

### 3 Plastizität und Versagen

In diesem Kapitel werden die Grundzüge der Plastizität phänomenologisch diskutiert, ohne dabei auf einzelne Werkstoffklassen mit ihren speziellen Mechanismen einzugehen. Dies wird in den Kapiteln 6 bis 9 getan.

*Plastische Verformungen* sind im Gegensatz zu den elastischen (Kapitel 2) irreversibel. Das bedeutet, dass eine einmal aufgebrachte plastische Verformung nach dem Entlasten nicht wieder zurückgeht. In der Realität ist dabei jeder plastischen Verformung eine elastische überlagert. Nach dem plastischen Verformen eines Bauteils geht beim Entlasten der elastische Anteil zurück, der plastische Anteil bleibt erhalten. Ein zentrales Problem bei der Untersuchung der Verformung von Werkstoffen ist deshalb, die experimentell gewonnenen Dehnungen in einen elastischen und einen plastischen Anteil aufzuteilen.

Ähnlich wie bei den elastischen Verformungen gibt es eine zeitunabhängige und eine zeitabhängige Form. Wenn von *Plastizität* gesprochen wird, ist im Folgenden immer die zeitunabhängige Form gemeint. Die zeitabhängige Form wird als *Viskoplastizität* oder *Kriechen* bezeichnet. Für Metalle und Keramiken wird sie in Kapitel 11, für Polymere in Kapitel 8 diskutiert.

Durch plastische Deformationen können Bauteile bzw. Halbzeuge bei der Herstellung in eine neue Form gebracht werden, beispielsweise durch Walzen, Tiefziehen oder Schmieden. Im Betrieb ist plastische Verformung meist unerwünscht, da bei ihr große Deformationen auftreten. Daher kann dort die Grenze zwischen elastischer und plastischer Verformung als Versagenskriterium angesehen werden. Dagegen bietet das Auftreten plastischer Verformung vor einem Bruch auch eine gewisse Sicherheit, da so ein Bauteilversagen vor einem katastrophalen Bruch erkannt und Abhilfe geschaffen werden kann. Auch in Crashelementen in Fahrzeugen wird die plastische Verformung ausgenutzt, um kinetische Energie zu dissipieren und das Fahrzeug so abzubremesen.

Da bei plastischen Verformungen große Dehnungen möglich sind, wird in diesem Kapitel zunächst der Dehnungsbegriff bei großen Formänderungen untersucht. Das plastische Verhalten untersuchter Werkstoffe wird meist durch Zugversuche charakterisiert. Auf diese wird in Abschnitt 3.2 ausführlich eingegangen. Anschließend folgt in Abschnitt 3.3 eine Betrachtung kontinuumsmechanischer Ansätze zur Beschreibung der Grenze zwischen elastischem und plastischem Verhalten, der plastischen Verformung selbst und der dabei auftretenden Verfestigung. Mit der Härte wird eine weitere wichtige Kenngröße der Werkstoffe in Abschnitt 3.4 besprochen. Am Ende des Kapitels wird auf unterschiedliche Versagensmechanismen, die zu sogenannten *Gewaltbrüchen* führen, eingegangen.

#### 3.1 Technische und wahre Dehnung

In Abschnitt 2.2.2 wurde die Dehnung  $\varepsilon$  als Quotient der Längenänderung  $\Delta l$  und der Ausgangslänge  $l_0$

$$\varepsilon = \frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (3.1)$$

eingeführt. Bei elastischen Verformungen ist diese Definition sinnvoll, da der unverformte Zustand (Länge  $l_0$ ) einem Grundzustand entspricht, auf den das Material bei Entlastung zurückgeht.

Bei plastischen Verformungen findet eine bleibende Umverteilung von Atomen im Material statt, so dass der Anfangszustand im Material nach einer plastischen Verformung nicht mehr erhalten ist. Daher ist es nicht sinnvoll, alle Formänderungen auf den Anfangszustand zu beziehen. Stattdessen ist es zweckmäßig, Dehnungen für den aktuellen Zustand zu berechnen. Wird eine Probe beispielsweise zunächst plastisch gedehnt und dann wieder auf ihre Ausgangslänge gestaucht, so scheint sie zwar makroskopisch den Originalzustand zu besitzen, aber die einzelnen Atome sind in den meisten Fällen nicht wieder in ihrer Ausgangslage. Dies zeigt, dass der aktuelle Werkstoffzustand bei plastischer Verformung nicht nur von der aktuellen Dehnung, sondern auch von der Verformungsgeschichte abhängt.

Beispielsweise unterscheidet sich bei Metallen nach der oben betrachteten Verformungsfolge der Zustand nach der Verformung von dem vor der Verformung auch makroskopisch. Normalerweise ist nämlich die Spannung, die zu einer weiteren plastischen Verformung notwendig ist (die Dehngrenze, siehe Abschnitt 3.2) durch die Verformung gestiegen. Um die Verformungsgeschichte beschreiben zu können, wird die sogenannte *plastische Vergleichsdehnung*  $\varepsilon_V^{(pl)}$  eingeführt, bei der jede plastische Verformung unabhängig von der Verformungsrichtung einen positiven Beitrag leistet. Sie ist nach der beschriebenen Verformungsfolge von Null verschieden. Auf sie wird in Abschnitt 3.3.5 näher eingegangen.

Ein weiterer Grund, warum bei plastischen Verformungen die Längenänderung nicht auf die Ausgangslänge bezogen werden sollte, ist die Tatsache, dass bei ihnen große Dehnungen auftreten. Gerade bei hintereinander geschalteten Verformungen würden dadurch Ungenauigkeiten in der Dehnungsberechnung auftreten (siehe dazu das Beispiel auf Seite 67).

Für die auf die Ausgangslänge bezogene Dehnung  $\varepsilon$  werden häufig die Begriffe *technische Dehnung* oder *Nenndehnung* verwendet, um sie von der im Folgenden eingeführten *wahren Dehnung*  $\varphi$  zu unterscheiden. Der Term »technisch« weist darauf hin, dass in vielen technischen Anwendungen die technische Dehnung ausreichend genau ist, weil dort die Dehnungen relativ gering bleiben.

Zur Berechnung der *wahren Dehnung* bzw. des *Umformgrades*  $\varphi$  wird das Aufbringen der Dehnung in unendlich viele kleine Schritte aufgeteilt und jeweils die infinitesimale Längenänderung  $dl$  auf die aktuelle Länge  $l$  bezogen. Zu jedem Zeitpunkt gilt also für die wahre Dehnungsänderung  $d\varphi$  analog zu Gleichung (3.1):

$$d\varphi = \frac{(l + dl) - l}{l} = \frac{dl}{l}. \quad (3.2)$$

Das entspricht für sehr kleine Dehnungen der technischen Dehnung. Um die Gesamtdehnung  $\varphi$  zu erhalten, müssen die Teildehnungen  $d\varphi$  integriert werden:

$$\varphi = \int_{l_0}^{l_1} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l_1}{l_0} = \ln \left( 1 + \frac{\Delta l}{l_0} \right) = \ln(1 + \varepsilon). \quad (3.3)$$

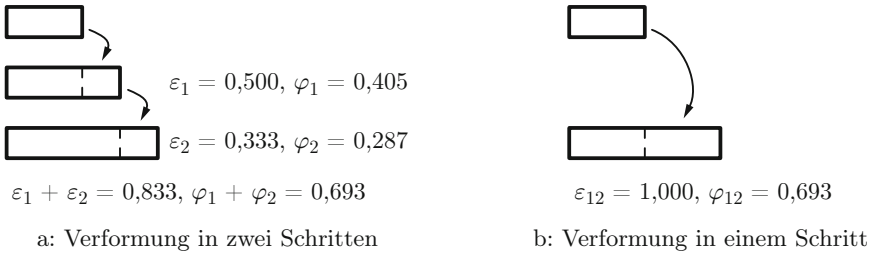


Bild 3.1: Vergleich der Dehnungsmaße für eine Verformung einer Zugprobe in zwei Schritten und in einem Schritt. Insgesamt wird die Länge der Probe verdoppelt. Die technischen Dehnungen sind in beiden Fällen verschieden ( $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \neq \varepsilon_{12}$ ), die wahren Dehnungen gleich ( $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_{12}$ ).

Der Unterschied zwischen wahrer und technischer Dehnung kann anhand der Verformung zweier gleicher Proben in verschiedenen Verformungsschritten veranschaulicht werden. Bild 3.1 skizziert einen solchen Fall:

Die erste Probe wird von der Ausgangslänge  $l_0$  zunächst auf die Länge  $l_1 = 1,5 l_0$  ( $\Delta l = 0,5 l_0$ ) gezogen, was einer technischen Dehnung von

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{0,5 l_0}{l_0} = 0,5$$

und einer wahren Dehnung von

$$\varphi_1 = \ln \frac{1,5 l_0}{l_0} = 0,405$$

entspricht. Durch eine weitere Verformung wird sie um  $\Delta l = 0,5 l_0$  auf die Länge  $l_2 = 2 l_0$  verlängert. Diese Verformung kann durch folgende Dehnungsmaße beschrieben werden:

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l}{1,5 l_0} = \frac{0,5 l_0}{1,5 l_0} = 0,333,$$

$$\varphi_2 = \ln \frac{2 l_0}{1,5 l_0} = 0,287.$$

Nimmt man an, dass aufeinander folgende Dehnungen zu einer Gesamtdehnung addiert werden können, ergeben sich entsprechend Bild 3.1 a folgende Gesamtdehnungen:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0,833,$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 0,693.$$

Die zweite Probe wird in einem Schritt von der Länge  $l_0$  auf die Länge  $2 l_0$  verlängert ( $\Delta l = l_0$ ), so dass sich folgende Dehnungen ergeben (Bild 3.1 b):

$$\varepsilon_{12} = \frac{l_0}{l_0} = 1,000,$$

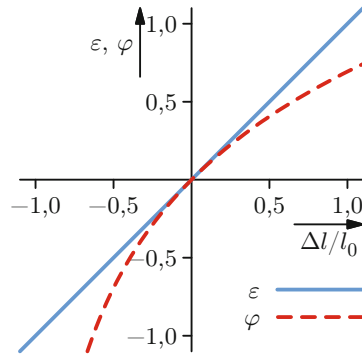


Bild 3.2: Vergleich der technischen und der wahren Dehnung

$$\varphi_{12} = \ln \frac{2l_0}{l_0} = 0,693.$$

Vergleicht man die Dehnungsmaße für beide Proben, die jeweils vor und nach den Verformungen die gleiche Länge besitzen, so ergeben sich für die wahren Dehnungen die gleichen Werte ( $\varphi = 0,693$ ), für die technischen Dehnungen jedoch verschiedene Werte ( $0,833 \neq 1,000$ ). Nur die wahren Dehnungen führen also unabhängig von der Verformungsgeschichte auf die gleichen Dehnungswerte. Der Unterschied zwischen wahrer und technischer Dehnung wird in Aufgabe 8 näher betrachtet.

### Mathematische Betrachtung

Entwickelt man den Zusammenhang zwischen wahrer und technischer Dehnung (3.3) in eine Taylorreihe um den Ursprung und bricht nach dem quadratischen Glied ab, so ergibt sich

$$\varphi = \ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2.$$

Für kleine Dehnungen  $\varepsilon \ll 1$  kann man  $\varepsilon^2$  vernachlässigen, und es ergibt sich  $\varphi \approx \varepsilon$ , so dass die technische Dehnung  $\varepsilon$  also eine recht gute Näherung für die wahre Dehnung  $\varphi$  darstellt, wie auch Bild 3.2 zeigt. Generell ist die wahre Dehnung für positive Dehnungen (Zugbereich) geringer als die technische Dehnung, für negative Dehnungen (Druckbereich) ist ihr Betrag größer als der der technischen Dehnung.

### \* Mehrachsige große Deformationen

Die in diesem Abschnitt eingeführte wahre Dehnung  $\varphi$  kann in dieser Form nur für Normaldehnungen verwendet werden. Große Scherungen können mit ihr nicht dargestellt werden. Um allgemeine Deformationen beschreiben zu können, gibt es mehrere Ansätze [17, 69, 123]. Sie basieren darauf, eine mathematische Abbildungsmatrix, den sogenannten *Deformationsgradienten*  $\underline{\underline{F}}$ , der mit einer Koordinatentransformation vergleichbar ist, zwischen dem unverformten und dem verformten Zustand zu berechnen.

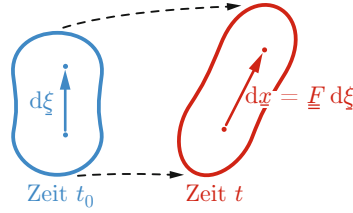


Bild 3.3: Bewegung einer Verbindung zweier Stoffpunkte bei einer Verformung (nach [17])

Dazu wird im unverformten Zustand (Zeitpunkt  $t_0$ ) ein Koordinatensystem eingeführt, in dem jedes Element des zu verformenden Körpers eine Koordinate  $\xi$  erhält. Mit diesem Koordinatensystem wird die Verbindung zwischen zwei benachbarten Stoffpunkten zum Zeitpunkt  $t_0$  durch den Vektor  $d\xi$  gebildet. Dieses Koordinatensystem bleibt während der gesamten Verformung raumfest, verändert sich also weder in Größe, Lage oder Position. Vor der Verformung wird ein weiteres Koordinatensystem,  $\underline{x}$ , eingeführt, das zum Zeitpunkt  $t_0$  identisch mit dem  $\xi$ -Koordinatensystem ist. Dieses bewegt und verformt sich allerdings mit dem Körper (Bild 3.3), so dass es beispielsweise nicht mehr rechtwinklig ist. Beide Koordinatensysteme können durch eine Abbildungsmatrix, den ortsabhängigen *Deformationsgradienten*  $\underline{\underline{F}}(\xi)$ , ineinander überführt werden. Für zwei benachbarte Stoffpunkte, die durch die Vektoren  $d\xi$  bzw.  $d\underline{x}$  miteinander verbunden sind, gilt somit

$$d\underline{x} = \underline{\underline{F}}(\xi) d\xi \quad \text{bzw.} \quad dx_i = F_{ij}(\xi) d\xi_j.$$

Normalerweise ist der Deformationsgradient vom betrachteten Ort abhängig, es gilt

$$F_{ij}(\xi) = \frac{\partial x_i(\xi, t)}{\partial \xi_j}. \quad (3.4)$$

Der Deformationsgradient  $\underline{\underline{F}}$  enthält neben der Verformung auch Informationen über die Starrkörperrotation des betrachteten Materials. Da diese Rotation jedoch nicht zur Deformation beiträgt, müssen die beiden Anteile getrennt werden. Dies ist möglich, indem der Deformationsgradient als Abfolge einer *Verzerrung*  $\underline{\underline{U}}$  (des sogenannten *Rechts-Streck-Tensors*) und einer anschließenden *Rotation*  $\underline{\underline{R}}$  dargestellt wird. Die beiden aufeinander folgenden Abbildungen werden durch eine Tensormultiplikation aneinander gefügt:

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{U}} \quad (3.5)$$

Die Verzerrung  $\underline{\underline{U}}$  kann aus  $\underline{\underline{F}}$  mit der folgenden Beziehung berechnet werden:

$$\underline{\underline{U}}^2 = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}. \quad (3.6)$$

Zwar beschreibt  $\underline{\underline{U}}$  die gesuchte Verzerrung schon, allerdings sind häufig andere, aus  $\underline{\underline{U}}$  abgeleitete, *Verzerrungstensoren* vorteilhaft. Ein Beispiel ist der *greensche Verzerrungstensor*  $\underline{\underline{G}}$ . Er ist folgendermaßen definiert:

$$\underline{\underline{G}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{U}}^2 - \underline{\underline{1}}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}). \quad (3.7)$$

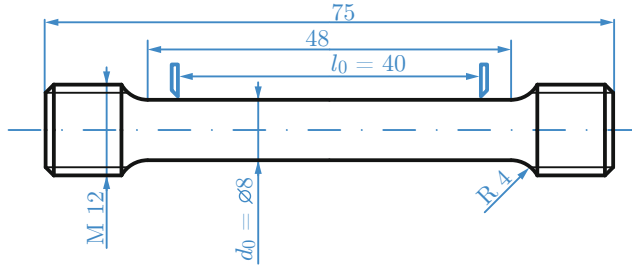


Bild 3.4: Runde Zugprobe mit Gewindeköpfen (Form B) mit dem Nenndurchmesser  $d_0 = 8$  mm und Messlänge  $L_0 = 40$  mm (Probenbezeichnung: Zugprobe DIN 50 125-B 8×40)

Der greensche Verzerrungstensor verschwindet für ein unverformtes System:  $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{0}}$ . Für kleine Verzerrungen nähert sich der greensche Verzerrungstensor dem in Abschnitt 2.2.2 eingeführten Dehnungstensor  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  an.

Schreibt man  $\underline{\underline{G}}$  elementweise für die Verschiebungen  $\underline{u}$ , so ergibt sich (die Herleitung findet sich beispielsweise in *Becker / Bürger* [17])

$$G_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_j}. \quad (3.8)$$

Für kleine Verzerrungen sind die Quotienten des Typs  $\partial u_k / \partial \xi_i$  klein, so dass das Produkt im zweiten Summand sehr klein wird und vernachlässigt werden kann. Somit entspricht der greensche Verzerrungstensor  $\underline{\underline{G}}$  für kleine Deformationen der in Abschnitt 2.2.2 eingeführten Dehnung  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  nach Gleichung (2.8).

## 3.2 Spannungs-Dehnungs-Diagramme

### 3.2.1 Charakteristische Spannungs-Dehnungs-Diagramme

Häufig wird das elastisch-plastische Verhalten von Werkstoffen mit Hilfe von Spannungs-Dehnungs-Kurven beschrieben, die in Zugversuchen ermittelt werden. Aus den Zugversuchen werden Kennwerte ermittelt, die in Tabellenwerken, z. B. den entsprechenden DIN-Normen, angegeben werden. Diese Kennwerte werden zur Werkstoffauswahl und zur Bauteilauslegung verwendet. Auch für komplizierte Bauteile mit damit verbundenen mehrachsigen Spannungszuständen sind Auslegungskriterien verfügbar, die auf Kennwerten aus einachsigen Zugversuchen basieren. Darauf wird im Zusammenhang mit der Plastizitätstheorie in Abschnitt 3.3 eingegangen.

Bei Zugversuchen werden Proben mit konstanter Geschwindigkeit auseinandergezogen und dabei die Längenänderung  $\Delta L$  und die dazu notwendige Kraft  $F$  gemessen. Um vergleichbare Ergebnisse zu erzielen, gibt es genormte Probenformen (siehe beispielsweise Bild 3.4). Meist werden runde Proben mit einem über die Messlänge konstanten Durchmesser verwendet. Um ein Versagen an der Einspannung zu verhindern, ist diese dicker als der Probendurchmesser. Der Übergang zwischen beiden Durchmessern wird mit einem Radius gestaltet, um abrupte Querschnittsänderungen zu vermeiden, da diese zu Spannungsüberhöhungen und somit lokalisiertem Versagen führen würden (vgl. Kapitel 4).

Um die gemessenen Größen (Kraft  $F$  und Längenänderung  $\Delta L$ ) in Werkstoffkennwerte umzurechnen, werden normalerweise die *technische Spannung*  $\sigma$  und die technische Dehnung  $\varepsilon$  berechnet:

$$\sigma(\Delta L) = \frac{F(\Delta L)}{S_0}, \quad (3.9)$$

$$\varepsilon(\Delta L) = \frac{\Delta L}{L_0}. \quad (3.10)$$

Dabei sind  $S_0$  die Querschnittsfläche zu Versuchsbeginn und  $L_0$  die Anfangsmesslänge.<sup>1</sup> Das in Gleichung (3.9) verwendete Spannungsmaß  $\sigma$  entspricht nicht der wirklich im Material auftretenden Spannung, da es während des gesamten Versuchs, bei dem sich die Querschnittsfläche ändert, auf die Anfangsquerschnittsfläche  $S_0$  bezogen wird. Im Zusammenhang mit Zugversuchen wird  $\sigma$  als *technische Spannung* oder *Nennspannung* bezeichnet. Ist bei Zugversuchen von der wirklich wirkenden Spannung die Rede, wird diese als *wahre Spannung* bezeichnet und mit  $\sigma_w$  bezeichnet.

Je nach getestetem Material ergeben sich bei Zugversuchen unterschiedliche, charakteristische Spannungs-Dehnungs-Diagramme, die in Bild 3.5 zusammengefasst sind.

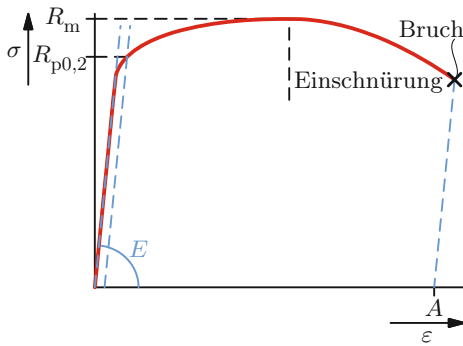
Die Spannungs-Dehnungs-Kurven der meisten Metalle entsprechen Bild 3.5 a. Während des Versuchs verhält sich die Probe zunächst fast vollständig elastisch. Die Spannungs-Dehnungs-Kurve besitzt zunächst die Steigung des Elastizitätsmoduls  $E$ . Mit steigender Spannung setzt allmählich plastische Verformung ein, wobei es nicht möglich ist, eine scharfe Grenze zwischen elastischer und plastischer Verformung zu ziehen. Im Ingenieurwesen wird angenommen, dass eine plastische – also bleibende – Dehnung von 0,2% noch akzeptabel ist. Daher wird als Grenzwert für einsetzende plastische Dehnung normalerweise der Spannungswert verwendet, bei dem 0,2% bleibende Dehnung erreicht wird. Dieser wird als *Dehngrenze*  $R_{p0,2}$  bezeichnet.

Um die plastische Dehnung zu ermitteln, muss der elastische Anteil der Dehnung von der Gesamtdehnung abgezogen werden. Wie in Abschnitt 2.3 erläutert, beruht die elastische Dehnung auf einer Streckung der Bindungen zwischen den Atomen. Wird die Last entfernt, so nehmen die Atome ihre Gleichgewichtslagen ein, so dass die elastische Dehnung auf Null zurückgeht. Da die Streckung der Atombindungen unabhängig von der Umordnung der Atome bei einer plastischen Verformung ist, entspricht die Steigung der Spannungs-Dehnungs-Kurve bei einer Entlastung der Probe deshalb dem Elastizitätsmodul.<sup>2</sup> Aufgrund der Umordnung der Atome bei der plastischen Verformung ist die elastische Gerade allerdings verschoben, da die Gleichgewichtslagen der Atome nicht mehr denen des Ausgangszustands entsprechen. Um die Spannung bei einer bleibenden plastischen Dehnung von 0,2% zu ermitteln, muss also im Abstand von 0,2% zur elastischen Gerade eine Parallele gezogen werden. Ihr Schnittpunkt mit der gemessenen Kurve entspricht der Dehngrenze (Bild 3.6).

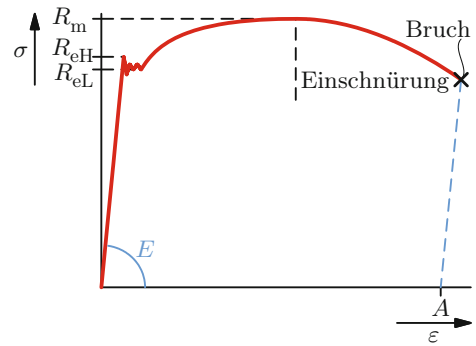
Bei weiterer Probenverlängerung wächst zunächst die technische Spannung  $\sigma$  weiter an, bis ein Maximum erreicht wird. Dieses wird als *Zugfestigkeit*  $R_m$  bezeichnet. Ab die-

<sup>1</sup> Bezeichnungen nach DIN EN ISO 6892-1.

