K
Mathématiques

Colles - Semaine 14

Planche 1

Exercice 1

Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$.

1. ***a)*** Calculer les dérivées partielles premières de f.

   b) En déduire que le seul point critique A de f.

2. Montrer que f présente un minimum global en A.

3. On considère la fonction g définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x, y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y$$

   a) Utiliser la question 2 pour établir que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x, y) \geq -\frac{1}{6}$.

   b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère deux projecteurs p et q de E différents de l'identité id_E et de l'application nulle ; on suppose en outre que p et q commutent et que leur somme f n'est pas égale à l'identité.

1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E et calculer $f^3 - 3f^2 + 2f$.
On note $\mathrm{Sp}(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f.

2. ***a)*** Montrer que $0 \in \mathrm{Sp}(f)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \neq \{0_E\}$.

   b) Montrer que $2 \in \mathrm{Sp}(f)$ si et seulement si $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \neq \{0_E\}$.

   c) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_E) = E$.

3. En déduire que $[2 \notin \mathrm{Sp}(f)$ ou $0 \notin \mathrm{Sp}(f)]$ entraîne que $1 \in \mathrm{Sp}(f)$ et $\mathrm{Sp}(f) \neq \{1\}$.

Planche 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On note $\mathscr{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.
Soit p un projecteur de E tel que $p \neq 0$ et $p \neq \mathrm{id}_E$. Pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, on pose :

$$\varphi(f) = \frac{1}{2}\left(f \circ p + p \circ f\right)$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$.

2. Calculer $(\varphi \circ \varphi)(f)$ et $(\varphi \circ \varphi \circ \varphi)(f)$; en déduire les valeurs propres possibles de φ.

3. Pour tout sous-espace vectoriel F de E, montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{L}(E)$:

$$\mathcal{K}(F) = \{f \in \mathscr{L}(E) \ / \ F \subset \mathrm{Ker}(f)\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}(F) = \{f \in \mathscr{L}(E) \ / \ \mathrm{Im}(f) \subset F\}$$

4. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$.

a) Calculer $f \circ g$ lorsque $f \in \mathcal{K}(\mathrm{Im}(g))$ ou lorsque $g \in \mathcal{I}(\mathrm{Ker}(f))$.

b) Calculer $p \circ f$ lorsque $f \in \mathcal{I}(\mathrm{Im}(p))$.

c) Montrer que $f \circ p = f$ lorsque $f \in \mathcal{K}(\mathrm{Ker}(p))$.

5. ***a)*** Pour chacun des sous-espaces vectoriels suivants, montrer que leurs éléments non nuls sont des vecteurs propres de φ et préciser les valeurs propres correspondantes :

$$\mathcal{A} = \mathcal{K}(\mathrm{Im}(p)) \cap \mathcal{I}(\mathrm{Ker}(p)), \quad \mathscr{B} = \mathcal{K}(\mathrm{Im}(p)) \cap \mathcal{I}(\mathrm{Im}(p)) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \mathcal{K}(\mathrm{Ker}(p)) \cap \mathcal{I}(\mathrm{Im}(p))$$

b) Montrer que les sous-espaces $\mathcal{A}$, $\mathscr{B}$ et $\mathcal{C}$ sont en somme directe.

c) Quelles sont les valeurs propres de φ ?

Planche 3

On note m un paramètre réel et on considère les matrices H_m définies par : $H_m = \begin{pmatrix} -1-m & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}$.

On note h_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice H_m dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. On suppose dans cette question que $m = 2$.

a) Écrire la matrice H_2.

b) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme h_2 et les sous-espaces propres associés.

c) L'endomorphisme h_2 est-il diagonalisable ? Si oui, donner une base de vecteurs propres de h_2.

2. Étudier de même les valeurs propres et les sous-espaces propres de h_0. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

3. ***a)*** Montrer qu'il existe un réel a, qu'on déterminera, qui est valeur propre de l'endomorphisme h_m pour toutes les valeurs du paramètre m.

b) Déterminer, pour chaque valeur de m, le sous-espace propre de h_m associé à la valeur propre a. Montrer qu'on peut trouver un vecteur non nul v_1 appartenant à tous ces sous-espaces.

4. Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$:
$F = \mathrm{Vect}\,(v_2, v_3)$.
Déterminer les vecteurs $h_m(v_2)$ et $h_m(v_3)$ et montrer que ces vecteurs appartiennent à F pour tout m réel.
En déduire que le F est stable par h_m, c'est-à-dire que $h_m(F) \subset F$.

5. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Écrire la matrice de h_m dans la base (v_1, v_2, v_3). En déduire les valeurs de m pour lesquelles l'endomorphisme h_m est diagonalisable.