K
Mathématiques

Colles - Semaine 1

Planche 1

Question de cours

Espérance d'une v.a.r. suivant une loi géométrique

Exercice

Trois personnes gourmandes mais polies se trouvent face à trois desserts. Afin de déterminer qui va manger quel dessert, elles pointent simultanément le dessert qui leur ferait envie. Si un dessert n'a été pointé que par une seule personne, celle-ci le mange et va faire la sieste. Si un même dessert est choisi par plusieurs personnes, celles-ci répètent l'opération de choix, en pointant simultanément un nouveau dessert parmi ceux qui restent. On suppose ces trois desserts excellents, donc chaque personne choisit un dessert uniformément au hasard et indépendamment des choix des autres et de ses choix précédentes. On note $n = 1, 2, \ldots$ les instants des tentatives de choix de dessert.

1. Soit X_n la variable aléatoire qui indique le nombre de personnes faisant la sieste après n tentatives. Donner la loi de X_1. Quel est le support de X_n ?

2. Pour tous entiers n, k, $\ell \geqslant 0$ avec ℓ appartenant au support de X_n, calculer $\mathbb{P}(X_{n+1} = k | X_n = \ell)$.

3. On pose $u_n = \mathbb{P}([X_n = 0])$ et $v_n = \mathbb{P}([X_n = 1])$. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

4. En déduire la loi de X_n.
Indication : on pourra considérer la suite $w_n = 2^n v_n$.

5. On note T la durée (aléatoire) de cet échange de politesse, c'est-à-dire le nombre de tentatives au bout desquelles tout le monde a mangé son dessert. Quelle est l'espérance de T ?
Indication : on pourra exprimer $\mathbb{P}([T \geqslant n])$ en fonction de u_{n-1} et v_{n-1}.

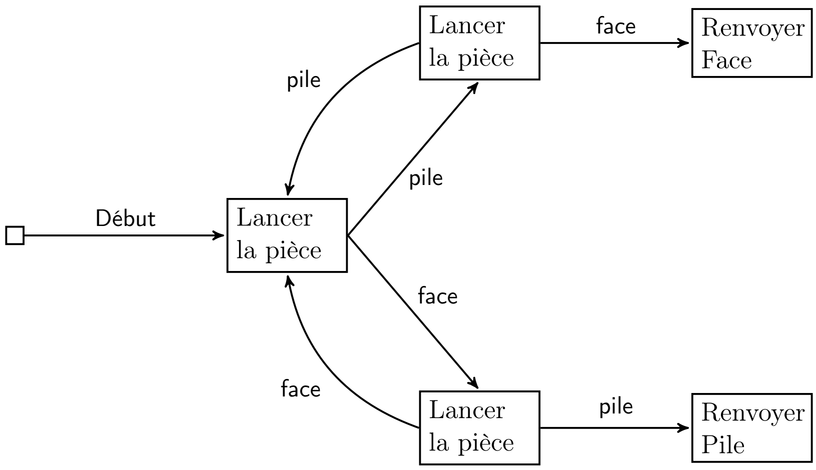
Planche 2

Question de cours

Espérance d'une v.a.r. suivant une loi de Poisson

Exercice

On dispose d'une pièce truquée qui renvoie « pile » avec une probabilité $p \in]0,1[$ et on souhaite s'en servir pour générer un pile ou face équilibré. John von Neumann a imaginé l'algorithme suivant (où les lancers successifs de la pièce truquée se font indépendamment) :



On note $T \in \{2, 4, 6, \ldots\}$ la variable aléatoire donnée par le nombre de lancers nécessaires pour que l'alorithme se termine, et $R \in \{P, F\}$ le résultat de l'algorithme (où on note P pour « pile » et F pour « face »).

1. Que valent T et R si on obtient comme premiers tirages $PPPPFFPPPFFP$?

2. Démontrer que pour tout $k \geqslant 1$:

$$\mathbb{P}([T = 2k]) \;=\; \big(p^2 + (1-p)^2\big)^{k-1}\, 2\, p\, (1-p)$$

En déduire que l'algorithme se termine presque-sûrement, c'est-à-dre : $\mathbb{P}([T < +\infty]) = 1$.

3. Démontrer que l'algorithme renvoie bien « pile » ou « face » avec même probabilité, c'est-à-dire : $\mathbb{P}([R = \text{« pile »}]) = \dfrac{1}{2}$.

4. Calculer $\mathbb{E}(T)$.

Planche 3

Question de cours

Stabilité de la somme pour la loi de Poisson en cas d'indépendance

Exercice

Afin de repérer les infractions au code de la route, la police est équipée de nouveaux radars dont les performances ont pu être longuement éprouvées et validées. Il ressort de la batterie de tests effectués que :

- parmi les véhicules dépassant les limites autorisées, le radar détecte les contrevenants dans 90% des cas.
- parmi les véhicules circulant à une vitesse inférieure à la limite, le radar ne détecte rien dans 95% des cas.

On place le radar au bord de la rue Henri Barbusse et les véhicules détectés par le radar reçoivent une contravention. On note p la proportion de véhicules dépassant les limites autorisées sur la rue Henri Barbusse.

1. Déterminer en fonction de p la proportion de véhicules en infraction parmi ceux ayant reçu une contravention. Pour quelles valeurs de p cette proportion est-elle inférieure à 50% ?

2. Déterminer en fonction de p la proportion de véhicules en infraction parmi ceux n'ayant pas reçu de contravention. La proportion de véhicules en infraction peut-elle être plus forte parmi les véhicules ne recevant pas de contravention que parmi ceux en ayant reçu une ?

3. Déterminer la probabilité $f_{N,k}(p)$ que, parmi N véhicules observés, k reçoivent une contravention.

4. Déterminer la valeur $\hat{p}_N(k)$ pour laquelle $f_{N,k}$ est maximale.