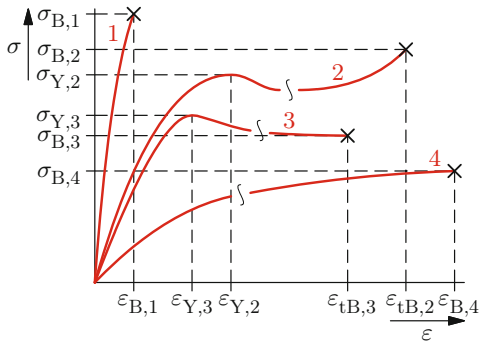
<sup>2</sup> Die Entlastungsgerade ist in Wirklichkeit nicht vollständig parallel zur elastischen Gerade am Versuchsbeginn, da während der plastischen Verformung die Querschnittsfläche der Probe abnimmt (vgl. Abschnitt 3.2.2).



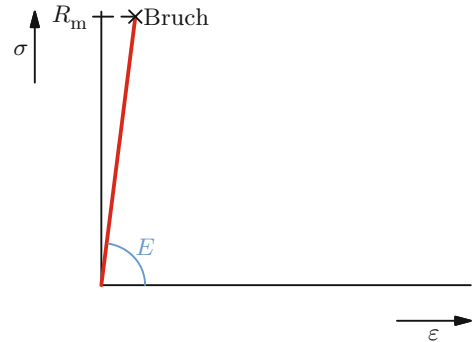
a: Duktiles Metall ohne ausgeprägte Streckgrenze (vgl. DIN EN ISO 6892-1)



b: Duktiles Metall mit ausgeprägter Streckgrenze (vgl. DIN EN ISO 6892-1)



c: Polymere (vgl. DIN EN ISO 527-1)



d: Sprödes Material

Bild 3.5: Prinzipielle Spannungs-Dehnungs-Kurven (nach [50])

sem Maximum bildet sich in der Probe eine Einschnürung, die an einer im Vergleich zur restlichen Probe schwächeren Stelle (beispielsweise mit einem minimal geringeren Querschnitt, einer Drehriefe oder einem Lunker) einsetzt, so dass sich lokal die Spannung erhöht. Der Probenquerschnitt nimmt nun in der Einschnürung rapide ab, weil sich die weitere plastische Verformung auf diesen Bereich konzentriert. Obwohl normalerweise die wahre Spannung in der Einschnürung weiter steigt, sinkt die äußere Kraft und somit auch die technische Spannung  $\sigma$ , da diese immer noch auf den Ausgangsquerschnitt bezogen berechnet wird.<sup>3</sup> Damit die Verformung auch bei dieser Kraftverringerung stabil verläuft, werden Zugversuche weggeregelt durchgeführt. Der Probenbereich außerhalb der Einschnürung wird durch die Verringerung der Kraft entlastet und daher nicht weiter plastisch verformt.

Der Zugversuch wird durch den vollständigen Bruch der Probe beendet. Die bleibende Dehnung nach dem Bruch wird als *Bruchdehnung*  $A_k = \Delta L/L_0$  bezeichnet, wobei  $k = L_0/\sqrt{S_0}$  ist. Für die gängigen Probenmaße  $L_0 = 5 d_0$  bzw.  $L_0 = 10 d_0$  ergeben sich

<sup>3</sup> In Abschnitt 3.2.2 wird diese Tatsache näher untersucht.

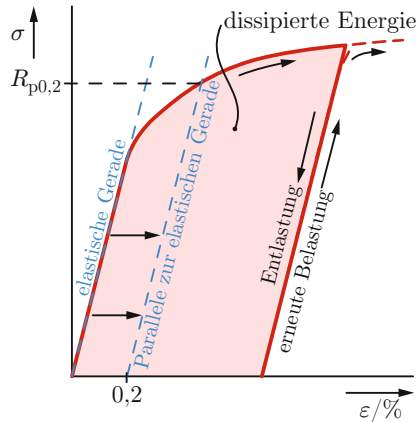


Bild 3.6: Entlastung während eines Zugversuchs. Die Entlastungsgerade ist parallel zur elastischen Gerade beim Versuchsbeginn. Die Dehngrenze  $R_{p0,2}$  wird ermittelt, indem eine Parallele zur elastischen Gerade im Abstand von  $\varepsilon = 0,2\%$  mit der Spannungs-Dehnungs-Kurve zum Schnitt gebracht wird.

$k = 5,65$  bzw.  $k = 11,3$  und somit die Bruchdehnungen  $A_{5,65}$  und  $A_{11,3}$ .<sup>4</sup> Für  $A_{5,65}$  wird nach DIN EN ISO 6892-1 nur  $A$  geschrieben.

Die Eigenschaft eines Materials, sich vor dem Bruch plastisch zu verformen, wird als *Duktilität* bezeichnet. Je größer die Bruchdehnung ist, desto *duktiler* ist der geprüfte Werkstoff. Werkstoffe mit geringer Duktilität werden als *spröde* bezeichnet.

Die Höhe der Spannung, die der Werkstoff bis zum Versagen erträgt, wird als *Festigkeit* bezeichnet. Je nachdem, ob das Auftreten plastischer Verformungen oder der Bruch der Zugprobe als Versagenskriterium herangezogen werden, bestimmen  $R_{p0,2}$  oder  $R_m$  die Festigkeit. In den Kapiteln 5, 10 und 11 werden weitere Versagensarten und Parameter als Maß für die Werkstofffestigkeit eingeführt.

Einige wenige Metalle, insbesondere unlegierte Stähle, zeigen zunächst ein anderes Verhalten, die sogenannte *ausgeprägte Streckgrenze* (Bild 3.5 b): Bis zum Erreichen der *oberen Streckgrenze*  $R_{eH}$  verhalten sie sich fast vollständig elastisch. Beim Erreichen dieser Spannung setzt plötzlich plastische Verformung ein, die lokal in Form sogenannter *Lüdersbänder* auftritt. Bei schwankenden Spannungen breiten sich die plastischen Zonen über die gesamte Probe aus. Die niedrigste dabei auftretende Spannung wird als *untere Streckgrenze*  $R_{eL}$  bezeichnet.<sup>5</sup> Die zu diesem Phänomen der lokalen Plastifizierung führenden Mechanismen werden in Abschnitt 6.4.2 besprochen. Sobald die Probe vollständig plastifiziert ist, verhält sie sich wie ein Metall ohne ausgeprägte Streckgrenze.

Auch bei Polymeren gibt es unterschiedliche Typen von Spannungs-Dehnungs-Kurven (Bild 3.5 c). Bei Polymeren mit einer *ausgeprägten Streckspannung* (Kurven 2 und 3)

<sup>4</sup> Nach der nicht mehr gültigen Norm DIN 50 145 wurde die Bruchdehnung durch das Verhältnis  $L_0/d_0$  gekennzeichnet:  $L_0 = 5d_0$  ergab somit  $A_5$ .

<sup>5</sup> Bei der Bestimmung von  $R_{eL}$  wird der erste Spannungsabfall nicht berücksichtigt, da es sich bei ihm meist um einen Überschwinger der Prüfmaschine handelt.

steigt die Spannung zunächst auf einen Maximalwert, die *Streckspannung*  $\sigma_Y$  (für engl. *yield stress*) mit der Streckdehnung  $\varepsilon_Y$ , an. Die Spannung fällt dann zunächst ab. Bis zum Bruch, der bei der *Bruchspannung*  $\sigma_B$  und der Bruchdehnung  $\varepsilon_{tB}$  auftritt, sind unterschiedliche Verläufe, mit oder ohne Spannungsanstieg, möglich. Die höchste auftretende Spannung wird als *Zugfestigkeit*  $\sigma_M$  bezeichnet. In Kurve 2 gilt somit  $\sigma_M = \sigma_B$ , in Kurve 3 gilt  $\sigma_M = \sigma_Y$ . Die bei der Zugfestigkeit vorhandene Dehnung wird mit  $\varepsilon_M$  bezeichnet, wenn die Zugfestigkeit der Streckspannung entspricht (Kurve 3), und mit  $\varepsilon_{tM}$ , wenn die Zugfestigkeit oberhalb der Streckspannung liegt (Kurve 2). Bei Polymeren ohne ausgeprägte Streckspannung (Kurve 1 eines spröden Materials, Kurve 4 eines duktilen Materials) steigt die Spannung während des Versuchs monoton bis zum Bruch an. Die *Bruchspannung* ist gleichzeitig die *Zugfestigkeit*,  $\sigma_B = \sigma_M$ . Die zugehörige Dehnung wird mit  $\varepsilon_B = \varepsilon_M$  bezeichnet. Im Gegensatz zu den Metallen werden die Dehnungen ( $\varepsilon_Y$ ,  $\varepsilon_B$ ,  $\varepsilon_{tM}$ ,  $\varepsilon_M$ ) nicht für den entlasteten Zustand angegeben, sondern direkt aus dem Diagramm abgelesen.<sup>6</sup> Die einzelnen Mechanismen, die zu diesen Spannungs-Dehnungs-Kurven führen, werden in Kapitel 8 besprochen.

Bei spröden Werkstoffen, insbesondere Keramiken, findet keine oder nur geringe plastische Deformation statt. Sie verhalten sich bis zum Bruch elastisch (Bild 3.5 d). Die Bruchspannung entspricht dann der *Zugfestigkeit*  $R_m$ . Bei der plastischen Verformung dissipiert Energie, die teilweise im Material gespeichert, aber zum größten Teil in Form von Wärme abgeführt wird. Die auf das Volumen bezogene *spezifische plastische Energiedissipation* ist gleich der Fläche unter der Spannungs-Dehnungs-Kurve (in Bild 3.6 rot eingefärbt). Formelmäßig gilt nach Gleichung (2.15)

$$w^{(pl)} = \int \underline{\underline{\sigma}} \cdot d\underline{\underline{\varepsilon}}^{(pl)} = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{(pl)}, \quad (3.11)$$

wobei  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{(pl)}$  der plastische Anteil der Dehnung ist.

Bild 3.7 zeigt Spannungs-Dehnungs-Kurven für verschiedene Werkstoffe. Der Anfangsbereich ist gesondert gedruckt, da dieser im Gesamtbild kaum zu erkennen ist.

Andere neben dem Zugversuch gängige Versuche zur Bestimmung der Festigkeit sind der Druckversuch und der Biegeversuch. Bei einem *Druckversuch* wird die Probe bis zum Versagen zusammengedrückt. Ähnlich wie beim Zugversuch findet bei duktilen Werkstoffen zunächst plastische Deformation statt. Der Spannungswert bei 0,2% bleibender Dehnung wird als *Stauchgrenze* (oder auch Dehngrenze im Druckversuch)  $\sigma_{d0,2}$ , der Spannungswert, bei dem der erste Riss oder der Probenbruch auftritt, wird als *Druckfestigkeit*  $\sigma_{dB}$  bezeichnet.<sup>7</sup> Gerade zur Bestimmung der Festigkeit spröder Werkstoffe wird häufig der *Biegeversuch* verwendet, bei dem eine Flachprobe bis zum Bruch gebogen wird. Die Spannung an der Probenoberfläche,<sup>8</sup> bei der die Probe versagt, wird als *Biegefestigkeit*  $\sigma_B$  bezeichnet.

6 Der Einfachheit halber werden im Weiteren die Bezeichnungen  $R_{p0,2}$  und  $R_m$  auch für Polymere verwendet, auch wenn die Norm  $\sigma_Y$  und  $\sigma_M$  vorschreibt.

7 Die Stauchgrenze  $\sigma_{d0,2}$  und die Druckfestigkeit  $\sigma_{dB}$  werden als positive Zahlen angegeben, obwohl es sich um Druckspannungen handelt. Siehe auch DIN 50 106

8 Bei einer elastischen Biegebelastung ergibt sich ein linearer Normalspannungszustand mit der maximalen Zug- bzw. Druckspannung an den Probenoberflächen.

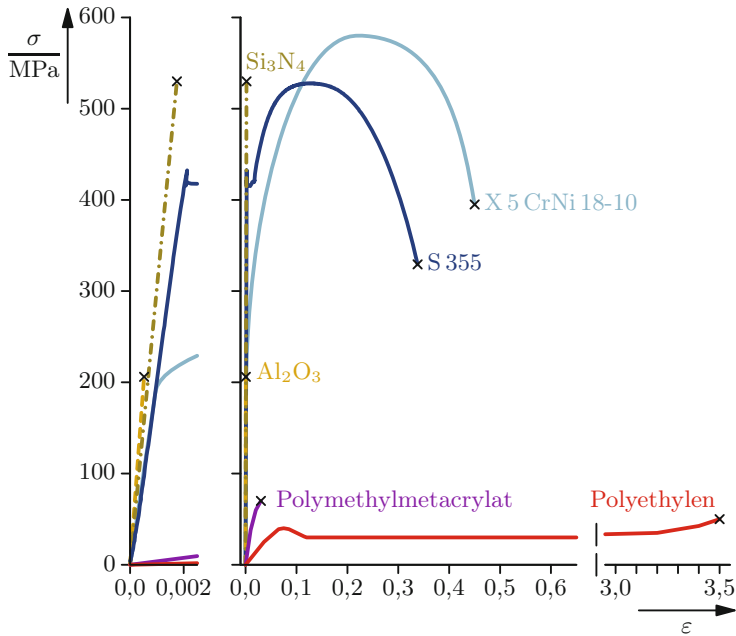


Bild 3.7: Spannungs-Dehnungs-Kurven verschiedener Werkstoffe (nach [46, 93, 109]), im linken Teil eine Ausschnittsvergrößerung. Bei  $\text{Al}_2\text{O}_3$  und  $\text{Si}_3\text{N}_4$  handelt es sich um Keramiken. S 355 ist ein unlegierter Stahl (frühere Bezeichnung St 52), X 5 CrNi 18-10 ist ein austenitischer Stahl. Polymethylmethacrylat (PMMA) und Polyethylen (PE) sind Polymere.

### 3.2.2 Analyse eines Spannungs-Dehnungs-Diagramms

In Zugversuchen werden die Kennwerte *Elastizitätsmodul*  $E$ , *Dehngrenze*  $R_{p0,2}$  bzw. *Streckgrenze*  $R_{eH}$ , *Zugfestigkeit*  $R_m$  sowie die *Bruchdehnung*  $A$  ermittelt. In diesem Abschnitt wird ihre Ermittlung und Bedeutung am Beispiel eines duktilen Metalls genauer untersucht.

Bei Zugversuchen werden Kraft-Weg-Kurven aufgenommen. Diese werden unter Berücksichtigung des Probenquerschnitts und der Proben- bzw. Messlänge in (Nenn-)Spannungs-(Nenn-)Dehnungs-Kurven umgerechnet, indem zur Berechnung der Nennspannung  $\sigma(\Delta L)$  die Kraft  $F(\Delta L)$  auf den Ausgangsquerschnitt  $S_0$  und zur Berechnung der Nenndehnung  $\varepsilon(\Delta L)$  die Probenverlängerung  $\Delta L$  auf die Ausgangslänge  $L_0$  bezogen werden (Gleichungen (3.9) und (3.10)).

Bei kleinen Dehnungen entspricht die Steigung der Spannungs-Dehnungs-Kurve näherungsweise dem *Elastizitätsmodul*  $E$ . Dabei ist jedoch zu beachten, dass die Steigung direkt bei Versuchsbeginn normalerweise kleiner als der Elastizitätsmodul ist (Bild 3.8), unter anderem, weil Setzvorgänge in der Einspannung stattfinden. Bei Metallen ohne ausgeprägte Streckgrenze beginnt die plastische Verformung allmählich, so dass auch die obere Grenze der elastischen Geraden nicht exakt bestimmt werden kann. So kann

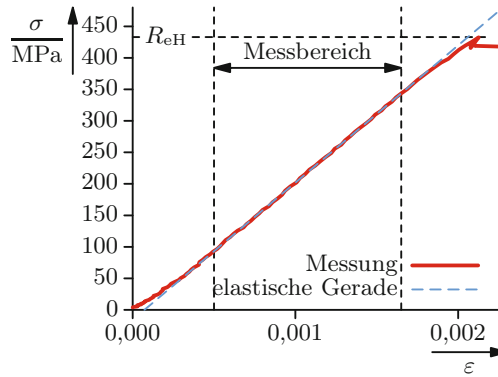


Bild 3.8: Ermittlung des Elastizitätsmoduls  $E = 217\,797\text{ MPa}$  aus einem Zugversuch für S355 (alte Bezeichnung St 52). Der Anfangsbereich sowie der Bereich kurz vor der Plastifizierung dürfen nicht in die Bestimmung des Elastizitätsmoduls einbezogen werden (Die hier verwendeten Grenzen sind durch vertikale Linien gekennzeichnet). Messdaten: Institut für Werkstofftechnik, Universität Gh Kassel

es ausgesprochen schwierig sein, den Elastizitätsmodul aus einem Spannungs-Dehnungs-Diagramm exakt abzulesen. Um diese Probleme abzuschwächen, werden Proben zur Ermittlung des Elastizitätsmoduls häufig knapp über die Dehngrenze belastet und dann entlastet. Die Steigung der Entlastungskurve entspricht dem Elastizitätsmodul besser als die der ersten Belastung.

Elastizitätsmoduln können auch auf anderem Wege ermittelt werden. Eine Möglichkeit besteht darin, die Eigenschwingungen eines Balkens zu messen, da die Schwingungsfrequenz durch die Schallgeschwindigkeit  $c = \sqrt{E/\rho}$  bestimmt ist. Die Vorteile dieser Messmethode bestehen darin, dass sehr kleine Schwingungsamplituden zur Messung ausreichen und dass Frequenzen elektronisch sehr genau gemessen werden können.

Der Übergang von elastischem zu plastischem Verhalten ist bei Metallen mit ausgeprägter Streckgrenze durch einen Spannungsabfall leicht zu lokalisieren (Bild 3.5 b). Hat ein Metall jedoch keine ausgeprägte Streckgrenze, so kann kein Zustand angegeben werden, an dem plastische Verformung einsetzt, da dies allmählich geschieht. Normalerweise wird eine für Ingenieuranwendungen sinnvolle Grenze von 0,2 % bleibender Dehnung als Dehngrenze  $R_{p0,2}$  verwendet.

Bei plastischer Verformung tritt eine nennenswerte Änderung der Querschnittsfläche auf, so dass die Nennspannung nicht der wirklich im Material auftretenden *wahren Spannung*  $\sigma_w$  entspricht, die sich aus dem Quotienten der äußeren Last  $F(\Delta L)$  und der momentanen Querschnittsfläche  $S(\Delta L)$  ergibt:

$$\sigma_w(\Delta L) = \frac{F(\Delta L)}{S(\Delta L)}. \quad (3.12)$$

Während der plastischen Verformung entspricht die wahre Spannung derjenigen Spannung, bei der das Material zum jeweiligen Zeitpunkt fließt, und wird dementsprechend als *Fließspannung*  $\sigma_F$  bezeichnet.

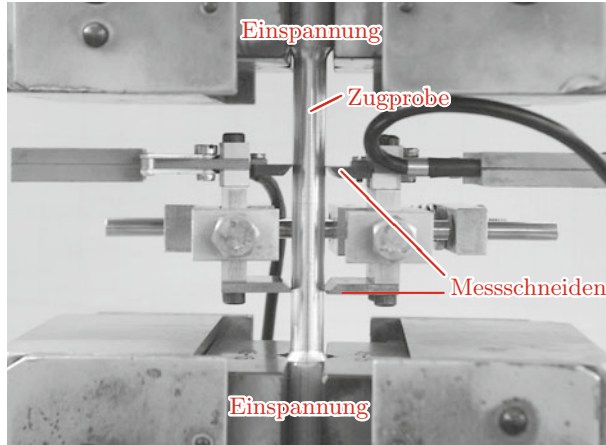


Bild 3.9: Messung der Dehnung im Zugversuch

Für die aktuelle Querschnittsfläche  $S(\Delta L)$  kann unter der Annahme, dass die plastische Verformung ohne Volumenänderung abläuft und die Volumenänderung durch elastische Dehnungen vernachlässigbar ist,<sup>9</sup> eine Näherung berechnet werden. Die Bedingung für Volumenkonstanz ergibt

$$S(\Delta L) \cdot L(\Delta L) = S_0 \cdot L_0 = \text{const.}$$

Mit Gleichung (2.4) ergibt sich daraus folgender Zusammenhang mit der Nenndehnung  $\varepsilon$ :

$$\frac{S(\Delta L)}{S_0} = \frac{1}{1 + \varepsilon(\Delta L)}. \quad (3.13)$$

Diese Näherung gilt nur, wenn im betrachteten Bereich der Länge  $L$  der Querschnitt konstant ist. Durch die abnehmende Querschnittsfläche liegt die wahre Spannung

$$\sigma_w = \sigma (1 + \varepsilon) \quad (3.14)$$

im Spannungs-Dehnungs-Diagramm oberhalb der Nennspannung  $\sigma$ .

Normalerweise wird die Längenänderung  $\Delta L$  mittels zweier aufgesetzter Schneiden mit dem Anfangsabstand  $L_0$  gemessen, wie in Bild 3.9 gezeigt. Alle Dehnungswerte sind also über diese Messlänge gemittelt. Solange die Probe sich auf der vollen Länge gleichmäßig elastisch und plastisch dehnt, spielt es keine Rolle, an welcher Position und über welche Messlänge man die Längenänderung und damit die Dehnung bestimmt. Dieser Bereich der Spannungs-Dehnungs-Kurve, in dem sich die Probe gleichmäßig verformt, wird als *Gleichmaßdehnung* bezeichnet.

Sobald sich die Probe aber einschnürt, ergeben sich je nach Messbereich sehr unterschiedliche Ergebnisse, da sich die weitere plastische Verformung auf die Einschnürung konzentriert. Bild 3.10 veranschaulicht diese Tatsache. Bild 3.10 a zeigt eine unbelastete

<sup>9</sup> Die Annahmen sind zumindest für Metalle korrekt.

