HEC 2015

Sujet E 67

Exercice avec préparation 1

1. Question de cours : Condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $v_1, v_2, \dots, v_n$ dans la base $\mathscr{B}$ telles que $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 2$.
On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^n$ qui, à tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, associe
$f(x) = x - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot v$.

2. ***a)*** Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

b) Déterminer $f \circ f$. L'endomorphisme f et-il bijectif ?

c) Quelles sont les valeurs propres possibles de f ?

3. ***a)*** Déterminer les valeurs propres de f.

b) Quels sont les sous-espaces propres de f ? L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

4. ***a)*** Écrire la matrice M de f dans la base $\mathscr{B}$.

b) Montrer que les matrices $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_1 & \cdots & v_1 \\ v_2 & v_2 & \cdots & v_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_n & v_n & \cdots & v_n \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice sans préparation 1

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f strictement positive sur $\mathbb{R}$ et possédant une espérance.
Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, on note h_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h_\alpha(t) = |t| + (2\alpha - 1)t$.
Pour tout $q \in \mathbb{R}$, on pose : $L(q) = E\left(h_\alpha(X - q)\right)$.

1. Établir l'existence d'un unique réel q_α en lequel la fonction L est minimale.

2. On suppose que $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et que X suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Calculer $q_{\frac{1}{2}}$.

Sujet E 68

Exercice avec préparation 2

Dans cet exercice, toutes les variables sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. Question de cours : Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

2. Soit X une variable aléatoire strictement positive suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On pose : $Z = -\ln(X)$ et on note F_Z la fonction de répartition de Z.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $F_Z(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$.

b) Montrer que Z admet une densité de probabilité continue f_Z qui atteint sa valeur maximale en un unique point x_0.

c) Tracer l'allure de la courbe représentative de F_Z dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

d) Que représente le point d'abscisse x_0 et d'ordonnée $F_Z(x_0)$ pour cette courbe ?

3. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ indépendantes et de même loi que X. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $Z_n = Y_n - \ln(n)$.

a) Déterminer les fonctions de répartition F_{Y_n} et F_{Z_n} de Y_n et Z_n respectivement.

b) Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire Z.

c) Établir pour tout réel $c > 0$, l'inégalité : $\mathbb{E}(Y_n) \geqslant c\mathbb{P}(Y_n \geqslant c)$.

d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Y_n)$.

Exercice sans préparation 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ? inversible ?

2. On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'existence d'une matrice N telle que $A = I + N$. Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice A^k.

3. On rappelle l'identité remarquable : $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$. Déterminer A^{-1}.

Sujet E 69

Exercice avec préparation 3

1. Question de cours : Définition de la dimension d'un espace vectoriel.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note E_n le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$ et F_n le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par $X, X^2, \ldots, X^{n-1}, X^n$.

2. Montrer que les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) = P(x)$, sont les polynômes constants.

3. Préciser les dimensions respectives de E_n et F_n.

4. Pour tout $P \in F_n$, on note Q le polynôme tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = P(x+1) - P(x)$.

a) Vérifier que $Q \in E_n$. QUelle relation existe-t-il entre les degrés de P et de Q ?

b) Soit Δ l'application de F_n sur E_n qui à tout $P \in F_n$ associe $Q = \Delta(P)$, où $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = P(x+1) - P(x)$.
Montrer que l'application Δ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

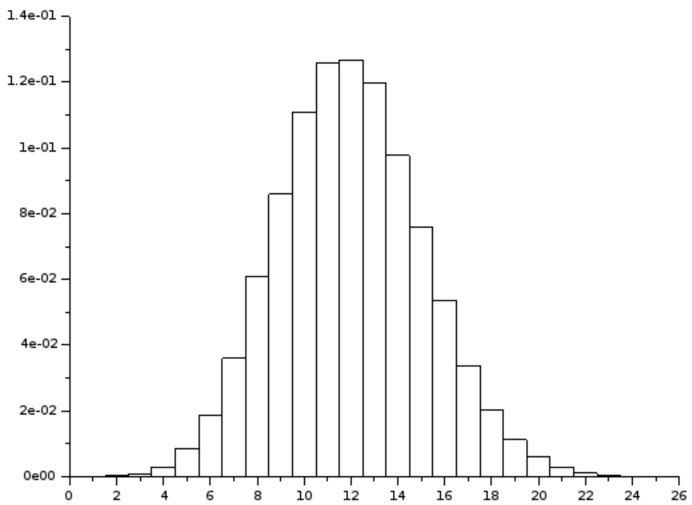
c) Déterminer un polynôme P vérifiant $\Delta(P) = X^3$. En déduire la valeur des sommes $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$ et $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3$.

