ECE2
Mathématiques

Programme de colle - Semaine 13

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Transformation affine d'une v.a.r. uniforme**

On demandera à l'étudiant de démontrer l'une des **implications** *suivantes.*

1. $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]) \quad \Leftrightarrow \quad Y = (b-a)X + a \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$

2. $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b]) \quad \Leftrightarrow \quad Y = \dfrac{1}{b-a}(X-a) \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$

Démonstration.

• Notons $h : x \mapsto (b-a)x + a$, de telle sorte que $Y = h(X)$.
Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, alors $X(\Omega) = [0,1]$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} Y(\Omega) & = & \big(h(X)\big)(\Omega) \ = \ h\big(X(\Omega)\big) & \\ & = & h([0,1]) & \\ & = & [h(0), h(1)] & \textit{(car } h \textit{ est continue et strictement croissante sur } [0,1]\textit{)} \\ & = & [a,b] & \end{array}$$

Donc : $Y(\Omega) = [a,b]$.

• Déterminons la fonction de répartition de Y, F_Y.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

× Soit $x < a$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) = [a,b]$. Ainsi :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

× Soit $x > b$, alors $[Y \leqslant x] = \Omega$ car $Y(\Omega) = [a,b]$. Ainsi :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

× Soit $x \in [a,b]$.

$$\begin{array}{rcll} F_Y(x) & = & \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([(b-a)X + a \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant \dfrac{x-a}{b-a}\right]\right) \ = \ F_X\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right) & \\ & = & \dfrac{x-a}{b-a} & \textit{(par définition de } F_X \textit{ et car } \dfrac{x-a}{b-a} \in [0,1]\textit{)} \end{array}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}([a,b])$. Comme la fonction de répartition caractérise la loi, on en déduit que $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$.

$\square$

- **Méthode d'inversion pour la loi exponentielle**
  Soit $\lambda \in]0,+\infty[$.
  $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[) \quad \Rightarrow \quad Y = -\dfrac{1}{\lambda}\ \ln(1-X) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

  Démonstration.

  - Notons $h : x \mapsto -\dfrac{1}{\lambda}\ \ln(1-x)$, de telle sorte que $Y = h(X)$.
    Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, alors $X(\Omega) =]0,1[$. On en déduit :
    $$\begin{array}{rcll} Y(\Omega) & = & \big(h(X)\big)(\Omega) \ = \ h\big(X(\Omega)\big) & \\ & = & h(]0,1[) & \\ & = & \left]\lim\limits_{x\to 0} h(0), \lim\limits_{x\to 1} h(x)\right[& \textit{(car } h \textit{ est continue et strictement croissante sur }]0,1[\ (*)\textit{)} \\ & = &]0,+\infty[& \end{array}$$
    Ainsi : $Y(\Omega) =]0,+\infty[$.
    On peut démontrer $(*)$ par une rapide étude de fonction :
    × la fonction h est dérivable (donc continue) sur $]0,1[$ en tant que composée de fonctions dérivables.
    × soit $x \in]0,1[$.
    $$h'(x) \ = \ -\frac{1}{\lambda}\ \left(-\frac{1}{1-x}\right) \ = \ \frac{1}{\lambda(1-x)} > 0$$
    Donc la fonction h est strictement croissante sur $]0,1[$.
  - Déterminons la fonction de répartition de Y.
    × Soit $y \leqslant 0$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) = [0,+\infty[$. Donc :
    $$F_Y(y) = \mathbb{P}([Y \leqslant y]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$
    × Soit $y \in]0,+\infty[$.
    $$\begin{array}{rcll} F_Y(y) & = & \mathbb{P}([Y \leqslant y]) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-X) \leqslant y\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}([\ln(1-X) \geqslant -\lambda y]) & \textit{(car } -\lambda < 0\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[1-X \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda y}\right]\right) & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant 1-\mathrm{e}^{-\lambda y}\right]\right) & \\ & = & F_X\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda y}\right) & \end{array}$$
    Or on a les équivalences suivantes :
    $$\begin{array}{rcll} 0 < y & \Leftrightarrow & 0 > -\lambda > -\lambda\, y & \textit{(car } -\lambda < 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 1 = \mathrm{e}^0 > \mathrm{e}^{-\lambda y} > 0 & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 0 < 1-\mathrm{e}^{-\lambda y} < 1 & \end{array}$$
    De plus, comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$: $F_X : u \mapsto \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } u \leqslant 0 \\ u & \text{si } u \in]0,1[\\ 1 & \text{si } u \geqslant 1 \end{array}\right.$,
    donc $F_X\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda y}\right) = 1-\mathrm{e}^{-\lambda y}$.

Finalement : $F_Y : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda y} & \text{si } y > 0 \end{cases}$.

On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ. Or la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r. , donc $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. □

- **Propriétés de Φ, où Φ est la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$**

- $\phi(0) = \mathbb{P}([X \leqslant 0]) = \dfrac{1}{2}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\phi(-x) = 1 - \phi(x)$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}([|X| \leqslant x]) = 2\phi(x) - 1$$

Démonstration.

- Comme φ est une densité, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\ dt$ converge. De plus :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\ dt &= 2\int_{-\infty}^{0} \varphi(t)\ dt \quad \textit{(car } \varphi \textit{ est paire)} \\ &= 2\,\phi(0) \\ &= 2\,\mathbb{P}([X \leqslant 0]) \end{aligned}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \varphi(t)\ dt$$

On effectue alors le changement de variable $\boxed{u = \psi(t)}$, avec la fonction ψ de classe $\mathcal{C}^1$ définie par $\psi : t \mapsto -t$.

$$\left| \begin{array}{l} u = -t \\ \hookrightarrow du = -\ dt \quad \text{et} \quad dt = -\ du \\ \bullet\ t = -\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \\ \bullet\ t = -x \ \Rightarrow\ u = x \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-x} \varphi(t)\ dt &= \int_{x}^{+\infty} \varphi(-u)\ du \\ &= \int_{x}^{+\infty} \varphi(u)\ du \qquad \textit{(car } \varphi \textit{ est paire)} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\ du - \int_{-\infty}^{x} \varphi(u)\ du \\ &= 1 - \phi(x) \end{aligned}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([|X| \leqslant x]) &= \mathbb{P}([-x \leqslant X \leqslant x]) \\ &= \phi(x) - \phi(-x) \\ &= \phi(x) - (1 - \phi(x)) \\ &= 2\,\phi(x) - 1 \end{aligned}$$

□

Connaissances exigibles

- Définition v.a. à densité, caractérisation fonction de répartition (fdr) et densité de probabilité, lien entre fdr et densité
- Formules de calcul de $\mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b])$ et autres, pour X une v.a. à densité
- Définition, linéarité et croissance de l'espérance d'une v.a. à densité
- Théorème de transfert
- Moments d'ordre r
- Définitions et propriétés de la variance et de l'écart-type
- Définition indépendance de deux v.a., lemme des coalitions, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$ **si X et Y sont indépendantes**
- Ensemble image, densité, fonction de répartition, espérance, variance, graphes : loi uniforme, loi exponentielle, lois normales
- Transformation affine d'une loi uniforme
- Propriétés de la fonction de répartition Φ d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$
- Transformée affine d'une loi gaussienne
- Lecture de la table de la loi $\mathcal{N}(0,1)$