Université de Côte d'Azur, Polytech Nice Sophia

Pricing d'une option américaine en utilisant la méthode implicite des différences finies et la méthode de l'arbre binomial.

Auteur :
Rovanos Tsafack Nzanguim

Encadreur :
Prof. Didier Auroux

16 décembre 2024

Résumé

L'option américaine est l'une des options les plus utilisées sur le marché financier aujourd'hui. Le pricing d'une option américaine nécessite plusieurs méthodes. Ce travail se concentre sur le pricing d'une option de vente américaine en utilisant la méthode implicite des différences finies et la méthode de l'arbre binomial. Nous commençons par développer l'équation différentielle partielle de Black-Scholes, que nous avons résolue en utilisant la méthode implicite des différences finies pour déterminer le prix de l'option. Par la suite, nous avons introduit la méthode de l'arbre binomial. La méthodologie a été expliquée avec un exemple pour une meilleure compréhension. Python 3 a été utilisé pour effectuer les solutions numériques correspondantes pour les deux méthodes. Nous avons comparé les deux méthodes et constaté qu'elles convergent vers la même valeur pour un horizon temporel plus large N.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction et Notions Basic

1.1 Intro

Les options sont l'un des produits dérivés financiers les plus couramment utilisés sur les marchés financiers. Il existe plusieurs types d'options différentes, dont les plus courantes sont appelées options européennes et options américaines. La majorité des options négociées sur les marchés organisés sont aujourd'hui de type américain. Il en existe de deux types. Une option d'achat (appelée call par la suite) donne le droit à son détenteur d'acheter une certaine quantité d'un actif sous-jacent à une date future donnée et à un prix convenu. Une option de vente (put) donne le droit à son détenteur de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent à une date future et à un prix convenu. Ce prix est appelé prix d'exercice (strike) ; la date maximale à laquelle le droit peut être exercé est la date d'échéance. Si l'exercice peut survenir à tout moment jusqu'à la date d'échéance, l'option est dite américaine. En revanche, si l'option ne peut être exercée qu'à la date d'échéance, elle est dite européenne. La plupart des options négociées sur les marchés organisés sont de type américain (voir [3]). L'évaluation des options exerçables de manière anticipée, ou options de style américain, constitue une tâche d'une importance majeure dans la tarification des produits dérivés, car ces types d'instruments se trouvent sur tous les grands marchés financiers, notamment les marchés d'actions, de matières premières, de change, de crédit et de convertibles. Bien que certains auteurs aient proposé des approximations analytiques[1] pour certaines options exerçables de manière anticipée, des solutions exactes sous forme fermée n'existent généralement pas pour ces instruments. Par conséquent, les principales méthodes de tarification de ces dérivés sont les arbres binomiaux et les différences finies. La méthode des différences finies estime la solution d'une équation aux dérivées partielles (EDP) en discrétisant l'espace de solution en une grille, puis en résolvant l'EDP par récurrence. La méthode des arbres discrétise également l'espace de solution, bien que cette discrétisation soit choisie pour représenter la distribution du processus du prix de l'actif sous-jacent, plutôt que l'ensemble de l'espace de solution. L'inconvénient est que ces techniques deviennent computationnellement prohibitives lorsqu'elles sont généralisées pour traiter plusieurs dimensions, le temps de calcul augmentant généralement de manière exponentielle avec le nombre de variables d'état, (voir [2]).

Ce rapport de projet est structuré comme suit : Le Chapitre 1 est consacré à l'introduction et à quelques brèves définitions, le Chapitre 2 contient l'explication mathématique de la méthode de tarification d'une option américaine via les différences finies et la méthode de l'arbre binomial. Enfin, le Chapitre 3 présente les résultats numériques et les conclusions.