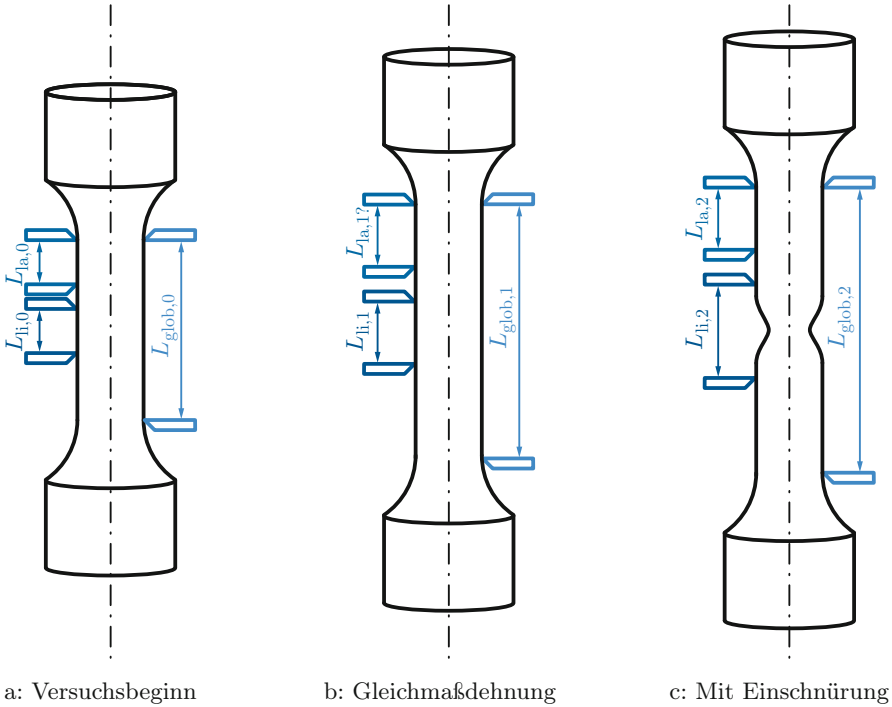
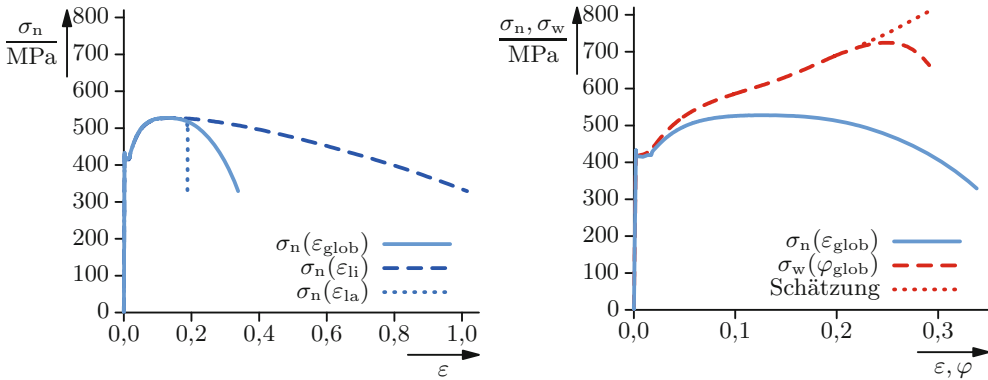


Bild 3.10: Schematische Darstellung eines Zugversuchs mit verschiedenen angesetzten Dehnungsmessern. Es werden die Indizes glob für die *globale* Dehnung, li für die *lokale* Dehnung *innerhalb* der Einschnürzone und la für die *lokale* Dehnung *außerhalb* der Einschnürzone verwendet.

Während der Gleichmaßdehnung wird in allen Messbereichen die gleiche Dehnung gemessen, z. B. im Bild 3.10 b abgelesen:  $\varepsilon_{\text{glob},1} = \varepsilon_{\text{li},1} = \varepsilon_{\text{la},1} = 0,42$ . Sobald die Einschnürung beginnt, hängt das Ergebnis von der Position und der Messlänge ab. Aus dem Bild 3.10 c abgelesen ergibt sich beispielsweise  $\varepsilon_{\text{glob},2} = 0,60$ ,  $\varepsilon_{\text{li},2} = 1,19$  und  $\varepsilon_{\text{la},2} = 0,42$ .

Probe mit drei unterschiedlichen Messbereichen. In Bild 3.10 b befindet sich die Probe noch im Gleichmaßdehnungsbereich. Bei allen drei Messbereichen wird die gleiche Dehnung gemessen. Durch die in Bild 3.10 c vorhandene Einschnürung hat sich die weitere plastische Verformung auf diese beschränkt. Dadurch hat sich die Dehnung  $\varepsilon_{\text{la}}$  der Messstelle außerhalb der Einschnürung gegenüber Bild 3.10 b nur geringfügig verändert. Der große Messbereich (Dehnung  $\varepsilon_{\text{glob}}$ ) erfasst die plastische Verformung in der Einschnürung. Da aber auch viel gegenüber Bild 3.10 b nahezu unverformte Länge berücksichtigt wird, fällt  $\varepsilon_{\text{glob},2}$  kleiner als  $\varepsilon_{\text{li},2}$  aus, das fast nur die Dehnung in der Einschnürung enthält. Deshalb ist es notwendig anzugeben, bei welchem Verhältnis von Messlänge  $L_0$  zu Probendurchmesser  $d_0$  bzw. Probenquerschnitt  $S_0$  die Bruchdehnung ermittelt wurde. Beispielsweise bedeutet  $A_{11,3}$  ein Verhältnis  $L_0/\sqrt{S_0} = 11,3$  (vgl. Seite 72).<sup>10</sup>

<sup>10</sup> Bei Rundproben entspricht dies einem Verhältnis  $L_0/d_0 = 10$ .



a: Auftragung der Nennspannung über der auf unterschiedliche Messbereiche bezogenen Dehnung (Definition der Messbereiche in Bild 3.10)

b: Auftragung der Nennspannung und wahren Spannung über der auf die gesamte Messlänge bezogenen Dehnung.

Bild 3.11: Gemessene Spannungs-Dehnungs-Kurven für S 355. Messdaten: Institut für Werkstofftechnik, Universität Gh Kassel.

Bild a zeigt, wie die Dehnung ab Auftreten der Einschnürung vom Messbereich abhängt.

Bild b zeigt den Einfluss der abnehmenden Querschnittsfläche auf die Berechnung der Spannung. Dabei wurde die wahre Spannung  $\sigma_w$  über die Näherungsformel (3.13) für eine kurze Messlänge im Bereich der Einschnürung berechnet. Diese verliert bei einer starken Einschnürung ihre Gültigkeit, so dass die an der engsten Stelle der Einschnürung wirkende wahre Spannung entsprechend der Schätzung bis zum Bruch weiter ansteigt.

Bild 3.11 a stellt reale Messwerte in verschiedenen Messbereichen gegenüber. Die Kurve für  $\epsilon_{glob}$  entspricht der Spannungs-Dehnungs-Kurve mit einer großen Messlänge. Die Kurve für  $\epsilon_{la}$ ,<sup>11</sup> die außerhalb der Einschnürung gemessen wurde, zeigt, wie die Probe dort entlastet wird und entsprechend keine weitere plastische Verformung stattfindet. Das Material zieht sich durch die Entlastung elastisch wieder zusammen, so dass die senkrecht erscheinende Kurve in Wirklichkeit in etwa die Steigung der elastischen Gerade am Versuchsbeginn hat. Die Kurve  $\epsilon_{li}$  zeigt dagegen, dass die plastische Verformung in der Einschnürzone ungleich größer als die global gemessene ist.<sup>12</sup>

In der Einschnürzone nimmt der Probenquerschnitt  $S(\Delta L)$  drastisch ab, so dass auch die äußere Kraft  $F(\Delta L)$  und somit die Nennspannung  $\sigma(\Delta L)$  sinken. Die Berechnung der Spannung durch das Beziehen der Kraft auf den Ausgangsquerschnitt ist in diesem Bereich nicht mehr sinnvoll. Zur Berechnung der wahren Spannung  $\sigma_w$  nach Gleichung (3.12) kann die Näherungsformel (3.13) zunächst noch verwendet werden, wenn ein sehr kurzer Messbereich im Bereich der Einschnürung vorhanden ist, so dass die Bedingung einer

<sup>11</sup>  $\epsilon_{la}$  wurde in Bild 3.10 definiert.

<sup>12</sup> Mit modernen Messverfahren (wie beispielsweise der sogenannten *Laserextensiometrie*, bei der Längenänderungen mittels eines Laserstrahls gemessen werden) ist es möglich, auf der gesamten Probe sehr viele kurze Messlängen zu verteilen und alle gleichzeitig zu messen, wie es hier getan wurde.

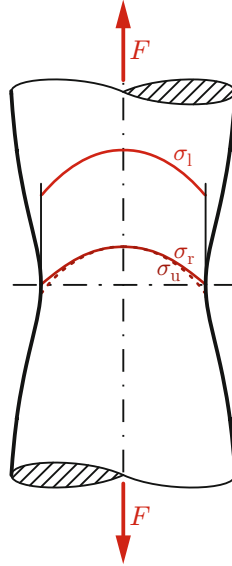


Bild 3.12: Dreiachsiger Zugspannungszustand in der Einschnürung (nach [92]). Es sind die Längsspannung  $\sigma_l$ , die Spannung in Umfangsrichtung  $\sigma_u$  sowie die Radialspannung  $\sigma_r$  eingezeichnet.

konstanten Querschnittsfläche über die Messlänge noch näherungsweise erfüllt wird. Bei zunehmender Einschnürung wird die Näherung immer schlechter.

Die wahre Dehnung wurde in Abschnitt 3.1 als

$$\varphi_{\text{glob}} = \ln(1 + \varepsilon_{\text{glob}}) = \ln \frac{L_{\text{glob}}}{L_0}$$

eingeführt. Technische und wahre Spannungs-Dehnungs-Kurven sind in Bild 3.11 b miteinander verglichen. Die wahre Kurve liegt höher als die Nennkurve, da während des Versuchs der Probenquerschnitt abnimmt. Gegen Ende des Versuchs bei einer immer stärker werdenden Einschnürung sinkt die genäherte »wahre« Kurve wieder ab. Das entspricht nicht den wirklich auftretenden Belastungen an der dünnsten Stelle der Probe und ist darin begründet, dass die Näherungsformel aufgrund der starken Einschnürung und des endlich langen Messbereichs eine zu große Querschnittsfläche liefert. Die an der engsten Stelle der Einschnürung auftretende Spannung steigt normalerweise auch hier weiter an, da bei Metallen die Fließspannung fast immer mit zunehmender plastischer Verformung ansteigt. Dies wird als *Verfestigung* bezeichnet. Unter bestimmten Umständen ist jedoch auch ein Sinken der Fließspannung möglich (*Entfestigung*). Darauf wird am Ende dieses Abschnitts eingegangen.

Innerhalb der Einschnürzone bildet sich ein dreiachsiger Zugspannungszustand aus, der zusätzlich zur Längsspannung  $\sigma_l$  eine Radialspannung  $\sigma_r$  und eine Spannung in Um-

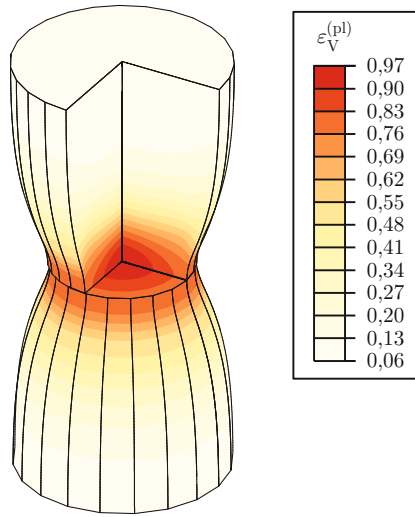


Bild 3.13: Plastische Dehnung in einem eingeschnürten Zugstab. In der eingeschnürten Zone befindet sich die maximale plastische Verformung in der Probenmitte. Als Maß für die plastische Dehnung dient die *plastische Vergleichsdehnung*  $\epsilon_V^{(pl)}$ , die quantitativ angibt, wie stark die plastische Verformung insgesamt war (vgl. Abschnitt 3.3.5).

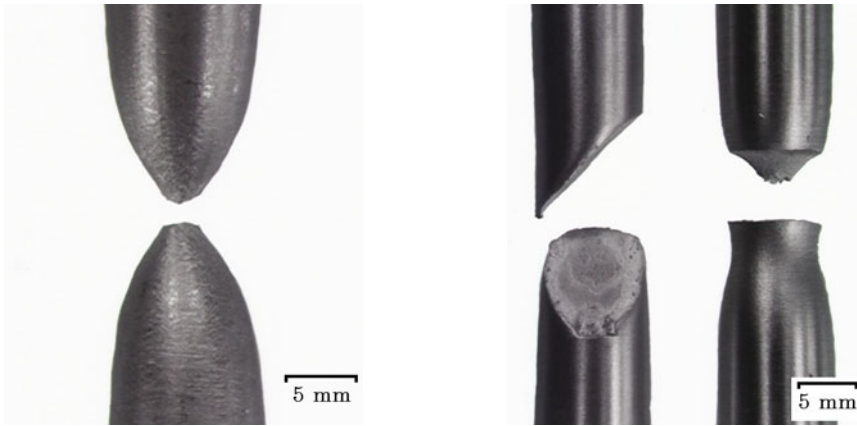
fangsrichtung  $\sigma_u$  enthält.<sup>13</sup> Dieser in Bild 3.12 skizzierte Spannungszustand ist über den Probenquerschnitt veränderlich: Alle Spannungskomponenten sind in der Probenmitte am größten, die Umfangsspannung  $\sigma_u$  und die Radialspannung  $\sigma_r$  sind im Probeninneren gleich groß, im Randbereich ergeben sich kleine (nicht relevante) Abweichungen [92]. Die Differenzen der Spannungen  $\sigma_l - \sigma_u$  und  $\sigma_l - \sigma_r$  ist über den Probenquerschnitt nahezu konstant.

Dies ist darin begründet, dass die Probe über den gesamten Querschnitt plastifiziert ist. Sie erfüllt daher überall die, in Abschnitt 3.3.1 eingeführte, sogenannte Fließbedingung. Verwendet man die Fließbedingung nach Tresca, so muss die Differenz zwischen größter und kleinster Spannung konstant sein, um die Fließbedingung zu erfüllen.

Anders als das äußere Erscheinungsbild einer eingeschnürten Probe vermuten lässt, ist die plastische Verformung in der Probenmitte am größten (vgl. Bild 3.13).

Der Bruch der Probe erfolgt schließlich durch *Ausziehen der Einschnürung zu einer Spitze* oder durch die Ausbildung eines *Trichter-Kegel-Bruchs* (*Kegel-Tasse-Bruch*) oder eines *Scherbruchs* [92] (Bild 3.14). Beim Ausziehen zu einer Spitze schnürt sich die Probe immer weiter ein, bis der tragende Querschnitt auf Null reduziert ist. Dabei treten sehr große plastische Deformationen auf (siehe auch Bild 8.20). Bei technischen Legierungen

<sup>13</sup> Dieser Zustand darf nicht mit dem in Kapitel 4 eingeführten Spannungszustand bei konstruktiven Kerben verwechselt werden. Dort herrscht ein (fast) vollständig elastischer Spannungszustand vor, hier ist das Material über den gesamten Querschnitt plastifiziert. Die Spannungsverteilungen im elastischen und im voll-plastischen Zustand unterscheiden sich grundlegend.



a: Ausgezogenes Reinaluminium

b: Scherbruch und Trichter-Kegel-Bruch von AlMg 5-Zugproben

Bild 3.14: Bruchformen duktiler Zugproben [92]

kommt es aufgrund von im Material entstehenden Anrissen meist zu einem Trichter-Kegel-Bruch<sup>14</sup>, gelegentlich auch zu einem Scherbruch. Es gibt einige Ursachen, die die Bildung eines Scherbruchs begünstigen. Beispielsweise kann eine überlagerte Biegebeanspruchung durch eine unsaubere Einspannung der Probe oder durch die Bauteilgeometrie (z. B. bei Drahtseilen) einen Scherbruch auslösen. Zeigt ein Werkstoff bei einsetzender plastischer Verformung eine Entfestigung, so kann auch dies zur Bildung eines Scherbruchs führen. Eine solche Entfestigung kann beispielsweise bei Werkstoffen mit stark temperaturabhängiger Fließspannung durch die Erwärmung der plastisch verformenden Werkstoffbereiche auftreten [92]. Auf die genauen Mechanismen des Probenversagens wird in Abschnitt 3.5 eingegangen.

### 3.2.3 Approximation der Spannungs-Dehnungs-Kurve

Häufig werden Zugversuchsdaten realer Werkstoffe durch relativ einfache Formeln approximiert. Dabei wird oft das *Ramberg-Osgood-Gesetz*

$$\varphi = \frac{\sigma_w}{E} + \left( \frac{\sigma_w}{K} \right)^{1/n} \quad (3.15)$$

mit dem Parameter  $K$ , der ein Maß für die Festigkeit ist, und dem *Verfestigungsexponenten*  $n$  verwendet. Bild 3.15 zeigt die Spannungs-Dehnungs-Kurve für die Aluminiumlegierung AlMgSi 1 im Vergleich mit der darauf angepassten Approximation.

Bei der Betrachtung großer Deformationen, wie sie bei Umformvorgängen (z. B. Tiefziehen, Schmieden) von Metallen auftreten, kann der elastische Anteil vernachlässigt werden, so dass sich

$$\sigma_w = K \varphi^n \quad (3.16)$$

<sup>14</sup> Meist befinden sich Trichter- und Kegelanteile auf beiden Probenhälften. Die Bildung eines vollständigen Trichters und eines vollständigen Kegels wie in Bild 3.14 b ist selten.

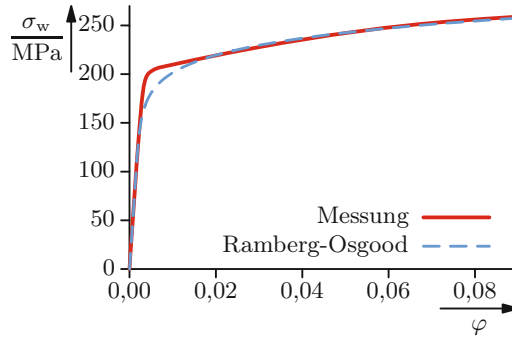


Bild 3.15: Wahre Zugkurve für AlMgSi 1 und darauf angepasstes Ramberg-Osgood-Gesetz. Es gilt  $E = 66,2 \text{ GPa}$ ,  $K = 327 \text{ MPa}$ ,  $n = 0,10$ .

ergibt. Für  $n = 0$  verfestigt der Werkstoff nicht, so dass die Fließspannung bei plastischer Verformung konstant bei  $\sigma_w = K$  bleibt. Dies wird als *idealplastisches* Verhalten bezeichnet (vgl. Abschnitt 3.3.5). Mit steigendem Verfestigungsexponenten nimmt auch die Verfestigung des Werkstoffs zu. Wie in Abschnitt 6.4.1 gezeigt werden wird, ist die Größe der Verfestigung  $\Delta\sigma_w$  für verschiedene Werkstoffe einer Werkstoffgruppe ähnlich und zeigt keine starke Abhängigkeit von der Anfangsfestigkeit. Deshalb zeigen niederfeste Werkstoffe eine wesentlich stärkere relative Verfestigung  $\Delta\sigma_w/\sigma_w$  als hochfeste Werkstoffe. Die relative Verfestigung ist somit bei einer großen Anfangsfestigkeit geringer. Bezogen auf Gleichung (3.16) bedeutet dies, dass niederfeste Werkstoffe einen kleinen Vorfaktor  $K$  und einen hohen Verfestigungsexponenten  $n$  besitzen, während hochfeste Werkstoffe ein großes  $K$  und ein kleines  $n$  haben. Gängige Werte für  $n$  liegen im Bereich 0,1 bis 0,45. Der Vorfaktor  $K$  ist zwar ein Maß für die Festigkeit, entspricht aber quantitativ weder der Dehngrenze noch der Zugfestigkeit, sondern dem auf  $\varphi = 1$  extrapolierten Wert der Spannung.

Mit Hilfe dieser Approximation ist es möglich, eine Abschätzung für den Beginn der Einschnürung bzw. für das Ende der Gleichmaßdehnung zu finden (im Weiteren mit dem Index G1 für »Gleichmaßdehnung« bezeichnet).

Eine Einschnürung tritt dann auf, wenn die Werkstoffverfestigung nicht mehr ausreicht, um eine lokale Querschnittsabnahme zu kompensieren und somit die Kraft, die die Querschnittsfläche übertragen kann, abzunehmen beginnt. Der Einschnürbeginn entspricht also dem Moment, an dem die äußere Last nicht mehr zunimmt:  $dF_{G1}/d\varphi_{G1} = 0$ . Mit der wahren Spannung  $\sigma_w$  gilt  $F = \sigma_w S$ . Bildet man daraus das Differential  $dF/d\varphi$ , so ergibt sich für beginnende Einschnürung<sup>15</sup>

$$\frac{dF_{G1}}{d\varphi_{G1}} = \sigma_{w,G1} \frac{dS_{G1}}{d\varphi_{G1}} + S_{G1} \frac{d\sigma_{w,G1}}{d\varphi_{G1}} = 0.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{\sigma_{w,G1}} \frac{d\sigma_{w,G1}}{d\varphi_{G1}} = - \frac{1}{S_{G1}} \frac{dS_{G1}}{d\varphi_{G1}}. \quad (3.17)$$

<sup>15</sup> Es wird angenommen, dass gerade noch keine Einschnürung vorliegt, so dass die Querschnittsfläche noch nicht ortsabhängig ist.

Tabelle 3.1: Verfestigungsexponenten für einige Werkstoffe [60, 91]. Die Tabelle zeigt, dass Gleichung (3.20) von diesen Werkstoffen näherungsweise erfüllt wird. Die Werkstoffkennwerte können sich je nach Wärmebehandlungszustand stark von den angegebenen Werten unterscheiden.

Werkstoff	$\varphi_{G1}$	$n$	$R_{p0,2}, R_{eH}/\text{MPa}$	$R_m/\text{MPa}$
S 235 JR (St 37-2)	0,21	0,22	235	430
E 335 (St 60-2)	0,15	0,17	335	650
X 5 CrNi 18-10	0,39	0,38	185	600
AlMg 5	0,19	0,19	80	180
CuZn 36 (Messing)	0,40	0,42	180	330

Vernachlässigt man die elastische Dehnung, so muss während der plastischen Verformung (also auch zum Zeitpunkt beginnender Einschnürung) das Volumen  $V = S L$  konstant bleiben:

$$\frac{dV_{G1}}{d\varphi_{G1}} = S_{G1} \frac{dL_{G1}}{d\varphi_{G1}} + L_{G1} \frac{dS_{G1}}{d\varphi_{G1}} = 0.$$

Durch Umsortieren und Verwenden der Definition für das wahre Dehnungsinkrement, Gleichung (3.2), ergibt sich

$$-\frac{1}{S_{G1}} \frac{dS_{G1}}{d\varphi_{G1}} = \frac{1}{d\varphi_{G1}} \frac{dL_{G1}}{L_{G1}} = \frac{d\varphi_{G1}}{d\varphi_{G1}} = 1. \quad (3.18)$$

Setzt man Gleichung (3.18) in Gleichung (3.17) ein, so folgt

$$\frac{d\sigma_{w,G1}}{d\varphi_{G1}} = \sigma_{w,G1}. \quad (3.19)$$

Leitet man entsprechend die Formel für die Spannungs-Dehnungs-Kurve (3.16) nach der Dehnung ab, so ergibt sich

$$\frac{d\sigma_{w,G1}}{d\varphi_{G1}} = n \cdot K \cdot \varphi_{G1}^{n-1} = n \frac{K \varphi_{G1}^n}{\varphi_{G1}} = n \frac{\sigma_{w,G1}}{\varphi_{G1}}$$

und eingesetzt in Gleichung (3.19)

$$\sigma_{w,G1} = n \frac{\sigma_{w,G1}}{\varphi_{G1}}.$$

Aus dieser Rechnung folgt als Bedingung für das Ende der Gleichmaßdehnung:

$$\varphi_{G1} = n. \quad (3.20)$$

Gleichung (3.20) zeigt, dass ein Zusammenhang zwischen der ertragbaren Dehnung bzw. der maximal möglichen Umformung und der Verfestigung vorhanden ist. Daher neigen Werkstoffe mit einer hohen Streckgrenze, bei denen der Verfestigungsexponent  $n$  geringer als bei niederfesten Werkstoffen ist, dazu, nur geringere plastische Dehnungen zu ertragen. [Tabelle 3.1](#) zeigt für einige Werkstoffe die entsprechenden gemessenen Werkstoffkennwerte.

