Méthode de Monte Carlo

Contents

Tout d'abord, on illustre numériquement les deux résultats probabilistes sur lesquels reposent la méthode dite de Monte Carlo:

- la loi forte de grands nombres,
- le théorème central limit (TCL).

On considère ensuite un premier exemple d'estimateur de Monte Carlo et l'importance de l'intervalle de confiance (IC) dans lequel se trouve la valeur recherchée avec probabilité grande (0.95).

Enfin on applique la méthode de Monte Carlo à un exemple multidimensionnel où on illustre l'efficacité de 2 méthodes de réduction de variance:

- variables antithétiques,
- variable de contrôle.

```
import numpy as np
from scipy import stats
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
sns.set_theme()
from numpy.random import default_rng
rng = default_rng()
```

3.1. Illustration de la loi des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d.* de carré intégrable. On définit les suites $(m_n)_{n\geq 1}$ et $(\sigma_n^2)_{n\geq 2}$ (non définie pour $n=1$) de la façon suivante

$$m_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \qquad \text{et} \qquad \sigma_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n (X_k - m_n)^2 \quad \text{pour } n\geq 2$$

et on veut illustrer la Loi Forte des Grands Nombres et le Théorème Central Limite (étendu en utilisant le lemme de Slutsky pour remplacer $\sigma^2 = \mathrm{var}(X_1)$ par l'estimateur σ_n^2) c'est à dire les convergences

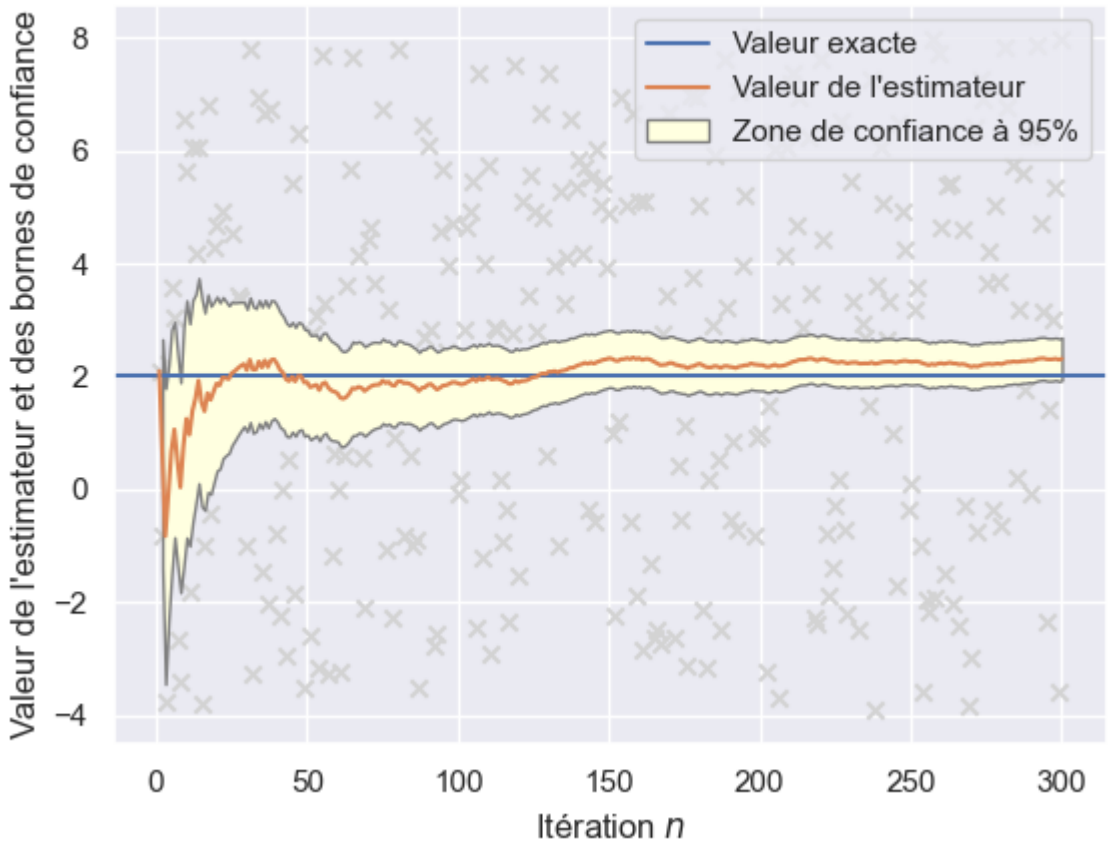
$$m_n \xrightarrow{p.s.} m \qquad \text{et} \qquad \sqrt{n}\Big(\frac{m_n - m}{\sigma_n}\Big) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Plus précisément on construit l'intervalle de confiance (asymptotique) à 95% à partir du TCL c'est à dire

$$\text{pour } n \text{ grand} \quad \mathbf{P}\left(m \in \left[m_n - \frac{1.96\sigma_n}{\sqrt{n}}, m_n + \frac{1.96\sigma_n}{\sqrt{n}}\right]\right) \simeq 0.95$$

