1 Aufgabensammlung

Hier sind alle (für die Minitests) relevanten Aufgaben aus der Aufgabensammlung

1.1 Mengen

Wissen 1.1.1 - 1.1.4 & 1.1.7 - 1.1.10
Rechnen 1.2.1 - 1.2.5

1.2 Abbildungen

Wissen 2.1.1 - 2.1.13
Rechnen 2.2.1 - 2.2.7

1.3 Aussagenlogik

Wissen 3.1.1 - 3.1.17
Rechnen 3.2.1 - 3.2.6

1.4 Relationen

Wissen 4.1.1 - 4.1.15
Rechnen 4.2.1 - 4.2.10

1.5 Algebraische Strukturen

Wissen 5.1.1 - 5.1.9 & 5.1.11 - 5.1.20
Rechnen 5.2.3, 5.2.4

1.6 Vollständige Induktion

Wissen 6.1.1 - 6.1.11
Rechnen 6.2.2 - 6.2.6 & (6.2.1)

1.7 Rechnen mit Komplexen Zahlen

Inhalt fehlt!

1.8 Mengen in der Komplexen Ebene

Inhalt fehlt!

1.9 Folgen Nicht Bestandteil der Minitests!

1.10 Reihen Nicht Bestandteil der Minitests!

2 Test1, Gruppe 1

1 Wie ist das Kartesische Produkt von n Mengen $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n$ definiert?
$M_1 \times M_2 \times M_3 \times \ldots \times M_m = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m) : x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, x_3 \in M_3, \ldots, x_m \in M_m\}$

2 Wie lauten die Gesetze von *De Morgan* für Mengen?
$M_1^c \cup M_2^c = (M_1 \cap M_2)^c$
$M_1^c \cap M_2^c = (M_1 \cup M_2)^c$

3 Wie ist die **Potenzmenge** einer Menge M definiert?
$P(M) := 2^M := \{N : N \subset M\}$

4 Wie sind (a) **Maximum** und (b) **Minimum** einer Menge $M \subset \mathbb{R}$ definiert? (c) Gibt es diese immer? (d) Warum ist es für die Definition relevant, dass $M \subset \mathbb{R}$?
a) $y \geq x$
b) $y \leq x$
c) Es muss nicht immer Maximum und Minimum geben, allerdings immer Supremum und Infimum.
d) Lösung Nicht vorhanden!

5 Wann sind zwei Abbildungen $f(x)$ und $g(x)$ **gleich**?
Zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sind gleich, wenn für jeden Wert von x gilt, dass $f(x) = g(x)$.

6 Was muss eine Abbildung $f : X \to Y$ erfüllen, damit sie **injektiv** ist?
Sie darf jedem Element im Definitionsbereich X höchstens ein Element im Zielbereich Y zuordnen.

7 Seien $M_1 = \{0, 1, 2\}$ und $M_2 = \{-1, 0\}$. Berechnen Sie $M_1 \times M_2$, das kartesische Produkt.
$M1 \times M2 = \{(0, -1), (0, 0), (1, -1), (1, 0), (2, -1), (2, 0)\}$

8 Sei $M = \{0, 1, \triangle\}$. Berechnen Sie $P(M)$.
$P(M) = \{\{0\}\{1\}\{\triangle\}\{0, 1\}\{0, \triangle\}\{1, \triangle\}\{0, 1, \triangle\}\{\}\}$

9 Seien $M_1 = \{a, b, 1\}$, $M_2 = \{1, 2, c\}$ und $M = \{0, 1, 2, a, b, c\}$. Berechnen Sie:

- $M_1 \cup M_2 = a, b, c, 1, 2$
- $M_1 \setminus M_2 = a, b$
- $M_2 \cap M = 1, 2, c$

10 Sei $f : [0, 5] \to [-1, 9], f(x) = 2 \cdot x - 1$ eine Abbildung, Berechnen Sie (a) das Bild der Menge [3, 4] (also f([3,4]) und (b) das Urbild einer Menge -1,0,1 (also $f^{-1}(-1, 0, 1)$).

