

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Bor Rotar, Jani Metež

O ekstremnih grafih v povezavi z obteženim Szegedovim indeksom

Ljubljana, 2020

1 Definiranje problema

V projektni nalogi bova pokazala, da so grafi, ki minimizirajo obteženi Szgadol indeks (wSz), za 26 ali več vozlišč drevesa in jih pokazala. Hkrati bova skušala ugotoviti čim več lastnosti teh dreves.

Obteženi Szgadol indeks:

$$wSz(G) = \sum_{e=uv \in E(G)} [deg(u) + deg(v)] \cdot n_u(e) \cdot n_v(e)$$

Pripombe:

1. $deg(u)$ je stopnja vozlišča
2. $n_u(e)$ je moč množice vseh vozlišč, ki so bližje u kot pa v (vključno z u in v)
3. Obteženi Szgadol indeks je definiran za enostavne grafe

Potek dela:

V *Sage*-u oz. *Cocalc*-u bo potrebno definirati wSz in ugotoviti čim bolj enostaven in hkrati učinkovit način za generiranje grafov, ki minimizirajo ta indeks. Ko bo to storjeno, bo potrebno le še opaziti čim več možnih lastnosti teh grafov in od katerega števila vozlišč naprej veljajo. Nekatere lastnosti že poznamo iz vira na katerega se navezuje projekt.

2 Algoritmi

2.1 Obteženi Szgadol indeks

Obteženi Szgadol indeks bomo označili z wSz . Definiran bo tako, da se bo zapeljal čez vsako povezavo.

```
def wSz(M):
    indeks = []
    d = M.distance_all_pairs()
    for u,v in M.edges(labels = False):
        blizu_u = 0
        for a in M.vertices():
            if d[a][u] < d[a][v]:
                blizu_u += 1
        blizu_v = order(M) - blizu_u
        indeks += [(M.degree(u) + M.degree(v)) * blizu_u * blizu_v]
    return sum(indeks)
```

2.2 Spreminjanje grafa

Algoritem vzame nek povezan graf in mu dodaja ali odstranjuje povezave, pri tem pazi na to, da graf ostaja povezan (wSz je definiran za enostavne torej povezane grafe).

```
from sage.graphs.connectivity import is_connected
def spremeni_graf(G):
    H = Graph(G)
    if random() < 0.5:
        i = 0
        while True:
            H.delete_edge(H.random_edge())
            if is_connected(H):
                H
                break
            else:
                H = Graph(G)
                i = i + 1
                True
        if i > 15:
            H.add_edge(H.complement().random_edge())
            break
    return H
```

Dodamo še preprosto funkcijo, ki grafu doda novo vozlišče in ga poveže z prvim vozliščem grafa.

```
def novo_vozlisce(G):
    H = Graph(G)
    novo_vzl = order(H)
    H.add_edge((0, novo_vzl, None))
    return H
```

2.3 Algoritem za minimiziranje wSz

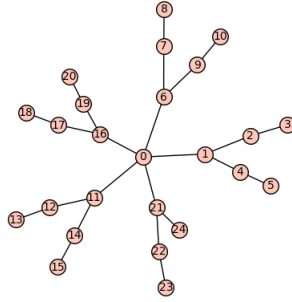
Ko pogledamo grafe z minimalnim wSz do 25 vozlišč opazimo, da so si med seboj precej podobni. Posledično lahko sklepamo, da če grafu na n vozliščih, ki že ima minimalni wSz , dodamo novo vozlišče s povezavo, bomo lažje prišli do grafa z minimalnim wSz na $(n + 1)$ vozliščih, kot pa če to iščemo na čisto novem grafu.

Torej, da najdemo graf na n vozliščih z $\min(wSz)$ bomo grafu na $(n - 1)$ vozliščih z že minimiziranim wSz dodali vozlišče in povezavo in ga spreminjali ter te spremembe obdržali, če je wSz novega grafa manjši. Ko wSz ne bomo mogli več zmanjšati, algoritem oz. ponovitve algoritma zaključimo. Algoritem deluje po sistemu simulated annealing, kjer z naključno izbiro skušamo najti ekstrem danega kriterija.

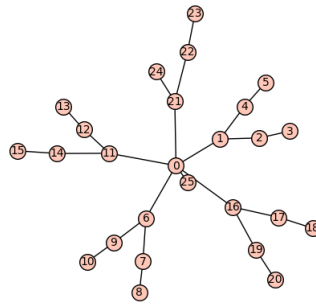
```
def min_wSz(H, koraki):
    k = 0
    primerjajH = H
    HwSz = wSz(H)
    while k < koraki:
        k = k + 1
        H = spremeni_graf(H)
        MwSz = wSz(H)
        if MwSz < HwSz:
            primerjajH = H
    return primerjajH
```

V algoritem pa lahko tudi vstavimo graf za katerega sklepamo, da ima minimalni wSz , in če ne najde boljšega grafa (po zadostnem številu korakov) lahko sklepamo, da ima ta graf že minimalni wSz .

