ECS2
Mathématiques

Colles - Semaine 7

Série 1

Question de cours

Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et son cas d'égalité.

Exercice

Soit a un nombre réel tel que $0 < a < 1$ et b un nombre réel strictement positif.
On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \dfrac{b^i \operatorname{e}^{-b} a^j (1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } i \geqslant j \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de probabilité de X. Déterminer, si elles existent, son espérance et sa variance.

2. Déterminer la loi de probabilité de Y.

3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

4. Soit Z la variable aléatoire $Z = X - Y$. Déterminer sa loi.

5. Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?

Série 2

Question de cours

Démontrer que le produit scalaire canonique sur l'ensemble des matrices carrées est bien un produit scalaire

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

1. Montrer qu'on définit sur E un produit scalaire en posant :

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ \langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\ dt$$

On note $\|.\|$ la norme associée.

2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{Q} = (Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ orthonormée de E, pour ce produit scalaire, telle que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(Q_k) = k$.

3. ***a)*** Que dire de l'ensemble $F = \{P \in E,\ P(0) = 0\}$?

b) En déterminer une base à l'aide des éléments de $\mathcal{Q}$.

4. Soit $U = Q_0 + \sum\limits_{j=1}^{n} Q_j(0)\ Q_j$. Justifier que : $\forall\ V \in F$, $\langle V, U\rangle = 0$.

5. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $\langle Q_k, Q_k'\rangle = 0$.

6. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. En calculant de deux façons :

$$I_k = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}\left[-\left(Q_k(t)\right)^2 \mathrm{e}^{-t}\right]\ dt$$

déterminer la valeur de $\left(Q_k(0)\right)^2$.

7. On note $F^{\perp} = \{P \in E\ /\ \forall\ V \in F,\ \langle P, V\rangle = 0\}$. On admettra que : $F^{\perp} = \mathrm{Vect}\,(U)$.
Calculer $\delta = \min\{\|Q_0 - P\|,\ P \in F^{\perp}\}$ et $d = \min\{\|Q_0 - P\|,\ P \in F\}$.

Série 3

Question de cours

Soit X une v.a.r. à densité. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Que vaut $\mathbb{V}(aX+b)$?
Démontrer ce résultat.

Exercice

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Montrer que la variable aléatoire 2^{-Z} admet une espérance. On la note $r(Z)$.
On suppose dans la suite de l'exercice que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([Z=n]) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.

2. ***a)*** Montrer que l'on définit ainsi une loi de probabilité et calculer $r(Z)$.

b) Montrer que pour tout $(n,q) \in \mathbb{N}^2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{k+q}{q} = \binom{n+q+1}{q+1}$.

c) Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que Z et pour tout entier $q \geqslant 1$, on pose $S_q = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} X_i$.
Montrer que la loi de S_q est définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([S_q = n]) = \binom{n+q-1}{q-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+q}$$

d) Calculer $r(S_q)$. En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+q-1}{q-1} \left(\frac{1}{4}\right)^{n} = \left(\frac{4}{3}\right)^{q}$$

3. On suppose dans cette question que Z représente le nombre de lionceaux devant naître en 2014 d'un couple de lions. Chaque lionceau a la probabilité $\dfrac{1}{2}$ d'être mâle ou femelle, indépendamment des autres. On note F la variable aléatoire représentant le nombre de femelles devant naître en 2014.
Déterminer la loi de F.