Logic and Set Theory, 2024

Exercise 1

Due Date: April 7

March 27, 2024

Keep the proofs in this exercise short and concise - For each section in questions 1,2,3,5 only the first 10 lines will be checked.

1. (a) Write all the elements of $\bigcap_{k=1}^{4} A_k$, for A_i defined as follows:
   A_1 - *The set of all integers* ($\mathbb{Z}$).
   A_2 - *The open interval* $(-700, 100)$.
   A_3 - *The set of all integers whose sum of digits is 8.*
   A_4 - *The set of integers with '6' on the second rightmost position.*

   (b) Define $A = \{S \in P(\mathbb{N}) | 2 \in S\}$. Write the sets $\bigcup A$, $\bigcap A$.

2. (a) Prove the following statement: $\bigcap_{n=1}^{\infty}(n, \infty) = \emptyset$

   (b) Prove: for all natural $k \geq 1$, the following holds - $\bigcap_{n=1}^{k}(n, \infty) \neq \emptyset$.

3. Prove : The set of strictly positive real numbers $\mathbb{R}^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}, \infty)$

4. **Prove** that the Axiom of Separation is provable by the rest of the axioms.

   Guideline: *Define some set A and some predicate $P(x)$, and consider the following two cases: 1. No element in A satisfies the predicate; 2. There exists at least one element that satisfies the predicate. For the first case, use the Axiom of the Existence of the Empty Set, and for the second, the Axiom of Replacement.*

5. In this question, you should use the ZFC axioms to construct a set from a different set, without using the Axiom of Replacement (you may use all other 9 axioms). Treat integers as atomic elements (so you may not construct an integer from sets).

   (a) Given the set $A = \{7\}$, construct the set $\{\{7\}, 7\}$.
   (b) Given the set $A = \{3, \{5, 7\}\}$, construct the set $\{3, 7\}$.

6. For each of the following, determine whether it is a valid representation of an ordered pair. If so, prove it using the ordered pair property. If not, show a counter example:

   (a) $< x, y >= \{\{x, \emptyset\}, \{y, \{\emptyset\}\}\}$.

   (b) $< x, y >= \{\{x, \emptyset\}, \{\emptyset, y\}\}$

1. (a) Write all the elements of $\bigcap_{k=1}^{4} A_k$, for A_i defined as follows:
   A_1 - *The set of all integers* ($\mathbb{Z}$).
   A_2 - *The open interval* $(-700, 100)$.
   A_3 - *The set of all integers whose sum of digits is 8.*
   A_4 - *The set of integers with '6' on the second rightmost position.*

$\bigcap_{k=1}^{4} A_k = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 =$

ל נשים ♡ $A_2 \subseteq A_1$ לכן $A_1 \cap A_2 = A_2$

$A_1 \cap A_2 = A_2$

כעת נחית באוקוץ $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$

נרצה למצוא את כל השלמים בין $(-700,100)$

כך שהספרה 6 בהם ממוקמת בשנייה מימין וגם סכום הספרות הוא 8.

נתחיל מהחיוביים. מתקבל המספר 62 בלבד.

בשליליים $-62, -161, -260$.

כלומר $\bigcap_{k=1}^{4} A_k = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \{62, -62, -161, -260\}$

(b) Define $A = \{S \in P(\mathbb{N}) | 2 \in S\}$. Write the sets $\bigcup A$, $\bigcap A$.

A הינה קבוצת כל קבוצות החזקה של הטבעיים אשר האיבר 2
נמצא בתוכן.

$\bigcup A = \mathbb{N}$

$\bigcap A = \{2\}$

2. (a) Prove the following statement: $\underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty}(n,\infty)}_{A} = \underbrace{\emptyset}_{B}$

נניח בשלילה כי $A \neq B$ כלומר קיים $a \in \mathbb{N}$ כך ש- $a \in A$.

נשים ♡ כי $a+1 \in \mathbb{N}$ גם כן. כלומר $1 < a < a+1 < \infty$

אם כך: $a \notin (a+1,\infty) \cap (a+2,\infty) \dots (a,\infty)$

בסתירה לכך ש- $a \in A$

(b) Prove: for all natural $k \geq 1$, the following holds - $\bigcap_{n=1}^{k}(n,\infty) \neq \emptyset$.

נניח בשלילה כי קיים $1 \leq k \in \mathbb{N}$ כך ש $\bigcap_{n=1}^{k}(n,\infty) = \emptyset$

<u>אם $k=1$:</u>

$$\bigcap_{n=1}^{1}(n,\infty) = \bigcap(1,\infty) = (1,\infty) \neq \emptyset$$

<u>אם $k>1$:</u>

$$\bigcap_{n=1}^{k}(n,\infty) = (1,\infty) \cap \dots (k-1,\infty) \cap (k,\infty)$$

ונשים ♡ כי לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $\bigcap_{n=1}^{k-1}(n,\infty) \supseteq (k,\infty)$

אם כך $\bigcap_{n=1}^{k}(n,\infty) = (k,\infty)$

עוד נשים ♡ כי קיים $k+1 \in \mathbb{N}$. אם כך $k+1 \in (k,\infty)$
בסתירה להנחה בשלילה.

3. Prove : The set of strictly positive real numbers $\underbrace{\mathbb{R}^+}_{B} = \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}, \infty)}_{A}$

$R^+ = (0, \infty)$

נראה הכלה דו כיוונית.

