ORAUX HEC 2007

I. Annales 2007

Exercice 1

Question de cours : un estimateur d'un paramètre θ de la loi P_X d'une variable aléatoire X dont on dispose d'un échantillon (X_n) est une suite de variables aléatoires (T_n) où pour tout n, T_n est une fonction des variables $X_1, \ \dots X_n)$.
On définit alors son biais comme $\mathbb{E}(X-\theta)$, et son risque quadratique comme l'espérance des écarts à θ mis au carré :
$R = E([X-\theta]^2)$.

On considère n $(n > 2)$ variables aléatoires réelles indépendantes X_1,..., X_n de même loi de densité

$$f_0\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{\theta^3} & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où θ est un paramètre strictement positif. On pose

$$S = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{et} \quad T = \max\left(X_1, \cdots, X_n\right)$$

1. $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\theta^3}\displaystyle\int_0^x 3x^3 \ dx = \frac{3}{4}\theta$ donc $\mathbb{E}(S) = \frac{3}{4}n\theta$.
$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{\theta^3}\displaystyle\int_0^x x^4 \ dx = \frac{3}{5}\theta^2$.
Enfin $\mathbb{V}(X) = \theta^2\left(\frac{3}{5} - \frac{9}{16}\right) = \theta^2\frac{48-45}{80} = \frac{3}{80}\theta^2$ donc $\mathbb{V}(S) = n\mathbb{V}(X) = \frac{3}{80}n\theta^2$.

2. $\mathbb{P}\left([[T \leqslant t]]\right) = P\left[X \leqslant t\right]n = 0$ si $x < 0$, 1 si $x > \theta$ et $\left(\frac{x}{\theta}\right)^{3n}$ si $0 \leqslant x \leqslant \theta$.

On en déduit une densité $f_T(x) = 0$ si $x \notin [0;\theta]$ et $f_T(x) = \frac{3nx^{3n-1}}{\theta^{3n}}$.

Ensuite $\mathbb{E}(T) = \displaystyle\int_0^\theta tf_T(t) \ dt = \frac{3n\theta}{(3n+1)}$.

De même $\mathbb{E}(T^2) = \frac{3n\theta^2}{(3n+2)}$, et enfin :

$\mathbb{V}(T) = \frac{3n\theta^2}{(3n+2)} - \frac{9n^2\theta^2}{(3n+1)^2}$.

3. On suppose maintenant que θ est un paramètre inconnu qu'on se propose d'estimer.

a) Les variables $S' = \frac{4}{3n}S$ et $T' = \frac{3n+1}{3n}T$ sont des estimateurs sans biais de θ.
On a $\mathbb{V}(S') = \frac{16}{9n^2}\mathbb{V}(S) = \frac{\theta^2}{15n}$ et $\mathbb{V}(T') = \frac{(3n+1)^2}{9n^2}\mathbb{V}(T) = \frac{(3n+1)^2\theta^2}{3n(3n+2)} - \theta^2 = \theta^2\frac{(3n+1)^2-3n(3n+2)}{3n(3n+2)}$.
$\mathbb{V}(T') = \frac{\theta^2}{3n(3n+2)}$.

b) Les deux risques quadratiques tendent vers 0 mais le premier est équivalent à $\frac{\theta^2}{15n}$ et le deuxième à $\frac{\theta^2}{9n^2}$, donc $\mathbb{V}(T'_n)$ converge plus rapidement vers 0, et T' est donc le meilleur des deux estimateurs.

Exercice sans préparation

Un agriculteur souhaite améliorer le rendement de son exploitation en utilisant de l'engrais. Une étude a montré que le rendement, en tonnes par hectare, pour la variété de blé cultivée est donn é par

$$f(B,N) = 120B - 8B^2 + 4BN - 2N^2$$

B désigne la, quantité de semences de blé utilisée, N la quantité d'engrais utilisée.

1. f est de classe C^2, et on a :
$f'_B(B,B) = 120 - 16B + 4N$, $f'_N(B,N) = 4B - 4N$, $f''_{B,B}(B,N) = -16$, $f''_{B,N}(B,N) = 4$ et $f''_{N,N}(B,N) = -4$.

Les points vérifient $120 - 16B + 4N = 0$ et $4B - 4N = 0$, donc $B = N$ et $120 - 12B = 0$, et enfin $B = N = 10$.
Au point $(10,10)$ on a $r = -16$, $s = 4$ et $t = -4$ donc $rt - s^2 = 64 - 16 = 48 > 0$ et $r = -16 < 0$, c'est donc un maximum local.
De plus on peut écrire $f(B,N) = 120B - 6B^2 - 2(B^2 - 2BN + N^2) = 120B - 6B^2 - 2(B-N)^2 = -6[(B-10)^2 - 100] - 2(B-N)^2 = -6(B-10)^2 - 2(B-N)^2 + 600 = -6(B-10)^2 - 2(B-N)^2 + f(10,10)$ donc $(10,10)$ est un maximum global de f.

2. On traduit la contrainte : on a $B = 23 - 2N$ donc le rendement est donné par $g(N) = f(23-2N, N) = 120(23-2N) - 8(23-2N)^2 + 4(23-2N)N - 2N^2 = N^2(-32-8-2) + N(-240+736+92) + (120-184)\times 23 = -42N^2 + 588N - 64\times 23$.
On dérive : $g'(N) = -84N + 588$, qui s'annule pour $N = \frac{588}{84} = \frac{294}{42} = \frac{147}{21} = \frac{21}{3} = 7$ et $B = 23 - 14 = 9$ donc le rendement optimum vaut $f(9,7) = 1080 - 648 + 252 - 98 = 432 + 154 = 586$.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On note pour tout endomorphisme u de E et pour tout $\in \mathbb{N}^*$, $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et

$$u^r = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{r \text{ termes}}$$

On commence par considérer un endomorphisme non nul de E tel que pour tout $x \in E$ il existe $r(x) \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^{r(x)} = 0$

1. Une matrice carrée d'ordre n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable. Une matrice telle que la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut n est aussi diagonalisable. On peut encore citer la base de vecteurs propres.

