

# 1 Aufgabensammlung

Hier sind alle (für die Minitests) relevanten Aufgaben aus der Aufgabensammlung

## 1.1 Mengen

**Wissen** 1.1.1 - 1.1.4 & 1.1.7 - 1.1.10

**Rechnen** 1.2.1 - 1.2.5

## 1.2 Abbildungen

**Wissen** 2.1.1 - 2.1.13

**Rechnen** 2.2.1 - 2.2.7

## 1.3 Aussagenlogik

**Wissen** 3.1.1 - 3.1.17

**Rechnen** 3.2.1 - 3.2.6

## 1.4 Relationen

**Wissen** 4.1.1 - 4.1.15

**Rechnen** 4.2.1 - 4.2.10

## 1.5 Algebraische Strukturen

**Wissen** 5.1.1 - 5.1.9 & 5.1.11 - 5.1.20

**Rechnen** 5.2.3, 5.2.4

## 1.6 Vollständige Induktion

**Wissen** 6.1.1 - 6.1.11

**Rechnen** 6.2.2 - 6.2.6 & (6.2.1)

## 1.7 Rechnen mit Komplexen Zahlen

**Inhalt fehlt!**

## 1.8 Mengen in der Komplexen Ebene

**Inhalt fehlt!**

## 1.9 Folgen **Nicht Bestandteil der Minitests!**

## 1.10 Reihen **Nicht Bestandteil der Minitests!**

# 2 Test1, Gruppe 1

1 Wie ist das Karthesische Produkt von  $n$  Mengen  $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$  definiert?

$M_1 \times M_2 \times M_3 \times \dots \times M_m = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) : x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, x_3 \in M_3, \dots, x_m \in M_m\}$

2 Wie lauten die Gesetze von *DeMorgan* für Mengen?

$$M_1^c \cup M_2^c = (M_1 \cap M_2)^c$$

$$M_1^c \cap M_2^c = (M_1 \cup M_2)^c$$

3 Wie ist die **Potenzmenge** einer Menge  $M$  definiert?

$$P(M) := 2^M := \{N : N \subset M\}$$

4 Wie sind (a) **Maximum** und (b) **Minimum** einer Menge  $M \subset \mathbb{R}$  definiert? (c) Gibt es diese immer? (d) Warum ist es für die Definition relevant, dass  $M \subset \mathbb{R}$ ?

Lösung Nicht vorhanden!

5 Wann sind zwei Abbildungen  $f(x)$  und  $g(x)$  **gleich**?

Lösung Nicht vorhanden!

6 Was muss eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  erfüllen, damit sie **injektiv** ist?

Lösung Nicht vorhanden!

7 Seien  $M_1 = \{0, 1, 2\}$  und  $M_2 = \{-1, 0\}$ . Berechnen Sie  $M_1 \times M_2$ , das kartesische Produkt.

Lösung Nicht vorhanden!

8 Sei  $M = \{0, 1, \triangle\}$ . Berechnen Sie  $P(M)$ .

Lösung Nicht vorhanden!

9 Seien  $M_1 = \{a, b, 1\}$ ,  $M_2 = \{1, 2, c\}$  und  $M = \{0, 1, 2, a, b, c\}$ . Berechnen Sie:

- $M_1 \cup M_2 = a, b, 1, 2$
- $M_1 \setminus M_2 = 1, b$
- $M_2 \cap M =$

Lösung nicht vollständig

10 Sei  $f : [0, 5] \rightarrow [-1, 9]$ ,  $f(x) = 2 \cdot x - 1$  eine Abbildung, Berechnen Sie (a) das Bild der Menge  $[3, 4]$  (also  $f([3, 4])$ ) und (b) das Urbild einer Menge  $[-1, 0, 1]$  (also  $f^{-1}([-1, 0, 1])$ ).

Lösung Nicht vorhanden!

### 3 Test2, Gruppe 2

1 (a) Wie ist die **identische Abbildung** auf einer Menge  $X$  definiert? (b) Welche zusätzliche Bedingung wird an die Menge  $X$  gestellt?

