		PROCESO GESTIÓN DOCUMENTAL	Código:	
UNIVERSIDAD DE SAN BUENAVENTURA SEDE BOGOTÁ	Sistema Integrado de Gestión	FACULTAD DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA	Fecha: 1-Jun-2016	Versión: 1
		GUIA DE LABORATORIO	Documento impreso no controlado	

Código del Curso:10298	**Semestre: III**	**No. De Guía: I**	
Nombre del Curso: ECUACIONES DIFERENCIALES			**Duración (Horas) 64**
Relación con el micro currículo (tema de clase): ECUACIONES DIFERENCIALES			
Elementos de seguridad industrial: Cuáles		**SI** ☐	**NO X**
Overol ☐	**Botas** ☐	**Gafas** ☐	**Tapa oídos** ☐ **Tapa Bocas** ☐
OTROS			
Espacio solicitadopara la práctica.	**Laboratorio X**	**Campus** ☐	**Externo** ☐

PRÁCTICA No. 1

(SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES)

INTRODUCCIÓN:

Investigaciones recientes, muestran la necesidad de incorporar la tecnología en el aula de clase, para promover en los estudiantes un aprendizaje significativo y autónomo de los temas propios de la matemática, y para aportar en el desarrollo de competencias propias de la tecnología (Badía, 2016). En concordancia con lo anterior, el modelo pedagógico de la Universidad de San Buenaventura promueve la formación integral del estudiante, en el que la práctica pedagógica “se centra fundamentalmente en el procesode aprendizaje del estudiante, desarrollando estrategias específicas para elaprendizaje autónomo y significativo” (Modelo Pedagógico, p. 62)

Desde esta perspectiva, para apoyar los procesos de enseñanza aprendizaje de las Ciencias Básicas, se brinda a los estudiantes la oportunidad de trabajar con el Software Matlab. Este programa está diseñado para resolver problemas de ingeniería y su lenguaje está basado en matrices, que es la forma natural de expresión de las matemáticas computacionales. Una de sus grandes ventajas es la facilidad de visualizar los datos gracias a su interfaz gráfica, lo que nos permite deducir, analizar e interpretar la información obtenida.[1]

La educación matemática no sólo debe centrarse en los contenidos, sino en el desarrollo de procesos tales como: representar, argumentar, demostrar, clasificar, analizar, resolver, conjeturar, razonar, visualizar, plantear, explicar, reconocer,

[1] Recuperado: https://es.mathworks.com/products/matlab/index.html?s_tid=gn_loc_drop

relacionar, describir, transformar, interpretar, entre otros. Por tanto, el desarrollo de esta guía le permitirá al estudiante ahondar en temas propios del currículo desarrollando los procesos anteriormente descritos, pero fundamentalmente se diseñó este laboratorio con el fin de profundizar en la representación tanto gráfica como algorítmica de los conceptos estudiados y en el planteamiento y resolución de problemas.

En esta primera práctica, abordaremos la simbología utilizada, el concepto de integral aplicado a las ecuaciones diferenciales y la interpretación de la solución como una familia de funciones monoparamétricas junto con las gráficas tridimensionales asociadas a estas soluciones. Posteriormente, se finaliza con el planteamiento y resolución de un problema que involucra la aplicación de las ecuaciones diferenciales en problemas de modelado.

OBJETIVO(S)

- Utilizar los comandos del software Matlab que permitan solucionar ejercicios propuestos de ecuaciones diferenciales por distintos métodos.
- Identificar la representación gráfica como una forma de solución alternativa a la representación algebraica en las ecuaciones diferenciales.
- Resolver problemas contextualizados que requieren los conceptos vistos en clase de ecuaciones diferencialesy las funciones propias de Matlab.

EQUIPOS Y HARDWARE NECESARIOS SI X No ☐	MATERIALES CONSUMIBLES
SOFTWARE : SI X No ☐	MATERIALES APORTADOS POR EL ESTUDIANTE

PARTE 1: ALGEBRA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES USANDO LOS COMANDOS DE MATLAB

El número de comandos que implementa Matlab relativos a este tema no es muy elevado, pero sí muy eficiente. De todas formas, es posible seguir con el programa los métodos algebraicos de resolución ya conocidos para cada tipo de ecuación diferencial. En la siguiente tabla se presentan los comandos básicos para resolver ecuaciones diferenciales y otros que también usaremos en esta práctica:

Dy	Expresión simbólica para escribir la derivada en una ecuación diferencial de primer orden cuya variable dependiente es y. Se puede usar cualquier letra para representar la variable dependiente.
D2y, D3y,…,Dny	Expresión simbólica para representar la derivada en una ecuación diferencial de orden superior. El número indica el orden de la ecuación.
dsolve('ecuación','v')	Resuelve la ecuación diferencial siendo v lavariable independiente (si no se especifica 'v', la variable independiente es x). Solo revuelve soluciones explícitas.
dsolve('ecuación','condición_inicial','v')	Resuelve la ecuación diferencial de primer orden sujeta a la condición inicial especificada
dsolve('ecuación','cond1','cond2',...,'condn','v')	Resuelve la ecuación diferencial de diferentes órdenes sujeta a condiciones iniciales especificadas.
solve(eqn,var)	Resuelve una ecuación para una variable determinada.
int(expresión)	Encuentra la integral de una expresión.
factor(expresión)	Factoriza un polinomio.

Ejemplo 1.

Vamos a resolver las siguientes ecuaciones diferenciales en Matlab. Observemos que siempre que la solución sea una función explícita, el programa no discrimina ningún tipo de ecuación:

Ecuación diferencial	Tipo de ecuación
$\frac{dy}{dt} + 2ty^2 = 0$	Variables separables (primer orden)
$cos^2xsenxy' + (cos^3x)y = 1$	Ecuación lineal (primer orden)
$(1 + lnx + \frac{y}{x})dx = (1 - lnx)dy$	Exacta (primer orden)
$xy^2\frac{dy}{dx} = y^3 - x^3\ ,\ \ y(1) = 2$	Homogénea con condiciones iniciales (primer orden)
$t\frac{dx}{dt} + x = t^2x^2\ ,\qquad x(1) = 1$	Bernoulli con condiciones iniciales (primer orden)
$w''' + w'' = e^t cost\ , w''(0) = 1, w'(0) = 0, w(0) = 0$	Método de Superposición con condiciones iniciales (tercer orden)

La siguiente es la resolución de las ecuaciones usando Matlab:

```
syms x y t
%variables separables
y=dsolve('Dy+2*t*y^2=0','t')
%lineal
y=dsolve('(cos(x))^2*sin(x)*Dy+(cos(x))^3*y=1','x')
%exactas
%En este caso debe reescribirse la ecuacion de tal
%forma que la derivada quede en la natación del cociente
y=dsolve('(1+log(x)+y/x)=(1-log(x))*Dy','x')
%homogéneas con condiciones iniciales
y=dsolve('x*y^2*Dy=y^3-x^3','y(1)=2')
%Bernoulli con condiciones iniciales
x=dsolve('t*Dx+x=t^2*x^2','x(1)=1','t')
%Superposicion 3 orden con condiciones iniciales
w=dsolve ('D3w+D2w=exp(t)*cos(t)','D2w(0)=1','Dw(0)=0','Dw(0)=0','t')
```

Ejemplo 2

Resolver en Matlab la ecuación $e^t z\frac{dz}{dt} = e^{-z} + e^{-2t-z}$

```
syms t z
z=dsolve('exp(t)*z*Dz=exp(-z)+exp(-2*t-z)','t')
%(-(exp(- 3*t - z)*(6*exp(2*t) - 3*C1*exp(3*t + z) + 2))/3)^(1/2)
%-(-(exp(- 3*t - z)*(6*exp(2*t) - 3*C1*exp(3*t + z) + 2))/3)^(1/2)
```

Observamos que la solución de la ecuación diferencial que entrega Matlab está compuesta por dos funciones implícitas. Como se había comentado antes, el comando “dsolve” está diseñado para entregar soluciones explícitas.
Por tanto, recurriremos a uno de los métodos vistos en clase y con ayuda de Maltab solucionaremos la ecuación diferencial. Si la llevamos a su forma estándar reconocemos que es una ecuación de variables separables:

```
syms t z
%factorizamos el lado derecho de la ecuación.
v=expand(exp(-2*t-z));%expande la exponencial
R=exp(-z)+v;
F=factor(R,z)%factoriza toda la expresión con respecto a z
simplify(F)%(exp(-2*t) + 1)*exp(-z)
```

Gracias a la factorización del lado derecho realizada en Matlab podemos reescribir la ecuación diferencial:

$$\frac{z}{e^{-z}}dz = \frac{(1+e^{-2t})}{e^t}dt$$

A continuación, resolvemos las integrales del lado derecho y del lado izquierdo, recordando que debemos “agregar” la constante en alguno de los dos lados:

```
syms x y
%integral con respecto a z
int (z/exp (-z),z)%exp(z)*(z - 1)
%integral con respecto a t
int ((exp(-2*t) + 1)*exp(-t),t)%- exp(-t) - exp(-3*t)/3+c
```

Luego la respuesta implícita de la ecuación diferencial nos quedaría:

$$e^{z}(z-1)=-e^{-t}-\frac{e^{-3t}}{3}+c$$

PARTE 2: REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Ejemplo 3.

