Pirmos eilės tiesinė diferencialinė lygtis

Pirmos eilės *tiesine* diferencialine lygtimi vadinama lygtis, kurios bendra formulė:

$$a(x)y' + b(x)y = f(x). \tag{1}$$

Prie y', y ir dešinėje pusėje gali būti tik x funkcijos arba konstantos. Jei $a(x) \neq 0$, nagrinėjamame intervale, tai padalinę iš $a(x)$, tiesinę lygtį užrašome *standartine* forma:

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{2}$$

Tiesinės lygties sprendimas konstantų varijavimo metodu

Vienas iš tiesinės DL sprendimo metodų yra *konstantų varijavimo metodas*, kurį trumpai galima aprašyti šitaip: surandamas homogeninės DL $y' + p(x)y = 0$ sprendinys; jame konstanta C pakeičiama nežinoma funkcija $C(x)$, kuri parenkama taip, kad sukonstruota funkcija būtų nehomogeninės DL sprendinys.

Laikydami, kad (2) dešiniosios pusės funkcija $r(x)$ nagrinėjamame intervale lygi nuliui, gauname tiesinę *homogeninę* lygtį

$$y' + p(x)y = 0. \tag{3}$$

Atskyrę kintamuosius ir integruodami, gauname bendrąjį sprendinį:

$$\ln|y| = -\int p(x)\,dx + \ln|c|, \quad c,\, y \neq 0.$$

Kurį galima perrašyti šitaip:

$$y(x) = ce^{-\int p(x)\,dx}, \quad c \in \mathbb{R},$$

įskaitant atskirąjį sprendinį $y = 0$, gaunamą, kai $c = 0$.

Sprendžiant konstantų varijavimo metodu, rastame homogeninės lygties sprendinyje konstanta c pakeičiama nežinoma funkcija $C(x)$ ir nehomogeninės lygties sprendinys ieškomas šitoks:

$$y(x) = C(x)e^{-\int p(x)\,dx}.$$

Įstatę šią funkciją į (2) ir suprastinę, funkcijai $C(x)$ turime paprastąją diferencialinę lygtį:

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)\,dx},$$

kurią suintegravę, randame

$$C(x) = \int q(x) e^{\int p(x)\,dx}\,dx + \tilde{c}, \quad \tilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Gauname, kad tiesinės nehomogeninės lygties bendrasis sprendinys yra

$$y(x) = e^{-\int p(x)\,dx}\Big(\int q(x) e^{\int p(x)\,dx}\,dx + c\Big), \quad c \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Žymint $h = \int p(x)\,dx$, šį sprendinį galima užrašyti trumpiau:

$$y(x) = e^{-h}\Big(\int e^{h} q(x)\,dx + c\Big), \quad h = \int p(x)\,dx,\ c \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Pavyzdys. Išspręsime DL ir rasime sprendinį, tenkinantį sąlygą $y(1) = 2$.

$$xy' + 2y = x^2.$$

Sprendžiame homogeninę DL:

$$xy' + 2y = 0,$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2 \int \frac{dx}{x}.$$

Homogeninės DL bendrasis sprendinys

$$y = \frac{c}{x^2} = cx^{-2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Nehomogeninės DL sprendinys ieškomas šitoks:

$$y = \frac{C(x)}{x^2} = C(x)x^{-2},\ C(x) \text{ – nežinoma funkcija.}$$

y ir $y' = C'(x)x^{-2} - 2C(x)x^{-3}$ įrašę į nehomogeninę lygtį, turime:

$$C'(x)x^{-1} - 2C(x)x^{-2} + 2C(x)x^{-2} = x^2,$$

$$C'(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad C(x) = \frac{1}{4}x^4 + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Dabar bendrasis nehomogeninės DL sprendinys yra

$$y = \Big(\frac{1}{4}x^4 + C_1\Big)\frac{1}{x^2}, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Įrašę $x = 1$ ir $y = 2$, apskaičiuojame $C_1 = 7/4$, todėl Koši sprendinys

$$y = \Big(\frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{4}\Big)\frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{4x^2}.$$

Tiesinės lygties sprendimas Bernulio metodu

Sprendžiant tiesinę lygtį Bernulio (Bernoulli) metodu, (2) ieškomas sprendinys užrašomas dviejų nežinomų funkcijų sandauga, $y(x) = u(x)v(x)$. Įstatę taip apibrėžtą funkciją y ir jos išvestinę į (2) lygtį, užrašome lygtį

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x),$$

kurią, sugrupavę narius, perrašome šitaip:

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x). \tag{6}$$

Reikalaudami, kad reiškinys skliaustuose būtų lygus nuliui, funkcijai v gauname tiesinę homogeninę pirmos eilės lygtį

$$v' + p(x)v = 0.$$

Jos bendrasis sprendinys

$$v = ce^{-\int p(x)\,dx}.$$

Paėmę $c = 1$, turime

$$v = e^{-\int p(x)\,dx}.$$

Šią funkciją įrašę į (6), gauname lygtį

$$u' = q(x)e^{\int p(x)\,dx},$$

kurią suintegravę, randame antrąją funkciją

$$u = \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Taigi, bendrasis (2) lygties sprendinys yra

$$y(x) = uv = \left(\int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + c\right)e^{-\int p(x)\,dx}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Akivaizdu, kad Bernulio metodu rastas sprendinys sutampa su konstantų varijavimo metodu rastu sprendiniu.

Pavyzdys. Bernulio metodu išspręsime lygtį

$$y' - y = x.$$

Įstatę į duotą lygtį $y = uv$ ir sugrupavę, turime

$$u'v + u(v' - v) = x.$$

Lygties $v' - v = 0$ atskirasis sprendinys yra $v = e^x$. Todėl funkcija u turi tenkinti lygtį

$$u' = xe^{-x} \quad \Rightarrow \quad u = \int xe^{-x}\,dx.$$

Integruodami dalimis, randame

$$u = -xe^{-x} - e^{-x} + c.$$

Dabar bendrasis nagrinėjamos DL sprendinys

$$y = uv = (-xe^{-x} - e^{-x} + c)e^{x} = ce^{x} - x - 1.$$

Bernulio lygtis

Daug taikomųjų uždavinių yra modeliuojami netiesinėmis paprastosiomis lygtimis, kurias galima suvesti į tiesines PDL. Vieną iš tokių plačiai taikomų lygčių yra *Bernulio lygtis*

$$y' + p(x)y = q(x)y^{a}, \quad a \neq 0, a \neq 1, \tag{7}$$

čia a – realus skaičius.

Kai $a = 0$ arba $a = 1$, (7) lygtis yra tiesinė. Padalinę iš y^a, turime lygtį

$$y^{-a}y' + p(x)y^{-a+1} = q(x).$$

Tegul

$$z(x) = [y(x)]^{1-a}$$

nauja nežinoma funkcija. Tada

$$z' = (1-a)y^{-a}y' \quad \Rightarrow \quad y^{-a}y' = \frac{1}{1-a}z'.$$

Įrašę į (7) formulę, funkcijai $z(x)$ gauname tiesinę lygtį

$$\frac{1}{1-a}z' + p(x)z = q(x).$$

Pavyzdys.

$$y' + 2y = y^2 e^{x}.$$

Padalinę iš y^2, $y \neq 0$, ir įvedę keitinį $z = y^{-1}$, užrašome tiesinę lygtį

$$-z' + 2z = e^{x}.$$

Homogeninės lygties $z' = 2z$ bendrasis sprendinys $z = Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$. Varijuodami konstantą, gauname

$$C'(x) = -e^{-x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = e^{-x} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

todėl bendrasis sprendinys

$$z = (e^{-x} + C_1)e^{2x} = C_1e^{2x} + e^x, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Sprendžiamos Bernulio lygties bendrasis sprendinys

$$y = \frac{1}{C_1e^{2x} + e^x}, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Patikriname, kad $y = 0$ yra atskirasis DL sprendinys ir jis neužrašomas bendrojo sprendinio formule.

Populiacijos augimo modeliai

Jei organizmai nepatenka į populiaciją ir jos nepalieka, tai populiacijos augimo greitį (populiacijos dydžio pokytį per fiksuotą laikotarpį) galima apskaičiuoti kaip skirtumą tarp gimusių ir mirusių individų per laiką Δt :

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = B - D.$$

N – populiacijos dydis (individų skaičius), t – laikas, B – gimusių skaičius, D – mirusių skaičius. (Ištikrųjų, B ir D yra gimimo ir mirimo greičiai, nes jie yra gimusių ir mirusių skaičius per laiko intervalą.)

Toliau žymėsime: b – gimimų ir d – mirčių skaičius, tenkantis vienam individui. Tada $B = bN$, $D = dN$,

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = (b - d)N.$$

Perėję prie ribos, kai $\Delta t \to 0$, gauname

$$\frac{dN}{dt} = rN,$$

čia $r = b - d$ – populiacijos augimo greitis, tenkantis vienam individui.

