- La suite $\left(\sum\limits_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X=j])\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. En effet, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{j=1}^{p+1} j\ \mathbb{P}([X=j]) - \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X=j]) = (p+1)\ \mathbb{P}([X=p+1]) \geqslant 0$$

- Elle est de plus majorée par $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X>j])$ d'après la question précédente.

Ainsi, la suite $\left(\sum\limits_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X=j])\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

$$\boxed{\text{Ainsi, } X \text{ admet une espérance.}}$$

□

c) Conclure des questions précédentes que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}([X>j])$ converge.

Démonstration.

- En question ***2.a)***, on a démontré que si X admet une espérance, alors la série de terme général $\mathbb{P}([X>j])$ est convergente (résultat de la question ***2.a)iv.***).
  (on obtient de plus : $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X>j])$*)*
- En question ***2.b)***, on a démontré que si la série de terme général $\mathbb{P}([X>j])$ est convergente alors X admet une espérance (résultat de la question ***2.a)iii.***).
  (et dans ce cas, on peut à nouveau conclure par la question ***2.a)*** *:* $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X>j])$*)*

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet une espérance si et seulement si la série de terme général } \mathbb{P}([X>j]) \text{ converge.}}$$

□

DÉCALER tout ce qui sort des marges à l'intérieur

3. On suppose dans cette question qu'il existe un réel α strictement positif tel que pour tout entier naturel j on ait :

$$\mathbb{P}([X>j]) = \frac{1}{(j+1)^\alpha} \qquad (*)$$

a) Légitimer que $(*)$ définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer que la suite $\Big(\mathbb{P}([X=j])\Big)_{j\in\mathbb{N}^*}$ définie par $(*)$ vérifie :

(i) $\forall j \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X=j]) \geqslant 0$,

(ii) $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=j]) = 1$.

- Soit $j \in \mathbb{N}^*$. D'après la question ***1.a)*** :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X=j]) &= \mathbb{P}([X>j-1]) - \mathbb{P}([X>j]) \\ &= \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha} \geqslant 0 \end{aligned}$$

En effet, $j+1 \geqslant j$ et il suffit alors d'appliquer de part et d'autre la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$, décroissante sur $]0,+\infty[$ (car $\alpha > 0$).

b) i. Montrer que : $A_2 \ = \ [X_1 = 2] \ \cup \ ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$.

Démonstration.
Raisonnons par double inclusion.

($\subset$) Supposons que l'événement A_2 est réalisé. Cela signifie que le composant en place le jour 2 tombe en panne lors de ce jour. Il reste alors à déterminer quel composant est en place lors du deuxième jour. Deux cas se présentent :

× soit le premier composant est tombé en panne après un jour.
Dans ce cas, c'est le deuxième composant qui était en place lors du deuxième jour.
S'il tombe en panne en jour 2 c'est qu'il est resté opérationnel un jour.
Dans ce cas, l'événement $[X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]$ est réalisé.

× soit le premier composant est resté en vie strictement plus d'un jour.
Dans ce cas, c'est ce composant qui est en place lors du deuxième jour.
S'il tombe en panne en jour 2 c'est qu'il est resté opérationnel deux jours.
Dans ce cas, l'événement $[X_1 = 2]$ est réalisé.

Ainsi, l'événement $[X_1 = 2] \cup ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$ est réalisé.

($\supset$) Supposons que l'événement $[X_1 = 2] \cup ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$ est réalisé.
Ainsi, soit $[X_1 = 2]$ est réalisé et alors le premier composant a une durée de vie de 2 jours ; soit $[X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]$ est réalisé et alors les deux premiers composants ont duré chacun un jour. Dans les deux cas, le composant en place le jour 2 tombe en panne : A_2 est réalisé.

$$\boxed{\text{On en conclut : } A_2 \ = \ [X_1 = 2] \ \cup \ ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]).}$$

Commentaire

- Par définition, un événement est un ensemble. Démontrer l'égalité de deux ensembles c'est démontrer que tout élément du premier ensemble est dans le second et inversement. Ou encore qu'un élément est dans le premier ensemble si et seulement si il est aussi dans le second.
- En terme d'événement, cela signifie que le premier événement est réalisé (il existe ω réalisant cet événement *i.e.* il existe ω appartenant à cet événement) si et seulement si le second événement est réalisé (l'élément ω précédent est aussi élément de cet événement). □

ii. En déduire u_2 en fonction de p_1 et p_2.

Démonstration.

