EML 2015

Exercice 1

Dans tout l'exercice, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires considérées seront supposées définies sur cet espace.

Partie I : Loi exponentielle

Dans toute cette partie, λ désigne un réel strictement positif.

1. Donner une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

Démonstration.
Soit X une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

$$\boxed{\text{Alors la fonction } f_X : x \mapsto \left\{\begin{array}{cl} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{array}\right. \text{ est une densité de } X.}$$

$$\boxed{\text{La fonction de répartition de } X \text{ est la fonction } F_X : x \mapsto \left\{\begin{array}{cl} 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{array}\right. .}$$

$$\boxed{\text{Enfin, } X \text{ admet une espérance et une variance données par : } \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.}$$ □

2. Justifier que les intégrales suivantes convergent et donner leurs valeurs :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\ dx, \quad \int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\ dx$$

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\ dx \ = \ \int_0^{+\infty} f_X(x)\ dx$$
car f_X est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.
La fonction f_X étant une densité de probabilité, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_X(x)\ dx$ est convergente. Il en est de même de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\ dx$ car on ne change pas la nature d'une intégrale impropre en multipliant son intégrande par un réel non nul.
- On en déduit alors :
$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\ dx &= \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\ dx \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\ dx \quad \textit{(par définition de } f_X\textit{)} \\ &= \frac{1}{\lambda} \times 1 \quad \textit{(car } f_X \textit{ est une densité)} \end{aligned}$$
$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\ dx = \frac{1}{\lambda}}$$

- En raisonnant de même, on démontre que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx$ est convergente car X admet une espérance.
- De plus :

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_0^{+\infty} x\,e^{-\lambda\,x}\,dx & = & \displaystyle\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} x\,\lambda\,e^{-\lambda\,x}\,dx & \\ & = & \displaystyle\frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_X(x)\,dx & \textit{(par définition de } f_X\textit{)} \\ & = & \displaystyle\frac{1}{\lambda}\times\mathbb{E}(X) \;=\; \frac{1}{\lambda}\times\frac{1}{\lambda} \;=\; \frac{1}{\lambda^2} & \end{array}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x\,e^{-\lambda\,x}\,dx = \frac{1}{\lambda^2}}$$

□

3. a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.
Quelle est la loi de la variable aléatoire $V = -\frac{1}{\lambda}\,\ln(1-U)$?

Démonstration.

- Notons $g : x \mapsto -\frac{1}{\lambda}\,\ln(1-x)$. Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} V(\Omega) & = & \big(g(U)\big)\,(\Omega) \\ & = & g\,\big(U(\Omega)\big) \\ & = & g\,\big([0,1[\big) \end{array}$$

Or, comme g est continue et strictement croissante sur $[0,1[$:

$$g\,\big([0,1[\big) = \;[g(0), \lim_{x\to 1} g(x)[\; = \;[0,+\infty[$$

En effet :
× $g(0) = -\frac{1}{\lambda}\,\ln(1) = 0$.
× $\displaystyle\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}\; -\frac{1}{\lambda}\,\ln(1-x) = +\infty$ car $\displaystyle\lim_{x\to 1}\,\ln(1-x) = -\infty$.

$$\boxed{V(\Omega) \;=\; [0,+\infty[}$$

- Déterminons la fonction de répartition de V.
Soit $x\in\mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
× Si $x<0$, alors $[V\leqslant x] = \varnothing$ car $V(\Omega) = [0,+\infty[$. Donc :

$$F_V(x) = \mathbb{P}([V\leqslant X]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

× Si $x\geqslant 0$.

$$\begin{array}{rcll} F_V(x) & = & \mathbb{P}([V\leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)\leqslant x\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}([\ln(1-U)\geqslant -\lambda x]) & \textit{(car } -\lambda<0\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[1-U\geqslant e^{-\lambda x}\right]\right) & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[U\leqslant 1-e^{-\lambda x}\right]\right) & \\ & = & F_U\left(1-e^{-\lambda x}\right) & \\ & = & 1-e^{-\lambda x} & \textit{(car } 1-e^{-\lambda x}\in[0,1[\textit{)} \end{array}$$

La dernière égalité est justifié par les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcll} 0 \leqslant x < +\infty & \Leftrightarrow & 0 \geqslant -\lambda x > -\infty & \textit{(car } -\lambda < 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 1 = \mathrm{e}^0 \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda x} > 0 & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 0 \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} < 1 & \end{array}$$

- Finalement :

$$F_V : x \mapsto \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ.

Or la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r. , donc $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Commentaire

- Cette question est un cas particulier de la question classique consistant à déterminer la loi de la transformée d'une v.a.r. à densité. Il est essentiel de maîtriser la méthodologie de résolution.
- Ici, on est dans un cas encore plus classique puisque la v.a.r. à densité de départ U suit une loi uniforme sur $[0,1[$. On illustre ici la méthode d'inversion : on obtient une v.a.r. V qui suit une loi particulière ($V \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$) en écrivant V comme transformée d'une v.a.r. U qui suit la loi uniforme sur $[0,1[$. Ce type de question est fréquent dans les sujets. Et est généralement suivi, comme c'est le cas dans cet énoncé, d'une question de simulation informatique.
  Finalement, la Partie I de cet exercice est constituée en intégralité de questions de cours.

□

b) Écrire une fonction en **Scilab** qui, étant donné un réel λ strictement positif, simule la loi exponentielle de paramètre λ.

Démonstration.

```
function v = simuExp(lambda)
    u = rand()
    v = -(1/lambda) * log(1-u)
endfunction
```

□

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $T_n = \max(X_1, ..., X_n)$ qui, à tout ω de Ω, associe le plus grand des réels $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ et on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f_n(x) = \begin{cases} n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Partie II : Loi de la variable aléatoire T_n

4. a) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, la probabilité $\mathbb{P}([T_n \leqslant x])$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- Tout d'abord :

$$[T_n \leqslant x] = [\max(X_1, \ldots, X_n) \leqslant x] = [X_1 \leqslant x] \cap \cdots \cap [X_n \leqslant x] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]\right) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i \leqslant x]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \textit{ ont même loi)} \\ & = & \big(\mathbb{P}([X_1 \leqslant x])\big)^n & \\ & = & \big(1 - \mathrm{e}^{-x}\big)^n & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \textit{ et } x \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = (1 - \mathrm{e}^{-x})^n}$$

□

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, T_n est une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction f_n.

Démonstration.