1.2 Quelques Définitions :

Nous donnons quelques définitions de calcul stochastique et de marché financier pour une meilleure compréhension de notre travail. Les notions suivantes se trouves dans [3] et [6]

Definition 1.2.1 *(Option) Une option est un produit financier donnant le droit d'acheter ou de vendre un actif sous-jacent (action, matière première, etc.) pendant une certaine période à un prix convenu à l'avance, appelé prix d'exercice.*

Definition 1.2.2 *(Put) Le Put est une option de vente sur un instrument financier. C'est un contrat qui permet a son souscripteur de vendre l'instrument concerné, appelé alors sous-jacent, a un prix fixé a l'avance et a une date déterminée appelée date de maturité.*

Definition 1.2.3 *Le mouvement brownien unidimensionnel* $(B_t)_{t\geq 0}$ *est un processus stochastique dépendant du temps* t *et vérifiant :*

1. *(accroissements indépendants) Quels que soient les temps t et s tels que $t > s$, l'accroissement $B_t - B_s$ est indépendant du processus $(B_u)_{0 \leq u \leq s}$ avant le temps s.*
2. *(accroissements stationnaires et gaussiens) Quels que soient les temps t et s tels que $t > s$, l'accroissement $B_t - B_s$ est une variable aléatoire normale de moyenne nulle et de variance $t - s$.*
3. *$(B_t)_{t \geq 0}$ est presque sûrement continu, c'est-à-dire pour presque toute réalisation, la fonction $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue.*
4. *Il est souvent supposé que $B_0 = 0$. On dit alors que le mouvement brownien est standard.*

Lemma 1.2.1 *(Formule dd'ltô) Soit un processus d'ltô X_t, processus stochastique de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s \; \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma_s \; \mathrm{d}B_s$$

autrement formulé, on a

$$\mathrm{d}X_t = \mu_t \; \mathrm{d}t + \sigma_t \; \mathrm{d}B_t$$

avec μ_t et σ_t deux processus aléatoires satisfaisant quelques hypothèses techniques d'adaptation au processus B_t (mouvement brownien).

Si $f(X_t, t)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, alors la formule d'Itô s'écrit

$$\mathrm{d}\left(f\left(X_t, t\right)\right) = \frac{\partial f}{\partial t}\left(X_t, t\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial x}\left(X_t, t\right)\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(X_t, t\right)\sigma_t^2 \; \mathrm{d}t$$

Chapitre 2

Pricing d'Option Americaine

2.1 Difference Finies

Les méthodes des différences finies évaluent un produit dérivé en résolvant l'équation différentielle que ce produit satisfait. L'équation différentielle est transformée en un ensemble d'équations aux différences qui sont résolues de manière récursive. Considérons un prix d'option V qui dépend d'une seule variable stochastique ([1]) S, laquelle suit un processus stochastique spécifique.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \tag{2.1}$$

On considere un portefeuille avec une option $V(t, S)$, $-\frac{\partial V}{\partial S}$ sous-jacent Le portefeville constitule alors

$$\pi(t, S) = V(t, S) - \frac{\partial V}{\partial S} S \tag{2.2}$$

$$d\pi = dv - \frac{\partial V}{\partial S} dS \tag{2.3}$$

mais on a que

$$dS = rSdt + \sigma S dW$$

Alors, en utilisant la formule $d'It\hat{o}$ sur $V(t, S)$ on a

$$\begin{aligned} dV &= \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW + rS \frac{\partial V}{\partial S} dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt + \frac{\partial t}{\partial t} dt \\ &- \frac{\partial V}{\partial S}(rSdt + \sigma S dW) \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt + \frac{\partial V}{\partial t} dt \end{aligned} \tag{2.4}$$

Or

$$\frac{d\pi}{dt} = r\pi \Rightarrow d\pi = r\pi dt$$

En utilisant (2.4) on obtien

$$\frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt = r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S\right) dt. \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV \tag{2.7}$$

(2.7) est encore appeller l'EDP de Black-Scholes. On résou L'EDP de Black-Scholes par la methode des différences finies Implicit. Pour ca, il nous faudra une condition en temps t et deux conditions en espace S.
En temps : on résout de 0 a T pour un put et donc une condition finale de ([1])

$$V(0, S) = \max(K - S, 0) \tag{2.8}$$

En espace : on résout celon les valeur S_0 et $S_{\max}$ du sous-jacent. Cette a dire

$$V(t, S = 0) = Ke^{-r(T-t)} \quad \text{et} \quad V(t, S_{\max}) = 0 \tag{2.9}$$

L'évaluation d'une option américaine présente un défi majeur : la présence d'une frontière mobile, conséquence directe de la possibilité d'exercice avant échéance. Cette caractéristique implique l'existence, pour chaque option américaine, d'un seuil critique du cours de l'action sous-jacente $S_V(t)$. Si $S(t) \leq S_V(t)$, la valeur de l'option de vente américaine est égale à sa valeur d'exercice, tandis que pour $S(t) > S_V(t)$, la valeur dépasse la valeur d'exercice (voir [6]).

