ORAUX HEC 2008

I. Annales 2008

Exercice 1 *(Exercice avec préparation)*

1. Toutes les variables admettent alors une variance et on a :
$\mathbb{V}(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{\text{Cov}} (X_i, X_j)$.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, à valeurs dans $\{-1;1\}$, définies sur une même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p = \mathbb{P}([[[X_n = 1]]])$, et on suppose que $p \in]0;1[$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \prod_{i=1} nX_i$.

a) $Y_2(\Omega) = \{-1;1\}$ et $\mathbb{P}([[Y_2 = 1]]) = \mathbb{P}([[X_1 = Y_1]]) = p^2 + (1-p)^2$, et $\mathbb{P}([[Y_2 = -1]]) = \mathbb{P}([X_1 \neq Y_1]) = 2p(1-p)$.

$Y_3(\Omega) = \{-1;1\}$, $\mathbb{P}([[Y_3 = 1]]) = \mathbb{P}([[Y_2 = X_3]]) = p(p^2+(1-p)^2)+2p(1-p)^2$ et $\mathbb{P}([[Y_3 = -1]]) = \mathbb{P}([Y_2 \neq X_3]) = p^2(1-p) + (1-p)^3 + 2p^2(1-p)$.
On peut s'amuser à simplifier ces résultats mais cela n'a pas grand intérêt.

b) De même $Y_n(\Omega) = \{-1;1\}$ pour tout n et on a :
$\mathbb{P}([Y_{n+1} = 1]) = P([Y_n X_{n+1} = 1]) = \mathbb{P}([Y_n = X_{n+1}]) = p_n \times p + (1-p_n)(1-p) = p_n(2p-1) + 1 - p$.

C'est une suite arithmético-géométrique, on résout l'équation $k = k(2p-1)+1-p \Leftrightarrow 2k(1-p) = 1-p \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$.

Puis on considère $u_n = p_n - \frac{1}{2}$, on montre qu'elle est géométrique de raison $2p-1$ et on obtient $u_n = (p-1)^{n-1}u_1$, donc $p_n = (2p-1)^{n-1}\left(p_1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = (2p-1)^{n-1}\left(p + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$.

c) Il faut pour cela $\mathbb{P}([Y_n = i, Y_{n+1} = j]) = \mathbb{P}([[Y_n = i]])\,\mathbb{P}([Y_{n+1} = j])$ pour i et j dans $\{1;2\}$.
Or $\mathbb{P}([Y_n = 1, Y_{n+1} = 1]) = \mathbb{P}([Y_n = 1, X_{n+1} = 1]) = p_n p$ donc il faut que $\mathbb{P}([Y_{n+1} = 1]) = p_{n+1} = p$ ou que $p_n = 0$.

De même $\mathbb{P}([Y_n = -1, Y_{n+1} = -1]) = \mathbb{P}([Y_n = -1, X_{n+1} = 1]) = (1-p_n)p$ donc il faut $\mathbb{P}([Y_{n+1} = -1]) = 1 - p_{n+1} = p$ ou $p_n = 1$. $\mathbb{P}([Y_n = 1, Y_{n+1} = -1]) = \mathbb{P}([Y_n = 1, X_{n+1} = -1]) = p_n(1-p)$ donc il faut $p_n = 0$ ou $1 - p_{n+1} = 1 - p$; cela ne donne rien de plus. De même pour la dernière.

Comme on ne peut avoir $p_n = 0 = 1$, il y a deux possibilités : soit $p_n = 0$ et $p_{n+1} = 1-p$, soit $p_n = 1$ et $p_{n+1} = p$.

$p_n = 0$ donne $(2p-1)^{n-1} = -\frac{1}{2\left(p+\frac{1}{2}\right)}$ qui impose $2p-1 < 0$ et $n-1$ impair, et $(n-1)\ln(1-2p) = -\ln 2 - \ln\left(p + \frac{1}{2}\right)$ donc $n = 1 - \frac{\ln 2 + \ln\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\ln(1-2p)}$, n impair et $p < \frac{1}{2}$.

On a alors $p_{n+1} = p_n(2p-1)+1-p = 0(2p-1)+1-p = 1-p$ et la deuxième condition est bien vérifiée.