- Par définition : $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.
  Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i(\Omega) = [0, +\infty[$ car $X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } T_n(\Omega) \subset [0, +\infty[.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  × Si $x \leqslant 0$, alors $[T_n \leqslant x] = \varnothing$ car $T_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$. Ainsi :

$$F_{T_n}(x) = \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  × Si $x > 0$. D'après la question ***4.a)*** :

$$F_{T_n}(x) = \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = \big(1 - \mathrm{e}^{-x}\big)^n$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_{T_n} : x \mapsto \left\{\begin{array}{cl} (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{array}\right. .}$$

- Montrons que F_{T_n} est continue sur $\mathbb{R}$.
  - La fonction F_{T_n} est continue sur $]0, +\infty[$ en tant que composée $g_2 \circ g_1$ de :
    × $g_1 : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-x}$ continue sur $]0, +\infty[$
    et $g_1(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$,
    × $g_2 : y \mapsto y^n$ continue sur $\mathbb{R}$.
  - La fonction F_{T_n} est continue sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante.
  - On remarque :

$$\lim_{x \to 0^+} F_{T_n}(x) = \big(1 - \mathrm{e}^{-0}\big)^n = 0 = F_{T_n}(0) = \lim_{x \to 0^-} F_{T_n}(x)$$

  Donc F_{T_n} est continue en 0.

$$\boxed{\text{La fonction } F_{T_n} \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

- Avec le même raisonnement que précédemment, on montre que F_{T_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } T_n \text{ est une variable à densité.}}$$

- Pour déteminer une densité de T_n, on dérive F_{T_n} sur des intervalles ouverts.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  × Si $x \in]-\infty, 0[$.
  $$f_{T_n}(x) = F_n'(x) = 0 = f_n(x)$$
  × Si $x \in]0, +\infty[$.
  $$f_{T_n}(x) = F_n'(x) = n\,\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} = f_n(x)$$
  × On choisit $f_{T_n}(0) = 0 = f_n(0)$.

$$\boxed{\text{La fonction } f_n \text{ est bien une densité de } T_n.}$$ □

5. a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire T_n admet une espérance.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La v.a.r. T_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_n(x)\;dx$ converge absolument, ce qui équivaut à démontrer sa convergence pour des calculs de moments.
- Tout d'abord :
  $$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_n(x)\;dx = \int_0^{+\infty} x\,f_n(x)\;dx$$
  car f_n est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.
- La fonction $x \mapsto x\,f_n(x)$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[0, +\infty[$.
- × Tout d'abord : $x\,f_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
  En effet, pour tout $x > 0$:
  $$\frac{x\,f_n(x)}{\frac{1}{x^2}} = x^2\,x\,n\,\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} = n\,x^3\,\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1}$$
  Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$. Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} = 1$.
  De plus, par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\mathrm{e}^{-x} = 0$.
  Finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\,f_n(x)}{\frac{1}{x^2}} = 0$, *i.e.* : $x\,f_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
  × $\forall x \in [1, +\infty[$, $x\,f_n(x) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$
  × L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\;dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 2 ($2 > 1$), donc elle converge.

  D'après le critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\,f_n(x)\;dx$ converge.
- De plus, la fonction $x \mapsto x\,f_n(x)$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\,f_n(x)\,dx$ est bien définie.

Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,f_n(x)\;dx$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ la v.a.r. } T_n \text{ admet une espérance.}}$$ □

b) Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(T_1)$ de T_1 et l'espérance $\mathbb{E}(T_2)$ de T_2.

Démonstration.

- On remarque que : $T_1 = \max(X_1) = X_1$.

$$\boxed{\text{Donc, d'après la question } \textbf{\textit{1.}} : \mathbb{E}(T_1) = 1.}$$

- D'après la question ***2.*** les intégrales impropres $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,dx$ converge.
  On peut donc effectuer le calcul suivant :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(T_2) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_2(x)\, dx \;=\; \int_0^{+\infty} 2x\,\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})\, dx & \\
& = & 2\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\, dx - 2\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-2x}\, dx & \textit{(par linéarité de l'intégration)} \\
& = & 2\times\dfrac{1}{1^2} - 2\times\dfrac{1}{2^2} & \textit{(d'après le résultat de la question 2.)} \\
& = & \dfrac{3}{2} &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T_2) = \frac{3}{2}}$$

□

6. a) Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\dfrac{1}{n+1} f'_{n+1}(x)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.
  On obtient alors, pour tout $x > 0$:

$$\begin{array}{rcl}
f'_n(x) & = & -n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} + n(n-1)\mathrm{e}^{-2x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-2} \\
& = & n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-2}(-(1-\mathrm{e}^{-x}) + (n-1)\mathrm{e}^{-x}) \\
& = & n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-2}(n\mathrm{e}^{-x} - 1)
\end{array}$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ f'_{n+1}(x) = (n+1)\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1}((n+1)\mathrm{e}^{-x} - 1)}$$

- Soit $x > 0$.

$$\begin{array}{rcl}
f_{n+1}(x) - f_n(x) & = & (n+1)\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n} - n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} \\
& = & \mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1}((n+1)(1-\mathrm{e}^{-x}) - n) \\
& = & \mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1}(1-(n+1)\mathrm{e}^{-x}) \\
& = & -\dfrac{1}{n+1} f'_{n+1}(x)
\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0 : f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{1}{n+1} f'_{n+1}(x)}$$

Commentaire

On a ici considéré x dans $\mathbb{R}_+^*$ et non dans $\mathbb{R}_+$. En effet, f_n n'est pas toujours dérivable en 0.
Par exemple, f_1 et f_2 ne le sont pas.

□

b) Montrer ensuite, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \int_0^{+\infty} x\,(f_{n+1}(x) - f_n(x))\ dx = \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction $x \mapsto x(f_{n+1}(x) - f_n(x))$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[0, +\infty[$.
- Soit $A \geqslant 0$. D'après la question précédente :

$$\int_0^A x(f_{n+1}(x) - f_n(x))\ dx = -\frac{1}{n+1} \int_0^A x\, f'_{n+1}(x)\ dx$$

On effectue alors une intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x & \quad & u'(x) & = & 1 \\ v'(x) & = & f'_{n+1}(x) & \quad & v(x) & = & f_{n+1}(x) \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$. On obtient :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n+1} \int_0^A x\, f'_{n+1}(x)\ dx &= -\frac{1}{n+1} \left(\Big[\ x\, f_{n+1}(x)\ \Big]_0^A - \int_0^A f_{n+1}(x)\ dx \right) \\ &= -\frac{1}{n+1}\, A\, f_{n+1}(A) + \frac{1}{n+1} \int_0^A f_{n+1}(x)\ dx \end{aligned}$$

- De plus :
  × la fonction f_{n+1} est une densité de probabilité nulle en dehors de $[0, +\infty[$.
  Ainsi, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx = \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx$ converge (et vaut 1).
  D'où : $\displaystyle\int_0^A f_{n+1}(x)\ dx \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx$.
  × comme $A \geqslant 0$:
  $$A\, f_{n+1}(A) = A \times n \mathrm{e}^{-A} (1 - \mathrm{e}^{-A})^n = n \times \frac{A}{\mathrm{e}^A} \times (1 - \mathrm{e}^{-A})^n \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{(par croissances comparées)}$$

  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,(f_{n+1}(x) - f_n(x))\ dx$ converge.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \int_0^{+\infty} x\,(f_{n+1}(x) - f_n(x))\ dx = \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx.}$$

□

c) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre $\mathbb{E}(T_{n+1})$ et $\mathbb{E}(T_n)$, puis une expression de $\mathbb{E}(T_n)$ sous forme d'une somme.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question ***5.a)***, les v.a.r. T_{n+1} et T_n admettent une espérance.

  On en conclut que les intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{n+1}(x)\ dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_n(x)\ dx$ sont (absolument) convergentes.