3.1.1. Question: LFGN loi uniforme

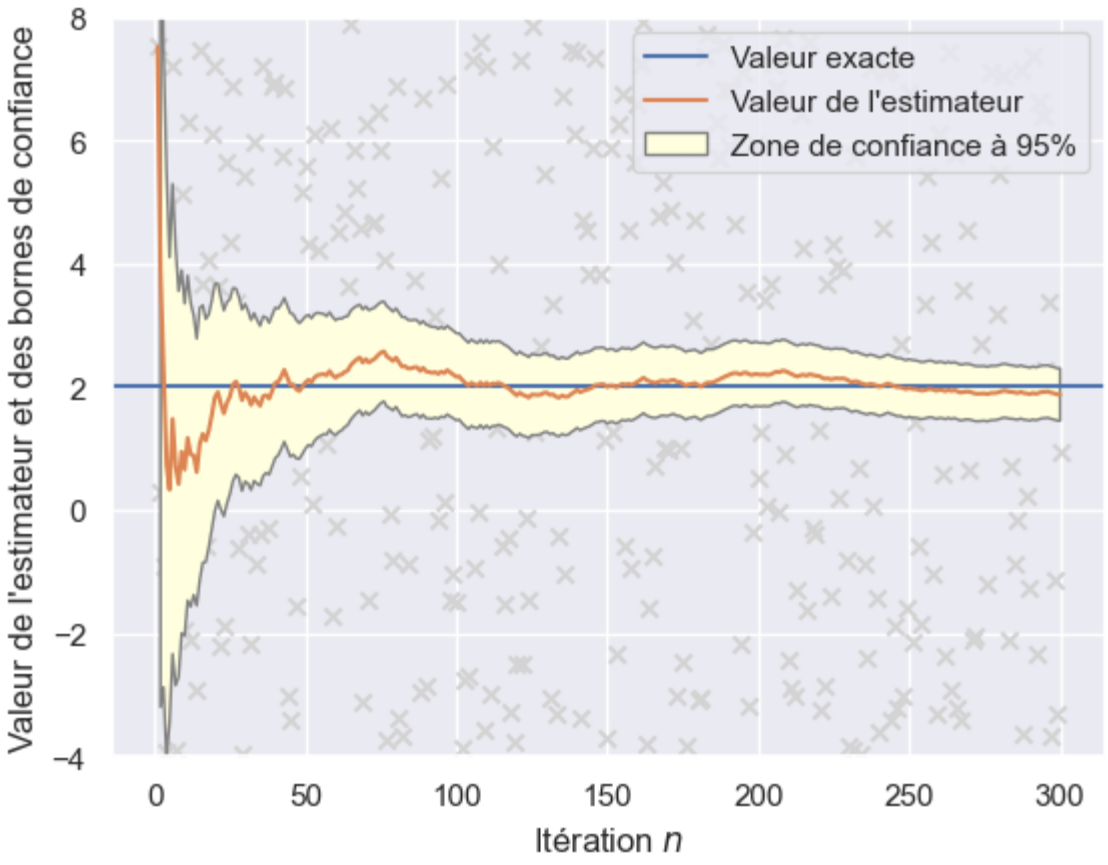
Reproduire le tracé suivant où les points (les croix ‘x’) sont les réalisations X_n (en fonction de n) de loi uniforme sur $[-4, 8]$. La ligne bleue (couleur ‘C0’, première couleur de la palette utilisée) correspond à la moyenne m, la courbe orangée (couleur ‘C1’) correspond à la suite m_n et les lignes grises correspondent aux bornes de l’intervalle de confiance. La zone de confiance en jaune s’obtient par la méthode `fill_between` de `ax`.




```
N = 300
sample = rng.uniform(size = N, low = -4, high = 8)

n = np.arange(1, N+1)
mn = np.cumsum(sample) / n
sum_squares = np.cumsum(sample**2)
# attention: les vecteurs vn, ic, upper et lower sont définis pour n >= 2
vn = (sum_squares - n*mn**2)[1:] / (n[1:]-1)  # on développe le carré
ci_size = 1.96*np.sqrt(vn / n[1:])
upper = mn[1:] + ci_size
lower = mn[1:] - ci_size

fig, ax = plt.subplots()
ax.scatter(n, sample, marker="x", color='lightgrey')
ax.axhline(y=2, color='C0', label="Valeur exacte")
ax.plot(n, mn, color='C1', label="Valeur de l'estimateur")
ax.fill_between(n[1:], lower, upper, facecolor='lightyellow',
                edgecolor='grey', label="Zone de confiance à 95%")
ax.set(xlabel = "Itération $n$",
       ylabel = "Valeur de l'estimateur et des bornes de confiance")
ax.legend(loc='upper right')
ax.set_ylim(-4, 8)
#plt.savefig('img/tcl_unif.png')
plt.show()
```