Lösung Nicht vorhanden!

2 Existiert zu jeder Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  eine Umkehrabbildung? Begründen Sie ihre Antwort!

Nein, die Funktion muss bijektiv sein, um eine Umkehrabbildung zu bilden. Es könnten sonst Definitionslücken entstehen.

3 Wie ist die Konjunktion zweier Aussagen  $A$  und  $B$  definiert?

	$A$	$B$	$A \wedge B$
	f	f	f
$A \wedge B$ über die Wahrheitstabelle:	f	w	f
	w	f	f
	w	w	w

4 Wann sind zwei Aussageformeln  $F_1, F_2$  nach der Definition **gleichweirtig**?

Lösung Nicht vorhanden!

5 Wie lauten die **Distributivgesetze** der Aussagenlogik?

$$A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

Lösung nichtvollständig

6 Auf welcher Aussagenlogischen Äquivalenz beruht das Beweisprinzip der Kontraposition?

Lösung Nicht vorhanden!

7 Sei  $f : -2, -1, 0, 1, 2, 3 \rightarrow X, f(x) := \begin{cases} -2 \cdot x & , \text{ falls } x \leq 0 \\ 3 & , \text{ sonst} \end{cases}$  eine Abbildung. Bestimmen Sie die

Menge  $X$  so, dass  $f$  bijektiv ist.

Lösung Nicht vorhanden!

8 Seien  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = |x|$  und  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, g(x) := \lfloor x \rfloor$  ( $\lfloor x \rfloor$  ist die Floor-Funktion, sie gibt immer die zu der gegebenen Zahl nächst kleinere oder gleiche Zahl zurück). (a) Wie können Sie die beiden Funktionen korrekt verketteten? (b) Warum geht das so und andersherum nicht? Sei ( $h$ ) die korrekt Verkettete Funktion von ( $f$ ) und ( $g$ ). Was liefern dann (c) ( $h(\pi)$ ) und (d) ( $h(-5\frac{1}{2})$ ).

Lösung Nicht vorhanden!

9 Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5x + 1$  eine Funktion. (a) Wie lautet die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  zu  $f$ . (b) Zeigen Sie, dass Ihre Umkehrfunktion wirklich die Umkehrfunktion ist.

a)  $f^{-1}(x) = x \cdot (\frac{-1}{5})$

Lösung nichtvollständig

10 Zeigen Sie mittels Wahrheitstabelle, dass die Aussageformeln  $F_1(A, B, C) = A \vee (B \wedge C)$  und  $F_2(A, B, C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$  äquivalent sind.

$A$	$B$	$C$	$B \wedge C$	$F_1$	$A \vee B$	$A \vee C$	$F_2$	$F_1 \iff F_2$
W	W	W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	F	W	W	W	W	W
W	F	W	F	W	W	W	W	W
W	F	F	F	W	W	W	W	W
F	W	W	W	W	W	W	W	W
F	W	F	F	F	W	F	F	W
F	F	W	F	F	F	W	F	W
F	F	F	F	F	F	F	F	W

## 4 Test3, Gruppe 2

1 Wie wird eine binäre Relation ( $R_1 \subset M \times M$ ) auf der Menge ( $M$ ) genannt im Gegensatz zu einer Relation ( $R_2 \subset N_1 \times N_2$ ) mit ( $N_1 \neq N_2$ )?

## Homogene Relation

**2** Was muss eine Relation  $R \subset X \times Y$  erfüllen, um rechtstotal zu sein?

Lösung Nicht vorhanden!

**3** Was muss eine homogene Relation  $R \subset M^2$  erfüllen, um symmetrisch zu sein?

Lösung Nicht vorhanden!

**4** Was muss eine homogene Relation  $R \subset M^2$  erfüllen, um transitiv zu sein?

Lösung Nicht vorhanden!

**5** Nennen Sie die Namen der Eigenschaft einer abelschen Gruppe  $(G, *)$ .

Lösung Nicht vorhanden!

