0$$

0.5 0.5 0.5

3. Système est stable, tous les pôles ont une partie réelle négative. 0.5
4. L'ordre du système n=2 0.5
5. Nous avons 2 entrées et 2 sorties. La dimension de la matrice B et C est de 2*2. 0.5
6. La commande LQR :

   a. $Q = \begin{bmatrix}2 & 2 \\ 2 & 2\end{bmatrix} \wedge R = \begin{bmatrix}0.5 & 0 \\ 0 & 0.5\end{bmatrix}$ 0.5 0.5

   b. $-Q - A^T P - PA + PBR^{-1}B^T P = 0$ Cette équation sert à calculer la matrice transversale P. 0.5

   c. Le gain de retour d'état : $K = R^{-1}B^T P$ 0.5 $\quad R^{-1} = \frac{adj(R)}{\det(R)} = \frac{\begin{bmatrix}0.5 & 0 \\ 0 & 0.5\end{bmatrix}}{0.25} = \begin{bmatrix}2 & 0 \\ 0 & 2\end{bmatrix}$ 0.5

$$K = R^{-1}B^T P = \begin{bmatrix}2 & 0 \\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.01 & 0 \\ 0 & 0.01\end{bmatrix}\begin{bmatrix}50 & 50 \\ 50 & 50\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 \\ 1 & 1\end{bmatrix}$$ 0.5

Exercice 02 4pts :

1.

Etape 1 : On définit première variable de l'erreur e_1 tel que :

0.25 $e_1 = x_1 - x_{1d} \Rightarrow \dot{e}_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_{1d} = x_2 - \dot{x}_{1d}$ 0.25

On choisit première fonction de Lyapunov V_1 tel que : $V_1 = \frac{1}{2}e_1^2 \Rightarrow \dot{V}_1 = e_1\dot{e}_1$ 0.25

Pour que $\dot{V}_1$ soit négative il faut que $\dot{V}_1 \le -\alpha_1 e_1^2 \Rightarrow e_1\dot{e}_1 \le -\alpha_1 e_1^2 \Rightarrow \dot{e}_1 \le -\alpha_1 e_1$

$$x_2 - \dot{x}_{1d} \le -\alpha_1(x_1 - x_{1d}) \Rightarrow \boxed{x_2 = -\alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_{1d} + \dot{x}_{1d}}$$ 0.5

0.25 **Etape 2** : On définit première variable de l'erreur e_2 tel que :

$$e_2 = x_2 - x_{2d} = x_2 + \alpha_1 x_1 - \alpha_1 x_{1d} - \dot{x}_{1d} \Rightarrow \dot{e}_2 = \dot{x}_2 + \alpha_1\dot{x}_1 - \alpha_1\dot{x}_{1d} - \ddot{x}_{1d} = 7x_1 + (4+\alpha_1)x_2 + 2u - \alpha_1\dot{x}_{1d} - \ddot{x}_{1d}$$

0.25 0.25

On choisit première fonction de Lyapunov V_2 tel que : $V_2 = \frac{1}{2}e_2^2 \Rightarrow \dot{V}_2 = e_2\dot{e}_2$

Pour que $\dot{V}_2$ soit négative il faut que $\dot{V}_2 \le -\alpha_2 e_2^2 \Rightarrow e_2\dot{e}_2 \le -\alpha_2 e_2^2 \Rightarrow \dot{e}_2 \le -\alpha_2 e_2$

$$7x_1 + (4+\alpha_1)x_2 + 2u - \alpha_1\dot{x}_{1d} - \ddot{x}_{1d} \le -\alpha_2(x_2 + \alpha_1 x_1 - \alpha_1 x_{1d} - \dot{x}_{1d})$$

$$\Rightarrow \boxed{u = -\left(\frac{\alpha_1\alpha_2 + 7}{2}\right)x_1 - \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + 4}{2}\right)x_2 + \frac{\alpha_1\alpha_2}{2}x_{1d} + \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)\dot{x}_{1d} + \frac{1}{2}\ddot{x}_{1d}}$$ 0.5

2. L'équation caractéristique :

$$\det(sI - A + BK) = \det\left(s\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\7 & 4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\alpha_1\alpha_2+7}{2} & \frac{\alpha_1+\alpha_2+4}{2}\end{bmatrix}\right) = \underbrace{\boxed{s^2+(\alpha_1+\alpha_2)s+(\alpha_1\alpha_2)}}_{\text{équation caractéristique}}$$ **0.5**

L'équation désirée : $(s+3)(s+5) = s^2+8s+15$

Par identification entre l'équation caractéristique et l'équation désirée, on trouve :

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2 = 8\\ \alpha_1\alpha_2 = 15\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 = 3\\ \alpha_2 = 5\end{cases}$$ **0.5**

$$\Rightarrow \boxed{u = -11x_1 - 6x_2 + 7.5x_{1d} + 4\dot{x}_{1d} + 0.5\ddot{x}_{1d}}$$ **0.5**

Exercice 03 9pts :

1.
$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = 6x_1 + 3x_2 + 2u\end{cases}$$ **0.5**

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\6 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}u \quad \wedge \quad y = \begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$ **0.5**

2. Le gain de retour d'état : $t_r = 0.8\sec$ $D = 5\%$

L'équation caractéristique :

$$\det(sI - A + BK) = \det\left(s\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\6 & 3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\right) = \underbrace{\boxed{s^2+(2k_2-3)s+(2k_1-6)}}_{\text{équation caractéristique}}$$ **0.5**