2. On se donne une base $(e_1, \ \dots \ e_n)$ de E, et on pose $r_0 = \max\{r(e_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$.
Alors pour tout i, $u^{r_0}(e_i) = 0$ et pour tout $x \in E$ s'écrivant $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a :
$u^{r_0}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i u^{r_0}(e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} 0 = 0$.
Soit maintenant $A = \{k \in \mathbb{N} \mid u^k = 0\}$.
A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide donc il admet un minimum. On note r ce minimum, on a alors $r-1 \notin A$ donc $u^{r-1} \neq 0$ et $u^r = 0$.
Enfin comme $u \neq 0$ on sait que $r \geqslant 2$.

3. Le polynôme $P([x]) = x^r$ est annulateur de u et admet pour unique racine 0 donc on a $\mathrm{Sp}(u) \subset \{0\}$.
De plus 0 est valeur propre car u n'est pas inversible.
En effet, sinon en composant $r-1$ fois par u^{-1} l'égalité $u^r = 0$ on aurait $u = 0$, ce qui est absurde.
Enfin comme u admet pour unique valeur propre 0, on montre par l'absurde que si il était diagonalisable, il admettrait pour matrice la matrice nulle et serait nul. u n'est donc pas diagonalisable.

4. On suppose que $v(x) = 0$, on a alors $\sum\limits_{k=0}^{r-1} \frac{u^k(x)}{k!} = 0$.
On compose par u^{r-1}, cela donne $u^0(x) = 0$ donc $x = 0$.
L'application v est donc injective, et comme c'est un endomorphisme, c'est bien un isomorphisme de E.
L'idée pour l'inverse est de remarquer l'analogie avec la série exponentielle, et comme $e^x \times e^{-x} = 1$, on va poser $w = \sum\limits_{k=0}^{r-1} \frac{(-u)^k}{k!}$, et calculer $w \circ v$.
On a $w \circ v = \sum\limits_{k=0}^{r-1} \sum\limits_{i=0}^{r-1} (-1)^i \frac{u^{k+i}}{k!i!}$
$= \sum\limits_{k=0}^{r-1} \sum\limits_{i=0}^{r-1} \frac{1}{(i+k)!} \binom{i+k}{i} (-1)^i u^{k+i}$.

On réordonne la somme en posant $n = i + k$, on a $i \leqslant n$ car $k \geqslant 0$, cela donne :
$w \circ v = \sum\limits_{n=0}^{r-1} \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{i} (-1)^i u^n$ car $u^n = 0$ pour $n > r-1$.
$w \circ v = \sum\limits_{n=0}^{r-1} \frac{u^n}{n!} \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \times 1^{n-i}$.
$w \circ v = \frac{u^0}{0!} + \sum\limits_{n=1}^{r-1} \frac{u^n}{n!} (1-1)^n = \mathrm{id}$.

On obtient alors $v^{-1} = w = \sum\limits_{k=0}^{r-1} \frac{(-u)^k}{k!}$.

5. Si $u(x) = 0$, alors $v(x) = x + \sum\limits_{k=1}^{n} u^k(x) = x$ donc $(v - \mathrm{id})(x) = 0$.
On obtient $\ker u \subset \ker(v - \mathrm{id})$.

6. 0 est valeur propre de u donc $\ker u \neq \{0\}$, donc $\ker(v - \mathrm{id}) \neq 0$, et 1 est valeur propre de v.
Plus généralement, on se donne $\lambda \neq 1$, et on étudie :
$v(x) = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x = \sum\limits_{k=0}^{r-1} \frac{u^k(x)}{k!}$.
On compose par u^{r-1} et on obtient :
$\lambda u^{r-1}(x) = u^{r-1}(x)$, donc $(\lambda - 1)u^{r-1}(x) = 0$.
On a $\lambda \neq 1$ donc $u^{r-1}(x) = 0$.
On a alors $(\lambda - 1)x = \sum\limits_{k=1}^{r-2} \frac{u^k(x)}{k!}$, et on compose par u^{r-2}, cela donne :
$(\lambda - 1)u^{r-2}(x) = 0$, donc $u^{r-2}(x) = 0$ et ainsi de suite....
On obtient finalement $u(x) = 0$, puis $\lambda x = x$, $(\lambda - 1)x = 0$ et enfin $x = 0$ car $\lambda - 1 \neq 0$.
Il n'y a donc pas de solutions autres que 0, et la seule valeur propre de v est 1.

Exercice sans préparation

Soient n et N des entiers non nuls.
Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On effectue N tirages avec remise dans cette urne.

1. $F_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \frac{1}{n}\right)$.
On pose :

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

F est une variable certaine égale à N, car elle compte le nombre total de jetons tirés.
On en déduit que $\mathbb{E}(F) = N$ et $\mathbb{V}(F) = 0$.

Les variables F_i ne sont pas deux à deux indépendantes.
Par exemple pour $i \neq j$, $\mathbb{P}([F_i = N, F_j = N]) = 0 \neq \mathbb{P}([[F_i = N]])\,\mathbb{P}([[F_j = N]])$ (on ne peut pas tirer $2N$ jetons).

2. X_i est une variable de Bernouilli de paramètre $\mathbb{P}([[X_i = 1]]) = 1 - \mathbb{P}([[X_i = 0]]) = 1 - P[F_i = 0] = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.
D'où $\mathbb{E}(X_i) = p = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ et $\mathbb{V}(X_i) = p(1 - p) = \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right] \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

$P_{[X_i=0]}[X_j = 0] = P_{F_i=0}[F_j = 0] = \left(1 - \frac{1}{N-1}\right)^n$ car on tire parmi $N - 1$ boules (on sait que la boule i n'est jamais tirée, on peut faire les calculs en considérant qu'elle n'est pas là.
on obtient $P_{[X_i=0]}[X_j = 0] \neq \mathbb{P}([[X_j = 0]])$ donc X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

Exercice 3

1. Une densité de probabilité est positive, continue sauf en un nombre fini de points (c'est la cas ici à condition que $c \geqslant 0$ et vérifie $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 1$.
Ici on calcule $\displaystyle\int_{10}^{x} \frac{x}{t^2}\ dt = \left[\frac{-c}{t}\right]_{10} x = \frac{-c}{x} + \frac{c}{10} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{c}{10}$ donc il faut $c = 10$, et f est bien positive.

