Colles - Semaine 9

Exercice 1
On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln(x)}{1-x}\,dx$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n \ln(x)}{1-x}\,dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 x^n \ln(x)\,dx$$

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente.

3. Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, $-1 \leqslant \dfrac{x\ln(x)}{1-x} \leqslant 0$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{n} \leqslant I_n \leqslant 0$, puis la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Montrer que l'intégrale J_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$, et calculer sa valeur.

5. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} J_k$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I = -\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} + I_{n+1}$.

Exercice 2
On pose, quand l'intégrale converge, $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^{x+1}}\,dt$.

1. Montrer que le domaine de définition de f est $]0,+\infty[$.

2. Montrer que f est décroissante sur $]0,+\infty[$.

3. *a)* Pour $x > 0$, justifier l'existence de $g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^x)}\,dt$.

b) Pour $x > 0$ et $t \geqslant 1$, simplifier $\dfrac{1}{t} - \dfrac{t^{x-1}}{1+t^x}$, puis calculer $g(x)$.

c) En déduire que, pour tout $x > 0$: $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\ln(2)}{x}$.
Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. *a)* Montrer que : $\forall x > 0,\ 0 \leqslant \dfrac{\ln(2)}{x} - f(x) \leqslant \dfrac{1}{2x+1}$.

b) En déduire la limite et un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.

Exercice 3
On considère la fonction H définie sur $\mathbb{R}_+$ par $H(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}\,dt$.

1. Montrer que H est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et calculer $H'(x)$, pour tout $x \geqslant 0$.

3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,H(x) = 0$.

4. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} H(t)\,dt$ est convergente et calculer sa valeur en fonction de $H(0)$.

Exercice 4

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt$.

1. Vérifier que pour $x > 0$, $f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x+1}$.

2. Donner le sens de variation de f.

3. En utilisant la question ***1*** :

a) Trouver la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Donner un équivalent simple de $f(x)$ en $+\infty$.