ECRICOME 2019

Exercice 1

On considère dans cet exercice l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, dont on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie A

1. ***a)*** Calculer A^2 puis vérifier que A^3 est la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Justifier que 0 est l'unique valeur propre possible de f.

c) Déterminer une base et la dimension du noyau de f.

d) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Soient $e'_1 = (-1, -1, 1)$, $e'_2 = (2, -1, 1)$ et $e'_3 = (-1, 2, 1)$.

a) Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.

b) Démontrer que la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$ est la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On pose : $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On note h l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice M.

a) Déterminer deux réels α et β tels que $M = \alpha A + \beta I$, où I est la matrice identité d'ordre 3.

b) Déterminer la matrice M' de h dans la base $\mathscr{B}'$.

c) En déduire que M est inversible.

d) À l'aide de la question ***1.a)***, calculer $(M - I)^3$. En déduire l'expression de M^{-1} en fonction des matrices I, M et M^2.

e) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer M^n pour tout entier naturel n, en fonction des matrices I, A et A^2.
Cette formule est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Partie B

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme g de E vérifiant $g \circ g = f$.
On suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice V carrée d'ordre 3 telle que :

$$V^2 = T$$

On note g l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}'$ est V.

4. Montrer : $VT = TV$. En déduire : $g \circ f = f \circ g$.

5. ***a)*** Montrer que $g(e'_1)$ appartient au noyau de f.
En déduire qu'il existe un réel a tel que : $g(e'_1) = a \cdot e'_1$.

b) Montrer que $g(e_2') - a \cdot e_2'$ appartient aussi au noyau de f.
En déduire qu'il existe un réel b tel que : $g(e_2') \;=\; b \cdot e_1' + a \cdot e_2'$.

c) Montrer : $f \circ g(e_3') \;=\; g \circ f(e_3') \;=\; a \cdot e_2' + b \cdot e_1'$.
En déduire que $g(e_3') - a \cdot e_3' - b \cdot e_2'$ appartient au noyau de f.

d) En déduire qu'il existe un réel c tel que : $V \;=\; \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

6. Calculer V^2 en fonction de a, b et c, puis en utilisant l'hypothèse $V^2 = T$, obtenir une contradiction.

Exercice 2

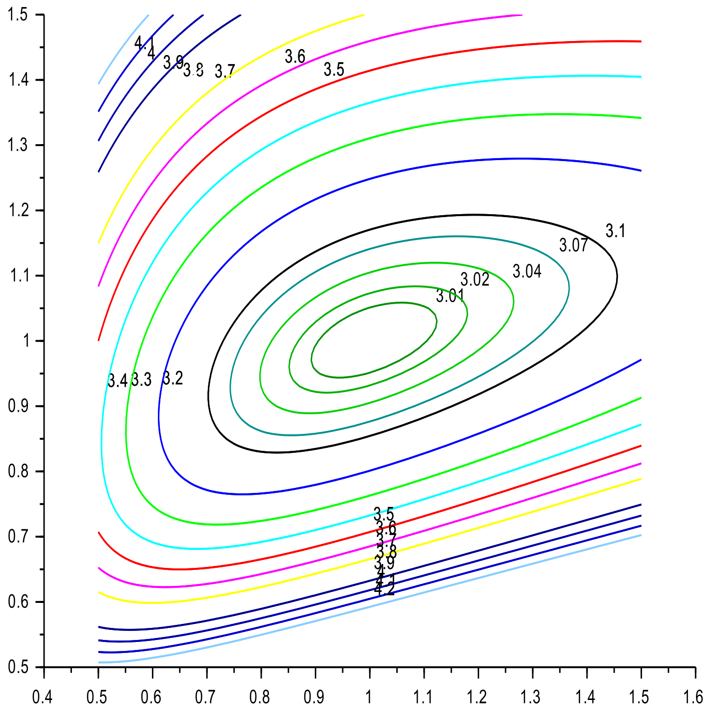
On considère la fonction f définie sur l'ouvert de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ f(x,y) = \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}$$

La première partie consiste en l'étude des extrema éventuels de la fonction f, et la deuxième partie a pour objectif l'étude d'une suite implicite définie à l'aide de la fonction f.
Ces deux parties sont indépendantes.

Partie A

1. On utilise **Scilab** pour tracer les lignes de niveau de la fonction f. On obtient le graphe suivant :



Établir une conjecture à partir du graphique quant à l'existence d'un extremum local pour f, dont on donnera la nature, la valeur approximative et les coordonnées du point en lequel il semble être atteint.

2. ***a)*** Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

b) Calculer les dérivées partielles premières de f, puis démontrer que f admet un unique point critique, noté A, que l'on déterminera.

c) Calculer les dérivées partielles secondes de f, puis démontrer que la matrice hessienne de f au point A est la matrice H définie par : $H = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$.

d) En déduire que la fonction f admet au point A un extremum local, préciser si cet extremum est un minimum, et donner sa valeur.