**6** Was ist  $S_n$  und wie ist es definiert?

Lösung Nicht vorhanden!

**7** Sei  $M = \{0, 1, 2, 3\}$ . Bauen Sie eine Relation  $R \subset M \times M$ , sodass Ihre Relation *reflexiv* ist.

	0	1	2	3
0	0,0			
1		1,1		
2			2,2	
3				3,3

$R := (0,0) (1,1) (2,2) (3,3)$

**8** Seien  $M = \{0, -1, -2, -3, -4, -5\}$ ,  $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  Mengen und

$$R = \{(0, 0), (-1, 1), (0, 2), (-3, 3), (0, 4), (-5, 5)\} \subset M \times N$$

eine Relation. Kann  $R$  dann auch der Graph einer Funktion sein? Falls ja, wie lautet dann die Definition der Funktion, und falls nein, warum nicht?

Nein, allerdings: Lösung Nicht vorhanden!

**9** Gegeben sind die beiden Permutationen  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  und  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  aus der Gruppe  $(S_3, \circ)$ . Berechnen Sie (a)  $\sigma_1 \circ \sigma_2$ , (b)  $\sigma_2 \circ \sigma_1$  sowie (c)  $(\sigma_1)^{-1}$  und (d)  $(\sigma_2)^{-1}$ . **9** Gegeben sind die beiden Permutationen  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  und  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  aus der Gruppe  $(S_3, \circ)$ . Berechnen Sie

Hier ist glaube ich noch irgendwo ein Fehler!

(a)  $\sigma_1 \circ \sigma_2$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(b)  $\sigma_2 \circ \sigma_1$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(c)  $(\sigma_1)^{-1}$ :

$$(\sigma_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(d)  $(\sigma_2)^{-1}$ :

$$(\sigma_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**10** Zeigen Sie mittels folgender Wahrheitstabelle, dass die Aussageformeln  $F_1(A, B, C) = A \Rightarrow (B \vee C)$  und  $F_2(A, B, C) = \neg(A \wedge \neg(B \vee C))$  äquivalent sind.

$A$	$B$	$C$	$B \vee C$	$F_1$	$\neg(B \vee C)$	$A \wedge \neg(B \vee C)$	$F_2$	$F_1 \Leftrightarrow F_2$
$W$	$W$	$W$	$W$	$W$	$F$	$F$	$W$	$W$
$W$	$W$	$F$	$W$	$W$	$F$	$F$	$W$	$W$
$W$	$F$	$W$	$W$	$W$	$F$	$F$	$W$	$W$
$W$	$F$	$F$	$F$	$F$	$W$	$W$	$W$	$W$
$F$	$W$	$W$	$W$	$W$	$F$	$F$	$F$	$W$
$F$	$W$	$F$	$W$	$W$	$F$	$F$	$W$	$W$
$F$	$F$	$W$	$W$	$W$	$F$	$F$	$W$	$W$
$F$	$F$	$F$	$F$	$W$	$W$	$F$	$W$	$W$

## 5 Test4, Gruppe 2

**1** Sei  $(K, \oplus, \odot)$  ein Körper und sei  $k \in K_0 := K \setminus \{0\}$ . Wie bezeichnen / schreiben wir allgemein das Inverse von  $k$  bezüglich der Verknüpfung  $\odot$ ?

Lösung Nicht vorhanden!

**2** Sei  $(K, \oplus, \odot)$  ein Körper und sei  $k \in K$ . Wie bezeichnen oder schreiben wir allgemein das Inverse von  $k$  bezüglich der Verknüpfung  $\oplus$ ?

Lösung Nicht vorhanden!

**3** Unter welcher Bedingung ist der Restklassenring  $\mathbb{Z}_m$  ein Körper?

Lösung Nicht vorhanden!

**4** (a) Aus welchen drei Abschnitten besteht ein Induktions-Beweis? (b) Skizzieren Sie was in jedem der Abschnitte passiert.