### 3.3 Plastizitätstheorie

In den vorherigen Abschnitten wurde gezeigt, dass sich ein Werkstoff bei einer wachsenden Belastung zunächst elastisch verformt und dann plötzlich oder allmählich plastisches Verhalten zeigt. Bei der plastischen Verformung steigt aufgrund der schon angesprochenen Verfestigung die Fließspannung an. Alle bisherigen Überlegungen galten jedoch nur für Zugversuche, also einachsige Beanspruchungen. Da diese in realen Bauteilen jedoch nur selten auftreten, müssen auch für mehrachsige Spannungen Gesetzmäßigkeiten für die Fließgrenze<sup>16</sup> sowie das Verformungs- und Verfestigungsverhalten gefunden werden. Dies ist insbesondere für die numerische Berechnung von Bauteilen, beispielsweise mit der Finite-Elemente-Methode [14], wichtig. Dabei wäre es zu aufwändig, für alle möglichen Spannungszustände einzeln Versuche durchzuführen. Daher werden normalerweise Ansätze verwendet, die die Kennwerte aus Zugversuchen (beispielsweise  $R_{p0,2}$ ) auch für mehrachsige Beanspruchungen nutzbar machen.

Alle in diesem Abschnitt vorgestellten Ansätze wurden phänomenologisch entwickelt. Sie basieren auf kontinuumsmechanischen Überlegungen und berücksichtigen somit die der Verformung zugrunde liegenden mikroskopischen Mechanismen in den einzelnen Stoffklassen nicht explizit. Weiterhin wird isotropes Materialverhalten vorausgesetzt, da Materialien, insbesondere Metalle, meist polykristallin vorliegen, so dass die mechanischen Eigenschaften makroskopisch gemittelt nahezu isotrop sind.

Der Übergang von elastischem zu plastischem Verhalten kann für beliebige Spannungszustände mit Hilfe von *Fließbedingungen* bestimmt werden, die in den Abschnitten 3.3.1 bis 3.3.3 eingeführt werden. Anschließend werden *Fließgesetze* besprochen, mit denen bestimmt werden kann, wie sich ein plastifizierter Werkstoff verformt. Wie sich bei der plastischen Verformung die Fließspannung ändert, wird durch die in Abschnitt 3.3.5 besprochenen *Verfestigungsgesetze* beschrieben.

#### 3.3.1 Fließbedingungen

*Fließbedingungen* oder *Fließkriterien* stellen ein mathematisches Instrument dar, um zu entscheiden, ob ein im Material wirkender Spannungszustand zu plastischen Verformungen führt oder nicht. Bei einem polykristallinen metallischen Zugstab, für den isotropes Materialverhalten und einachsige Belastung angenommen werden, tritt näherungsweise bei

$$\sigma = R_p \tag{3.21}$$

plastische Verformung auf.<sup>17</sup> Gleichung (3.21) ist somit die zugehörige Fließbedingung.

Bei mehrachsigen Beanspruchungen ist es nicht mehr so einfach, die Grenze zwischen elastischer und plastischer Verformung anzugeben. Eine Möglichkeit besteht darin,

<sup>16</sup> Bei allgemeinen, nicht einachsigen Spannungszuständen spricht man häufig von der *Fließgrenze*, die die beginnende plastische Deformation kennzeichnet.

<sup>17</sup>  $R_p$  ist dabei die Dehngrenze, wobei nicht spezifiziert ist, welche plastische Dehnung ihr zugrunde liegt. Meist wird  $R_{p0,2}$  verwendet (vgl. Abschnitt 3.2).

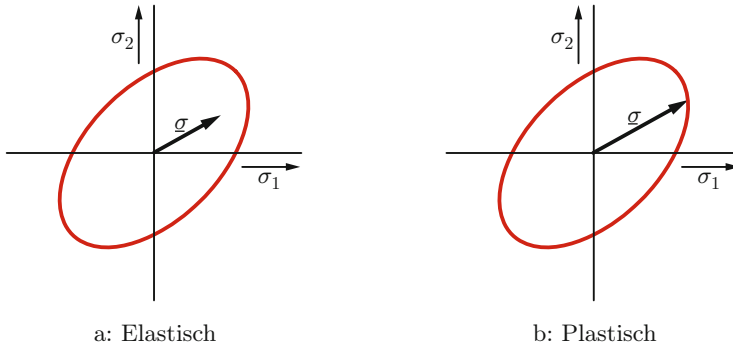


Bild 3.16: Fließfläche für einen ebenen Spannungszustand. Sobald der Spannungszustand die Fließfläche berührt, plastifiziert das Material.

aus den sechs unabhängigen Spannungskomponenten eines Spannungstensors (vgl. Abschnitt 2.5.2) eine skalare Vergleichsspannung  $\sigma_V$  zu berechnen, die mit einer kritischen Spannung  $\sigma_{\text{krit}}$  verglichen wird. Fließen tritt ein, wenn der kritische Wert erreicht wird:

$$\sigma_V(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}) = \sigma_{\text{krit}} \quad (3.22a)$$

oder kurz geschrieben

$$\sigma_V(\sigma_{ij}) = \sigma_{\text{krit}} . \quad (3.22b)$$

Meist werden Fließbedingungen in der Form

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad (3.23)$$

mit  $f(\sigma_{ij}) = \sigma_V(\sigma_{ij}) - \sigma_{\text{krit}}$  angegeben. Für  $f(\sigma_{ij}) < 0$  bleibt das Material elastisch, für  $f(\sigma_{ij}) = 0$  wird es plastisch. Im einachsigen Fall hat Gleichung (3.21) dann folgende Form:

$$f(\sigma) = \sigma - R_p = 0 .$$

In der Praxis sind die meisten Werkstoffe näherungsweise isotrop (vgl. Abschnitt 2.6). Wenn dies der Fall ist, ist es für das Auftreten plastischer Verformung unerheblich, in welche Raumrichtung eine bestimmte Belastung aufgebracht wird. Da die zu einem Spannungszustand  $\underline{\sigma}$  gehörigen Hauptspannungen den Spannungszustand bis auf die Orientierung der Hauptspannungen vollständig beschreiben, kann Gleichung (3.23) auch mit Hilfe der Hauptspannungen geschrieben werden, sofern das betrachtete Material isotrop ist:<sup>18</sup>

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 . \quad (3.24)$$

Die Funktion  $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  lässt sich auch geometrisch deuten, wenn man ein Koordinaten-

<sup>18</sup> Sortierte Hauptspannungen werden mit einem römischen Index bezeichnet, unsortierte mit einem arabischen, vgl. Abschnitt 2.2.1.

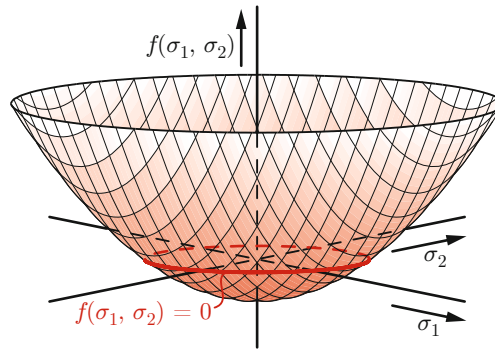


Bild 3.17: Darstellung der Fließflächenfunktion  $f$  für zwei veränderliche Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ . Die Kurve mit  $f(\sigma_1, \sigma_2) = 0$  stellt die Fließfläche für das Material dar und hat hier die Gestalt einer Ellipse. Sie entspricht der später eingeführten von-mises'schen Fließbedingung (vgl. Bild 3.22 a). Für drei Hauptspannungen ist  $f$  eine Hyperfläche im vierdimensionalen Raum, die graphisch nicht darstellbar ist.

system mit den drei Achsen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  aufspannt. Der damit aufgespannte Raum, der nicht dem physikalischen Raum<sup>19</sup> entspricht, wird als *Hauptspannungsraum* bezeichnet. Die Funktion  $f$  gibt für jeden Punkt im Hauptspannungsraum und somit jeden denkbaren Spannungszustand an, ob das Material bei dieser Belastung plastisch fließt oder nicht. Normalerweise ergibt sich für Punkte nah am Ursprung (also kleine Spannungen)  $f < 0$  und somit rein elastisches Verhalten. Für weit entfernte Punkte gilt meistens  $f > 0$ .<sup>20</sup> Die Grenze, bei der  $f = 0$  gilt, spannt im Hauptspannungsraum eine Fläche, die sogenannte *Fließfläche*, auf. Daher wird  $f$  auch als *Fließflächenfunktion* bezeichnet. Innerhalb der Fließfläche reagiert das Material elastisch, beim Erreichen der Fließfläche plastifiziert es.

Auch in der Form  $f(\sigma_{ij})$  lässt sich die Fließflächenfunktion geometrisch deuten. Allerdings ist der betrachtete *Spannungsraum* dann sechsdimensional.  $f(\sigma_{ij}) = 0$  wird eine Hyperfläche.

Reduziert man die Anzahl der veränderlichen Hauptspannungen auf zwei, z. B. im ebenen Spannungszustand, so reduziert sich die Fließfläche auf eine Kurve. Wie im allgemeinen Fall tritt plastische Verformung beim Erreichen der Kurve auf, wie in Bild 3.16 skizziert. Wie sich die Fließfläche aus der Fließflächenfunktion  $f(\sigma_1, \sigma_2)$  ergibt, ist in Bild 3.17 dargestellt.

Es ist nicht möglich, einen Spannungszustand einzustellen, der außerhalb der Fließfläche liegt, so dass nur die Fälle  $f < 0$  und  $f = 0$  auftreten können. Dies lässt sich anhand eines idealplastischen Werkstoffs plausibel machen, der ein Spannungs-Dehnungs-Diagramm entsprechend Bild 3.18 a besitzt. Es ist leicht einzusehen, dass es nicht möglich ist, eine Spannung oberhalb von  $R_p$  aufzubringen. Wie sieht es aber mit einem verfestigenden Werkstoff aus? Dort sind Spannungen oberhalb  $R_p$  möglich (vgl. Bild 3.18 b). Dazu kommt es aber nicht durch eine Belastung außerhalb der Fließfläche. Vielmehr verändert

<sup>19</sup> Als *physikalischer Raum* wird der Raum bezeichnet, der durch das Koordinatensystem aufgespannt wird, in dem sich die Probengeometrie befindet und in dem die Verschiebungen, Kräfte, Spannungen und Dehnungen definiert sind. Im Normalfall spannt also ein  $x_1$ - $x_2$ - $x_3$ -Koordinatensystem den physikalischen Raum auf.

<sup>20</sup> Dass dieser Fall nicht auftreten kann, wird später gezeigt.

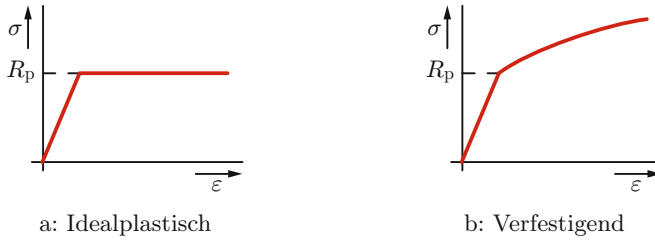


Bild 3.18: Spannungs-Dehnungs-Kurven unterschiedlicher Werkstoffe

sich die Fließfläche während der Belastung so, dass die aufgebrachte Spannung während der plastischen Verformung stets auf der Fließfläche bleibt. Darauf wird in Abschnitt 3.3.5 näher eingegangen.

Die genaue Formulierung der Fließbedingungen hängt im Wesentlichen von der betrachteten Stoffklasse ab. Zunächst werden die beiden am weitesten verbreiteten Fließbedingungen für Metalle vorgestellt. Es folgt eine Betrachtung möglicher Modifikationen für Polymere.

### 3.3.2 Fließbedingungen für Metalle

Die plastische Verformung von Metallen erfolgt innerhalb eines Kornes durch sogenannte Abgleitvorgänge, bei denen Kristallebenen gegeneinander verschoben werden.<sup>21</sup> Das Material wird dabei plastisch gescher. Es sind dabei gleichzeitig mehrere Abgleitungen auf unterschiedlichen Ebenen möglich, so dass insgesamt beliebige plastische Verformungen möglich sind. Entscheidend ist hier die Tatsache, dass die plastische Verformung durch Scherungen stattfindet, die durch Schubspannungen hervorgerufen werden.

Wie in Abschnitt 3.2.2 schon erwähnt, verändert ein Metall sein Volumen bei plastischer Verformung nicht, es ist inkompressibel.<sup>22</sup> Dies ist plausibel, da eine plastische Verformung nur eine Umsortierung der Atome ist, bei der die Atomabstände unverändert bleiben (vgl. Abschnitt 6.2.3).

Versuche haben gezeigt, dass *hydrostatische Spannungen*, bei denen  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  gilt, nicht zu plastischer Verformung führen. Man nimmt daher an, dass nur die Abweichung des Spannungszustands von einem hydrostatischen Spannungszustand entscheidet, ob ein Material fließt. Im Hauptspannungsraum wird die Fließfläche geometrisch als ein Mantel (beispielsweise Zylinder oder Prisma) um die hydrostatische Raumdiagonale  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  interpretiert. Variiert man die Position auf der hydrostatischen Achse (Raumdiagonalen), so ändert die Mantelfläche um diese Achse weder Form noch Größe. Mathematisch wird diese Forderung dadurch umgesetzt, dass der hydrostatische Anteil<sup>23</sup>

$$\sigma_m = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad (3.25)$$

<sup>21</sup> In einigen Punkten wird hier Abschnitt 6.2.4 vorgegriffen. Dieser Abschnitt kann aber auch ohne die dort eingeführten Begriffe verstanden werden.

<sup>22</sup> Die Querkontraktionszahl für den plastischen Anteil der Verformung liegt bei  $\nu^{(p1)} = 0,5$ . Die Querkontraktion des elastischen Anteils der Verformung bleibt hiervon unberührt, denn die gesamte Querkontraktion setzt sich immer aus der elastischen Querkontraktion und der plastischen Querkontraktion zusammen.

<sup>23</sup> Der hydrostatische Spannungsanteil  $\sigma_m$  entspricht dem negativen Druck:  $-p = \sigma_m$ .

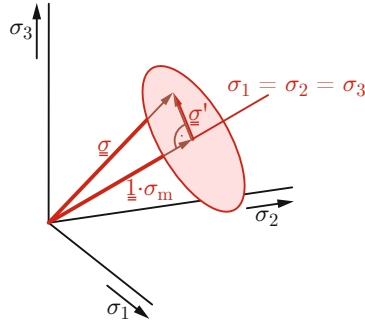


Bild 3.19: Darstellung von Spannungsdeviatoren im Hauptspannungsraum

für die Hauptdiagonalkomponenten von der Spannung abgezogen wird, was auf den sogenannten *Spannungsdeviator*

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} & \sigma'_{32} & \sigma'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix}$$

oder in Indexschreibweise

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_m \quad (3.26)$$

führt.<sup>24</sup> Bild 3.19 zeigt dies exemplarisch. Die Fließbedingung wird nun für den Deviator formuliert.

Für isotrope Materialien darf die Fließfläche nicht von der Raumrichtung der Belastung abhängen. Daher darf die Fließflächenfunktion nur Anteile des Spannungsdeviators enthalten, die sich bei Koordinatentransformationen nicht ändern. Diese Forderung wird durch die Formulierung der Fließbedingung mit Hauptspannungen schon erfüllt, da auch die hydrostatische Spannung  $\sigma_m$  koordinateninvariant ist.

Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten, Fließbedingungen zu formulieren, die die eingeführten Bedingungen erfüllen. Die beiden wichtigsten werden im Weiteren vorgestellt.

### Schubspannungshypothese nach Tresca

Die *Schubspannungshypothese* basiert nicht auf den Überlegungen des vorherigen Abschnitts, erfüllt sie aber. Sie legt fest, dass die höchste im Material vorkommende Schubspannung über den Fließbeginn entscheidet. Die maximal vorkommende Schubspannung lässt sich anhand eines mohrschen Spannungskreises für einen dreiachsigen Spannungszustand graphisch bestimmen, wie in Bild 2.3 auf Seite 36 skizziert. Die größte Hauptspannung wird mit  $\sigma_I$ , die mittlere mit  $\sigma_{II}$ , die kleinste mit  $\sigma_{III}$  bezeichnet. Es ergibt sich eine

<sup>24</sup>  $\delta_{ij}$  ist das *Kronecker-Delta*, für das  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$  gilt.

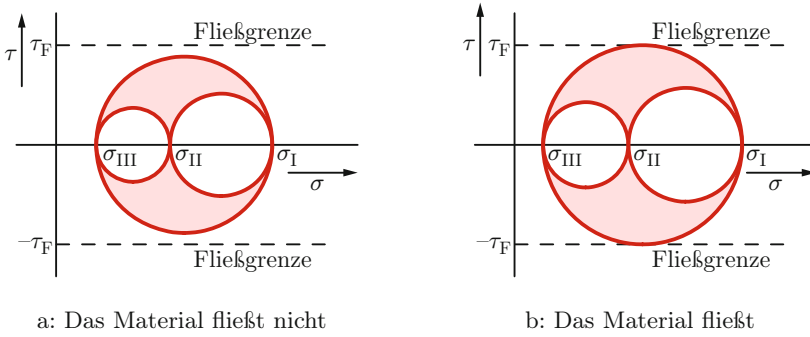


Bild 3.20: Fließgrenze im mohrschen Spannungskreis. Ist die durch  $\sigma_I$  und  $\sigma_{III}$  bestimmte maximale Schubspannung  $\tau_{\max}$  kleiner als die Fließgrenze  $\tau_F$ , so tritt kein Fließen auf (a). Erreicht  $\tau_{\max}$  die Fließgrenze, so wird das Material plastisch (b).

maximale Schubspannung von

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}.$$

Die Größe der mittleren Hauptspannung  $\sigma_{II}$  wird nicht berücksichtigt.

Erreicht  $\tau_{\max}$  einen kritischen Wert  $\tau_F$ , so beginnt das Material zu fließen. Die Fließbedingung lautet somit

$$\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} - \tau_F = 0. \quad (3.27)$$

Der Wert von  $\tau_F$  lässt sich beispielsweise aus einem Zugversuch bestimmen, bei dem  $\sigma_I = R_p$  und  $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$  gilt. Es ergibt sich

$$\tau_F = \frac{R_p}{2}.$$

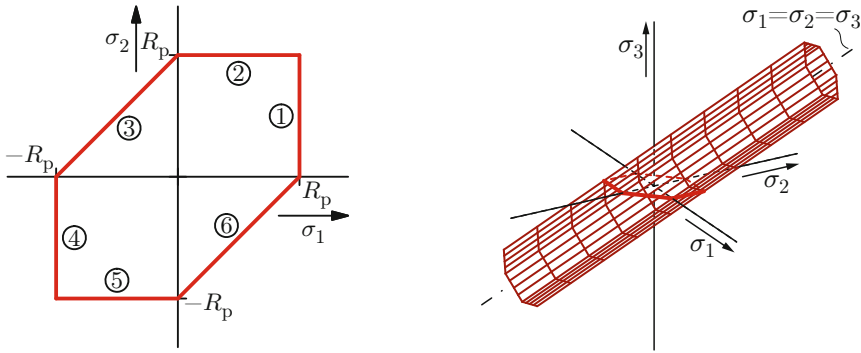
Gleichung (3.27) lässt sich also auch in der Form

$$\sigma_I - \sigma_{III} = R_p \quad (3.28)$$

schreiben. Der Term  $\sigma_I - \sigma_{III}$  bildet die *Vergleichsspannung*  $\sigma_{V,SH}$ , wobei der Index SH für »Schubspannungshypothese« steht. Die Fließgrenze kann auch in den mohrschen Spannungskreis eingezeichnet werden, wie Bild 3.20 zeigt. Sobald der Kreis die Grenze berührt, fließt das Material.

Stellt man, wie am Anfang des Abschnitts 3.3.1 erläutert, die Fließbedingung im Hauptspannungsraum dar, und beschränkt man sich zunächst auf den ebenen Spannungszustand mit  $\sigma_3 = 0$ , so ergibt sich der im Bild 3.21 a skizzierte Fließflächenverlauf. Die römisch indizierten Hauptspannungen sind hier wiederum der Größe nach sortiert ( $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$ ), die arabisch indizierten sind unsortiert. Es ergeben sich entlang der Fließfläche sechs unterschiedliche Abschnitte:

Im Abschnitt ① sind  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  positiv, und es gilt:  $\sigma_I = \sigma_1$ ,  $\sigma_{II} = \sigma_2$  und  $\sigma_{III} = 0$ . Die Fließbedingung  $R_p = \sigma_I - \sigma_{III}$  führt auf  $\sigma_1 = R_p$ . Im Bereich ② ergibt sich  $\sigma_I = \sigma_2$ ,



a: Fließfläche für  $\sigma_3 = 0$ . Die einzelnen Bereiche sind im Text erläutert.

b: Fließfläche für beliebige Spannungszustände im Hauptspannungsraum

Bild 3.21: Fließfläche für die Fließbedingung nach Tresca

$\sigma_{II} = \sigma_I$  und  $\sigma_{III} = 0$  und somit  $\sigma_2 = R_p$ . Im Bereich ③ sind  $\sigma_2 > 0$  und  $\sigma_1 < 0$ . Daher ergibt sich  $\sigma_I = \sigma_2$ ,  $\sigma_{II} = 0$  und  $\sigma_{III} = \sigma_1$ . Die Fließbedingung führt auf  $R_p = \sigma_2 - \sigma_1$  bzw. auf die Geradengleichung  $\sigma_2 = \sigma_1 + R_p$ . Ähnlich lassen sich die Bereiche ④, ⑤ und ⑥ beschreiben.

Betrachtet man einen allgemeinen, dreiachsigen Spannungszustand, so ergibt sich eine sechseckige Röhre, deren Mittelachse der Raumdiagonalen  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  entspricht. Die zugehörige Fließfläche ist in Bild 3.21 b skizziert.

Da die Fließbedingung nach Tresca sehr einfach im mohrschen Spannungskreis dargestellt werden kann, wird sie häufig für anschauliche Erklärungen verwendet. Ihre Anwendung bei der Berechnung von plastischen Deformationen, beispielsweise in der Finite-Elemente-Methode, ist jedoch problematisch, weil die Fließfläche an den Ecken nicht stetig differenzierbar ist (siehe Anmerkung auf Seite 97).