$f(x) = 2x - 1$
$f(3) = (2 \cdot 3) - 1 = 5 \qquad f(4) = (2 \cdot 4) - 1 = 7$

a) Bildmenge = [5,7]

b)
$f^{-1}(-1) = 2x - 1$
$-1 = 2x - 1 \; |{+1}$
$0 = 2x| : 2$
$x = 0$

$f^{-1}(0) = 2x - 1$
$0 = 2x - 1| + 1$
$1 = 2x| : 2$
$0,5 = x$

$f^{-1}(1) = 2x - 1$
$1 = 2x - 1| + 1$
$2 = 2x| : 2$
$1 = x$

$f^{-1}((-1, 0, 1)) = (0; 0,5; 1)$

3 Test2, Gruppe 2

1 (a) Wie ist die **identische Abbildung** auf einer Menge X definiert? (b) Welche zusätzliche Bedingung wird an die Menge X gestellt?
a) $\mathrm{id}(x) := \mathrm{id}_X(x) := x \quad (x \in X)$
b) Es handelt sich um eine nicht leere Menge. $x(x \in X)$

2 Existiert zu jeder Abbildung $f : X \to Y$ eine Umkehrabbildung? Begründen Sie ihre Antwort!
Nein, die Funktion muss bijektiv sein, um eine Umkehrabbildung zu bilden. Es könnten sonst Definitionslücken entstehen.

3 Wie ist die Konjunktion zweier Aussagen A und B definiert?
$A \wedge B$ über die Wahrheitstabelle:

A	B	$A \wedge B$
f	f	f
f	w	f
w	f	f
w	w	w

4 Wann sind zwei Aussageformeln F_1, F_2 nach der Definition **gleichwertig**?
Zwei Aussageformeln F_1 und F_2 heißen gleichwertig, wenn für alle möglichen Besetzungen von Wahrheitswerten in F_1 und F_2 die Aussage $F_1 \Leftrightarrow F_2$ immer wahr ist.

5 Wie lauten die **Distributivgesetze** der Aussagenlogik?
$A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
$A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

6 Auf welcher Aussagenlogischen Äquivalenz beruht das Beweisprinzip der Kontraposition?
Beruht auf der folgenden Äquivalenz:
$(B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (\neg B \Leftarrow \neg C)$

7 Sei $f : \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to X, f(x) := \begin{cases} -2 \cdot x & \text{, falls } x \leq 0 \\ 3 \cdot x & \text{, sonst} \end{cases}$ eine Abbildung. Bestimmen Sie die Menge X so, dass f bijektiv ist.
$-2 \cdot -2 = 4$
$-2 \cdot -1 = 2$
$-2 \cdot 0 = 0$
$3 \cdot 1 = 3$
$3 \cdot 2 = 6$
$3 \cdot 3 = 9$

$X := \{4, 2, 0, 3, 6, 9\}$

8 Seien $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(x) = |x|$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $g(x) := \lfloor x \rfloor$ ($\lfloor x \rfloor$ ist die Floor-Funktion, sie gibt immer die zu der gegebenen Zahl nächst kleinere oder gleiche Zahl zurück). (a) Wie können Sie die beiden Funktionen korrekt verketten? (b) Warum geht das so und andersherum nicht? Sei (h) die korrekt Verkettete Funktion von (f) und (g). Was liefern dann (c) ($h(\pi)$) und (d) ($h(-5\frac{1}{2})$).
a) $f \circ g(x)$
b) Wenn man die beiden Funktionen anders herum verketten würde, so würde man den *Ausgang* von f in den *Eingang* von g leiten. Und das geht nicht von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$, weil die Anzahl der Elemente in den Mengen unterschiedlich ist, da $\mathbb{N}$ abzählbar ist und $\mathbb{R}$ überabzählbar ist
c) 3
d) 6

9 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 1$ eine Funktion. (a) Wie lautet die Umkehrfunktion f^{-1} zu f. (b) Zeigen Sie, dass Ihre Umkehrfunktion wirklich die Umkehrfunktion ist.
a) $f^{-1}(x) = x \cdot (\frac{y-1}{5})$
b) $f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x)$

10 Zeigen Sie mittels Wahrheitstabelle, dass die Aussageformeln $F_1(A, B, C) = A \lor (B \land C)$ und $F_2(A, B, C) = (A \lor B) \land (A \lor C)$ äquivalent sind.