- Les événements $[X_1 = 2]$ et $[X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]$ sont incompatibles. En effet :

$$[X_1 = 2] \cap ([X_1 = 1] \ \cap \ [X_2 = 1]) \ = \ ([X_1 = 2] \ \cap \ [X_1 = 1]) \cap [X_2 = 1] = \varnothing \cap [X_2 = 1] = \varnothing$$

- Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_2) &= \mathbb{P}([X_1 = 2] \cup ([X_1 = 1] \ \cap \ [X_2 = 1])) \\
&= \mathbb{P}([X_1 = 2]) + \mathbb{P}([X_1 = 1] \ \cap \ [X_2 = 1]) && \textit{(par incompatibilité des événements considérés)} \\
&= \mathbb{P}([X_1 = 2]) + \mathbb{P}([X_1 = 1]) \ \times \ \mathbb{P}([X_2 = 1]) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \mathbb{P}([X_1 = 2]) + \mathbb{P}([X_1 = 1]) \ \times \ \mathbb{P}([X_1 = 1]) \ = \ p_2 + p_1^2 && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ ont même loi)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } u_2 = p_2 + p_1^2.}$$

□

c) Pour tout entier naturel i, on pose $\tilde{X}_i = X_{i+1}$.

i. Montrer que les variables $\tilde{X}_i$ sont mutuellement indépendantes, indépendantes de X_1 et de même loi que X_1.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, la suite $(X_i)_{i\geqslant 1}$ est une suite de variables mutuellement indépendantes. Il en est donc de même de la suite $(X_i)_{i\geqslant 2}$, qui n'est autre que la suite $(\tilde{X}_i)_{i\geqslant 1}$.

  Les variables $\tilde{X}_i$ sont mutuellement indépendantes.

- Par ailleurs, par le lemme des coalitions, toute variable $\tilde{X}_i$ (pour $i \geqslant 1$) est indépendante de la variable X_1.

- Enfin, la suite $(X_i)_{i\geqslant 1}$ est une suite de variables possédant toutes la même loi, celle de X_1. Il en est donc de même de la suite $(X_i)_{i\geqslant 2}$, qui n'est autre que la suite $(\tilde{X}_i)_{i\geqslant 1}$.

  Les variables $\tilde{X}_i$ ont même loi que X_1.

Commentaire

Il semble que l'énoncé comporte une petite coquille. Il aurait fallu écrire « tout entier naturel **non nul** i ». Cela pose un problème pour cette question : en effet, la variable $\tilde{X}_0 = X_1$ n'est pas indépendante de X_1.

□

ii. Soit k un entier naturel non nul strictement inférieur à n. Montrer que :

$$A_n \cap [X_1 = k] = [X_1 = k] \ \cap \ \bigcup_{j\geqslant 1} \left[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n - k\right]$$

Démonstration.

- D'après l'énoncé, A_n est l'événement « il existe k entier naturel non nul tel que $T_k = n$ ». Ainsi :

$$\begin{aligned} A_n &= \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} [T_j = n] \\ &= \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} [X_1 + \ldots + X_j = n] \\ &= [X_1 = n] \ \cup \ \bigcup_{j\geqslant 2} [X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n] \end{aligned}$$

- On en déduit, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\begin{aligned} & [X_1 = k] \ \cap \ A_n \\ = \ & [X_1 = k] \ \cap \ \left([X_1 = n] \ \cup \ \bigcup_{j\geqslant 2} [X_1 + \ldots + X_j = n]\right) \\ = \ & [X_1 = k] \cap [X_1 = n] \ \cup \ \bigcup_{j\geqslant 2} \Big([X_1 = k] \ \cap \ [X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n]\Big) \qquad \textit{(par distributivité de } \cap \textit{ par rapport à } \cup) \\ = \ & \varnothing \ \cup \ \bigcup_{j\geqslant 2} \Big([X_1 = k] \ \cap \ [k + X_2 + \ldots + X_j = n]\Big) \end{aligned}$$

En effet, comme $k < n$, la v.a.r. X_1 ne peut prendre à la fois les valeurs distinctes k et à n.