- On calcule alors :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(T_{n+1}) - \mathbb{E}(T_n) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{n+1}(x)\ dx - \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_n(x)\ dx & \\
& = & \displaystyle\int_{0}^{+\infty} x\, f_{n+1}(x)\ dx - \int_{0}^{+\infty} x\, f_n(x)\ dx & \textit{(car } f_n \textit{ et } f_{n+1} \textit{ sont nulles} \\
& & & \textit{en dehors de } [0,+\infty[\textit{)} \\
& = & \displaystyle\int_{0}^{+\infty} x\, (f_{n+1}(x) - f_n(x))\ dx & \\
& = & \displaystyle\frac{1}{n+1}\int_{0}^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.b)}}\textit{)} \\
& = & \displaystyle\frac{1}{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx & \textit{(car } f_{n+1} \textit{ est nulle} \\
& & & \textit{en dehors de } [0,+\infty[\textit{)} \\
& = & \displaystyle\frac{1}{n+1} \times 1 & \textit{(car } f_{n+1} \textit{ est une densité)}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(T_{n+1}) - \mathbb{E}(T_n) = \frac{1}{n+1}}$$

- On a donc : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(T_{k+1}) - \mathbb{E}(T_k) = \dfrac{1}{k+1}$.

  En sommant ces égalités pour k variant de 1 à $n-1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\mathbb{E}(T_{k+1}) - \mathbb{E}(T_k)\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

  Or, oar télescopage :

$$\mathbb{E}(T_n) - \mathbb{E}(T_1) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

  Or, d'après la question , $\mathbb{E}(T_1) = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(T_n) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

□

Partie III : Loi du premier dépassement

Dans toute cette partie, a désigne un réel strictement positif.
On définit la variable aléatoire N égale au plus petit entier n de $\mathbb{N}^*$ tel que $X_n > a$ si un tel entier existe, et égale à 0 sinon.

7. Justifier l'égalité d'événements : $[N = 0] = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]$. En déduire la probabilité $\mathbb{P}([N = 0])$.

Démonstration.

- Soit $\omega \in \Omega$. $N(\omega) = 0$ si et seulement s'il n'existe pas d'entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_n(\omega) > a$.
  Autrement dit, si la proposition suivante est vérifiée :

$$\texttt{NON}\,(\exists n \in \mathbb{N}^*,\ X_n(\omega) > a)$$

  Ce qui équivaut à : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\omega) \leqslant a$. Puis à : $\omega \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [X_n \leqslant a]$.

$$\boxed{[N = 0] = \bigcap_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]}$$

Commentaire

On aurait sans doute obtenu tous les points de cette question sans l'introduction propre de ω.
En effet, l'énoncé prend le parti de ne pas le faire lors de la définition de la v.a.r. N.
Cela se fait cependant au prix d'une confusion d'objets entre variables aléatoires / réalisations / événements. Détaillons la démonstration qui semble plus proche de l'esprit du concepteur.

$N = 0$ si et seulement s'il n'existe pas d'entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_n > a$.
Autrement dit, si : $\texttt{NON}(\exists n \in \mathbb{N}^*,\ X_n > a)$.
Ce qui équivaut à : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \leqslant a$.
Finalement, on a : $[N = 0] = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]$

- Ainsi :

$$\mathbb{P}([N = 0]) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]\right)$$

D'après le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leqslant a]\right)$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} [X_k \leqslant a]\right) & = & \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_k \leqslant a]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \cdots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_1 \leqslant a]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \cdots, X_n \textit{ ont même loi)} \\ & = & (\mathbb{P}([X_1 \leqslant a]))^n \ = \ (F_{X_1}(a))^n & \\ & = & (1 - \mathrm{e}^{-a})^n & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \textit{ et } a \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

Or : $0 < 1 - \mathrm{e}^{-a} < 1$. En effet :

$$\begin{array}{rcll} +\infty > a > 0 & \Leftrightarrow & -\infty < -a < 0 & \\ & \Leftrightarrow & 0 < \mathrm{e}^{-a} < 1 & \textit{(par stricte croissance de } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & -1 < -\mathrm{e}^{-a} < 0 & \end{array}$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - \mathrm{e}^{-a})^n = 0$.

Et : $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]\right) = 0$.

$$\boxed{\mathbb{P}([N = 0]) = 0.}$$

□

8. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([N = n]) = (1 - \mathrm{e}^{-a})^{n-1}\,\mathrm{e}^{-a}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Par définition, l'événement $[N = n]$ est réalisé si et seulement si n est le plus petit entier tel que $[X_n > a]$ est réalisé. Autrement dit, si on a à la fois :
  - × pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, l'événement $[X_k \leqslant a]$ est réalisé,
  - × l'événement $[X_n > a]$ est réalisé.

$$\boxed{\text{Ainsi : } [N = n] = [X_1 \leqslant a] \cap \cdots \cap [X_{n-1} \leqslant a] \cap [X_n > a] = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} [X_k \leqslant a] \right) \cap [X_n > a]}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([N=n]) & = & \mathbb{P}\left(\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} [X_k \leqslant a]\right) \cap [X_n > a]\right) & \\
& = & \left(\prod\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_k \leqslant a])\right) \times \mathbb{P}([X_n > a]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \cdots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & (\mathbb{P}([X_1 \leqslant a]))^n \times \mathbb{P}([X_1 > a]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \cdots, X_n \textit{ ont même loi)} \\
& = & (F_{X_1}(a))^{n-1} \times (1 - F_{X_1}(a)) & \\
& = & (1 - \mathrm{e}^{-a})^{n-1} \times \mathrm{e}^{-a} & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \textit{ et } a \geqslant 0\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}([N=n]) = (1 - \mathrm{e}^{-a})^{n-1} \, \mathrm{e}^{-a}}$$

□

9. Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(N)$ et la variance $\mathbb{V}(N)$ de N.

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $N(\Omega) = \mathbb{N}$.
- De plus, on a démontré :
  × $\mathbb{P}([N=0]) = 0$.
  × $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}([N=n]) = (1 - \mathrm{e}^{-a})^{n-1} \, \mathrm{e}^{-a}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } N \hookrightarrow \mathcal{G}(\mathrm{e}^{-a}).}$$

- Ainsi N admet une espérance et une variance.

$$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(N) = \frac{1}{\mathrm{e}^{-a}} = \mathrm{e}^a \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(N) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-a}}{(\mathrm{e}^{-a})^2} = \mathrm{e}^{2a}(1 - \mathrm{e}^{-a}) = \mathrm{e}^a \, (\mathrm{e}^a - 1).}$$

Commentaire

- Dans le cours, il est précisé qu'une v.a.r. X qui suit une loi géométrique (de paramètre e^{-a}) admet pour support $\mathbb{N}^*$. Ici, N a pour support $\mathbb{N}$ mais prend la valeur 0 avec probabilité nulle.
  On a alors :
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \ \mathbb{P}([X=x]) = \mathbb{P}([N=x])$$
  (et ces probabilités sont nulles si $x \notin \mathbb{N}^*$)
  Dans ce cas, on considère que X et N ont même loi (qui est $\mathcal{G}(\mathrm{e}^{-a})$).
- Évidemment, il est tout à fait possible d'effectuer un calcul direct avec les probabilités calculées en questions ***7.*** et ***8.***. Cependant, cela démontre une manque de prise de recul et finit par coûter des points car demande beaucoup plus de temps.

