ORAUX HEC 2009

I. Annales 2009

Exercice 1 *(Exercice avec préparation)*

1. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements, c'est-à-dire vérifiant que $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$, $\bigcup\limits_{i\in I}^{A} i = \Omega$ et $\mathbb{P}([A_i]) \neq 0$ pour tout i.

Alors pour tout évènement E, on a $\mathbb{P}([E]) = \sum\limits_{i\in I}^{\mathbb{P}} (E \cap A_i) = \sum\limits_{i\in I}^{\mathbb{P}} ([A_i]) P_{A_i}(E)$.

2. $p_1 = q_1 = r_1 = \frac{1}{3}$ (on choisit au hasard).

3. $p_n + q_n + r_n = 1$ car les évènements associés forment un système complet d'évènements.

4. On a $p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{12}r_n$.
$q_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + q_n + \frac{7}{12}r_n$.
$r_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}r_n$.

5. $p_n = \frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{1}{12}r_{n-1} = \left(\frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{1}{3}r_{n-1}\right) - \frac{1}{3}r_{n-1} + \frac{1}{12}r_{n-1} = r_n - \frac{1}{4}r_{n-1}$.

6. $r_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}r_n = \frac{1}{3}r_n - \frac{1}{12}r_{n-1} + \frac{1}{3}r_n = \frac{2}{3}r_n - \frac{1}{12}r_{n-1}$ et en multipliant par 12 on a : $12r_{n+1} - 8r_n + r_{n-1} = 0$, qui est bien une relation de récurrence linéaire double.

On étudie l'équation caractéristique : $12r^2 - 8r + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 64 - 48 = 16$ donc les racines sont $r_1 = \frac{8-4}{24} = \frac{1}{6}$ et $r_2 = \frac{8+4}{24} = \frac{1}{2}$.

On obtient $r_n = a\left(\frac{1}{6}\right)^n + b\left(\frac{1}{2}\right)^n$, puis on étudie les premières valeurs :
$r_1 = \frac{1}{3}$ donc $\frac{1}{6}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{3}$, ou encore $\frac{a+3b-2}{6} = 0$.
$r_2 = \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{3}p_1 = \frac{2}{9}$ donc $\frac{1}{36}a + \frac{1}{4}b = \frac{2}{9}$, ou encore $\frac{a+9b-8}{36} = 0$.
D'où $a = 2 - 3b$, puis $2 - 3b + 9b - 8 = 0$, $b = 1$ et $a = -1$.
Enfin $r_n = -\left(\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Ensuite on a $p_n = r_n - \frac{1}{4}r_{n-1} = -\left(\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{6}\right)^n\left[-1 + \frac{6}{4}\right] + \left(\frac{1}{2}\right)^n\left[1 - \frac{2}{4}\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$.

Enfin on a $q_n = 1 - r_n - p_n = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

7. On a $p_n \to 0$, $r_n \to 0$ et $q_n \to 1$.

<u>Exercice sans préparation</u>

Une matrice symétrique vérifie $M = tM$ donc (I, M, tM) sont bien liées.
Si une telle matrice est diagonalisable :
1er cas : la relation de dépendance ne concerne pas la transposée, alors $M = \lambda I = tM$ est bien diagonalisable.
2e cas : on a $tM = \lambda I$, alors $tM = M = \lambda I$ est bien diagonalisable.
3e cas : On a $tM = \alpha M$, alors on a $m_{i,j} = \alpha m_{j,i} = \alpha^2 m_{i,j}$ donc $\alpha^2 = 1$, et M est symétrique (donc diagonalisable) ou antisymétrique (et on ne sait rien dire).
4e cas : on a $M = \alpha I + \beta tM$.
M est diagonalisable et s'écrit PDP^{-1}, et $I = PIP^{-1}$ donc on obtient $\beta tM = P\left([D - \alpha I]\right)P^{-1}$ et enfin $tM = P\left(\left[\frac{1}{\beta}(D - \alpha I)\right]\right)P^{-1} = PD'P^{-1}$ est diagonalisable dans la même base que M car D' est diagonale.
On pourrait encore dire bien des choses avec la théorie des matrices orthogonales, mais comme elle est hors programme...