- Or, pour tout $k \geqslant n+1$, on a : $[X_1 = k] \cap A_n = \varnothing$.
  En effet si les événements $[X_1 = k]$ et A_n sont réalisés alors le premier composant :
  × tombe en panne le jour $k \geqslant n+1$ (car $[X_1 = k]$ est réalisé).
  × est le composant en place le jour n. Et il tombe donc en panne le jour n (car A_n est réalisé).
  Ces deux événements sont donc bien incompatibles.

  $$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \geqslant n+1 : \mathbb{P}([X_1 = k] \cap A_n) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0.}$$

- D'autre part : $[X_1 = n] \subset A_n$.
  En effet, si $[X_1 = n]$ est réalisé alors le premier composant a une durée de vie de n jours. Il est donc en place le jour n et tombe alors en panne ce jour. Ce qui signifie que A_n est réalisé.

  $$\boxed{\text{Comme } [X_1 = n] \subset A_n \text{ alors } [X_1 = n] \cap A_n = [X_1 = n].}$$

- On déduit de ce qui précède :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}(A_n) & = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap A_n) + \mathbb{P}([X_1 = n]) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) + \mathbb{P}([X_1 = n]) & \textit{(valide car pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}([X_1 = k]) \neq 0\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}(A_{n-k}) + \mathbb{P}([X_1 = n]) & \textit{(d'après la question précédente)} \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \, u_{n-k} + p_n \ = \ u_{n-1} \, p_1 + \ldots + u_1 \, p_{n-1} + p_n &
\end{array}$$

On rappelle que $u_0 = 1$ par convention.

$$\boxed{\text{On en conclut : } u_n = u_{n-1} \, p_1 + \ldots + u_1 \, p_{n-1} + u_0 \, p_n.}$$

Commentaire

La propriété de la question précédente (***4.c)iii***) a été démontrée pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$. On ne peut donc l'utiliser que pour un entier $k \in [\![1, n-1]\!]$. C'est une évidence qu'il convient toutefois de rappeler car elle est trop régulièrement ignorée par les candidats. Lorsque l'on souhaite utiliser un résultat précédemment démontré ou admis, il faut scrupuleusement vérifier que l'on est dans les conditions d'application de ce résultat.

□

e) En **Scilab**, soit $P = [p_1, p_2, ..., p_n]$ le vecteur ligne tel que $P(j) = p_j$ pour j dans $[\![1, n]\!]$.
Écrire un programme en **Scilab** qui calcule u_n à partir de P.

Démonstration.

- La suite (u_n) est une suite récurrente dont le $n^{\text{ème}}$ terme dépend de tous les précédents. Pour calculer le terme d'indice n, il faut avoir accès aux termes d'indice $0, \ldots, n-1$ de la suite.
  Il est donc nécessaire de créer un vecteur `U` permettant de stocker, au fur et à mesure du calcul, toutes ces valeurs.
- Pour calculer chaque coefficient de `U`, on se sert de la formule démontrée dans la question précédente :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \ u_k \ = \ \sum\limits_{j=1}^{k} u_{k-j} \, p_j \end{array} \right.$$

  On commence par stocker dans `U` l'élément u_0. L'élément u_k (stocké en $k+1^{\text{ème}}$ case de `U`) est déterminé par un calcul de somme (on met à jour une variable auxiliaire `S`).

ii. Montrer que :

$$\mathbb{E}(Z_1^{(m)}) \leqslant \int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx$$

Démonstration.

- Soit $i \in [\![m, +\infty[\![$. Soit $x \in [i, i+1]$.

Alors $i \leqslant x \leqslant i+1$

donc $i^\alpha \leqslant x^\alpha \leqslant (i+1)^\alpha$ *(par croissance de $x \mapsto x^\alpha$ sur $[0, +\infty[$)*

et $\dfrac{1}{i^\alpha} \geqslant \dfrac{1}{x^\alpha} \geqslant \dfrac{1}{(i+1)^\alpha}$ *(par décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$)*

ainsi $\dfrac{\alpha}{i^\alpha} \geqslant \dfrac{\alpha}{x^\alpha} \geqslant \dfrac{\alpha}{(i+1)^\alpha}$ *(en multipliant par $\alpha > 0$)*

enfin $\displaystyle\int_i^{i+1} \frac{\alpha}{i^\alpha}\, dx \geqslant \int_i^{i+1} \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx \geqslant \int_i^{i+1} \frac{\alpha}{(i+1)^\alpha}\, dx$ *(par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($i \leqslant i+1$))*

On remarque alors : $\displaystyle\int_i^{i+1} \frac{\alpha}{(i+1)^\alpha}\, dx = \frac{\alpha}{(i+1)^\alpha}$.