□

On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire Z, définie pour tout ω de Ω par :

$$Z(\omega) = \left\{ \begin{array}{cl} X_{N(\omega)}(\omega) & \text{si } N(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{si } N(\omega) = 0 \end{array} \right.$$

10. Justifier : $\mathbb{P}([Z \leqslant a]) = 0$.

Démonstration.

- La famille $([N = 0], [N \neq 0])$ est un système complet d'événements.
  D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}([Z \leqslant a]) \;=\; \mathbb{P}([Z \leqslant a] \cap [N = 0]) + \mathbb{P}([Z \leqslant a] \cap [N \neq 0])$$

- Or, par définition de Z :

$$[Z \leqslant a] \cap [N = 0] = [0 \leqslant a] \cap [N = 0] = \Omega \cap [N = 0] = \Omega \cap [N = 0] = [N = 0]$$

  (on rappelle que d'après l'énoncé : $a > 0 \geqslant 0$)

- D'autre part, par définition de N :

$$[Z \leqslant a] \cap [N \neq 0] = \varnothing$$

  Démontrons-le en supposant par l'absurde qu'il existe ω qui réalise $[Z \leqslant a] \cap [N \neq 0]$.
  Cela signifie que $N(\omega) \neq 0$ et $Z(\omega) \leqslant a$.
  Comme $N(\omega) \neq 0$ alors $Z(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega)$. On en déduit :

$$Z(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega) \leqslant a$$

  Or, comme $N(\omega) \neq 0$, alors $N(\omega)$ est par définition le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_n(\omega) > a$.
  On a alors : $X_{N(\omega)}(\omega) > a$ ce qui contredit $X_{N(\omega)}(\omega) \leqslant a$.

- On revient à la première égalité :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z \leqslant a]) & = & \mathbb{P}([N = 0]) + \mathbb{P}(\varnothing) & \\ & = & 0 + 0 & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{7.}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } \mathbb{P}([Z \leqslant a]) = 0}$$

Commentaire

L'utilisation de la formule des probabilités totales devrait relever ici de l'automatisme. En effet, on traite d'une v.a.r. qui est définie par cas. Pour le calcul de $\mathbb{P}([Z \leqslant a])$, on est donc naturellement amené à vouloir traiter à part le cas où $N = 0$ et celui où $N \neq 0$. La formule des probabilités totales n'est autre qu'une formalisation correcte de cette idée.

□

11. Soit $x \in \,]a, +\infty[$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'égalité d'événements :

$$[N = n] \cap [Z \leqslant x] = \left\{ \begin{array}{cl} [a < X_1 \leqslant x] & \text{si } n = 1 \\ [T_{n-1} \leqslant a] \cap [a < X_n \leqslant x] & \text{si } n \geqslant 2 \end{array} \right.$$

En déduire la probabilité $\mathbb{P}([N = n] \cap [Z \leqslant x])$.

Démonstration.
Deux cas se présentent.

- Si $n = 1$.

$$\begin{array}{rcll} [N=1] \cap [Z \leqslant x] & = & [N=1] \cap [X_N \leqslant x] & \textit{(par définition de } Z\textit{)} \\ & = & [N=1] \cap [X_1 \leqslant x] & \textit{(par définition de } Z\textit{)} \\ & = & [X_1 > a] \cap [X_1 \leqslant x] & \textit{(par définition de } N\textit{)} \\ & = & [a < X_1 \leqslant x] & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } [N=1] \cap [Z \leqslant x] = [a < X_1 \leqslant x].}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([N=1]\cap[Z\leqslant x]) &= \mathbb{P}([a<X_1\leqslant x]) \ = \ F_{X_1}(x)-F_{X_1}(a) \\ &= (\cancel{1}-\mathrm{e}^{-x})-(\cancel{1}-\mathrm{e}^{-a}) \ = \ \mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([N=1]\cap[Z\leqslant x])=\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-x}}$$

- Si $n\geqslant 2$.

$$\begin{aligned} [N=n]\cap[Z\leqslant x] &= [N=n]\cap[X_N\leqslant x] && \textit{(par définition de } Z\textit{)} \\ &= [N=n]\cap[X_n\leqslant x] && \textit{(par définition de } Z\textit{)} \\ &= \left(\bigcap_{k=1}^{n-1}[X_k\leqslant a]\right)\cap[X_n>a]\ \cap\ [X_n\leqslant x] && \textit{(d'après la question } \textbf{8.}\textit{)} \\ &= \left(\bigcap_{k=1}^{n-1}[X_k\leqslant a]\right)\cap[a<X_n\leqslant x] \\ &= [\max(X_1,\dots,X_n)\leqslant a]\cap[a<X_n\leqslant x] \\ &= [T_{n-1}\leqslant a]\cap[a<X_n\leqslant x] && \textit{(par définition de } T_{n-1}\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } n\geqslant 2, \text{ on a bien : } [N=n]\cap[Z\leqslant x]=[T_{n-1}\leqslant a]\cap[a<X_n\leqslant x].}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([N=n]\cap[T\leqslant x]) &= \mathbb{P}([T_{n-1}\leqslant a]\cap[a<X_n\leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([T_{n-1}\leqslant a])\,\mathbb{P}([a<X_n\leqslant x]) && \textit{(car } T_{n-1} \textit{ et } X_n \textit{ sont indépendantes d'après le lemme des coalitions)} \\ &= (1-\mathrm{e}^{-a})^{n-1}\ \mathbb{P}([a<X_n\leqslant x]) && \textit{(d'après la question } \textbf{4.a)}\textit{)} \end{aligned}$$

De plus X_n suit la même loi que X_1, donc :

$$\mathbb{P}([a<X_n\leqslant x])=\mathbb{P}([a<X_1\leqslant x])=\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-x}$$

$$\boxed{\text{Si } n\geqslant 2,\ \mathbb{P}([N=n]\cap[Z\leqslant x])=(1-\mathrm{e}^{-a})^{n-1}\ (\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-x}).}$$

On remarque que l'expression trouvée dans le cas $n\geqslant 2$ est valide pour $n=1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([N=n]\cap[Z\leqslant x])=(\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-x})\ (1-\mathrm{e}^{-a})^{n-1}}$$

Commentaire

On fait remarquer que la formule obtenue est valide dans le cas $n=1$ et $n\geqslant 2$.
Ce n'est pas un objectif annoncé de la question. L'avantage est que cela rend la question suivante plus simple à rédiger : on n'est pas obligé de distinguer les cas $n=1$ et $n\geqslant 2$ puisque l'expression est valide dans ces deux cas.

□

b) Montrer alors : $\mathbb{P}([Z \leqslant x]) = 1 - e^{a-x}$.

