Oraux HEC - 2007 - 2016

I. Annales 2016

Exercice avec préparation 1

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

On appelle *médiane* de X tout réel m qui vérifie les deux conditions : $\mathbb{P}(X \leqslant m) \geqslant \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X \geqslant m) \geqslant \frac{1}{2}$.

On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Question de cours : Définition et propriétés de la loi exponentielle.

2. ***a)*** Montrer que X admet une unique médiane m que l'on calculera.

b) Soit M la fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $M(x) = \mathbb{E}(|X - x|)$.
Étudier les variations de la fonction M sur $\mathbb{R}$ et montrer que m est l'unique point en lequel M atteint son minimum.

3. On suppose que le paramètre λ est inconnu. Soit α un réel vérifiant $0 < \alpha < 1$.
Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Z_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

a) Quelle est la loi de Z_n ?

b) Établir l'existence de deux réels c et d tels que : $\mathbb{P}\left(\left[Z_n \leqslant \frac{c}{\lambda}\right]\right) = \frac{\alpha}{2}$ et $\mathbb{P}\left(\left[Z_n \geqslant \frac{d}{\lambda}\right]\right) = \frac{\alpha}{2}$.

c) En déduire un intervalle de confiance du paramètre m au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Exercice sans préparation 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes.

Montrer qu'un endomorphisme g de E vérifie $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si les vecteurs propres de f sont des vecteurs propres de g.

Exercice avec préparation 2

On suppose que toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. Question de cours : Loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$; définition, propriétés.

2. Pour tout x réel, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

a) Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, montrer que pour tout x réel, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.

b) Établir pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ l'équivalence suivante : $\lfloor y \rfloor \leqslant x \Leftrightarrow y < \lfloor x \rfloor + 1$.

c) Soit α et β deux réels vérifiant $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$ et soit $N_n(\alpha, \beta)$ le nombre d'entiers k qui vérifient $\alpha < \dfrac{k}{n} \leqslant \beta$. Exprimer $N_n(\alpha, \beta)$ en fonction de $\lfloor n\alpha \rfloor$ et $\lfloor n\beta \rfloor$.

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note Y_n la variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathbb{P}\left(Y_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

Soit Z une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la variable aléatoire Z_n par : $Z_n = \dfrac{\lfloor nZ \rfloor}{n}$. Soit α et β deux réels vérifiant $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$.

a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\alpha < Y_n \leqslant \beta) = \beta - \alpha$.

b) Comparer les fonctions de répartition respectives de Y_n et Z_n. Conclusion.

Exercice sans préparation 2

Soit x réel et $M(x)$ la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par : $M(x) = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 2x & 2x \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de x la matrice $M(x)$ est-elle diagonalisable ?

Exercice avec préparation 3

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

On définit l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

On pose $H_0(X) = 1$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $H_k(X) = \dfrac{X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)}{k!}$.

On note $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.

2. ***a)*** Montrer que φ est un endomorphisme non bijectif de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Justifier que la famille $\mathscr{B}' = (H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Déterminer la matrice M' de φ dans la base $\mathscr{B}'$.

d) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

3. Dans cette question, p est un entier fixé supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, soit f_i l'application de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall Q \in \mathbb{R}_p[X]$, $f_i(Q) = \sum\limits_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} Q(k)$.

a) Justifier que pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, l'application f_i est linéaire.

b) Soit $(i, j) \in [\![0, p]\!]^2$. Établir la relation : $f_i(H_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

c) Soit a_0, a_1, …, a_p les réels vérifiant : $X^p = a_0 H_0 + a_1 H_1 + \cdots + a_p H_p$.

Déduire de la question précédente, la relation : $\forall i \in [\![0, p]\!]$, $a_i = \sum\limits_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} k^p$.

Exercice sans préparation 3

Les variables aléatoires de cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, on note Y_n une variable aléatoire à valeurs dans $\left\{0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \dfrac{n-1}{n}\right\}$ telle que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathbb{P}\left(Y_n = \dfrac{k}{n}\right) = \dfrac{1}{n}$.

Soit f une fonction définie et continue sur $[0, 1]$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} E(f(Y_n)) = E(f(Z))$.

Exercice avec préparation 4

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. Question de cours : Définition et propriétés de la covariance de deux variables aléatoires discrètes. Soit p, q et r des réels fixés de l'intervalle $]0,1[$ tels que $p+q+r=1$. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,0,1\}$, indépendantes et de même loi donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X_n = 1) = p,\ \mathbb{P}(X_n = -1) = q,\ \mathbb{P}(X_n = 0) = r.$$

On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

2. ***a)*** Pour tout entier $n \geqslant 1$, préciser $Y_n(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}(Y_n = 0)$.

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{E}(Y_n)$.

3. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $p_n = \mathbb{P}(Y_n = 1)$.

a) Calculer p_1 et p_2.

b) Établir une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.

c) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $p_n = \dfrac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2}$.

d) Pouvait-on à l'aide de la question 2, trouver directement la loi de Y_n ?

4. ***a)*** Établir l'inégalité : $(p+q)^n > (p-q)^{2n}$. Calculer $\mathbb{V}(Y_n)$.

b) Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$ des deux variables aléatoires Y_n et Y_{n+1}.

Exercice avec préparation 5

1. Question de cours : Fonctions équivalentes au voisinage de $+\infty$.

Pour tout entier naturel n, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \geqslant 0,\ f_n(x) = \displaystyle\int_0^1 t^n \mathrm{e}^{-tx}\, dt$.

2. *a)* Montrer que pour tout entier naturel n, la fonction f_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) Étudier la suite $(f_n(0))_{n\geqslant 0}$. En déduire pour tout réel $x \geqslant 0$ fixé, la limite de la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$.