Representar gráficamente la solución de la ecuación diferencial con condiciones iniciales y en la misma pantalla graficar la recta tangente en el punto dado.

$$\frac{dx}{dt}+x=t\,,\ \ x(0)=4$$

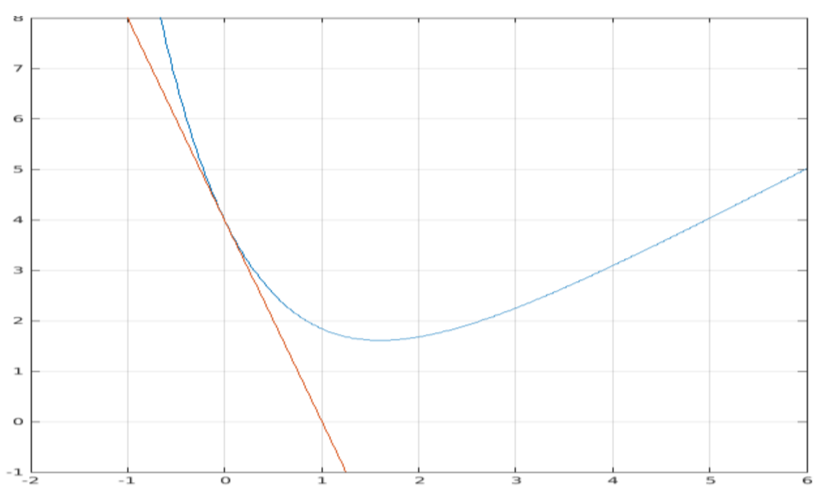
A continuación, presentamos la solución de la ecuación diferencial y la ecuación de la recta tangente en Matlab:

```
syms x t
x=dsolve ('Dx+x=t','x(0)=4','t')%x=t + 5*exp(-t) - 1
%recta tangente
%Derivar y sustituir para encontrar la pendiente
derivada=diff(t + 5*exp(-t) - 1,t)%1 - 5*exp(-t);
m=subs(derivada,t,0)%-4
%ecuación de la recta
syms x t
solve(x-4==m*(t-0),x)%x=4-4t
```

Ahora graficamos la solución y la recta tangente en la misma pantalla.

```
%gráficas

syms t x
x=t + 5*exp(-t) - 1;
ezplot(x,[-3,7])
hold on
x=4-4*t;
ezplot(x,[-3,7])
grid on
axis ([-2 6 -1 8])
```



Ejemplo 4.

Grafique la familia de soluciones (por los menos 5) de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$$

Al intentar usar directamente el comando “dsolve” Matlab nos muestra la respuesta usando la función “lambertw”, lo que significa que la respuesta no es una ecuación implícita:

```
syms x y
dsolve ('Dy=(x*y+3*x-y-3)/(x*y-2*x+4*y-8)')
% - 5*lambertw(0, -exp(C1 - (t*(x - 1))/(5*(x + 4)) - 3/5)/5) - 3
```

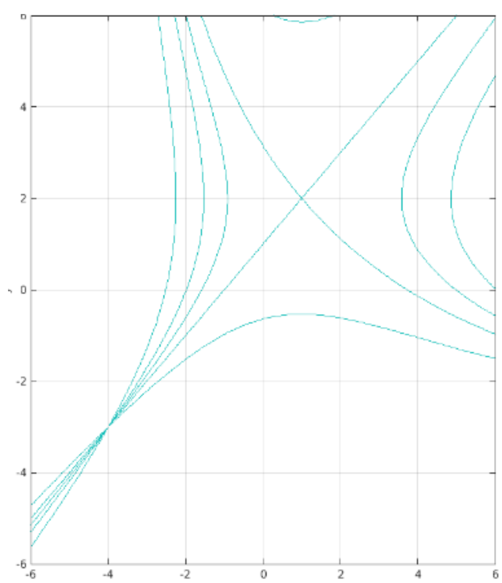
Reconocemos que la ecuación se puede resolver usando variables separables. La siguiente imagen muestra los comandos en Matlab para solucionar la ecuación diferencial.

```
syms x y
Q=x*y+3*x-y-3;
factor(Q)
R=x*y-2*x+4*y-8;
factor(R)
int ((y-2)/(y+3))%y - 5*log(y + 3)
int ((x-1)/(x+4))%x - 5*log(x + 4)
```

Recordemos que debemos adicionar la constante C. A continuación, presentamos la solución de la ecuación para la constante y le asignaremos diversos valores para representar gráficamente la familia de soluciones de la ecuación diferencial dada.

