

# HEC 2017

## Sujet E 42

### Exercice avec préparation 1

Dans cet exercice,  $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 1.

#### 1. Question de cours

Que peut-on dire du degré de la somme et du produit de deux polynômes ?

Soit  $\mathbb{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ , et  $f$  l'application qui à tout polynôme  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , fait correspondre le polynôme  $f(P)$  défini par :

$$f(P)(X) = n X P(X) + X(1 - X)P'(X), \text{ où } P' \text{ désigne la dérivée du polynôme } P$$

2. a) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  et écrire sa matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

b) L'endomorphisme  $f$  est-il bijectif ? Quel est son rang ?

c) L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?

3. Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $H_k$  le polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$  défini par :  $H_k(X) = X^k(1 - X)^{n-k}$ .

a) Calculer pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $f(H_k)(X)$ .

b) Montrer que  $\mathcal{B} = (H_0, H_1, \dots, H_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

c) Trouver les coordonnées du polynôme  $(X + 1)^n$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

### Exercice sans préparation 1

On considère une urne contenant  $b$  boules blanches et  $r$  boules rouges.

1. La fonction **Scilab** suivante permet de simuler des tirages dans cette urne.

```

1  function y = X(b, r)
2      V = %F // le booléen "faux"
3      for k = 1:3
4          V = V|grand(1, 1, 'uin', 1, b + r) <= b;
5      end;
6      if V then y = 1; else y = 2;
7      end;
8  endfunction

```

Que retourne la fonction  $X$  et quelle loi simule-t-elle ?

2. De quelle valeur théorique la valeur affichée après l'exécution des instructions suivantes fournit-elle une approximation ?

```

1  R = [];
2  for k = 1:10000
3      R = [R, X(5,5)];
4  end;
5  disp(mean(R))

```

## Sujet E 81

## Exercice avec préparation 2

## 1. Question de cours

- a) Définition et propriétés de la loi géométrique.
- b) Compléter la ligne de code **Scilab** contenant des points d'interrogation pour que la fonction **geo** suivante fournisse une simulation de la loi géométrique dont le paramètre est égal à l'argument  $p$  de la fonction.

```

1  function x = geo(p)
2      x = 1;
3      while rand() ???
4          x = x + 1;
5      end;
6  endfunction

```

Une urne contient trois jetons numérotés 1, 2 et 3. On effectue dans cette urne, une suite de tirages d'un jeton avec remise.

2. On note  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux numéros successifs distincts.

- a) Reconnaître la loi de la variable aléatoire  $Y - 1$ .
- b) Déterminer l'espérance  $\mathbb{E}(Y)$  et la variance  $\mathbb{V}(Y)$  de la variable aléatoire  $Y$ .

3. On note  $Z$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, les trois numéros.

- a) Soit deux entiers  $k \geq 2$  et  $\ell \geq 3$ .

Calculer  $\mathbb{P}([Y = k] \cap [Z = \ell])$  selon les valeurs de  $k$  et  $\ell$ .

- b) En déduire que, pour tout entier  $\ell \geq 3$ , on a :  $\mathbb{P}([Z = \ell]) = \frac{2}{3} \left( \frac{2^{\ell-2} - 1}{3^{\ell-2}} \right)$ .

- c) Calculer  $\mathbb{E}(Z)$ .

4. D'une manière plus générale, calculer l'espérance de la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, tous les numéros, dans l'hypothèse où l'urne contient au départ  $n$  jetons, numérotés de 1 à  $n$ .

## Exercice sans préparation 2

On considère les quatre matrices  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Ces quatre matrices forment-elles une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  ?

2. Soit  $B_1, B_2, B_3, B_4$  quatre matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

- a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les matrices  $B_1, B_2, B_3, B_4$  pour qu'il existe un endomorphisme  $f$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  vérifiant :

$$\begin{cases} f(A_1) = B_1 \\ f(A_2) = B_2 \\ f(A_3) = B_3 \\ f(A_4) = B_4 \end{cases}$$

- b) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les matrices  $B_1, B_2, B_3, B_4$  pour qu'il existe un automorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  vérifiant les mêmes égalités.

**Sujet E 91****Exercice avec préparation 3**

1. Question de cours : définition d'un estimateur sans biais d'un paramètre inconnu.

Soit  $N$  un entier supérieur ou égal à 2.

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , et suivant chacune la loi uniforme discrète sur  $\llbracket 1, N \rrbracket$ .

2. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose :  $s_n(N) = \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$ .

a) Montrer que la suite  $(s_n(N))_{n \geq 1}$  est strictement monotone et convergente.

b) Trouver sa limite.

3. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose :  $T_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

a) Calculer pour tout  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,  $\mathbb{P}([T_n = k])$ .

b) Montrer que  $\mathbb{E}(T_n) = N - s_n(N)$ .

4. a) Justifier que  $\mathbb{P}(|T_n - N| \geq 1)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

b) En déduire, pour tout  $\varepsilon > 0$ , la limite de  $\mathbb{P}(|T_n - N| \geq \varepsilon)$  quand  $n$  tend vers l'infini.