3. *a)* Soit x un réel strictement positif. Établir pour tout entier $n \geqslant 1$, la relation : $f_{n+1}(x) = \dfrac{n+1}{x} f_n(x) - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

b) Expliciter les fonctions f_0 et f_1.

c) Montrer que pour tout entier naturel n, $f_n(x)$ est équivalent à $\dfrac{n!}{x^{n+1}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4. *a)* Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$, on a : $f_n(x) = \dfrac{1}{x^{n+1}} \displaystyle\int_0^x u^n \mathrm{e}^{-u}\, du$.

b) En déduire que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer sa dérivée f_n'.

c) Comparer pour tout réel $y \geqslant 0$, leq deux réels y et $1 - \mathrm{e}^{-y}$.
En déduire que pour tout entier naturel n, la fonction f_n est continue en 0.

Exercice sans préparation 5

Soit c et r deux réels strictement positifs.

1. Justifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{rc^r}{x^{r+1}} & \text{si } x > c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Identifier la loi de la variable aléatoire $Y = \ln(X) - \ln(c)$.

3. Compléter les lignes du code **Scilab** suivant pour que V soit un vecteur ligne contenant 100 réalisations de la loi de la variable aléatoire X.

```
c = input('c=')
r = input('r=')
U = grand(?,?,?,?)
V = c * exp(U)
```

Exercice avec préparation 6

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. Question de cours : Convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.
Dans tout l'exercice, X désigne une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

2. ***a)*** On pose : $T = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X). Montrer que la loi de T est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(T = k) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right)\left(\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^k$$

b) Quelle est la loi de $T + 1$? En déduire l'espérance et la variance de T.

3. On pose : $Z = X - \lfloor X \rfloor$.
Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z.

4. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit une loi exponentielle de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Z_n = X_n - \lfloor X_n \rfloor$.
Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice sans préparation 6

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f^4 = f^2$ et $\mathrm{rg}(f^2) = 1$. Montrer que le spectre de f est $\{0\}$ ou $\{0, 1\}$ ou $\{-1, 0\}$.

Exercice avec préparation 7

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} x^n \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. ***a)*** Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx$.

b) Calculer I_0 et I_1.

3. ***a)*** Montrer que f_1 est une densité de probabilité.

b) Tracer la courbe représentative de f_1 dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
Dans la suite, on note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ admettant f_1 pour densité.

c) Déterminer la fonction de répartition F de X.

d) Justifier l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et de la variance $\mathbb{V}(X)$ de X. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

4. On pose : $Y = X^2$.

a) Montrer que Y est une variable aléatoire à densité.

b) Quelle est la loi de Y ?

Exercice sans préparation 7

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de $\ker(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. On admet sans démonstration que $A^3 = 0$. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Quelles sont les valeurs propres de M ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

b) Justifier que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de A et I (matrice identité de $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$).

Exercice avec préparation 8

Toutes les variables aléatoires utilisées dans cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. Question de cours : loi faible des grands nombres.
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, de loi uniforme sur $[0,1]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n la variable aléatoire $\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

a) Calculer la fonction de répartition de U_n.

b) Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, la probabilité $\mathbb{P}([U_n \geqslant \varepsilon])$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

3. Compléter la deuxième ligne du code **Scilab** suivant pour que la fonction `minu` simule la variable U_k pour la valeur k du paramètre.

```
1 function u = minu(k)
2     x = ..........
3     u = min(x)
4 endfunction
```

4. Soit $p \in]0,1[$ et Z une variable aléatoire telle que, pour tout réel x :

$$\mathbb{P}([Z \leqslant x]) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1}\mathbb{P}([U_k \leqslant x])$$

(on admet qu'il existe une telle variable aléatoire et qu'elle possède une densité).

a) Justifier, pour tout $x \in [0,1]$, l'égalité : $\mathbb{P}([Z \leqslant x]) = 1 - \dfrac{p(1-x)}{p+(1-p)x}$.

b) En déduire une densité de Z.

5. *a)* Justifier que la fonction **Scilab** suivante fournit une simulation de la variable aléatoire Z de la question précédente.

```
function z = geomin(p)
    z = minu(grand(1,1,'geom',p))
endfunction
```

b) De quel nombre réel les instructions suivantes fournissent-elles une valeur approchée et pourquoi ?

```
p = 0.5 ;
R = [] ;
for k = 1:10000
    R = [R,geomin(p)]
end ;
disp(mean(R))
```

Exercice sans préparation 8

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit f_n la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{nt^2}\, dt - \int_x^1 \mathrm{e}^{-nt^2}\, dt.$$

1. Montrer que la fonction f_n est strictement monotone sur $[0,1]$.

2. Établir l'existence d'un unique réel de $[0,1]$, noté c_n, tel que $\displaystyle\int_0^{c_n} e^{nt^2}\, dt = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2}\, dt$.

3. Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

II. Annales 2015

Exercice avec préparation 9

1. Question de cours : Condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dans la base $\mathscr{B}$ telles que $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 2$.
On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^n$ qui, à tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, associe
$f(x) = x - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) v$.

2. ***a)*** Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

b) Déterminer $f \circ f$. L'endomorphisme f et-il bijectif ?

c) Quelles sont les valeurs propres possibles de f ?

3. ***a)*** Déterminer les valeurs propres de f.

b) Quels sont les sous-espaces propres de f ? L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

4. ***a)*** Écrire la matrice M de f dans la base $\mathscr{B}$.

b) Montrer que les matrices $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_1 & \cdots & v_1 \\ v_2 & v_2 & \cdots & v_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_n & v_n & \cdots & v_n \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice sans préparation 9

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f strictement positive sur $\mathbb{R}$ et possédant une espérance.
Pour tout $\alpha \in]0,1[$, on note h_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h_\alpha(t) = |t| + (2\alpha - 1)t$.
Pour tout $q \in \mathbb{R}$, on pose : $L(q) = E\left(h_\alpha(X - q)\right)$.