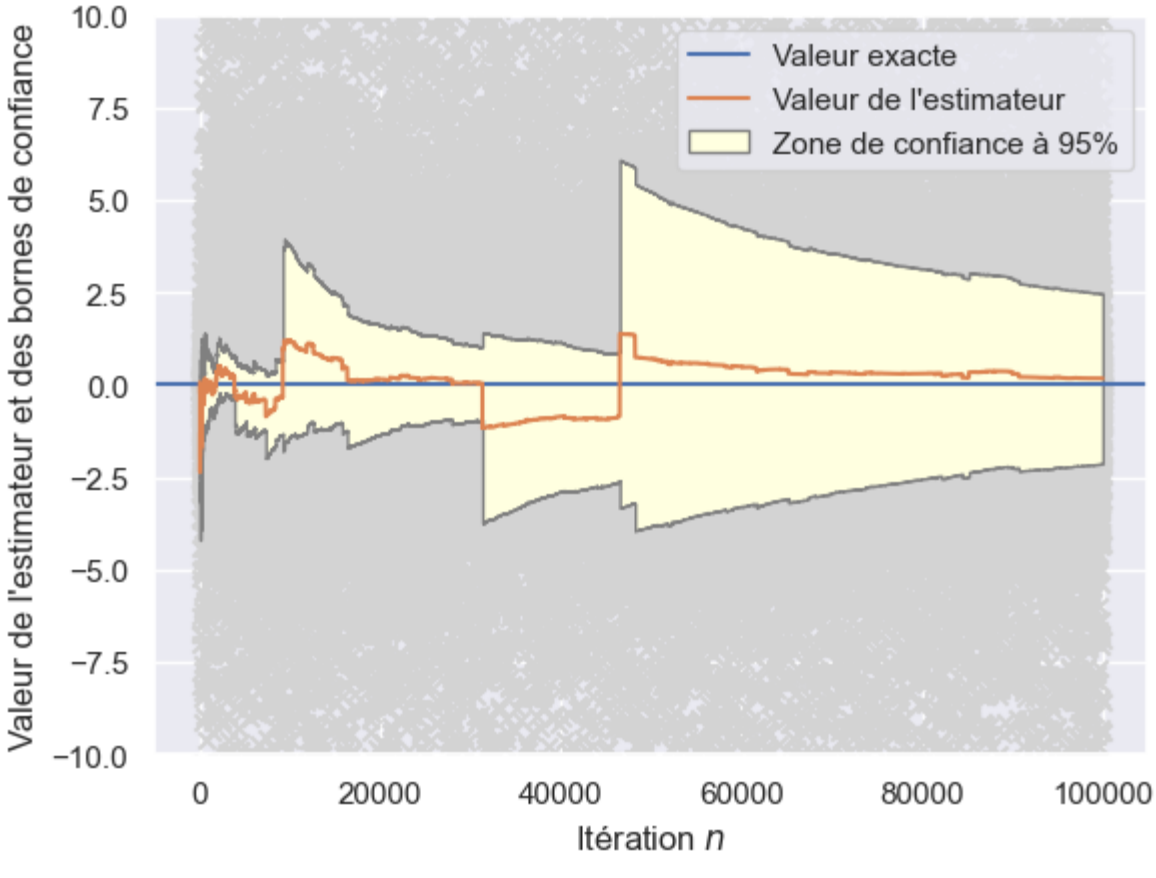
3.1.2. Question: LFGN loi de Cauchy

Reprendre rapidement l'exemple précédent en remplaçant la loi uniforme par la loi de Cauchy. On obtient des réalisations de la loi de Cauchy en utilisant la méthode `standard_cauchy` de l'objet `rng`. Répliquer plusieurs fois le tracé (avec l'axe des ordonnées restreint à $[-10, 10]$) pour différentes valeurs de $n = 100\,000$. Qu'en pensez-vous?

```
N = 100000
sample = rng.standard_cauchy(size = N)

n = np.arange(1, N+1)
mn = np.cumsum(sample) / n
sum_squares = np.cumsum(sample**2)
# attention: les vecteurs vn, ic, upper et lower sont définis pour n >= 2
vn = (sum_squares - n*mn**2)[1:] / (n[1:]-1)
ci_size = 1.96*np.sqrt(vn / n[1:])
upper = mn[1:] + ci_size
lower = mn[1:] - ci_size

fig, ax = plt.subplots()
ax.scatter(n, sample, marker="x", color='lightgrey')
ax.axhline(y=0, color='C0', label="Valeur exacte")
ax.plot(n, mn, color='C1', label="Valeur de l'estimateur")
ax.fill_between(n[1:], lower, upper, facecolor='lightyellow',
                edgecolor='grey', label="Zone de confiance à 95%")
ax.set(xlabel = "Itération $n$",
       ylabel = "Valeur de l'estimateur et des bornes de confiance")
ax.legend(loc='upper right')
ax.set_ylim((-10,10))
plt.show()
```



3.2. Illustration du TCL

On veut illustrer la répartition de l'erreur renormalisée $\varepsilon_n = \sqrt{n}\left(\frac{m_n - m}{\sigma_n}\right)$ pour différentes valeurs de n. Lorsque n est grand cette erreur renormalisée est proche de la loi normale cenrée réduite, c'est ce qu'on veut vérifier numériquement. Pour illustrer cette répartition, il est nécessaire de répliquer un grand nombre de fois l'erreur c'est à dire de considérer un échantillon $\left(\varepsilon_n^{(j)}\right)_{j=1,\dots,M}$ de taille M et de constuire l'histogramme de cet échantillon.