Démonstration.
La famille $\big([N = n]\big)_{n \geqslant 1}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Z \leqslant x]) & = & \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([N = n] \cap [Z \leqslant x]) & \\
& = & \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (e^{-a} - e^{-x}) \ (1 - e^{-a})^{n-1} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{11.a)}}\textit{)} \\
& = & (e^{-a} - e^{-x}) \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (1 - e^{-a})^{n-1} & \\
& = & (e^{-a} - e^{-x}) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (1 - e^{-a})^{n} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & (e^{-a} - e^{-x}) \dfrac{1}{\cancel{1} - (\cancel{1} - e^{-a})} & \\
& = & \cancel{e^{-a}} \ (1 - e^{a-x}) \ \dfrac{1}{\cancel{e^{-a}}} & \\
& = & 1 - e^{a-x} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}([Z \leqslant x]) = 1 - e^{a-x}}$$

□

12. a) Montrer que la variable aléatoire $Z - a$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - si $x < 0$, alors :
  $$[Z - a \leqslant x] = [Z \leqslant x + a] \subset [Z \leqslant a]$$
  Donc, par croissance de $\mathbb{P}$ et d'après la question ***10.*** :
  $$0 \leqslant \mathbb{P}([Z - a \leqslant x]) \leqslant \mathbb{P}([Z \leqslant a]) = 0$$
  D'où : $F_{Z-a}(x) = \mathbb{P}([Z - a \leqslant x]) = 0$.
  - si $x \geqslant 0$:
  $$\begin{array}{rcll}
  F_{Z-a}(x) & = & \mathbb{P}([Z - a \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([Z \leqslant x + a]) & \\
  & = & 1 - e^{\cancel{a} - (x + \cancel{a})} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{11.b)}}\textit{,} \\
  & & & \textit{car } x + a \geqslant a\textit{)} \\
  & = & 1 - e^{-x} &
  \end{array}$$

  Finalement :
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \ F_{Z-a}(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{array} \right.$$
  On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1.
  Or, la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{Donc la v.a.r. } Z - a \text{ suit une loi exponentielle de paramètre } 1.}$$

Commentaire

- On reconnaît ici une question du type « déterminer la transformée affine d'une v.a.r. Z ».
Ce type de question est à savoir faire sans hésitation.
- L'énoncé nous guide ici dans la disjonction de cas à considérer : il précise que $Z - a$ suit une loi exponentielle. Or le support d'une v.a.r. suivant une loi exponentielle est $[0, +\infty[$.
La disjonction de cas attendue pour déterminer la fonction de répartition de $Z - a$ est donc :
  - × le cas $x \geqslant 0$,
  - × le cas $x < 0$.

□

b) En déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(Z)$, ainsi que l'existence et la valeur de $\mathbb{V}(Z)$.

Démonstration.

- On remarque que : $Z = (Z - a) + a$.

La v.a.r. Z admet une espérance et une variance en tant que somme de v.a.r. qui en admettent.

- Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Z - a) + \mathbb{E}(a) = \frac{1}{1} + a = 1 + a$$

- Par propriété de la variance :

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{V}(Z - a) = \frac{1}{1^2} = 1$$

Finalement : $\mathbb{E}(Z) = 1 + a$ et $\mathbb{V}(Z) = 1$.

□

Exercice 2

Dans cet exercice on pourra utiliser l'encadrement suivant : $2 < \mathrm{e} < 3$.

Partie I : Etude d'une fonction

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \varphi(x) = x^2\,\mathrm{e}^x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de φ, en précisant la limite de φ en $-\infty$, sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$.

Démonstration.

- La fonction φ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\varphi'(x) = 2x\,\mathrm{e}^x + x^2\,\mathrm{e}^x = x\,(2 + x)\,\mathrm{e}^x$$

Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $\varphi'(x)$ est du signe de $x\,(2 + x)$ *(polynôme de degré 2)*.

- On obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	-1	$\nearrow$	$4\,\mathrm{e}^{-2}-1$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les différents éléments de ce tableau.
  - × En posant $X = -x$, on obtient :

$$\lim_{x\to-\infty} x^2\,\mathrm{e}^x - 1 = \lim_{X\to+\infty} (-X)^2\,\mathrm{e}^{-X} - 1 = \lim_{X\to+\infty} \frac{X^2}{\mathrm{e}^X} - 1 = -1$$

    par croissances comparées.
  - × $\varphi(0) = -1$
  - × $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\,\mathrm{e}^x - 1 = +\infty$

□

2. Établir que l'équation $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in \,]0;+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que α appartient à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2},1\right[$.

Démonstration.

- Soit $x > 0$. Remarquons que :

$$\mathrm{e}^x = \frac{1}{x^2} \;\Leftrightarrow\; x^2\,\mathrm{e}^x = 1 \;\Leftrightarrow\; x^2\,\mathrm{e}^x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \varphi(x) = 0$$

- La fonction φ est :
  - × continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$,
  - × strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

  Ainsi, φ réalise une bijection de $]0,+\infty[$ dans $\varphi(]0,+\infty[) \;=\,]\varphi(0), \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)[\, = \,]-1,+\infty[$.

  Comme $0 \in \,]-1,+\infty[$, on en déduit que 0 admet un unique antécédent $\alpha \in \,]0,+\infty[$ par la fonction φ *(ou encore que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \,]0,+\infty[$).*

$$\boxed{\text{L'équation } \mathrm{e}^x = \frac{1}{x^2} \text{ admet une unique solution } \alpha \in \,]0,+\infty[.}$$

- De plus :
  $\times$ $\varphi(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 1 < \dfrac{1}{4}\,\mathrm{e} - 1 < \dfrac{3}{4} - 1 = -\dfrac{1}{4} < 0$.
  $\times$ $\varphi(\alpha) = 0$.
  $\times$ $\varphi(1) = \mathrm{e}^1 - 1 > 0$ car $\mathrm{e} > 2$.
  Ainsi : $\varphi(\frac{1}{2}) < 0 < \varphi(1)$.
  Or, d'après le théorème de la bijection, $f^{-1} :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ est strictement croissante.

  $\boxed{\text{En appliquant } f^{-1} \text{ à l'inégalité précédente, on obtient : } \dfrac{1}{2} < \alpha < 1.}$ □

Partie II : Étude d'une suite

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^3\,\mathrm{e}^x$,
et la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \geqslant 1$.

1) **Initialisation** :
$u_0 = 1 \geqslant 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

2) **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \geqslant 1$).
Par hypothèse de récurrence : $u_n \geqslant 1$.
Par croissance des fonctions élévation au cube et exponentielle : $u_n^3 \geqslant 1$ et $\mathrm{e}^{u_n} \geqslant \mathrm{e}^1 \geqslant 1$.
On en déduit que : $u_{n+1} = u_n^3\,\mathrm{e}^{u_n} \geqslant 1$.
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1.}$ □

4. Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :
$$u_{n+1} - u_n = u_n^3\,\mathrm{e}^{u_n} - u_n = (u_n^2\,\mathrm{e}^{u_n} - 1)\ u_n$$
- Or, comme $u_n \geqslant 1$ (d'après la question précédente), $u_n^2 \geqslant 1$ et $\mathrm{e}^{u_n} \geqslant \mathrm{e}^1 \geqslant 1$.
  Ainsi : $u_n^2\,\mathrm{e}^{u_n} \geqslant 1$ et donc $u_n^2\,\mathrm{e}^{u_n} - 1 \geqslant 0$.

$\boxed{\text{Comme } u_n \geqslant 1, \text{ on en déduit que : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n. \text{ La suite } (u_n) \text{ est donc croissante.}}$

Commentaire

- On pouvait aussi démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$:
  - × **Initialisation** : $u_1 \geqslant u_0$.
  - × **Hérédité** : si $u_{n+1} \geqslant u_n$ alors $f(u_{n+1}) \geqslant f(u_n)$ par croissance de la fonction f (à démontrer).

