

EDHEC 2018, voie E

Une solution (des trois exercices) proposée par Frédéric Gaunard (Lycée Français de Vienne). Pour tout commentaire, n'hésitez pas à écrire à frederic@gaunard.com.

Exercice 1

- (1) On peut voir de plusieurs façons que la matrice n'est pas inversible. Par exemple la deuxième colonne est le double de la première ou encore son déterminant est nul.
- (2) Cherchons les valeurs propres

$$\begin{aligned}\lambda \text{ valeur propre de } A &\iff A - \lambda I_2 \text{ non inversible} \\ &\iff \det(A - \lambda I_2) = 0 \\ &\iff (1 - \lambda)(6 - \lambda) - 6 = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 7\lambda = 0 \\ &\iff \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 7\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{Sp}(A) = \{0; 7\}.$$

- (3) Par linéarité du produit matriciel, si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$f(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda f(M) + f(N)$$

et f est bien une application linéaire. Le produit de deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ étant encore une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'application linéaire f est bien définie de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même et est donc bien un endomorphisme.

- (4) (a) Commençons par déterminer le noyau

$$\begin{aligned}M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f) &\iff AM = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} x + 2z & y + 2t \\ 3x + 6z & 3y + 6t \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} x = -2z \\ y = -2t \end{cases} \\ &\iff M = \begin{pmatrix} -2z & -2t \\ z & t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Il suit que

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Comme les deux matrices apparaissant ci-dessus sont clairement linéairement indépendantes et qu'elles engendrent le noyau de f , elles en forment une base. En particulier,

$$\dim(\text{Ker}(f)) = 2.$$

- (b) Par le théorème du rang, on peut donc affirmer que

$$\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) - \dim(\text{Ker}(f)) = 4 - 2 = 2.$$

(c) On calcule

$$\begin{aligned} f(E_1) &= AE_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= E_1 + 3E_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(E_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= E_2 + 3E_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(E_3) &= 2E_1 + 6E_3 = 2(E_1 + 3E_3) = 2f(E_1) \\ f(E_4) &= 2E_2 + 6E_4 = 2(E_2 + 3E_4) = 2f(E_2) \end{aligned}$$

Il découle immédiatement que

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(E_1 + 3E_3, E_2 + 3E_4).$$

La dimension de l'image étant égale à 2 et les deux matrices ci-dessus étant linéairement indépendantes, elles forment une base de l'image de f .

(5) (a) On voit que

$$f(E_1 + 3E_3) = f(E_1) + 3f(E_3) = 7f(E_1) = 7(E_1 + 3E_3)$$

et, de même

$$f(E_2 + 3E_4) = 7(E_2 + 3E_4).$$

(b) On voit alors que 7 est valeur propre pour f est que le sous-espace propre associé est de dimension au moins 2 car il contient l'image de f (d'après la question précédente). Comme de plus le noyau de f (qui est le sous-espace propre associé à 0) est aussi de dimension 2, on sait que non seulement le sous-espace propre associé à 7 est de dimension exactement égale à 2 mais, comme la somme des dimension fait 4 qui est la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'endomorphisme f est diagonalisable (et ses valeurs propres sont les mêmes que celles de A).

(6) (a) Si $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un vecteur propre de A (associé à la valeur propre λ), comme c'est une matrice carrée, ${}^tX \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et le produit X^tX aussi. De plus, par associativité du produit matriciel

$$f(X^tX) = AX^tX = (AX)^tX = f(X)^tX = \lambda X^tX$$

et X^tX est bien vecteur propre de f associé à λ . (On note que si X est vecteur propre pour A au départ, celui-ci ne peut être nul et qu'il en est de même pour X^tX .) Notamment, λ est aussi valeur propre de f .

(b) Réciproquement, soient λ une valeur propre de f et M un vecteur propre (élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$) associé. Notant C_1 et C_2 les colonnes de M , il est clair que

$$f(M) = \lambda M \iff AM = \lambda M \iff AC_i = \lambda C_i \quad (i = 1, 2).$$

En effet, si $C_1 = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix}$, alors

$$AM = \begin{pmatrix} x + 2z & y + 2t \\ 3x + 6z & 3y + 6t \end{pmatrix}$$

Donc

$$AM = \lambda M \implies \begin{cases} x + 2z = \lambda x \\ 3x + 6z = \lambda z \end{cases} \iff AC_1 = A \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \lambda C_1$$

et même chose pour C_2 . Ainsi, ces deux colonnes (qui ne peuvent pas être toutes deux simultanément nulles, sinon M serait nulle) sont donc vecteurs propres pour A associés à λ et celle-ci est bien valeur de A , ce qui termine l'équivalence souhaitée.