1. Établir l'existence d'un unique réel q_α en lequel la fonction L est minimale.

2. On suppose que $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et que X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Calculer $q_{\frac{1}{2}}$.

Exercice avec préparation 10

Dans cet exercice, toutes les variables sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. Question de cours : Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

2. Soit X une variable aléatoire strictement positive suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
On pose : $Z = -\ln(X)$ et on note F_Z la fonction de répartition de Z.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $F_Z(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$.

b) Montrer que Z admet une densité de probabilité continue f_Z qui atteint sa valeur maximale en un unique point x_0.

c) Tracer l'allure de la courbe représentative de F_Z dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

d) Que représente le point d'abscisse x_0 et d'ordonnée $F_Z(x_0)$ pour cette courbe ?

3. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geqslant 1}$ indépendantes et de même loi que X.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $Z_n = Y_n - \ln(n)$.

a) Déterminer les fonctions de répartition F_{Y_n} et F_{Z_n} de Y_n et Z_n respectivement.

b) Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire Z.

c) Établir pour tout réel $c > 0$, l'inégalité : $\mathbb{E}(Y_n) \geqslant c\mathbb{P}(Y_n \geqslant c)$.

d) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(Y_n)$.

Exercice sans préparation 10

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ? inversible ?

2. On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'existence d'une matrice N telle que $A = I + N$.
Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice A^k.

3. On rappelle l'identité remarquable : $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$. Déterminer A^{-1}.

Exercice avec préparation 11

1. Question de cours : Définition de la dimension d'un espace vectoriel.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note E_n le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$ et F_n le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par $X, X^2, \dots, X^{n-1}, X^n$.

2. Montrer que les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) = P(x)$, sont les polynômes constants.

3. Préciser les dimensions respectives de E_n et F_n.

4. Pour tout $P \in F_n$, on note Q le polynôme tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = P(x+1) - P(x)$.

a) Vérifier que $Q \in E_n$. QUelle relation existe-t-il entre les degrés de P et de Q ?

b) Soit Δ l'application de F_n sur E_n qui à tout $P \in F_n$ associe $Q = \Delta(P)$, où $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = P(x+1) - P(x)$.
Montrer que l'application Δ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

c) Déterminer un polynôme P vérifiant $\Delta(P) = X^3$. En déduire la valeur des sommes $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$ et $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3$.

Exercice sans préparation 11

Après une alerte incendie, les 60 élèves d'une école se répartissent au hasard dans 5 salles de classe. Afin de savoir comment se répartissent les élèves on exécute le programme **Scilab** suivant :

```
Y = grand(100000, 1, 'bin', 60, 1/5)
hisplot(0.5:25,Y)
```

qui donne la représentation ci-dessous :

Exo_incendie.png

Que représente la valeur maximale prise par cet histogramme ? Prouver un résultat concernant cette valeur.

Exercice avec préparation 12

1. Question de cours : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I.
Propriétés de l'application $x \in I \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$.
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.
Pour tout fonction $f \in E$, on note $T(f)$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)\ dt.$$

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, soit f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = \mathrm{e}^{ax}$. Déterminer $T(f_a)$.

3. ***a)*** Montrer que pour toute fonction $f \in E$, l'application $T(f)$ appartient à E et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Déterminer la fonction dérivée de la fonction $T(f)$.

b) On suppose que f est une fonction bornée de E. Montrer que $T(f)$ est bornée et établir l'existence d'un réel K tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|T(f)(x) - T(f)(y)| \leqslant K|x - y|$.

4. Soit T l'application de E dans E qui à $f \in E$, associe $T(f)$.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il surjectif ?

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
Montrer que $T(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

c) Soit T_n la restriction à $\mathbb{R}_n[X]$ de l'endomorphisme T et $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
L'endomorphisme T_n est-il diagonalisable ? T_n est-il bijectif ?

Exercice sans préparation 12

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, de même loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $W_n = \sum\limits_{k=1}^{n} kX_k$.

1. Calculer $\mathbb{E}(W_n)$ et $\mathbb{V}(W_n)$.

2. Les variables W_n et W_{n+1} sont-elles indépendantes ?

Exercice avec préparation 13

1. Question de cours : Définition d'un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 1. Si $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_p[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}_p[X]$, alors $P(A)$ désigne la matrice $a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_p A^p$.

2. Soit A et Q deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que la matrice Q est inversible, d'inverse notée Q^{-1}.
Soit P un polynôme à coefficients réels. Expliciter $P(Q^{-1}AQ)$ en fonction de $P(A)$, Q et Q^{-1}.

3. ***a)*** Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts et soit φ l'application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, associe le n-uplet $(P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n))$. Montrer que l'application φ est bijective.

b) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n réels distincts non nuls et $T = (t_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $t_{i,i} = \lambda_i$.
Établir l'existence d'un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1,]\!]$, on a : $\lambda_i \times P(\lambda_i) = 1$.
Que vaut $T \times P(T)$? Conclure.

4. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ soit égale à $P(A)$.

Exercice sans préparation 13

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires telles que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, X_k suit la loi de Bernoulli de paramètre p_k avec $0 < p_k < 1$.
On pose : $Y = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que $\mathbb{V}(Y) \leqslant \dfrac{n^2}{4}$.

Exercice avec préparation 14

1. Question de cours : Formule des probabilités totales.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère n urnes numérotées de 1 à n et N un entier naturel multiple de 2^n.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la k-ième urne contient N boules dont $\dfrac{N}{2^k}$ boules blanches, les autres étant noires.
On tire dans l'urne 1 une boule au l'on place dans l'urne 2, puis on tire dans l'urne 2 une boule que l'on place dans l'urne 3 et ainsi de suite jusqu'à tirer dans l'urne $n-1$ une boule que l'on place dans l'urne n, puis on tire une boule dans l'urne n.
L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

2. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, soit p_k la probabilité que la boule tirée dans l'urne k soit blanche.
Trouver une relation de récurrence entre p_{k+1} et p_k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$.