$p_n = 1$ donne $(2p-1)^{n-1} = \frac{1}{2\left(p+\frac{1}{2}\right)}$ qui impose $2p-1>0$ ou $n-1$ pair ;
si $2p-1<0$ on a $(n-1)\ln(1-2p) = \ln 2 + \ln\left(p+\frac{1}{2}\right)$ donc $n = 1+\frac{\ln 2+\ln\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\ln(1-2p)}$, n pair et $p<\frac{1}{2}$.
si $2p-1>0$ on a $(n-1)\ln(2p-1) = \ln 2 + \ln\left(p+\frac{1}{2}\right)$ donc $n = 1+\frac{\ln 2+\ln\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\ln(2p-1)}$, n pair ou impair et $p>\frac{1}{2}$.

On a alors $p_{n+1} = p_n(2p-1)+1-p = (2p-1)+1-p = p$ et la deuxième condition est bien vérifiée.

3. On détermine les valeurs de S_n en considérant que si k variables X_i valent 1, alors $n-k$ valent -1 et $S_n = k-(n-k) = 2k-n$.
Comme la fonction de k obtenue est bijective, la probabilité que $S_n = 2k-n$ est celle que k variables X_i valent 1, et en posant $X_i' = 1$ si $X_i = 1$ et 0 si $X_i = -1$, $\mathbb{P}\left([S_n = 2k-n]\right) = \mathbb{P}\left(\left[\sum\limits_{i=1}^{n} X_i' = k\right]\right)$ qui est une loi binomiale.
D'où $\mathbb{P}\left([[S_n = 2k-n]]\right) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, $\mathbb{E}(S_n) = 2\mathbb{E}(\sum\limits_{k=1}^{n} X_i') - n = 2np-n = n(2p-1)$ puis $\mathbb{V}(S_n) = 4\mathbb{V}(\sum\limits_{k=1}^{n} X_i') = 4np(1-p)$.
Deuxième solution : on exprime tout de suite les X_i' sous la forme $X_i' = \frac{X_i+1}{2}$ donc $X_i = 2X_i'-1$ et on a $S_n = 2S_n'-n$, avec S_n' qui suit la loi binomiale de paramètres n et p. On retrouve le même résultat.

4. La deuxième modélisation ci-dessus permet de le faire.
```
var S, x, k, n : integer; p : real;
begin;
readln (p); readln (n); S : = 0;
randomize;
for k : = 1 to n do
begin
x : = random (1); x : = 2x - 1; S : = S + x;
end; end.
```

Si on utilise la première modélisation, on remplace (x : = 2x-1;) par (if x : = 0 then x : = -1;) et on obtient le même résultat.

Exercice sans préparation

La question suivante permet de conjecturer que la limite est 1, et u_n est trivialement supérieure à 1, on va donc chercher à majorer $u_n - 1 = \frac{u_{n-1}}{n+1}$ par une suite qui tend vers 0 ; cela conduit à essayer de majorer u_n par une constante.
Le calcul des premiers termes ($u_0 < 1$, $u_1 = 1+u_0 < 2$, $u_2 = 1+\frac{1+u_0}{2} < 2$, etc...) permet de conjecturer $u_n \leqslant 2$, qu'on prouve par récurrence :
$u_0 \leqslant 2$, $u_1 \leqslant 2$ et $u_2 \leqslant 2$ viennent d'être prouvés.
Si il existe $n \geqslant 2$ tel que $u_n \leqslant 2$, alors $u_{n+1} = 1+\frac{u_n}{n+1} \leqslant 1+\frac{u_n}{3} \leqslant 1+\frac{2}{3} \leqslant 2$ et le résultat est prouvé pour tout n.

Attention l'hérédité doit être faite à partir de $n = 1$ au plus bas ; en effet si on suppose $u_0 \leqslant 2$ seulement on a $u_1 \leqslant 1 + 2 \leqslant 3$ qui n'est pas suffisant. Mais comme l'énoncé donnait $u_0 \leqslant 1$ on a résolu le problème en initialisant aux valeurs 0 et 1.

Enfin on obtient pour tout $n \geqslant 1$, $1 \leqslant u_n \leqslant 1 + \frac{u_{n-1}}{n} \leqslant 1 + \frac{2}{n}$ et par théorème de comparaison, $\lim u_n = 1$.

Pour trouver la valeur de a on regarde $(u_n - 1) \times n$ qui doit converger vers a.
On a $n(u_n - 1) = \frac{nu_{n-1}}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $a = 1$.
Ensuite doit avoir $n[n(u_n - 1) - 1] \to b$ donc on étudie :
$n[n(u_n - 1) - 1] = n\left(\frac{nu_{n-1}}{n+1} - 1\right) = n\frac{nu_{n-1}-n-1}{n+1} \sim nu_{n-1} - n - 1 = n(u_{n-1} - 1) - 1 = (n - 1 + 1)(u_{n-1} - 1) - 1 = (n-1)(u_{n-1} - 1) + u_{n-1} - 2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 + 1 - 2 = 0$ donc $b = 0$.