Veamos la programación y las gráficas:

```
figure
syms x y C
%Despejar C para dibujar las soluciones implícitas
C=solve (y - 5*log(y + 3)+C==x - 5*log(x + 4), C)
%C =x - y - 5*log(x + 4) + 5*log(y + 3)
ezplot ('-y + x - 5*log(x + 4) + 5*log(y + 3)')
hold on
ezplot ('-y + x - 5*log(x + 4) + 5*log(y + 3)=1')
hold on
ezplot ('-y + x - 5*log(x + 4) + 5*log(y + 3)=-1')
hold on
ezplot ('-y + x - 5*log(x + 4) + 5*log(y + 3)=-1/2')
hold on
ezplot ('-y + x - 5*log(x + 4) + 5*log(y + 3)=-2')
grid on
axis ([-6 6 -6 6])
```



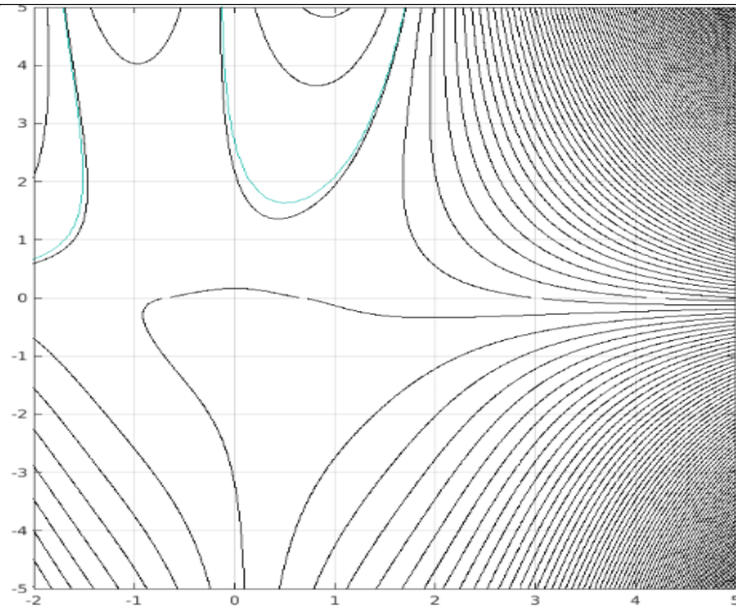
Ejemplo 5

Resolver en Matlab la ecuación $(w^2\cos t - 3t^2w - 2t)dt + (2wsent - t^3 + lnw)dw = 0$, $w(0) = e$

Vamos a usar Matlab para confirmar que la ecuación es exacta. A continuación, la resolveremos y finalmente realizaremos las gráficas correspondientes:

```
syms t w
%w=dsolve('Dw=(w^2*cos(t)-3*t^2*w-2*t)/(-2*w*sin(t)+t^3-log(w))','w(0)=exp(1)')
syms t w
M=w^2*cos(t)-3*t^2*w-2*t;
N=2*w*sin(t)-t^3+log(w);
%comprobar que es exacta
diff(M,w)-diff(N,t)%la respuesta es 0, luego si es exacta.
%método de ecuaciones exactas.
F1=int(M,t);%
derivada_g=N-diff(F1,w);
g=int(derivada_g,w);
%respuesta implícita
F=F1+g%w*(log(w) - 1) + w^2*sin(t) - t^3*w - t^2
figure
syms t w F
[t,w]=meshgrid (-5:0.01:5);
F=real (w.*(log(w) - 1) + w.^2.*sin(t) - t.^3.*w - t.^2);
contour (t,w,F,150,'k');%curvas de nivel
grid on
axis ([-2 5 -5 5])
%condicion inicial
syms t w F
F=w*(log(w) - 1) + w^2*sin(t) - t^3*w - t^2;
c=subs(F,[t w],[0 exp(1)])
vpa (c)%c=0
hold on
ezplot ('w*(log(w) - 1) + w^2*sin(t) - t^3*w - t^2')
```

Las curvas de color negro corresponden a las curvas de nivel de la solución implícita de la ecuación diferencial. La curva verde es la solución al encontrar el valor de c, usando la condición inicial del problema:



PARTE 3: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Ejemplo 6

Al sacar un pastel del horno, su temperatura es de 300º F. Después de tres minutos, la temperatura es 200º F. Si la temperatura del medio al cual se lleva el pastel es de 70º F. ¿En cuánto tiempo se enfriará hasta la temperatura de 100º F? (Zill, 2009, p.85).