2. Cela signifie que $F(m) = 1 - F(m)$, donc $F(m) = \frac{1}{2}$.
Or $F(x) = 0$ pour $x < 10$ (pas de solution dans cet intervalle) et $F(x) = 1 - \frac{10}{x}$ sinon.
D'où m vérifie $\frac{10}{m} = \frac{1}{2}$, et enfin $m = 20$.

3. On définit la loi binomiale de paramètres 5 et $\mathbb{P}\left([[X \geqslant 15]]\right) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.
On cherche $\mathbb{P}\left([[X \geqslant 3]]\right) = \binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{5}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right) + \binom{5}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 10\frac{8}{3^5} + 5\frac{16}{3^5} + \frac{32}{3^5} = \frac{80+80+32}{3^5} = \frac{192}{3^5} = \frac{64}{3^4} = \frac{64}{81}$.

Deux machines A et B sont équipées de composants du type préc édent. Plus précisément.

- A contient deux composants et cesse de fonctionner dès que l'un de ces composants est défectueux,
- B contient également deux composants mais un seul de ces composants suffit à la faire fonctionner

On note T_A, T_B les durées de fonctionnement de ces machines.

4. $T_A = \min(X_1, X_2)$ donc $F_{T_A}(x) = 1 - (1 - F_X(x))^2 = 1 - \frac{100}{x^2}$ si $x \geqslant 10$ et 0 sinon, et $f_{T_A}(x) = \frac{200}{x^3}$ si $x \geqslant 10$ et 0 sinon.

$T_B = \max(X_1, X_2)$ donc $F_{T_B}(x) = (F(x))^n = \left(1 - \frac{10}{x}\right)^2$ si $x \geqslant 10$ et 0 sinon, et $f_{T_B}(x) = \frac{20}{x^2}\left(1 - \frac{10}{x}\right)$ si $x \geqslant 10$ et 0 sinon.

5. Pour T_A comme T_B, le seul problème est en $+\infty$.
Or $xt_{T_A}(x) = \frac{200}{x^2}$ est une fonction intégrable en $+\infty$ (Riemann) et $xf_{T_B}(x) \sim \frac{20}{x}$ en $+\infty$, qui n'est pas intégrable en $+\infty$ (Riemann à nouveau) donc par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale de $tf(t)$ diverge.
D'où T_A admet une espérance, mais pas T_B.
Un calcul d'intégrale facile donne $\mathbb{E}(T_A) = 20$.

Exercice sans préparation

1. Les vecteurs $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$ remplissent cette condition.

1er cas : il y a deux valeurs propres distinctes, alors les sous-espaces propres sont de dimension 1. Alors si e_1 est vecteur propre associé à λ_1, $E_{\lambda_1} = \mathrm{Vect}\,(e_1)$ et les deux autres ne sont pas vecteurs propres associés à λ_1. Si l'un des deux autres est vecteur propre associé à λ_2, le troisième ne sera alors pas vecteur propre.
2e cas : une seule valeur propre, et un sous-espace propre associé de dimension 2 ($u = \lambda\mathrm{id}$, alors les trois vecteurs (et tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$) sont vecteurs propres associé à la valeur propre λ.

2. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{F}$ une famille de $n+1$ vecteurs propres de f s'il en existe.

a) Non, car $\operatorname{Card} \mathcal{F} > \dim \mathbb{R}^n$.

b) Supposons qu'il existe plusieurs valeurs propres distinctes (k valeurs propres), alors il existe une valeur propre λ telle que $\dim E_\lambda \leqslant n-1$.
Soit a un vecteur propre de $\mathcal{F}$ associé à λ, alors la famille restante est une base de vecteurs propres.
Il y a donc une sous-famille de cette famille qui est une base de E_λ, et comme $a \in E_\lambda$, a s'écrit $a = \sum a_i e_i$ avec les a_i non tous nuls car $a \neq 0$.
On obtient que la famille $(a, e_1, \ \dots \ e_p)$ est liée, avec $p \leqslant n-1$ donc il y a moins de n vecteurs.
On la complète avec d'autres vecteurs de $\mathcal{F}$ et on obtient une sous-famille de $\mathcal{F}$ constituée de n vecteurs et liée, ce qui contredit l'hypothèse de départ.
On en déduit que f admet une unique valeur propre, et comme elle admet des bases de vecteurs propres, elle est diagonalisable et $f = \lambda \mathrm{id}$.

Exercice 4

Question de cours. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements, c'est-à-dire une famille d'évènements deux à deux incompatibles, dont la réunion est Ω l'univers de l'expérience et dont aucun n'est négligeable (ils ont des probabilités non nulles).
Alors pour tout évènement $B \in \Omega$, $\mathbb{P}([B]) = \sum_{i\in I}^{\mathbb{P}} (B \cap A_i) = \sum_{i\in I}^{\mathbb{P}} ([A_i])\, P_{A_i}(B)$.

On lance deux pièces truquées : La pièce 1 donne pile avec une probabilité p_1 et la pièce 2 donne pile avec une probabilité, p_2.
On effectue les lancers de la façon suivante : on choisit une pièce uniformément au hasard et on lance la pièce choisie. Si on obtient pile, on relance la même pièce et ainsi de suite jusqu'a ce que l'on obtienne face ; à ce moment on change de pièce - plus géné ralement, dès que l'on obtient face, on change de pièce. On suppose que p_1 et p_2 sont dans $]0,1[$

1. On pose A_n, de probabilité a_n, l'évènement : "lancer la pièce 1 au n-ième lancer" et B_n, de probabilité b_n, l'évènement : "lancer la pièce 2 au n-ième lancer".
Comme (A_n, B_n) est un système complet d'évènements on a :
$a_{n+1} = \mathbb{P}([A_n])\, P_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}([B_n])\, P_{B_n}(A_{n+1}) = a_n p_1 + (1-a_n)(1-p_2) = a_n(p_1+p_2-1)+1-p_2$.