### Gestaltänderungsenergiehypothese nach von Mises

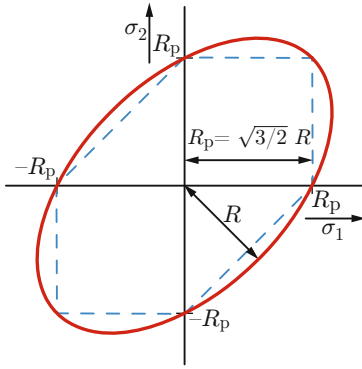
Die *Fließbedingung nach von Mises* oder auch *Gestaltänderungsenergiehypothese*<sup>25</sup> stellt im Hauptspannungsraum einen Zylinder um die hydrostatische Achse  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  mit dem Radius

$$R = \sqrt{2} k_F$$

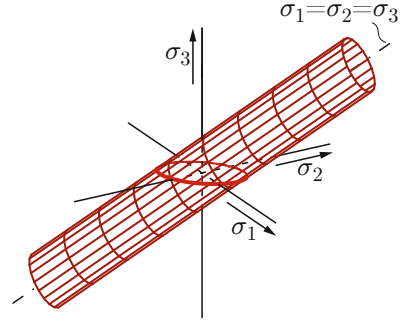
dar (vgl. Bild 3.22 b).  $k_F$  ist dabei die Fließgrenze für die folgende Fließbedingung, die in Hauptachsenform

$$\sqrt{\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} = k_F \quad (3.29)$$

<sup>25</sup> Der Name folgt aus einer der Annahmen bei der Herleitung dieser Fließbedingung, wonach die sogenannte *Gestaltänderungsenergie* (die plastisch dissipierte Energie) bei der plastischen Verformung maximal werden soll. Dies geschieht dadurch, dass sich bei einer vorgegebenen Dehngeschwindigkeit die Spannung so einstellt, dass unter Erfüllung der Fließbedingung die Gestaltänderungsenergie maximal wird. Darauf wird in Abschnitt 3.3.4 noch einmal eingegangen.



a: Fließfläche für  $\sigma_3 = 0$ . Die Fließbedingung nach Tresca ist zum Vergleich blau gestrichelt eingezeichnet.



b: Fließfläche für beliebige Spannungszustände im Hauptspannungsraum

Bild 3.22: Fließfläche für die von-misesche Fließbedingung

lautet.<sup>26</sup> Arbeitet man nicht im Hauptachsensystem, so müssen auch die Schubspannungskomponenten berücksichtigt werden. Dann lautet die von-misesche Fließbedingung

$$\sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2]} + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{12}^2 = k_F. \quad (3.30)$$

Außer den Hauptspannungen hat ein Spannungstensor auch einen anderen Satz aus invarianten Größen, die als die drei *Grundinvarianten*  $J_1$ ,  $J_2$  und  $J_3$  bezeichnet werden (vgl. Anhang 14.7). Sie sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_{ii}, \\ J_2 &= \frac{\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}}{2}, \\ J_3 &= \det(\sigma_{ij}). \end{aligned}$$

Nach Gleichung (3.25) entspricht der hydrostatische Anteil  $\sigma_m = J_1/3$ . Daraus folgt die bereits verwendete Koordinateninvarianz der hydrostatischen Spannung  $\sigma_m$ .

Die von-misesche Fließbedingung wird mit den Grundinvarianten für den Spannungstensor  $J'_1$ ,  $J'_2$  und  $J'_3$  formuliert. Mit Gleichung (3.26) folgt

$$\begin{aligned} J'_1 &= 0, \\ J'_2 &= -\frac{1}{2}(\sigma'_{ij}\sigma'_{ji}) \\ &= -\frac{1}{6}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2] - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{12}^2, \\ J'_3 &= \det(\sigma'_{ij}). \end{aligned} \quad (3.31)$$

<sup>26</sup> In den Gleichungen (3.29) und (3.30) werden die Komponenten des Spannungstensors statt denen des Deviators verwendet, da für die Hauptdiagonalelemente nur Differenzen vorkommen und  $\sigma'_{ii} - \sigma'_{jj} = (\sigma_{ii} - \sigma_m) - (\sigma_{jj} - \sigma_m) = \sigma_{ii} - \sigma_{jj}$  gilt.

Formuliert man die Fließfläche nur abhängig von ihnen, so ergibt sich  $f(J'_2, J'_3) = 0$ .

Die von-misesche Fließbedingung, Gleichung (3.29), ergibt sich, wenn man postuliert, dass die Fließbedingung nur von der zweiten Invarianten  $J'_2$  nach Gleichung (3.31) abhängt:

$$f(J'_2) = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ji} - k_F^2 = 0. \quad (3.32)$$

$J'_2$  ist dabei ein Maß für den Abstand von der hydrostatischen Achse im Hauptspannungsraum.

Wendet man Gleichung (3.29) auf einen einachsigen Zugversuch an, so ergibt sich analog zur Herleitung von Gleichung (3.28)

$$k_F = \frac{R_p}{\sqrt{3}}.$$

Damit lässt sich die von-misesche Fließbedingung auf

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} = R_p \quad (3.33)$$

beziehungsweise

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2]} + 3(\sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{12}^2) = R_p \quad (3.34)$$

umschreiben. Die Wurzelterme der Gleichungen (3.33) und (3.34) werden als *Vergleichsspannung*  $\sigma_{V,GEH}$  für die Gestaltänderungsenergiehypothese oder als *von-Mises-Spannung* bezeichnet. Bild 3.22 a zeigt die von-misesche Fließbedingung für einen ebenen Spannungszustand im Vergleich mit der trescaschen Fließbedingung, sofern beide im Zugversuch bestimmt wurden. Der Unterschied zwischen beiden beträgt maximal 15,5 %.

Es ist auch möglich, die beiden Fließbedingungen so zu normieren, dass sie für einen Scherversuch, bei dem  $\sigma_2 = -\sigma_1$  gilt, übereinstimmen. Dann ist die von-Mises-Ellipse vollständig innerhalb des trescaschen Fließkriteriums und berührt dieses an den sechs linearen Bereichen.

Es ist nicht möglich, die beiden vorgestellten Fließbedingungen theoretisch zu beweisen. Das ist offensichtlich, da sie nur kontinuumsmechanische Näherungen an die nicht kontinuierliche Wirklichkeit darstellen. Versuche zeigen jedoch, dass beide – insbesondere die von-misesche Fließbedingung – das reale Werkstoffverhalten gut beschreiben.

### 3.3.3 Fließbedingungen für Polymere

Im Gegensatz zu den Metallen findet man bei Polymeren eine unterschiedliche Zug- und Druckdehngrenze. Häufig liegt die Dehngrenze im einachsigen Druckversuch um 20 % bis 30 % über derjenigen im Zugversuch (siehe dazu Abschnitt 8.4). Um die von-misesche Fließbedingung dennoch einsetzen zu können, werden ihr Terme angefügt, die von der hydrostatischen Spannung abhängen, so dass sich eine *modifizierte Gestaltänderungsenergiehypothese* ergibt. Zwei mögliche Ansätze werden hier vorgestellt.

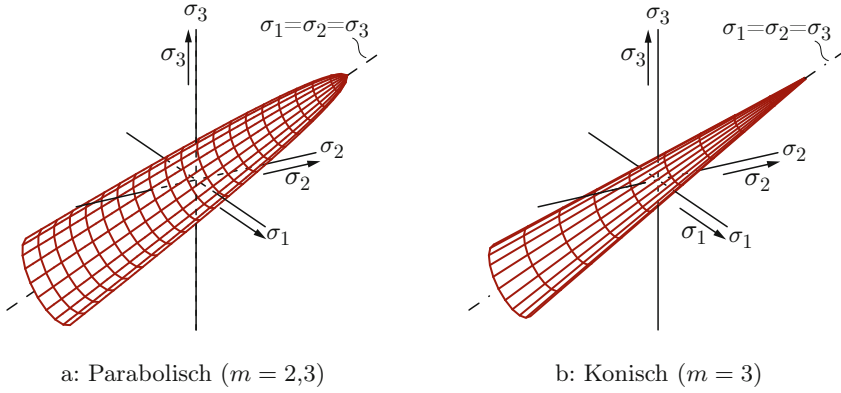


Bild 3.23: Modifizierte Fließkriterien für Polymere

Bei der *parabolischen Fließbedingung* wird die Fließfläche als Paraboloid um die hydrostatische Achse gelegt (Bild 3.23 a). Ihr Radius besitzt folgende Abhängigkeit von der hydrostatischen Spannung  $\sigma_m$ :

$$R(\sigma_m) = \sqrt{\frac{2m}{3} R_p^2 - 2(m-1)\sigma_m R_p}, \quad (3.35)$$

wobei  $m$  ein Maß für den Unterschied des Materialverhaltens im Zug- und im Druckbereich darstellt:

$$m = \frac{\sigma_d}{R_p} \quad (3.36)$$

mit den Dehngrenzen im einachsigen Druck- bzw. Zugversuch  $\sigma_d$  und  $R_p$ . Ergibt sich in dieser Formel ein negativer Ausdruck unter der Wurzel, so ist der Radius gleich Null zu setzen; das Material fließt also plastisch.

Setzt man den mittelspannungsabhängigen Radius der Fließfläche,  $R(\sigma_m)$ , in Gleichung (3.29) ein, so erhält man für ein Hauptachsensystem die *parabolisch modifizierte Gestaltänderungsenergiehypothese* [47]

$$\begin{aligned} \sigma_{V,pGEH} = & \frac{m-1}{2m} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ & + \sqrt{\left[ \frac{m-1}{2m} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right]^2 + \frac{1}{2m} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Dabei wird als Fließkriterium  $\sigma_{V,pGEH} = R_p$  sowohl für Zug- als auch für Druckbelastungen verwendet.<sup>27</sup>

<sup>27</sup> Setzt man beispielsweise für einen reinen Druckversuch  $\sigma_1 = -\sigma_d$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  und die Definition von  $m$  ein, so ergibt sich nach einiger Rechnung  $\sigma_{V,pGEH} = R_p$ . Bei der Rechnung ist zu beachten, dass der Wurzelausdruck in Gleichung (3.37) immer positiv ist. Für  $\sigma < 0$  gilt somit  $\sqrt{\sigma^2} = |\sigma| = -\sigma$ .

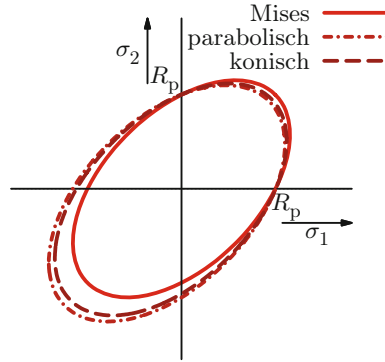


Bild 3.24: Gestaltänderungsenergiehypthesen für Polymere im ebenen Spannungszustand. Die Kurven sind für gleiche  $R_p$  angegeben.

Ein anderer Ansatz besteht darin, einen Kegel als Fließfläche zu verwenden (siehe Bild 3.23 b). Für den Radius der *konischen Fließbedingung* gilt

$$R(\sigma_m) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{m+1} [2mR_p - 3(m-1)\sigma_m] . \quad (3.38)$$

Für die *konisch modifizierte Gestaltänderungsenergiehypothese* in Hauptachsenform gilt somit

$$\sigma_{V,kGEH} = \frac{1}{2m} \left[ (m-1)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + (m+1) \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} \right] \quad (3.39)$$

mit  $m$  aus Gleichung (3.36) und der Fließbedingung  $\sigma_{V,kGEH} = R_p$  (nach [47]). Auch hier gilt, dass ein negativer Ausdruck unter der Wurzel bedeutet, dass der Radius gleich Null ist und das Material plastisch fließt.

In Bild 3.24 werden für den ebenen Spannungszustand die Verläufe der verschiedenen Fließkriterien verglichen. Es ist zu erkennen, dass die modifizierten Fließbedingungen für  $m > 1$  eine größere Druck- als Zugfestigkeit widerspiegeln.

### 3.3.4 Fließgesetze

Wie in den vorangegangenen Abschnitten beschrieben, kann mit Hilfe der *Fließbedingungen* bestimmt werden, bei welcher Belastung ein Werkstoff plastisches Verhalten zeigt. Darüber, auf welche Weise die plastische Verformung stattfindet, geben sie keine Auskunft. Das plastische Verhalten selbst wird durch *Fließgesetze* oder *-regeln* beschrieben. An dieser Stelle wird nur kurz auf sie eingegangen. Für ein weitergehendes Studium seien kontinuumsmechanische Werke wie zum Beispiel *Becker/Bürger* [17], *Hill* [67], *Kaliszky* [82] oder *Reckling* [126] empfohlen.

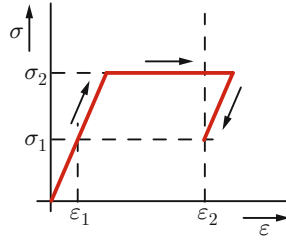


Bild 3.25: Veranschaulichung der Tatsache, dass im plastischen Bereich kein eindeutiger Zusammenhang zwischen Dehnungen und Spannungen besteht, am Beispiel eines idealplastischen Werkstoffs. Bei der gleichen Last  $\sigma_1$  treten nach unterschiedlichen Belastungsgeschichten verschiedene Dehnungen auf ( $\varepsilon_1$  bzw.  $\varepsilon_2$ ). Ebenso kann je nach Belastungsgeschichte für die gleiche Dehnung  $\varepsilon_2$  die Spannung unterschiedlich sein ( $\sigma_1$  bzw.  $\sigma_2$ ).

Sobald plastische Verformungen eingetreten sind, herrscht kein eindeutiger Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen mehr. Beispielsweise führt ein Zugversuch, bei dem man über die Dehngrenze hinaus belastet und wieder entlastet, zu zwei möglichen Dehnungen für jede betrachtete Spannung (Bild 3.25). Die vorhandene Dehnung (z. B.  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  für  $\sigma_1$  in Bild 3.25) hängt davon ab, ob vor dem Erreichen der Spannung  $\sigma$  schon eine Belastung über diese Spannung hinaus stattgefunden hat. Ebenso können zwei unterschiedliche Spannungen (im Bild  $\sigma_1$  oder  $\sigma_2$ ) zu der gleichen Dehnung (im Bild  $\varepsilon_2$ ) führen. Es kann demnach keine eindeutige Funktion zwischen der Spannung und der Dehnung aufgestellt werden. Der aktuelle Zustand hängt bei plastischen Verformungen von der Verformungsgeschichte ab.

Wohl aber kann die notwendige Spannung  $\underline{\underline{\sigma}}$  angegeben werden, um ein *plastisches Dehnungsinkrement*  $d\underline{\underline{\varepsilon}}^{(pl)}$  aufzubringen,<sup>28</sup> da dabei die Fließbedingung erfüllt werden muss. Diese Formulierung der Form

$$d\underline{\underline{\varepsilon}}^{(pl)} = d\underline{\underline{\varepsilon}}^{(pl)}(\underline{\underline{\sigma}})$$

wird als *inkrementelle Formulierung* bezeichnet. Häufig werden die differentiellen Änderungen durch die inkrementelle Zeit  $dt$  geteilt, in der sie eingebracht werden. Dadurch ergibt sich eine *Ratenformulierung* der Form

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{(pl)} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{(pl)}(\underline{\underline{\sigma}})$$

mit der *plastischen Formänderungsgeschwindigkeit*  $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{(pl)}$ .<sup>29</sup> Es hat sich bewährt, (plasti-

<sup>28</sup> Hier wird auch für plastische Verformungen  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  statt eines Maßes für große Deformationen, z. B.  $\underline{\underline{G}}$ , verwendet. Der Grund dafür ist, dass die verwendeten Dehnungsinkremente  $d\underline{\underline{\varepsilon}}$  immer klein sind, so dass in der inkrementellen Darstellung kein Fehler gemacht wird, solange  $d\underline{\underline{\varepsilon}}$  stets für den aktuellen Zustand berechnet wird. Beim Berechnen der Gesamtdeformation aus diesen Inkrementen muss hingegen wieder ein Dehnungsmaß für große Deformationen wie  $\underline{\underline{G}}$  verwendet werden. Dabei ist es erforderlich, den Anteil der Starrkörperrotation korrekt zu berücksichtigen, was nicht unproblematisch ist [69, 73].

<sup>29</sup> Dadurch wird in die Gleichung keine Abhängigkeit der Werkstoffeigenschaften von der Verformungsrate eingebracht.

sche) Dehnungsinkremente vorzugeben und die dazu notwendigen Spannungen zu berechnen, da dadurch gewährleistet ist, dass die Rechnungen stabil verlaufen und eindeutige Ergebnisse erzielen. Beispielsweise kann bei einem idealplastischen Werkstoff (vgl. Bild 3.25) die Spannung eindeutig dem Dehnungsinkrement zugeordnet werden, was andersherum nicht der Fall ist. Die Vorgabe einer Dehnung bei Ermittlung der dazu notwendigen Spannung aus Stabilitätsgründen wurde auch schon bei Zugversuchen (Abschnitt 3.2) vorgestellt.

Ein gängiges Fließgesetz in Ratenformulierung lautet

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(pl)} = \dot{\lambda} \sigma'_{ij}. \quad (3.40)$$

Der Proportionalitätsfaktor  $\dot{\lambda}$  stellt sich bei vorgegebener plastischer Formänderungsgeschwindigkeit  $\dot{\epsilon}_{ij}^{(pl)}$  stets so ein, dass der Spannungsdeviator  $\sigma'_{ij}$  im Falle plastischer Verformung die Fließfläche nicht verlässt.

Um Gleichung (3.40) herzuleiten, betrachtet man die bei plastischer Verformung in Wärme umgesetzte Leistung  $\dot{w}^{(pl)}$ , also die auf die Zeit bezogene *plastische Energiedissipation*. Diese ist gegeben durch  $\dot{w}^{(pl)} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{(pl)}$  und muss, wenn das System bei der plastischen Verformung Energie dissipiert, größer als Null sein, eine Forderung, die als *druckersches Postulat* bezeichnet wird. Gleichung (3.40) lässt sich herleiten, wenn man fordert, dass die plastische Energiedissipation für gegebenes  $\dot{\epsilon}_{ij}^{(pl)}$  maximal wird [107]:

$$\dot{w}^{(pl)} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{(pl)} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{(pl)} = \max.$$

Für diese Forderung existiert keine strenge theoretische Begründung, wohl aber gibt es thermodynamische Argumente und eine Bestätigung durch Experimente.

Berücksichtigt man die Volumenkonstanz der plastischen Deformation, folgt daraus

$$\dot{w}^{(pl)} = \sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{(pl)} = \underline{\underline{\sigma'}} \cdot \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{(pl)} = \max. \quad (3.41)$$

Betrachtet man nun eine beliebige Fließfläche  $f(\sigma_{ij}) = 0$  und gibt eine plastische Formänderungsgeschwindigkeit (in voigtscher Schreibweise)  $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{(pl)}$  vor, so ist Gleichung (3.41) dann erfüllt, wenn die Projektion von  $\underline{\underline{\sigma'}}$  auf  $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{(pl)}$  maximal wird. Dies ist in Bild 3.26 skizziert. Um bei vorgegebenem  $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{(pl)}$  eine maximale Formänderungsleistung zu erreichen, muss eine äußere Spannung mit Spannungsdeviator  $\underline{\underline{\sigma'_2}}$  angelegt werden. Beispielsweise führt  $\underline{\underline{\sigma'_1}}$  zu einer geringeren Leistung nach Gleichung (3.41). Wenn die Fließfläche stetig differenzierbar ist, ist die Position, an der die Leistung maximal wird, dadurch gekennzeichnet, dass der Gradient der Fließflächenfunktion  $\text{grad } f = \partial f / \partial \sigma'_{ij}$ , der senkrecht auf der Fließfläche steht, parallel zu  $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{(pl)}$  ist. Es folgt das Fließgesetz

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(pl)} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}}. \quad (3.42)$$

Dabei ist  $\dot{\lambda}$  ein Proportionalitätsfaktor.

Außerdem muss, wie bereits erwähnt, der Zusammenhang zwischen Spannungen und plastischen Formänderungsgeschwindigkeiten eindeutig sein. Daraus folgt die Bedingung, dass die Fließfläche *strenge konvex*<sup>30</sup> und stetig differenzierbar sein muss, um ein Fließgesetz formulieren zu können. Da die trescasche Fließfläche nicht stetig differenzierbar ist (an den

<sup>30</sup> Eine (einfach) konvexe Fläche darf ebene Bereiche enthalten, in denen der Normalenvektor konstant ist. Wenn keine ebenen Bereiche vorhanden sind und die Fläche überall (und ohne Wendestellen) gekrümmt ist, ist sie *strenge konvex*.

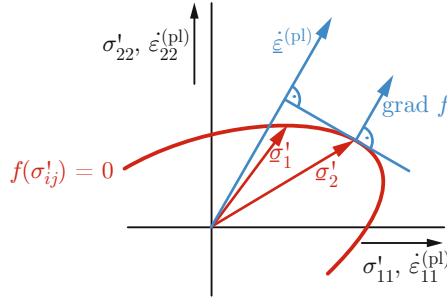


Bild 3.26: Veranschaulichung der Forderung, dass die plastische Formänderungsleistung maximal werden muss. Bei einer vorgegebenen plastischen Formänderungsgeschwindigkeit  $\dot{\underline{\epsilon}}^{(pl)}$  ist die plastische Formänderungsleistung  $\dot{w}^{(pl)} = \underline{\underline{\sigma}}' \cdot \dot{\underline{\epsilon}}^{(pl)}$  dann maximal, wenn die Projektion von  $\underline{\sigma}'$  auf  $\dot{\underline{\epsilon}}^{(pl)}$  maximal ist. Dies ist bei  $\underline{\sigma}'_2$  der Fall. Beispielsweise ergäbe  $\underline{\sigma}'_1$  ein kleineres  $\dot{w}^{(pl)}$ . Für die Spannung mit der maximalen plastischen Leistung  $\underline{\sigma}'_2$  ist der Gradient der Fließflächenfunktion  $\text{grad } f$ , der senkrecht auf der Fließfläche steht, parallel zur plastischen Dehnrate  $\dot{\underline{\epsilon}}^{(pl)}$ .

Kanten der Fließfläche ist keine eindeutige Normale definiert) und an den Flächen für ein  $\dot{\epsilon}_{ij}^{(pl)}$  unterschiedliche Spannungszustände Gleichung (3.42) erfüllen, ist es nicht möglich, mit der Fließbedingung von Tresca ein Fließgesetz zu entwickeln.

Für die von-misesche Fließflächenfunktion gilt Gleichung (3.32),

$$f(\sigma'_{kl}) = \frac{1}{2} \sigma'_{kl} \sigma'_{lk} - k_F^2$$

und somit

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \sigma'_{kl}}{\partial \sigma'_{ij}} \sigma'_{lk} + \sigma'_{kl} \frac{\partial \sigma'_{lk}}{\partial \sigma'_{ij}} \right).$$

Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\frac{\partial \sigma'_{kl}}{\partial \sigma'_{ij}} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = i, l = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \delta_{ki} \delta_{lj}.$$

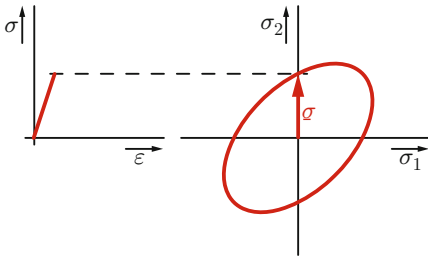
Damit vereinfacht sich obige Gleichung zu

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{1}{2} (\sigma'_{ji} + \sigma'_{ij}) = \sigma'_{ij}.$$

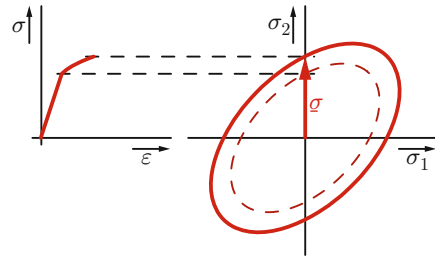
Setzt man dies in Gleichung (3.42) ein, so folgt für die von-misesche Fließbedingung das Fließgesetz (3.40).

