K
Mathématiques

Colles - Semaine 2

Planche 1

Question de cours

Espérance d'une v.a.r. suivant une loi géométrique

Exercice

Soit $n \geqslant 2$ un entier et $p \in]0,1[$. On considère une pièce $\mathcal{P}_1$ qui, après avoir été lancée, atterrit sur pile avec probabilité p et sur face avec probabilité $1-p$. Soit $1 \leqslant k \leqslant n-1$ un entier.

1. Quelle est la probabilité que la pièce atterrisse k fois sur pile (et donc $n-k$ fois sur face) après avoir fait n lancers (indépendants) ?

2. On lance maintenant la pièce jusqu'à ce qu'elle ait atterri k fois sur pile. Quelle est la probabilité qu'on ait dû le faire exactement n fois ?

3. Soient B_1, …, B_m des événements de probabilité non nulle, deux à deux disjoints, et telle que leur union soit égale à l'univers. Montrer que tout événement A de probabilité non nulle vérifie :

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant m, \qquad \mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{m} \mathbb{P}(A|B_j)\,\mathbb{P}(B_j)}$$

On considère maintenant une nouvelle pièce $\mathcal{P}_2$ qui atterrit sur pile avec probabilité $\frac{1}{2}$ et sur face avec probabilité $\frac{1}{2}$. On choisit au hasard soit la première pièce $\mathcal{P}_1$ soit la nouvelle pièce $\mathcal{P}_2$ (avec égales probabilités).

4. On lance la pièce choisie n fois. Sachant que la pièce a atterri k fois sur pile, quelle est la probabilité que la pièce choisie soit la première pièce ?

5. On lance la pièce choisie jusqu'à ce qu'elle ait atterri k fois sur pile. Sachant qu'on a dû effectuer n lancers pour cela, quelle est la probabilité que la pièce choisie soit la première pièce ?

Planche 2

Question de cours

Espérance d'une v.a.r. suivant une loi de Poisson

Exercice

Chaque nuit, le prince choisit au hasard de dormir sur 6, 7 ou bien 8 matelas (avec des probabilités égales). Chaque nuit, indépendamment, la princesse place sous les matelas un petit pois avec probabilité $\frac{1}{2}$. Par ailleurs :

- si le prince dort sur 6 matelas et qu'un petit pois se trouve en-dessous, celui-ci dort mal ;
- si le prince dort sur 7 matelas et qu'un petit pois se trouve en-dessous, celui-ci dort bien avec probabilité $\frac{1}{5}$ (sinon il dort mal) ;
- si le prince dort sur 8 matelas et qu'un petit pois se trouve en-dessous, celui-ci dort bien avec probabilité $\frac{2}{5}$ (sinon il dort mal).

(s'il n'y a pas de petit pois, le prince dort toujours bien)

1. Soient B_1, ..., B_n des événements de probabilités non nulles, deux à deux disjointes, et telle que leur union soit égale à l'univers. Montrer que tout événement A vérifie :

$$\mathbb{P}(A) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)$$

2. Quelle est la probabilité que le prince annonce avoir bien dormi au réveil ?

3. Si A et B sont deux événements de probabilité non nulles, montrer que :

$$\mathbb{P}(A|B) \;=\; \mathbb{P}(B|A)\,\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

4. Sachant que le prince a bien dormi, quelle est la probabilité qu'il ait dormi sur 7 matelas ?

5. Le matin du 17 juin, le prince annonce avoir bien dormi. Sur combien de matelas a-t-il dormi en moyenne ?

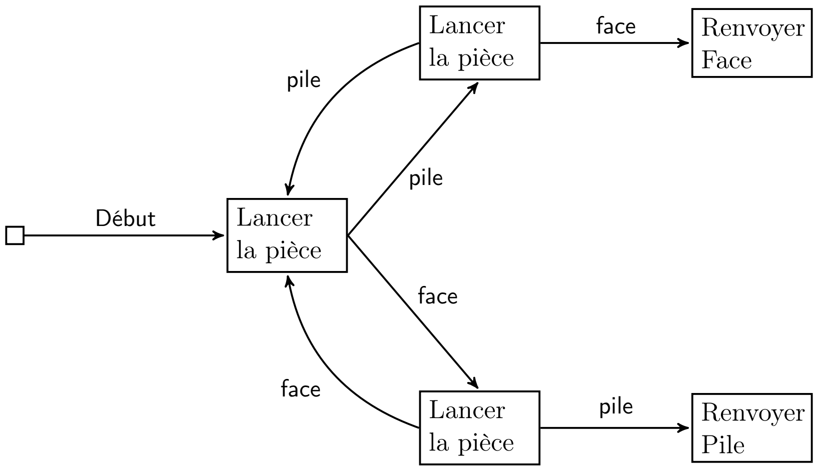
Planche 3

Question de cours

Stabilité de la somme pour la loi de Poisson en cas d'indépendance

Exercice

On dispose d'une pièce truquée qui renvoie « pile » avec une probabilité $p \in]0,1[$ et on souhaite s'en servir pour générer un pile ou face équilibré. John von Neumann a imaginé l'algorithme suivant (où les lancers successifs de la pièce truquée se font indépendamment) :



On note $T \in \{2, 4, 6, \ldots\}$ la variable aléatoire donnée par le nombre de lancers nécessaires pour que l'alorithme se termine, et $R \in \{P, F\}$ le résultat de l'algorithme (où on note P pour « pile » et F pour « face »).

1. Que valent T et R si on obtient comme premiers tirages $PPPPFFPPPFFP$?

2. Démontrer que pour tout $k \geqslant 1$:

$$\mathbb{P}([T = 2k]) \;=\; \big(p^2 + (1-p)^2\big)^{k-1}\, 2\, p\, (1-p)$$

En déduire que l'algorithme se termine presque-sûrement, c'est-à-dre : $\mathbb{P}([T < +\infty]) = 1$.

3. Démontrer que l'algorithme renvoie bien « pile » ou « face » avec même probabilité, c'est-à-dire : $\mathbb{P}([R = \text{« pile »}]) = \dfrac{1}{2}$.

4. Calculer $\mathbb{E}(T)$.