On reconnaît une suite arithmético-géométrique, on résout $k = k(p_1+p_2-1)+1-p_2 \Leftrightarrow k(2-p_1-p_2) = 1-p_2 \Leftrightarrow k = \frac{1-p_2}{2-p_1-p_2}$.
La suite $u_n = a_n - k$ est alors géometrique de raison (p_1+p_2-1), donc pour tout n on a :
$a_n = u_n + \frac{1-p_2}{2-p_1-p_2} = (p_1+p_2-1)^{n-1}u_1 + \frac{1-p_2}{2-p_1-p_2} = (p_1+p_2-1)^{n-1}\left(a_1 - \frac{1-p_2}{2-p_1-p_2}\right) + \frac{1-p_2}{2-p_1-p_2} = (p_1+p_2-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1-p_2}{2-p_1-p_2}\right) + \frac{1-p_2}{2-p_1-p_2}$.

2. Avec le même système complet on a en posant P_n : "on obtient pile au n-ième tirage" :
$r_n = \mathbb{P}([A_n])\, P_{A_n}(P_n) + \mathbb{P}([B_n])\, P_{B_n}(P_n) = a_n p_1 + (1-a_n)p_2 = a_n(p_1-p_2)+p_2 = (p_1 - p_2)\left[(p_1+p_2-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1-p_2}{2-p_1-p_2}\right) + \frac{1-p_2}{2-p_1-p_2}\right] + p_2$.

3. On a $0 < p_1 < 1$ et $0 < p_2 < 1$ donc $0 < p_1+p_2 < 2$ et enfin $-1 < 1-p_1-p_2 < 1$.
D'où $\lim\, (p_1+p_2-1)^{n-1} = 0$, et on obtient $L = \frac{(p_1-p_2)(1-p_2)}{2-p_1-p_2} + p_2$.

4. On calcule $L = \frac{\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}{32} + \frac{1}{6} = \frac{5}{36}\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{54} + \frac{9}{54} = \frac{14}{54} = \frac{7}{27}$.
Ensuite on simplifie $r_n = \frac{1}{6}\left[\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{-1}{18} + \frac{5}{9}\right] + \frac{1}{6}$.
Petit problème avec l'énoncé : on ne peut pas calculer un rang à partir duquel... avec un programme ! On peut par contre calculer la première valeur telle que..., mais sans assurance que les suivantes vérifieront toutes la propriété (penser au fait que la suite n'est pas monotone). Par contre si on veut un rang à partir duquel... il faut réaliser une étude mathématique pour majorer (ou calculer) $|r_n - L| = \frac{1}{54}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; dans ce cas l'intervention de l'informatique est bien inutile : un petit passage au logarithme permet de déterminer n sans problème.
On obtient le programme suivant :

```
var n : integer ; r : real ;
n : = 1 ; r : = 1/54 ;
repeat
n : = n + 1 ; r : = r/2 ;
until r < exp (-6 * ln ( 10) ) ;
writeln (n) ;
```

(programme qui sert à calculer une valeur qu'une calculatrice et un calcul de logarithme donnerait sans problème...)

Exercice sans préparation

Soit u et v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices respectives dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}2$ sont notées A et B. On suppose que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Si v était bijectif, B serait inversible et on aurait $ABB^{-1} = 0B^{-1}$ donc $A = 0$, puis $BA = B0 = 0$ ce qui est absurde.
Donc v n'est pas bijectif.
On en déduit que $\mathrm{Im}(v)$ est de dimension inférieure ou égale à 1.
D'autre part on a $\mathrm{Im}(v) \circ u \subset \mathrm{Im}(v)$ et $\mathrm{Im}(v) \circ u = \mathrm{Vect}\,(e_1)$ est de dimension 1.
On en déduit que $\dim(\mathrm{Im}(v)) \geqslant 1$, puis $\dim(\mathrm{Im}(v)) = 1$ et avec l'égalité des dimensions, $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}(v) \circ u = \mathrm{Vect}\,(e_1)$.

2. De la même manière u n'est ni bijectif ni nul donc $\dim \ker u = 1$.
Or $\ker(v \circ u) \subset \ker u$ est de dimension 1, donc $\ker u = \ker(v \circ u)$ et $e_1 \in \ker(v \circ u)$, donc (e_1) (famille libre car constituée d'un vecteur non nulle, et de cardinal égal à la dimension) est une base de $\ker(v \circ u)$, et enfin $\ker u = \mathrm{Vect}\,(e_1) = \mathrm{Im}(v)$.

3. On a $u(e_1) = 0$ donc $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Vect}\,(e_1)$ donc $B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
En calculant AB et BA on obtient bien $AB = 0$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & ac + bd \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc il faut rajouter la condition $ac + bd = 1$ pour satisfaire les hypothèses.

Exercice 5

Soit $\alpha > 0$, $x_0 > 0$ et f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{\alpha}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1} \text{ si } x \geqslant x_0 \quad \text{et} \quad f(x) = 0 \text{ sinon}$$

1. a) Une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F est dite à densité s'il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ positive, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points, et vérifiant $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 1$, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$.

Ici on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = \lim_{x\to+\infty} \int_{x_0}^{x} \frac{\alpha}{x_0}\left(\frac{x_0}{t}\right)^{\alpha+1} dt = \lim_{x\to+\infty} x_0\alpha\left[-\frac{1}{t^\alpha}\right]_{x_0} x = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x_0\alpha}{x^\alpha} + \frac{x_0\alpha}{x_0\alpha}\right) =$ 1.