Partie B

Pour tout entier n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad h_n(x) \ = \ f(x^n, 1) \ = \ x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

3. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

4. En déduire que pour tout entier n non nul, l'équation $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.

5. ***a)*** Démontrer :

$$\forall x > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}$$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ h_{n+1}(v_n) \geqslant 4$.

c) Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.

6. ***a)*** Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et montrer : $\ell \geqslant 1$.

b) En supposant que $\ell > 1$, démontrer : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n^n = +\infty$.
En déduire une contradiction.

c) Déterminer la limite de (v_n).

7. ***a)*** Montrer : $\forall n \geqslant 1, \ v_n \leqslant 3$.

b) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function y = h(n,x)` qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel n non nul et un réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ en entrée.

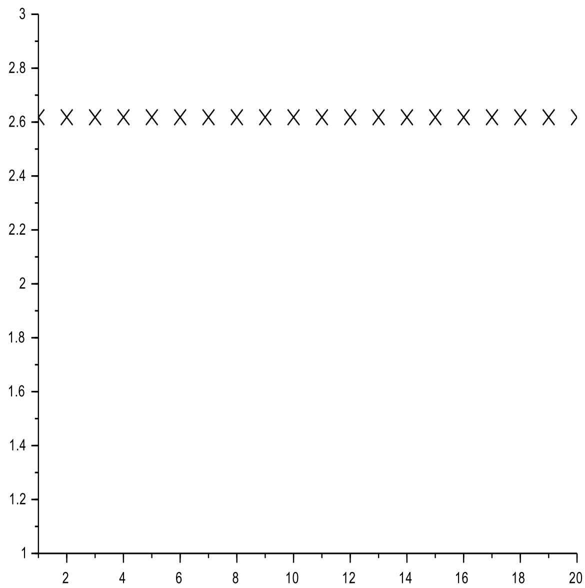
c) Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de v_n par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier $n \geqslant 1$ en entrée :

```
function res=v(n)
  a = 1
  b = 3
  while (b-a) > 10 ^ (-5)
    c = (a+b)/2
    if h(n,c) < 4 then
      ........
    else
      ........
    end
  end
  ..........
endfunction
```

d) À la suite de la fonction v, on écrit le code suivant :

```
X = 1:20
Y = zeros(1,20)
for k = 1:20
  Y(k) = v(k) ^k
end
plot2d(X, Y, style=-2, rect=[1,1,20,3])
```

À l'exécution du programme, on obtient la sortie graphique suivante :



Expliquer ce qui est affiché sur le graphique ci-dessus.
Que peut-on conjecturer ?

e) Montrer : $\forall n \geqslant 1,\ (v_n)^n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

f) Retrouver ainsi le résultat de la question *4.c)*.

Exercice 3

On suppose que toutes les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } -1 < t < 1 \\ -\dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \leqslant -1 \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est paire.

2. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ dt$ converge et calculer sa valeur.

3. ***a)*** À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel A strictement supérieur à 1, on a :

$$\int_{-A}^{-1} f(t)\ dt \ = \ \int_1^A f(u)\ du$$

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt$ converge et donner sa valeur.

b) Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.

4. On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité. On note F_X la fonction de répartition de X.

a) Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$F_X(x) \ = \ \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

b) Démontrer que X admet une espérance, puis que cette espérance est nulle.

c) La variable aléatoire X admet-elle une variance ?

5. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = |X|$.

a) Donner la fonction de répartition de Y, et montrer que Y est une variable aléatoire à densité.

b) Montrer que Y admet pour densité la fonction f_Y définie par :

$$f_Y : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Partie B

6. Soit D une variable aléatoire prenant les valeurs -1 et 1 avec équiprobabilité, indépendante de la variable aléatoire Y.
Soit T la variable aléatoire définie par $T = DY$.

a) Déterminer la loi de la variable $Z = \dfrac{D+1}{2}$. En déduire l'espérance et la variance de D.

b) Justifier que T admet une espérance et préciser sa valeur.

c) Montrer que pour tout réel x, on a :

$$\mathbb{P}([T \leqslant x]) \ = \ \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([Y \leqslant x]) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([Y \geqslant -x])$$

d) En déduire la fonction de répartition de T.

7. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$ et V la variable aléatoire définie par : $V = \dfrac{1}{\sqrt{1-U}}$.

a) Rappeler la fonction de répartition de U.

b) Déterminer la fonction de répartition de V et vérifier que les variable V et Y suivent la même loi.

8. *a)* Écrire une fonction en langage **Scilab**, d'en-tête `function a = D(n)`, qui prend un entier $n \geqslant 1$ en entrée, et renvoie une matrice ligne contenant n réalisations de la variable aléatoire D.

b) On considère le script suivant :

```
n = input('entrer n')
a = D(n)
b = rand(1,n)
c = a / sqrt(1-b)
disp( sum(c) / n)
```

De quelle variable aléatoire les coefficients du vecteur `c` sont- ils une simulation ? Pour `n` assez grand, quelle sera la valeur affichée ? Justifier votre réponse.