5. On suppose dans cette question que  $N$  est un paramètre inconnu.

a) Expliquer pourquoi on ne peut pas dire que  $T_n + s_n(N)$  est un estimateur sans biais de  $N$ .

b) Trouver une suite convergente et asymptotiquement sans biais d'estimateurs de  $N$ .

**Exercice sans préparation 3**

Soit  $f$  la fonction de deux variables définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 1$$

1. a) Donner le développement limité à l'ordre 2 de  $f$  au voisinage de  $(0, 0)$ .

b) En déduire que  $(0, 0)$  est un point-col de  $f$ .

2. a) Montrer que  $f$  admet un extremum local.

b) Cet extremum est-il global ?

**Sujet E 94****Exercice avec préparation 4****1. Question de cours**

- a) Définition et représentation graphique de la fonction partie entière.
- b) Donner un programme **Scilab** permettant de représenter la fonction partie entière sur l'intervalle  $\left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $X_n$  une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  dont une densité  $f_n$  est donnée par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n} e^{-\frac{t}{n}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Reconnaître la loi de  $X_n$ , puis en donner l'espérance et la variance.

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $u_n = \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| < 1)$ .

- a) Montrer que  $u_n = \left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right)e^{-\frac{n+1}{n}}$ .
- b) Déterminer un équivalent de  $u_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , de la forme  $\frac{\alpha}{n}$  où  $\alpha$  est un réel que l'on déterminera.

4. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on considère l'événement  $A_k = \left[k + \frac{1}{2} < X_n < k + 1\right]$ .

- a) Exprimer l'événement  $B_n = \left[X_n - \lfloor X_n \rfloor > \frac{1}{2}\right]$  en fonction des événements  $A_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).
- b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $v_n = \mathbb{P}(B_n)$ . Calculer  $v_n$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

5. On suppose désormais que les variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  sont indépendantes et, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$M_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

- a) Déterminer la loi de  $M_n$ .
- b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $w_n = \mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(M_n)| < 1)$ . Calculer  $w_n$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ .

**Exercice sans préparation 4**

On considère les deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de  $\mathbb{R}^3$  définis par :

$$\begin{cases} F &= \text{Vect}((1, 1, 1)) \\ G &= \text{Vect}((1, -1, 0), (0, 2, 1)) \end{cases}$$

1. Trouver un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont l'image est  $F$  et le noyau  $G$ .
2. Peut-on le choisir diagonalisable ?

## Sujet E 102

## Exercice avec préparation 5

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :  $\forall x > 0, f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$ .

1. a) Question de cours

Rappeler la définition de la continuité en un point d'une fonction réelle d'une variable réelle.

b) Montrer que  $f$  se prolonge de manière unique en une fonction continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

2. Justifier, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'égalité :  $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt = \frac{2}{n^3}$ .

3. a) Établir, pour tout  $t > 0$ , l'inégalité :  $\frac{t^2}{e^t - 1} \leq t$ .

b) Justifier, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-nt} dt$ .

c) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-nt} dt = 0$ .

4. a) Établir, pour tout  $t > 0$ , l'égalité :  $f(t) = t^2 \sum_{k=1}^n e^{-kt} + f(t)e^{-nt}$ .

b) En déduire l'égalité :  $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ .

5. a) Justifier, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'inégalité  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} \leq \frac{1}{n^2}$ .

b) Compléter les lignes 3 et 5 du script **Scilab** suivant, pour que la fonction **approx** affiche une valeur approchée de l'intégrale  $I = \int_0^{+\infty} f(t) dt$ , avec une précision **epsilon** entrée en argument.

```

1  function I = approx(epsilon)
2      I = 0;
3      n = ???;
4      for i = 1:n
5          I = I + ???;
6      end;
7      disp(I, 'integrale = ');
8  endfunction

```

## Exercice sans préparation 5

Soit  $U$  et  $V$  deux variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , suivant chacune la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

1. a) Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la probabilité  $\mathbb{P}([nU] = [nV])$ .

b) En déduire la probabilité  $\mathbb{P}(U = V)$ .

2. Soit  $A$  la matrice aléatoire  $\begin{pmatrix} U & 1 \\ 0 & V \end{pmatrix}$ .

a) Quelle est la probabilité que  $A$  soit inversible ?

b) Quelle est la probabilité que  $A$  soit diagonalisable ?