Ensuite on a $F(x) = 0$ si $x < x_0$, et $F(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha$ si $x \geqslant x_0$.

b) Seule l'intégrabilité en $+\infty$ pose problème.
De plus on a $tf(t) = \alpha x_0 \alpha \frac{1}{x^\alpha}$ qui est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$ (Riemann) donc X admet une espérance si et seulement si $\alpha > 1$.
De même X admet un moment d'ordre 2 donc une variance si et seulement si $\alpha > 2$.
Enfin si $\alpha > 1$, un calcul d'intégrale facile donne $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\alpha-1}x_0$.

c) $M_X(x) = \dfrac{\mathbb{E}(X) - \displaystyle\int_{-\infty}^{x} tf(t)\ dt}{1-F_X(x)} = \dfrac{\mathbb{E}(X) - \displaystyle\int_{x_0}^{x} tf(t)\ dt}{\left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha} = \frac{\alpha x_0 \alpha}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} \times \frac{x^\alpha}{x_0\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha-1}x.$

2. On se propose d'établir une réciproque de la propriété précédente. Soit $x_0 > 0$ et Y une variable aléatoire à valeurs dans $[x_0, +\infty[$ de densité h continue, à valeurs strictement positives, admettant une espérance et telle qu'il existe un réel $k > 1$ vérifiant :

$$\forall x > x_0,\ M_Y(x) = \frac{\displaystyle\int_x^{+\infty} th(t)\,dt}{\displaystyle\int_x^{+\infty} h(t)\,dt} = kx$$

a) On pose, pour tout $x > x_0$

$$G(x) = \int_x^{+\infty} h(t)\,dt$$

On a $G'(x) = -h(x)$, puis en dérivant l'égalité $\displaystyle\int_x^{+\infty} th(t)\,dt = kx\int_x^{+\infty} h(t)\,dt$ on a $-xh(x) = -kxh(x) + kG(x)$, donc $xG'(x) - kxG'(x) = kG(x)$ en enfin $G(x) = \frac{1-k}{k}xG'(x)$.

b) $A'(x) = x^{\frac{k}{k-1}}G'(x) + \frac{k}{k-1}x^{\frac{k}{k-1}-1}G(x) = G'(x)x^{\frac{k}{k-1}}\left(1 + \frac{k}{k-1}\frac{1}{x}\frac{1-k}{k}x\right) = G'(x)x^{\frac{k}{k-1}}(1-1) = 0.$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = K$ une constante réelle, puis que $G(x) = Kx^{-\frac{k}{k-1}}$.
Or en la valeur $x = x_0$, on a $G(x_0) = 1$ donc $K = x_0\frac{k}{k-1}$, et enfin :
$F_Y(x) = 1 - G(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{k}{k-1}}$, et on obtient la loi de Pareto de paramètres x_0 et $\frac{k}{k-1}$.

Enfin avec la valeur en x_0 de M_Y on peut retrouver $\frac{\mathbb{E}(Y)}{1} = kx_0$, donc $\mathbb{E}(Y) = kx_0$ (on a bien $\frac{\frac{k}{k-1}}{\frac{k}{k-1}-1} = k$, et on retrouve les résultats précédents.

Exercice sans préparation

Soient X et Y deux variables aléatoires binomiales de paramètres $(n, 1/2)$ indépendantes. Calculer $\mathbb{P}([X = Y])$.

On paramètre par le système complet d'évènements $[X = k]_{0 \leqslant k \leqslant n}$:
$\mathbb{P}([[X = Y]]) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X = k, Y = k]) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \frac{1}{2^n} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{4^n} \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

On ne sait pas calculer cette somme, la méthode échoue. L'idée est en fait d'utiliser le fait que $\mathbb{P}([[X = k]]) = \mathbb{P}([[X = n - k]])$.
On a alors $\mathbb{P}([[X = Y]]) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([[X = k]]) \mathbb{P}([[Y = k]]) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([[X = k]]) \mathbb{P}([[Y = n - k]]) = \mathbb{P}([[X + Y = n]])$.
On sait que $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2n, \frac{1}{2}\right)$, on en déduit que $\mathbb{P}([[X = Y]]) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$.

Exercice 6

1. Une famille $(f_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite génératrice de E si $\text{Vect}\left(\left(\right)(f_i)_{i\in I}\right) = E$, c'est-à-dire que tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de la famille.
Elle est dite libre si toute combinaison linéaire est unique, c'est-à-dire : $\sum\limits_{i\in I}^{a} {}_i f_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I,\ a_i = 0$.

Dans l'espace vectoriel $C^O(\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère les trois fonctions

$$f_1 : x \to 1 \quad f_2 : x \to x \quad \text{et} \quad f_0 : x \to \left\{ \begin{array}{cl} x\ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array} \right.$$

Soit E le sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R})$ engendré par (f_1, f_2, f_3)

2. Elle est génératrice de E par définition, montrons qu'elle est libre.
Soient a, b, c tels que $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$, donc $a + bx + cx\ln|x| = 0$ pour tout $x \neq 0$, et $a + 0 + 0 = 0$ pour $x = 0$.
On vient d'obtenir $a = 0$, il reste $bx + cx\ln|x| = 0$ pour tout $x \neq 0$.
On a alors $x(b + c\ln|x|) = 0$, donc $b + cx\ln|x| = 0$ pour tout $x \neq 0$.
En $x = 1$ on obtient $b + c\ln 1 = b = 0$, donc $b = 0$.
On en déduit que $c\ln|x| = 0$, pour $x \neq 0$, on prend $x = 2$ en on obtient $c\ln 2 = 0$, donc $c = 0$.