Exercice 2

- (1) (a) L'évènement $(X = 1)$ signifie qu'on a *Pile* dès le premier lancer. Ceci dépend naturellement de la pièce lancée. Commençons par remarquer que le choix de la pièce se faisant au hasard, on a

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}.$$

Ainsi, en appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'évènements $\{A_i, i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket\}$, on obtient

$$P(X = 1) = P_{A_1}(X = 1)P(A_1) + P_{A_2}(X = 1)P(A_2) + P_{A_3}(X = 1)P(A_3).$$

Le texte donne les valeurs des probabilités conditionnelles ci-dessus. Plus précisément, on obtient

$$P(X = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

- (b) On commence par écrire

$$(X = n) = \bigcap_{k=1}^{n-1} F_k \cap P_n.$$

On va à nouveau utiliser la formule des probabilités totales avec le même s.c.e. Mais, on observe que, la pièce numérotée 1 amenant (presque) sûrement un *Face*,

$$P_{A_1}(X = n) = 0.$$

Comme $n \geq 2$, un lancer avec la pièce numérotée 2 amènerait un *Pile* dès le premier coup et on a une autre probabilité conditionnelle nulle $P_{A_2}(X = n) = 0$. Ainsi, pour tout $n \geq 2$, par indépendance des lancers successifs

$$P(X = n) = P_{A_0}(X = n)P(A_0) = \frac{1}{3} \prod_{k=1}^{n-1} P_{A_0}(F_k)P_{A_0}(P_n) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

- (c) Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$, on a

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= 1 - P(X = 1) - \sum_{n=2}^{+\infty} P(X = n) \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - 1/2} - 1 - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{5}{18}. \end{aligned}$$

- (2) Les valeurs prises par X étant positives ou nulles, celle-ci admet une espérance si et seulement si la série de terme général $kP(X = k)$ converge. Or, pour $k \geq 2$,

$$kP(X = k) = k \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{6} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

et on reconnaît le multiple du terme général d'une série géométrique dérivée, de raison $1/2$ donc convergente. Ainsi, X admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \sum_{k=2}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{(1-1/2)^2} - 1 \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

- (3) Le théorème de transfert affirme que $X(X-1)$ admet une espérance si et seulement si la série de terme général $k(k-1)P(X=k)$ est convergente. On va reconnaître cette fois un multiple du terme général de la série géométrique dérivée deux fois (toujours de raison $1/2$ donc toujours convergente). Pour $k \geq 2$,

$$k(k-1)P(X=k) = \frac{1}{12}k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}.$$

Ainsi, $X(X-1)$ admet une espérance et celle-ci vaut

$$E(X(X-1)) = \frac{1}{12} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = \frac{1}{12} \times \frac{2}{(1-1/2)^3} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}.$$

Mais, $E(X(X-1)) = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X)$. Par linéarité de l'espérance, il suit que X admet un moment d'ordre 2 (donc une variance) et par la formule de König-Huygens, on a

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = \frac{4}{3} + 1 - 1 = \frac{4}{3}.$$

- (4) La situation est totalement symétrique: une pièce équilibrée, une pièce qui donne presque sûrement *Pile* et une autre presque sûrement *Face*. Ainsi, le même raisonnement où on permutera *Pile* avec *Face* et A_1 avec A_2 permet de voir que les lois de X et Y sont les mêmes.
- (5) (a) Soit $j \geq 2$, on observe que $[X=1] \cap [Y=j]$ signifie qu'on a obtenu un *Pile* au premier coup et le premier *Face* au j -ième coup et donc nécessairement après une succession de *Pile*, ce qui est donc la même chose que $[Y=j]$ d'où l'égalité des probabilités.
 (b) Par symétrie, on obtient de même, pour $i \geq 2$, $P([X=i] \cap [Y=1]) = P(X=i)$.
- (6) (a) X et Y étant toutes deux à valeurs positives, si $X+Y=0$ alors $X=Y=0$. Mais une prise de valeur nulle pour X signifie que l'on a toujours obtenu des *Face*, et ce dès le premier lancer, ainsi $Y=1 \neq 0$. Donc on ne peut pas avoir $X+Y=0$. De plus, si $X+Y=2$ alors ou bien $X=Y=1$ (ce qui est impossible: le premier lancer ne peut pas être simultanément *Pile* et *Face*), ou bien $X=0$ et $Y=2$ (ou inversement). Mais $X=0$ signifie (comme dit ci-avant) qu'on obtient que des *Face* et que donc $Y=1$ et $X+Y \neq 2$. Dans le cas où X ou Y vaut 0, on a donc $X+Y=1$ et si $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$,

$$[X+Y=k] = \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} F_j \cap P_k \right) \cup \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} P_j \cap F_k \right),$$

est un évènement possible. On a bien $(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0; 2\}$.