Attention: en pratique il n'est pas nécessaire de répliquer M fois l'estimateur m_n pour approcher m. L'estimateur de la variance v_n suffit pour donner la zone de confiance autour de m_n. C'est une information importante donnée par le TCL.

3.2.1. Question: TCL loi uniforme

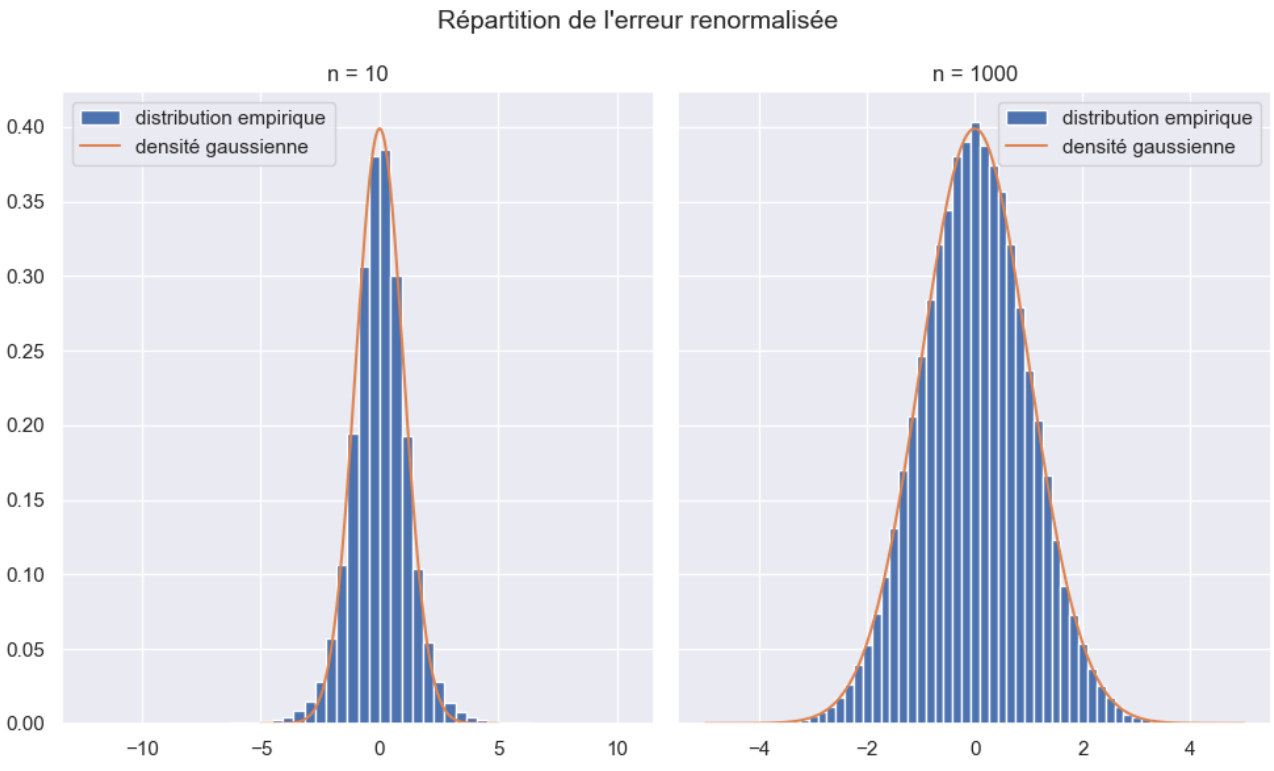
Dans le cas de la loi uniforme sur $[-4, 8]$ vérifier la répartition de l'erreur renormalisée ε_n pour $n = 10$ puis $n = 1\,000$ à partir d'un échantillon de taille $M = 100\,000$.

```
def plot_error(ax, n, M = 100000):
    sample = rng.uniform(size = (M, n), low = -4, high = 8)

    means = np.mean(sample, axis = 1)
    sigms = np.std(sample, axis = 1, ddof=1)
    errs = np.sqrt(n) * (means - 2) / sigms

    ax.hist(errs, bins=50, density=True, label="distribution empirique")
    xx = np.linspace(-5, 5, 10000)
    ax.plot(xx, stats.norm.pdf(xx), label="densité gaussienne")
    ax.set(title = f"n = {n}")
    ax.legend()
    return ax

fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(nrows=1, ncols=2, sharey=True,
                               figsize=(10,6), layout='tight')
fig.suptitle("Répartition de l'erreur renormalisée", fontsize=14)
plot_error(ax1, n=10)
plot_error(ax2, n=1000)
plt.show()
# pour N = 10 la répartition de l'erreur ne semble pas vraiment gaussienne
# pour N = 1000 le comportement semble gaussien
```