$$V(t,S) = K - S \quad \text{pour} \quad S \leq S_V(t) \tag{2.10}$$
$$V(t,S) = \max(K - S, 0) \quad \text{pour} \quad S > S_V(t) \tag{2.11}$$

Selon la frontière d'exercice anticipé, nous pouvons définir deux zones sur la grille. La première est la zone de continuation, notée $C = \{(S,t)|S > Sf(t)\}$. L'autre est la zone d'exercice, où la valeur de l'option de vente américaine est connue. Ainsi, il ne reste qu'à déterminer la valeur dans la zone de continuation, voir [6].

Pour mettre en œuvre la méthode des différences finies implicite, nous définissons d'abord un petit changement de temps et un petit changement du prix de l'action comme Δt et ΔS respectivement. Ensuite, une grille est construite pour estimer la valeur de f lorsque le prix de l'action est $0, \Delta S, 2\Delta S, \ldots, S_{\max}$ ($M+1$ étapes au total) et le temps est égal à $0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots, T$ ($N+1$ étapes au total). Dans les dimensions, la date d'expiration T détermine le temps maximum autorisé. Dans l'état du prix de l'action, la responsabilité limitée définit la valeur absolue inférieure comme 0 et $S_{\max}$ est la limite supérieure généralement définie par les conditions des dérivés.

Les dérivées partielles de V au nœud $(i-1, j)$ peuvent être approximées comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial S} &= \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta S} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - 2V_{i,j}}{\Delta S^2} \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\Delta t} \end{aligned} \tag{2.12}$$

En utilisant l'équation (2.12) dans (2.7), nous obtenons

$$\frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_j^2 \frac{V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - 2V_{i,j}}{\Delta S^2} + r\frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\Delta t} - rV_{ij} \tag{2.13}$$

Après manipulation algébrique, nous aboutissons à la formule nécessaire pour calculer le prix des options (voir [[1]]),

$$a_j V_{ij-1} + (1 + b_j)V_{i,j} + c_j V_{ij+1} = V_{i+1j} \tag{2.14}$$

avec

$$a_j = \Delta t \frac{r\Delta S_j}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 \Delta S_j}{\Delta^2} \quad b_j = \frac{\Delta t}{2}\frac{\sigma^2 \Delta S_j^2}{\Delta S^2} + r\Delta t \ et \ \ c_j = \frac{\Delta t}{2}\left[\frac{r\Delta S_j}{2\delta S} + \frac{\sigma^2 \Delta S_j^2}{\Delta S^2}\right] \tag{2.15}$$

En forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} 1+b_1 & c_1 & 0\cdots & 0 \\ a_2 & 1+b_2 & c_2\cdots & 0 \\ 0 & a_3 & 1+b_3\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{N-1} 1+b_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{i1} \\ V_{i2} \\ V_{i3} \\ \vdots \\ V_{i,N-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 V_{i0} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ c_{N-1} V_{i,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{i-11} \\ V_{i-12} \\ V_{i-13} \\ \vdots \\ V_{i-1,N-1} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

La méthode la plus intuitive pour évaluer une option américaine dans un cadre d'équations aux dérivées partielles (EDP) est de la traiter comme une option bermudienne, qui ne peut être exercée qu'aux points de notre grille temporelle. En utilisant simplement les différences finies pour calculer les prix des options à rebours et en appliquant une frontière d'exercice optimal, on peut déterminer les vrais prix des options. Si on contrôle et garde le pas de temps raisonnablement petit, le prix de l'option résultant devrait converger vers le prix de l'option américaine [4]. Pour $i = 1, ..., N-1$: $V^*_{i,j} = \max(V_{i,j}, K - i\Delta S)$ où $V_{i,j}$ est la solution de l'équation aux différences finies.

2.2 Arbre Binomial

Dans cette section, nous donnons une explication générale de la façon dont la méthode de l'arbre binomial peut être utilisée pour évaluer une option de vente américaine. Une technique efficace pour déterminer le prix des options consiste à créer un arbre binomial. Cet outil graphique permet de visualiser les différentes trajectoires potentielles du prix d'une action au cours de la période de l'option, ([3]).