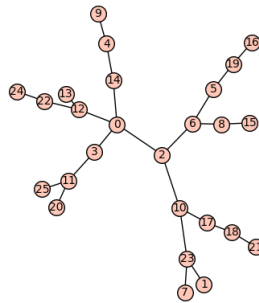
3 Primer iskanja in ugotovitve



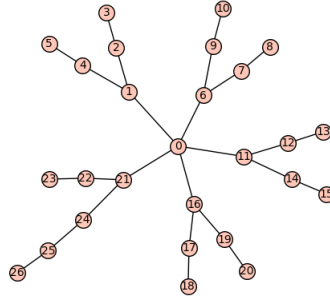
Slika 1: Graf na 25 vozliščih $wSz = 6686$



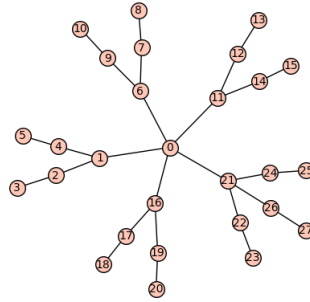
Slika 2: Začetni graf na 26 vozliščih $wSz = 7682$



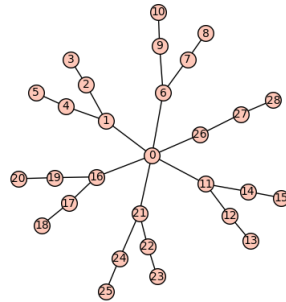
Slika 3: Graf na 26 vozliščih po 40000 korakih $wSz = 7632$



Slika 6: Graf na 27 vozliščih na koncu $wSz = 8118$



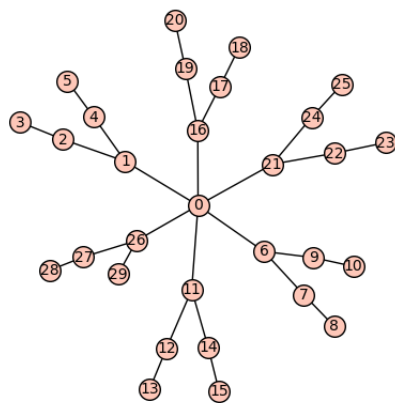
Slika 7: Graf na 28 vozliščih na koncu $wSz = 8910$



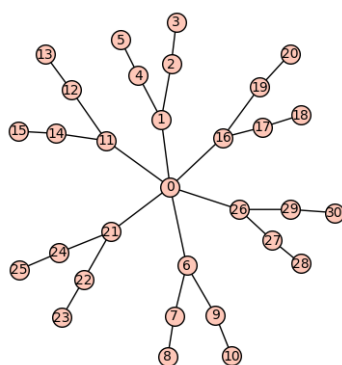
Slika 8: Graf na 29 vozliščih na koncu $wSz = 9864$

Ko dodamo dodatno vozlišče na graf z minimalnim wSz na 28 vozliščih, opazimo, da s povečanjem števila vozlišč na 29 nastane novo poddrevo, ki je povezano direktno s korenem (vozlišče 0).

Končni grafi so bili vedno drevesa, brez ciklov in vedno ena povezava manj od števila vozlišč. Rezultati podpirajo predpostavko, da imajo minimalni wSz le drevesa.



Slika 9: Graf na 30 vozliščih na koncu $wSz = 10714$



Slika 10: Graf na 31 vozliščih na koncu $wSz = 11580$

4 Lastnosti ekstremnih grafov

- Za grafe s 7 do 30 vozlišči smo poiskali vrednosti wSz in jih tudi primerjali z vrednostmi iz grafa na ena manj vozlišču.

Tabela 1: Izračunani wSz -ji minimalnih grafov in primerjave s prejšnimi

n	wSz	razlika	n	wSz	razlika
7	204	-	19	3292	418
8	306	102	20	3758	466
9	432	126	21	4240	482
10	578	146	22	4806	566
11	762	184	23	5396	590
12	970	208	24	6038	642
13	1210	240	25	6686	648
14	1476	266	26	7350	664
15	1780	304	27	8118	768
16	2100	320	28	8910	792
17	2472	372	29	9864	954
18	2874	402	30	10714	850

- Struktura grafov
- Diameter grafov z minimalnim wSz indeksom

Ob podrobnejšem ogledu strukture grafov z vozlišči med 20 in 30 hitro opazimo določene značilnosti in ponavljajoča zaporedja povezav.

Diameter oziroma premer grafa je maksimalno število povezav med dvema vozliščema v grafu.

Na grafu s 25 in 26 vozlišči je ta vrednost enaka 6. Pri grafu s 27 vozlišči pa opazimo, da je zaradi podaljšane veje z dodatnim vozliščem premer grafa enak 7. Že pri naslednjem grafu z 28 vozlišči ta vrednost zopet pade nazaj na 6, saj se spremeni struktura grafa.

Podobna situacija se zgodi tudi pri grafu s 32 vozlišči, kjer se dodatno vozlišče zopet doda na konec poddrevesa in je zato vrednost diametra enaka 7.

Z upoštevanjem spreminjanja strukture grafa lahko torej sklepamo, da je diameter grafov enak 6, razen za grafe z $22 + 5k$ vozlišč. Za grafe z manj kot 20 vozlišč namreč ta sklep ne velja, medtem ko se grafi s premerom 7 pojavljajo na vsakih 5 grafov.

5 Viri

Literatura

- [1] Jan Boka, Boris Furtula, Nikola Jedličkova in Riste Škrekovski *On Extremal Graphs of Weighted Szeged Index* <https://arxiv.org/abs/1901.04764>, 15 Jan 2019.
- [2] https://en.wikipedia.org/wiki/Simulated_annealing, ogled 7.1.2020