Die Konsistenz dieser Gleichung kann anhand der Forderung, dass plastische Verformungen volumenkonstant sind, überprüft werden. Dies ist einfach. Da  $\dot{\lambda}$  ein Skalar ist und die Spur des Spannungsdeviators  $\sigma'_{ii}$  verschwindet, gilt auch  $\text{tr } \dot{\underline{\epsilon}} = \dot{\epsilon}_{ii} = 0$ . Die zeitliche Volumenänderung ist somit null.

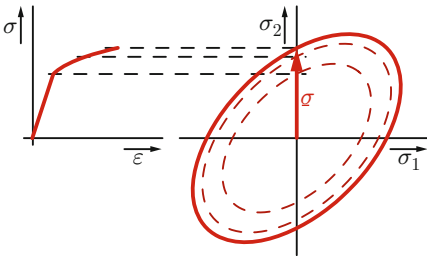
Fließgesetze stellen wie gesagt ein Instrument dar, um aus einer vorgegebenen Formänderungsgeschwindigkeit die dazu notwendige Spannung zu bestimmen. Aus ihnen lässt



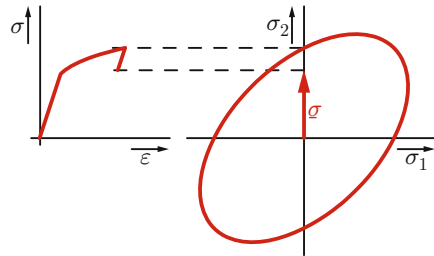
a: Übergang vom elastischen in plastisches Verhalten



b: Plastisches Verhalten, die Fließfläche wächst mit.



c: Plastisches Verhalten, die Fließfläche wächst weiter mit.



d: Bei Entlastung sofort wieder elastisches Verhalten, die Fließfläche bleibt unverändert.

Bild 3.27: Veranschaulichung der Verfestigung anhand einer Spannungs-Dehnungs-Kurve. Angenommen wurde die sogenannte isotrope Verfestigung, die im Text erläutert wird.

sich jedoch *nicht* bestimmen, wie sich die Fließfläche durch Verfestigung verändert (vgl. Abschnitt 3.3.1). Dies ist Aufgabe der Verfestigungsgesetze, die im folgenden Abschnitt erläutert werden.

### 3.3.5 Verfestigungsgesetze

Sieht man sich die Spannungs-Dehnungs-Kurve eines Zugversuchs an, so erkennt man, dass die Spannung nach dem Fließbeginn (Erreichen von  $R_p$ ) sehr wohl scheinbar über die durch die Fließfläche festgelegte Fließgrenze hinaus ansteigt, was aber in Abschnitt 3.3.1 ausgeschlossen wurde. Das ist damit zu erklären, dass sich die Fließfläche während der plastischen Verformung verändert.

Dass die Spannung die Fließfläche nicht überschreiten kann und dass diese stattdessen mitwächst, ist auch deshalb plausibel, da der Werkstoff bei einer Entlastung nach einer plastischen Verformung sofort wieder elastisch wird. Der Spannungszustand muss sich also wieder innerhalb der Fließfläche befinden. Diese Tatsache wird in [Bild 3.27](#) verdeutlicht. Bis zum Erreichen der Fließgrenze bleibt die Fließfläche konstant ([Bild 3.27 a](#)). Bei der dann aufgebrachten plastischen Verformung mit der damit verbundenen Verfestigung wächst die Fließfläche entsprechend der momentanen Fließspannung mit ([Bilder 3.27 b](#) und [3.27 c](#)). Wird anschließend entlastet, verhält sich der Werkstoff sofort wieder elastisch,

so dass die Steigung der Spannungs-Dehnungs-Kurve dem Elastizitätsmodul entspricht. Die Fließfläche bleibt dann unverändert (Bild 3.27 d).

Die Fließfläche kann sowohl Form, Größe als auch Position im Spannungsraum verändern. Mathematisch wird diese Tatsache dadurch berücksichtigt, dass die Fließbedingung (3.23) zusätzliche Terme erhält, die die Veränderung der Fließfläche beschreiben (die veränderliche Fließflächenfunktion wird mit  $g$  bezeichnet) [126]:

$$g(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{(pl)}, k_l) = 0. \quad (3.43)$$

Dabei sind  $\varepsilon_{ij}^{(pl)}$  die aktuelle plastische Verformung und  $k_l$  ein Satz an *Verfestigungsparametern*, die von der Verformungsgeschichte, aber beispielsweise auch von der Dehngeschwindigkeit und der Temperatur abhängen können. Wie bei der ursprünglichen Fließflächenfunktion ist der Werkstoff innerhalb der durch  $g$  beschriebenen Fläche, also für  $g < 0$ , elastisch.

Um die Verfestigung zu berücksichtigen, muss ein einfaches Maß gefunden werden, das die Verformungsgeschichte des Materials beschreibt. Dieses Maß muss bei plastischer Verformung stets zunehmen, unabhängig von der Verformungsrichtung, da im Allgemeinen jede plastische Verformung zu einer Verfestigung führt. Ein solches Maß ist die sogenannte *plastische Vergleichsdehnung*  $\varepsilon_V^{(pl)}$ . Um sie zu berechnen, definiert man zunächst die *plastischen Vergleichsdehnraten*  $\dot{\varepsilon}_V^{(pl)}$  analog zur Fließbedingung nach von Mises:<sup>31</sup>

$$\dot{\varepsilon}_V^{(pl)} = \sqrt{\frac{2}{9} \left[ (\dot{\varepsilon}_1^{(pl)} - \dot{\varepsilon}_2^{(pl)})^2 + (\dot{\varepsilon}_1^{(pl)} - \dot{\varepsilon}_3^{(pl)})^2 + (\dot{\varepsilon}_2^{(pl)} - \dot{\varepsilon}_3^{(pl)})^2 \right]} \quad (3.44)$$

Da die so definierte plastische Vergleichsdehnraten für beliebige plastische Dehngeschwindigkeiten positiv ist, berücksichtigt die plastische Vergleichsdehnung jede plastische Verformung unabhängig von der Verformungsrichtung positiv.

Die plastische Vergleichsdehnung  $\varepsilon_V^{(pl)}$  ergibt sich aus der plastischen Vergleichsdehnraten  $\dot{\varepsilon}_V^{(pl)}$  durch Integration:

$$\varepsilon_V^{(pl)} = \int \dot{\varepsilon}_V^{(pl)} dt. \quad (3.45)$$

Im Fall einer einachsigen monotonen Verformung ist  $\varepsilon_V^{(pl)} = \varepsilon^{(pl)}$ .

Die Verfestigungsparameter  $k_l$  in Gleichung (3.43) hängen dann von der plastischen Vergleichsdehnung ab:

$$g(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{(pl)} = 0, k_l(\varepsilon_V^{(pl)})) = f(\sigma_{ij}).$$

Im Folgenden werden der Fall, dass keine Verfestigung eintritt, sowie die beiden Extremfälle des Verfestigungsverhaltens, *isotrope Verfestigung* und *kinematische Verfestigung*, näher betrachtet. Die meisten Materialien verfestigen mit isotropen und kinematischen Anteilen.

<sup>31</sup> Eine Definition entsprechend der von-miseschen Fließbedingung erscheint sinnvoll, da auch bei den plastischen Dehnungen die Spur verschwindet:  $\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}^{(pl)} = 0$ .

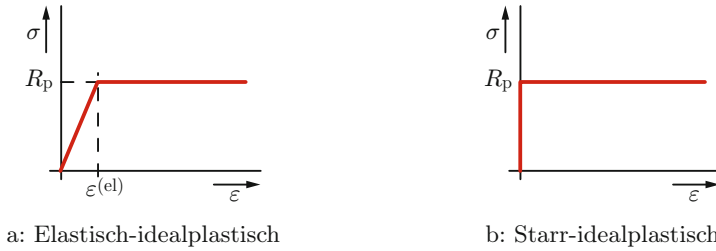


Bild 3.28: Spannungs-Dehnungs-Kurven idealplastischer Werkstoffe

### Keine Verfestigung

Ein *idealplastischer* Werkstoff verfestigt bei plastischer Verformung nicht, so dass die Fließfläche, Gleichung (3.23), konstant bleibt. Daraus folgt, dass die Fließbedingung unverändert bleibt:

$$g(\sigma_{ij}) = f(\sigma_{ij}) = 0. \quad (3.46)$$

Ein entsprechendes Spannungs-Dehnungs-Diagramm ist in Bild 3.28 a dargestellt.

In der Realität gibt es keinen idealplastischen Werkstoff. Bei einem Zugversuch würde bei einem solchen sofort nach Eintreten der plastischen Verformung eine Einschnürung auftreten, da die Stabilitätsbedingung nach Abschnitt 3.2.3 sofort verletzt würde (für einen idealplastischen Werkstoff gilt  $\sigma = R_p \varphi^0$  und somit  $\varphi_{G1} = 0$ ). Dennoch sind idealplastische Werkstoffmodelle gerade in der Umformtechnik sehr verbreitet, da sie einfach sind und häufig analytische Lösungen mit Hilfe der sogenannten *Gleitlinientheorie* [67] erlauben. Wird angenommen, dass der Werkstoff sich elastisch verformen kann, so wird er als *elastisch-idealplastisch* bezeichnet (Bild 3.28 a). Da bei großen plastischen Deformationen der elastische Anteil klein ist, wird dieser häufig ignoriert und der Werkstoff *starr-idealplastisch* angenommen (Bild 3.28 b).

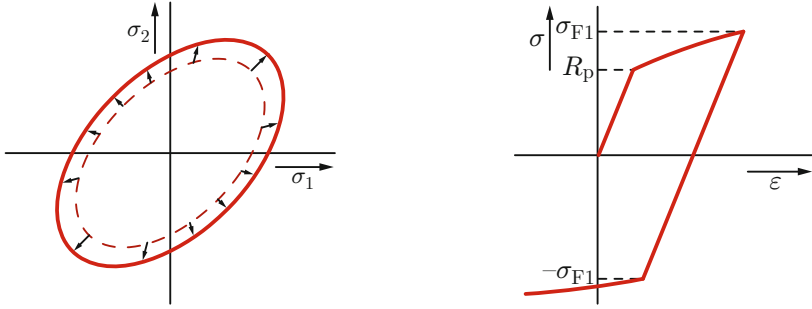
### Isotrope Verfestigung

Bei der *isotropen Verfestigung* wächst die Fließfläche symmetrisch um den Ursprung, wie in Bild 3.29 a skizziert. Mathematisch fällt in Gleichung (3.43) somit der Anteil  $\varepsilon_{ij}^{(pl)}$  weg, so dass

$$g(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, k_l(\varepsilon_V^{(pl)})) = 0 \quad (3.47)$$

folgt. Für ein Material, dessen Fließbeginn durch die von-misesche Fließbedingung beschrieben wird, ergibt sich mit der veränderlichen Fließspannung  $\sigma_F(\varepsilon_V^{(pl)})$  die Fließbedingung mit Verfestigung

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} = \sigma_F(\varepsilon_V^{(pl)}) \quad (3.48)$$



a: Entwicklung der Fließfläche bei isotroper Verfestigung

b: Spannungs-Dehnungs-Diagramm mit Lastumkehr für einen isotrop verfestigenden Werkstoff

Bild 3.29: Isotrope Verfestigung

mit der Anfangsbedingung

$$\sigma_F(\varepsilon_V^{(pl)} = 0) = R_p. \quad (3.49)$$

Wie stark sich die Fließfläche mit zunehmender plastischer Vergleichsdehnung verändert, wurde bisher nicht festgelegt. Dies wird durch das im Folgenden beschriebene *Verfestigungsgesetz* festgelegt.

Ein sehr einfaches isotropes Verfestigungsgesetz ist die sogenannte *lineare Verfestigung*, bei der die Dehngrenze linear mit der plastischen Verformung steigt [67]. In Ratenformulierung lautet es

$$\dot{\sigma}_F = H \cdot \dot{\varepsilon}_V^{(pl)} \quad (3.50)$$

mit dem *Verfestigungskoeffizienten*  $H$  (für engl. *hardening*). Zu Beginn der Verformung entspricht die Fließspannung  $\sigma_F$  der Dehngrenze  $R_p$ . Es gilt also Gleichung (3.49). Das lineare Verfestigungsgesetz lässt sich integrieren, so dass folgt:

$$\sigma_F = R_p + H \cdot \varepsilon_V^{(pl)}.$$

Wird in einem Versuch zunächst einachsiger Zug und dann Druck ausgeübt, so ergibt sich bei einem isotrop verfestigenden Werkstoff ein Spannungs-Dehnungs-Diagramm entsprechend Bild 3.29 b. Im Druckbereich plastifiziert die Probe erst bei Erreichen der Spannung  $-\sigma_{F1}$ , die betragsmäßig der maximalen im Zug aufgetragenen Spannung  $\sigma_{F1}$  entspricht.

### Kinematische Verfestigung

Bei der *kinematischen Verfestigung* verändert die Fließfläche weder Form noch Größe, sondern bewegt sich im Spannungsraum (vgl. Bild 3.30). Mathematisch lässt sich dies durch Einarbeiten einer *kinematischen Rückspannung* ( $\sigma_{ij}^{(kin)}$ ) in die Fließbedingung dar-

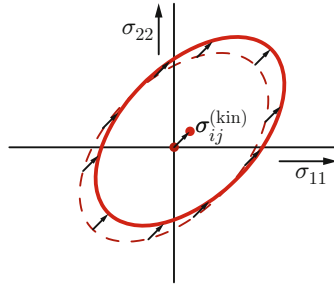


Bild 3.30: Verschiebung der Fließfläche durch kinematische Verfestigung. Eine Darstellung im Hauptspannungsraum ist hier nicht möglich, weil das Material durch die Verfestigung anisotrop wird und seine Eigenschaften somit richtungsabhängig sind.

stellen [81]:

$$g(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(\text{kin})}) = 0. \quad (3.51)$$

Dabei entspricht  $(\sigma_{ij}^{(\text{kin})})$  der Verschiebung der Fließfläche aus dem Ursprung entsprechend Bild 3.30.

Durch die Verschiebung der Fließfläche wird das Material während der Verformung anisotrop, da sich die Größe der Fließspannung je nach Raumrichtung unterscheidet. Dadurch ist es nicht möglich, die Fließbedingung nur mit Hauptspannungen zu formulieren. Die kinematische Rückspannung ist von der Verformungsgeschichte abhängig. Da aber auch sie anisotrop ist, kann sie nicht allein von der plastischen Vergleichsdehnung  $\varepsilon_V^{(\text{pl})}$  abhängen, sondern beispielsweise auch vom plastischen Dehnungszustand  $(\varepsilon_{ij}^{(\text{pl})})$ .

Wegen der Anisotropie muss für die von-misesche Fließbedingung die vollständige Formulierung gewählt werden:

$$\left( \frac{1}{2} \left[ \left( \sigma_{11}^{(\text{eff})} - \sigma_{22}^{(\text{eff})} \right)^2 + \left( \sigma_{22}^{(\text{eff})} - \sigma_{33}^{(\text{eff})} \right)^2 + \left( \sigma_{11}^{(\text{eff})} - \sigma_{33}^{(\text{eff})} \right)^2 \right] + 3 \left( \sigma_{23}^{(\text{eff})} \right)^2 + 3 \left( \sigma_{13}^{(\text{eff})} \right)^2 + 3 \left( \sigma_{12}^{(\text{eff})} \right)^2 \right)^{1/2} = R_p \quad (3.52)$$

mit  $\sigma_{ij}^{(\text{eff})} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(\text{kin})}$  für alle  $i, j = 1, 2, 3$ .

Ein einfaches kinematisches Verfestigungsgesetz lautet [81]

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^{(\text{kin})} = C \cdot \varepsilon_V^{(\text{pl})} \cdot \frac{\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^{(\text{kin})}}{\sigma_0}. \quad (3.53)$$

Dabei sind  $C$  ein Verfestigungsparameter und  $\sigma_0$  eine konstante Bezugsspannung, die für  $\underline{\underline{\sigma}}^{(\text{kin})} = \underline{\underline{0}}$  der Fließspannung entspricht. Zu Beginn der Verformung gilt  $\underline{\underline{\sigma}}^{(\text{kin})} = \underline{\underline{0}}$ .

Führt man an einem kinematisch verfestigenden Werkstoff einen Zug-Druck-Versuch wie im vorherigen Abschnitt durch, so ergibt sich ein völlig anderes Verhalten (Bild 3.31). Bei Lastumkehr plastifiziert die Probe schon bei  $\sigma_{F2} = \sigma_{F1} - 2R_p$ , da die Größe der

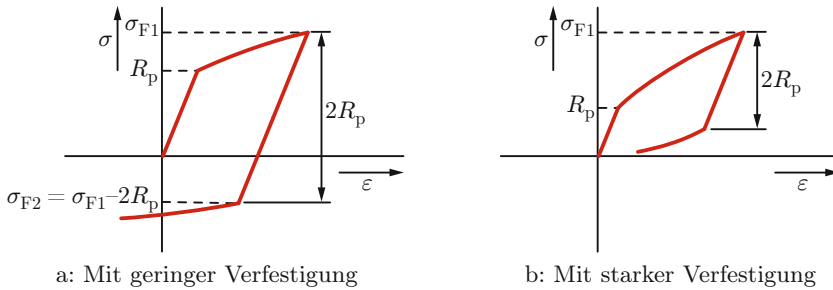


Bild 3.31: Spannungs-Dehnungs-Diagramm mit Lastumkehr für einen kinematisch verfestigenden Werkstoff

Fließfläche unverändert bleibt. Im Extremfall kann das dazu führen, dass noch unter Zugbelastung wieder entgegengesetzte plastische Deformation einsetzt (Bild 3.31 b).

Ein Spezialfall der rein kinematischen Verfestigung ist das sogenannte *Masing-Verhalten*. Wird ein Spannungs-Dehnungs-Diagramm für einen entsprechend verfestigenden Werkstoff aufgenommen und die Belastungsrichtung umgekehrt, kann das Werkstoffverhalten nach Lastumkehr dadurch beschrieben werden, dass das ursprüngliche Spannungs-Dehnungs-Diagramm um  $180^\circ$  gedreht wird, beide Achsen auf die doppelte Länge skaliert werden und dann der Ursprung des so gedrehten und skalierten Diagramms an den Endpunkt der ursprünglichen Spannungs-Dehnungs-Kurve gelegt wird. Eine Voraussetzung für diese Konstruktion ist, dass die Steigung der Spannungs-Dehnungs-Kurve nach der Plastifizierung für beide Belastungsrichtungen gleich ist.

Wenn sich die Dehngrenze nach einer Lastumkehr verringert, wie es beispielsweise bei der kinematischen Verfestigung der Fall ist, wird dies als *Bauschinger-Effekt* bezeichnet.

### \* 3.3.6 Anwendung von Fließbedingung, Fließgesetz und Verfestigungsgesetz

In diesem Abschnitt werden elastische Verformungen, eine Fließbedingung, ein Fließgesetz sowie Werkstoffverfestigung anhand eines einfachen Beispiels in Zusammenhang gebracht.

Betrachtet wird ein Zugstab aus einem isotropen Metall mit den elastischen Konstanten  $E = 210\,000\text{ MPa}$  und  $\nu = 0,3$ , das die Dehngrenze  $\sigma_F = 210\text{ MPa}$  besitzt. Das Metall verfestige sich linear und isotrop nach Gleichung (3.50) mit  $H = 10\,000\text{ MPa}$ . Der Zugstab wird aus dem unbelasteten Ausgangszustand mit der konstanten Dehngeschwindigkeit  $\dot{\varepsilon}_{11} = 0,001\text{ s}^{-1}$  auseinandergezogen. Es sollen die zeitlichen Verläufe der Dehnungen und der Spannungen berechnet werden.

Zunächst werden alle notwendigen Gleichungen zusammengestellt. Anschließend werden mögliche Vereinfachungen eingeführt und die gesuchten Größen berechnet.

Da das Metall nicht starr ist, hat jede Verformung einen elastischen Anteil. Dieser gehorcht dem hookeschen Gesetz (2.33):

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{(\text{el})} = \underline{\underline{S}}_4 \cdot \underline{\underline{\sigma}}. \quad (3.54)$$

Für plastische Verformungen ist es zweckmäßig, eine Formulierung für die Dehngeschwindigkeiten zu wählen (vgl. Abschnitt 3.3.4). Es gilt Gleichung (3.40),

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{(\text{pl})} = \dot{\lambda} \cdot \underline{\underline{\sigma}}', \quad (3.55)$$

sofern die Fließbedingung erfüllt ist.

Jedes Dehnungsinkrement setzt sich aus einem elastischen und einem plastischen Anteil zusammen:

$$d\underline{\underline{\varepsilon}} = d\underline{\underline{\varepsilon}}^{(\text{el})} + d\underline{\underline{\varepsilon}}^{(\text{pl})}.$$

Dies gilt entsprechend auch für die auf die Zeit bezogene Darstellung:

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{(\text{el})} + \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{(\text{pl})}. \quad (3.56)$$

Da der Nachgiebigkeitstensor  $\mathcal{S}_4$  über die Zeit konstant bleibt, folgt aus Gleichung (3.54) durch Ableiten nach der Zeit die Beziehung

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{(\text{el})} = \mathcal{S}_4 \cdot \dot{\underline{\underline{\sigma}}}, \quad (3.57)$$

die mit Gleichung (3.56) verwendet werden kann.

Es fehlt noch ein Kriterium, das entscheidet, ob sich der Werkstoff nur elastisch oder elastisch und plastisch verformt. Dazu wird die von-misesche Fließbedingung

$$\begin{aligned} \sigma_V < \sigma_F &\Rightarrow \text{kein Fließen,} \\ \sigma_V = \sigma_F &\Rightarrow \text{Fließen} \end{aligned} \quad (3.58)$$

mit der Vergleichsspannung

$$\sigma_V = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right]} \quad (3.59)$$

verwendet. Die Verfestigung wird durch Gleichung (3.50) berücksichtigt.

Jetzt liegen alle zur Berechnung der Verformung notwendigen Gleichungen vor. Zusammengefasst ergibt sich das folgende gekoppelte Differentialgleichungssystem (mit den zuvor verwendeten Gleichungsnummern):

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{(\text{el})} + \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{(\text{pl})}, \quad (3.56)$$

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{(\text{el})} = \mathcal{S}_4 \cdot \dot{\underline{\underline{\sigma}}}, \quad (3.57)$$

$$\sigma_V = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right]}, \quad (3.59)$$

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{(\text{pl})} = \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma_V < \sigma_F \\ \dot{\lambda} \cdot \underline{\underline{\sigma}}' & \text{für } \sigma_V = \sigma_F \end{cases}, \quad (3.55), (3.58)$$

$$\dot{\varepsilon}_V^{(pl)} = \sqrt{\frac{2}{9} \left[ (\dot{\varepsilon}_1^{(pl)} - \dot{\varepsilon}_2^{(pl)})^2 + (\dot{\varepsilon}_1^{(pl)} - \dot{\varepsilon}_3^{(pl)})^2 + (\dot{\varepsilon}_2^{(pl)} - \dot{\varepsilon}_3^{(pl)})^2 \right]}. \quad (3.44)$$

$$\dot{\sigma}_F = H \cdot \dot{\varepsilon}_V^{(pl)} \quad (3.50)$$

Während der Verformung ändern sich folgende Größen:  $\underline{\varepsilon}$ ,  $\underline{\sigma}$  (somit auch  $\underline{\sigma}'$ ,  $\sigma_V$ ),  $\underline{\varepsilon}^{(el)}$ ,  $\underline{\varepsilon}^{(pl)}$ ,  $\dot{\lambda}$  und  $\sigma_F$ . Konstant bleiben  $\underline{\varepsilon}_4$  und  $H$ .