Pour commencer, divisez la durée de vie de l'option en n intervalles égaux de longueur Δt. À chaque intervalle, le prix de l'action peut soit augmenter à (Su) avec une probabilité q, soit diminuer à (Sd) avec une probabilité $1 - q$. Le taux d'intérêt, supposé constant, est noté r.

En considérant une seule période jusqu'à l'expiration, une option de vente hypothétique sur l'actif aura à l'échéance les gains suivants : $P_u = \max[0, K - Su]$ si le prix de l'action monte à Su, et $P_d = \max[0, K - Sd]$ si l'action baisse à Sd. Si un portefeuille peut être construit avec Δ actions et un montant D investi au taux sans risque, il aura un coût de $\Delta S + D$ et une valeur future de $\Delta Su + rD$ ou $\Delta Sd + rD$. Il est possible de choisir les valeurs de Δ et D afin de répliquer les gains finaux de l'option de vente indépendamment du résultat sous-jacent. Pour ce faire, nous résolvons simultanément les équations :

$$C_u = \Delta uS + rD \tag{2.17}$$

$$C_d = \Delta dS + rD \tag{2.18}$$

et on obtien

$$\Delta = \frac{P_u - P_d}{(u-d)S} \quad D = \frac{uP_d - dP_u}{(u-d)r} \tag{2.19}$$

Pour éviter toute possibilité d'arbitrage, le prix de l'option d'achat C doit être au moins égal à la valeur du portefeuille de couverture $\Delta S + D$. Autrement dit, il est nécessaire que

$$C = \Delta S + D = \frac{C_u - C_d}{(u-d)} + \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)r} = \frac{[pC_u + (1-p)C_d]}{r} \tag{2.20}$$

$$p \equiv \frac{r-d}{u-d} \quad 1 - p \equiv \frac{u-r}{u-d}. \tag{2.21}$$

L'équation (2.20) représente la valeur de l'option d'achat une période avant l'expiration. Les deux caractéristiques les plus importantes de cette formule sont : Les probabilités réelles q n'apparaissent pas. Le prix de l'option ne dépend pas de l'attitude des investisseurs face au risque. Cela signifie que, quelles que soient leurs probabilités subjectives sur les mouvements futurs des actions, les investisseurs s'accorderont sur la relation entre C, S, u, d et r. La formule fonctionne donc que les investisseurs soient averses au risque ou qu'ils le préfèrent. De plus, p est toujours compris entre zéro et un, montrant les propriétés de base d'une mesure de probabilité. Plus précisément, p est la valeur que q aurait à l'équilibre si les investisseurs étaient neutres au risque. Ainsi, l'option de vente peut être interprétée comme l'espérance de ses valeurs futures actualisées dans un monde neutre au risque. Cette procédure peut être répétée plusieurs fois pour évaluer les options de vente avec plus d'une période avant la maturité, on suit ces étapes : On commence à la date d'expiration et on remonte vers le présent. À chaque étape, on Crée un portefeuille qui copie exactement les gains futurs de l'option. Fixe le prix de l'option égal à la valeur de ce portefeuille. Quand on augmente le nombre d'intervalles et qu'on les raccourcit, il faut analyser comment les variables p, u et d changent. On suppose que le prix de l'action suit un processus continu quand le nombre d'intervalles tend vers l'infini. On choisit p, u et d pour avoir les bonnes valeurs du rendement moyen et de la variance de l'action à la fin de chaque intervalle Δt. En supposant la neutralité au risque, le rendement moyen sur une période est égal au taux sans risque $r\Delta t$, et le prix futur moyen de l'action est $Se^{r\Delta t}$, (voir [2]). Donc :

$$Se^{r\Delta t} = pSu + (1-p)S_d \tag{2.22}$$

et donc,

$$e^{r\Delta t} = pu + (1-p)d \tag{2.23}$$

Le processus stochastique supposé implique une variance sur une période de $\sigma^2 \Delta t$. Par conséquent, il s'ensuit que

$$pu^2 + (1-p)d^2 - [pu + (1-p)d]^2 = \sigma^2 \Delta t \tag{2.24}$$

a partir de (2.23), nous obtenons que

$$e^{r\Delta t}(u+d) - ud - e^{2r\Delta t} = \sigma^2 \Delta t \tag{2.25}$$

([4]) ont proposé une condition sur u qui est $u = \frac{1}{d}$. Donc en utilisant eq. (2.23), eq.(2.24) and eq.(2.25), on obtien

$$p = \frac{a-d}{u-d} \quad u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad \textit{and} \;\; a = e^{r\Delta t} \tag{2.26}$$

([4]) ont pu démontrer que la formule de Black-Scholes coïncide avec la méthode binomiale lorsque le nombre d'intervalles de temps tend vers l'infini, pour un prix d'action suivant une distribution log-normale comme cas limite.

