Теоретические основы моделирования движения камня с учетом сопротивления воздуха

Физическое моделирование

1 Введение

В данной работе рассматривается численное моделирование движения тела, брошенного под углом к горизонту, с учетом сопротивления воздуха. Исследуются две модели силы сопротивления: линейная и квадратичная.

2 Основные уравнения движения

2.1 Уравнения движения без сопротивления

Для тела массой m в поле тяжести Земля уравнения движения имеют вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \tag{1}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg \tag{2}$$

В проекциях на оси:

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g \tag{4}$$

Начальные условия при $t = 0$:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0 \tag{5}$$
$$v_x(0) = v_0 \cos\alpha \tag{6}$$
$$v_y(0) = v_0 \sin\alpha \tag{7}$$

где v_0 - начальная скорость, α - угол броска.

2.2 Аналитическое решение (без сопротивления)

Решение уравнений (3)-(4) с начальными условиями (5)-(7):

$$x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t \tag{8}$$
$$y(t) = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \tag{9}$$
$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha \tag{10}$$
$$v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt \tag{11}$$

Дальность полета:

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \tag{12}$$

Максимальная высота:

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \tag{13}$$

Время полета:

$$T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \tag{14}$$

3 Модели с сопротивлением воздуха

3.1 Линейное сопротивление (вязкое трение)

Сила сопротивления пропорциональна скорости:

$$\vec{F}_{res} = -k\vec{v} \tag{15}$$

Уравнения движения:

$$m\frac{dv_x}{dt} = -kv_x \tag{16}$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = -mg - kv_y \tag{17}$$

В безразмерном виде:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}v_x \tag{18}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{k}{m}v_y \tag{19}$$

3.2 Квадратичное сопротивление (лобовое сопротивление)

Сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости:

$$\vec{F}_{res} = -kv\vec{v} \tag{20}$$

Уравнения движения:

$$m\frac{dv_x}{dt} = -kvv_x \tag{21}$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = -mg - kvv_y \tag{22}$$

где $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ - модуль скорости.
В безразмерном виде:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}vv_x \tag{23}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{k}{m}vv_y \tag{24}$$

4 Численный метод решения

4.1 Метод Эйлера

Для численного решения системы дифференциальных уравнений используется метод Эйлера. Рассмотрим общий вид:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(\vec{v}, t) \tag{25}$$

Дискретизация по времени с шагом Δt:

$$\vec{v}(t+\Delta t) = \vec{v}(t) + \vec{F}(\vec{v}(t), t) \cdot \Delta t \tag{26}$$

4.2 Применение к нашей задаче

Для линейного сопротивления:

$$v_x^{n+1} = v_x^n - \frac{k}{m} v_x^n \Delta t \tag{27}$$

$$v_y^{n+1} = v_y^n - \left(g + \frac{k}{m} v_y^n\right) \Delta t \tag{28}$$

$$x^{n+1} = x^n + v_x^n \Delta t \tag{29}$$

$$y^{n+1} = y^n + v_y^n \Delta t \tag{30}$$

Для квадратичного сопротивления:

$$v^n = \sqrt{(v_x^n)^2 + (v_y^n)^2} \tag{31}$$

$$v_x^{n+1} = v_x^n - \frac{k}{m} v^n v_x^n \Delta t \tag{32}$$

$$v_y^{n+1} = v_y^n - \left(g + \frac{k}{m} v^n v_y^n\right) \Delta t \tag{33}$$

$$x^{n+1} = x^n + v_x^n \Delta t \tag{34}$$

$$y^{n+1} = y^n + v_y^n \Delta t \tag{35}$$

5 Алгоритм программы

1. Задание начальных условий: v_0, α, k, тип модели
2. Перевод угла в радианы: $\alpha_{rad} = \alpha \cdot \pi/180$
3. Инициализация переменных: $x = 0$, $y = 0$, $v_x = v_0 \cos \alpha_{rad}$, $v_y = v_0 \sin \alpha_{rad}$
4. Цикл по времени с шагом Δt пока $y \geq 0$:
   - Вычисление текущей скорости v
   - Расчет силы сопротивления по выбранной модели

- Обновление скоростей и координат по методу Эйлера
- Сохранение траектории

5. Определение точки падения ($y = 0$)

6. Вывод результатов и построение графиков

6 Возможности аналитического решения

6.1 Линейное сопротивление

Уравнения движения допускают точное аналитическое решение:

Для горизонтальной компоненты:

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot e^{-\frac{k}{m}t} \tag{36}$$

$$x(t) = \frac{v_0 \cos\alpha \cdot m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \tag{37}$$

Для вертикальной компоненты:

$$v_y(t) = \left(v_0 \sin\alpha + \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k} \tag{38}$$

$$y(t) = \frac{m}{k}\left(v_0 \sin\alpha + \frac{mg}{k}\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - \frac{mg}{k}t \tag{39}$$

6.2 Квадратичное сопротивление

Система уравнений для квадратичного сопротивления не имеет общего аналитического решения в элементарных функциях.

7 Заключение

Разработанная программа позволяет исследовать влияние сопротивления воздуха на траекторию движения тела. Численное решение методом Эйлера обеспечивает достаточную точность для качественного анализа, а сравнение с аналитическим решением позволяет оценить влияние различных факторов на движение тела в поле тяжести Земли.