Pilnojo diferencialo lygtys

Jei funkcija $u(x, y)$ turi tolydžias dalines išvestines, tai jos diferencialas yra

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy.$$

Kai $u(x, y) = c = \text{const}$, tai $du = 0$.

Pavyzdžiui, kai $u = x + x^2y^3 = c$, tai

$$du = (1 + 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0$$

arba

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{1 + 2xy^3}{3x^2y^2},$$

diferencialinė lygtis, kurią galima išspręsti, atliekant veiksmus atgaline tvarka.

Pirmos eilės diferencialinė lygtis $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ užrašyta

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1}$$

vadinama *pilnojo diferencialo lygtimi*, jei jos kairioji pusė yra kokios nors funkcijos $u(x, y)$ diferencialas:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy. \tag{2}$$

Tada šią diferencialinę lygtį galima užrašyti lygtimi

$$du = 0.$$

Integruodami gauname diferencialinės lygties bendrąjį sprendinį:

$$u(x, y) = c. \tag{3}$$

Palyginę (1) ir (2), matome, kad (1) yra pilnojo diferencialo lygtis, jei yra tokia funkcija $u(x, y)$, kad

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N. \tag{4}$$

Iš čia galima gauti sąlygą, leidžiančią patikrinti ar diferencialinė lygtis yra pilnojo diferencialo lygtis.

Tegul M ir N yra tolydžios ir turi tolydžias pirmos eilės dalines išvestines tam tikroje xy plokštumos srityje. Diferencijuodami (4), turime:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Dėl tolydumo prielaidos šios išvestinės lygios:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{5}$$

Ši sąlyga yra ne tik būtina, bet ir pakankama sąlyga, kad diferencialinė lygtis būtų pilnojo diferencialo lygtis.

Kai (1) yra pilnojo diferencialo lygtis, funkciją $u(x, y)$ galima rasti tokiu būdu. Integruodami pirmąją (4) lygtį, turime

$$u = \int M\,dx + g(y) \tag{6}$$

su nežinoma funkcija $g(y)$. Pagal (6) apskaičiuojame $\partial u/\partial y$, panaudojame antrąją (4) lygtį ir gauname $\partial g/\partial y$. Integruodami šią lygtį, randame funkciją $g(y)$.

Pavyzdys. Išspręskite

$$(2x + 3x^2 y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0.$$

Sprendimas. Šiuo atveju

$$M = 2x + 3x^2 y, \quad N = x^3 - 3y^2.$$

Kadangi

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x + 3x^2 y) = 3x^2, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3y^2) = 3x^2,$$

tai duotoji lygtis yra pilnojo diferencialo lygtis.

Integruojame pirmąją lygtį x atžvilgiu, laikydami y pastoviu:

$$u = \int (2x + 3x^2 y)\,dx = x^2 + x^3 y + g(y),$$

$g(y)$ – nežinoma y funkcija.

Įstatę šią išraišką į antrąją lygtį, $u'_y = x^3 - 3y^2$, rasime $g(y)$:

$$(x^2 + x^3 y + g(y))'_y = x^3 - 3y^2,$$

$$g'(y) = -3y^2,$$

$$g(y) = -y^3 + \text{const}.$$

Vadinasi, galima imti

$$u = x^2 + x^3y - y^3.$$

Tada bendrasis sprendinys

$$x^2 + x^3y - y^3 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Pavyzdys. Lygčiai

$$-ydx + xdy = 0$$

turime

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1,$$

tai lygtis nėra pilnojo diferencialo lygtis. Tokiu atveju naudotas sprendimo būdas netinka.

$$u = \int M\,dx = -\int y\,dx = -xy + g(y),$$

todėl

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x + \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Ši išvestinė turi būti lygi $N = x$:

$$-x + \frac{\partial g}{\partial y} = x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2x.$$

Tai neįmanoma, nes $g(y)$ priklauso tik nuo kintamojo y.

