

Colles - Semaine 4

Planche 1

Question de cours

Unicité du développement limité

Exercice

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction polynomiale P_n sur \mathbb{R} par :

$$P_n(x) = (x-1)(2-x) + \frac{x^3}{n}$$

1. Montrer que pour n suffisamment grand, P_n admet deux extrema locaux, aux points $r_{1,n} \leq r_{2,n}$ avec $r_{1,n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et $r_{2,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \gamma n$ pour deux réels ℓ et γ à préciser.
2. Montrer que pour n suffisamment grand, P_n admet trois racines distinctes notées $a_n < b_n < c_n$.
3. Montrer que la suite (a_n) ainsi définie est croissante, de limite α à préciser.
4. En déduire le développement limité :

$$a_n = \alpha + \frac{\beta}{n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right)$$

pour un réel β à préciser.

Planche 2

Question de cours

Formule du développement limité de $\frac{1}{1-x}$

Exercice

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^{1+\frac{1}{x}} = e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. a) Montrer que f est continue en 0.
b) Étudier la dérivabilité de f en 0.
2. a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif : $\ln(x) \leq x + 1$.
b) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et déterminer son signe.
Préciser le sens de variation de f .
3. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b) Déterminer un équivalent de $f(x) - x$ en $+\infty$.
En déduire la nature de la branche infinie de \mathcal{C} en $+\infty$.
4. On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- a) Montrer que la suite (u_n) est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
- b) Que dire de la suite (u_n) si $u_0 = 0$?
- c) On se place maintenant dans le cas : $u_0 = \frac{1}{2}$.
 - (i) Déterminer la monotonie de (u_n) .
 - (ii) Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Planche 3

Question de cours

Soit P une fonction polynomiale.

a est racine de P si et seulement si $P(a) = 0$

Exercice

Soient $a > 0$ et $\beta > 1$. On considère une fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ qui peut s'écrire comme suit au voisinage de 0 :

$$f(x) = x - ax^\beta + o_{x \rightarrow 0}(x^\beta)$$

On fixe $u_0 \in [0, 1]$, et on considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Que vaut $f(0)$? Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que $f(x) < x$ sur $]0, \eta]$. En déduire que si u_0 est suffisamment petit, (u_n) converge vers 0.

Dans la suite, on suppose que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

2. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$. Donner un équivalent de $(f(x))^\gamma - x^\gamma$ lorsque x tend vers 0. En déduire une valeur de γ pour laquelle la suite $u_{n+1}^\gamma - u_n^\gamma$ converge vers un réel strictement positif.

3. Soit $(v_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels tels que $v_{n+1} - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{v_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

4. En déduire un équivalente de (u_n) .