Eksponentinis augimas. Uždavinio

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = rN, \\ N(0) = N_0, \end{cases} \tag{8}$$

sprendinys

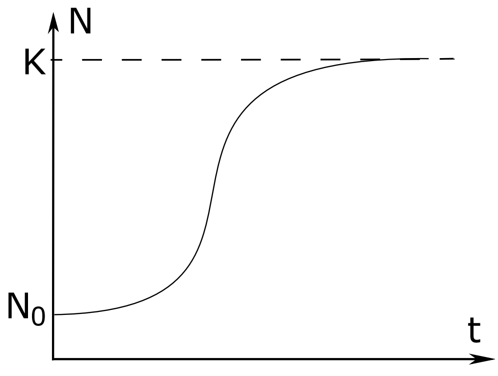
$$N(t) = N_0e^{rt} \to \begin{cases} +\infty, & b > d, \\ N_0, & b = d, \\ 0, & b < d. \end{cases} \tag{9}$$

Kai $r > 0$ yra konstanta, eksponentinis augimas pasižymi tuo, kad prisidedančių organizmų skaičius auga, didėjant populiacijai. Toks modelis pasiūlytas Maltus (Malthus) (1766–1834). Kadangi populiacija neribotai auga, tai reikia neribotų resursų jai išgyventi, todėl eksponentinio augimo modelis nevisada realistiškas. Toks augimas galimas, kai mažai individų, bet daug resursų. Kai individų atsiranda pakankamai daug, resursai baigiami išnaudoti, todėl augimas lėtėja. Populiacijos dydis, kurį gali išlaikyti konkreti aplinka, vadinamas aplinkos *pajėgumu* ir žymimas K.

Logistinis augimas. Modifikuojame (8) modelį, kad augimo greitis priklausytų nuo populiacijos dydžio ir jos artumo aplinkos pajėgumui K:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = r\dfrac{K-N}{K}N, \\ N(0) = N_0. \end{cases} \tag{10}$$

Kai populiacija maža (N mažas palyginus su K), tai $(K-N)/K \approx 1$, todėl augimo greitis artimas r ir populiacija auga beveik eksponentiškai. $K - N$ rodo kiek individų gali papildyti populiaciją kol bus pasiekta riba K.
$(K - N)/K$ yra dar "nenaudojama" K dalis. Kuo didesnė K dalis "naudojama", $(K - N)/K = 1 - N/K \to 0$, kai $N \to K$, tuo augimo greitis mažėja.



10 pav. Logistinis augimas

Užrašę (10) lygtį šitaip:

$$\frac{dN}{dt} - rN = -\frac{r}{K}N^2,$$

matome, kad tai yra Bernulio lygtis, kurią suvedame į tiesinę keitiniu $z = N^{-1}$. Jos sprendinys, atsižvelgiant į pradinę sąlygą yra

$$N(t) = \frac{K}{(K/N_0 - 1)e^{-rt} + 1}.$$

Kadangi $N_0 < K$, tai $(K/N_0 - 1)e^{-rt} > 0$, todėl $N(t) < K$, $t > 0$, ir $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = K$.

Logistinė lygtis

Bernulio lygtis

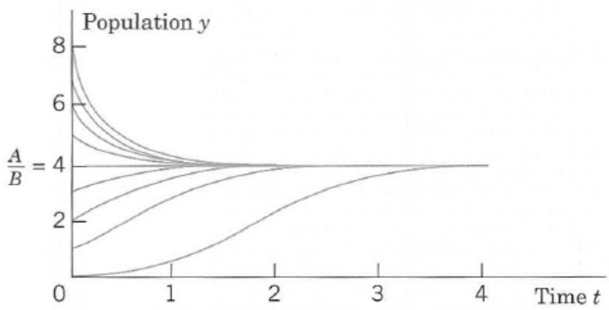
$$y' = Ay - By^2 \tag{11}$$

vadinama *logistine lygtimi.* Jos bendrasis sprendinys

$$y = \frac{1}{ce^{-At} + B/A}, \quad c = \text{const.} \tag{12}$$

Taip pat lygtis turi atskirąjį sprendinį $y = 0$.

(11) lygtį galima užrašyti $y' = Ay[1 - (B/A)y]$. Kai $y < A/B$, tai $y' > 0$, todėl maža populiacija auga tol kol $y < A/B$. Tačiau, kai $y > A/B$, išvestinė $y' < 0$, ir populiacija mažėja tol kol $y > A/B$. Abiem atvejais riba yra A/B.



11 pav. Logistinio modelio sprendinio kreivės, kai $A/B = 4$