Colles - Semaine 6

Exercice 1
N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Un joueur lance une pièce équilibrée indéfiniment. On note X_N la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de fois où, au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs ont été différents. On peut appeler X_N le « nombre de changements » au cours de N premiers lancers.
Par exemple, si les $N = 9$ premiers lancers ont donné successivement :
Pile, Pile, Face, Pile, Face, Face, Face, Pile, Pile,
alors la v.a.r. X_9 aura pris la valeur 4 (quatre changements aux $3^{\text{ème}}$, $4^{\text{ème}}$, $5^{\text{ème}}$ et $8^{\text{ème}}$ lancers).

1. Justifier que $X_N(\Omega) = [\![0, N-1]\!]$.

2. Déterminer la loi de X_2, ainsi que son espérance. Déterminer la loi de X_3.

3. Montrer que $\mathbb{P}([X_N = 0]) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{N-1}$ et $\mathbb{P}([X_N = 1]) = 2(N-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{N}$

4. ***a)*** Justifier que pour tout entier $k \in [\![0, N-1]\!]$, $\mathbb{P}_{[X_N=k]}([X_{N+1} = k]) = \dfrac{1}{2}$.

b) En déduire que pour tout entier $k \in [\![0, N-1]\!]$, $\mathbb{P}\left([X_{N+1} - X_N = 0] \cap [X_N = k]\right) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}([X_N = k])$.

c) En sommant cette relation pour k variant de 0 à $N-1$, montrer que $\mathbb{P}\left([X_{N+1} - X_N = 0]\right) = \dfrac{1}{2}$.

d) Montrer que la variable $X_{N+1} - X_N$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$
En déduire la relation $\mathbb{E}(X_{N+1}) = \dfrac{1}{2} + \mathbb{E}(X_N)$, puis donner $\mathbb{E}(X_N)$ en fonction de N.

5. ***a)*** Montrer grâce aux résultats ***4.b)*** et ***4.c)*** que les variables $X_{N+1} - X_N$ et X_N sont indépendantes.

b) En déduire par récurrence sur N que X_N suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(N-1, \frac{1}{2}\right)$.
En déduire la variance $\mathbb{V}(X_N)$.

Exercice 2
Trois personnes a_1, a_2, a_3 entrent à l'instant 0 dans un bureau de poste qui ne comporte que deux guichets. Les personnes a_1 et a_2 peuvent être servies immédiatement alors que a_3 doit attendre qu'un guichet soit libéré pour être servie. On supposera que le temps est mesuré par des nombres entiers avec une unité fixée.
Soit $p \in]0, 1[$. On suppose que pour $i \in \{1, 2, 3\}$ le temps de service de la personne a_i est une variable aléatoire X_i dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_i = k]) = (1-p).p^k$$

On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes.
On désigne par Y l'instant de première sortie (celle de a_1 ou a_2) qui est aussi l'instant où a_3 commence à se faire servir. Enfin, Z désigne l'instant de sortie de a_3.

1. Exprimer l'événement $[Y \geqslant k]$ à l'aide des variables aléatoires X_1 et X_2.
Calculer pour tout entier $k \geqslant 0$, le nombre $\mathbb{P}([Y \geqslant k])$. Déterminer alors la loi de Y.

2. Exprimer Z en fonction de Y et X_3. Déterminer la loi de Z.

3. Calculer le temps moyen passé par a_3 à la poste.

Exercice 3

On considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par P_n l'événement « Pile apparaît au $n$ème lancer » et par F_n l'événement « Face apparaît au $n$ème lancer ».

Soit Y la v.a. désignant le rang du lancer où, pour la première fois, apparaît un Face précédé d'au moins deux Pile si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si cette configuration n'apparaît jamais.

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

On pose $c_1 = c_2 = 0$ et pour tout $n \geqslant 3$, $c_n = \mathbb{P}([Y = n])$. On note également :

$$\forall n \geqslant 3,\ B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n \quad \text{et} \quad U_n = \bigcup_{i=3}^{n} B_i$$

On pose enfin $u_1 = u_2 = 0$ et pour tout $n \geqslant 3$, $u_n = \mathbb{P}(U_n)$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$ est monotone et convergente.

2. ***a)*** Pour tout $n \geqslant 3$, calculer $\mathbb{P}(B_n)$.

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, les événements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.

c) Calculer les valeurs de u_3, u_4 et u_5.

3. Dans cette question, on suppose $n \geqslant 5$.

a) Comparer les événements $U_n \cap B_{n+1}$ et $U_{n-2} \cap B_{n+1}$. Préciser leurs probabilités respectives.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

d) Calculer $\mathbb{P}([Y = 0])$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = 1 - u_n$.

a) Trouver $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \beta v_{n+2} + \gamma v_{n+3}$.

b) Montrer que la série de terme général v_n est convergente et calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.