Dans le cas d'une action versant des dividendes continus, considérons un prix d'action versant un rendement de dividende continu de δ. Si nous sommes dans un environnement neutre au risque, le rendement total est r et le rendement en gain en capital est $r-\delta$ (voir,[4]). Soit S_0 la valeur initiale de l'action sur un pas de temps de longueur Δt. Sa valeur attendue sera

$$S_0 e^{(r-\delta)\Delta t} \tag{2.27}$$

cette a dire

$$pS_0 u + (1+p)S_0 d = S_0 e^{(r-\delta)\Delta t} \tag{2.28}$$

alors,

$$p = \frac{e^{(r-\delta)\Delta t} - d}{u-d} \tag{2.29}$$

pour pouvoir correspondre à la volatilité dans ce cas, nous fixons $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ and $u = \frac{1}{d}$, (voir,[4]) et dans ce cas,

$$p = \frac{a-d}{u-d} \quad u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad and \quad a = e^{(r-\delta)\Delta t} \tag{2.30}$$

La méthode utilisée pour évaluer un produit dérivé de style américain est très similaire à celle des options européennes, à la différence qu'il est nécessaire d'intégrer la possibilité d'exercice anticipé. Dans le cas des options américaines, la valeur de l'option à chaque nœud de l'arbre binomial est le maximum entre la valeur calculée par induction rétrograde (comme dans le cas de l'option européenne) et le gain résultant d'un exercice anticipé. Plus précisément, au temps t et au nœud i, (voir,[2])

$$V_t^i = \max\left[\max(K - S_t^i, 0)[pV_{t+1}^u + (1-p)V_{t+1}^d]/r\right] \tag{2.31}$$

Chapitre 3

Résultat Numérique et Conclusion

L'évaluation analytique d'une option de vente américaine n'est généralement pas facile en raison d'une difficulté majeure qu'elle présente : présence d'une frontière mobile, conséquence directe de la possibilité d'exercice avant échéance. Nous allons donc établir quelques résultats numériques pour l'évaluation de l'option de vente américaine en utilisant la méthode des différences finies implicites et l'arbre binomial.

3.1 Différences Finies

Dans cette section, nous résolvons l'équation (2.16) établie dans le Chapitre 2 Section 1.2. L'équation (2.16) peut être réécrite comme

$$AV = B \tag{3.1}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1+b_1 & c_1 & 0\cdots & 0 \\ a_2 & 1+b_2 & c_2\cdots & 0 \\ 0 & a_3 & 1+b_3\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{N-1} 1+b_{N-1} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

$$V = \begin{pmatrix} V_{i1} \\ V_{i2} \\ V_{i3} \\ \vdots \\ V_{i,N-1} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} V_{i-11} \\ V_{i-12} \\ V_{i-13} \\ \vdots \\ V_{i-1,N-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 V_{i0} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ c_{N-1} V_{i,N} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

pour le point d'exercice optimal (early exercise boundary), le graphique contient implicitement une frontière entre la région où il est préférable de conserver l'option et celle où il est préférable de l'exercer. Dans une option Put américaine, cette frontière sépare :

$$V(t,S) = K - S \quad \text{pour} \quad S \leq S_V(t) \tag{3.5}$$

$$V(t,S) = \max(K-S, 0) \quad \text{pour} \quad S > S_V(t) \tag{3.6}$$

Si nous considérons $S_0 = 147,12\$$ avec $r = 0,035$, une volatilité $\sigma = 0,2$, une maturité de $T = 2$ et un prix d'exercice $K = 169,99\$$. On résout alors l'équation (3.1) sur python et obtien le prix de l'option put Américaine, voir Fig 3.1