3. ***a)*** Calculer p_n en fonction de n et N.

b) Pour n fixé, calculer $\lim\limits_{N \to +\infty} p_n$. Interpréter cette limite.

4. Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. Calculer la probabilité conditionnelle que la n-ième boule tirée soit blanche sachant que la boule tirée dans l'urne i est blanche.

Exercice sans préparation 14

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

2. Quelle est la nature de la suite $(n!)^{\frac{1}{n}}$?

Exercice avec préparation 15

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
Dans cet exercice, les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et admettent une densité.
Soit X une variable aléatoire à densité admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$. On note respectivement F et f, la fonction de répartition et une densité de X.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X.

2. Pour $x \geqslant 0$:

a) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} tf(t)\ dt$.

b) Établir les inégalités : $\displaystyle\int_x^{+\infty} tf(t)\ dt \geqslant x(1 - F(x)) \geqslant 0$.

c) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F(t))\ dt$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, G_n la fonction de répartition de Z_n et g_n une densité de Z_n.

a) Exprimer pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_n(t)$ en fonction de $F(t)$.

b) Établir l'existence de $\mathbb{E}(Z_n)$.

c) Pour $n \geqslant 2$, montrer que : $\mathbb{E}(Z_n) - \mathbb{E}(Z_{n-1}) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (F(t))^{n-1}(1 - F(t))\ dt$.

d) Soit $m > 0$. On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre m (d'espérance $\dfrac{1}{m}$).
Calculer $\mathbb{E}(Z_n)$.
Donner un équivalent de $\mathbb{E}(Z_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice sans préparation 15

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et X une matrice colonne non nulle de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On pose : $A = X\,{}^tX$.

1. Montrer que A est diagonalisable.

2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

Exercice avec préparation 16

1. Question de cours : Donner des critères de convergence des séries à termes positifs.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\right)$.

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

2. Dresser le tableau de variation de f.

3. *a)* Montrer que la courbe (Γ) d'équation $y = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}}{2}x\right)$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

b) Tracer $(\mathcal{C})$ et (Γ) dans le même repère.

4. Établir pour tout réel $x \geqslant 1$, l'encadrement : $0 \leqslant f'(x) < 1$.
En déduire que le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \geqslant 1$ ainsi que la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x$.

5. Soit le programme **Scilab** suivant :

```
function y=f(x)
    y = log(%e * (x + x ^(-1))/2)
endfunction

x = [0.01:0.1:5] ;
plot2d(x, f(x), rect=[0,0,5,5])

x = [0,5]
plot2d(x,x)

u = input('u0=')
x = [u] ; y = [0]
for k=1:10
    z = f(u)
    x = [x,u]
    x = [x,z]
    y = [y,z,z]
    u = z
end
plot2d(x,y)
```

Expliquer ce que fait ce programme et ce qu'il illustre.
Dans `plot2d`, `rect[0,0,5,5]` signifie que seule la partie de la courbe contenue dans le rectangle $\{(x,y) \ / \ 0 \leqslant x \leqslant 5 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 5\}$ sera tracée.

6. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in [1, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

7. *a)* Justifier l'existence d'un réel $a > 1$ tel que $x \in [1, a] \Rightarrow f'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

b) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$. Quelle est la nature de la série de terme général v_n ?

Exercice sans préparation 16

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que pour tout $n \geqslant 1$, X_n admet une densité f_n continue sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\left[\dfrac{2}{n}, +\infty\right[$, affine sur $\left[0, \dfrac{1}{n}\right]$ et sur $\left[\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right]$.

1. Déterminer une densité f_n de X_n.

2. Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice avec préparation 17

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Soit a un paramètre réel et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, telle que :

$$F(x) = \begin{cases} 1 + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) & \text{si } x \geqslant a \\ 0 & \text{si } x < a \end{cases}$$

2. ***a)*** Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = \dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$.

b) Étudier les variations de F et tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

3. ***a)*** Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité.

b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

4. Soit Y la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie par $Y = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X). On pose : $Z = X - Y$.

a) Calculer $\mathbb{P}(Y = 0)$ et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{P}(Y = n) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n(n+2)}\right)$.

b) Déterminer la fonction de répartition et une densité de Z.

c) Établir l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(Z)$ de Z. Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

Exercice sans préparation 17

Soit a, b et c des réels non nuls vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. On pose : $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. ***a)*** Calculer la matrice $M = U\,{}^tU$ (où ${}^tU$ est la matrice transposée de la matrice colonne U).

b) M est-elle diagonalisable ? inversible ?

2. ***a)*** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer M^n.

b) Quelles sont les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.

III. Annales 2014

Exercice avec préparation 18

1. Question de cours : Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes. Lien entre indépendance et covariance.
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes finies à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On suppose que $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ et $Y(\Omega) \subset [\![0, m]\!]$, où n et m sont deux entiers de $\mathbb{N}^*$.
Pour tout couple $(i, j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, m]\!]$, on pose : $p_{i,j} = \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$.
Soit F_X et F_Y les deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par : $F_X(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X = i])x^i$ et
$F_Y(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} \mathbb{P}([Y = j])x^j$.
Soit $Z = (X, Y)$ et G_Z la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $G_Z(x, y) = \sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{m} p_{i,j} x^i y^j$.

2. Donner la valeur de $G_Z(1, 1)$ et exprimer les espérances de X, Y et XY, puis la covariance de (X, Y) à l'aide des dérivées partielles premières et secondes de G_Z au point $(1, 1)$.

3. Soit f une fonction polynomiale de deux variables définies sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = \sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{m} a_{i,j} x^i y^j$ avec $a_{i,j} \in \mathbb{R}$.
On suppose que pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) = 0$.

a) Montrer que pour tout $(i, j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, m]\!]$, on a $a_{i,j} = 0$.

b) En déduire que X et Y sont indépendantes, si et seulement si, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $G_Z(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$. (on pourra poser : $a_{i,j} = p_{i,j} - \mathbb{P}([X = i])\mathbb{P}([Y = j])$).