A	B	C	$B \land C$	F_1	$A \lor B$	$A \lor C$	F_2	$F_1 \Leftrightarrow F_2$
W	W	W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	F	W	W	W	W	W
W	F	W	F	W	W	W	W	W
W	F	F	F	W	W	W	W	W
F	W	W	W	W	W	W	W	W
F	W	F	F	F	W	F	F	W
F	F	W	F	F	F	W	F	W
F	F	F	F	F	F	F	F	W

4 Test3, Gruppe 2

1 Wie wird eine binäre Relation ($R_1 \subset M \times M$) auf der Menge (M) genannt im Gegensatz zu einer Relation ($R_2 \subset N_1 \times N_2$) mit ($N_1 \neq N_2$)?
Homogene Relation

2 Was muss eine Relation $R \subset X \times Y$ erfüllen, um rechtstotal zu sein?
$\forall y \in Y, \exists x \in X : (x, y) \in R$

3 Was muss eine homogene Relation $R \subset M^2$ erfüllen, um symmetrisch zu sein?
$\forall x, y \in M gilt : (x, y) \in R \to (y, x) \in R$

4 Was muss eine homogene Relation $R \subset M^2$ erfüllen, um transitiv zu sein?
transitiv, wenn für alle x,y,z ∈ M gilt: (x,y) ∈ R und (y,z) ∈ R → $(x, z) \in$ R

5 Nennen Sie die Namen der Eigenschaft einer abelschen Gruppe (G, *).
Kommutativ (macht Gruppe zur Abelsche Gruppe)
Assoziativ
Neutrales Element

Inverses Element
Total

6 Was ist S_n und wie ist es definiert?
Menge aller Permutationen von 1,. . . , n

7 Sei $M = 0, 1, 2, 3$. Bauen Sie eine Relation $R \subset M \times M$, sodass Ihre Relation *reflexiv* ist.

	0	1	2	3
0	0,0			
1		1,1		
2			2,2	
3				3,3

R := (0,0) (1,1) (2,2) (3,3)

8 Seien $M = \{0, -1, -2, -3, -4, -5\}$, $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ Mengen und

$$R = \{(0, 0), (-1, 1), (0, 2), (-3, 3), (0, 4), (-5, 5)\} \subset M \times N$$

eine Relation. Kann R dann auch der Graph einer Funktion sein? Falls ja, wie lautet dann die Definition der Funktion, und falls nein, warum nicht?

Nein, da ein x Wert mehreren y Werten zugeschrieben wird, gilt keine Linkstotalität und somit ist R keine Funktion. Und da R keine Funktion ist kann auch kein Graph abgebildet werden.

9 Gegeben sind die beiden Permutationen $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ aus der Gruppe $(S_3, \circ)$. Berechnen Sie (a) $\sigma_1 \circ \sigma_2$, (b) $\sigma_2 \circ \sigma_1$ sowie (c) $(\sigma_1)^{-1}$ und (d) $(\sigma_2)^{-1}$. **9** Gegeben sind die beiden Permutationen $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ aus der Gruppe $(S_3, \circ)$. Berechnen Sie

(a) $\sigma_1 \circ \sigma_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) $\sigma_2 \circ \sigma_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) $(\sigma_1)^{-1}$:

$$(\sigma_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) $(\sigma_2)^{-1}$:

$$(\sigma_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

10 Zeigen Sie mittels folgender Wahrheitstabelle, dass die Aussageformeln $F_1(A, B, C) = A \Rightarrow (B \vee C)$ und $F_2(A, B, C) = \neg(A \wedge \neg(B \vee C))$ äquivalent sind.

A	B	C	$B \vee C$	F_1	$\neg(B \vee C)$	$A \wedge \neg(B \vee C)$	F_2	$F_1 \Leftrightarrow F_2$
W	W	W	W	W	F	F	W	W
W	W	F	W	W	F	F	W	W
W	F	W	W	W	F	F	W	W
W	F	F	F	F	W	W	W	W
F	W	W	W	W	F	F	F	W
F	W	F	W	W	F	F	W	W
F	F	W	W	W	F	F	W	W
F	F	F	F	W	W	F	W	W

5 Test4, Gruppe 2

1 Sei $(K, \oplus, \odot)$ ein Körper und sei $k \in K_0 := K \setminus \{0\}$. Wie bezeichnen / schreiben wir allgemein das Inverse von k bezüglich der Verknüpfung $\odot$?
k^{-1}

2 Sei $(K, \oplus, \odot)$ ein Körper und sei $k \in K$. Wie bezeichnen oder schreiben wir allgemein das Inverse von k bezüglich der Verknüpfung $\oplus$?
$-k$

3 Unter welcher Bedingung ist der Restklassenring $\mathbb{Z}_m$ ein Körper?
Wenn $m \in \mathbb{P}$

4 (a) Aus welchen drei Abschnitten besteht ein Induktions-Beweis? (b) Skizzieren Sie was in jedem der Abschnitte passiert.