Lösung Nicht vorhanden!

**5** Wie lautet die **Gaußsche Summenformel** (Inklusive Verbedingungen)?

Lösung Nicht vorhanden!

**6** Wie lautet der **binomische Satz** für  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}_0$ ?

Lösung Nicht vorhanden!

**7** Gegeben sei der endliche Restklassenkörper  $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ . Geben Sie die Inversen der Multiplikation  $(\cdot)$  an (soweit diese existieren). (Ergebnisse in Standardrepräsentanten)

Lösung Nicht vorhanden!

8

Berechnen Sie das folgende:

$$([4]_1 1)^{-1} + ([5]_1 1)^{-1} \cdot [-10]_1 1$$

Lösung Nicht vorhanden!

9 Berechnen Sie  $\binom{6}{4}$ :

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = \frac{720}{24 \cdot 2} = 15$$

10 (c) Wie viele Mögliche schsstellige Metrikelnummern gibt es im Dezimalsystem (Bestehend aus den Ziffern 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)? (Ziehen (a) mit/ohne Zurücklegen, (b) mit/ohne Beachtung der Reihenfolge?)  
 $n = 10$

$$k = 6 \cdot n^k = 10^6 = 1.000.000$$

## 6 Test5, Gruppe 2

1 Wie ist die Menge der komplexen Zahlen ( $\mathbb{C}$ ) mittels der reellen Zahlen ( $\mathbb{R}$ ) definiert?

$$\mathbb{C} := \{ a + ib : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \}$$

2 Sei  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  eine komplexe Zahl. Wie sind  $\operatorname{Re}(z)$  und  $\operatorname{Im}(z)$  definiert?

$$\operatorname{Re}(z) := a$$

$$\operatorname{Im}(z) := b$$

3 Wie ist die **Multiplikation** zweier komplexer Zahlen  $z = a + ib, w = c + id \in \mathbb{C}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  definiert?  $z \cdot w = \dots$

Lösung Nicht vorhanden!

4 Wie ist der **Betrag** einer komplexen Zahl  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  definiert?

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

5 Welchen Grad hat das folgende Polynom?  $f(z) = (z^2 - z + \frac{1}{4})(z - (1 - i))^2$

Lösung Nicht vorhanden!

6 Betrachten Sie das folgende Polynom  $f(z) = z^7 - 15z^6 + 97z^5 - 375z^4 + 1103z^3 - 2305z^2 + 2799z - 1305$  mit den Nullstellen  $n_0 = 1$ ,  $n_1 = i3$ ,  $n_3 = 2 - i$ ,  $n_5 = 5 + i2$ . Geben Sie die fehlenden Nullstellen  $n_2$ ,  $n_4$  und  $n_6$  an.

Lösung Nicht vorhanden!

7 Vervollständigen Sie: (Fundamentalsatz der \_\_\_\_\_ und \_\_\_\_\_ satz) Es sei  $P(z) = \sum_{v=0}^d a_v z^v$  ein Polynom vom \_\_\_\_\_  $> 0$ . Dann existieren  $z_1, \dots, z_k \in \_\_\_\_\_\_$  und zugehörige  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \_\_\_\_\_\_$ , so dass  $P(z) = a_d(z - \_\_\_\_\_\_)(z - \_\_\_\_\_\_)\dots(z - \_\_\_\_\_\_)$  gilt, dabei ist  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = \_\_\_\_\_\_$ .

8 Wie lautet die allgemeine Formel für eine Kreisscheibe mit Radius  $r$  und Mittelpunkt  $a + ib$  in der Komplexen-Ebene?

Lösung Nicht vorhanden!

9 Zeichnen Sie die folgende Menge in der komplexen Ebene:

$$M := \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq -\frac{5}{2} \wedge \operatorname{Im}(z) < \frac{\pi}{2} \}$$

Lösung in Arbeit

**10** Beschreiben Sie die im folgenden Skizzierte Menge mittels der Mengenschreibweise.

Lösung in Arbeit