Lygtis

$$y' = f(ax + by), \quad a, b = \text{const},$$

suvedama į lygtį su atskiriamais kintamaisiais keitiniu $z = ax + by$ (arba $z = ax + by + c$, c bet koks skaičius).

Radioaktyvus skilimas

Fizikos dėsnis. Radioaktyvios medžiagos skilimo greitis tiesiog proporcingas medžiagos masei.

Jei izotopas stabilus (medžiaga neradioaktyvi), tai jo masė laikui bėgant nesikeičia.

Tegul $m(t)$ – medžiagos masė laiku t. Momentinis medžiagos masės kitimo greitis dm/dt.

Pagal fizikos dėsnį

$$\frac{dm(t)}{dt} = -\alpha m(t),$$

$\alpha > 0$ – proporcingumo koeficientas. Tegul pradiniu momentu radioaktyvios medžiagos yra $m(0) = m_0$.

Matematinis modelis

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dt} = -\alpha m, \\ m(0) = m_0. \end{cases} \tag{1}$$

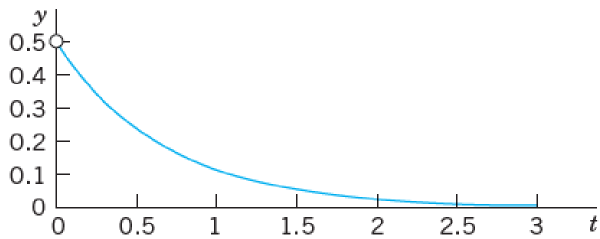
Pirmoji sistemos lygtis yra DL su atskiriamais kintamaisiais. Atskiriame kintamuosius ir suintegruojame.

$\displaystyle\int \frac{dm}{m} = -\alpha \int dt, \quad m \neq 0.$

$m(t) = ce^{-\alpha t}, \quad c \in \mathbb{R}$ – bendrasis sprendinys,

$m(t) = m_0 e^{-\alpha t}$ – Koši sprendinys.

Kai $m(0) = 0{,}5$, $\alpha = 1{,}5$, atskirasis sprendinys $m(t) = 0{,}5e^{-\alpha t}$.



4 pav. Radioaktyvios medžiagos masės kitimas, $m(t) = 0{,}5e^{-1{,}5t}$.

Tegul T – pusėjimo laikas (pusperiodis, pusamžis) – laikas per kurį pradinis medžiagos kiekis (masė) sumažėja perpus:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-\alpha T} \quad \Rightarrow \quad -\alpha T = \ln\frac{1}{2},$$

todėl

$$T = \frac{\ln 2}{\alpha}. \tag{2}$$

α žinomas daugumai radioaktyvių medžiagų.

Radiometrinis datavimas – uolienų, fosilijų, archeologinių radinių bei gyvūnų arba augalų liekanų amžiaus nustatymas, remiantis juose esančiais radioaktyviais cheminiais elementais. Yra keliasdešimt izotopų, kuriais galima naudotis, nustatant amžių. Radiometriniam datavimui naudojami įvairūs nuklidai. Skilimo pusamžis yra pastovus dydis – jį gali pakeisti didelis slėgis arba neutronų srautas. Todėl bet kurioje medžiagoje, turinčioje radioaktyvaus nuklido, santykis tarp pradinio jo kiekio ir jo skilimo produkto keičiasi pastoviai ir gali būti naudojamas nustatant medžiagos amžių.

Radioaktyvios anglies metodas. Radioaktyvi anglis ^{14}C nuolat susidaro atmosferoje, veikiant kosminiams spinduliams. Vėliau ji skyla į ^{12}C. Skilimo pusamžis – 5730 ± 40 metų. ^{14}C kaupiasi gyvuose augaluose ir gyvūnuose. Organizmui žuvus, pastovus ^{14}C kiekis pradeda mažėti. Atmosferoje ir gyvuose organizmuose radioaktyvios anglies ^{14}C ir paprastos anglies ^{12}C santykis yra pastovus. Liekanų amžių galima nustatyti palyginus radioaktyvios anglies santykį su paprasta anglimi radinyje su tokiu pat santykiu gyvame organizme ar atmosferoje. Tarkime, kad

$$R(0) = \frac{^{14}C}{^{12}C} \quad - \quad \text{gyvame organizme},$$

$$R(t) = \frac{^{14}Ce^{-\alpha t}}{^{12}C} \quad - \quad \text{rastame organizme}.$$

Tada

$$\frac{R(t)}{R(0)} = e^{-\alpha t}. \tag{3}$$

Šilumos mainų modelis

Niutono dėsnis. Kūno temperatūros kitimo greitis yra tiesiog proporcingas skirtumui tarp kūno temperatūros ir aplinkos temperatūros.

