# HEC 2019

## Sujet Mathieu

### Exercice avec préparation 1

***1.*** ***a)*** Formule du binôme de Newton.

*Démonstration.*

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k}$$

□

***b)*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant l'égalité suivante :

$$2^n \ = \ (1+1)^n + (1-1)^n$$

prouver : $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \ = \ 2^{n-1}$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
2^n &= (1+1)^n + (1-1)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}\, 1^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}\, (-1)^k && \textit{(d'après la formule du binôme de Newton)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \\
&= \left( \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} \right) + \left( \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \right) \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} (-1)^{2j} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} (-1)^{2j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} + \cancel{\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1}} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} - \cancel{\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1}} \\
&= 2 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}.}$$

□

**2. a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\,]-1,1[,\ P_n(x) = \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n$$

*Démonstration.*
Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\,]-1,1[$.

$$\begin{aligned}
& \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n \\
= \ & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \left(\sqrt{x^2-1}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \left(-\sqrt{x^2-1}\right)^k \qquad \textit{(d'après la formule du binôme de Newton)} \\
= \ & \left( \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \left(\sqrt{x^2-1}\right)^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \left(\sqrt{x^2-1}\right)^k \right) \\
& + \left( \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \left(-\sqrt{x^2-1}\right)^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \left(-\sqrt{x^2-1}\right)^k \right) \\
= \ & \left( \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} x^{n-2j} \left(\sqrt{x^2-1}\right)^{2j} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} x^{n-(2j+1)} \left(\sqrt{x^2-1}\right)^{2j+1} \right) \\
& + \left( \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} x^{n-2j} \left(-\sqrt{x^2-1}\right)^{2j} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} x^{n-(2j+1)} \left(-\sqrt{x^2-1}\right)^{2j+1} \right) \\
= \ & \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} x^{n-2j} \left(x^2-1\right)^{j} + \cancel{\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} x^{n-(2j+1)} \left(\sqrt{x^2-1}\right)^{2j+1}} \\
& + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} x^{n-2j} \left(x^2-1\right)^{j} - \cancel{\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} x^{n-(2j+1)} \left(\sqrt{x^2-1}\right)^{2j+1}} \\
= \ & 2 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} x^{n-2j} \left(x^2-1\right)^{j}
\end{aligned}$$

De plus :

- pour tout $j \in [\![0, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor]\!]$, $x \mapsto x^{n-2j}$ est bien une fonction polynomiale, car $n-2j \geqslant 0$,
- $x \mapsto (x^2-1)^j$ est bien une fonction polynomiale en tant que produit de fonctions polynomiales.

Finalement, la fonction $x \mapsto 2 \sum\limits_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} x^{n-2j} \left(x^2-1\right)^{j}$ est bien une fonction polynomiale.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Il existe un unique polynôme } P_n \text{ qui coincide} \\ \text{avec la fonction } x \mapsto \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n \text{ sur } \mathbb{R}\setminus\,]-1,1[\ : \\ \text{le polynôme défini par } P_n(X) = 2 \sum\limits_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} X^{n-2j} \left(X^2-1\right)^{j}. \end{array}}$$

□

***b)*** Quel est le coefficient de $X^n$ dans l'expression de $P_n(X)$ ?

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $j \in [\![0, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor]\!]$. On note $Q_j(X) = X^{n-2j} \left(X^2-1\right)^j$.
  - $\times$ Le polynôme $Q_j$ est de degré $n$. En effet :
  $$\deg(Q_j) \ = \ \deg\left(X^{n-2j} \left(X^2-1\right)^j\right) \ = \ \deg\left(X^{n-2j}\right) + j \deg\left(X^2-1\right) \ = \ (n-2j)+j\times 2 \ = \ n$$
  - $\times$ Son coefficient dominant (le coefficient de $X^n$) est 1.