Exercice 2 *(Exercice avec préparation)*

1. La loi géométrique est la loi d'attente du premier succès dans une succession illimitée d'épreuves de Bernouilli identiques et indépendantes, de paramètre p.
Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, on a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\left([[X = k]]\right) = (1-p)^{k-1}p$.
De plus X admet une espérance et une variance, et $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

2. Soit x un réel de $]0;1[$.

a) La somme des termes d'une suite géométrique donne $\sum\limits_{k=1}^{n} x^{k-1} = \frac{1-t^n}{1-t}$.
On intègre sur $[0;x]$ ces fonctions continues :
$\displaystyle\int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1}\,dt = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{t^k}{k}\right]_0 x = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$.

b) On a $0 \leqslant 1-x < 1-t \leqslant 1$ sur $[0;1[$, donc $0 \leqslant \frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-x}$ et $0 \leqslant \frac{t^x}{1-t} \leqslant \frac{t^n}{1-x}$.
On intègre sur $[0;x]$: $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leqslant \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc par théorème de comparaison, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0$.

c) On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{}$ $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \left[-\ln(|1-t|)\right]_0 x = -\ln(1-x)$.
La suite des sommes partielles converge vers $-\ln(1-x)$ donc la série converge et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

3. a) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(\left[Y = \frac{1}{n}\right]\right) = \mathbb{P}\left([[X = n]]\right) = q^{n-1}p$, où $q = 1-p$.

b) Le moment d'ordre r de Y existe si et seulement si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^r q^{n-1}p$ converge absolument, ce qui est équivalent à la convergence si la série est à termes positifs.
Or on a pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $r \geqslant 1$, $n^r \geqslant 1$ donc $0 \leqslant \frac{1}{n^r} \leqslant 1$ et enfin $0 \leqslant \frac{pq^{n-1}}{n^r} \leqslant q^{n-1}p$.
Or la série de terme général $q^{n-1}p$ converge (série géométrique avec $|q|1$, donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série converge et converge absolument car elle est à termes positifs.

c) $\mathbb{E}(Y) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}pq^{n-1} = \frac{p}{q}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n}{n} = \frac{-p\ln(1-q)}{q} = \frac{-p\ln p}{1-p}$.

Exercice sans préparation

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. On prend B quelconque, on a $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2d & b+2e & c+2f \\ 3a+4d & 3b+4e & 3c+4f \\ -a+4d & -b+4e & -c+4f \end{pmatrix}$.
En identifiant les coefficients, on obtient trois systèmes sur (a,d), (b,e) et (c,f), et la résolution du

premier donne $a = d = 0$ et $a + 2d = 1$ (absurde).
Il n'y a donc pas de solution.

2. On prend c quelconque, on a $CA = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3b-c & 2a+4b+4c \\ d+3e-f & 2d+4e+4f \end{pmatrix}$.

En identifiant les coefficients, on obtient deux systèmes sur (a, b, c) et (d, e, f) dont la résolution donne $a = -2b - 2c$ et $b = c + 1$ donc $a = -4c - 2$ qui a une infinité de solutions (une pour chaque valeur réelle de c).
De même le deuxième donne une infinité de solutions, et il y a donc une infinité de solutions à l'équation matricielle $CA = I_2$.

Exercice 3 *(Exercice avec préparation)*
On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 3,\ u_1 = \frac{29}{9} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 9 - \frac{26}{u_{n+1}} + \frac{24}{u_n u_{n+1}}.$$

1. L'ensemble des suites réelles vérifiant $au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n$ est obtenu à l'aide de l'étude de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c$ et de son discriminant Δ.
Si $\Delta = 0$, il y a une unique solution r_0 à l'équation, et les suites solutions sont les (u_n) telles que pour tout n, $u_n = ar_0n + bnr_0n$.
Si $\Delta > 0$, il y a deux solutions distinctes r_1 et r_2 à l'équation, et les suites solutions sont les (u_n) telles que pour tout n, $u_n = ar_1n + br_2n$.
Enfin si $\Delta < 0$, on ne connaît pas les solutions (elles s'écrivent avec des nombres complexes ou des sinus et cosinus).