3.3. Un premier exemple d'estimateur de Monte Carlo

On va mettre en oeuvre un estimateur de Monte Carlo pour calculer

$$I(\beta) = \mathbf{E}[\exp(\beta G)] \quad \text{où } G \sim \mathcal{N}(0,1) \text{ et } \beta \in \mathbf{R}.$$

La valeur exacte $I(\beta) = \exp(\beta^2/2)$ est connue mais cet exemple permet d'illustrer l'importance des bornes de l'intervalle de confiance (et donc de l'estimation de la variance) dans une méthode de Monte Carlo. La seule valeur moyenne $I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$ n'est pas suffisante pour déterminer I.

3.3.1. Question: fonction `monte_carlo`

Ecrire une fonction `monte_carlo(sample, proba=0.95)` qui à partir d'un échantillon `sample` de réalisation indépendantes $(X_k)_{k=1,\dots,n}$ renvoie un tuple qui contient:

- la moyenne de l'estimateur Monte Carlo de $I = \mathbf{E}[X]$,
- l'estimateur de la variance asymptotique apparaissant dans le TCL,
- les bornes inférieures et supérieures de l'intervale de confiance de niveau de probabilité `proba`.

```
def monte_carlo(sample, proba = 0.95):
    """
    Computes the mean, variance, and a 95% confidence interval of a
    given sample data set using the Monte Carlo method.
    Parameters:
    -----------
    sample : array-like
        The data set to be analyzed
    proba : float, optional
        The probability that the true mean of the population is
        within the calculated interval. Default is 0.95
    Returns:
    --------
    tuple : float
        The mean, variance, lower bound of the 95% CI and upper bound of
the 95% CI
    """
    mean = np.mean(sample)
    var = np.var(sample, ddof=1)
    alpha = 1 - proba
    quantile = stats.norm.ppf(1 - alpha/2)  # fonction quantile
    ci_size = quantile * np.sqrt(var / sample.size)
    return (mean, var, mean - ci_size, mean + ci_size)
```

3.3.2. Question: premier exemple

En utilisant la fonction `monte_carlo`, reproduire le tableau suivant où chaque ligne représente un résultat pour une valeur de $\beta \in \{0.2, 0.5, 1, 2, 3, 5\}$:

- la première colonne est la valeur moyenne I_n,
- la deuxième colonne l'estimateur de la variance,
- les colonnes 3 et 4 sont les bornes inférieures et supérieurs de l'IC à 95%,
- la colonne 5 contient la valeur exacte $\mathbf{E}[\exp(\beta G)] = \exp(\beta^2/2)$.

Ce tableau est obtenu pour $n = 1\,000\,000$. Comment interpréter ce tableau?

```
import pandas as pd
df = pd.read_pickle("data/first_df.pkl")
df
```

	mean	var	low	high	exact
0.2	1.020551	4.245536e-02	1.020147	1.020955	1.020201
0.5	1.134027	3.650418e-01	1.132843	1.135212	1.133148
1.0	1.651060	4.676691e+00	1.646821	1.655298	1.648721
2.0	7.402685	2.379946e+03	7.307068	7.498301	7.389056
3.0	87.915075	8.558333e+06	82.181273	93.648877	90.017131
5.0	121963.825619	6.439313e+14	72228.169429	171699.481809	268337.286521

```
n = int(1e6)
sample = rng.standard_normal(size=n)

betas = [0.2, 0.5, 1, 2, 3, 5]
result = [ monte_carlo(np.exp(beta * sample)) for beta in betas ]

# results est une liste de tuple on peut le convertir en DataFrame
# pour manipuler plus facilement ce résultat
import pandas as pd
res_df = pd.DataFrame(result,
                      columns=["mean", "var", "lower", "upper"],
                      index=betas)
res_df["exact"] = np.exp(0.5 * np.array(betas)**2)
res_df
#res_df.to_pickle("data/first_df.pkl")
```

	mean	var	lower	upper	exact
0.2	1.020449	4.246076e-02	1.020045	1.020853	1.020201
0.5	1.133767	3.647311e-01	1.132583	1.134950	1.133148
1.0	1.650158	4.674698e+00	1.645920	1.654396	1.648721
2.0	7.397714	2.694494e+03	7.295975	7.499453	7.389056
3.0	90.170933	1.213571e+07	83.343134	96.998731	90.017131
5.0	156233.903503	1.136686e+15	90154.150559	222313.656447	268337.286521

3.4. Option panier: un exemple multidimensionnel

On considère $d \geq 2$ actifs financiers dont la loi à l'instant $T > 0$ est modélisée par une loi log-normale c'est à dire

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, \quad S_T^i = S_0^i \exp\Big((r - \frac{\sigma_i^2}{2})T + \sigma_i \sqrt{T} \tilde{G}_i \Big)$$

où le vecteur $(\tilde{G}_1, \dots, \tilde{G}_d)$ est gaussien centré de matrice de covariance Σ et les constantes $r > 0$, $\sigma_i > 0$ sont fixées. Il s'agit d'actifs financiers $(S_t^i)_{t \in [0,T]}$, $1 \leq i \leq d$, modélisés par un processus de Black-Scholes multidimensionnel. On introduit la matrice L

triangulaire inférieure obtenue par la décomposition de Cholesky de la matrice $\Sigma = LL^\top$.