3. A toute fonction f de E on associe la fonction $\Phi(f)$ définie par $\Phi(f) = (xf)'$, dérivée de la fonction $x \to x\ f(x)$

On a $\Phi(f_1)(x) = 1$ donc $\Phi(f_1) = f_1 \in E$, $\Phi(f_2)(x) = 2x$ donc $\Phi(f_2) = 2f_2 \in E$, et $\Phi(f_3)(x) = 2x\ln|x| + x^2\frac{1}{x} = 2x\ln|x| + x$ pour $x \neq 0$ (qui est pour l'instant un abus de notation car on n'a pas prouvé que $x \to xf_3(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On vérifie alors que cette dérivée est prolongeable par continuité, on en déduit par prolongement de la dérivée que $x \to xf_3(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $2f_3(x) + f_2(x)$.
D'où $\Phi(f_3)$ est bien définie et $\Phi(f_3) = 2f_3 + f_2 \in E$.
Toute combinaison linéaire de f_1, f_2 et f_3 admet donc une image par Φ et cette image est combinaison linéaire (car Φ est trivialement linéaire) de $\Phi(f_1), \Phi(f_2), \Phi(f_3)$ qui sont tous dans E, donc elle est dans E.
On obtient bien que Φ est un endomorphisme de E, et on a : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) M est inversible car triangulaire sans 0 sur la diagonale.
Pour son inverse, on peut réaliser :
- un pivot très rapide.
- conjecturer que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & a \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et montrer que $a = -\frac{1}{4}$ en calculant MM^{-1}.
- calculer M^2 et essayer d'en tirer un polynôme annulateur (cela échoue).

b) L'équation $\Phi(f) = g$ est équivalente à $\Phi^{-1}(g) = f$, donc $Mat(f) = M^{-1}Mat(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \frac{1}{2}b - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
La solution de l'équation est donc $f = af_1 + \left(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}\right)f_2 + \frac{1}{2}f_3$.

En particulier on voit que $\Phi\left(\frac{1}{2}f_3 - \frac{1}{4}f_2\right) = f_3$, donc une primitive de f_3 est :
$h(x) = \frac{1}{2}x\ln|x| - \frac{1}{4}x^2$.

Exercice sans préparation

Soient X et Y deux variables aléatoires binomiales de paramètres $(n, 1/2)$ indépendantes. Calculer $\mathbb{P}([X = Y])$.

On paramètre par le système complet d'évènements $[X = k]_{0 \leqslant k \leqslant n}$:
$\mathbb{P}([[X = Y]]) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X = k, Y = k]) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \frac{1}{2^n}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{4^n}\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

On ne sait pas calculer cette somme, la méthode échoue. L'idée est en fait d'utiliser le fait que $\mathbb{P}([[X = k]]) = \mathbb{P}([[X = n - k]])$.
On a alors $\mathbb{P}([[X = Y]]) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([[X = k]])\,\mathbb{P}([[Y = k]]) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([[X = k]])\,\mathbb{P}([[Y = n - k]]) = \mathbb{P}([[X + Y = n]])$.
On sait que $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2n, \frac{1}{2}\right)$, on en déduit que $\mathbb{P}([[X = Y]]) = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} = \binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$.

Exercice 7

Question de cours : Une variable aléatoire suit la loi uniforme sur $[a;b]$ si c'est une variable à densité dont une densité est une fonction constante sur $[a;b]$ et nulle ailleurs.
De plus pour que ce soit une densité de probabilité, un calcul d'intégrale trivial donne cette constante égale à $\frac{1}{b-a}$.

On obtient alors que la fonction $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a;b] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est une densité de X et la fonction de répartition de X est $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant a \\ \frac{x-a}{b-a} \text{ si } x \in [a;b] \\ 1 \text{ si } x \geqslant b \end{cases}$.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $Y = \min(X, 1-X)$ et $Z = (X, 1-X)$.

1. On a $Y(\Omega) = \left[0; \frac{1}{2}\right]$ car si $x \geqslant \frac{1}{2}$, alors $1 - x \leqslant \frac{1}{2}$ donc le minimum est toujours plus petit que $\frac{1}{2}$.
On a donc $F_Y(x) = 0$ si $x < 0$ et 1 si $x > \frac{1}{2}$, et pour tout $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ on a :
$F_Y(x) = 1 - P([\min(X, 1-X) \geqslant x])([X, 1-X]) \geqslant x) = 1 - \mathbb{P}([X \geqslant x, 1-X \geqslant x]) = 1 - \mathbb{P}([X \geqslant x, X \leqslant 1-x]) = 1 - \mathbb{P}([x \leqslant X \leqslant 1-x]) = 1 - (1-x-x) = 2x$.
On en déduit que $f_Y(x) = 2$ si $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ et 0 sinon est une densité de Y, donc Y suit la loi uniforme sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, et $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{4}$.

2. On peut utiliser la loi du max et refaire le même genre de raisonnement qu'à la question précédente.
On peut aussi remarquer que $Z = 1-Y$ donc $Z(\Omega) = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $\mathbb{P}([[Z \leqslant x]]) = \mathbb{P}([1 - Y \leqslant x]) = \mathbb{P}([Y \geqslant 1-x]) = 1 - \mathbb{P}([[Y \leqslant 1-x]]) = 1 - 2(1-x) = 2x - 1$, et $\mathbb{P}([[Z \leqslant x]]) = 0$ sinon.
On en déduit que $f_Z(x) = 2$ si $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ et 0 sinon est une densité de Z, qui suit la loi uniforme sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et vérifie donc $\mathbb{E}(Z) = \frac{3}{4}$.

3. Comme Y et Z sont positives, et $Z \geqslant Y$, $\frac{Y}{Z}(\Omega) \subset [0;1]$.
Pour $x < 0$, $\mathbb{P}([[R \leqslant x]]) = 0$, et pour $x > 1$, $\mathbb{P}([[R \leqslant x]]) = 1$.
De plus on a pour tout $x \in [0;1]$:
$\mathbb{P}([[R \leqslant x]]) = \mathbb{P}([[Y \leqslant xZ]]) = \mathbb{P}([Y \leqslant x - xY]) = P\left(\left[Y \leqslant \frac{x}{1+x}\right]\right) = 2\frac{x}{1+x}$.

On en déduit que la fonction $f_R(x) = \frac{2(1+x)-2x}{(1+x)^2} = \frac{2}{(1+x)^2}$ si $x \in [0;1]$ et 0 sinon est une densité de R.
Enfin $\mathbb{E}(R) = \displaystyle\int_0^1 2\frac{x}{(1+x)^2}\, dx = 2\int_1^2 \frac{x-1}{x^2}\, dx = 2\left[\ln x + \frac{1}{x}\right]_1 2 = 2\ln 2 - 1$.