  On a ainsi démontré que le polynôme $Q_j$ est de la forme : $Q_j(X) \ = \ X^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{j,k}\, X^k$
- On en déduit :
$$\begin{array}{rcll} P_n(X) & = & 2 \sum\limits_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} \left(X^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{j,k} X^k\right) & \\ & = & \left(2 \sum\limits_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j}\right) X^n + 2 \sum\limits_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{k,j} X^k & \\ & = & \left(2 \times 2^{n-1}\right) X^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(2 \sum\limits_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{k,j}\right) X^k & \text{(d'après la question 1.b), car } n \in \mathbb{N}^*\text{)} \\ & = & 2^n\, X^n + R_{n-1}(X) & \end{array}$$
  où $R_{n-1}$ est un polynôme de degré au plus $n-1$.
- Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \, ]-1,1[$.
$$P_0(x) \ = \ \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^0 + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^0 \ = \ 2$$
  On obtient : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \, ]-1,1[, \ P_0(x) - 2 = 0$.
  En particulier, le polynôme $P_0(X) - 2$ admet une infinité de racines.
  C'est donc le polynôme nul.

$$\boxed{\text{D'où : } P_0(X) = 2.}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que, si } n \in \mathbb{N}^*, \text{ le coefficient dominant de } P_n \text{ est } 2^n, \\ \text{et le coefficient dominant de } P_0 \text{ est 2.}\end{array}}$$

□

***3. a)*** Justifier la relation de récurrence suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2}(X) \ = \ 2\,X\,P_{n+1}(X) - P_n(X)$$

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \, ]-1,1[$.
$$\begin{array}{rl} & 2x\,P_{n+1}(x) - P_n(x) \\ = & 2\,x\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1} + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}\right) - \left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right) \\ = & \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n \left(2x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-1\right) + \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n \left(2x\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)-1\right) \\ = & \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n \left(2x^2+2x\sqrt{x^2-1}-1\right) + \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n \left(2x^2-2x\sqrt{x^2-1}-1\right) \end{array}$$

Or :

$$\begin{aligned}
& P_{n+2}(x) \\
= \ & \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n+2} + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+2} \\
= \ & \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n} \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{2} + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n} \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{2} \\
= \ & \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n} \left(x^2+2x\sqrt{x^2-1}+(x^2-1)\right) + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n} \left(x^2-2x\sqrt{x^2-1}+(x^2-1)\right) \\
= \ & \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n} \left(2x^2+2x\sqrt{x^2-1}-1\right) + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n} \left(2x^2-2x\sqrt{x^2-1}-1\right)
\end{aligned}$$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\ ]-1,1[,\ P_{n+2}(x) = 2x\, P_{n+1}(x) - P_n(x)$.

- On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\ ]-1,1[,\ P_{n+2}(x) - 2x\, P_{n+1}(x) + P_n(x) = 0$.
  En particulier, le polynôme $P_{n+2}(X) - 2X\, P_{n+1}(X) + P_n(X)$ admet une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul.

$$\boxed{P_{n+2}(X) \ = \ 2X\, P_{n+1}(X) - P_n(X)}$$

□

***b)*** ? ? ?

***4. a)*** Proposer deux fonctions **Scilab** :

× l'une prenant en entrée deux vecteurs `P` et `Q` de tailles différentes et permettant d'en faire la somme. On supposera que la taille du vecteur `Q` est supérieure à celle du vecteur `P`.

× l'autre prenant en entrée un vecteur `P` et permettant de concaténer au vecteur `P` un 0 à sa gauche.

*(Énoncé déduit de souvenirs)*

*Démonstration.*

- Pour la première fonction, on concatène au vecteur `P` (le plus petit des deux vecteurs) plusieurs 0 à sa droite pour qu'il soit de même taille que le vecteur `Q` pour rendre la somme licite. On obtient la fonction suivante :

```
function S = Somme(P, Q)
  R = [P, zeros(1, length(Q) - length(P))]
  S = R + Q
endfunction
```

- On propose la fonction suivante :

```
function T = AjoutZero(P)
  T = [0, P]
endfunction
```

□

***b)*** Proposer une fonction **Scilab** prenant en entrée un paramètre $n$ et permettant de calculer le polynôme $P_n$. On pourra pour cela utiliser la représentation matriciel des polynômes en présence dans la base canonique de $\mathbb{R}[X]$.
*(Énoncé extrapolé)*

*Démonstration.*

- La suite de polynômes $(P_n)$ est définie par la relation de récurrence de la question ***3.a)***.
  On cherche alors d'abord à déterminer $P_0$ et $P_1$.
  - × D'après la question ***2.a)***, on a : $P_0(X) = 2$.
  - × Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \,]-1, 1[$.