Inicialmente, se definen las variables y se plantea la ecuación diferencial

$T(t)$ =temperatura del pastel en cualquier momento del tiempo (°F)
t = tiempo (minutos)
Temperatura del medio= 70°F
T(0)= temperatura inicial=300°F

Teniendo en cuenta que es un problema de enfriamiento, usaremos la ecuación diferencial ya definida:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 70)$$

La llevamos a la forma estándar de la ecuación diferencial lineal:

$$\frac{dT}{dt} = kT - 70k$$

$$\frac{dT}{dt} - kT = -70k$$

Identificamos el factor integrante ($e^{\int -kdt} = e^{-kt}$) y realizamos el procedimiento para resolver este tipo de ecuaciones:

$$e^{-kt}\frac{dT}{dt}e^{-kt} - ke^{-kt}T = -70ke^{-kt}$$

$$\frac{d}{dt}(Te^{-kt}) = -70ke^{-kt}$$

$$d(Te^{-kt}) = -70ke^{-kt}dt$$

$$\int d(Te^{-kt}) = \int -70ke^{-kt}dt$$

$$Te^{-kt} = -70k\int e^{-kt}dt$$

$$Te^{-kt} = -70k\left[\frac{e^{-kt}}{-k}\right] + c$$

$$T = -70k\left[\frac{e^{-kt}}{-e^{-kt}k}\right] + \frac{c}{e^{-kt}}$$

$$T = 70 + ce^{kt}$$

A continuación, usamos la condición inicial del problema $T(0) = 300$ y que después de 3 minutos, el pastel tiene una temperatura de 200º F. de esta forma encontraremos el valor de c y el de k, respectivamente.

$$300 = 70 + ce^{k(0)}$$

$$300 = 70 + c(1)$$

$$300 - 70 = c$$

$$230 = c$$

$$T = 70 + 230\,e^{kt}$$

$$200 - 70 = 230e^{3k}$$

$$130 = 230e^{3k}$$

$$\frac{130}{230} = e^{3k}$$

$$ln\left(\frac{130}{230}\right) = ln\,e^{3k}$$

$$ln\left(\frac{130}{230}\right) = 3k$$

$$\frac{ln\left(\frac{13}{23}\right)}{3} = k$$

Finalmente, la ecuación para la temperatura en cualquier momento es:

$$T = 230\, e^{\frac{ln\left(\frac{13}{23}\right)}{3}t} + 70$$

Por último, para conocer cuánto tiempo se demora en llegar a una temperatura de 100º F, se calcula el valor de t, se reemplaza en

$$T = 230\, e^{\frac{ln\left(\frac{13}{23}\right)}{3}t} + 70$$

$$100 = 230\, e^{\frac{ln\left(\frac{13}{23}\right)}{3}t} + 70$$

Se despeja t,

$$t = \frac{3}{ln\left(\frac{13}{23}\right)} ln\left(\frac{30}{230}\right)$$

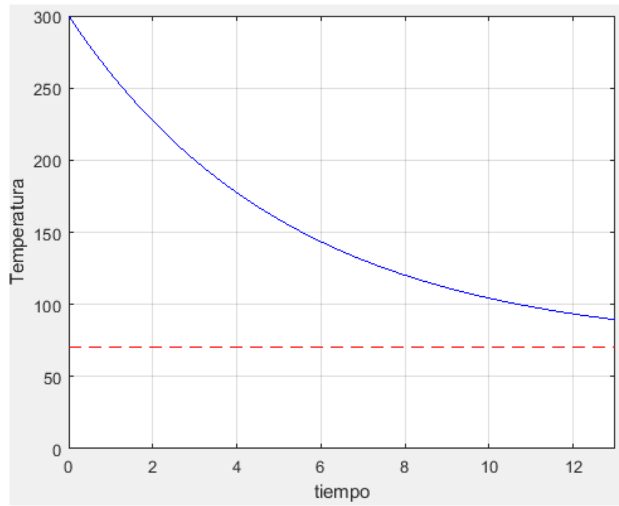
Y el tiempo que el pastel necesita para enfriarse a una temperatura de 100º F es de $t = 10{,}71$ minutos