A l'aide de cette matrice L, on définit la fonction $\Phi : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ telle que

$$(S_T^1, \dots, S_T^d) = \Phi(G_1, \dots, G_d) \quad \text{ou encore} \quad S_T^i = \Phi_i(G_1, \dots, G_d)$$

où $(G_1, \dots, G_d) \sim \mathcal{N}(0, I_d)$ (l'égalité précédente est à considérer en loi).

On s'intéresse au prix d'une option européenne (aussi appelé produit dérivé européen) sur le panier de ces d actifs financiers, c'est à dire qu'on veut calculer

$$\mathbf{E}\big[X\big] \quad \text{avec} \quad X = \left(\frac{1}{d}\sum_{i=1}^d S_T^i - K\right)_+.$$

3.4.1. Question: initialisation

Définir les paramètres globaux $d = 10$, $T = 1$, $r = 0.01$, $S_0^i = 100$ (pour tous les actifs), $\sigma_i = i/(2d)$ (on dit que certains actifs sont plus volatiles que d'autres) et la matrice de corrélation Σ définie par $\Sigma_{i,i} = 1$ et $\Sigma_{i,j} = \rho \in [0,1]$ pour $i \neq j$, avec $\rho = 0.2$.

Initialiser la matrice L en utilisant la fonction `np.linalg.cholesky`.

```
d = 10
T = 1
r = 0.01
S0 = np.full(d, 100)
sigma = np.arange(1,d+1)/(2*d)
mu = r - 0.5*sigma**2
rho = 0.2
correl = np.full((d,d), rho) + (1-rho)*np.eye(d) #ou np.diag(np.full(d,
1-rho))
mat_L = np.linalg.cholesky(correl)
```

3.4.2. Question: simulation d'un échantillon d'actifs

Définir la fonction python `phi` qui transforme le vecteur $(G_1, \dots, G_d)$ en un vecteur $(S_T^1, \dots, S_T^d)$ (tous les paramètres sont des variables globales pour simplifier l'écriture du code). L'appel suivant doit fonctionner

```
G = rng.standard_normal(size=d)
phi(G)
```

Si on veut implémenter un estimateur Monte Carlo il faut travailler avec des échantillons *i.i.d.* $(S_T^{(j)})_{j=1,\dots,n}$ où $S_T^{(j)} = \left(S_T^{(j),1}, \dots, S_T^{(j),d}\right) \in \mathbf{R}^d$. Modifier votre fonction `phi` pour création un tel échantillon à partir de l'appel suivant:

```
sample_G = rng.standard_normal(size=(d, n))
phi(sample_G)
```

(il faut utiliser la technique du broadcasting en `numpy`, c'est très important à connaitre en pratique).

```python
# première version
def phi(G):
    ST = S0 * np.exp(mu * T + sigma * np.sqrt(T) * mat_L @ G)
    return ST

G = rng.standard_normal(size=d)
print(phi(G))

# deuxième version pour obtenir un échantillon de taille `n`
def phi(sample_G):
    sample_ST = S0[:,np.newaxis] * np.exp(mu[:,np.newaxis] * T
                + sigma[:,np.newaxis] * np.sqrt(T) * mat_L @ sample_G)
    return sample_ST

n = 1000
sample_G = rng.standard_normal(size=(d, n))
print(phi(sample_G))
```

```
[ 94.78068027 111.09868335 100.40581347  81.4698883   99.45525631
 108.36226962 110.24223677  67.10995504  96.82775996 107.44311904]
[[ 98.93420563 103.80911219  97.33592183 ... 103.17437473 107.22498452
  104.74889772]
 [ 87.77762376 103.64542938  90.64423581 ... 101.21512847  99.44805152
  110.53528694]
 [127.04245257  97.42451489  90.18322917 ... 101.93104835  88.08919661
  115.434578  ]
 ...
 [ 75.55674297  73.35077269  75.89555129 ...  91.7479109  104.16106264
   87.81315011]
 [128.9079054  125.59103806  77.3820851  ... 144.7169963  186.48523248
   84.52155345]
 [ 41.49752544  78.37787563 132.97852743 ... 209.46094775  76.18099819
   93.17984282]]
```

3.4.3. Question: estimateur Monte Carlo

Définir une fonction $\psi : \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ telle que

$$\psi(G_1, \dots, G_d, K) = \left(\frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} \Phi_i(G_1, \dots, G_d) - K \right)_+$$

dans une fonction `python` appelée `psi`. Cette fonction doit fonctionner avec un échantillon $(G_1^{(j)}, \dots, G_d^{(j)})_{j=1,\dots,n}$.
Ecrire et programmer l'estimateur de Monte Carlo pour estimer la quantité $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\psi(G_1, \dots, G_d, K)]$ où $(G_1, \dots, G_d) \sim \mathcal{N}(0, I_d)$.