2. Il faut garder les valeurs de u_n et u_{n-1} pour obtenir celle de u_{n+1}, donc il faut déjà deux variables u et v.
De plus quand on donne la valeur de u_{n+1}, on efface la valeur de u_n, qui était dans u, et qu'on doit pourtant redonner à v pour l'étape suivante (vous me suivez ? ? ?) donc il faut une variable auxiliaire pour ne pas la perdre.
Cela donne :

```
var u, v, aux : real; k, n : integer;
readln (n)
u : = 29/9; v : = 3;
for k : = 2 to n do
begin
aux : = u; u : = 9 - 26 / u + 24 / ( u * v); v : = aux;
end;
writeln (u );
```

On peut rajouter quelques fioritures pour rendre le programme plus facile à l'utilisateur (writeln ('n ?') au début, writeln(' la valeur du terme d'ordre n de la suite est ') avant le résultat).

3. Il existe une unique suite vérifiant $a_0 = 3$ et $a_{n+1} = a_n \times u_n$ (définition par récurrence des suites).
Il faut alors vérifier que $a_{n+3} = 9a_{n+2} - 26a_{n+1} + 24a_n$, et que (a_n) est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Pour la relation de récurrence linéaire, on écrit :
$a_{n+3} = u_{n+2}a_{n+2} = \left(9 - \frac{26}{u_{n+1}} + \frac{24}{u_n u_{n+1}}\right) a_{n+2} = 9a_{n+2} - 26\frac{a_{n+2}}{u_{n+1}} + 24\frac{a_{n+2}}{u_n u_{n+1}}$.

Or $a_{n+2}u_{n+1} = \frac{a_{n+1}u_{n+1}}{u_{n+1}} = a_{n+1}$ et $\frac{a_{n+2}}{u_n u_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{u_n} = \frac{a_n u_n}{u_n} = a_n$ donc on a bien :
$a_{n+3} = 9a_{n+2} - 26a_{n+1} + 24a_n$.

On montre par récurrence que pour tout n, $a_n \in \mathbb{Z}$.
Initialisation : $a_0 = 3 \in \mathbb{N}^*$, $a_1 = u_0a_0 = 9$ et $a_2 = u_1a_1 = 9\frac{29}{9} = 29$ donc c'est bon.
Hérédité : on suppose qu'il existe $n \geqslant 2$ tel que a_n, a_{n-1} et a_{n-2} soient des entiers naturels non nuls.
Alors $9a_{n+2}$, $26a_{n+1}$ et $24a_n$ sont des entiers, et par somme a_{n+3} est un entier.

Je ne vois pas du tout comment montrer que la suite (a_n) est à termes positifs, ce qui est pourtant

essentiel pour prouver que la suite (u_n) est bien définie.
La question suivante permet de le prouver, mais a priori ici il faudrait le montrer sans s'en servir....

4. Récurrence pas trop difficile :
Initialisation : $a_0 = 3$, et $2^0 + 3^0 + 4^0 = 1 + 1 + 1 = 3$.
$2^1 + 3^1 + 4^1 = 9 = a_1$, et $2^2 + 3^2 + 4^2 = 29 = a_2$.
Hérédité : on suppose qu'il existe $n \geqslant 0$ tel que $a_k = 2^k + 3^k + 4^k$ pour $0 \leqslant k \leqslant n + 2$.
On a alors $a_{n+3} = 9(2^{n+2} + 3^{n+2} + 4^{n+2}) - 26(2^{n+1} + 3^{n+1} + 4^{n+1}) + 24(2^n + 3^n + 4^n) = 2^{n+2}(9 - 13+6)+3^{n+1}(27-26+8)+4^{n+1}(36-26+6) = 2\times 2^{n+2}+3^2\times 3^{n+1}+4^2\times 4^{n+1} = 2^{n+3}+3^{n+3}+4^{n+3}$.

Cela prouve que $a_n > 0$, puis que $u_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ est bien définie.