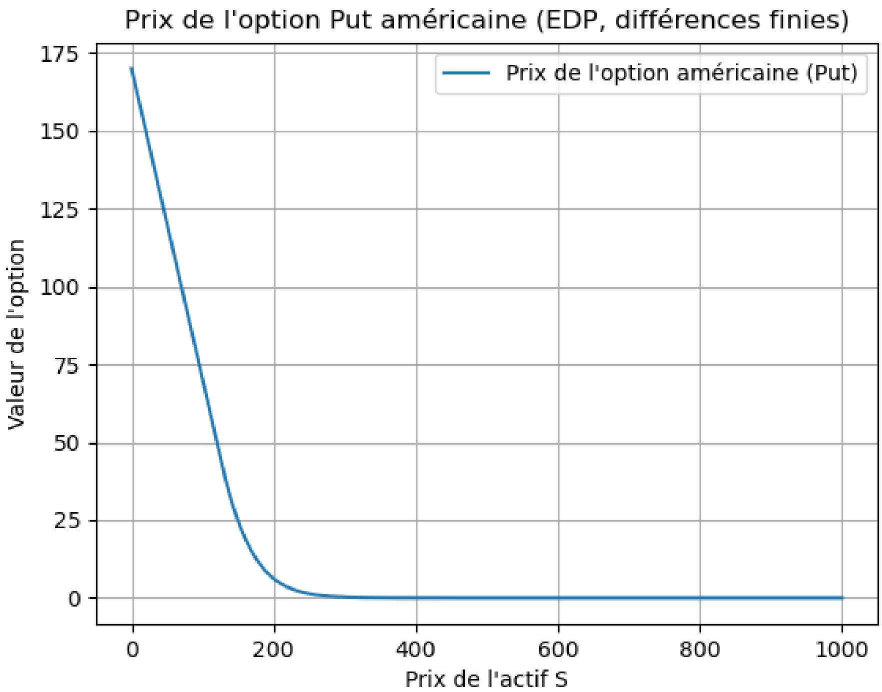

FIGURE 3.1 – American Put option avec T=1000

Une volatilité plus élevée augmente la valeur de l'option, car elle rend plus probable que S atteigne K. plus T est grand, plus l'option vaut cher, car elle a plus de temps pour devenir profitable. Un taux plus élevé peut favoriser l'exercice anticipé.

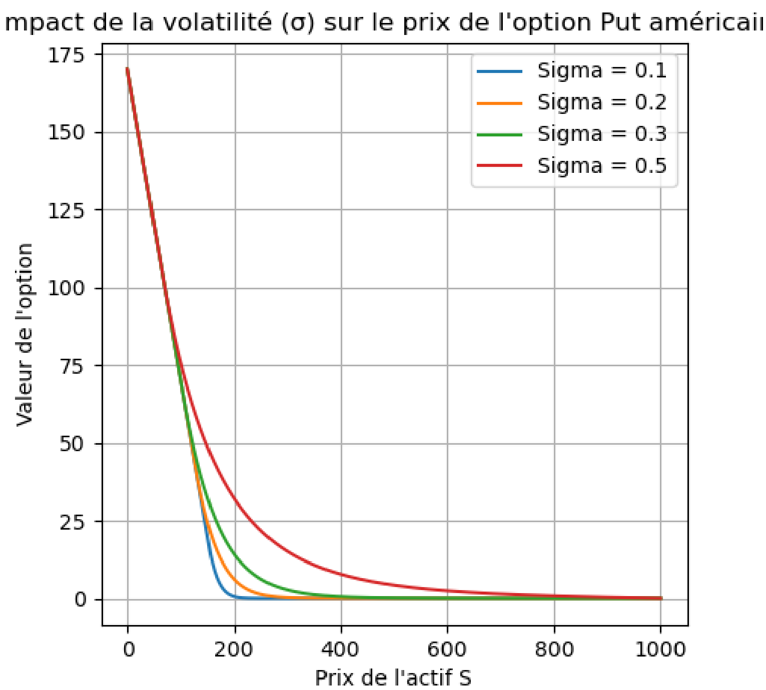

FIGURE 3.2 – American Put option avec T=1000

3.2 Abre Binomial

Dans cette section, nous commençons par donner un exemple utilisant la méthode de l'arbre binomial pour une meilleure compréhension des explications du Chapitre 2 section 2. De plus, nous présentons les résultats numériques obtenus à l'aide de Python dans le cas général.