Pour différentes valeur de $K \in \{80, 90, 100, 110, 120\}$ et $n = 100\,000$ vous devez obtenir le tableau suivant:

```python
df = pd.read_pickle("data/basket_mc.pkl")
df
```

	mean	var	lower	upper
80	21.394471	228.318772	21.300818	21.488123
90	12.860460	181.187947	12.777032	12.943889
100	6.655165	111.553749	6.589702	6.720627
110	2.998650	54.132985	2.953049	3.044252
120	1.204158	21.976278	1.175102	1.233213

```
def psi(sample_G, K):
    return np.maximum(phi(sample_G).mean(axis=0) - K, 0)

n = int(1e5)
sample_G = rng.standard_normal(size=(d, n))
Ks = [80, 90, 100, 110, 120]
result = [ monte_carlo(psi(sample_G, K)) for K in Ks ]

df_mc = pd.DataFrame(result,
                         columns=['mean', 'var', 'lower', 'upper'],
                         index=Ks)
df_mc
#df_mc.to_pickle('data/basket_mc.pkl')
```

	mean	var	lower	upper
80	21.325224	228.568035	21.231520	21.418927
90	12.795286	181.494175	12.711787	12.878785
100	6.606173	112.056281	6.540563	6.671782
110	2.981446	54.798182	2.935566	3.027327
120	1.211414	22.608017	1.181944	1.240884

3.4.4. Question: variables antithétiques

Sur le même modèle que précédemment, implémenter la méthode de Monte Carlo avec réduction de variance par variables antithétiques c'est à dire basée sur la représentation:

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}\Big[\frac{1}{2}\big(\psi(G_1,\dots,G_d,K) + \psi(-G_1,\dots,-G_d,K)\big)\Big]$$

Calculer le ratio de variance (variance de la méthode naïve divisée par variance par variables antithétiques) pour les différentes valeurs de K.
Que signifie ce ratio de variance?

```
sample_G = rng.standard_normal(size=(d, n))
Ks = [80, 90, 100, 110, 120]
result = []
for K in Ks:
    sample = 0.5 * (psi(sample_G, K) + psi(-sample_G, K))
    result.append(monte_carlo(sample))

df_antith = pd.DataFrame(result,
                         columns=['mean', 'var', 'lower', 'upper'],
                         index=Ks)
df_antith
```

	mean	var	lower	upper
80	21.293504	14.338436	21.270035	21.316973
90	12.762130	26.053563	12.730494	12.793766
100	6.576762	34.219807	6.540506	6.613019
110	2.957386	22.829444	2.927772	2.987000
120	1.195756	10.542417	1.175632	1.215880

```
# le ratio des variances pour les différentes valeurs de K
df_mc["var"] / df_antith["var"]
```

```
80     15.940932
90      6.966194
100     3.274603
110     2.400329
120     2.144481
Name: var, dtype: float64
```

3.5. Option panier: une variable de contrôle

Dans le cas de la dimension 1 ($d = 1$), le prix est donnée par une formule fermée, on appelle cette formule la formule de Black-Scholes. Pour une option Basket (en dimension $d \geq 2$) on approche le prix par Monte Carlo mais on peut utiliser des approximations pour construire un problème unidimensionnel proche du produit Basket. Ces approximations servent de variables de contrôles: **on ne rajoute pas une erreur, on retire de la variance**.

On rappelle que, en posant $\mu_i = r - \frac{1}{2}\sigma_i^2$,

$$X = \left(\frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} S_0^i e^{\mu_i T + \sigma_i \sqrt{T} G_i} - K \right)_+$$

et en introduisant $a_0^i = \frac{S_0^i}{\sum_{j=1}^d S_0^j}$ (t.q. $\sum a_0^i = 1$) et $\bar{S}_0 = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^d S_0^i$ on a

$$X = \left(\bar{S}_0 \sum_{i=1}^{d} a_0^i e^{\mu_i T + \sigma_i \sqrt{T} G_i} - K \right)_+ .$$

La variable de contrôle proposée est obtenue en échangeant l'exponentielle et la moyenne pondérée par les poids $\left(a_0^i\right)_{i=1,\dots,d}$:

$$Y = \left(\bar{S}_0 e^{Z} - K \right)_+ \quad \text{avec} \quad Z = \sum_{i=1}^{d} a_0^i \left(\mu_i T + \sigma_i \sqrt{T} G_i \right)$$