4. Une urne contient des jetons portant chacun une des lettres A, B ou C. La proportion des jetons portant la lettre A est p, celle des jetons portant la lettre B est q et celle des jetons portant la lettre C est r, où p, q et r sont trois réels strictement positifs vérifiant $p + q + r = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages d'un jeton avec remise dans cette urne. On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de jetons tirés portant la lettre A (resp. B) à l'issue de ces n tirages.

a) Quelles sont les lois de X et Y respectivement ? Déterminer F_X et F_Y.

b) Déterminer la loi de Z. En déduire G_Z.

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

d) Calculer la covariance de (X, Y). Le signe de cette covariance était-il prévisible ?

Exercice sans préparation 18

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^tAA^tAA = I$, où I est la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la matrice A est symétrique.

2. Déterminer A.

Exercice avec préparation 19

1. Question de cours : Définition et représentation graphique de la fonction partie entière.
On note E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par les quatre fonctions f_0, f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = \mathrm{e}^x,\ f_3(x) = x\mathrm{e}^x.$$

2. On note : $\mathscr{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$.

a) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de F.

b) Montrer que toutes les fonctions de F sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

3. Soit Φ l'application définie par : pour tout $f \in F$, $\Phi(f) = f'$, où f' est la dérivée de f.

a) Justifier que Φ est un endomorphisme de F et écrire la matrice M de Φ dans la base $\mathscr{B}$.

b) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

c) Montrer que f_3 appartient à $\mathrm{Im}(\Phi)$ et résoudre dans F l'équation : $\Phi(f) = f_3$.

4. On note G l'ensemble des fonctions g de E telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x+1) - g(x) = 0.$$

a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et trouver $F \cap G$.

b) Trouver un élément de G qui n'appartienne pas à F.

5. Trouver toutes les fonctions de F vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1 - f(x) = (\mathrm{e}-1)f'(x)$.

Exercice sans préparation 19

Soit p un réel de $]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, de même loi de Bernoulli telle que :
$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_k = 1]) = p$ et $\mathbb{P}([X_k = 0]) = q$. Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on définit pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ la variable aléatoire $Y_k = X_k + X_{k+1}$.

1. *a)* Calculer pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Cov}(Y_k, Y_{k+1})$.

b) Montrer que $0 < \mathrm{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

2. Calculer pour tout couple (k, l) tel que $1 \leqslant k < l \leqslant n$, $\mathrm{Cov}(Y_k, Y_l)$.

3. On note ε un réel strictement positif fixé. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k - 2p\right| > \varepsilon\right]\right) = 0$.

Exercice avec préparation 20

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2. On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on note D et T les deux applications suivantes :

$$D : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & ad - bc \end{array} \right. \quad \text{et} \quad T : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & a + d \end{array} \right.$$

2. Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Exprimer $D(AB)$ en fonction de $D(A)$ et $D(B)$. Montrer que $T(AB) = T(BA)$.

b) En déduire que si A et B sont semblables, on a $D(A) = D(B)$ et $T(A) = T(B)$.

3. Déterminer $\ker(D)$ et $\ker(T)$. Quelle est la dimension de $\ker(T)$?
Dorénavant, si $u \in\ll E$ de matrice A dans une base $\mathscr{B}$ de E, on note : $D(u) = D(A)$ et $T(u) = T(A)$.

4. On note id_E l'endomorphisme identité de E. Exprimer $u^2 = u \circ u$ en fonction de u et id_E.

5. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathcal{S}_0 = \{v \in \mathscr{L}(E) | u \circ v - v \circ u = 0\}$.
Montrer que $\mathcal{S}_0$ est un espace vectoriel contenant $\{P(u), P \in \mathbb{R}[X]\}$.

6. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ avec $u \neq 0$. On pose : $\mathcal{S} = \{v \in \mathscr{L}(E) | u \circ v - v \circ u = u\}$.

a) Montrer que si $\mathcal{S}$ est non vide, alors l'endomorphisme u ne peut être bijectif. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur u^2 pour que $\mathcal{S}$ soit non vide.

b) On suppose que $\mathcal{S}$ est non vide. Établir l'existence d'une base $\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2)$ de E dans laquelle la matrice M_u de u d'écrit $M_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et déterminer la forme générale de la matrice des éléments v de $\mathcal{S}$ dans cette même base.

c) On suppose que $\mathcal{S}$ est non vide. Montrer que $\mathcal{S} = \{v_0 + \alpha \mathrm{id}_E + \beta u, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ où v_0 est un endomorphisme non inversible de E à déterminer.

Exercice sans préparation 20

Soit k et λ deux réels et soir f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles donnée par :

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{ll} kt\mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

1. Exprimer k en fonction de λ pour que f soit une densité de probabilité.
On note X une variable aléatoire réelle ayant f pour densité.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X admet un moment d'ordre n que l'on calculera.

Exercice avec préparation 21

1. Question de cours : Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Lois marginales. Lois conditionnelles.
Soit c un réel strictement positif et soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, telles que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = c\frac{i+j}{i!j!}.$$

2. ***a)*** Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}([X=i]) = c\dfrac{(i+1)}{i!}\mathrm{e}$. En déduire la valeur de c.

b) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

3. ***a)*** Déterminer la loi de $X+Y-1$.

b) En déduire la variance de $X+Y$.

c) Calculer la covariance de X et de $X+5Y$. Les variables aléatoires X et $X+5Y$ sont-elles indépendantes ?

