ECE2
Mathématiques

Programme de colle - Semaine 3

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Critère de convergence des séries télescopiques** :
  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

$$(u_n) \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \sum (u_{n+1} - u_n) \text{ converge}$$

De plus, si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) = \ell - u_0.$$

Preuve.
Pour tout $n \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) &= \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} u_j - \sum_{k=0}^{n} u_k && \textit{(avec le changement d'indice } j = k+1\textit{)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} u_j + u_{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{n} u_k + u_0 \right) \\ &= u_{n+1} - u_0 \end{aligned}$$

Donc (S_n) converge si et seulement si (u_n) converge.
De plus, si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = \lim_{n\to\infty} (u_{n+1} - u_0) = \ell - u_0.$$

□

- **Critère de convergence des séries de Riemann** :
$\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$

Preuve.
On détaillera uniquement le cas $\alpha > 1$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in [k, k+1]$.
Alors, par décroissante de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ sur $]0, +\infty[$:

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \;\leqslant\; \frac{1}{x^\alpha} \;\leqslant\; \frac{1}{k^\alpha},$$

Donc, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k \leqslant k+1$) :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^\alpha}\, dx \;\leqslant\; \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha}\, dx \;\leqslant\; \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha}\, dx$$

Comme k^α et $(k+1)^\alpha$ sont des constantes par rapport à la variable d'intégration x, on obtient :

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \;\leqslant\; \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha}\, dx \;\leqslant\; \frac{1}{k^\alpha}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant l'encadrement précédent de 1 à $n-1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \;\leqslant\; \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\, dx \;\leqslant\; \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha}$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \;\leqslant\; \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\, dx \;\leqslant\; \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha}$$

Or : $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\, dx \;=\; \left[\, \frac{1}{1-\alpha}\, \frac{1}{x^{\alpha-1}} \,\right]_1^n \;=\; \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right)$. Donc :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \;\leqslant\; \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right) \;\leqslant\; \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Si $\alpha > 1$, alors : $0 \leqslant 1 - \dfrac{1}{n^\alpha} \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
La suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right)$ est donc majorée par $\dfrac{1}{\alpha-1}$. Elle est de plus croissante car c'est une somme de termes positifs. Donc, par théorème de convergence monotone, elle converge.
D'où la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente. $\square$

- **Comparaison série / intégrale** :
Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$, continue, positive et décroissante sur cet intervalle.
Alors la série $\sum f(n)$ et la suite $\left(\displaystyle\int_0^n f(t)\ dt \right)$ ont même nature.

  Preuve.
  Pour tout $k \in \mathbb{N}$, comme f est décroissante, on a :
  $$\forall x \in [k, k+1],\ \ f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k)$$
  Par croissance de l'intégrale, les bornes étant bien ordonnées ($k \leqslant k+1$) :
  $$f(k+1) \ \leqslant\ \int_k^{k+1} f(t)\ dt \ \leqslant\ f(k)$$
  On somme l'encadrement précédent pour k variant de 0 à $n-1$. On obtient ainsi :
  $$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \ \leqslant\ \int_0^n f(t)\ dt \ \leqslant\ \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$
  et, si on note S_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum f(n)$, cela s'écrit :
  $$S_n - f(0) \ \leqslant\ \int_0^n f(t)\ dt \ \leqslant\ S_{n-1}$$
  En observant que les deux suites (S_n) et $\left(\displaystyle\int_0^n f(t)\ dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont croissantes (car f est positive), on peut affirmer grâce à la dernière égalité :
  × si (S_n) converge vers ℓ, alors $\left(\displaystyle\int_0^n f(t)\ dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par ℓ, donc converge aussi ;
  × si $\left(\displaystyle\int_0^n f(t)\ dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ', alors (S_n) est majorée par $\ell' + f(0)$, donc converge aussi.

  □

  Remarque : On pourra demander à l'étudiant s'il est possible d'amoindrir les hypothèses.

Connaissances exigibles

- convergence de suites numériques (théorème de convergence monotone, théorème d'encadrement, etc.)
- suites adjacentes
- étude de suites récurrentes (les élèves doivent être guidés dans le cheminement de ces études)
- équivalents
- négligeabilité
- séries numériques, à termes positifs, séries usuelles, comparaison série / intégrale, comparaisons de séries par négligeabilité et équivalence.
- les séries alternées sont hors programme mais les étudiants ont vu en exercice comment démontrer le critère de convergence des séries alternées.
- toutes les techniques sont à connaître (sommation télescopique, calcul direct des sommes partielles - séries usuelles, comparaison séries / intégrales, critères sur les SATP...)
- on insistera particulièrement en colle sur les rédactions classiques (notamment pour tous les critères sur les SATP).