4.
```
var x, y, z : real;
begin;
randomize;
x : = random;
if x < = 1-x then begin y : = x; z : = 1-x; end;
else begin y : = 1-x; z : = x; end;
end.
```

<u>**Exercice sans préparation**</u>

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. M est symétrique donc diagonalisable, et f est donc diagonalisable.

2. Il reste à calculer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres 2 et -2 (amusez-vous bien !) pour obtenir P et D, puis on écrit $M^n = PD^nP^{-1}$ et on ne va au bout des calculs (calcul de P^{-1}, calcul explicite très lourd de M^n) que si c'est demandé par l'examinateur.

Exercice 8
Question de cours. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements, c'est-à-dire une famille d'évènements deux à deux incompatibles, dont la réunion est Ω l'univers de l'expérience et dont aucun n'est négligeable (ils ont des probabilités non nulles).
Alors pour tout évènement $B \in \Omega$, $\mathbb{P}([B]) = \sum\limits_{i\in I}^{\mathbb{P}} (B \cap A_i) = \sum\limits_{i\in I}^{\mathbb{P}} ([A_i]) P_{A_i}(B)$.
La formule de Bayes, utilisée ci-dessus, donne $P_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}([A])}$ pour tous évènements A et B tels que $\mathbb{P}([A]) \neq 0$.

Une coccinelle se déplace sur un tétraèdre régulier PQRS (une pyramide) en longeant les arêtes. Elle est placée à l'instant $n = 0$ sur le sommet P. On suppose que, si. elle se, trouve sur un sommet à l'instant n, elle sera sur l'un des trois autres sommets
à l'instant $n+1$ de, façon équiprobable.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note p_n (respectivement $q_n,\ r_n$ et s_n) la probabilité que la coccinelle se trouve sur le sommet P (respectivement Q, R et S) à l'instant n.

1. On définit la matrice colonne X_n par

$$X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \\ s_n \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Elle est symétrique donc diagonalisable.

3. Pour simplifier le calcul des valeurs propres, on cherche un polynôme annulateur en calculant A^2 :
On obtient $A^2 = \frac{1}{3}(2A+I)$ donc le polynôme $3X^2 - 2X - 1$, est annulateur, et les seules valeurs propres possibles sont ses racines $\frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}$ et $\frac{2+4}{6} = 1$.
On résout alors les équations $AX = X$ et $AX = \frac{1}{3}X$, on en tire les vecteurs propres et les valeurs propres, puis $A = PDP^{-1}$ et enfin $A^n = PD^nP^{-1}$ et enfin un calcul explicite de A^n (qui peut attendre éventuellement, on va voir pourquoi).
On obtient ensuite par récurrence que $X_n = A^n X_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est la première colonne de A^n, qu'il faut donc calculer (attention, si on ne veut calculer que la première colonne de la matrice intermédiaire, il faut faire le calcul dans le bon ordre).

4. $T(\Omega) = [\![2; +\infty[\![$.
De plus à l'instant 0 on est en P, et à l'instant 1 on est sur un des trois autres sommets, donc on a visité deux sommets de manière certaine.
A partir de la, la coccinelle fait des allers retours entre P et le deuxième sommet, jusqu'au moment ou elle change.
On a donc $\mathbb{P}([[T = k]]) = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3^{k-1}}$.
On a ensuite $\mathbb{E}(T) = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{2k}{3^{k-1}} = 2\left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{3^{k-1}} - 1\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right) = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$.

5. On a $U(\Omega) = [\![3; +\infty[\![$ et :

$\mathbb{P}\left([[U=l]]\right) = \sum\limits_{k=2}^{l-1} \mathbb{P}\left([[T=k]]\right) P_{[T=k]}\left[U=l\right] = \sum\limits_{k=2}^{l-1} \frac{2}{3^{k-1}} \left(\frac{2}{3}\right)^{l-k-1} \frac{1}{3} = \sum\limits_{k=2}^{l-1} \frac{2^{l-k}}{3^{k-1+l-k-1+1}} = \frac{2^l}{3^{l-1}} \sum\limits_{k=2}^{l-1} \frac{1}{2^k} = \frac{2^l}{3^{l-1}} \frac{1}{4} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{l-2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2^{l-1}}{3^{l-1}} - \frac{2}{3^{l-1}} = \frac{2^{l-1}-2}{3^{l-1}}$.

6. $\mathbb{E}(U) = \sum\limits_{l=3}^{+\infty} l\left(\frac{2}{3}\right)^{l-1} - 2\sum\limits_{l=3}^{+\infty} l\left(\frac{1}{3}\right)^{l-1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - 1 - \frac{4}{3} - 2\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} + 2 + \frac{4}{3} = 9 - \frac{9}{2} + 1 = \frac{11}{2}$.

Exercice sans préparation

Un agriculteur souhaite améliorer le rendement de son exploitation en utilisant de l'engrais. Une étude a montré que le rendement, en tonnes par hectare, pour la variété de blé cultivée est donn é par

$$f(B,N) = 120B - 8B^2 + 4BN - 2N^2$$

B désigne la, quantité de semences de blé utilisée, N la quantité d'engrais utilisée.

1. f est de classe C^2, et on a :
$f'_B(B,B) = 120 - 16B + 4N$, $f'_N(B,N) = 4B - 4N$, $f''_{B,B}(B,N) = -16$, $f''_{B,N}(B,N) = 4$ et $f''_{N,N}(B,N) = -4$.

Les points vérifient $120 - 16B + 4N = 0$ et $4B - 4N = 0$, donc $B = N$ et $120 - 12B = 0$, et enfin $B = N = 10$.
Au point $(10,10)$ on a $r = -16$, $s = 4$ et $t = -4$ donc $rt - s^2 = 64 - 16 = 48 > 0$ et $r = -16 < 0$, c'est donc un maximum local.
De plus on peut écrire $f(B,N) = 120B - 6B^2 - 2(B^2 - 2BN + N^2) = 120B - 6B^2 - 2(B-N)^2 = -6[(B-10)^2 - 100] - 2(B-N)^2 = -6(B-10)^2 - 2(B-N)^2 + 600 = -6(B-10)^2 - 2(B-N)^2 + f(10,10)$ donc $(10,10)$ est un maximum global de f.