On obtient $n[n(u_n - 1) - 1] = o(1)$ donc $n(u_n - 1) - 1 = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n(u_n - 1) = 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)$, $u_n - 1 = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et enfin $u_n = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 2 *(Exercice avec préparation)*

1. Une variable suit la loi de Bernouilli si elle a deux issues possibles : le succès pour lequel elle vaut 1, et l'échec pour lequel elle vaut 0.
On a alors $\mathbb{P}\left([[X=1]]\right) = p = \mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$.
On réalise une succession de n épreuves de Bernouilli indépendantes et identiques de paramètre p, et on compte le nombre de succès : on obtient alors une loi binomiale de paramètres n et p.
La variable X associée vérifie alors $X(\Omega) = [\![0; b]\!]$.
Pour calculer $\mathbb{P}\left([[X=k]]\right)$, on compte le nombre de possibilités amenant à ce résultat et la probabilité de chacune.
Il faut obtenir k succès et $n-k$ échecs : on place les k succès parmi les n épreuves pour obtenir toutes les possibilités : il y en a donc $\binom{n}{k}$.
Dans chacun de ces cas, on obtient de manière indépendante k succès et n échecs avec une probabilité $p^k q^{n-k}$.
On obtient alors $\mathbb{P}\left([[X=k]]\right) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.
L'espérance s'obtient en écrivant les n X_i variables de Bernouilli, avec la linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(X) = np$.
De même grâce à l'indépendance on calcule facilement la variance de la somme : $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.

2. X_i suit une loi de Bernouilli, et $\mathbb{P}\left([[X_i=1]]\right) = \frac{\binom{1}{1}\times\binom{2n-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n-1)!\times(n!)^2}{(2n)!(n-1)!(n!)} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$.

3. X_iX_j est la variable de Bernouilli qui vaut 1 si la boule i et la boule j sont dans la poignée.
D'où $\mathbb{E}(X_iX_j) = \mathbb{P}\left([X_iX_j=1]\right) = \frac{\binom{2}{2}\times\binom{2n-2}{n-2}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n-2)!\times(n!)^2}{(2n)!(n-2)!(n!)} = \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)} = \frac{n-1}{4n-2}$.

On en déduit que $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \frac{n-1}{4n-2} - \frac{1}{4} = \frac{2n-2-(2n-1)}{8n-4} = -\frac{1}{4(2n-1)}$.

4. On note S la variable aléatoire réelle prenant pour valeur la somme des numéros portés par les boules figurant dans la poignée.

a) $S = \sum_{i=1}^{n} iX_i$.

b) Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$.
Par indépendance des X_i on a $\mathbb{V}(S) = \sum_{i=1}^{n} i^2\mathbb{V}(X_i) = \frac{1}{4} \times \frac{n(n+1)(2n-1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n-1)}{24}$.

5. On note $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ qui compte le nombre de boules non numérotées 0 dans la poignée, et qui suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.
On a alors $Z = n - Y$ donc $Z(\Omega) = [\![0; n]\!]$ et $\mathbb{P}\left([[Z=k]]\right) = \mathbb{P}\left([[Y=n-k]]\right) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$.
On voit que Z suit une loi binomiale, et on a $\mathbb{E}(Z) = \frac{n}{2}$.

Exercice sans préparation

Soit f la fonction définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1.$$

1. Aucune difficulté ici :
$f'_x(x,y) = 3x^2 - 3y$, $f'_y(x,y) = 3y^2 - 3x$, $f''_{x,x}(x,y) = 6x$, $f''_{x,y}(x,y) = -3$ et $f''_{y,y}(x,y) = 6y^2$.

2. $f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$ donne $x^2 = y$ (donc y positif) et $y^2 = x$ (donc x positif), puis $y^2 = x^4 = x$ donc $x = 0$ ou $x = 1$, puis $x = 0$ donne $y = 0$ et $x = 1$ donne $y = 1$.
Les deux points critiques sont $(0,0)$ et $(1,1)$.

3. En $(0,0)$ on a $r = t = 0$ et $s = -3$ donc $rt - s^2 = -9 < 0$, c'est un point selle.
En $(1,1)$ on a $r = t = 6$ et $s = -3$ donc $rt - s^2 = 36 - 9 = 27 > 0$, avec $r > 0$ donc c'est un minimum local.