- (b) Comme énoncé ci-dessus

$$\begin{aligned} P(X+Y=1) &= P([X=0] \cap [Y=1]) + P([X=1] \cap [Y=0]) \\ &= P(X=0) + P(Y=0) \\ &= 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

- (c) Soit $n \geq 3$. Remarquant que le résultat du premier lancer décompose l'univers, *i.e.* $\{[X = 1], [Y = 1]\}$ forme un s.c.e, on a

$$\begin{aligned}[X + Y = n] &= ([X + Y = n] \cap [X = 1]) \cup ([X + Y = n] \cap [Y = 1]) \\ &= ([Y = n - 1] \cap [X = 1]) \cup ([X = n - 1] \cap [Y = 1]).\end{aligned}$$

- (d) Par incompatibilité des deux évènements ci-dessus, et par la question 5a,

$$\begin{aligned}P(X + Y = n) &= P([Y = n - 1] \cap [X = 1]) + P([X = n - 1] \cap [Y = 1]) \\ &= P(Y = n - 1) + P(X = n - 1) \\ &= 2 \times \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

- (7) (a) On complète sans mal le script SciLab. La variable `piece` correspond au numéro de la pièce lancée et reçoit donc le résultat de la simulation d'une loi uniforme sur $\llbracket 0; 2 \rrbracket$.

```
piece=grand(1,1,'uin', 0, 2)
x=1
if piece == 0 then //si on lance la piece 0
    lancer=grand(1,1,'uin', 0, 1)
    while lancer=0 //tant qu'on a des FACE
        lancer=grand(1,1,'uin',0,1) //on relance
        x=x+1
    end
else
    if piece==1 then //si on lance la piece 1
        x=0 //on aura que des FACE
    end
disp(x)
```

- (b) Si on lance la pièce numérotée 2, on a dès le premier coup *Pile* donc $X = 1$, déjà initialisé.

Exercice 3

- (1) Comme $a > 0$, il est clair que $f(x) \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, f est continue partout sur \mathbb{R} : sur $] -\infty; 0[$ c'est une fonction constante (nulle), sur $[0; +\infty[$, c'est un produit de fonctions usuelles continues et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{a} e^{-x^2/2a} = 0.$$

Il reste à montrer que l'intégrale de f sur \mathbb{R} est convergente et que celle-ci vaut 1. Comme f est nulle sur $] -\infty; 0[$, il suffit d'étudier la convergence de l'intégrale sur $[0; +\infty[$. Soit $A > 0$, on reconnaît tout de suite une dérivée de la forme $u' \exp(u)$ et on peut donc écrire

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{x}{a} e^{-x^2/2a} dx &= \left[e^{-x^2/2a} \right]_0^A \\ &= 1 - e^{-A^2/2a} \\ &\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1\end{aligned}$$

et f est bien une densité de probabilité.

- (2) Le calcul est en fait déjà fait ci-dessus (on remplace A par x)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/2a}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- (3) (a) On montre le résultat demandé en explicitant la fonction de répartition de Y

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P\left(\frac{X^2}{2a} \leq x\right)$$

Comme $X^2/2a \geq 0$, on voit tout de suite que la probabilité (et donc la fonction de répartition) ci-dessus est nulle pour $x < 0$. Pour $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P\left(\frac{X^2}{2a} \leq x\right) \\ &= P\left(X \leq \sqrt{2ax}\right) \\ &= 1 - e^{-(\sqrt{2ax})^2/2a} \\ &= 1 - e^{-x} \end{aligned}$$

et on reconnaît bien la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1 comme demandé; $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

- (b) La question précédente permet de simuler la variable X par *inversion*. En effet, remarquant que

$$Y = \frac{X^2}{2a} \iff X = \sqrt{2aY},$$

on propose le script suivant

```
a=input("a=?");
Y=rand(1,1,'exp', 1);
X=sqrt(2*a*Y).
```

- (4) (a) La fonction g est définie sur \mathbb{R} et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2/2a} = x^2 e^{-x^2/2a} = g(x)$$

et la fonction est bien paire.

