Paprastosios diferencialinės lygtys (PDL)

Diferencialinės lygtys labai svarbios taikomojoje matematikoje, nes daugelis fizikos dėsnių ir sąryšių matematiškai užrašomi diferencialinėmis lygtimis. Įvairiausių fizikos, chemijos, mechanikos, biologijos, biofizikos, geometrijos uždavinių sprendimas susiijęs su diferencialinėmis lygtimis.

Diferencialine lygtimi vadinama lygtis, kuri sieja laisvąjį kintamajį, nežinomą to kintamojo funkciją ir jos išvestinę arba kelias išvestines.

Pirmiausiai nagrinėsime *paprastąsias diferencialines lygtis* (PDL), kai nežinoma funkcija priklauso nuo vieno kintamojo.

Paprastoji diferencialinė lygtis yra lygtis, kurioje yra viena ar kelios nežinomos funkcijos išvestinės. Jei nepriklausomas kintamasis yra x, tai funkciją dažnai žymėsime $y(x)$. Kai nepriklausomas kintamasis yra laikas t, tai rašysime $y(t)$. Lygtyje be išvestinių taip pat gali būti y, žinomos x funkcijos ir konstantos. Pavyzdžiui,

$$y' = 3\sin x,$$

$$y'' - 6y = 2x,$$

$$x^3y''' + 4e^{2x}y'' = (1-x)^2y^2$$

yra paprastosios diferencialinės lygtys. Kai nežinoma funkcija priklauso nuo dviejų ar daugiau kintamųjų nagrinėjamos sudėtingesnės *dalinių išvestinių diferencialinės lygtys.* Pavyzdžiui, kai funkcija u priklauso nuo dviejų kintamųjų x ir y, tai

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0$$

yra dalinių išvestinių diferencialinė lygtis.

Sakoma, kad PDL yra n-tosios eilės diferencialinė lygtis, jei joje yra ieškomos funkcijos n-tosios eilės išvestinė ir nėra aukštesnės eilės išvestinių. Pavyzdžiui, $y' - 4y = \cos 2x$ yra pirmosios eilės, $y'' - 2y' + 5y = xe^{-x}$ ir $3y'' + 5x(y')^3 = 6x^4 - 2$ – antrosios eilės, o $x^3y''' + 4e^{2x}y'' - 2y' = 3xy^4$ – trečiosios eilės paprastosios diferencialinės lygtys.

Bendrai, lygtis

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

kurioje $y^{(n)}$ – aukščiausios eilės išvestinė, vadinama n-tosios eilės paprastąja diferencialine lygtimi (PDL).

Pirmiausia nagrinėsime pirmosios eilės PDL, kuriose yra tik pirmosios eilės išvestinė y' ir dar gali būti y ir žinomos x funkcijos. Tokias lygtis galima užrašyti bendra formule

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Lygtis

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

vadinama pirmosios eilės diferencialine lygtimi išspręsta išvestinės atžvilgiu.

PDL sprendinys

Funkcija $y = h(x)$ vadinama duotosios PDS *sprendiniu* atvirame intervale $a < x < b$, jei $y = h(x)$ apibrėžta ir turi išvestinę intervale $a < x < b$, ir kurią įstatę į diferencialinę lygtį vietoj y, gauname tapatybę.

Pavyzdys. Funkcija $y = e^x$ yra lygties $y'' - y = 0$ sprendinys. Apskaičiuojame $y' = e^x$, $y'' = e^x$ ir, įstatę į lygtį, gauname $e^x - e^x = 0$, $\forall x$, $-\infty < x < \infty$. Ši lygtis turi ir daugiau sprendinių, pvz., $y = e^{-x}$ arba $y = 2e^x$.

Apibrėžimas. Tegul G yra sritis plokštumoje $\mathbb{R}^2$. Funkcija $\phi : (a, b) \to \mathbb{R}$ yra lygties

$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in G,$$

sprendinys, jeigu:

(i) funkcija ϕ yra diferencijuojama intervale (a, b),

(ii) taškas $(x, \phi(x)) \in G$, $\forall x \in (a, b)$,

(iii) teisinga tapatybė $\phi'(x) = f(x, \phi(x))$, $\forall x \in (a, b)$.

Pabrėšime, kad sprendinio apibrėžimo sritis yra intervalas.