Exercice 3 *(Exercice avec préparation)*

1. Un estimateur d'un paramètre θ de la loi P_X d'une variable aléatoire X dont on dispose d'un échantillon (X_n) est une suite de variables aléatoires (T_n) où pour tout n, T_n est une fonction des variables $X_1, \ldots X_n$).
On définit alors son risque quadratique comme l'espérance des écarts à θ mis au carré :
$R = E([X-\theta]^2)$.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} Z_k$.
On a $Z_k(\Omega) = [\![1;N]\!]$ et pour tout $i \in [\![1;N]\!]$, $\mathbb{P}([[Z_k = i]]) = \frac{1}{N}$.
D'où $\mathbb{E}(Z_k) = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} i = \frac{N+1}{2}$.
On a donc par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(M_n) = \frac{N+1}{2}$ et en posant $T_n = 2M_n - 1$, on obtient un estimateur (T_n) sans biais de N, car $\mathbb{E}(T_n) = 2\mathbb{E}(M_n) - 1 = N + 1 - 1 = N$.
De plus on a $R(T_n) = b^2 + \mathbb{V}(T_n) = \mathbb{V}(T_n) = 4\mathbb{V}(M_n) = \frac{4}{n^2} \times n\mathbb{V}(Z_1) = \frac{4}{n}\mathbb{V}(Z_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3. On note $S_n = \max(Z_1, Z_2, \ldots Z_n)$.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F_{S_n}(x) = \mathbb{P}([[S_n \leqslant x]]) = P([\max(Z_1, \ldots Z_n) \leqslant x])([Z_1, \ldots Z_n]) \leqslant x) = P\left(\left[\bigcap\limits_{k=1} n\,[Z_k \leqslant x]\right]\right) = \prod\limits_{k=1} nF_{Z_k}(x) = (F_{Z_1}(x))^n$.
Or pour tout $k \in [\![1;N]\!]$ on a $F_{Z_1}(k) = \mathbb{P}([[Z_1 \leqslant k]]) = \frac{k}{N}$ donc pour tout $k \in [\![1;N]\!]$, $F_{S_n}(k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n$.

b) $\sum\limits_{k=1}^{N} \mathbb{P}([[Y \geqslant k]]) = \sum\limits_{k=1}^{N}\sum\limits_{i=k}^{N} \mathbb{P}([[Y = i]]) = \sum\limits_{i\geqslant k, 1\leqslant k\leqslant N, 1\leqslant i\leqslant N}^{\mathbb{P}} ([[Y = i]]) = \sum\limits_{k\leqslant i, 1\leqslant k\leqslant N, 1\leqslant i\leqslant N}^{\mathbb{P}} ([[Y = i]]) = \sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{k=1}^{i} \mathbb{P}([[Y = i]]) = \sum\limits_{i=1}^{N} i\mathbb{P}([[Y = i]]) = \mathbb{E}(Y)$.

c) On a donc $\mathbb{E}(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{N} \mathbb{P}([[S_n \geqslant k]]) = \sum\limits_{k=1}^{N} [1 - \mathbb{P}([[S_n < k]])] = N - \sum\limits_{k=1}^{N} \mathbb{P}([[S_n \leqslant k-1]]) = N - \sum\limits_{k=1}^{N} \left(\frac{k-1}{N}\right)^n$.
$\mathbb{E}(S_n) \geqslant N - \frac{N}{n+1}$???? J'obtiens la majoration $\mathbb{E}(S_n) \geqslant N - N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$ qui donne le résultat pour la question suivante, mais je ne vois absolument pas comment obtenir la majoration demandée.

d) S_n est n estimateur de N par définition, et on a $N \geqslant \mathbb{E}(S_n) \geqslant N - \frac{N}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} N$ donc par théorème d'encadrement, $\mathbb{E}(S_n) \to N$.

<u>**Exercice sans préparation**</u>

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. ***a)*** On calcule A^2 et on obtient $A^2 = 3A - 2I$.

b) On en déduit que $A\left[\,\frac{1}{2}(3I - A)\right] = I$ donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A)$.

2. Le polynôme $P\left([x]\right) = x^2 - 3x + 2$ est annulateur de A et a pour racines 1 et 2 donc $\operatorname{Sp} A \subset \{1; 2\}$.

3. On a $A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1 (toutes les colonnes sont colinéaires) donc 1 est valeur propre et $\dim E_1(A) = \dim \ker(A - I) = 2$ par théorème du rang.
On a $A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car $C_1 + C_2 - C_3 = 0$ donc 2 est valeur propre et A est de rang 2 car les deux premières colonnes ne sont pas colinéaires, donc $\dim E_2(A) = \dim \ker(A - 2I) = 1$ par théorème du rang.