2. On traduit la contrainte : on a $B = 23 - 2N$ donc le rendement est donné par $g(N) = f(23-2N,N) = 120(23-2N) - 8(23-2N)^2 + 4(23-2N)N - 2N^2 = N^2(-32-8-2) + N(-240+736+92) + (120-184)\times 23 = -42N^2 + 588N - 64\times 23$.
On dérive : $g'(N) = -84N + 588$, qui s'annule pour $N = \frac{588}{84} = \frac{294}{42} = \frac{147}{21} = \frac{21}{3} = 7$ et $B = 23 - 14 = 9$ donc le rendement optimum vaut $f(9,7) = 1080 - 648 + 252 - 98 = 432 + 154 = 586$.

Exercice 9
Question de cours : Une matrice carrée d'ordre n est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut n.

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. M est symétrique donc diagonalisable, donc f aussi.

2. $M+2I$ est de rang 1 (ses quatre colonnes sont colinéaires) donc $\ker(f+2\mathrm{id})$ est de dimension 3. -2 est donc valeur propre et $E_{-2}(f)$ est de dimension 3.

3. $f(1,-1,-1,1) = 2(1,-1,-1,1)$ donc 2 est valeur propre de M et de f.

4. Pour -2, on trouve facilement que $(e_1+e_2, e_1+e_3, e_1-e_4)$ est une base du sous-espace propre ; pour 2 on prend $(1,1,-1,1)$ et on obtient une base de vecteurs propres, donc une base dans laquelle la matrice de f est diagonale, égale à $\mathrm{diag}(-2,-2,-2,2)$ donc $M'^2 = \mathrm{diag}(4,4,4,,4) = 4I$.

5. Pour tout n, $M^n = PM'^nP^{-1}$.
Si n est pair, égal à $2k$, cela donne $M^{2k} = P\left(\left[M'^2\right]\right)^k)P^{-1} = P\left(\left[4^kI\right]\right)P^{-1} = 4^kI = 2^{2k}I = 2^nI$.
Si n est impair égal à $2m+1$, $M^{2k+1} = M^{2k}M = 4^kIM = 2^{2k}M = 2^{n-1}M$.

6. En posant X_n le vecteur colonnes constitué des quatre suites, on a $X_{n+1} = \frac{1}{4}MX_n$, donc $X_n = \frac{1}{4^n}M^nX_0 = \frac{1}{2^n}X_0$ si n est pair et $\frac{1}{2^{n+1}}MX_0$ si n est impair.
On voit que ces suites convergent toutes vers 0.

Exercice sans préparation

Soient A, B, C, des événements de même probabilité p et tels que $\mathbb{P}(A\cap B\cap C) = 0$

1. On a $\mathbb{P}(\overline{A\cap B\cap C}) = \mathbb{P}(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}) = 1$ et $\mathbb{P}(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}) \leqslant \mathbb{P}\left(\left[\overline{A}\right]\right) + \mathbb{P}\left(\left[\overline{B}\right]\right) + \mathbb{P}\left(\left[\overline{C}\right]\right) = 3(1-p)$.
On en déduit que $1 \leqslant 3(1-p)$, $1-p \geqslant \frac{1}{3}$ et enfin $p \leqslant \frac{2}{3}$.

2. Il faut pour cela que les trois évènements $\overline{A}, \overline{B}$ et $\overline{C}$ soient incompatibles et de probabilité $\frac{1}{3}$, formant un système complet d'évènement.
Par exemple en prenant $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{0;1;2\})$, les évènements $A = (X \neq 0)$, $B = (X \neq 1)$ et $C = (X \neq 2)$ vérifient $\mathbb{P}([A]) = \mathbb{P}([B]) = \mathbb{P}([C]) = \frac{2}{3}$ et $P(A\cap B\cap C) = 0$.

3. On utilise la formule du crible pour faire apparaître $A\cap B$, $A\cap C$ et $B\cap C$:
$\mathbb{P}(A\cup B\cup C) = P([A]) + \mathbb{P}([B]) + \mathbb{P}([C]) - \mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A\cap C) - \mathbb{P}(B\cap C) + \mathbb{P}(A\cap B\cap C)$.
D'où $P(A\cup B\cup C) = 3p - 3p^2 = 3p(1-p)$.
Or la fonction $f(p) = 3p(1-p)$ atteint son maximum en $p = \frac{1}{2}$, où elle vaut $\frac{1}{4}$.

On en déduit que $P(A \cup B \cup C) \leqslant \frac{3}{4}$.
Pour réutiliser l'hypothèse, on passe au contraire pour faire apparaître des intersections :

$\mathbb{P}(\overline{A \cup B \cup C}) = P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \geqslant \frac{1}{4}$.

On a de plus $(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \subset (\overline{A} \cap \overline{B})$, donc :
$\frac{1}{4} \leqslant P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \leqslant P(\overline{A} \cap \overline{B}) = (1-p)^2$.

Enfin cela donne $1 - p \geqslant \frac{1}{2}$, et $p \leqslant \frac{1}{2}$.

4. Il faut avoir $\mathbb{P}([A]) = \mathbb{P}([B]) = \mathbb{P}([C])$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4}$, ces trois derniers étant deux à deux incompatibles (faire un dessin !!!!).

Il faut séparer Ω en quatre évènements de probabilité $\frac{1}{4}$: le premier est $A \cap B$, le deuxième $A \cap C$ et le troisième $B \cap C$:
Exemple : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1;2;3;4\})$.
On pose $A = (X \in \{1;2\})$, $B = (X \in \{1;3\})$ et $C = (X \in \{2;3\})$.
On a $\mathbb{P}([A]) = P([B]) = \mathbb{P}([C]) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4}$ donc les évènements A, B et C sont deux à deux indépendants.