ECE2
Mathématiques

Programme de colle - Semaine 1

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

On choisira pour chaque étudiant une question de cours parmi les suivantes :

- **Proposition 1** :
Toute suite convergente est bornée :

$$(u_n) \text{ convergente } \Rightarrow (u_n) \text{ bornée .}$$

Preuve.
Soit (u_n) une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, donc, soit $\varepsilon > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \geqslant n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire pour tout $n \geqslant n_0$, $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$.
On note

$$M = \max_{i \in [\![0,n_0]\!]} |u_i|.$$

M existe car $\text{Card}\left([\![0,n_0]\!]\right)$ est fini. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \min(M, \ell - \varepsilon) \leqslant u_n \leqslant \max(M, \ell + \varepsilon),$$

i.e. la suite (u_n) est bornée. □

- **Proposition 2** :
Toute suite croissante non majorée diverge.

Démonstration.
Soit (u_n) une suite réelle croissante et non majorée. Traduisons ces propositions « avec des ε ».
(u_n) est croissante, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leqslant u_{n+1}.$$

(u_n) n'est pas majorée, c'est-à-dire $\texttt{NON}(\exists A > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leqslant A)$. Donc

$$\forall A > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ u_N > A.$$

Traduisons maintenant ce que l'on veut obtenir : (u_n) diverge vers $+\infty$:

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \ u_n > A.$$

On peut remarquer qu'on y est déjà presque avec la définition de « non majorée ». On sait donc que pour tout $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > A$.
Or la suite (u_n) est croissante. Donc par récurrence immédiate, pour tout $n \geqslant N$, $u_n > A$, ce qui est exactement ce qu'il fallait démontrer. □

- **Propriété de recouvrement** :
  Soit (u_n) une suite à valeurs réelles.
  Si les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers un même réel ℓ, alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

  Preuve.
  Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ.
  ▷ $(u_{2n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite (u_{2n}) (*i.e.* I contient tous les termes pairs de la suite (u_n)) sauf un nombre fini,
  ▷ $(u_{2n+1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite (u_{2n+1}) (*i.e.* I contient tous les termes impairs de la suite (u_n)) sauf un nombre fini.

  Finalement, I contient tous les termes de la suite (u_n) sauf un nombre fini.
  Ceci est valable pour tout intervalle ouvert contenant ℓ. Donc la suite (u_n) converge donc vers ℓ. □

Connaissances exigibles

– convergence de suites numériques (théorème de convergence monotone, théorème d'encadrement, etc.)
– suites adjacentes
– la proriété de recouvrement est connu mais est hors programme. Une démonstration est donc nécessaire à chaque utilisation.
– étude de suites récurrentes (les élèves seront guidés dans le cheminement de ces études)
– Les séries ne sont pas au programme de cette série de colles. On peut néanmoins demander la manipulation de sommes.