Enfin la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut 3 donc A est diagonalisable.

Exercice 4 *(Exercice avec préparation)*
Dans cet exercice, on note C^0 l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit u un endomorphisme de E, un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de u s'il existe $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$. Tout vecteur non nul vérifiant $u(x) = \lambda x$ est appelé vecteur propre de u associé à la valeur propre λ.

Soit Φ l'application définie sur C^0 qui, à toute fonction f de C^0, associe la fonction $g = \Phi(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^x f(t)\ dt.$$

2. f est continue donc admet des primitives, donc en notant F une primitive de f on a $\Phi(f)(x) = F(x) - F(0)$ est dérivable, de dérivée f.

3. Pour tout f, $\Phi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$, et $\Phi(f) \in C^0$.
La linéarité est évidente par linéarité de l'intégrale.

4. La fonction valeur absolue est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et non dérivable sur $\mathbb{R}$, car elle n'est pas dérivable en 0.
Φ n'est donc pas surjective puisque la fonction valeur absolue, qui est dans C^0, ne peut être atteinte par Φ.
Pour l'injectivité, on résout $\Phi(f) = 0$.
Supposons $\Phi(f) = 0$, alors $f = \Phi'(f) = 0$ donc $\ker \Phi = \{0\}$ et Φ est injective.

Soit λ un réel quelconque. On dit que λ est une valeur propre de Φ s'il existe une fonction f non nulle de C^0, telle que $\Phi(f) = \lambda f$. Une telle fonction est appelée fonction propre associée à la valeur propre λ.

5. Recherche des valeurs propres non nulles de Φ.
On suppose, dans cette question, que Φ admet une valeur propre λ non nulle.

Soit f une fonction propre associée à λ.

a) $\Phi(f) = \lambda f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $f = \frac{1}{\lambda}\Phi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) $h'(x) = e^{-\frac{x}{\lambda}} \left(f'(x) - \frac{1}{\lambda} f(x)\right)$.
Or $\Phi(f)'(x) = f(x)$ donc $(\lambda f)'(x) = f(x)$ et enfin $f'(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$, donc $h'(x) = 0$, et $h(x)$ est égale à une constante K, et enfin $f(x) = K e^{\frac{x}{\lambda}}$.
Or on a $\Phi(f)(0) = \lambda f(0) = \displaystyle\int_0^0 f(t)\ dt = 0$ donc $f(0) = 0$, $K = 0$ et enfin $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) La seule valeur propre possible est donc 0.
Or on a vu que $\ker \Phi = \{0\}$ donc 0 n'est pas valeur propre, et Φ n'admet donc aucune valeur propre.

6. Pour toute fonction f de C^0, on pose : $F_0 = \Phi(f)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_n = \Phi(F_{n-1})$.

a) Par récurrence évidente on obtient que F_n est de classe C^n, puis on écrit $F_n(0) = \Phi(F_{n-1})(0) = \displaystyle\int_0^0 F_{n-1}(t)\ dt = 0$. Seule $F_0(0) = f(0)$ peut être différent de 0.
Enfin pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $F_n(k) = F_{n-k}$ donc $F_n(k)(0) = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$ et $F_n(n)(0) = f(0)$.

b) F_n est de classe C^n, on utilise la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n-1$, qui donne immédiatement le résultat puisque les $n-1$ premières dérivées en 0 de F_n sont nulles.

Exercice sans préparation

X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et ayant la même loi de densité φ, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = ke^{-|x|}.$$

1. ϕ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, il faut que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\ dt = 1$.
Or ϕ est paire donc il suffit de prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \phi(t)\ dt = \frac{1}{2}$.
On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \phi(t)\ dt = k\int_0^{+\infty} e^{-t}\ dt = k$ (loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$), donc il faut que $k = \frac{1}{2}$.

2. Pour tout $x \leqslant 0$, on a $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \phi(t)\ dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt + \int_0^x \phi(t)\ dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x e^t\ dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(e^x - 1) = \frac{1}{2}e^x$.
Pour tout $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \phi(t)\ dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt + \int_0^x \phi(t)\ dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t}\ dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-e^{-x} + 1) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$.

