Colles - Semaine 10

Exercice 1
On donne les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi que les matrices colonnes : $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que V_1, V_2, et V_3 sont des vecteurs propres de A. Quelles sont les valeurs propres associées ?

2. ***a)*** Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

b) Justifier la relation : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. On note D cette matrice diagonale.

c) Calculer la matrice $\Delta = P^{-1}BP$ et vérifier qu'elle est diagonale.

3. On se propose de calculer les matrices colonne X_n définies par les relations :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad X_{n+2} = A\,X_{n+1} + B\,X_n$$

A cet effet, on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $Y_n = P^{-1}X_n$ et on pose également $Y_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $Y_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $Y_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+2} = DY_{n+1} + \Delta Y_n$.

c) Montrer alors que pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+2} & = & u_{n+1} \\ v_{n+2} & = & 4v_n \\ w_{n+2} & = & -4w_{n+1} - 4w_n \end{cases}$$

En déduire les expressions explicites de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

d) Donner finalement la matrice X_n, en fonction de n.

Exercice 2
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(e_1) = \frac{1}{3}(e_2 + e_3), \quad \text{et} \quad f(e_2) = f(e_3) = \frac{2}{3}e_1$$

1. Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

2. Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ puis celle de $\mathrm{Ker}(f)$.

3. En déduire une valeur propre de f ainsi que le sous-espace propre associé.

4. Déterminer les autres valeurs propres de f ainsi que les sous-espaces propres associés.

5. En déduire que f est diagonalisable.

Exercice 3

L'application f désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une base $(e_1, \cdots, e_n)$.

1. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \exists \lambda_x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = \lambda_x x$$

a) Écrire de deux manières différentes le vecteur $f(e_1 + \cdots + e_n)$.

b) En déduire qu'il existe un réel λ tel que $f = \lambda \cdot \mathrm{id}$.

2. Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$.
Justifier qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ de la forme $(x, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$.
On note alors p_x l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\forall (a, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n,\ p_x\left(a \cdot x + \sum_{k=2}^{n} b_k \cdot \varepsilon_k\right) = a \cdot x$$

a) Montrer que p_x est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

b) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, on a

$$p_x(z) = z \ \Leftrightarrow\ z \in \mathrm{Vect}\,(x)$$

3. Montrer l'équivalence suivante :

$$\forall g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n),\ f \circ g = g \circ f \ \Leftrightarrow\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ f = \lambda \cdot \mathrm{id}$$

Exercice 4

On note m un paramètre réel et on considère les matrices H_m définies par : $H_m = \begin{pmatrix} -1-m & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}$.

On note h_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice H_m dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. On suppose dans cette question que $m = 2$.

a) Écrire la matrice H_2.

b) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme h_2 et les sous-espaces propres associés.

c) L'endomorphisme h_2 est-il diagonalisable ? Si oui, donner une base de vecteurs propres de h_2.

2. Étudier de même les valeurs propres et les sous-espaces propres de h_0. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

3. *a)* Montrer qu'il existe un réel a, qu'on déterminera, qui est valeur propre de l'endomorphisme h_m pour toutes les valeurs du paramètre m.

b) Déterminer, pour chaque valeur de m, le sous-espace propre de h_m associé à la valeur propre a.
Montrer qu'on peut trouver un vecteur non nul v_1 appartenant à tous ces sous-espaces.

4. Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$:
$F = \mathrm{Vect}\,(v_2, v_3)$.
Déterminer les vecteurs $h_m(v_2)$ et $h_m(v_3)$ et montrer que ces vecteurs appartiennent à F pour tout m réel.
En déduire que le F est stable par h_m, c'est-à-dire que $h_m(F) \subset F$.

5. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Écrire la matrice de h_m dans la base (v_1, v_2, v_3). En déduire les valeurs de m pour lesquelles l'endomorphisme h_m est diagonalisable.