0.5

L'équation désirée : $s^2+2\xi\omega s+\omega^2$

0.25
$$D = 5\% = 100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Rightarrow 0.05 = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Rightarrow \boxed{\xi = 0.6901}$$ **0.5**

0.25
$$t_r = 0.8\sec = \frac{3}{\omega_n} \Rightarrow \boxed{\omega_n = 3.75 rad/\sec}$$ **0.5**

L'équation désirée : $\boxed{s^2+5.175s+14.0625}$ **0.5**

Par identification entre l'équation caractéristique et l'équation désirée, on trouve :

$$\begin{cases}2k_2-3 = 5.175\\ 2k_1-6 = 14.0625\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k_1 = 10.0312\\ k_2 = 4.0875\end{cases} \Rightarrow \boxed{K = \begin{bmatrix}10.0312 & 4.0875\end{bmatrix}}$$ **0.5**

3. Surface de glissement : $s(x) = \alpha_1(x_1 - x_{1d}) + \alpha_2(x_2 - x_{2d})$ **0.25**

$$A_C = A - BK = \begin{bmatrix}0 & 1\\6 & 3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10.0312 & 4.0875\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\-14.0624 & -5.175\end{bmatrix}$$ **0.5**

$$A_C^T\alpha = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix}0 & -14.0624\\1 & -5.175\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases}-14.0624\alpha_2 = 0\\ \alpha_1 - 5.175\alpha_2 = 0\end{cases}$$

Pour $\alpha_1 = 1 \Rightarrow \alpha_1 - 5.175\alpha_2 = 1 - 5.175\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0.193$ **0.5**

$$\boxed{s(x) = (x_1 - x_{1d}) + 0.193(x_2 - x_{2d})}$$ **0.25**

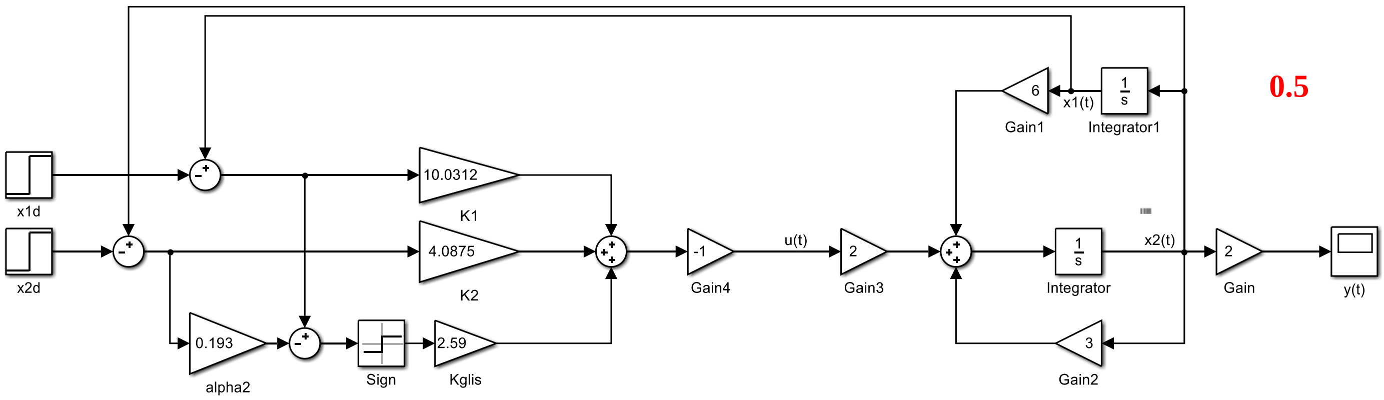
Gain de la partie discontinue : $\boxed{K_{glis}} = \left(\alpha^T B\right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix}1 & 0.193\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\right)^{-1} = \boxed{2.59}$ **0.5**

0.5

La commande finale :

$$\boxed{u = u_{eq} + u_{glis} = -10.0312(x_1 - x_{1d}) - 4.0875(x_2 - x_{2d}) - 2.59 * sign\left((x_1 - x_{1d}) + 0.193(x_2 - x_{2d})\right)}$$

4.



5. Pour r=2 :

0.5

$$s(x) = \dot{e}(x) + \lambda e(x) \Rightarrow \boxed{s(x) = (\dot{x}_1 - \dot{x}_{1d}) + 0.193(\dot{x}_2 - \dot{x}_{2d}) + \lambda(x_1 - x_{1d}) + 0.193\lambda(x_2 - x_{2d})}$$

6. On pose : $\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_2 = x_2 \\ z_3 = \dot{x}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = \dot{x}_1 = x_2 = z_2 \\ \dot{z}_2 = \dot{x}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = \ddot{x}_2 = 6\dot{x}_1 + 3\dot{x}_2 + 2\dot{u} = 6z_2 + 3z_3 + 2\dot{u} \end{cases}$ **0.5**

Donc la surface ça devient : $s(x) = \lambda(z_1 - z_{1d}) + (1+0.193\lambda)(z_2 - z_{2d}) + 0.193(z_3 - z_{3d})$

$$\dot{s}(x) = 0 = \lambda z_2 + (1+0.193\lambda) z_3 + 0.193(6z_2 + 3z_3 + 2\dot{u})$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{u} = -\frac{\lambda+1.158}{0.386} z_2 - \frac{1.579+0.193\lambda}{0.386} z_3}$$ **0.5**