La variable aléatoire Z suit une loi gaussienne $Z \sim \mathcal{N}(mT, s^2 T)$ avec

$$m = \sum_{i=1}^{d} a_0^i \mu_i \quad \text{et} \quad s^2 = \sum_{i=1}^{d} \Big(\sum_{j=1}^{d} a_0^i \sigma_i L_{ij} \Big)^2 .$$

Ainsi l'espérance de la variable de contrôle Y est connue par la formule de Black-Scholes, car elle correspond au prix d'un call de strike K d'un actif Black-Scholes de dimension 1, de valeur initiale $\bar{S}_0$, de taux $\rho = m + \frac{1}{2}s^2$ et de volatilité s (à un facteur d'actualisation près… attention à ça). On a donc

$$e^{-\rho T} \mathbf{E}\big[Y\big] = P_{\mathrm{BS}}\big(\bar{S}_0, \rho, s, T, K\big),$$

où

$$P_{\mathrm{BS}}\big(x, r, \sigma, T, K\big) = x F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_1) - K e^{-rT} F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_2),$$

avec $F_{\mathcal{N}(0,1)}$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et la notation

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \Big(\log\big(\frac{x}{K}\big) + \big(r + \frac{\sigma^2}{2}\big)T \Big) \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

3.5.1. Question: préliminaires pour la variable de contrôle

- Définir la fonction `price_call_BS` qui code la fonction $P_{\mathrm{BS}}\big(x, r, \sigma, T, K\big)$ définie ci-dessus.
- Initialiser les paramètres $\bar{S}_0$, $(a_0^i)_{i=1,\dots,d}$, m, s^2 et ρ.
- Calculer $\mathbf{E}[Y]$ par la formule fermée.
- Calculer $\mathbf{E}[Y]$ par un estimateur Monte Carlo à partir de réalisations de $(G_1^{(j)}, \dots, G_d^{(j)})$, $j \in \{1, \dots, n\}$.
- Vérifier que tout est cohérent.

```
def price_call_BS(x, r, sigma, T, K):
    d1 = (np.log(x / K) + T * (r + 0.5*sigma**2)) / (sigma * np.sqrt(T))
    d2 = d1 - sigma * np.sqrt(T)
    return x * stats.norm.cdf(d1) - K * np.exp(-r * T) *
stats.norm.cdf(d2)
```

```
barS0 = S0.mean()
a = S0 / S0.sum()
m = (a * (r - 0.5*sigma**2)).sum()
s2 = (((a * sigma).T @ mat_L)**2).sum()
rho = m + 0.5*s2
```

```
# calcul par formule fermée
Y_mean = np.exp(rho*T) * price_call_BS(barS0, rho, np.sqrt(s2), T=T, K=K)
print("True value:", Y_mean)
```

```
True value: 0.6195106600831698
```



```
# calcul par Monte Carlo
n = int(1e5)
sample_G = rng.standard_normal(size=(d, n))
Z = np.sum(a[:,None] * (m*T + sigma[:,None] * np.sqrt(T) * mat_L @
sample_G),
           axis = 0)
Y = np.maximum(S0.mean() * np.exp(Z) - K, 0)
monte_carlo(Y)
```

```
(0.6232438358420213, 9.587197354467754, 0.604052998485862,
0.6424346731981805)
```

3.5.2. Question: MC avec variable de contrôle

Implémenter l'estimateur de Monte Carlo avec variable de contrôle pour le calcul de $\mathbf{E}[X]$ c'est à dire

$$\mathbf{E}\big[X\big] = \mathbf{E}\big[\psi(G_1, \dots, G_d, K) - (Y - \mathbf{E}[Y])\big],$$

où Y est la variable de contrôle introduite précédemment et $\mathbf{E}[Y]$ est calculée par la formule fermée.
Comparer les ratios de variance pour les différentes valeurs de K.

```
Ks = [80, 90, 100, 110, 120]
result = []
for K in Ks:
    Z = np.sum(a[:,None] * (m*T +
sigma[:,None]*np.sqrt(T)*mat_L@sample_G),
               axis = 0)
    Y = np.maximum(S0.mean() * np.exp(Z) - K, 0)
    Y_mean = np.exp(rho*T) * price_call_BS(barS0, rho, np.sqrt(s2), T=T,
K=K)
    control_variate = Y - Y_mean
    sample = psi(sample_G, K) - control_variate
    result.append(monte_carlo(sample))

df_cv = pd.DataFrame(result,
                     columns=['mean', 'var', 'lower', 'upper'],
                     index=Ks)
df_cv
```

	mean	var	lower	upper
80	21.302451	6.532928	21.286609	21.318293
90	12.770974	7.742002	12.753729	12.788220
100	6.591711	8.022600	6.574156	6.609266
110	2.968084	6.634222	2.952120	2.984048
120	1.201935	4.489234	1.188803	1.215068

```
# le ratio des variances pour les différentes valeurs de K
df_mc["var"] / df_cv["var"]
```

```
80     34.987074
90     23.442796
100    13.967577
110     8.259926
120     5.036052
Name: var, dtype: float64
```