Bei einem Zugversuch an einem isotropen Material kann angenommen werden, dass ein einachsiger Spannungszustand herrscht. Für den Spannungstensor gilt somit

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Vergleichsspannung vereinfacht sich damit – wie zu erwarten – auf

$$\sigma_V = \sigma_{11},$$

das hookesche Gesetz in Ratenformulierung erhält folgende Form:

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^{(el)} = \begin{pmatrix} 1/E & 0 & 0 \\ 0 & -\nu/E & 0 \\ 0 & 0 & -\nu/E \end{pmatrix} \dot{\sigma}_{11}. \quad (3.60)$$

Die plastische Dehnrates ergibt sich mit dem Spannungsdeviator  $\underline{\sigma}' = \underline{\sigma} - \underline{\underline{1}}\sigma_m$  zu

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^{(pl)} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma_{11} < \sigma_F \\ \sigma_{11} \dot{\lambda} & \text{für } \sigma_{11} = \sigma_F \end{cases}. \quad (3.61)$$

Für die plastische Vergleichsdehnrates ergibt sich hieraus für  $\sigma_{11} = \sigma_F$

$$\dot{\varepsilon}_V^{(pl)} = \sqrt{\frac{4}{9} \sigma_{11}^2 \dot{\lambda}^2} = \frac{2}{3} |\sigma_{11} \dot{\lambda}|.$$

Für die Entwicklung der Fließspannung folgt somit unter Berücksichtigung der Tatsache, dass keine Lastrichtungsumkehr betrachtet wird,

$$\dot{\sigma}_F = H \cdot \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma_{11} < \sigma_F \\ \frac{2}{3} \sigma_{11} \dot{\lambda} & \text{für } \sigma_{11} = \sigma_F \end{cases}.$$

Sowohl die elastischen als auch die plastischen Dehnungsanteile enthalten keine gemischten Glieder mehr. Die 22- und 33-Komponenten lassen sich aus den 11-Komponenten leicht mit Hilfe der Gleichungen (3.60) und (3.61) bestimmen. Sie werden im Weiteren nicht betrachtet. Es ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \dot{\varepsilon}_{11}^{(el)} + \dot{\varepsilon}_{11}^{(pl)}, \quad (3.62)$$

$$\dot{\varepsilon}_{11}^{(\text{el})} = \frac{1}{E} \dot{\sigma}_{11}, \quad (3.63)$$

$$\dot{\varepsilon}_{11}^{(\text{pl})} = \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma_{11} < \sigma_F, \\ \frac{2}{3} \sigma_{11} \dot{\lambda} & \text{für } \sigma_{11} = \sigma_F, \end{cases} \quad (3.64)$$

$$\dot{\sigma}_F = H \cdot \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma_{11} < \sigma_F, \\ \frac{2}{3} \sigma_{11} \dot{\lambda} & \text{für } \sigma_{11} = \sigma_F. \end{cases} \quad (3.65)$$

Gleichungen (3.62) bis (3.65) sind alle zur Lösung der Aufgabe notwendigen Gleichungen.

### \* Elastischer Bereich

Zu Beginn der Verformung gilt  $\sigma_{11} = 0$  sowie  $\varepsilon_{11}^{(\text{pl})} = 0$ . Während der Verformung wird die gesamte Dehngeschwindigkeit  $\dot{\varepsilon}_{11} = 0,001 \text{ s}^{-1}$  vorgegeben. Da für kleine Spannungen die Fließbedingung noch nicht erfüllt ist, gilt  $\dot{\varepsilon}_{11} = \dot{\varepsilon}_{11}^{(\text{el})} = 0,001 \text{ s}^{-1}$ . Mit Hilfe von Gleichung (3.63) kann die Spannungsgeschwindigkeit zu  $\dot{\sigma}_{11} = E \dot{\varepsilon}_{11} = 210 \text{ MPa/s}$  bestimmt werden. Die zum Zeitpunkt  $t$  wirkende Spannung ergibt sich daraus zu

$$\sigma_{11} = \int_0^t \dot{\sigma}_{11} d\tilde{t} = \dot{\sigma}_{11} t = 210 \text{ MPa/s} \cdot t. \quad (3.66)$$

### \* Elastisch-plastischer Bereich

Der Zeitpunkt  $t_p$ , zu dem plastische Verformung auftritt, ist durch die Fließbedingung

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(t_p) &= \sigma_F(\varepsilon_V^{(\text{pl})} = 0) = R_p, \\ 210 \text{ MPa/s} \cdot t_p &= 210 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (3.67)$$

gegeben. Es ergibt sich  $t_p = 1 \text{ s}$ . Ab diesem Zeitpunkt müssen die plastischen Anteile in den Gleichungen berücksichtigt werden. Da ab jetzt die Fließbedingung erfüllt wird, kann  $\sigma_{11}$  durch  $\sigma_F$  ersetzt werden.

Setzt man nun den elastischen, Gleichung (3.63), und den plastischen Anteil, Gleichung (3.64), in die Gesamtdehnrates, Gleichung (3.62), ein, so ergibt sich

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \frac{1}{E} \dot{\sigma}_F + \frac{2}{3} \sigma_F \dot{\lambda}.$$

Ersetzt man  $\dot{\lambda}$  durch Gleichung (3.65), so folgt

$$\dot{\sigma}_F = \frac{EH}{E+H} \dot{\varepsilon}_{11}.$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten ergibt sich für  $t \geq 1 \text{ s}$  eine Fließspannungszunahme von  $\dot{\sigma}_F = 9,546 \text{ MPa/s}$ . Daraus ergibt sich mit dem Anfangswert  $\sigma_F(t = 1 \text{ s}) = 210 \text{ MPa}$  die

Fließspannung zu

$$\sigma_F = 210 \text{ MPa} + 9,546 \text{ MPa/s} \cdot (t - 1 \text{ s}). \quad (3.68)$$

Hieraus folgen direkt die elastischen Dehnungen zu

$$\varepsilon_{11}^{(\text{el})} = \frac{\sigma_F}{E} = 0,001 + 4,546 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \cdot (t - 1 \text{ s}). \quad (3.69)$$

Die plastische Längsdehnung entspricht der Differenz aus Gesamtdehnung und elastischer Dehnung:

$$\varepsilon_{11}^{(\text{pl})} = 9,546 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1} \cdot (t - 1 \text{ s}). \quad (3.70)$$

Fasst man die Ergebnisse für den gesamten Versuch zusammen, so ergeben sich folgende Spannungen und Dehnungen:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \begin{cases} 210 \text{ MPa/s} \cdot t & \text{für } t < 1 \text{ s}, \\ 210 \text{ MPa} + 9,546 \text{ MPa/s} \cdot (t - 1 \text{ s}) & \text{für } t \geq 1 \text{ s}, \end{cases} \\ \varepsilon_{11} &= 0,001 \text{ s}^{-1} \cdot t, \\ \varepsilon_{11}^{(\text{el})} &= \begin{cases} 0,001 \text{ s}^{-1} \cdot t & \text{für } t < 1 \text{ s}, \\ 0,001 + 4,546 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \cdot (t - 1 \text{ s}) & \text{für } t \geq 1 \text{ s}, \end{cases} \\ \varepsilon_{11}^{(\text{pl})} &= \begin{cases} 0 & \text{für } t < 1 \text{ s}, \\ 9,546 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1} \cdot (t - 1 \text{ s}) & \text{für } t \geq 1 \text{ s}, \end{cases} \end{aligned}$$

In [Bild 3.32](#) sind diese Ergebnisse skizziert.

Im Bild ist zu erkennen, dass nach Beginn der Plastifizierung die plastische Dehnung  $\varepsilon^{(\text{pl})}$  deutlich stärker steigt als die elastische Dehnung  $\varepsilon^{(\text{el})}$ . Die Steigung der Spannungs-Dehnungs-Kurve beträgt 9546 MPa. Sie ist geringfügig geringer als der Verfestigungsparameter  $H$ . Die Abweichung ist auf die elastische Dehnung zurückzuführen, die ebenfalls mit der Spannung steigt.

## \* 3.4 Härte

Als *Härte* wird der Widerstand bezeichnet, den ein Material dem Eindringen eines anderen entgegensetzt.<sup>32</sup> Da dieser Widerstand sehr stark von der Form der betrachteten Körper und den anliegenden Kräften abhängt, gibt es eine große Zahl unterschiedlicher Prüfmethoden. Die verschiedenen Verfahren der Härteprüfung können in drei Gruppen eingeteilt werden, nämlich die *Ritzverfahren*, die *Eindringverfahren* und die *Rücksprungverfahren*. Härtemessungen, die mit verschiedenen Verfahren durchgeführt wurden, lassen

<sup>32</sup> In verschiedenen Ingenieursdisziplinen wird der Begriff »Härte« leicht unterschiedlich verwendet.

Beispielsweise bedeutet er in der Tribologie meist den Widerstand gegen Verschleiß, in der Zerspanungstechnik wird er als Maß für die Zerspanbarkeit verwendet. Die hier benutzte Definition ist die im Bereich der mechanischen Prüfung Gebräuchliche.

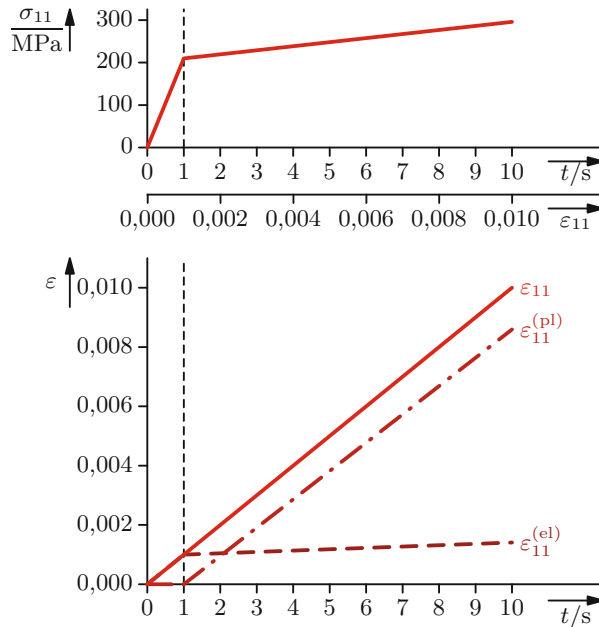


Bild 3.32: Darstellung unterschiedlicher Spannungs- und Dehnungswerte während eines Zugversuchs

sich im Allgemeinen nicht direkt vergleichen – für einzelne Materialien gibt es allerdings Umrechnungstabellen.

Obwohl die Härte also keine leicht zugängliche Materialeigenschaft ist, kommt der Härteprüfung in der Praxis dennoch eine große Bedeutung zu, da die Prüfverfahren einfach sind und sich zum Teil auch problemlos an fertigen Bauteilen durchführen lassen. Ein weiterer Vorteil besteht darin, dass auch sehr kleine Probenvolumina, beispielsweise einzelne Gefügebestandteile, untersucht werden können (Mikrohärteprüfung).

#### \* 3.4.1 Ritzverfahren

Historisch sind die Ritzverfahren von Bedeutung, da die erste Härteprüfmethode auf einem solchen Verfahren beruht. Bei den Ritzverfahren wird untersucht, ob ein Material durch eine aus einem anderen Material geformte Nadel angeritzt werden kann. Es gibt zum einen relative Skalen, bei denen verschiedene Materialien nach ihrer Anritzbarkeit sortiert werden, zum anderen auch Skalen, bei denen die Größe des Kratzers ausgemessen wird. Obwohl diese Verfahren quantitativ sind, ist ihre präzise Durchführung relativ schwierig.

#### \* 3.4.2 Eindruckverfahren

Die Eindruckverfahren sind die in der Praxis am häufigsten eingesetzten Härteprüfverfahren, da sie relativ unaufwändig sind. Bei ihnen wird ein harter Prüfkörper mit vorgegebe-

ner Geometrie in das zu prüfende Material eingedrückt. Es wird entweder die Fläche des Eindrucks oder die Eindringtiefe ausgemessen und mit der zum Eindringen verwendeten Kraft in Beziehung gesetzt.

Als Beispiel betrachten wir die Härteprüfung nach *Brinell*. Dabei wird eine gehärtete Stahlkugel mit dem Durchmesser  $D$  stoßfrei mit einer vorgegebenen Prüfkraft in die zu prüfende Oberfläche eingedrückt.<sup>33</sup> Nach der Entlastung wird der verbleibende Durchmesser  $d$  des Eindrucks ausgemessen. Die Brinell-Härte ist definiert als die Prüfkraft in kp geteilt durch die gesamte Fläche des Eindrucks in  $\text{mm}^2$ :

$$HB = \frac{F/\text{kp}}{A/\text{mm}^2} = \frac{0,102F/\text{N}}{A/\text{mm}^2}. \quad (3.71)$$

Die Oberfläche  $A$  wird aus dem gemessenen Durchmesser gemäß

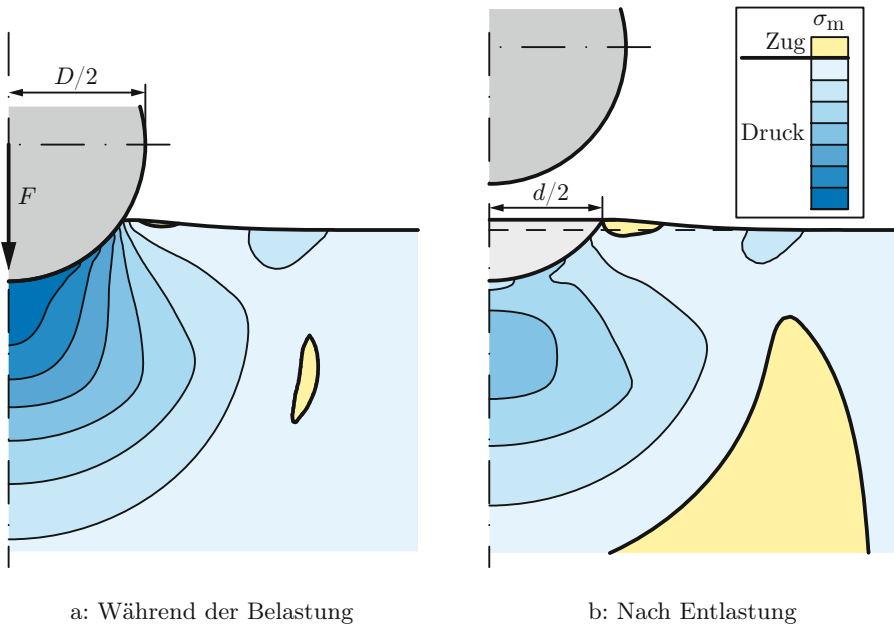
$$A = \frac{\pi}{2} D(D - \sqrt{D^2 - d^2}) \quad (3.72)$$

berechnet.

Formal hat die Härte nach dieser Definition die Einheit eines Druckes. Da jedoch die gesamte Oberfläche des Eindrucks in der Definition der Härte verwendet wurde, entspricht die Härte nicht dem mittleren Druck zwischen Prüfkörper und Material. Dies lässt sich dadurch korrigieren, dass statt der gesamten Fläche die projizierte Fläche des Eindrucks verwendet wird. Verwendet man eine solche Definition, so ist für ein Material, das nicht verfestigt, der Härtewert nahezu unabhängig von der Prüfkraft, sofern diese groß genug ist, um das Material hinreichend plastisch zu verformen. Für ein Material mit Verfestigung nimmt die so definierte Härte mit der Prüflast erwartungsgemäß zu, während bei der brinellschen Definition bei großen Lasten eine Abnahme zu verzeichnen ist.

Nachteilig für die theoretische Analyse dieser Methode ist die Tatsache, dass sich die Geometrie des Eindrucks während des Versuchs ändert. Verwendet man stattdessen einen pyramidenförmigen Prüfkörper, so bleibt die Form des Eindrucks immer dieselbe, lediglich seine Größe ändert sich. Ein solcher Körper wird bei der Härteprüfung nach *Vickers* verwendet. Auch hier wird die Härte als Quotient aus Prüfkraft und Gesamtfläche des Eindrucks definiert. In beiden Verfahren bildet sich unter dem eindringenden Prüfkörper ein dreiachsiger Spannungszustand aus, bei dem das Material unter einem starken hydrostatischen Druck steht. Dies ist vorteilhaft, weil so die Gefahr der Rissbildung in spröden Materialien verringert wird. [Bild 3.33 a](#) veranschaulicht den Vorgang für eine eindringende Kugel. Zum mechanischen Verständnis wird häufig ein einfaches Modell verwendet, bei dem der Werkstoff als starr-idealplastisch angenommen wird. In diesem Fall lässt sich eine Beziehung zwischen der Größe des Eindrucks und der Fließgrenze des Materials herleiten. Das vom Prüfkörper verdrängte Material fließt dabei an diesem vorbei und führt zu einer Aufwölbung, deren Volumen wegen der Volumenkonstanz der plastischen Verformung dem des Eindrucks entspricht. In der Realität entspricht die Aufwölbung um den Eindruck herum meist nicht der Größe des Eindrucks, so dass die Modellvorstellung

<sup>33</sup> Es gibt unterschiedliche, genormte Durchmesser und Prüfkraft. Häufig werden  $D = 10 \text{ mm}$  und eine Prüfkraft von  $29,43 \text{ kN} = 3000 \text{ kp}$  verwendet. Die Wahl der Parameter ist vom geprüften Material und der Dicke der Probe abhängig. Für große Prüfkraft werden auch Hartmetallkugeln verwendet.



a: Während der Belastung

b: Nach Entlastung

Bild 3.33: Finite-Elemente-Simulation der hydrostatischen Spannung in einer Brinell-Härtemessung mit einem elastisch-plastischen Werkstoffmodell. Die Kugel ist starr angenommen. Für sie sind keine Spannungswerte berechnet worden. Zwischen Kugel und geprüftem Material wurde ein Reibkoeffizient von  $\mu = 0,3$  verwendet. Im gezeigten Beispiel ist das Volumen des Eindrucks um 8 % größer als das aufgeworfene Material.

eines starren Materials nicht korrekt sein kann. Bild 3.33 b zeigt dies anhand einer Finite-Elemente-Simulation eines Härteeindrucks mit einer starren Kugel. Dabei ist zu erkennen, dass das Volumen des Eindrucks größer als das der Aufwölbung ist. Detaillierte Untersuchungen zeigen, dass sich unterhalb des Prüfkörpers eine plastische Zone ausbildet, die das darunter liegende Material elastisch komprimiert, so dass sich Eigenspannungen ausbilden.

Diese Überlegung macht bereits deutlich, dass die Härte eine komplexe Materialeigenschaft ist, da sowohl plastische als auch elastische Verformung eine Rolle spielen. Bei Materialien, die nicht linear-elastisch sind und große elastische Verformungen zulassen, gibt es keinen einfachen Zusammenhang zwischen Fließgrenze und Härte mehr. Ein extremes Beispiel hierfür ist Gummi, in dem sich kein bleibender Eindruck erzeugen lässt, so dass seine Härte in diesen Verfahren zu unendlich bestimmt wird.

Den beschriebenen Eindringverfahren ähnlich sind Schlaghammer-Verfahren (beispielsweise das *Poldihammer-Verfahren*), bei denen der Eindruck ausgemessen wird, der durch den Schlag eines Prüfhammers im Material verursacht wird. Im Unterschied zu den anderen Eindringverfahren findet dabei eine kurzzeitige Belastung des Materials statt, die zu einer höheren Umformgeschwindigkeit führt.

Eine detaillierte, praxisorientierte Beschreibung der einzelnen Verfahren findet sich in Domke [44].

### \* 3.4.3 Rücksprungverfahren

Bei den Rücksprungverfahren wird ein Prüfkörper auf ein Material fallen gelassen und die Höhe ausgemessen, zu der dieser Körper wieder zurückspringt. Bei einem rein elastischen Stoß würde während des Aufpralls die gesamte kinetische Energie in Verformungsenergie umgewandelt werden und dann bei der elastischen Rückfederung wieder in kinetische Energie übergehen, so dass der Prüfkörper wieder seine Ausgangshöhe erreichen würde. Findet jedoch plastische Verformung statt, so wird dabei Energie dissipiert. Die Rücksprunghöhe ist dann entsprechend um diesen Betrag verringert. Vorteile dieses Verfahrens sind die meist sehr geringe Größe des gebildeten Eindrucks sowie die kurze Versuchszeit. Auch für diese Verfahren gilt, dass die so ermittelten Härtewerte sich nicht ohne Weiteres mit anderen Verfahren gemessene Werte umrechnen lassen.

## 3.5 Werkstoffversagen

Beginnt ein Bauteil, sich im Einsatz plastisch zu verformen, so wird dies häufig als Versagenskriterium angesehen. Zum einen liegt dies daran, dass die auftretenden großen Verformungen meist nicht toleriert werden können, zum anderen liegt die Fließgrenze im Allgemeinen nicht so weit unter der Zugfestigkeit, dass das Bauteil im plastischen Bereich noch ausreichende Sicherheitsreserven besitzt. Statt durch plastische Verformung kann ein Bauteil jedoch auch durch einen Bruch versagen. Für das Auftreten eines Bruchs gibt es vielfältige Möglichkeiten, die in diesem Buch nur zum Teil beschrieben werden. Eine vollständige Übersicht findet sich beispielsweise in *Lange* [92]. Für Polymere wird auf die Bruchbildung in Kapitel 8 eingegangen, für Metalle und Keramiken folgt hier eine kurze Einführung.

Insgesamt können Brüche und Risse in drei Klassen eingeteilt werden, nämlich *mechanisch bedingte*, *thermisch bedingte* sowie *korrosionsbedingte Risse und Brüche*.

Bei den mechanischen Brüchen gibt es *Gewaltbrüche*, die in diesem Abschnitt behandelt werden, sowie *Schwing-* oder *Ermüdungsbrüche*, die Gegenstand von Kapitel 10 sind. Bei den thermisch bedingten Brüchen sind sogenannte *Kriechbrüche* besonders wichtig. Sie werden in Kapitel 11 besprochen. Ein Beispiel für korrosiv bedingte Risse wird in Abschnitt 3.5.3 angesprochen (siehe auch Abschnitt 5.2.6).

Von einem *Gewaltbruch* spricht man dann, wenn die Belastung, die diesen Bruch ausgelöst hat, vorwiegend monoton sowie mäßig schnell bis schlagartig bis zum Bruch gesteigert wurde [92]. Diese Bedingungen grenzen die Gewaltbrüche von Schwingbrüchen durch zyklische Belastungen und Kriechbrüchen durch lange Belastungen bei hoher Temperatur ab.

Der Bruch kann als *Gleitbruch*, als *Spaltbruch* oder als Mischform der beiden Brucharten auftreten. Die beiden charakteristischen Formen werden im Folgenden näher erläutert.

### 3.5.1 Gleitbruch

Ein *Gleitbruch* bildet sich unter plastischer Verformung durch Abgleiten in Richtung der Ebenen maximaler Schubspannung (vgl. Abschnitte 3.3.2 und 6.2.5). Er tritt deshalb nur bei duktilem Werkstoffverhalten auf. Mikroskopisch ist ein Gleitbruch immer duktil.