Exercice sans préparation 3

Après une alerte incendie, les 60 élèves d'une école se répartissent au hasard dans 5 salles de classe. Afin de savoir comment se répartissent les élèves on exécute le programme **Scilab** suivant :

```
Y = grand(100000, 1, 'bin', 60, 1/5)
hisplot(0.5:25,Y)
```

qui donne la représentation ci-dessous :



Que représente la valeur maximale prise par cet histogramme ? Prouver un résultat concernant cette valeur.

Sujet E 70

Exercice avec préparation 4

1. Question de cours : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I.
Propriétés de l'application $x \in I \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$.
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.
Pour tout fonction $f \in E$, on note $T(f)$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)\ dt.$$

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, soit f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = \mathrm{e}^{ax}$. Déterminer $T(f_a)$.

3. ***a)*** Montrer que pour toute fonction $f \in E$, l'application $T(f)$ appartient à E et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer la fonction dérivée de la fonction $T(f)$.

b) On suppose que f est une fonction bornée de E. Montrer que $T(f)$ est bornée et établir l'existence d'un réel K tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|T(f)(x) - T(f)(y)| \leqslant K|x - y|$.

4. Soit T l'application de E dans E qui à $f \in E$, associe $T(f)$.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il surjectif ?

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Montrer que $T(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

c) Soit T_n la restriction à $\mathbb{R}_n[X]$ de l'endomorphisme T et $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. L'endomorphisme T_n est-il diagonalisable ? T_n est-il bijectif ?

Exercice sans préparation 4

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, de même loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $W_n = \sum\limits_{k=1}^{n} kX_k$.

1. Calculer $\mathbb{E}(W_n)$ et $\mathbb{V}(W_n)$.

2. Les variables W_n et W_{n+1} sont-elles indépendantes ?

Sujet E 71

Exercice avec préparation 5

1. Question de cours : Définition d'un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 1. Si $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_p[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}_p[X]$, alors $P(A)$ désigne la matrice $a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_p A^p$.

2. Soit A et Q deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose que la matrice Q est inversible, d'inverse notée Q^{-1}.
Soit P un polynôme à coefficients réels. Expliciter $P(Q^{-1}AQ)$ en fonction de $P(A)$, Q et Q^{-1}.

3. ***a)*** Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts et soit φ l'application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, associe le n-uplet $(P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n))$. Montrer que l'application φ est bijective.

b) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n réels distincts non nuls et $T = (t_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $t_{i,i} = \lambda_i$.
Établir l'existence d'un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1,]\!]$, on a : $\lambda_i \times P(\lambda_i) = 1$.
Que vaut $T \times P(T)$? Conclure.

4. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ soit égale à $P(A)$.

Exercice sans préparation 5

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires telles que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, X_k suit la loi de Bernoulli de paramètre p_k avec $0 < p_k < 1$.
On pose : $Y = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que $\mathbb{V}(Y) \leqslant \dfrac{n^2}{4}$.

Sujet E 73

Exercice avec préparation 6

1. Question de cours : Formule des probabilités totales.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère n urnes numérotées de 1 à n et N un entier naturel multiple de 2^n.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la k-ième urne contient N boules dont $\dfrac{N}{2^k}$ boules blanches, les autres étant noires.
On tire dans l'urne 1 une boule au l'on place dans l'urne 2, puis on tire dans l'urne 2 une boule que l'on place dans l'urne 3 et ainsi de suite jusqu'à tirer dans l'urne $n-1$ une boule que l'on place dans l'urne n, puis on tire une boule dans l'urne n.
L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

2. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, soit p_k la probabilité que la boule tirée dans l'urne k soit blanche.
Trouver une relation de récurrence entre p_{k+1} et p_k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$.

3. ***a)*** Calculer p_n en fonction de n et N.

b) Pour n fixé, calculer $\lim\limits_{N \to +\infty} p_n$. Interpréter cette limite.

4. Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. Calculer la probabilité conditionnelle que la n-ième boule tirée soit blanche sachant que la boule tirée dans l'urne i est blanche.