T – kūno temperatūra, t – laikas, T_a – aplinkos temperatūra. Pagal Niutono dėsnį

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a),$$

čia k – šilumos mainų koeficientas, priklausantis nuo medžiagos. Matematinio modelio

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = -k(T - T_a), \\ T(0) = T_0 \end{cases} \tag{4}$$

sprendinys

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}. \tag{5}$$

Niutono dėsnis taikomas neaukštoms temperatūroms. Kai temperatūra aukšta, pvz., apie 1000 °C, taikomas Stefano–Bolcmano dėsnis:

$$\frac{dT}{dt} \sim T^4 - T_a^4.$$

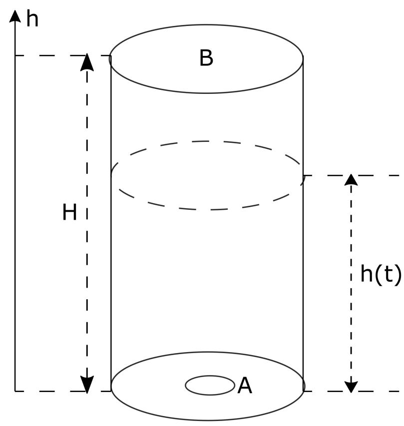
Vandens ištekėjimas iš talpyklos

Tegul vanduo yra cilindriniame bake su skyle dugne, per kurią vanduo išteka. Reikia išvesti formulę, pagal kurią galima apskaičiuoti vandens lygį bake bet kurio laiku.

Toričelio (Torricelli 1608–1647) dėsnis. Dėl sunkio jėgos išbėgančio vandens greitis

$$v(t) = 0,6\sqrt{2gh(t)}, \tag{6}$$

čia $h(t)$ – vandens stulpo virš skylės aukštis laiku t, $g = 9,8$ m/s^2 – laisvo kritimo pagreitis prie žemės paviršiaus.



4 pav. Ištekėjimo uždavinio modelis.

Per trumpą laiką Δt išbėgančio vandens tūris

$$\Delta V = Av\Delta t, \tag{7}$$

kai A – skylės plotas. Per laiką Δt vandens lygis bake krito dydžiu Δh. Dėl to vandens tūris sumažėjo

$$\Delta\tilde{V} = -B\Delta h, \tag{8}$$

kai B – bako skerspjūvio plotas. Aišku, kad $\Delta\tilde{V} = \Delta V$:

$$-B\Delta h = Av\Delta t. \tag{9}$$

Pakeičiame v, padaliname iš Δt ir pereiname prie ribos, kai $\Delta t \to 0$:

$$\frac{dh}{dt} = -0,6\frac{A}{B}\sqrt{2gh(t)}. \tag{10}$$

Suintegravę gauname:

$$h(t) = \left(C - 0,3\frac{A}{B}\sqrt{2g}\,t\right)^2, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Jei pradinis vandens aukštis $h(0) = H$, tai $C = \sqrt{H}$. Koši sprendinys

$$h(t) = \left(\sqrt{H} - 0,3\frac{A}{B}\sqrt{2g}\,t\right)^2. \tag{12}$$

Homogeninė lygtis

Kai kurias lygtis galima suvesti į lygtis su atskiriamais kintamaisiais, nežinomą funkciją y pakeičiant kita nežinoma funkcija. Funkcija $f(x,y)$ vadinama k-tosios eilės *homogenine* funkcija, kai

$$f(tx,ty) = t^k f(x,y), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Pirmos eilės *homogeninė* diferencialinė lygtis užrašoma lygtimi

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{13}$$

arba

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

arba lygtimi

$$N(x,y)y' + M(x,y) = 0,$$

čia $M(x,y)$ ir $N(x,y)$ yra tos pačios eilės homogeninės funkcijos.