Exemple :
L'évaluation d'une option de vente américaine avec un pas de temps de $N = 2$ consiste à prendre en compte un prix de marché de 60\$. À chaque étape, le prix peut augmenter de 25% ou diminuer de 25%. Chaque pas de temps dure 1 an et le taux d'intérêt sans risque est de 5% par an. Nous allons calculer la prime de l'option de vente américaine sur 2 ans avec un prix d'exercice de 62\$.

Solution
Donc, on a $p = \frac{e^{rt}-d}{u-d}$ and $S = e^{-rt}[pSu + (1-p)Sd]$. S_0 Peut augmenter de 25% ou diminuer de 25% comme indiqué ci-dessous (Figure 3.3).

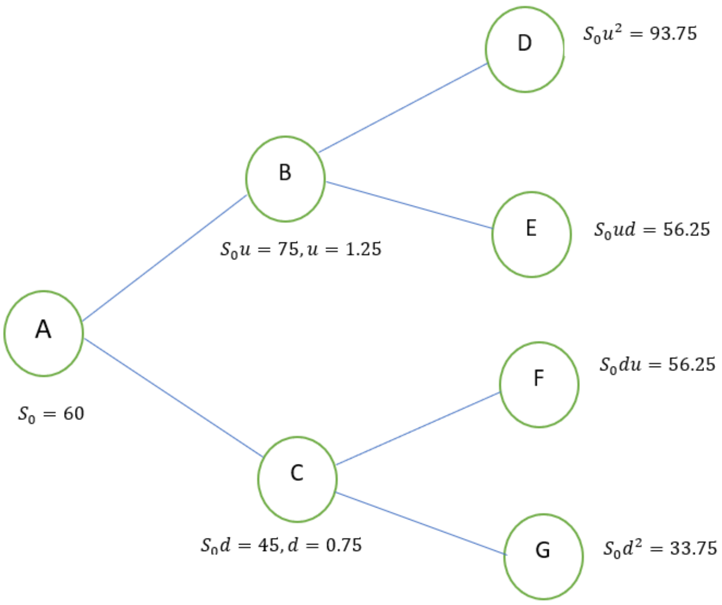

FIGURE 3.3 – Arbre binomiale, N=2

Si nous considérons le triangle BDE, et en notant que le prix d'exercice est de 62, nous ne voudrons pas vendre à D, car le prix d'exercice pour l'option de vente dans ce cas sera $\max(62 - 93.75, 0) = 0$. En revanche, nous pouvons exercer à E, puisque $\max(62 - 56.25, 0) = 5.75$, et dans ce cas

$$p = \frac{e^{0.05(1)} - 0.75}{1.25 - 0.75} = 0.6025 \tag{3.7}$$

et le prix futur de sera donc

$$S = e^{-rt}[pS_u + (1-p)S_d] = e^{-0.05}[0.6025(0) + (1 - 0.6025)(5.75)] = 2.1739 \tag{3.8}$$

De même, pour CFG, avec le prix d'exercice de l'option de vente à F à 5,75 $etG28, 25$, nous avons le prix futur comme

$$S = e^{-rt}[pS_u + (1-p)S_d] = e^{-0.05}[0.6025(5.75) + (1 - 0.6025)(28.25)] = 2.1739 \tag{3.9}$$

Nous avons donc choisi la plus grande valeur, qui est de $13, 9771$.
En utilisant Python avec les mêmes valeurs de paramètres que celles de la méthode des différences finies, nous évaluons l'option américaine en utilisant la méthode de l'arbre binomial pour $N = 10, 50, 100, 200, 500, 1000$. Nous observons que les deux méthodes produisent presque le même prix, mais que la méthode des différences

finies donne un prix plus élevé par rapport à celui de l'arbre binomial. De plus, nous calculons l'erreur quadratique moyenne et observons à quel point ces valeurs de prix convergent lorsque $N \mapsto \infty$, comme le montre la Figure 3.3 et le tableau 3.1.

N	**PEP avec la méthode binomiale**	**PEP la méthode des différences finies**	**erreur**
10	5.71362588	5.56076147	0.15286441
50	5.78257575	5.9268474	0.14427165
100	5.79115063	5.87251089	0.08136026
200	5.79513637	5.83821384	0.04307747
500	5.79743904	5.81518067	0.018079027
1000	5.79819565	5.80712344	0.00892779

TABLE 3.1 – Tableau de comparaison entre la méthode binomiale et la méthode des différences finies pour la tarification d'une option de vente américaine. PEP = prix d'exercice du put.