Exercice sans préparation 6

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

2. Quelle est la nature de la suite $(n!)^{\frac{1}{n}}$?

Sujet E 76

Exercice avec préparation 7

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Dans cet exercice, les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$*, à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$ *et admettent une densité.*

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$. On note respectivement F et f, la fonction de répartition et une densité de X.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X.

2. Pour $x \geqslant 0$:

a) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} tf(t)\,dt$.

b) Établir les inégalités : $\displaystyle\int_x^{+\infty} tf(t)\,dt \geqslant x(1-F(x)) \geqslant 0$.

c) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1-F(t))\,dt$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Z_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, G_n la fonction de répartition de Z_n et g_n une densité de Z_n.

a) Exprimer pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_n(t)$ en fonction de $F(t)$.

b) Établir l'existence de $\mathbb{E}(Z_n)$.

c) Pour $n \geqslant 2$, montrer que : $\mathbb{E}(Z_n) - \mathbb{E}(Z_{n-1}) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (F(t))^{n-1}(1-F(t))\,dt$.

d) Soit $m > 0$. On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre m (d'espérance $\dfrac{1}{m}$).
Calculer $\mathbb{E}(Z_n)$.
Donner un équivalent de $\mathbb{E}(Z_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice sans préparation 7

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et X une matrice colonne non nulle de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On pose : $A = X\,{}^tX$.

1. Montrer que A est diagonalisable.

2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

Sujet E 77

Exercice avec préparation 8

1. Question de cours : Donner des critères de convergence des séries à termes positifs.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)$.

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

2. Dresser le tableau de variation de f.

3. ***a)*** Montrer que la courbe (Γ) d'équation $y = \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\, x\right)$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

b) Tracer $(\mathcal{C})$ et (Γ) dans le même repère.

4. Établir pour tout réel $x \geqslant 1$, l'encadrement : $0 \leqslant f'(x) < 1$.
En déduire que le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \geqslant 1$ ainsi que la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x$.

5. Soit le programme **Scilab** suivant :

```
function y=f(x)
    y = log(%e * (x + x ^(-1))/2)
endfunction

x = [0.01:0.1:5] ;
plot2d(x, f(x), rect=[0,0,5,5])

x = [0,5]
plot2d(x,x)

u = input('u0=')
x = [u] ; y = [0]
for k=1:10
    z = f(u)
    x = [x,u]
    x = [x,z]
    y = [y,z,z]
    u = z
end
plot2d(x,y)
```

Expliquer ce que fait ce programme et ce qu'il illustre.
Dans `plot2d`, `rect[0,0,5,5]` signifie que seule la partie de la courbe contenue dans le rectangle $\{(x, y) \ / \ 0 \leqslant x \leqslant 5$ et $0 \leqslant y \leqslant 5\}$ sera tracée.

6. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in [1, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

7. ***a)*** Justifier l'existence d'un réel $a > 1$ tel que $x \in [1, a] \Rightarrow f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$.

b) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$. Quelle est la nature de la série de terme général v_n ?

Exercice sans préparation 8
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que pour tout $n \geqslant 1$, X_n admet une densité f_n continue sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et sur $[\frac{2}{n}, +\infty[$, affine sur $[0, \frac{1}{n}]$ et sur $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$.

1. Déterminer une densité f_n de X_n.

2. Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Sujet E 79

Exercice avec préparation 9

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
Soit a un paramètre réel et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, telle que :

$$F(x) = \begin{cases} 1 + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) & \text{si } x \geqslant a \\ 0 & \text{si } x < a \end{cases}$$

2. ***a)*** Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = \dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$.

b) Étudier les variations de F et tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

3. ***a)*** Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité.

b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

4. Soit Y la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie par $Y = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X). On pose : $Z = X - Y$.

a) Calculer $\mathbb{P}(Y = 0)$ et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{P}(Y = n) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n(n+2)}\right)$.

b) Déterminer la fonction de répartition et une densité de Z.

c) Établir l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(Z)$ de Z. Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

Exercice sans préparation 9

Soit a, b et c des réels non nuls vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. On pose : $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. ***a)*** Calculer la matrice $M = U\,{}^tU$ (où ${}^tU$ est la matrice transposée de la matrice colonne U).

b) M est-elle diagonalisable ? inversible ?

2. ***a)*** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer M^n.

b) Quelles sont les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.