  Il faut faire attention : le caractère croissant de f ne suffit pas à démontrer que (u_n) est croissant ! (si $u_0 \geqslant u_1$, la suite obtenue est décroissante).
- On pouvait aussi démontrer que : $\forall x \geqslant 1,\ f(x) \geqslant x$ puis en déduire, en remplaçant x par $u_n \geqslant 1$ que : $f(u_n) \geqslant u_n$. Attention cependant :

$$f \text{ croissante } \not\Rightarrow f(x) \geqslant x$$

  On peut penser à la fonction racine qui est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie : $\forall x \geqslant 1,\ f(x) \leqslant x$.

□

5. Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

Démonstration.

- D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante.
- Supposons par l'absurde que (u_n) est majorée.
  Étant croissante, (u_n) est convergente vers un réel ℓ.
  D'après la question *3.*, on sait que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1$. Ainsi, par passage à la limite : $\ell \geqslant 1$.
- D'autre part, par définition : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
  Par passage à la limite, on obtient : $\ell = f(\ell)$. Or, comme $\ell \neq 0$:

$$\ell = f(\ell) \ \Leftrightarrow\ \ell = \ell^3 \,\mathrm{e}^{\ell} \ \Leftrightarrow\ 1 = \ell^2 \,\mathrm{e}^{\ell} \ \Leftrightarrow\ \ell^2 \,\mathrm{e}^{\ell} - 1 = 0$$

  Or, d'après la question *2.*, cette équation admet α pour unique solution sur $]0, +\infty[$.
  On en déduit que $\ell = \alpha$. Enfin, comme $\alpha < 1$, on en déduit que $\ell < 1$.

Impossible car $\alpha \geqslant 1$. Ainsi, la suite (u_n) n'est pas majorée. Étant croissante, elle divrege vers $+\infty$.

Commentaire

- La suite (u_n) étant croissante, soit elle est majorée et dans ce cas elle converge ; soit elles n'est pas majorée et dans ce cas elle diverge vers $+\infty$.
- Dans cette question, on ne demande rien d'autre que d'établir cette disjonction de cas.

□

Partie III : Étude d'une série

6. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{f(n)}$ converge. On note $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{f(n)}$.

Démonstration.

- La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{f(n)}$ est à termes positifs.

- De plus : $\dfrac{1}{f(n)} = \dfrac{1}{n^3\,\mathrm{e}^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. En effet, $\dfrac{\frac{1}{n^3\,\mathrm{e}^n}}{\frac{1}{n^2}} = \dfrac{n^2}{n^3\,\mathrm{e}^n} = \dfrac{1}{n\,\mathrm{e}^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  Or, d'après le critère de Riemann ($2>1$), la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente.

  $\boxed{\text{Ainsi, d'après le théorème de négligeabilité des séries à termes positifs, la série } \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{f(n)} \text{ est convergente.}}$

$\square$

7. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| S - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{f(k)} \right| \leqslant \dfrac{1}{(\mathrm{e}-1)\,\mathrm{e}^n}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Notons tout d'abord que :

$$S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{f(k)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{f(k)} = \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{f(k)}$$

- Or, comme pour tout $k \geqslant 1$, $k^3\,\mathrm{e}^k \geqslant \mathrm{e}^k$:

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{f(k)} = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^3\,\mathrm{e}^k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{\mathrm{e}^k}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^k &= \frac{(\frac{1}{\mathrm{e}})^{n+1} - (\frac{1}{\mathrm{e}})^{m+1}}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}} = \frac{(\frac{1}{\mathrm{e}})^{n+1} - (\frac{1}{\mathrm{e}})^{m+1}}{\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}} = \frac{\mathrm{e}\,(\frac{1}{\mathrm{e}})^{n+1} - \mathrm{e}\,(\frac{1}{\mathrm{e}})^{m+1}}{\mathrm{e}-1} \\ &= \frac{\frac{1}{\mathrm{e}^n} - \frac{1}{\mathrm{e}^m}}{\mathrm{e}-1} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\frac{1}{\mathrm{e}^n}}{\mathrm{e}-1} = \frac{1}{(\mathrm{e}-1)\,\mathrm{e}^n}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| \leqslant \frac{1}{(\mathrm{e}-1)\,\mathrm{e}^n}}$$

□

8. En déduire une fonction en **Scilab** qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Démonstration.

- Afin de calculer une valeur approchée de S à 10^{-4} près, il suffit de trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\frac{1}{(\mathrm{e}-1)\,\mathrm{e}^n} \leqslant 10^{-4}$$

- En effet, d'après la question précédente, on a alors :

$$\left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| \leqslant \frac{1}{(\mathrm{e}-1)\,\mathrm{e}^n} \leqslant 10^{-4}$$

et $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{f(k)}$ constitue dans ce cas l'approximation recherchée.

- On en déduit le programme suivant.

```
n = 1
S = 1 / exp(1)
while 1 / ((exp(1)-1) * exp(n)) > 10 ^ (-4)
    n = n + 1
    S = S + 1 / (n ^ 3 * exp(n))
end
```

Commentaire

Le programme précédent propose de déterminer la valeur de n et de S_n en procédant par itération. On peut aussi remarquer que :

$$\frac{1}{(\mathrm{e}-1)\,\mathrm{e}^n} \leqslant 10^{-4} \Leftrightarrow \mathrm{e}^n \geqslant \frac{10^4}{(\mathrm{e}-1)} \Leftrightarrow n \geqslant 4\,\ln(10) - \ln(\mathrm{e}-1)$$

(par stricte croissance de la fonction ln*)*

Ainsi, S_n est une approximation de S pour tout $n \geqslant m = \lceil 4\,\ln(10) - \ln(\mathrm{e}-1) \rceil$.
On en déduit le programme **Scilab** suivant.

```
m = ceil(4 * log(10) - log(exp(1)-1))
S = 0
for i = 1:m
    S = S + 1 / (i ^3 * exp(i))
end
```

□

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note 0_E le vecteur nul de E.
On note i l'application identité de E, et θ l'application constante nulle de E dans E :

$$i : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & 0_E \end{array} \right.$$

On considère un endomorphisme f de E tel que :

$$f \neq \theta, \quad f^2 + i \neq \theta, \quad f \circ (f^2 + i) = \theta$$

où f^2 désigne $f \circ f$.

1. a) Montrer que f n'est pas bijectif.