- (b) Si $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0; a)$, alors comme $E(Z) = 0$,

$$E(Z^2) = V(Z) = a = \frac{1}{\sqrt{2a\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2a} dt = \frac{1}{\sqrt{2a\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt.$$

- (c) Comme la fonction f est nulle sur $] -\infty; 0]$, X admet une espérance si et seulement si on a convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{a} e^{-x^2/2a} dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} g(x) dx.$$

Or, cette intégrale est convergente (notamment d'après la question précédente où on reconnaît le moment d'ordre 2 d'une loi normale) et de plus, comme g est paire, la valeur de l'intégrale sur $[0; +\infty[$ est égale à la moitié de celle sur $] -\infty; +\infty[$. Au final,

$$E(X) = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} g(x) dx = \frac{1}{a} \times \frac{1}{2} \times a\sqrt{2a\pi} = \frac{\sqrt{2a\pi}}{2}.$$

- (5) (a) On connaît l'espérance d'une loi exponentielle; comme $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, on en déduit immédiatement que $E(Y) = 1$. Par ailleurs, X admet un moment d'ordre deux si et seulement si X^2 admet une espérance. Mais, $X^2 = 2aY$. Or $2aY$ admet une espérance, et par linéarité de celle-ci, on a

$$E(X^2) = 2aE(Y) = 2a.$$

(b) Par la formule de König-Huygens,

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= 2a - \left(\frac{\sqrt{2a\pi}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{4a - a\pi}{2} \\ &= \frac{(4 - \pi)a}{2}. \end{aligned}$$

(6) (a) Comme les X_k suivent toutes les même loi que X , on a $E(X_k^2) = E(X^2) = 2a$ (pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$). Ainsi, par linéarité de l'espérance, on trouve

$$\begin{aligned} E(S_n) &= E\left(\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n X_k^2\right) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n E(X_k^2) \\ &= \frac{1}{2n} \times 2an \\ &= a, \end{aligned}$$

et S_n est bien un estimateur sans biais de a .

(b) Comme précédemment, on sait que $X^2 = 2aY$ et Y possède une variance (qui d'après le cours vaut $V(Y) = 1$). Ainsi, X^2 admet une variance et d'après les propriétés de la variance

$$V(X^2) = V(2aY) = 4a^2 V(Y) = 4a^2.$$

(c) Comme S_n est un estimateur sans biais de a , son risque quadratique est égal à sa variance. Comme les X_k sont (mutuellement) indépendantes, le lemme des coalitions permet d'affirmer que les X_k^2 le sont également et la variance de leur somme peut ainsi se calculer comme somme des variance. En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient

$$\begin{aligned} r_a(S_n) &= V(S_n) = V\left(\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n X_k^2\right) \\ &= \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k^2) = \frac{1}{4n^2} n V(X^2) \\ &= \frac{a^2}{n}. \end{aligned}$$

En particulier, il est clair que $r_a(S_n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty$. Le cours permet alors de conclure que S_n est un estimateur convergent de a .

(7) On suppose que $a < 1$.

(a) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$P(|S_n - E(S_n)| > \varepsilon) \leq \frac{V(S_n)}{\varepsilon^2}.$$

En passant à l'évènement contraire et en injectant les valeurs de l'espérance de S_n et de sa variance, on obtient comme attendu

$$\begin{aligned} P(|S_n - a| \leq \varepsilon) &\geq 1 - \frac{a^2}{n\varepsilon^2} \\ &\geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2} \quad (\text{car } a < 1) \end{aligned}$$

(b) On observe que

$$a \in \left[S_n - \frac{1}{10}; S_n + \frac{1}{10} \right] \iff |S_n - a| \leq \frac{1}{10}$$

Ainsi, d'après la question précédente,

$$1 - \frac{1}{n \times \frac{1}{100}} \geq 95\% \implies P \left(|S_n - a| \leq \frac{1}{10} \right) \geq 95\%.$$

Il suffit alors de choisir n tel que

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{n \times \frac{1}{100}} \geq 95\% &\iff \frac{n - 100}{n} \geq \frac{95}{100} \\ &\iff n \geq 2000. \end{aligned}$$

Problème