5. On a alors $u_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}+3^{n+1}+4^{n+1}}{2^n+3^n+4^n}$.
Le numérateur s'écrit $4^{n+1}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} + 1\right) \sim 4^{n+1}$.
De même $2^n + 3^n + 4^n \sim 4^n$, donc $u_n \sim \frac{4^{n+1}}{4^n} = 4$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

Exercice sans préparation

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de lois géométriques de paramètres p_1 et p_2 respectivement ($p_i \in]0;1[$ pour $i = 1, 2$).
On pose $U = X_1 + X_2$ et $T = X_1 - X_2$.

1. Commençons avec le calcul de la covariance.
$\text{Cov}(U,T) = \text{Cov}(X_1 + X_2, X_1 - X_2) = \mathbb{V}(X_1) - \mathbb{V}(X_2) = \frac{1-p_1}{p_1 2} - \frac{1-p_2}{p_2 2} = \frac{p_2 2-p_1p_2 2-p_1 2+p_1 2p_2}{p_1 2p_2 2} = \frac{(p_2-p_1)(p_1+p_2)+p_1p_2(p_1-p_2)}{(p_1p_2)^2} = \frac{p_1-p_2}{(p_1p_2)^2}(p_1p_2 - p_1 - p_2)$.
Ce dernier facteur est non nul car $0 < p_1p_2 < p_2$ donc $-p_2 - p_1 < p_1p_2 - p_2 - p_1 < -p_1 < 0$.
Enfin on a $p_1 \neq p_2$, donc $p_1-p_2 \neq 0$, et donc $\text{Cov}(U,T) \neq 0$, donc U et T ne sont pas indépendantes.

2. Cette fois on a $\text{Cov}(U,V) = \mathbb{V}(X_1) - \mathbb{V}(X_2) = 0$ ce qui ne permet pas de conclure.
On a $U(\Omega) = [\![2;+\infty[\![$ et $T(\Omega) = \mathbb{Z}$.
Pour tout $n \geqslant 2$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}([U = n] \cap [T = k]) = P\left(\left[X_1 = \frac{n+k}{2}\right] \cap \left[X_2 = \frac{n-k}{2}\right]\right)$.
Prenons une valeur nulle, par exemple avec $n + k$ impair, donc $n = 2$ et $k = 1$.
$\mathbb{P}([U = 2] \cap [T = 1]) = 0$, et $\mathbb{P}([[U = 2]]) = \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \mathbb{P}([[X_1 = 1]])\,\mathbb{P}([[X_2 = 1]]) \neq 0$.
De même $[\,[X_1 = 2]\cap[X_2 = 1]] \subset [T = 1]$ donc $\mathbb{P}([[T = 1]]) \geqslant P[\,[X_1 = 2]\cap[X_2 = 1]] = \mathbb{P}([[X_1 = 2]])\,\mathbb{P}([[X_2 = 1$
0.

Les variables U et T ne sont donc pas indépendantes.

Exercice 4 *(Exercice avec préparation)*

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On pose $N = A - I$ et $M = N^2 - N$ (où I désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Soient u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés aux matrices M et N.

1. Deux matrices M et N sont semblables s'il existe P inversible telle que $M = PNP^{-1}$.
On prouve que deux matrices sont semblables si et seulement si ce sont deux matrices d'un même endomorphisme dans des bases distinctes, et on en déduit que les dimensions de leurs noyaux et leurs images sont égales, que leurs valeurs propres sont égales, et que les sous-espaces propres associés sont de même dimension.
Enfin on obtient que l'une est inversible si et seulement si l'autre l'est, et que l'une est diagonalisable siet seulement si l'autre l'est.
Enfin on sait que si M et N sont semblables, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et même $n \in \mathbb{Z}$ si elles sont inversibles), M^n et N^n sont semblables et plus précisément : $M^n = PN^nP^{-1}$.

2. A est triangulaire donc son unique valeur propre est 1. On en déduit par l'absurde que A est diagonalisable si et seulement si $A = I$, donc si et seulement si $a = b = c = 0$.