Démonstration.
Supposons par l'absurde que l'endomorphisme f est bijectif.
Alors l'endomorphisme f admet une bijection réciproque $f^{-1} : E \to E$. Or, d'après l'énoncé :

$$f \circ (f^2 + i) = \theta$$

On en déduit, en composant de part et d'autre à gauche par f^{-1} :

$$\begin{array}{ccccc} f^{-1} \circ \big(f \circ (f^2 + i)\big) & = & f^{-1} \circ \theta & = & \theta \\ \shortparallel & & & & \\ (f^{-1} \circ f) \circ (f^2 + i) & = & i \circ (f^2 + i) = f^2 + i & & \end{array}$$

Ce qui est absurde, puisque d'après l'énoncé : $f^2 + i \neq \theta$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ n'est pas bijectif.}}$$

Commentaire

On peut aussi raisonner de manière directe. Comme :

$$f \circ (f^2 + i) = \theta$$

alors, pour tout $x \in E$: $\big(f \circ (f^2+i)\big)(x) = f\big(f^2+i)(x)\big) = 0_E$.
Autrement dit : $\forall x \in E$, $(f^2+i)(x) \in \mathrm{Ker}(f)$.
Or, d'après l'énoncé : $f^2 + i \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. Ainsi, il existe $x \in E$ tel que : $(f^2+i)(x) \neq 0_E$.
On en déduit :

$$\mathrm{Ker}(f) \supset \{0_E, (f^2+i)(x)\} \neq \{0_E\}$$

Ainsi, f n'est pas injective. Elle n'est donc pas bijective. □

b) En déduire que 0 est valeur propre de f, puis montrer qu'il existe u appartenant à E tel que : $u \neq 0_E$ et $f(u) = 0_E$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, f n'est pas bijectif, c'est-à-dire $f - 0 \cdot i$ n'est pas bijectif. Comme E est de dimension finie, ceci équivaut à f non injectif.

  $$\boxed{\text{Donc 0 est valeur propre de } f.}$$

- 0 est valeur propre de f, donc : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f - 0 \cdot i) \neq \{0_E\}$.
  Il existe donc $u \neq 0_E$ tel que $u \in \mathrm{Ker}(f)$.

  $$\boxed{\text{Autrement dit, il existe } u \in E \text{ tel que : } u \neq 0_E \text{ et } f(u) = 0_E.}$$

□

Soit v_1 appartenant à E tel que : $v_1 \neq 0_E$ et $f(v_1) = 0_E$.

2. Montrer : $\text{Sp}(f) = \{0\}$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $f \circ (f^2 + i) = \theta$.
  On en déduit que le polynôme $Q(X) = X(X^2+1)$ est un polynôme annulateur de f.
  De plus l'unique racine de Q est 0 (le polynôme X^2+1 n'admet pas de racine réelle).

  $$\boxed{\text{D'où : Sp}(f) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{0\}.}$$

- De plus, d'après la question ***1.b)***, $0 \in \text{Sp}(f)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : Sp}(f) = \{0\}.}$$

□

3. Est-ce que f est diagonalisable ?

Démonstration.
D'après l'énoncé, E est un espace vectoriel de dimension 3. On note $\mathscr{B}$ l'une de ses bases.

Supposons par l'absurde que f est diagonalisable.
Il existe alors une base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ constituée de vecteurs propres de f dans laquelle la matrice représentative de f est la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

D'après la formule de changement de base :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ & & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ & & P & D & P^{-1} \end{array}$$

Ainsi :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P \ 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \ P^{-1} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\theta)$$

L'application $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$ étant bijective, on en déduit : $f = \theta$.
Absurde !

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Commentaire

- Il était possible de rédiger différemment en prenant le parti de diagonaliser la matrice représentative de f. Détaillons cette rédaction.
- On commence par noter $M = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ la matrice représentative de f dans une base $\mathscr{B}$ de E.
  Supposons par l'abusrde que f est diagonalisable. Alors M est diagonalisable.
  Il existe alors une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que :
  $$M = PDP^{-1}$$
  où D est une matrice diagonale dont les cœfficients diagonaux sont les valeurs propres de M.
  Or $\text{Sp}(M) = \text{Sp}(f) = \{0\}$. Donc : $D = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.
  Et ainsi :
  $$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P \ 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \ P^{-1} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\theta)$$
  Et on peut donc conclure comme ci-dessus.
- Cette question est un grand classique des sujets.
  Il faut donc savoir la traiter correctement, en adoptant l'un ou l'autre des rédactions ci-dessus.

□

4. Montrer que $f^2 + i$ n'est pas bijectif, puis en déduire qu'il existe v appartenant à E tel que : $v \neq 0_E$ et $f^2(v) = -v$.

Démonstration.

- Supposons par l'absurde que l'endomorphisme $f^2 + i$ est bijectif.
  Alors l'endomorphisme $g = f^2 + i$ admet une bijection réciproque $g^{-1} : E \to E$. Or, d'après l'énoncé :
  $$f \circ (f^2 + i) = \theta$$
  On en déduit, en composant de part et d'autre à droite par g :
  $$\begin{array}{ccccc} \big(f \circ (f^2 + i)\big) \circ g^{-1} & = & \theta \circ g^{-1} & = & \theta \\ \shortparallel & & & & \\ \big(f \circ (f^2 + i)\big) \circ g^{-1} & = & f \circ \big((f^2 + i) \circ g^{-1}\big) = f \circ i = f & & \end{array}$$
  Ce qui est absurde, puisque d'après l'énoncé : $f \neq \theta$.
  $$\boxed{\text{On en déduit que } f^2 + i \text{ n'est pas bijectif.}}$$
- L'endomorphisme $f^2 + i$ n'est pas bijectif. Donc : $\text{Ker}(f^2 + i) \neq \{0_E\}$.
  Il existe donc $v \neq 0_E$ tel que $v \in \text{Ker}(f^2 + i)$. Or :
  $$v \in \text{Ker}(f^2 + i) \ \Leftrightarrow \ (f^2 + i)(v) = 0_E \ \Leftrightarrow \ f^2(v) + v = 0_E \ \Leftrightarrow \ f^2(v) = -v$$
  $$\boxed{\text{Ainsi, il existe } v \in E \text{ tel que : } v \neq 0_E \text{ et } f^2(v) = -v.}$$

□

Soit v_2 appartenant à E tel que : $v_2 \neq 0_E$ et $f^2(v_2) = -v_2$. On note $v_3 = f(v_2)$.

5. Montrer : $f(v_3) = -v_2$.

Démonstration.
On calcule :
$$f(v_3) = f(f(v_2)) = f^2(v_2) = -v_2$$
$$\boxed{\text{On a bien : } f(v_3) = -v_2.}$$

□

6. a) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.

Démonstration.

- Montrons que la famille $\mathscr{B}$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que :
  $$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0_E$$
  - On applique f de part et d'autre. On obtient, par linéarité de f :
    $$\lambda_1 \cdot f(v_1) + \lambda_2 \cdot f(v_2) + \lambda_3 \cdot f(v_3) = f(0_E) = 0_E$$
    Or, on a les relations suivantes :
    $$f(v_1) = 0_E, \quad f(v_2) = v_3 \quad \text{et} \quad f(v_3) = -v_2$$
    On obtient alors :
    $$\lambda_2 \cdot v_3 - \lambda_3 \cdot v_2 = 0_E \quad (L_1)$$

- On applique de nouveau f de part et d'autre. On obtient alors :

$$\lambda_2 \cdot f(v_3) - \lambda_3 \cdot f(v_2) = f(0_E) = 0_E$$

Ainsi, par les mêmes relations que précédemment :

$$-\lambda_2 \cdot v_2 - \lambda_3 \cdot v_3 = 0_E \quad (L_2)$$

- Par combinaison linéaire des égalités précédentes ($\lambda_3\, L_1 + \lambda_2\, L_2$), on obtient :

$$-\lambda_3^2 \cdot v_2 - \lambda_2^2 \cdot v_2 = 0_E$$

Autrement dit : $(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) \cdot v_2 = 0_E$.
Or : $v_2 \neq 0_E$. Donc : $\lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0_{\mathbb{R}}$. D'où : $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 0$.
- L'équation initiale devient alors :

$$\lambda_1 \cdot v_1 = 0_E$$

Or : $v_1 \neq 0_E$. Donc : $\lambda_1 = 0_{\mathbb{R}}$.
Finalement : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } \mathscr{B} \text{ est donc libre.}}$$

- De plus : $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = \mathrm{Card}((v_1, v_2, v_3)) = 3 = \dim(E)$.

$$\boxed{\text{Donc } \mathscr{B} \text{ est une base de } E.}$$

□

b) Déterminer la matrice C de f dans la base $\mathscr{B}$.