## Sujet E 106

## Exercice avec préparation 6

Dans tout l'exercice,  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  désigne un espace probabilisé, et toutes les variables considérées sont définies sur cet espace probabilisé et  $X$  désigne une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

1. a) Question de cours : rappeler la formule de Koenig-Huygens.

b) Démontrer que, si  $X$  admet un moment d'ordre deux, alors on a :

$$\forall c \in \mathbb{R}, \mathbb{V}(X) \leq \mathbb{E}((X - c)^2)$$

2. Dans cette question,  $n$  est un entier strictement positif et  $X$  une variable aléatoire telle que :

$$X(\Omega) \subset \llbracket 0, 2n \rrbracket$$

a) En utilisant une des inégalités prouvées en 1.b), démontrer que la variance de  $X$  est inférieure ou égale à  $n^2$ .

b) Démontrer que, si  $\mathbb{E}(X) = n$ , alors la variance de  $X$  est égale à  $n^2$  si, et seulement si,  $\mathbb{P}([X = 0]) = \mathbb{P}([X = 2n]) = \frac{1}{2}$ .

c) Quelle est la plus petite valeur possible de  $\mathbb{V}(X)$  lorsque  $\mathbb{E}(X) = n$  ?

Dans toute la suite de l'exercice,  $c$  désigne un nombre réel positif qui n'est pas entier et  $\lfloor c \rfloor$  sa partie entière.

3. Soit  $X_0$  une variable aléatoire vérifiant : 
$$\begin{cases} X_0(\Omega) = \{\lfloor c \rfloor, \lfloor c \rfloor + 1\} \\ \mathbb{E}(X_0) = c \end{cases}$$

a) Vérifier que :  $\mathbb{P}([X_0 = \lfloor c \rfloor]) = \lfloor c \rfloor + 1 - c$ .

b) En déduire que la variance de  $X_0$  est égale à  $(c - \lfloor c \rfloor)(\lfloor c \rfloor + 1 - c)$ .

4. Dans cette question et la suivante,  $X$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  qui admet une espérance et une variance, et vérifie :  $\mathbb{E}(X) = c$ .

On note  $A = [X \leq c]$  et  $p = \mathbb{P}(A)$ .

a) Justifier que  $p$  est strictement compris 0 et 1.

b) Justifier la convergence de la série  $\sum_{k \geq 0} k \mathbb{P}_{\bar{A}}([X = k])$ , où  $\bar{A}$  désigne le complémentaire de l'événement  $A$ .

5. On note :  $c_0 = \sum_{k=0}^{\lfloor c \rfloor} k \mathbb{P}_A([X = k])$  et  $c_1 = \sum_{k=\lfloor c \rfloor+1}^{+\infty} k \mathbb{P}_{\bar{A}}([X = k])$ .

Soit  $Y$  une variable aléatoire telle que  $\mathbb{P}([Y = c_0]) = p$  et  $\mathbb{P}([Y = c_1]) = 1 - p$ .

a) Vérifier que les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ont la même espérance.

b) Prouver l'égalité :  $\mathbb{V}(Y) = (c - c_0)(c_1 - c)$ .

c) Démontrer l'inégalité :

$$\mathbb{V}(X) \geq \mathbb{V}(Y)$$

d) En déduire que  $\mathbb{V}(X_0)$  est la plus petite valeur possible de  $\mathbb{V}(X)$ .

## Exercice sans préparation 6

1. Quelle est la limite quand  $t$  tend vers 0 de  $\frac{e^t - 1}{t}$  ?

2. Justifier la convergence de l'intégrale impropre  $\int_0^{+\infty} \left( \frac{e^t - 1}{\sqrt{t^3}} \right) e^{-2t} dt$ .

**Sujet E 108****Exercice avec préparation 7**

Dans tout l'exercice,  $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 2 et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices réelles à  $n$  lignes et  $n$  colonnes.

Pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note  ${}^tM$  la transposée de  $M$ .

1. a) Question de cours : théorème du rang.  
 b) Justifier que l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont la somme des coefficients est nulle est un espace vectoriel et préciser sa dimension.
2. Soit  $\varphi$  l'application qui à toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , associe la matrice  $\varphi(M) = M + {}^tM$ .  
 Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
3. Dans cette question, et seulement dans cette question, on suppose que  $n = 2$ .  
 Pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, 2 \rrbracket^2$ , on note  $E_{i,j}$  la matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  dont tous les éléments sont nuls excepté celui de la  $i^{\text{ème}}$  et  $j^{\text{ème}}$  colonne qui vaut 1.  
 On rappelle que la famille  $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$  est une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .  
 a) Écrire la matrice  $A$  de  $\varphi$  dans la base  $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ .  
 b) Préciser le rang de  $\varphi$ .  
 c) Donner une base du noyau de  $\varphi$ .
4. On suppose désormais  $n \geq 3$ .  
 a) Déterminer  $\varphi(\varphi(M))$ , pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de l'endomorphisme  $\varphi$ ?  
 b) L'endomorphisme  $\varphi$  est-il diagonalisable?

**Exercice sans préparation 7**

Pour tout réel  $c > 0$ , on note  $f_c$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_c(x) = \begin{cases} \frac{c}{x(x+1)(x+2)} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Justifier l'existence d'une unique valeur  $c_0$  de  $c$  pour laquelle  $f_{c_0}$  est une densité de probabilité.
2. Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f_{c_0}$ .  
 Trouver la limite et un équivalent de  $\mathbb{P}([X \geq n])$  quand  $n$  tend vers l'infini.