3. Par parité de f on obtient que le moment d'ordre 2 existe si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \phi(t)\ dt$ existe, ce qui est le cas (on reconnaît le moment d'ordre deux de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$). On en déduit que $e(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ existent.
De plus la fonction $t \to t\phi(t)\ dt$ est impaire donc $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\phi(t)\ dt = 0$.
Enfin la fonction $t \to t^2\phi(t)\ dt$ est paire donc $\mathbb{E}(X^2) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\phi(t)\ dt = \int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\ dt = \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{V}(Y) + [(\mathbb{E}(Y)]^2$, où $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, donc :
$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\ \mathbb{E}(X)]^2 = \mathbb{V}(Y) + [\ \mathbb{E}(Y)]^2 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} = 2$.

Exercice 5 *(Exercice avec préparation)*
Pour tout nombre réel a, on note $A(a)$ la matrice

$$A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1+a & 1 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. a) Une matrice est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.

b) Soit M une matrice diagonalisable, et D diagonale et P inversible telles que $M = PDP^{-1}$.
On a alors $tM = t(PDP^{-1}) = t(P^{-1})tDtP = (tP)^{-1}DtP$ donc tM est diagonalisable car elle est semblable à la matrice diagonale D.

2. a) $A(a)$ est symétrique donc diagonalisable.

b) $A(a) - aI = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1+a & 1 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car $C_1 + C_3 - 2C_2 = 0$ donc a est valeur propre de $A(a)$.
D'autre part la matrice obtenue est de rang 1 si et seulement si les trois colonnes sont colinéaires ce qui donne (la 2e ligne vaut 1 pour les trois) que les trois colonnes sont égales et donc $a = 2 - a = 1$.
D'où pour $a = 1$ la matrice est de rang 1 et le sous-espace propre est de dimension 2 par théorème du rang, égale à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc vérifie que $f(e_2 - e_1) = f(e_3 - e_1) = 0$ et $(e_2 - e_1, e_3 - e_1)$ est libre car échelonnée donc c'est une base de $E_a(A(a))$.
Pour $a \neq 1$ la matrice est de rang 2 donc $E_a(A(a))$ est de dimension 1, et la relation $f(e_1) + f(e_3) - 2f(e_2) = 0$ donne $f(e_1 - 2e_2 + e_3) = 0$ donc $(e_1 - 2e_2 + e_3)$ famille libre (car d'un vecteur non nul) de $E_a(A(a))$ donc c'est une base de $E_a(A(a))$.

c) $A(a)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (3+a)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A(a)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (2-a)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

d) Dans tous les cas, la famille $[(1, -2, 1), (1, 1, 1), (1, , 0, -1)]$ est une base de vecteurs propres de A donc on peut diagonaliser dans cette base :
On pose $P = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 3+a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1+a & 1 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et on a $A(a) = PDP^{-1}$.

3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles vérifiant, pour tout n entier naturel,

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n + z_n \\ z_{n+1} = y_n + 2z_n \end{cases}$$

a) $X_{n+1} = A(0)X_n$.

b) Les valeurs propres de $A(0)$ sont 0, 2 et 3 ; or on aura $X_n = A(0)^n X_0 = PD^nP^{-1}X_0$ avec D^n comportant les valeurs 0, 2^n et 3^n sur la diagonale ; il faut donc que celles-ci ne rentrent pas en compte.
Chaque suite s'écrit comme combinaison linéaire de 0^n, 2^n et 3^n, il faut donc qu'elles ne soient combinaisons linéaires que de 0^n, donc que $x_n = y_n = z_n = 0$ pour $n \geqslant 1$, c'est-à-dire que $X_1 = A(0)X_0 = 0$ donc $X_0 \in \ker A(0)$, donc $X_0 \in \text{Vect}\,([)\,(1,-2,1)]$.
La condition cherchée est donc $x_0 + z_0 - 2y_0 = 0$.

4. **a)** $B = PB'P^{-1}$ et $C^2 = B$, donc $B' = P^{-1}BP = P^{-1}C^2P = (P^{-1}CP)^2$ donc avec $C' = P^{-1}CP$ on a bien $C'^2 = B'$.

b) $BC = C^2C = C^3 = CC^2 = CB$.

c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 6d & 6e & 6f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 6b & -c \\ 3d & 6e & -f \\ 3g & 6h & -i \end{pmatrix} \Leftrightarrow b =$ $c = d = f = g = h = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ est diagonale.

d) D'après les questions précédentes cela revient à cherchez une matrice N vérifiant $N^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$ D qui est semblable à $A(3)$, et N commute alors avec D, donc d'aptrèsd la question précédente il faut la chercher diagonale.
En posant $N = \text{diag}(a, b, c)$ on obtient $N^2 = \text{diag}(a^2, b^2, c^2) = \text{diag}(3, 6, -1)$ ce qui est impossible car un carré est toujours positif. Il n'y a donc pas de solution à l'équation matricielle $M^2 = A(3)$.