4. On pose : $Z = \dfrac{1}{X+1}$.

a) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

b) Déterminer pour $i \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X=i]$.

c) Pour $A \in \mathscr{A}$, on pose : $g_A(Y) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} kP_A([Y=k])$.
Établir l'existence d'une fonction affine f telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, on a : $g_{[X=X(\omega)]}(Y) = f(Z(\omega))$.

Exercice sans préparation 21

1. La somme de deux matrices diagonalisables est-elle diagonalisable ?

2. La somme de deux matrices inversibles est-elle inversible ?

3. Montrer que toute matrice carrée est la somme de deux matrices inversibles ?

Exercice avec préparation 22
On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.
Dans tout l'exercice, A est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ayant trois valeurs propres distinctes, notées λ_1, λ_2 et λ_3.

1. Question de cours :Définition d'un polynôme annulateur d'une matrice. Lien avec les valeurs propres.

2. ***a)*** Donner en fonction de λ_1, λ_2 et λ_3, un polynôme annulateur de A de degré 3.

b) Peut-on trouver un polynôme annulateur de A de degré 1 ou de degré 2 ?

3. Soit φ l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, associe le triplet $\big(P(\lambda_1^5), P(\lambda_2^5), P(\lambda_3^5)\big)$.

a) Montrer que l'application φ est linéaire.

b) Déterminer $\ker(\varphi)$.

c) L'application φ est-elle un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur $\mathbb{R}^3$?

d) Établir l'existence d'un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que : pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, $Q(\lambda_i^5) = \lambda_i$.

e) Soit T le polynôme défini par : $T(X) = Q(X^5) - X$.
Montrer que le polynôme T est un polynôme annulateur de A.

4. On note $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ les deux sous-ensembles de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivants :

$$\mathcal{E} = \{N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \setminus AN = NA\} \quad \text{et} \quad \mathcal{F} = \{N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \setminus A^5N = NA^5\}.$$

Déduire des questions précédentes que $\mathcal{E} = \mathcal{F}$.

Exercice sans préparation 22
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. Déterminer la loi de M_n.

2. Montrer que l'application g qui à tout réel x associe $g(x) = \mathrm{e}^{-x} \exp\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$ est une densité de probabilité.

3. Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de densité g.
Montrer que la suite de variables aléatoires $(\lambda M_n - \ln(n))_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers Y.

Exercice avec préparation 23

1. Question de cours : Définition de la convergence d'une série numérique (à termes réels).
Dans tout l'exercice, a est un réel strictement supérieur à 1.

2. ***a)*** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^a)^n}$ est convergente. On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^a)^n}$.

b) Établir la convergence de la suite $(u_n(a))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. ***a)*** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n(a) = an(u_n(a) - u_{n+1}(a))$. En déduire $u_n(a)$ en fonction de $u_1(a)$.

b) Montrer que la série de terme général $\left(\dfrac{u_n(a)}{an}\right)$ est convergente.

c) En déduire la limite de la suite $(u_n(a))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n(a) = \ln(u_n(a)) + \dfrac{\ln(n)}{a}$.

a) Montrer que la série de terme général $(w_{n+1}(a) - w_n(a))$ est convergente.

b) En déduire l'existence d'un réel $K(a)$ tel que $u_n(a)$ soit équivalent à $\dfrac{K(a)}{n^{\frac{1}{a}}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice sans préparation 23

Les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que : $Y(\Omega) = \{1, 2\}$, $\mathbb{P}([Y = 1]) = \mathbb{P}([Y = 2]) = \dfrac{1}{2}$.
On pose : $Z = XY$.

1. Déterminer la loi de Z.

2. On admet que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2}$. Quelle est la probabilité que Z prenne des valeurs paires ?

Exercice avec préparation 24

1. Question de cours : Critères de convergence d'une intégrale impropre.
Préciser la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, où a est un réel strictement positif et α un réel quelconque.
Soit T une variable aléatoire d"finie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, suivnt la loi normale centrée réduite.
On note Φ et φ respectivement, la fonction de répartition et une densité de T.

2. ***a)*** À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $x > 0$, on a :
$0 \leqslant 1 - \Phi(x) \leqslant \dfrac{1}{2x^2}$.

b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(x))\, dx$ est convergente et calculer sa valeur.

3. On note φ' la dérivée de φ.

a) Déterminer pour tout $x \in \mathbb{R}$, une relation entre $\varphi'(x)$ et $\varphi(x)$.

b) En déduire, à l'aide de deux intégrations par parties, que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :
$\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3} \leqslant \dfrac{1 - \Phi(x)}{\varphi(x)} \leqslant \dfrac{1}{x}$.

c) Donner un équivalent de $1 - \Phi(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

4. Soit $a > 0$. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(P_{[T>x]} \left[T > x + \frac{a}{x} \right] \right)$.

Exercice sans préparation 24

Soit D la matrice définie par : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les matrices $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AD = DA$.

2. En déduire les matrices $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $M^3 - 2M = D$.

Exercice avec préparation 25

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on pose : $f^2 = f \circ f$.

2. ***a)*** Montrer que $2f - f^2 = \text{id}$.

b) Montrer que l'endomorphisme f est un automorphisme. Quel est l'automorphisme réciproque de f ?

c) Montrer que f admet l'unique valeur propre 1. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

d) Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre 1. Quelle est sa dimension ?

3. ***a)*** Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de n.

b) Le résultat précédent s'étend-t-il au cas où $n \in \mathbb{Z}$?

4. Déterminer une base (u, v, w) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice sans préparation 25 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et suivant toutes la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

1. Pour tout entier $k \geqslant 1$, déterminer une densité de la variable aléatoire $Y_k = \max(X_1, X_2, \ldots, X_k)$.

2. Déterminer une densité de la variable aléatoire $Z_k = -Y_k$.

Exercice avec préparation 26

1. Question de cours : Énoncer une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'un endomorphisme.

On considère la matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. On note $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à 2 lignes et 1 colonne à coefficients réels.
Soit u l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ défini par : pour tout $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $u(X) = AX$.

a) Déterminer une base de $\ker(u)$ et une base de $\mathrm{Im}(u)$.

b) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

c) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^n.