3. $0 \notin \operatorname{Sp} A$ donc A est inversible.
A étant triangulaire, on peut déterminer son inverse avec un pivot qui sera très rapide : on obtient $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & -b+ac \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + M$ en calculant $M = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b+ac \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. On suppose dans cette question que le rang de u est égal à 2.

a) N est nilpotente, de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$, sinon les trois colonnes seraient colinéaires et u serait de rang 1.
On a alors $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, et $N^3 = 0$.
D'où $u^2 \neq 0$, on prend x tel que $u^2(x) \neq 0$.
Soient alors a, b et c tels que $ax + bu(x) + cu^2(x) = 0$.
On compose par u^2, on a $au^2(x) + bu^3(x) + cu^4(x) = au^2(x) = u^2(0) = 0$, et $u^2(x) \neq 0$ donc $a = 0$.
Ensuite on a $bu(x) + cu^2(x) = 0$, on compose par u et on a $bu^2(x) + cu^3(x) = bu^2(x) = u(0) = 0$ donc $b = 0$, et enfin $cu^2(x) = 0$ donc $c = 0$.
La famille $(u^2(x), u(x), x)$ est donc libre et de cardinal 3 donc c'est une base.

Dans cette base on a $u(u^2(x)) = u(u^2(x)) = u^3(x) = 0$.
Ensuite $u(u(x)) = u^2(x)$ et enfin on a $u(x) = u(x)$ donc la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et N est bien semblable à cette matrice, car elles sont deux matrices associées au même endomorphisme.

b) $Mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie les conditions de la question précé-

dente : nilpotente d'ordre 3, triangulaire et de rang 2 : en appliquant cette question, on montre que cette matrice, et donc M, sont semblables à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, elle-même semblable à N.
Finalement M et N sont bien semblables.

c) Il existe alors P inversible telle que $M = PNP^{-1}$.
On en déduit que $A^{-1} = I + PNP^{-1} = PIP^{-1} + PNP^{-1} = P\left([I+N]\right)P^{-1} = PAP^{-1}$ et A et A^{-1} sont donc semblables.

Exercice sans préparation

Soit X une variable aléatoire que suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
On désigne l'espérance par E.

1. Le théorème de transfert assure que c'est équivalent à la convergence absolue, et par positivité à la convergence, de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n} \times \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$.
Enfin on a $0 \leqslant \frac{1}{1+n} \times \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \leqslant \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$ donc par comparaison des séries à termes positifs (cette dernière suite est le terme général d'une série exponentielle convergente), la série converge et l'espérance de $\frac{1}{1+X}$ existe bien.

2. La majoration précédente montre que $\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = 1$ (somme des probabilités de la loi de Poisson de paramètre λ.
Ensuite on écrit que $1 + n \geqslant n$ donc $\frac{1}{1+n} \leqslant \frac{1}{n}$, et $\frac{1}{1+n} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \leqslant \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda}}{(n+1)!}$.
On obtient alors $\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) \leqslant \frac{1}{\lambda} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda}}{(n+1)!} \leqslant \frac{1}{\lambda} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \leqslant \frac{1}{\lambda} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \leqslant \frac{1}{\lambda}$.
On obtient bien que $\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$.

Exercice 5 *(Exercice avec préparation)*
Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. Les proportions respectives de ces boules sont b pour les blanches, n pour les noires et r pour les rouges ($b+n+r=1$).
On effectue dans cette urne des tirages successifs indépendants avec remise. Les proportions de boules restent ainsi les mêmes au cours de l'expérience.
On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. La loi d'un couple (X,Y) de variables aléatoires discrètes est la donnée de $(X,Y)(\Omega)$, ensemble des couples (i,j) de valeurs telles que l'évènement $[X=i]\cap[Y=j]$ est possible.
Les lois marginales sont les lois des variables X et Y, obtenues à partir du couple et de la formule des probabilités totales.

2. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, on note Z_k la variable aléatoire qui prend la valeur $+1$ si une boule blanche est tirée au k-ième tirage. On note $S_k = Z_1+\cdots+Z_k$.

a) $S_1=Z_1$ vérifie $Z_1(\Omega)=\{-1;0;1\}$, avec $\mathbb{P}([[Z_1=-1]])=n$, $\mathbb{P}([[Z_1=0]])=r$ et $\mathbb{P}([[Z_1=1]])=b$, d'espérance $\mathbb{E}(Z_1)=b-n$ et de variance :
$\mathbb{V}(Z_1)=b(b-n-1)^2+r(b-n)^2+n(b-n+1)^2=(b-n)^2(b+r+n)+b+n+2(n(b-n)-b(b-n))$
$\mathbb{V}(Z_1)=(b-n)^2+b+n-2n^2-2b^2=-n^2-b^2-2bn+b+n$
$\mathbb{V}(Z_1)=-(n+b)^2+n+b=-(1-r)^2+1-r=(1-r)(1-1+r)=r(1-r)$.

D'où par linéarité de l'espérance et indépendance des tirages pour la variance S_k a pour espérance $k(b-n)$ et pour variance $kr(1-r)$.

b) $g_k(t)=E\left(t^{S_k}\right)=E\left(t^{\sum\limits_{i=1}^{k} Z_i}\right)=E\left(\prod\limits_{i=1} kt^{Z_i}\right)=\prod\limits_{i=1} kE\left(t^{Z_i}\right)$ par indépendance des variables Z_i, qui donnent l'indépendance des variables t^{Z_i}.
De plus comme elles suivent toutes la même loi, on a $g_k(t)=\left[E\left(t^{Z_1}\right)\right]^k$.

Enfin on a par théorème de transfert, $\mathbb{E}\left(t^{Z_1}\right)=t^{-1}\times n+t^0\times r+t^1\times b=\frac{n}{t}+r+bt=\frac{n+rt+bt^2}{t}$.

Enfin on a $g_k(t)=\left(\frac{n+rt+bt^2}{t}\right)^k$.

c) $g_k(t)=\sum\limits_{a\in S_k(\Omega)}^{t} {}^a\mathbb{P}([[S_k=a]])$ donc $g_k'(t)=\sum\limits_{a\in S_k(\Omega)}^{a} t^{k-1}\mathbb{P}([[S_k=a]])$ et enfin $g_k'(1)=\sum\limits_{a\in S_k(\Omega)}^{a} 1^{k-1}\mathbb{P}([[S_k=a]$
$\sum\limits_{a\in S_k(\Omega)}^{a}\mathbb{P}([[S_k=a]])=\mathbb{E}(S_k)$.
On calcule $g_k'(t)=k\times\frac{(r+2bt)t-n-rt-bt^2}{t^2}\times\left(\frac{n+rt+bt^2}{t}\right)^{k-1}=k\times\frac{bt^2-n}{t^2}\times\left(\frac{n+rt+bt^2}{t}\right)^{k-1}$ et enfin $\mathbb{E}(S_k)=g_k'(1)=k(b-n)(n+r+b)^{k-1}=k(b-n)$ car $n+r+b=1$.

3. *a)* $X_1\hookrightarrow\mathcal{G}(b)$, $\mathbb{E}(X_1)=\frac{1}{b}$ et $\mathbb{V}(X_1)=\frac{1-b}{b^2}$.

b) Si $X_1=k$, on sait qu'on a pas tiré de boule blanche ; on est donc dans la situation de deux couleurs, noir de proportion $\frac{n}{n+r}$ et rouge de proportion $\frac{r}{n+r}$.
On a alors $P_{[X_1=k]}(R_1\cap\cdots\cap R_{k-1})=\left(\frac{r}{n+r}\right)^{k-1}$.

c) C'est la loi binomiale de paramètres $k-1$ et $\frac{r}{n+r}$.

d) Avec le système complet d'évènements $[X_1 = k]_{k\in\mathbb{N}^*}$ on a pour tout $i \in \mathbb{N}$:
$\mathbb{P}([[W=i]]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([[X_1=k]]) P_{[X_1=k]}[W=i] = \sum\limits_{k=i+1}^{+\infty} b(r+n)^{k-1}\binom{k}{i}\left(\frac{r}{r+n}\right)^i\left(\frac{n}{r+n}\right)^{k-1-i} = \sum\limits_{k=i+1}^{+\infty} b\binom{k}{i} r^i n^{k-1-i}$.