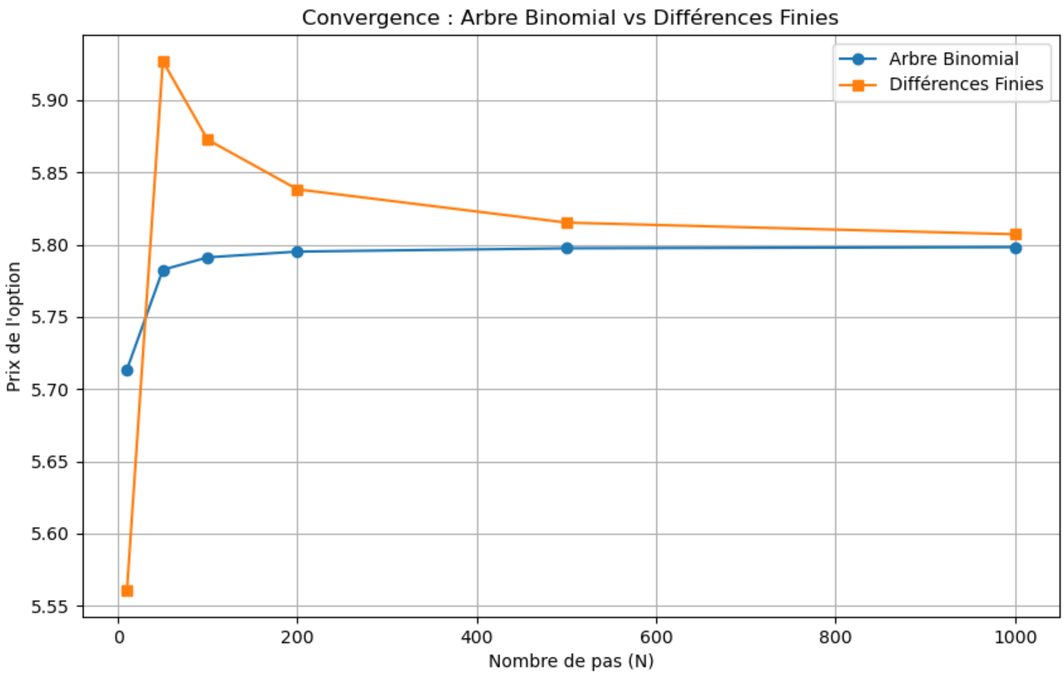

FIGURE 3.4 – Convergence prix d'un put Américaine celon les méthode binomial et différences finies

3.3 Conclusion

Dans ce projet, nous avons évalué une option de vente américaine en utilisant la méthode implicite des différences finies, puis la méthode de l'arbre binomial. Nous avons pu réaliser des simulations numériques en utilisant Python et nous pouvons conclure ce qui suit à partir de nos résultats :

- La méthode implicite des différences finies donne un prix d'option de vente plus élevé par rapport à la méthode binomiale, qui converge progressivement l'une vers l'autre à mesure que N devient très grand.
- Une volatilité plus élevée augmente la valeur de l'option, car elle rend plus probable que S atteigne K. Plus T est grand, plus l'option vaut cher, car elle a plus de temps pour devenir profitable. Un taux plus élevé peut favoriser l'exercice anticipé. Cela peut être vu dans la Figure 3.2.
- Avec une complexité computationnelle de $O(N^2)$, la méthode binomiale est plus rapide par rapport à la méthode des différences finies qui a une complexité de $O(N \times M)$.

Bibliographie

[1] Didier Auroux. Méthode numérique pour le pricing d'option, 2024. [cours Didier Auroux Octobre-Novembre 2024].

[2] Alberto Barola. Monte carlo methods for american option pricing, 2013. [Online ; accessed 16-February-2013].

[3] Agnes Chaillet. Marché financier, 2024. [Online ; accessed 17-Septembre-2024].

[4] William Gustafsson. Evaluating the longstaff-schwartz method for pricing of american options, 2015. [Online ; accessed 15-July-2015].

[5] John Hull and Patrick Roger. Options, futures et autres actifs dérivés, 2007.

[6] Quintus Zhang. *On Pricing Options with Finite Difference Methods*. 2017. [Online ; accessed 5-May-2017].

[7] Quintus Zhang. *On Pricing Options with Finite Difference Methods*. 2017. [Online ; accessed 5-May-2017].