Exercice sans préparation

1. A priori on en demande pas de vérifier que c'est une fonction de répartition de variable à densité. Il faut prouver que F est croissante (évident avec sa dérivée), de limites 0 en $-\infty$ (évident) et 1 et $+\infty$ (évident encore) et continue à droite (évident puisque F est continue sur $\mathbb{R}$). Cela ne coûte pas grand-chose de préciser que F est de classe c^1 sur $\mathbb{R}$ et donc continue sur $\mathbb{R}$ donc que c'est une fonction de répartition de variable à densité.

2. Pour cette question classique on obtient $G(x) = F(x)^2 = \frac{1}{(1+e^{-x})^2}$ et $G_n(x) = F(x)^n = \frac{1}{(1+e^{-x})^n}$.

Exercice 6 *(Exercice avec préparation)*

1. $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{n+1}(t)\ dt.$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$, et F la primitive de f qui vérifie $F(0) = 0$.

2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $F'(x) = f(x) = e^{-x^2} > 0$ donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de plus par parité de f, $F(x) = \int_0^x f(t)\ dt$ est impaire, passe par 0 en 0 et sa limite en $+\infty$ vaut $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$ (avec la loi normale).

3. ***a)*** L'intégrale n'est pas généralisée et la fonction intégrée est continue, l'intégrale existe bien.
On définit alors la fonction G par :

$$G(x) = \int_0^1 e^{-(xt)^2}\ dt.$$

b) Le changement de variable $u = xt$ donne $G(x) = \int_0^x \frac{1}{x} e^{-u^2}\ du = \frac{1}{x}\int_0^x e^{-u^2}\ du = \frac{F(x)}{x}$.
On en déduit que G est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $G'(x) = \frac{xF'(x)-F(x)}{x^2} = \frac{xe^{-x^2}-F(x)}{x^2}$.
Le signe de G' est celui de $xe^{-x^2} - F(x) = xe^{-x^2} - \int_0^x e^{-t^2}\ dt$, qui est impaire comme somme de deux fonctions impaires. Etudions son signe sur $\mathbb{R}_+^*$:
Pour tout $t \in [0;x]$, $0 \leqslant t \leqslant x$ donc $0 \leqslant t^2 \leqslant x^2$ et $-x^2 \leqslant -t^2 \leqslant 0$, on compose par exp qui est croissante pour obtenir $e^{-x^2} \leqslant e^{-t^2}$ et enfin $\int_0^x e^{-x^2}\ dt = xe^{-x^2} \leqslant \int_0^x e^{-t^2}\ dt = F(x)$, donc $G'(x) \leqslant 0$.
On en déduit par imparité que $G'(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_-*$, puis que G est croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) $\lim_{x\to 0, x\neq 0} G(x) = \lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0}$, or F est dérivable en 0 donc $\lim_{x\to 0, x\neq 0} G(x)$ existe et vaut $\lim_{x\to 0, x\neq 0} G(x) = F'(0) = f(0) = 1$.
D'autre part $G(0) = \int_0^1 e^0\ dt = 1$ donc G est continue en 0.
D'autre part $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ est finie donc par quotient de limites, $\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$.

d) On étudie $\lim_{x\to 0, x\neq 0} G'(x)$ pour conclure avec le théorème de prolongement de la dérivée.
On a $G'(x) = \frac{\int_0^x (e^{-x^2} - e^{-t^2})\ dt}{x^2}$, on étudie donc la fonction $f(x) - f(t)$.
La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 donne $f(t) - f(x) = f'(x)(t-x) + f''(x)\frac{(t-x)^2}{2} + \int_x^t \frac{(u-x)^2}{2} f''(u)\ du$ donc $f(x) - f(t) = f'(x)(x-t) - f''(x)\frac{(x-t)^2}{2} + g(x,t)$, avec $|g(x)| \leqslant \int_t^x \frac{x^2}{2} \times M\ du \leqslant \frac{x^3 M}{2}$, où M est un majorant de $|f''(u)|$ sur $[0;x]$ ou $[x;0]$.