Integralinės kreivės

Tegul $y = h(x)$, $x \in (a, b)$, yra (2) diferencialinės lygties sprendinys. Jis tam tikroje plokštumos $\mathbb{R}^2$ srityje G apibrėžia kreivę L. Kreivė L vadinama *integraline kreive* arba *sprendinio kreive.*

Nagrinėkime PDL

$$y' = \cos x.$$

Turime

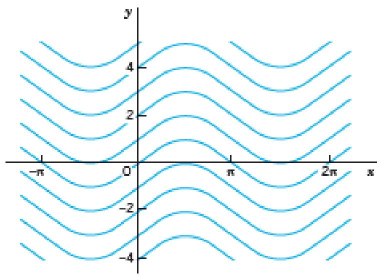
$$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

Padauginę iš dx ir integruodami, gauname

$$\int dy = \int \cos x \, dx,$$

$$y = \sin x + c,$$

čia $c \in \mathbb{R}$ konstanta. Tai yra sprendinių šeima. Kiekvieną c reikšmę atitinka sprendinys ir jo apibrėžta integralinė kreivė. 1 pav. matome kelias integralines kreives, kai $c = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$.



1 pav. Lygties $y' = \cos x$ sprendiniai $y = \sin x + c$.

Matome, kad PDL turi sprendinį, kuriame yra laisvai pasirenkama konstanta. Toks sprendinys, turintis laisvą konstantą, vadinamas *bendruoju* paprastosios diferencialinės lygties sprendiniu.

Kartais imama ne bet kuri konstanta c, bet konstanta tik iš tam tikro intervalo, siekiant išvengti komplikuotų sprendinio išraiškų.

Geometriškai bendrasis PDL sprendinys yra šeima susidedanti iš be galo daug integralinių kreivių – viena kreivė kiekvienai konstantos c reikšmei. Pasirinkus konkrečią konstantos reikšmę, gaunamas *atskirasis* PDL sprendinys.

Iš pavyzdžių matome, kad diferencialinė lygtis turi be galo daug sprendinių. Bendru atveju juos galima užrašyti lygtimi

$$\Phi(x, y, c) = 0$$

arba lygtimi išspręsta kintamojo y atžvilgiu

$$y = \phi(x, c).$$

Norint iš jų išskirti kokį nors vieną, reikia parinkti tinkamą konstantos c reikšmę. Tam reikia pareikalauti, kad sprendinys tenkintų kokią nors papildomą sąlygą.

Pradinė sąlyga

Daugeliu atveju atskirasis sprendinys gaunamas iš bendrojo sprendinio, taikant sąlygą

$$y(x_0) = y_0, \tag{3}$$

su duotomis reikšmėmis x_0 ir y_0, kurios naudojamos konkrečiai konstantos c reikšmei nustatyti. Tokia pradinė PDL sąlyga vadinama *pradine* arba *Koši* (Cauchy) sąlyga. Geometriškai tai reiškia, kad iš integralinių kreivių šeimos reikia parinkti tą, kuri eina per tašką (x_0, y_0). Jeigu (2) lygtis sprendžiama kartu su (3) sąlyga, tai toks uždavinys vadinamas *pradiniu* arba *Koši* uždaviniu.

Pavyzdys. Išspręsime pradinį uždavinį

$$y' = -2y, \quad y(0) = 3.$$

Nesunku patikrinti, kad bendrasis sprendinys yra $y(x) = ce^{-2x}$. Panaudoję pradinę sąlygą, turime $y(0) = ce^0 = c = 3$. Taigi, pradinio uždavinio sprendinys yra $y = 3e^{-2x}$.

Apibrėžimas. Sakysime, tolydi funkcija ϕ, apibrėžta lygtimi $y = \phi(x, c)$, $(x, c) \in D \subset \mathbb{R}^2$, yra (2) lygties *bendrasis sprendinys* srityje $G_0 \subset G$, jei

(i) $\forall (x_0, y_0) \in G_0$ lygtis

$$y_0 = \phi(x_0, c)$$

turi vienintelį sprendinį $c_0 = c(x_0, y_0)$.

(ii) taškas $(x_0, c_0) \in D$ ir $y = \phi(x_0, c_0)$ yra Koši uždavinio (2), (3) sprendinys.