3. Soit v l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : pour tout $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $v(M) = AM$.
On note $\mathscr{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on rappelle que :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Écrire la matrice V de l'endomorphisme v dans la base $\mathscr{B}$.

b) Déterminer une base de $\ker(v)$ et une base de $\mathrm{Im}(v)$.

c) L'endomorphisme v est-il diagonalisable ?

Exercice sans préparation 26 Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes U_1, U_2, …, U_n contenant chacune trois boules. Dans l'ensemble des $3n$ boules, une seule est rouge, les autres étant bleues.
Sachant que l'on a tiré sans remise deux boules bleues dans l'urne U_1, quelle est la probabilité que l'urne U_2 contienne la boule rouge ?

IV. Annales 2013

Exercice avec préparation 27

1. Question de cours : Le schéma binomial.

2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \sum\limits_{k=1}^{n} kX_k$ et $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

a) Calculer l'espérance $E(W_n)$ et la variance $V(W_n)$ de la variable aléatoire W_n.

b) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(W_n = 0)$ et $P(W_n = s_n)$.

c) Calculer, selon les valeurs de n, la probabilité $P(W_n = 3)$.

3. Montrer que pour tout $k \in [\![0; s_n]\!]$, on a : $\mathbb{P}(W_n = k) = P(W_n = s_n - k)$.

4. ***a)*** Déterminer pour tout $j \in [\![0; s_n]\!]$ la loi de probabilité conditionnelle de W_{n+1} sachant $(W_n = j)$.

b) En déduire les relations :

$$P(W_{n+1} = k) = \begin{cases} \frac{1}{2}P(W_n = k) & \text{si } k \leqslant n \\ \frac{1}{2}P(W_n = k) + \frac{1}{2}P(W_n = k - n - 1) & \text{si } n + 1 \leqslant k \leqslant s_n \\ \frac{1}{2}P(W_n = k - n - 1) & \text{si } s_n + 1 \leqslant k \leqslant s_{n+1} \end{cases}$$

Exercice sans préparation 27 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \ln\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n^3}$.

2. En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\frac{1}{n^3} \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

Exercice avec préparation 28

1. Question de cours : Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On jette n fois de suite un dé pipé dont les 6 faces ne comportent que les nombres 1, 2 et 3, et on suppose que les résultats des lancers sont indépendants.

À chaque lancer, la probabilité d'obtenir 1 est p, celle d'obtenir 2 est q, et celle d'obtenir 3 est $1-p-q$, où p et q sont deux paramètres réels strictement positifs vérifiant $p+q<1$.

Soit X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de 1 (resp. 2) obtenus en n lancers consécutifs.

a) Quelles sont les lois respectives de X et Y ?

b) Déterminer la loi du couple (X, Y).

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

d) Déterminer le biais et le risque quadratique de l'estimateur $T_n = \frac{X}{n+1}$ du paramètre p.

3. On suppose dans cette question que le nombre de lancers effectués avec ce dé est une variable aléatoire N suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Soit X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de 1 (resp. 2) obtenus en N lancers consécutifs.

a) Déterminer les lois de X et Y respectivement.

b) Vérifier que X et Y sont indépendantes.

c) $T = \dfrac{X}{N+1}$ est-il un estimateur sans biais du paramètre p ?

Exercice sans préparation 28 Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si A est diagonalisable, A^3 l'est aussi.

2. On suppose dans cette question que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^3.

b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice avec préparation 29

1. Question de cours : Écrire, sous forme d'intégrale, la probabilité qu'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite appartienne à un segment $[a; b]$. Dans quelle théorème cette probabilité apparaît-elle comme une limite ?

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant la loi normale centrée réduite. On note Φ la fonction de répartition de de X. On pose $Y = |X|$ (valeur absolue de X).

2. ***a)*** Montrer que Y admet une espérance et une variance et les calculer.

b) Calculer $E(XY)$.

3. On pose $Z = X + Y$.

a) Calculer $P(Z = 0)$.

b) Exprimer la fonction de répartition de Z à l'aide de Φ et indiquer l'allure de sa représentation graphique.

c) La variable aléatoire Z admet-elle une densité ? Est-elle discrète ?

4. Soit $y \in \mathbb{R}$.

a) Exprimer à l'aide de Φ, selon les valeurs de y, la probabilité $\mathbb{P}([X \leqslant 1] \cap [Y \leqslant y])$.

b) Pour quelle valeur de y les évènements $(X \leqslant 1)$ et $(Y \leqslant y)$ sont-ils indépendants ?

Exercice sans préparation 29

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 0$.

1. Montrer que $A^2 = 0$.

2. Montrer que l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$ est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

Exercice avec préparation 30

1. Question de cours : Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

On définit la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les relations :

$$Z_0 = \frac{X_0}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ Z_n = \frac{Z_{n-1} + X_n}{2}.$$

2. ***a)*** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer Z_n en fonction des variables aléatoires $X_0, X_1, \ldots, X_n$.

b) Les variables aléatoires Z_{n-1} et X_n sont-elles indépendantes ?

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $E(Z_n)$ et $V(Z_n)$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la variable aléatoire $2^{n+1}Z_n$ suit la loi uniforme discrète sur $[\![0; 2^{n+1} - 1]\!]$.

4. Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable à densité dont on précisera la loi.

Exercice sans préparation 30

1. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n \ln x}{x^n - 1}\, dx$.

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n \ln x}{x^n - 1}\, dx$.
Étudier la nature (convergence ou divergence) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice avec préparation 31

1. Question de cours : Écrire une formule de Taylor à l'ordre p avec reste intégral, applicable à une fonction définie sur $[0;1]$, de classe C^{p+1} sur cet intervalle ($p \in \mathbb{N}$).