Homogeninė diferencialinė lygtis sprendžiama vietoj nežinomos funkcijos y įvedant kitą nežinomą funkciją $u = y/x$. Tada

$$y = ux, \quad y' = u'x + u \tag{14}$$

įstatę į (13), funkcijai u gauname PDL su atskiriamais kintamaisiais:

$$xu' = \varphi(u) - u.$$

Radę jos bendrąjį sprendinį arba bendrąjį integralą ir jame pakeitę u į y/x, gauname nagrinėjamos diferencialinės lygties bendrąjį sprendinį arba bendrąjį integralą.

Pavyzdys. Išspręskite

$$2xyy' = y^2 - x^2.$$

Akivaizdu, kad $x = 0$ ir $y = 0$ nėra sprendiniai. Padaliname lygtį iš $2xy$ ir gauname išreikštinę formą:

$$y' = \frac{y}{2x} - \frac{x}{2y},$$

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$

Įstatę y ir y' iš (14) ir sutraukę panašius narius, turime

$$u'x = -\frac{1+u^2}{2u}.$$

Atskiriame kintamuosius ir suintegruojame:

$$\frac{2u\,du}{1+u^2} = -\frac{dx}{x},$$

$$\ln(1+u^2) = -\ln|x| + \tilde{c},$$

$$1 + u^2 = \frac{c}{x}.$$

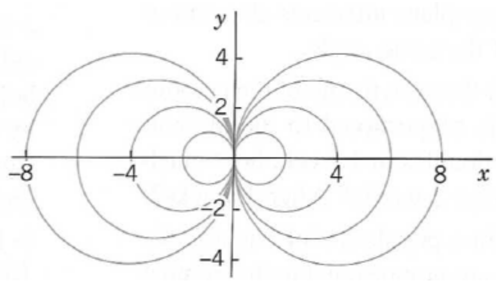
Pakeitę u į y/x, gauname sprendžiamos lygties bendrąjį integralą

$$x^2 + y^2 = cx,$$

kurį užrašę lygtimi

$$\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{c^2}{4},$$

matome, kad integralinės kreivės yra apskritimai, einantys per koordinačių pradžią, kurių centrai yra x ašyje (5 pav.).



5 pav. Uždavinio $2xyy' = y^2 - x^2$ integralinės kreivės

Kai kurias pirmos eilės diferencialines lygtis galima suvesti į homogeninę lygtį. Pavyzdžiui, lygtis

$$y' = f\Big(\frac{ax+by+c}{mx+ny+d}\Big), \quad a, b, c, m, n, d \in \mathbb{R},$$

suvedama į homogeninę lygtį

$$v' = f\Big(\frac{au+bv}{mu+nv}\Big), \quad v' = \frac{dv}{du}.$$

Reikia tik koordinačių pradžią perkelti į tiesių

$$ax + by + c = 0, \quad mx + ny + d = 0$$

susikirtimo tašką (x_0, y_0). Tai atliekama keitiniu

$$u = x - x_0, \quad v = y - y_0.$$

Pavyzdys. Raskite

$$y' = \frac{x+2y+1}{2x+y-1}$$

bendrąjį sprendinį.

Tiesių

$$x + 2y + 1 = 0, \quad 2x + y - 1 = 0$$

susikirtimo taškas $(x_0, y_0) = (1, -1)$.

Keitiniai

$$u = x - 1, \quad v = y + 1,$$

Gaunama homogeninė diferencialinė lygtis

$$v' = \frac{u+2v}{2u+v}, \quad v' = \frac{dv}{du}.$$

Keitinys

$$w = v/u \quad \Longrightarrow \quad v' = w + uw'.$$

Turime lygtį

$$w + uw' = \frac{1+2w}{2+w} \quad \Longrightarrow \quad \frac{2+w}{1-w^2}dw = \frac{du}{u}.$$

$$\int \frac{2+w}{1-w^2}dw = \int \Big(\frac{3/2}{1-w} + \frac{1/2}{1+w}\Big)dw = \frac{1}{2}\ln|1+w| - \frac{3}{2}\ln|1-w| + \tilde{C}.$$

Bendrasis sprendinys

$$\frac{1}{2}\ln|1+w| - \frac{3}{2}\ln|1-w| = \ln|u| + C,$$

$$\frac{1+w}{(1-w)^3} = C_1u^2 \quad \Longrightarrow \quad (v-u)^3 = c_2(v+u),$$

$$(y-x+2)^3 = c_2(x+y).$$