Apibrėžimas. Sprendinys $y = \phi(x, c_0)$, gaunamas iš bendrojo sprendinio, paėmus konkrečią konstantos reikšmę $c = c_0$, vadinamas (2) lygties *atskiruoju sprendiniu.*

Apibrėžimas. Sprendinys $y = \phi(x),\ x \in (a, b)$, vadinamas *ypatinguoju* (2) lygties sprendiniu, jei per kiekvieną jo tašką eina dar bent viena šios lygties integralinė kreivė.

Panašiai apibrėžiami bendrasis ir atskirasis sprendiniai, kai sprendiniai užrašomi neišreikštine formule $\Phi(x, y, c) = 0$. Kartais tokie sprendiniai vadinami *bendruoju* ir *atskiruoju integralais.*

Geometrinė pirmos eilės PDL prasmė. Krypčių laukas

Pirmos eilės paprastoji diferencialinė lygtis

$$y' = f(x, y)$$

turi paprastą geometrinę interpretaciją. Išvestinė $y'(x)$ yra kreivės $y = y(x)$ nuolydis taške x. Taigi, integralinė kreivė, einanti per tašką (x_0, y_0), šiame taške turi nuolydį $y'(x_0)$ lygų funkcijos f reikšmei šiame taške, t. y.

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Vadinasi, (2) apibrėžia sąryšį tarp kiekvieno integralinės kreivės taško ir jos liestinės nuolydžio. xy-plokštumoje brėžiamos trumpos atkarpėlės, kurių nuolydis $f(x, y)$. Tokių atkarpų visuma apibrėžia *krypčių lauką*, atitinkantį (2) lygtį. Priderinant integralines kreives prie krypčių lauko, galima nubrėžti atytiksles sprendinių kreives.

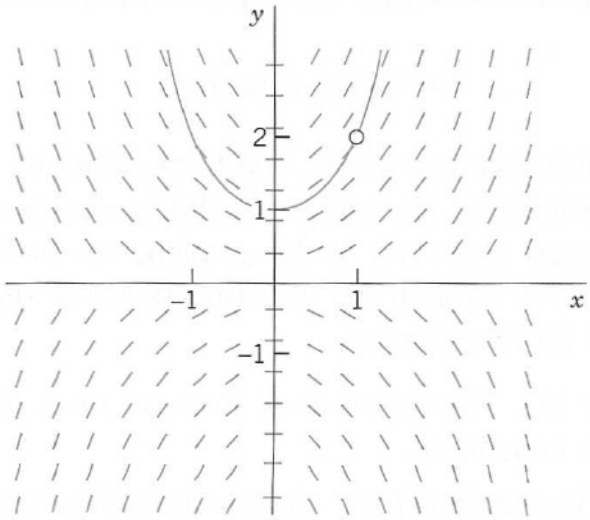
Toks metodas taikomas dėl dviejų priežasčių: (a) Nebūtina spręsti (2) lygtį. Tai svarbu, nes PDL sprendinio išraiška gali būti sudėtinga arba PDL sprendinys nesurandamas. (b) Šis medodas grafiškai parodo sprendinių šeimą ir tipines savybes. Tikslumas kartais ribotas, bet daugeliu atveju pakankamas.

Pavyzdys. Sprendžiamas pradinis uždavinys

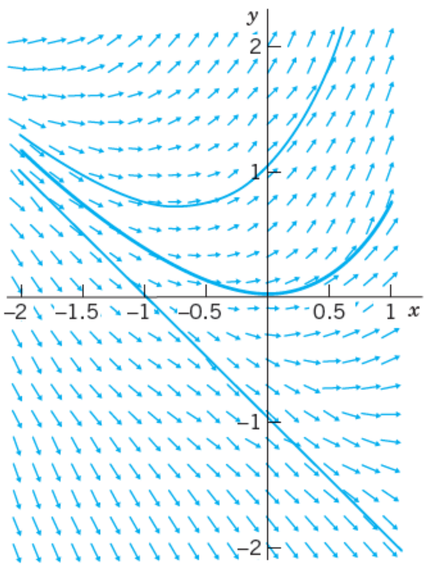
$$y' = xy, \quad y(1) = 2.$$

Paprasto sprendimo, taikant tam skirtą kompiuterinę programą, rezultatą matome 2 pav.