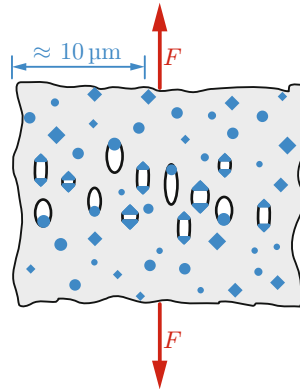


Bild 3.34: Aufreißende Poren an Partikeln bei großer plastischer Verformung [92]. Die Partikel (z. B. Ausscheidungen) lösen sich von der Matrix (rund dargestellt) bzw. reißen (eckig dargestellt).

Meist ist mit einem Gleitbruch auch eine große makroskopische Deformation verbunden, wie z. B. beim Zugversuch. Wenn dies aber beispielsweise durch die Geometrie verhindert wird, kann ein Bauteil auch makroskopisch spröde durch Gleitbruch versagen (Dies kann unter anderem beim Vorhandensein von Kerben oder Anrissen der Fall sein. Siehe dazu Kapitel 4 und 5).

Bei sehr reinen Metallen sind sehr große Deformationen möglich. Dies führt beispielsweise im Zugversuch dazu, dass sich die Probe zu einer Spitze auszieht. In den meisten technischen Metallen sind aber Partikel (z. B. Ausscheidungen, vgl. Abschnitt 6.4.3) vorhanden. Bei großen plastischen Deformationen und hohen Spannungen kommt es, je nach Festigkeit der Partikel und Anbindung an das Matrixmaterial, zum Bruch der Partikel selbst oder zum Herauslösen von Partikeln aus der Matrix (Bild 3.34). Der Partikelbruch tritt bevorzugt bei spröden Partikeln sowie bei hohen Zugspannungen (beispielsweise durch dreiaxiale Zugspannungszustände) auf. Das Lösen von Partikeln erfolgt hauptsächlich durch sehr große Deformationen der Matrix.

Durch das Versagen der Partikel entstehen im Material kleine Anrisse. Diese ziehen sich bei der weiteren Verformung zu ellipsoiden Hohlräumen aus. Zwischen den Partikeln liegt die Matrix einphasig vor und besitzt deshalb eine höhere Duktilität. Die Hohlräume wachsen durch ein Abgleiten des Materials (vgl. Abschnitte 6.2.3, 6.2.5) auf Ebenen mit maximaler Schubspannung (z. B. bei einachsiger Belastung unter  $45^\circ$  zur Zugrichtung) zusammen, wobei sich das Material zwischen den Hohlräumen zu Spitzen bzw. Schneiden auszieht.<sup>34</sup> Dabei entstehen sogenannte *Waben*<sup>35</sup> (engl. *dimples*, Bild 3.35). Die Größe der Waben beträgt häufig einige Mikrometer.

Meist verlaufen Gleitbrüche durch die Körner hindurch (*transkristallin*), abhängig vom Werkstoffzustand sind aber auch Gleitbrüche entlang der Korngrenzen (*interkristallin*) möglich.

<sup>34</sup> Dieses Ausziehen zu Schneiden ist mit dem Ausziehen einer Reinstmetallzugprobe zu einer Spitze vergleichbar.

<sup>35</sup> Daher werden Gleitbrüche häufig auch als *Wabenbrüche* bezeichnet.

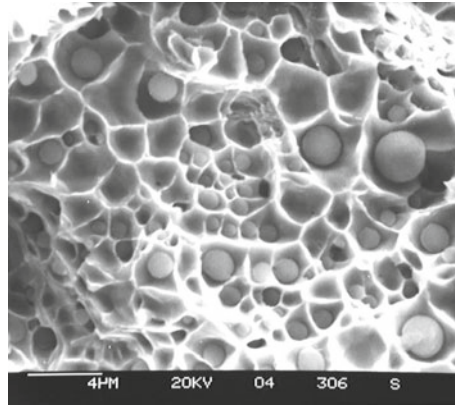


Bild 3.35: Waben eines duktilen Gewaltbruchs eines ferritischen Stahls [92]. In einigen Waben sind Einschlüsse erkennbar. Allerdings sind nicht auf allen Bruchflächen die Einschlüsse so gut zu erkennen wie bei dieser rasterelektronenmikroskopischen Aufnahme. Teilweise fallen diese aus den Waben heraus oder sind im Bild nicht zu sehen, obwohl sie noch in der Wabe enthalten sind.

In Abschnitt 3.2.2 wurde das Versagen von Zugproben durch Trichter-Kegel- und Scherbrüche bereits angesprochen. Dies soll an dieser Stelle vertieft werden. Da das Spannungsniveau und die plastische Deformation in der Probenmitte unter der Einschnürung am größten sind (siehe Bilder 3.12 und 3.13), beginnt die Schädigung durch Bildung und Vereinigung von Hohlräumen zunächst dort. Entsprechend sind auch hier die ersten Anrisse zu finden. Sie wachsen entlang Ebenen maximaler Schubspannung, die bei Zugproben unter  $45^\circ$  zur Zugrichtung liegen, weil sich die Abgleitung und damit Schädigung entlang dieser Ebenen konzentriert. Dabei wächst ein Riss allerdings ein Stück weit aus dem engsten, d. h. am höchsten belasteten Querschnitt heraus. Wie sich der Riss dann weiter ausbreitet, hängt von verschiedenen Parametern ab, beispielsweise vom Verfestigungsverhalten des Materials sowie von der Belastungsgeschwindigkeit.

Durch die Tatsache, dass die Radialspannung  $\sigma_r$  und die Umfangsspannung  $\sigma_u$  (Bild 3.12) gleich groß sind, ist die Spannung in allen Richtungen quer zur Zugrichtung gleich und entspricht diesen beiden. Dadurch wirkt auf allen Ebenen, die unter  $45^\circ$  zur Zugrichtung liegen, die gleiche maximale Schubspannung, so dass die Abgleitung auf allen Ebenen unter  $45^\circ$  zur Zugrichtung stattfinden kann. Im Probeninneren existiert also keine Vorzugsrichtung der Abscherung, so dass häufig lokal viele unterschiedliche Abgleitebenen vorhanden sind.

Entfestigt der Werkstoff beispielsweise bei sehr großen plastischen Deformationen, die parallel zum Riss vorliegen, so kann es günstiger sein, die eingeschlagene Ausbreitungsrichtung in den weniger belasteten Bereich weiter zu verfolgen. Der Riss wächst dann über die gesamte Probe unter  $45^\circ$  zur Zugrichtung und bildet einen Scherbruch (Bild 3.14 b). Wann entsprechende Voraussetzungen für einen Scherbruch gegeben sind, ist z. B. bei Lange [92] ausführlicher beschrieben.

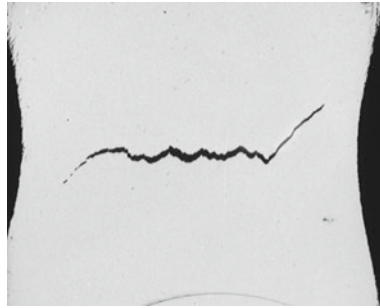


Bild 3.36: Rissbildung in einer Zugprobe. Der Riss bildet sich in der Probenmitte und schreitet in Richtung der Oberflächen fort. Im Probeninneren läuft der Riss nur kurze Strecken unter  $45^\circ$  und wechselt dann die Richtung, um im am stärksten belasteten Querschnitt zu bleiben.

In den meisten Fällen ist es für den Riss günstiger, nicht zu weit aus dem engsten Querschnitt herauszuwachsen. Das liegt zum einen daran, dass dort die Spannungen abnehmen. Zum anderen ist dort die Vorschädigung geringer, da dort weniger Einschlüsse versagt haben (aufgrund der geringeren Spannungen und kleineren plastischen Verformung). Der Riss ändert die Richtung und wandert unter  $45^\circ$  zur Zugrichtung wieder in den engsten Querschnitt mit den höheren Spannungen und der stärkeren Vorschädigung hinein. Es bildet sich ein Riss, der im Probeninneren im Zickzack über den Querschnitt wächst. Dieser Rissverlauf ist im mittleren Bereich von Bild 3.36 zu erkennen.

Sobald der Riss in den Randbereich der Probe fortschreitet, herrscht nur noch ein zweiachsiger Zugspannungszustand.<sup>36</sup> Dadurch liegen die größte Hauptspannung in Zugrichtung und die kleinste Hauptspannung in Radialrichtung, so dass die größte Schubspannung nur noch radial unter  $45^\circ$  zur Zugrichtung auf Kegelflächen liegt. Die Abgleitungen und das Risswachstum finden dann bevorzugt auf diesen statt. Da nur noch relativ wenig Materialquerschnitt außerhalb des Risses vorhanden ist, sind Abgleitvorgänge über größere Strecken als vorher möglich, ohne eine geometrische Inkompatibilität zu bewirken. Außerdem ist im Randbereich aufgrund der geringeren plastischen Verformung weniger Vorschädigung als im Probeninneren vorhanden, so dass die Richtung des Rissfortschritts nicht mehr so stark durch vorhandene Anrisse an Einschlüssen beeinflusst wird. Der Riss wächst aufgrund dieser Tatsachen bevorzugt unter  $45^\circ$  auf Kegelflächen, ohne erneut die Rissfortschrittsrichtung zu ändern. Es bilden sich die charakteristischen Trichter- und Kegelwände auf den beiden Probenhälften.

Da die Abgleitungen und somit das Versagen auf dem vollen Umfang gleichzeitig passiert und beide möglichen Kegelflächen gleichberechtigt sind, treten meist lokal beide Richtungen an einer Probe auf, so dass keine vollständigen Kegel bzw. Trichter auf den Probenhälften entstehen, sondern jeweils nur Anteile.

<sup>36</sup> Die Probe besteht dann im Bereich des Risses nur noch aus einem Materialring. An der äußeren und an der inneren Oberfläche können keine Radialspannungen vorliegen, so dass sich auf dem dünnen Querschnitt keine nennenswerte Radialspannung ausbildet.

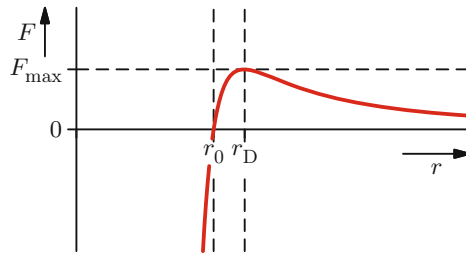


Bild 3.37: Abhängigkeit des Atomabstands  $r$  von der außen angelegten Kraft  $F$

### 3.5.2 Spaltbruch

Ein *Spaltbruch* (*Trennbruch*) erfolgt mikroskopisch (nahezu) verformungslos senkrecht zur größten Zugspannung. Dabei werden die Bindungen zwischen Atomen gelöst. Kubisch flächenzentrierte Metalle besitzen eine so hohe Duktilität, dass ein Spaltbruch nur in Ausnahmefällen auftritt. Bei kubisch raumzentrierten Metallen kann Spaltbruch bei niedrigen Temperaturen oder hohen Belastungsgeschwindigkeiten auftreten (s.u.), bei Keramiken ist er der Normalfall.

Als einfaches Modell für das Lösen der Atombindungen können die in Bild 2.6 auf Seite 40 gezeigten Bindungskräfte herangezogen werden. Trägt man hier nun statt der inneren die äußere Kraft auf, die zu einem bestimmten Atomabstand  $r$  führt, so ergibt sich Bild 3.37. Überschreitet die äußere Zugkraft  $F$  die maximale Bindungskraft  $F_{\max}$ , so entfernen sich die Atome instabil voneinander und lösen ihre Bindung. Das Lösen der Bindung erfolgt durch eine Zugkraft. Entsprechend wird das Lösen von Atombindungen im Werkstoff durch die größte Zugspannung verursacht, die immer gleichzeitig die größte Hauptspannung  $\sigma_I$  ist.

Ein Bauteil- oder Probenquerschnitt bricht aber nicht auf der gesamten Bruchfläche gleichzeitig. Vielmehr bildet sich zunächst lokal ein Anriss durch das Lösen von Atombindungen. Dies ist einerseits darin begründet, dass im Bauteil die Spannung nicht überall gleich hoch ist. Beispielsweise durch die Bauteilgeometrie, aufgrund des Gefüges oder durch vorhergehende plastische Verformungen liegen lokale Spannungskonzentrationen vor, die dort einen Anriss verursachen können. Dies wird z. B. in Lange [92] ausführlich besprochen. Andererseits bestehen im Werkstoff mikrostrukturelle Schwachstellen, die eine Anrissbildung begünstigen. Dies kann beispielsweise ein Korn sein, dessen Spaltebene (siehe unten) senkrecht zur größten Hauptspannung orientiert ist. Da die Mikrostruktur (z. B. Kornorientierung) oder die Belastung sich in der Nachbarschaft von der der Anrissposition unterscheiden, kann der Riss nicht ohne Weiteres weiterwachsen. So bleibt er zunächst bei konstanter Belastung stationär [92] und breitet sich erst bei Lasterhöhung weiter (stabil) aus. Bei einer kritischen Risslänge oder Belastungshöhe wächst der Riss instabil über den restlichen Querschnitt. Bei welchen Lasten bzw. Risslängen dies geschieht (sowohl duktil als auch spröde), ist Gegenstand der *Bruchmechanik*, die ausführlich in Kapitel 5 behandelt wird.

Wie Gleitbrüche treten Spaltbrüche meist trans-, gelegentlich aber auch interkristallin auf. Wie bereits erwähnt, verläuft ein transkristalliner Spaltbruch entlang bestimmter kristallographischer Ebenen, den *Spaltebenen* (beispielsweise bei kubisch raumzentrierten Metallen  $\{100\}$ -Ebenen). Spaltbruchflächen sind mikroskopisch glatt, allerdings enthalten

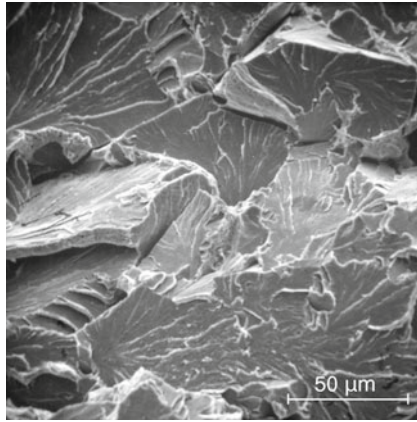


Bild 3.38: Rasterelektronenmikroskopische Aufnahme einer Spaltbruchfläche an einem Wellenzapfen aus 42CrMo4

sie normalerweise Stufen, die zum Beispiel beim Übergang des Risses über Korngrenzen mit geringer Orientierungsdifferenz oder durch das Schneiden von Schraubenversetzungen (linienförmige Gitterbaufehler im Kristall, vgl. Abschnitte 6.2 und 6.3.5) entstehen. Spaltbrüche können vielfältiges Aussehen haben [92], ein Beispiel zeigt [Bild 3.38](#).

Wenn Korngrenzen versprödet sind (z. B. durch Ausscheidungen, vgl. Abschnitt 6.4.3), tritt interkristalliner Spaltbruch auf. In diesem Fall ist die Kornstruktur in rasterelektronenmikroskopischen Aufnahmen gut zu erkennen (vgl. Bild 1.10 b).

Wie schon erläutert, ist die größte Hauptspannung  $\sigma_I$  maßgeblich für das Auftreten eines Spaltbruchs. Erreicht sie die *Spaltfestigkeit*  $\sigma_T$ , so versagt der vorher rissfreie Werkstoff durch Spaltbruch. Die Spannung  $\sigma_T$  ist also groß genug, um in einem vorher defektfreien Material einen Riss zu erzeugen und durch das Bauteil auszubreiten. [Bild 3.39](#) illustriert die Spaltbruchgrenze im mohrschen Spannungskreis. Sie ist eine vertikale Linie bei  $\sigma = \sigma_T$ .

### 3.5.3 Bruchkriterien

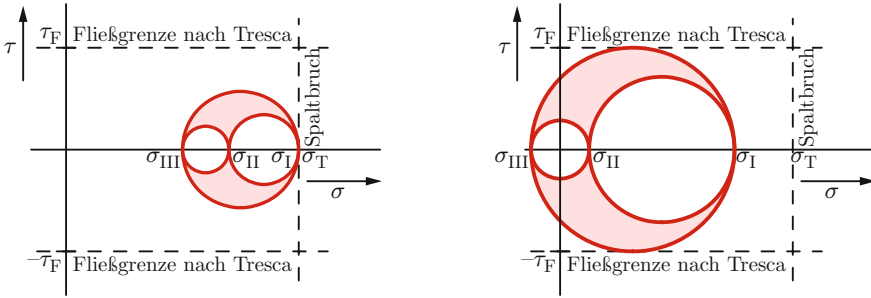
Je nachdem, ob ein Spannungszustand zuerst die Fließgrenze oder die Spaltbruchgrenze erreicht, fließt der Werkstoff oder versagt durch Spaltbruch, wie in [Bild 3.39](#) skizziert. Ein Spaltbruch tritt auf, wenn zuerst die Spaltbruchgrenze erreicht wird, wenn also gilt:

$$\sigma_V(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) < R_p, \quad (3.73a)$$

$$\sigma_I = \sigma_T, \quad (3.73b)$$

wobei  $\sigma_V$  eine Vergleichsspannung beispielsweise nach Tresca oder von Mises ist. Verwendet man die Fließbedingung nach Tresca, so ergibt sich Gleichung (3.73a) zu  $\tau_{\max} < \tau_F$  ([Bild 3.39 a](#)).

Da die Fließspannung durch die Verfestigung bei plastischer Verformung steigt, ist auch nach plastischer Verformung ein Versagen durch Spaltbruch möglich. In diesem Fall handelt es sich um einen duktilen Spaltbruch, der selten und nur bei dreiachsigen Spannungszuständen auftritt [92].



a: Spaltbruch. Die Spaltbruchgrenze wird vor der Fließgrenze erreicht.

b: Fließen. Die Fließgrenze wird vor der Spaltbruchgrenze erreicht.

Bild 3.39: Gemeinsame Darstellung der Fließgrenze nach der Schubspannungshypothese und der Spaltbruchgrenze im mohrschen Spannungskreis

Zum Auftreten eines Spaltbruchs können z. B. folgende Einflussgrößen beitragen:

- Belasten des Werkstoffs mit einem dreiachsigen Zugspannungszustand, der den mohrschen Spannungskreis klein hält und nach rechts in Richtung der Spaltbruchgrenze verschiebt. Ein solcher Belastungszustand ist beispielsweise im Kerbschlagbiegeversuch gegeben [44]. In Bauteilen wird er durch Querschnittsänderungen und Kerben verursacht (vgl. Kapitel 4).
- Belasten des Werkstoffs mit großer Dehngeschwindigkeit, wie z. B. im Kerbschlagbiegeversuch, bzw. bei niedriger Temperatur. Dabei spielt eine Rolle, dass die Fließgrenze immer auch eine Funktion dieser beiden Parameter ist (vgl. Abschnitt 6.3.2), wogegen die Spaltfestigkeit nahezu konstant ist. Das gilt in besonderem Maße für Polymere und kubisch raumzentrierte Metalle. Polymere zeigen eine starke Zunahme der Fließgrenze mit abnehmender Temperatur im Bereich der Glasübergangstemperatur (vgl. Kapitel 8), bei kubisch raumzentrierten Metallen tritt dies in der Nähe der sogenannten *Duktil-Spröd-Übergangstemperatur* auf (vgl. Abschnitt 6.3.3). Durch eine erhöhte Fließgrenze steigt die Gefahr, die Spaltbruchgrenze vor der Fließgrenze zu erreichen.
- Erhöhung der Fließgrenze von Metallen z. B. durch Legieren, Wärmebehandeln (z. B. Härten) oder Kaltverformung (vgl. Abschnitt 6.4). Dies bedeutet insbesondere, dass hochfeste Werkstoffe eher durch Spaltbruch versagen als niederfeste.
- Herabsetzen der Spaltfestigkeit  $\sigma_T$  durch Schwächen der atomaren Bindungen. Dieses Phänomen tritt beispielsweise auf, wenn Wasserstoff oder Schwefel in Stahl gelöst sind (s. u.).

Duktiles Werkstoffverhalten stellt sich ein, wenn zuerst die Fließgrenze erreicht wird (Bild 3.39 b), wenn also gilt:

$$\sigma_V(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = R_p, \quad (3.74a)$$

$$\sigma_I < \sigma_T. \quad (3.74b)$$

Duktiles Verhalten kann unter anderem erreicht werden, indem mindestens eine Spannungskomponente im Druckbereich gehalten wird, wodurch der mohrsche Spannungskreis im Diagramm nach links verschoben wird. Dies wird bei Umformprozessen, wie z. B. beim Schmieden oder Walzen, ausgenutzt.

Die Spaltfestigkeit  $\sigma_T$  ist experimentell häufig nicht zugänglich. Beispielsweise versagen kubisch raumzentrierte Metalle selbst unterhalb der Duktil-Spröd-Übergangstemperatur, wenn sie für Spaltbruch anfällig sind, nur dann durch Spaltbruch, wenn ein dreiachsiger Zugspannungszustand vorliegt. Deshalb kann  $\sigma_T$  nicht im Zugversuch gemessen werden. Keramiken brechen meist dadurch, dass sich Anrisse, die schon im Material vorhanden sind, ausbreiten und so zu einem Versagen bei einer Last unterhalb von  $\sigma_T$  führen (siehe Abschnitt 7.3). Die bei Keramiken gemessene *Zugfestigkeit*  $R_m$  stimmt deshalb nicht mit der Spaltfestigkeit überein.

### \* Wasserstoffversprödung

Eine wichtige Ursache für die Versprödung hochfester metallischer Werkstoffe, insbesondere ferritischer Stähle, ist im Material gelöster Wasserstoff. Durch den Wasserstoff, der sich im Kristallgitter in den Lücken zwischen den Metallatomen befindet (*interstitiell*, vgl. Bild 6.36 auf Seite 205), werden die Atombindungen geschwächt, wodurch die Spaltfestigkeit herabgesetzt wird. Wasserstoff kann beispielsweise bei elektrochemischen Reaktionen in wässrigen Lösungen wie Korrosionsprozessen oder Galvanisieren (z. B. Verzinken von Blechen) in den Werkstoff gelangen.

Voraussetzung für die Anreicherung von Wasserstoff im Material ist, dass dieser in atomarer Form angeboten wird, da er nur so in das Kristallgitter eindiffundieren kann. Bei den oben angesprochenen elektrochemischen Reaktionen in wässrigen Lösungen entsteht er folgendermaßen:



Schweißen in feuchter Atmosphäre kann, aufgrund der damit verbundenen Zersetzung von Wassermolekülen, ebenfalls zur Eindiffusion von Wasserstoff führen. Die beim Schweißen entstehenden Zugeigenspannungen führen zu einer Aufweitung des Kristallgitters, so dass der Wasserstoff in diese Bereiche diffundiert und die Spaltfestigkeit herabsetzt. Dies kann zur Rissbildung durch die Eigenspannungen führen, ohne dass eine äußere Spannung angelegt werden muss. Da Zeit erforderlich ist, bis sich der Wasserstoff an Stellen höchster Zugbeanspruchung angereichert hat, tritt der Bruch häufig erst Stunden oder Tage nach dem Schweißvorgang auf [92]. Daher wird er auch als *verzögerter Bruch* bezeichnet. Dieser Effekt ist besonders bei hochfesten Materialien, beispielsweise Stählen, relevant, da dort die vom Material ohne plastische Verformung ertragbaren Eigenspannungen groß sind.

Gelöster Wasserstoff kann auch zu sogenannter Spannungsrissskorrosion führen. Diese wird in Abschnitt 5.2.6 diskutiert.