    $$P_1(x) \;=\; \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^1 + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^1 \;=\; x + \cancel{\sqrt{x^2-1}} + x - \cancel{\sqrt{x^2-1}} \;=\; 2\,x$$

    On obtient donc : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \,]-1, 1[,\ P_1(x) - 2x = 0$.
    En particulier, le polynôme $P_1(X) - 2X$ admet une infinité de racines.
    C'est donc le polynôme nul.

    $$\boxed{\text{D'où : } P_1(X) = 2\,X.}$$

- On propose la fonction **Scilab** suivante :

```
function P = Suite(n)
  Q = [2]
  R = [0, 2]
  for k = 1:n
    S = 2 ⋆ AjoutZero(R)
    T = Somme(-Q, S)
    Q = R
    R = T
  end
  P = Q
endfunction
```

- L'énoncé suggère en effet d'utiliser la représentation matricielle des polynômes dans la base canonique de $\mathbb{R}[X]$.
  On note $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On obtient :
  - × $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(P_0) = (2)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(P_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

    On initialise donc la suite $(P_n)$ avec les lignes suivantes :

```
  Q = [2]
  R = [0, 2]
```

- On rappelle que $P_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$.
  Si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{n+1}}(P_{n+1}) = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$, alors, en notant $S_{n+2}(X) = X P_{n+1}(X) \in \mathbb{R}_{n+2}[X]$, on a : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{n+2}}(S_{n+2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ a_0 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$.
  Pour obtenir le polynôme $2X\,P_{n+1}(X)$, dont la représentation matricielle est stockée dans la variable `S`, on utilise donc la commande suivante :

```
    S = 2 ⋆ AjoutZero(R)
```

- On doit ensuite sommer les polynômes $2X\, P_{n+1}(X)$ et $-P_n(X)$ pour obtenir $P_{n+2}$.
  Dans la fonction `Somme` le premier argument est le polynôme de plus petit degré. Pour respecter cet ordre, on détermine la représentation matricielle de $P_{n+2}$ avec la commande suivante :

```
6         T = Somme(-Q, S)
```

- Enfin, dans ce programme :
  - × la variable `Q` contient la représentation matricielle du polynôme $P_n$ dans la base $\mathscr{B}_n$,
  - × la variable `R` contient la représentation matricielle du polynôme $P_{n+1}$ dans la base $B_{n+1}$,
  - × la variable `S` contient la représentation matricielle du polynôme $P_{n+2}$ dans la base $\mathscr{B}_{n+2}$.

  Il faut donc renvoyer la variable `Q`, ce qu'on effectue avec la commande :

```
10    P = Q
```

□

**Exercice sans préparation 1**
On considère une v.a.r. $Z$ de loi normale centrée réduite. On note $f$ une densité de $Z$.

***1.*** Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2}\, dt$ converge si $x > 0$.
Est-ce toujours le cas si $x = 0$ ?

*Démonstration.*
Soit $x > 0$.

- La fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t^2}$ est continue sur $[x, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $[x, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.
- Par définition de la fonction $f$ (on rappelle que : $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$), on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \ \leqslant\ f(t) \ \leqslant\ f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

  Ainsi, pour tout $t \geqslant x$ :

$$0 \ \leqslant\ \frac{f(t)}{t^2} \ \leqslant\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ t^2}$$

- Ainsi :
  - × $\forall t \in [x, +\infty[,\ 0 \ \leqslant\ \dfrac{f(t)}{t^2} \ \leqslant\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\ t^2}$
  - × l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 2 ($2 > 1$).
    C'est donc une intégrale convergente. D'où l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ t^2}\, dt$ est convergente.

> Par critère de comparaison d'intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2}\, dt$ est convergente.

- On remarque :

$$\frac{f(t)}{t^2} \underset{t\to 0\to}{\sim} \frac{f(0)}{t^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ t^2}$$

Ainsi :

× $\dfrac{f(t)}{t^2} \underset{t\to 0\to}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\ t^2}$ $(\geqslant 0)$.

× l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2}\, dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en 0, d'exposant 2 ($2 \not< 1$). C'est donc une intégrale divergente. D'où l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ t^2}\, dt$ est divergente.

**Par critère d'équivalence d'intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2}\, dt$ est divergente.**

□

*2.* ? ? ?