- Soit $N \in [\![m, +\infty[\![$. En sommant les inégalités de droite membre à membre, on obtient :

$$\sum_{i=m}^{N} \int_i^{i+1} \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx \geqslant \sum_{i=m}^{N} \frac{\alpha}{(i+1)^\alpha}$$

$$\int_m^{N+1} \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx \geqslant \sum_{i=m+1}^{N+1} \frac{\alpha}{i^\alpha}$$

(par relation de Chasles et décalage d'indice)

- L'intégrale impropre $\displaystyle\int_m^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $\alpha > 1$. De même, la série $\sum \dfrac{1}{i^\alpha}$ est convergente en tant que série de Riemann, d'exposant $\alpha > 1$. On peut donc passer à la limite dans l'inégalité précédente :

$$\int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx \geqslant \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{i^\alpha}$$

$$\boxed{\text{On obtient ainsi l'inégalité souhaitée : } \mathbb{E}(Z_1^{(m)}) \leqslant \int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx}$$

□

iii. Calculer :

$$\int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx$$

Démonstration.

- Soit $N \in [\![m, +\infty[\![$.

$$\int_m^N \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx = \alpha \int_m^N x^{-\alpha}\, dx = \alpha \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_m^N = \frac{\alpha}{1-\alpha} \left[\frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_m^N = \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{1}{N^{\alpha-1}} - \frac{1}{m^{\alpha-1}} \right)$$

- On en déduit :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right) = \mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}_B(Y\,\mathbb{1}_B)\Big) \qquad \textit{(d'après 10.c)(ii))}$$

$$= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}_B(Y)\,\mathbb{1}_B\Big) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}_{[\tau\geqslant T-1]}\Big(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\Big)\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\right)$$

$$= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}_{[\tau\geqslant T-1]}\Big[u(X(T-2), X(T-1))\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} + u(X(T-1), X(T))\,\mathbb{1}_{[\tau=T]}\Big]\Big) \qquad \textit{(d'après 12.b))}$$

$$= \mathbb{E}\left(u(X(T-2), X(T-1))\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} + \frac{\mathbb{P}([\tau=T])}{\mathbb{P}([\tau\geqslant T-1])}\,u(X(T-1), X(T))\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\right) \qquad \textit{(d'après 12.c))}$$

$$= \mathbb{E}\Big(u(X(T-2), X(T-1))\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} + (1-H(T-1))\,u(X(T-1), X(T))\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\Big) \qquad \textit{(d'après 12.e))}$$

De là, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)$$

$$= u(X(T-2), X(T-1))\,\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\right) + (1-H(T-1))\,u(X(T-1), X(T))\,\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\right)$$

$$= \Big(u(X(T-2), X(T-1)) + (1-H(T-1))\,u(X(T-1), X(T))\Big)\,\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\right)$$

- On rappelle que $\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\mathbb{P}([\tau\geqslant T-1])\right)$.
  Donc $\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\right) = \mathbb{P}([\tau\geqslant T-1])$ est une constante strictement positive.
  Or, si λ est un réel **strictement positif**, maximiser la fonction $x \mapsto \lambda\, f(x)$ est équivalent à maximiser $x \mapsto f(x)$.
  On en déduit que maximiser $\mathbb{E}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)$ est équivalent à maximiser :

$$u(X(T-2), X(T-1)) + (1-H(T-1))\,u(X(T-1), X(T))$$

- On rappelle maintenant que, dans cette partie, on suppose connus $X(1)$, ..., $X(T-2)$ et que l'on cherche à déterminer $X(T-1)$ et $X(T)$ maximisant $\mathbb{E}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)$.
  Dans cette question, on cherche plus particulièrement à déterminer $X(T-1)$.
  Or, d'après la question ***12.d)(i)***, si $X(T-1)$ est connu, alors le meilleur choix pour $X(T)$ est 1, **peu importe la valeur de** $X(T-1)$.
  Pour déterminer le meilleur choix pour $X(T-1)$, on fixe donc dès à présent $X(T) = 1$.
  On en déduit que l'on souhaite maximiser :

$$u(X(T-2), X(T-1)) + (1-H(T-1))\,u(X(T-1), 1)$$

  Or, d'après la question ***12.d)(ii)*** : $u(X(T-1), 1) = -\ln(X(T-1))$. On souhaite donc maximiser :

$$u(X(T-2), X(T-1)) - (1-H(T-1))\,\ln(X(T-1))$$

- Ainsi, choisir $X(T-1)$ pour maximiser $\mathbb{E}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)$ revient à maximiser la fonction :

$$\phi : y \mapsto u(X(T-2), y) - (1-H(T-1))\,\ln(y)$$

> Finalement, le meilleur choix pour $X(T-1)$ est le réel maximisant la fonction $\phi : y \mapsto u(X(T-2), y) - (1-H(T-1))\,\ln(y)$.