Induktionsanfang: Einsetzen des (i.d.R.) kleinsten Wertes für die Variable, zeigen dass Beide Seiten gleich sind. $n \in M$: (bewiesene Gleichung, also es existiert EIN Element für dass das gilt)
Induktionsannahme: Gleichung as der Aufgabenstellung
Induktionsschritt: $N \to N + 1$

5 Wie lautet die **Gaußsche Summenformel** (Inklusive Vorbedingungen)?
$\sum\limits_{v=1}^{n} v = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

6 Wie lautet der **binomische Satz** für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$?
$(a + b)^n = \sum\limits_{v=0}^{n} \binom{n}{v} a^v b^{n-v}$

7 Gegeben sei der endliche Restklassenkörper $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$. Geben Sie die Inversen der Multiplikation $(\cdot)$ an (soweit diese existieren). (Ergebnisse in Standardrepräsentanten)
$[1]_5 \cdot ([1]_5)^{-1} = 1$
$[2]_5 \cdot ([3]_5)^{-1} = 1$
$[3]_5 \cdot ([2]_5)^{-1} = 1$
$[4]_5 \cdot ([4]_5)^{-1} = 1$

8

Berechnen Sie das folgende:

$$([4]_{11})^{-1} + ([5]_{11})^{-1} \cdot [-10]_{11}$$

$[3]_{11} + [9]_{11} \cdot [1]_{11} = [12]_{11} = [1]_{11}$

9 Berechnen Sie $\binom{6}{4}$:

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = \frac{720}{24 \cdot 2} = 15$$

10 (c) Wie viele Mögliche sechsstellige Matrikelnummern gibt es im Dezimalsystem (Bestehend aus den Ziffern 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)? (Ziehen (a) mit/ohne Zurücklegen, (b) mit/ohne Beachtung der Reihenfolge?)
$n = 10$
$k = 6$ $n^k = 10^6 = 1.000.000$

6 Test5, Gruppe 2

1 Wie ist die Menge der komplexen Zahlen ($\mathbb{C}$) mittels der reellen Zahlen ($\mathbb{R}$) definiert?
$C := \{a + ib : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$

2 Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl. Wie sind $\mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z)$ definiert?
$Re(z) := a$
$Im(z) := b$

3 Wie ist die **Multiplikation** zweier komplexer Zahlen $z = a + ib, w = c + id \in \mathbb{C}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ definiert? $z \cdot w = \ldots$
(a + ib) $\cdot$ $(c + id)$

4 Wie ist der **Betrag** einer komplexen Zahl $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$ definiert?
$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$

5 Welchen Grad hat das folgende Polynom? $f(z) = (z^2 - z + \frac{1}{4})(z - (1 - i))^2$
Lösung Nicht vorhanden!

6 Betrachten Sie das folgende Polynom $f(z) = z^7 - 15z^6 + 97z^5 - 375z^4 + 1103z^3 - 2305z^2 + 2799z - 1305$ mit den Nullstellen $n_0 = 1$, $n_1 = i3$, $n_3 = 2 - i$, $n_5 = 5 + i2$. Geben Sie die fehlenden Nullstellen n_2, n_4 und n_6 an.
Lösung Nicht vorhanden!

7 Vervollständigen Sie: (Fundamentalsatz der __________ und __________ satz) Es sei $P(z) = \sum_{v=0}^{d} a_v z$ ein Polynom vom ___ > 0. Dann existieren $z_1, ..., z_k \in$ ___ und zugehörige $\alpha_1, ..., \alpha_k \in$ ___, so dass $P(z) = a_d(z -$ ___)——$(z -$ ___)——...$(z -$ ___)—— gilt, dabei ist $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k =$ ___.

8 Wie lautet die allgemeine Formel für eine Kreisscheibe mir Radius r und Mittelpunkt $a + ib$ in der Komplexen-Ebene?
Lösung Nicht vorhanden!

9 Zeichnen Sie die folgende Menge in der komplexen Ebene:

$$M := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \geq -\frac{5}{2} \wedge \mathrm{Im}(z) < \frac{\pi}{2}\}$$

Lösung in Arbeit

10 Beschreiben Sie die im Folgenden skizzierte Menge mittels der Mengenschreibweise.
Lösung in Arbeit