On obtient alors $\int_0^x (e^{-x^2}-e^{-t^2})\,dt = f'(x)\int_0^x (x-t)\,dt - \frac{f''(x)}{2}\int_0^x (x-t)^2\,dt + \int_0^x g(x,t)\,dt = f'(x)\frac{x^2}{2} - \frac{f''(x)}{2}\frac{x^3}{3} + h(x)$, avec $|h(x)| \leqslant |\int_0^x M\frac{x^3}{2}| = M\frac{|x^4|}{2}$.
Enfin on obtient $G'(x) = \frac{f'(x)}{2} + o(1)$, donc $\lim\limits_{x\to 0, x\neq 0} G'(x) = \frac{f'(0)}{2} = 0$.

La fonction G' admet donc une limite finie en 0 à gauche et à droite et celles-ci sont égales ; le théorème de prolongement de la dérivée permet de conclure, et donne $G'(0) = 0$.

Autre possibilité : écrire puis sommer les développements limités de $xf(x)$ et $F(x)$ obtenus à l'aide de la formule de Taylor.

4. a) Pour tout $x \neq 0$, on a $xG'(x) + G(x) = \frac{xf(x)-F(x)}{x} + \frac{F(x)}{x} = \frac{xf(x)}{x} = f(x)$.
De plus comme les fonction $x \to xG'(x) + G(x)$ et $x \to f(x)$ sont continues, on obtient par continuité en 0 la relation en $x = 0$.

b) On veut prouver que G est l'unique fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ xg'(x) + g(x) = f(x) \quad (E).$$

Soit G_1 une fonction réelle dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation (E). On pose $H = G - G_1$. Déterminer $H(x)$ pour $x > 0$ puis pour $x < 0$. conclure en utilisant la continuité de H en 0.

On a $H(x) = G(x) - G_1(x)$ vérifie $xH'(x) + H(x) = 0$, donc en posant $A(x) = xH(x)$ on a $A'(x) = xH'(x) + H(x) = 0$, donc $A(x)$ est constante égale à K sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que $H(x) = \frac{K}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, et la continuité de H en 0 impose que $\frac{K}{x}$ admette une limite finie en 0. Or si $K \neq 0$, on obtient une limite infinie : ceci impose que $K = 0$, puis $H(x) = 0$ sur $\mathbb{R}^*$ puis sur $\mathbb{R}$ par continuité de H.

Enfin on obtient $G_1(x) = G(x)$, et G est bien l'unique solution de l'équation différentielle (E).

Exercice sans préparation

Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit a un réel strictement positif et X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0; 2a]$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots X_n$ qui ont toutes la même loi que X. On pose :

$$M_n = \max(X_1, \ldots X_n).$$

De manière classique $F_{M_n}(x) = F_X(x)^n = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ \frac{x^n}{(2a)^n} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2a \\ 1 \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$.
On en déduit que $f_{M_n}(x) = 0$ si $x \notin [0; 2a]$, et $f_{M_n}(x) = n\frac{x^{n-1}}{(2a)^n}$ sinon.

Ensuite on a $\mathbb{E}(M_n) = \frac{n}{(2a)^n} \displaystyle\int_0^{2a} x^n \, dx = \frac{n(2a)^{n+1}}{(n+1)(2a)^n} = \frac{2an}{n+1}$.
De même $\mathbb{E}(M_n 2) = \frac{n(2a)^{n+2}}{(n+2)(2a)^n} = \frac{4a^2 n}{n+2}$, et enfin :
$\mathbb{V}(M_n) = \frac{4a^2 n}{n+2} - \frac{4a^2 n^2}{(n+1)^2}$ donc $\mathbb{V}(M_n) = 4a^2 n \left(\frac{1}{n+2} - \frac{n}{(n+1)^2}\right)$.

2. On a $\mathbb{E}(U_n) = \frac{n+1}{2n}\mathbb{E}(M_n) = a = \mathbb{E}(X)$ donc U_n est un estimateur sans biais de $a = \mathbb{E}(X)$.
Pour comparer les estimateurs, on compare leurs risques quadratiques :
$R(V_n) = V(V_n) = \frac{1}{n^2} \times n\mathbb{V}(X) = \frac{\mathbb{V}(X)}{n} = \frac{4a^2}{12n} \to 0$ et proportionnel à $\frac{1}{n}$.
D'autre part $R(U_n) = V(U_n) = \frac{(n+1)^2}{4n^2}\mathbb{V}(M_n) = \frac{a^2}{n}\left(\frac{(n+1)^2}{n+2} - n\right) = a^2\left(\frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{n(n+2)}\right) = a^2\left(\frac{1}{n(n+2)}\right) \to$ 0 mais proportionnel à $\frac{1}{n^2}$, donc il tend plus vite vers 0.
U_n est donc un meilleur estimateur que V_n de $a = \mathbb{E}(X)$.