$A \subseteq B$:

נשים ♡ שלכל $n \in \mathbb{N}$ בהכרח מתקיים $(\frac{1}{n}, \infty) \subseteq R^+$

אם כך בהכרח מהגדרת האיחוד הגדול

$\bigcup_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n}, \infty) \subseteq R^+$

$B \subseteq A$:

יהי $x \in R^+ = (0, \infty)$. מארכימדיות הסדר אנו יודעים כי לכל

x קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $\frac{1}{n} < x$. כלומר $x \in (\frac{1}{n}, \infty)$

אם כך בהכרח מהגדרת האיחוד הגדול

$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n}, \infty)$

משמע, $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n}, \infty)$

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, \infty\right)$$

4. **Prove** that the Axiom of Separation is provable by the rest of the axioms.

Guideline: *Define some set A and some predicate $P(x)$, and consider the following two cases: 1. No element in A satisfies the predicate; 2. There exists at least one element that satisfies the predicate. For the first case, use the Axiom of the Existence of the Empty Set, and for the second, the Axiom of Replacement.*

יהי A קבוצה ופרדיקט $P(x)$.

נניח $B = \{x \in A : P(x)\}$

1: תחילה נניח כי לכל $x \in A$ מתקיים $P(x) \equiv F$.

נגדיר קבוצה B כי: $B = \{x \in A : P(x)\}$

מההנחה $B = \{\}$. מאקסיומת הקבוצה הריקה יש כזו.

מהגדרת קבוצה ריקה אנו יודעים דהיינו כי $\{\} \subseteq A$

לכן $B \subseteq A$. והיא אכן מקיימת – $B = \{x \in A : P(x)\}$

2: נניח כי קיים $x_1 \in A$ כך ש $P(x) \equiv T$.

נגדיר מיפוי – μ :

$$\mu(x) = \begin{cases} x & P(x) \\ x_1 & \neg P(x) \end{cases}$$

לכן עפ"י אקסיומת ההחלפה קיימת קבוצה B המחליפה את איברי A ב-$\mu(x)$. בקבוצה B כל האיברים מקיימים $P(x)$

כלומר

$$B = \{x \in A : P(x)\}$$

5. In this question, you should use the ZFC axioms to construct a set from a different set, without using the Axiom of Replacement (you may use all other 9 axioms). Treat integers as atomic elements (so you may not construct an integer from sets).

   (a) Given the set $A = \{7\}$, construct the set $\{\{7\}, 7\}$.

   (b) Given the set $A = \{3, \{5, 7\}\}$, construct the set $\{3, 7\}$.

(א) מאקסיומת החזקה קיים

$B = \{\emptyset, \{7\}\}$

מאקסיומת ההפרדה קיים $P(x) = x \neq \emptyset$ ונקבל

$C = \{\{7\}\}$

מאקסיומת הזוג הלא סדור קיים

$P = \{C, A\} = \{\{7\}, 7\}$

(ב) נגדיר $P(x) = x = 3$ כלומר לפי אקסיומת ההפרדה קיימת

$B = \{3\}$

באופן דומה קיימת $P_2(x) = x = \{5, 7\}$ לכן קיימת

$C = \{\{5, 7\}\}$

$D = \{5, 7\}$ מהגדרת האיחוד הגדול קיימת קבוצה D

נגדיר $P_3(x) = x = 7$ לכן קיימת E

$E = \{7\}$

לפי אקסיומת הזוג הסדור קיים F כך ש

$F = \{E, B\} = \{\{3\}, \{7\}\}$

לפי אקסיומת האיחוד קיימת G

$G = \{3, 7\}$

6. For each of the following, determine whether it is a valid representation of an ordered pair. If so, prove it using the ordered pair property. If not, show a counter example:

(a) $< x, y >= \{\{x, \emptyset\}, \{y, \{\emptyset\}\}\}$.

(b) $< x, y >= \{\{x, \emptyset\}, \{\emptyset, y\}\}$

$(a, b) = (x, y) \leftrightarrow (a = x \wedge b = y)$

(א)

צ"ל $a=x \wedge b=y \iff \{\overset{A}{\{a,\phi\}},\overset{B}{\{b,\{\phi\}\}}\} = \{\{x,\emptyset\},\{y,\{\emptyset\}\}\}$.

$\Rightarrow$: הצד הטריוויאלי

$\Leftarrow$: נחלק למקרים:

<u>נניח $\{a,\phi\}=\{x,\phi\}$</u>: בכל המקרים $a=x$.

אם $a=x$ סיימנו. אם $a=\phi$ אז בהכרח $x=\phi$

ו- $a=x$.

מההנחה - $\{b,\{\phi\}\} = \{y,\{\phi\}\}$

אם $b=y$ סיימנו ואם $b=\{\phi\}$ אז בהכרח

$y=\{\phi\}$ כלומר $b=y$.

$a=x \wedge b=y$

<u>נניח $\{a,\phi\}=\{y,\{\phi\}\}$</u>:

מהיות $\{\phi\}\neq\phi$ אזי $a=\{\phi\}$ ו- $y=\phi$.

מההנחה $\{b,\{\phi\}\}=\{x,\phi\}$. באופן זהה בהכרח $b=\phi$

ו- $x=\{\phi\}$.

כלומר $y=b \wedge a=x$

(I) נביט בזוגות הבאים

$(a,b) = (1,2)$

$(x,y) = (2,1)$

נשים ♡ לפי הגדרה (x,y) , (a,b) אינם זוג סדור

$$(a,b) = (1,2) \to \{\{1,\emptyset\},\{\emptyset,2\}\} =$$

$$\{\{\emptyset,1\},\{2,\emptyset\}\} \to (2,1) = (x,y)$$

וקיבלנו סתירה מהיות — $(1,2) \neq (2,1)$