4. On note Y_1 la variable représentant le numéro du tirage auquel une boule noire sort pour la première fois.

a) Si $k = l$, la probabilité est nulle (on ne peut pas tirer en même temps une boule noire et une blanche.
Si $k < l$ on a des rouges en position 1 à $k-1$, une blanche en position k, une blanche ou une rouge en positions $k+1$ à $l-1$ et une noire en position l.
D'où $P([X_1 = k, Y_1 = l]) = r^{k-1}b(r+b)^{l-k-1}n$.
Par symétrie si $k > l$, $\mathbb{P}([X_1 = k, Y_1 = l]) = r^{l-1}n(r+n)^{k-l-1}b$.

$\mathbb{P}([[X_1 = 1]])\,\mathbb{P}([[Y_1 = 1]]) \neq 0 = \mathbb{P}([X_1 = 1, Y_1 = l])$ donc X_1 et Y_1 ne sont pas indépendantes.

b) L'une des deux variables vaut toujours 1, et l'autre vaut une valeur $k \geqslant 2$.
D'où $X_1Y_1(\Omega) = [\![2;+\infty[\![$ et $\mathbb{P}([X_1Y_1 = k]) = \mathbb{P}([X_1 = 1, Y_1 = k]) + \mathbb{P}([X_1 = k, Y_1 = 1]) = b^{k-1}n + n^{k-1}b$.
On obtient en sommant $\mathbb{E}(X_1Y_1) = n\left(\frac{1}{(1-b)^2} - 1\right) + n\left(\frac{1}{(1-b)^2} - 1\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{b} - n - b = \frac{1}{n} + \frac{1}{b} - 1$.

On a ensuite $\text{Cov}(X_1, Y_1) = E(X_1Y_1) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y_1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{b} - 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{b} = -1$.

Exercice sans préparation

Soient $n \geqslant 2$ et $(x_1, x_2, \ \ldots\ x_n) \in \mathbb{R}^n - \{(0, \ \ldots\ 0)\}$.
On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, puis $B = tXX$ et $A = XtX$.

1. $B = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k 2$ est un réel.

2. A est symétrique donc diagonalisable, on doit trouver la somme des dimensions égale à n.
On étudie l'équation $AY = \lambda Y \Leftrightarrow (XtX)Y = \lambda Y \Leftrightarrow X(tXY) = \lambda Y \Leftrightarrow (tXY)X = \lambda Y \Leftrightarrow \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k\right) X = \lambda Y$.
Deux possibilités : soit $\lambda = 0$, et on obtient $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k = 0$.

Soit $\lambda \neq 0$; alors $Y = \dfrac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k\right)}{\lambda} X$ est colinéaire à X.
Calculons alors $XtXX = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k 2\right) X$ donc $\lambda_0 = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k 2\right) \neq 0$ est valeur propre et X un vecteur propre associé, et ce qui précède donne $E_{\lambda_0}(A) = \text{Vect}\,(X)$.
On a obtenu de plus $\text{Sp}(A) = \{\lambda_0, 0\}$.

Il reste à déterminer $\ker A$, qui doit être de dimension $n-1$.
Les colonnes de A sont toutes égales à $x_k X$, et il existe i tel que $x_i \neq 0$.
On a alors $C_k = x_k X = \frac{x_k}{x_i} \times x_i X = \frac{x_k}{x_i} C_i$ et $C_k - \frac{x_k}{x_i} C_1 = 0$.
On trouve que pour tout $k \neq i$, $e_k - \frac{x_k}{x_i} e_i \in \ker A$.
La famille obtenue est libre car échelonnée et admet $n-1$ vecteurs donc c'est une base de $\ker A$.

Cet exercice ne peut être résolu qu'en écrivant la matrice A explicitement, afin de comprendre à la vue de la matrice comment trouver cette base de $\ker A$ (qui semble sortir de nulle part dans cette correction !!).