Suvedimas į pilnojo diferencialo lygtį. Integruojantysis daugiklis

Paskutinio nagrinėto pavyzdžio lygtis nėra pilnojo diferencialo lygtis. Tačiau padauginę ją iš $1/x^2$, gauname pilnojo diferencialo lygtį:

$$\frac{-ydx + xdy}{x^2} = -\frac{y}{x^2}\,dx + \frac{1}{x}\,dy = d\Big(\frac{y}{x}\Big) = 0.$$

Integruodami gauname bendrąjį sprendinį $y/x = c = \text{const}$.

Lygtį, kuri nėra pilnojo diferencialo lygtis:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{7}$$

padauginome iš funkcijos $F(x,y)$ ir gauta lygtis

$$FPdx + FQdy = 0 \tag{8}$$

yra pilnojo diferencialo lygtis.

Sakoma, kad funkcija $F(x,y)$ yra *integruojantysis daugiklis*.

Matėme, kad nagrinėtos lygties $-ydx+xdy=0$ vienas integruojantysis daugiklis yra $F=1/x^2$. Ši lygtis turi ir kitų integruojančiųjų daugiklių, pvz. $1/y^2$, $1/(xy)$ ir $1/(x^2+y^2)$, nes

$$\begin{aligned}
\frac{-ydx+xdy}{y^2} &= d\Big(\frac{x}{y}\Big),\\
\frac{-ydx+xdy}{xy} &= -d\Big(\ln\frac{x}{y}\Big),\\
\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} &= d\Big(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Big).
\end{aligned}$$

Paprastais atvejais integruojantįjį daugiklį galima parinkti naudojant prieš tai parašytas formules, yra ir daugiau panašių formulių. Bendru atveju daroma taip.

Pilnojo diferencialo sąlyga lygčiai $FPdx+FQdy=0$ yra

$$\frac{\partial FP}{\partial y}=\frac{\partial FQ}{\partial x}. \tag{9}$$

Ją užrašome lygtimi

$$F'_yP+FP'_y=F'_xQ+FQ'_x.$$

Bendru atveju pagal šią lygtį nustatyti F gali būti sudėtinga arba neįmanoma. Daugumoje praktinių atvejų susiduriama su toliau aptariamais paprastesniais daugikliais.

Tarkime, kad $F=F(x)$. Tada $F'_y=0$ ir $F'_x=dF/dx$, todėl (9) virsta

$$FP'_y=F'_xQ+FQ'_x.$$

Iš čia

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{dx}=R,\quad R=\frac{1}{Q}\Big(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\Big). \tag{10}$$

Teorema. (*Integruojantysis daugiklis* $F(x)$.) Jei (7) lygtis $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ yra tokia, kad (10) lygties R priklauso tik nuo x, tai yra integruojantysis daugiklis $F=F(x)$:

$$F(x)=e^{\int R(x)\,dx}. \tag{11}$$

Panašiai, jei $\tilde{F}=\tilde{F}(y)$, tai vietoj (10) gauname

$$\frac{1}{\tilde{F}}\frac{d\tilde{F}}{dy} = \tilde{R}, \quad \tilde{R} = \frac{1}{P}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big). \tag{12}$$

Teorema. (*Integruojantysis daugiklis* $\tilde{F}(y)$.) Jei (7) lygtis $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ yra tokia, kad (12) lygties $\tilde{R}$ priklauso tik nuo y, tai yra integruojantysis daugiklis $\tilde{F} = \tilde{F}(y)$:

$$\tilde{F}(y) = e^{\int \tilde{F}(y)\,dy}. \tag{13}$$

Pavyzdys. Išspręskite pradinį uždavinį:

$$(e^{x+y} + ye^y)dx + (xe^y - 1)dy = 0, \quad y(0) = -1.$$

Sprendimas. Lygtis nėra pilnojo diferencialo lygtis.
Integruojantysis daugiklis $\tilde{F}(y) = e^{-y}$.
Bendrasis sprendinys

$$u(x,y) = xy + e^x + e^{-y} = C.$$

Atskirasis sprendinys

$$xy + e^x + e^{-y} = e + 1.$$