Taip pat kompiuteriu gautas lygties $y' = y + x$ krypčių laukas ir apytikslės integralinės kreivės 3 pav.



2 pav. Uždavinio $y' = xy,\ y(1) = 2$, krypčių laukas.



3 pav. $y' = y + x$ krypčių laukas ir sprendinio kreivės, einančios per taškus $(0, 1)$, $(0, 0)$, $(0, -1)$.

Pirmos eilės paprastosios diferencialinės lygtys su atskiriamais kintamaisiais

Nemažai praktikoje naudingų PDL galima užrašyti šitokia lygtimi:

$$g(y)y' = f(x). \tag{4}$$

Integruojame abi puses x atžvilgiu:

$$\int g(y)y'dx = \int f(x)dx + c.$$

Kadangi $y'dx = dy$, tai

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c. \tag{5}$$

Jei funkcijos f ir g yra tolydžios, tai integralai egzistuoja ir juos apskaičiavę gauname bendrąjį (4) lygties sprendinį. Toks PDL sprendimo būdas vadinamas *kintamųjų atskyrimo metodu*, o (4) lygtimi *su atskiriamais kintamaisiais.*

Pavyzdys. Lygtį

$$y' = 1 + y^2$$

užrašome

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$$

ir, padauginę iš $dx/(1+y^2)$, turime lygtį su atskirtais kintamaisiais

$$\frac{dy}{1+y^2} = dx.$$

Suintegravę, gauname bendrąjį sprendinį $\operatorname{arctg} y = x + c$ arba $y = \operatorname{tg}(x+c)$, $c \in \mathbb{R}$.

Bendrai lygtis su *atskiriamais kintamaisiais* gali būti užrašyta formule:

$$m(x)n(y)y' = p(x)q(y). \tag{6}$$

Daugybos ir dalybos veiksmais galima pasiekti, kad vienoje lygties pusėje būtų reiškinys, priklausantis tik nuo x, o kitoje pusėje reiškinys, priklausantis tik nuo y.

$$m(x)n(y)\frac{dy}{dx} = p(x)q(y),$$

$$\int \frac{n(y)}{q(y)}dy = \int \frac{p(x)}{m(x)}dx, \quad m(x) \neq 0,\ q(y) \neq 0.$$

Suintegravę randame bendrąjį sprendinį ir atskirai ištiriame atvejus $m(x) = 0$ ir $q(y) = 0$.

Pavyzdys. Išspręskite DL

$$y' - 3x^2y = 0.$$

Atskiriame kintamuosius ir suintegruojame:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 y,$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 3x^2\,dx \quad y \neq 0,$$

$$\ln|y| = x^3 + \ln|C|, \quad C \in \mathbb{R}, C \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|Ce^{x^3}|,$$

$$y = Ce^{x^3}, \quad C \in \mathbb{R}, C \neq 0.$$

Imdami $y = 0$, gauname $0 - 3x^2 \cdot 0 \equiv 0$, todėl $y = 0$ yra atskiras DL sprendinys. Jį galima užrašyti bendra formule, imant $C = 0$. Todėl visi DL sprendiniai užrašomi bendrojo sprendinio formule

$$y = Ce^{x^3}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Pavyzdys.

$$(x^2 - 1)y' = 2xy.$$

Atskiriame kintamuosius ir integruojame:

$$(x^2 - 1)\frac{dy}{dx} = 2xy,$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x\,dx}{x^2 - 1}, \quad y \neq 0,\ x \neq \pm 1,$$

$$\ln|y| = \ln|x^2 - 1| + \ln|C|, \quad C \in \mathbb{R}, C \neq 0,$$

$$y = C(x^2 - 1), \quad C \in \mathbb{R}, C \neq 0.$$

Kai $y = 0$, gauname $(x^2 - 1) \cdot 0 \equiv 2x \cdot 0$, todėl $y = 0$ yra atskiras DL sprendinys. Jį galima užrašyti bendra formule, imant $C = 0$. Kai $x = \pm 1$, turime lygtį $(0 \cdot y' = \pm 2y$, o ne tapatybę, todėl $x = \pm 1$, nėra DL sprendiniai. Bendrasis sprendinys yra $y = C(x^2 - 1),\ C \in \mathbb{R}$.