Démonstration.
- On a : $f(v_1) = 0_E = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$.

  On en déduit que : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(v_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- On a : $f(v_2) = v_3 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3$.

  On en déduit que : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(v_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- On a : $f(v_3) = -v_2 = 0 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$.

  On en déduit que : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(v_3)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

et le sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (A, B, C), c'est-à-dire :

$$\mathcal{F} = \{a\,A + b\,B + c\,C \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

7. Déterminer la dimension de $\mathcal{F}$.

Démonstration.

- Montrons que (A, B, C) est une famille libre de $\mathcal{F}$.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que :
  $$\lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot B + \lambda_3 \cdot C = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$
  Ceci équivaut à :
  $$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & -\lambda_3 \\ 0 & \lambda_3 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  Par identification, on en déduit : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
  $$\boxed{\text{La famille } (A, B, C) \text{ est libre.}}$$
- De plus, par définition de $\mathcal{F}$, la famille (A, B, C) engendre $\mathcal{F}$.
  $$\boxed{\text{Ainsi, } (A, B, C) \text{ est une base de } \mathcal{F}.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim(\mathcal{F}) = \mathrm{Card}((A, B, C)) = 3.}$$ □

8. Montrer : $\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid CM = MC\} = \mathcal{F}$

Démonstration.
Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Alors il existe $(a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}) \in \mathbb{R}^9$ tels que :
$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$
On calcule :
$$CM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} & -a_{3,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}$$
et :
$$MC = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,3} & -a_{1,2} \\ 0 & a_{2,3} & -a_{2,2} \\ 0 & a_{3,3} & -a_{3,2} \end{pmatrix}$$
On obtient alors les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} CM = MC \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} & -a_{3,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,3} & -a_{1,2} \\ 0 & a_{2,3} & -a_{2,2} \\ 0 & a_{3,3} & -a_{3,2} \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,3} & = & 0 \\ -a_{1,2} & = & 0 \\ -a_{3,1} & = & 0 \\ -a_{3,2} & = & a_{2,3} \\ -a_{3,3} & = & -a_{2,2} \\ a_{2,1} & = & 0 \\ a_{2,2} & = & a_{3,3} \\ a_{2,3} & = & -a_{3,2} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & -a_{3,2} \\ 0 & a_{3,2} & a_{2,2} \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad M = a_{1,1}\, A + a_{2,2}\, B + a_{3,2}\, C \\ & \Leftrightarrow \quad M \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid CM = MC\} = \mathcal{F}}$$ □

9. a) Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer la matrice $(a\, A + b\, B + c\, C)^2$.

Démonstration.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$(a\, A+b\, B+c\, C)^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2-c^2 & -2bc \\ 0 & 2bc & b^2-c^2 \end{pmatrix} = a^2\, A+(b^2-c^2)\, B+2bc\, C$$

$$\boxed{(a\, A + b\, B + c\, C)^2 = a^2\, A + (b^2 - c^2)\, B + 2bc\, C}$$ □

b) En déduire une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- On remarque que :
$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix} = 4\, A + 5\, B + 12\, C$$
- D'après la question ***9.a)***, si on trouve $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :
$$4\, A + 5\, B + 12\, C = a^2\, A + (b^2 - c^2)\, B + 2bc\, C$$
alors, en posant $M = a\, A + b\, B + c\, C$, on a :
$$M^2 = a^2\, A + (b^2 - c^2)\, B + 2bc\, C = 4\, A + 5\, B + 12\, C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$
- Cherchons donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :
$$a^2\, A + (b^2 - c^2)\, B + 2bc\, C = 4\, A + 5\, B + 12\, C$$
On obtient le système d'équations suivant :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 & = & 4 \\ b^2-c^2 & = & 5 \\ 2bc & = & 12 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 2 \\ b^2-c^2 & = & 5 \\ bc & = & 6 \end{array} \right. \quad \texttt{OU} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -2 \\ b^2-c^2 & = & 5 \\ bc & = & 6 \end{array} \right.$$
Remarquons alors que $b = 0$ ne peut convenir (si $b = 0$ alors $bc = 0 \neq 6$). On suppose donc : $b \neq 0$. L'égalité $bc = 6$ permet d'écrire : $c = \dfrac{6}{b}$.
En réinjectant dans la deuxième ligne, on obtient :
$$\begin{array}{rcl} b^2 - c^2 = 5 \ \Leftrightarrow \ b^2 - \frac{36}{b^2} = 5 \ \Leftrightarrow \ b^4 - 36 = 5\, b^2 & \Leftrightarrow & b^4 - 5b^2 - 36 = 0 \\ & \Leftrightarrow & (b^2+4)\,(b^2-9) \ = \ 0 \\ & \Leftrightarrow & b^2 = -4 \ \texttt{OU} \ b^2 = 9 \\ & \Leftrightarrow & b^2 = 9 \\ & \Leftrightarrow & b = -3 \ \texttt{OU} \ b = 3 \end{array}$$
On obtient alors : $c^2 = b^2 - 5 = 9 - 5 = 4$. Ainsi : $c = -2$ `OU` $c = 2$.
Le triplet (a, b, c) suivant convient : $\left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 2 \\ b & = & 3 \\ c & = & 2 \end{array} \right.$.

- On a alors :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{cll} = & 2^2\,A + (3^2 - 2^2)\,B + 2\times 3\times 2\,C & \\ = & (2\,A + 3\,B + 2\,C)^2 & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{9.a)}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Donc, en posant } M = 2\,A + 3\,B + 2\,C\text{, on obtient : } M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}.}$$

□

10. On note $g = f^2 - i$.
Montrer que g est bijectif et exprimer g^{-1} à l'aide de f et de i.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^2 - i) & \\ & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^2) - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(i) & \textit{(par linéarité de } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)\textit{)} \\ & = & (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))^2 - I_3 & \\ & = & C^2 - I_3 & \\ & = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \\ & = & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \end{array}$$

La matrice représentative de g dans la base $\mathscr{B}$ est une matrice diagonale à cœfficients tous non nuls. Elle est donc inversible.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'endomorphisme } g \text{ est bijectif.}}$$

- Par propriété de l'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g^{-1}) & = & (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g))^{-1} \\ & = & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ & = & -I_3 - \dfrac{1}{2}\,C^2 \\ & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(-i - \dfrac{1}{2}\,f^2\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{L'application } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ étant bijective, on en déduit : } g^{-1} = -i - \frac{1}{2}\,f^2.}$$

□