La siguiente imagen muestra los comandos en Matlab, para hallar la solución del problema:

```
syms T k t
%plantear la ecuación diferencial
T=dsolve('DT=k*(T-70)','T(0)=300')
%T =230*exp(k*t) + 70
%Usamos la condición T(3)=200 para encontrar k
k=solve(200==230*exp(k*3)+ 70)%log(13/23)/3
%la ecuación sería T =230*exp(log(13/23)/3*t) + 70
%Ahora encontramos el tiempo para una temperatura de 100°F
t=solve(100==230*exp(log(13/23)/3*t)+70)
vpa(t)%10.710193407395311443493037059875
```

Finalmente, tenemos la gráfica:

```
%Gráfica
syms t T
t=linspace(0,13,100);
T=230*exp(log(13/23)/3*t) + 70;
plot(t,T,'b')
hold on
T=0*t + 70;
plot(t,T,'r--')
grid on
xlabel('tiempo');ylabel('Temperatura')
axis([0 13 0 300])
```



PARTE 4: EJERCICIOS PROPUESTOS

Resolver los siguientes ejercicios propuestos en el texto guía de las secciones 2.2, 2.4, 3.1. Todos los procedimientos deben resolverse en Matlab.

1. Encuentre la solución de la ecuación diferencial y realice la gráfica de la recta tangente en el punto dado.

$$\sqrt{1-y^2}dx - \sqrt{1-x^2}dy = 0, \qquad y(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. Resolver la siguiente ecuación diferencial de segundo orden $\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 9y = t$, con las siguientes condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Realizar la representación gráfica de la solución.

3. Considere la siguiente ecuación diferencial: $(x+y)^2dx + (2xy + x^2 - 1)dy = 0$

   a) Muestre que la ecuación diferencial es exacta
   b) Resuelva la ecuación diferencial usando la condición *y(1)=1*
   c) Realizar las curvas de nivel y la curva que corresponde a la condición dada. Debe dibujarlas en el mismo plano y con colores diferentes.

4. Resuelva siguiente ecuación diferencial $(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)\,\mathrm{dy} = y^2\,\mathrm{dx}$ por el método de variables separables y realice el gráfico de la familia de soluciones.

5. Un gran tanque de 500 galones está lleno de agua pura. Le entra salmuera que tiene 2lb de sal por galón a razón de 5 gal/min. La solución bien mezclada sale del tanque con la misma razón.

a) Determine la cantidad A(t) de libras de sal que hay en el tanque al tiempo t.
b) Realizar la gráfica de la solución.
c) ¿Cuál es la concentración c(t) de sal después de 5 minutos?
d) ¿Cuál es la concentración en el tanque después de un largo tiempo, es decir, conforme $t \to \infty$?
e) ¿Para qué tiempo la concentración de sal en el tanque es igual a la mitad de este valor límite?

ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS:

Escriba sus observaciones y conclusiones generales sobre la práctica: ¿qué dificultades se le presentaron en el desarrollo de la guía?, ¿reforzó los conceptos tratados en esta práctica?, ¿aprendió y comprendió todos los parámetros y modos de utilizar los comandos y/o scripts de Matlab requeridos en el estudio de las temáticas tratadas en la práctica? ¿Considera que son apropiados los ejemplos planteados, así como los ejercicios propuestos para el estudio de los temas tratados en la práctica?, ¿sí o no y por qué?

BIBLIOGRAFÍA:

Badia, A. (2016). La percepción de la utilidad de la tecnología conforma su uso para enseñar y aprender. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, *18*, 95–105.

Perez, C. (2009). Ecuaciones diferenciales con Matlab (2 Edición). Mathworks.

USB. (2010). *Modelo Pedagógico - Referentes conceptuales, lineamientos curriculares y de flexibilidad*. *Editorial Bonaventuriana* (Vol. 1). http://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Zill, D, (2007). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado (8 edición). Thomson.

Informe de práctica de laboratorio

Para la entrega del informe de la práctica de laboratorio los estudiantes deben seguir los siguientes pasos:

- Guardar el archivo de Matlab (.m) de la práctica
- Ingresar al aula virtual de la universidad USBBOG
- Ingresar al curso o asignatura a la cual corresponde el laboratorio
- Ingresar a la actividad correspondiente a la práctica
- Publicar el archivo de Matlab (.m).