2. Soit x un réel de l'intervalle $[0;1[$.

a) Justifier pour tout $t \in [0;x]$, l'encadrement : $0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant x$.

b) Démontrer l'égalité : $\ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

3. Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}$.

a) Montrer que $\mathbb{P}(X \in \mathbb{N}^*) = 1$.

b) Étudier l'existence des moments de X.

c) Montrer que pour tout $s \in [0;1]$, la variable aléatoire s^X admet une espérance, que l'on note $E(s^X)$, et vérifier que si $s \in]0;1[$, on a :

$$E(s^X) = \frac{s + (1-s)\ln(1-s)}{s}.$$

d) Pour tout $s \in [0;1]$, on pose $\phi(s) = E(s^X)$. Montrer que la fonction ϕ est continue sur le segment $[0;1]$. Est-elle dérivable sur cet intervalle ?

e) Calculer, lorsqu'elles existent, l'espérance et la variance de Xs^X.

Exercice sans préparation 31

1. Montrer que l'application $f : x \mapsto x^3 + x^2 + x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bijective.

2. Quelles sont les fonctions polynômes surjectives ?

3. Quelles sont les fonctions polynômes injectives ?

Exercice avec préparation 32

1. Question de cours : Formule des probabilités totales.
Soit p et q deux réels vérifiant $0 < p < 1$ et $p + 2q = 1$. On note Δ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$\Delta = \begin{pmatrix} p & q & q \\ q & p & q \\ q & q & p \end{pmatrix}$$

2. Justifier que Δ est une matrice diagonalisable.

3. Soit D la matrice diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à Δ dont les éléments diagonaux sont écrits dans l'ordre croissant. Que peut-on dire de la limite des coefficients de D^n lorsque n tend vers $+\infty$.

Un village possède trois restaurants R_1, R_2 et R_3. Un couple se rend dans un de ces trois restaurants chaque dimanche. A l'instant $n = 1$ (c'est-à-dire le premier dimanche) il choisit le restaurant R_1, puis tous les dimanches suivants (instants $n = 2$, $n = 3$, etc.) il choisit le même restaurant que le dimanche précédent avec la probabilité p ou change de restaurant avec la probabilité $2q$, chacun des deux autres restaurants étant choisis avec la même probabilité.

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

4. Calculer la probabilité que le couple déjeune dans le restaurant R_1, respectivement R_2, respectivement R_3, le n-ième dimanche ($n \geqslant 2$).

5. Soit T la variable aléatoire égale au rang du premier dimanche où le couple retourne au restaurant R_1, s'il y retourne, et 0 sinon.

a) Déterminer la loi de T.

b) Établir l'existence de l'espérance et de la variance de T et les calculer.

6. Écrire une procédure scilab permettant de calculer la fréquence de visite du restaurant R_1 par le couple en 52 dimanches.

Exercice sans préparation 32

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction réelle f_n par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x + 1 - \frac{e^x}{n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique nombre réel négatif x_n tel que $f_n(x_n) = 0$.

2. *a)* Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente.

b) Calculer la limite ℓ de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. On pose $y_n = x_n - \ell$. Déterminer un équivalent de y_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice avec préparation 33

1. Question de cours : Condition suffisante de diagonalisabilité d'une matrice.

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. ***a)*** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que le système $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ possède des solutions non nulles si et seulement si $(\lambda^2 - 1)(\lambda - 2) = 0$. Donner alors les solutions de ce système.

b) En déduire une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+3} = 2x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}$ et $Y_n = P^{-1}X_n$.

a) Quelle relation a-t-on entre X_{n+1}, X_n et A ?

b) En déduire l'expression de Y_n en fonction de n, D et Y_0.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur x_0, x_1 et x_2 pour que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente (respectivement, pour que la série $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ soit convergente).

4. On pose $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & -4 \\ 8 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ et pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $M(a, b) = \begin{pmatrix} 5b & a & -2b \\ 4b & 3b & a - 4b \\ -2a + 8b & a & 2a - 5b \end{pmatrix}$.

a) Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B. La réciproque est-elle vraie ?

b) En déduire que $M(a, b)$ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

c) Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquelles la suite $(M(a, b)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle, c'est-à-dire que chacun de ses neuf coefficients est le terme général d'une suite convergeant vers 0.

Exercice sans préparation 33

Soit $p \in]0; 1[$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ indépendantes et de même loi donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X_n = -1) = p \quad \text{et} \quad P(X_n = 1) = 1 - p$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$.

1. Calculer l'espérance $E(Z_n)$ de Z_n et $\lim_{n\to+\infty} E(Z_n)$.

2. Quelle est la loi de Z_n ?

3. Pour quelles valeurs de p les variables aléatoires Z_1 et Z_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice avec préparation 34

1. Question de cours : Soit f une fonction de classe C^2 définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles. Rappeler la définition d'un point critique et la condition suffisante d'extremum local en un point.

Soit X une variable aléatoire discrète finie définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ et on suppose que $\forall i \in [\![1; n]\!]$, $P(X = x_i) \neq 0$.

On définit l'entropie de X par : $H(X) = -\frac{1}{\ln 2} \sum\limits_{i=1}^{n} P(X = x_i) \ln\big(\mathbb{P}(X = x_i)\big)$.

2. Soient x_1, x_2, x_3, x_4 quatre réels distincts. On considère un jeu de 32 cartes dont on tire une carte au hasard. Soit X la variable aléatoire prenant les valeurs suivantes :

- × x_1 si la carte tirée est rouge (coeur ou carreau),
- × x_2 si la carte tirée est un pique,
- × x_3 si la carte tirée est le valet, la dame, le roi ou l'as de trèfle,
- × x_4 dans les autres cas.

On tire une carte notée C et un enfant décide de déterminer la valeur $X(C)$ en posant dans l'ordre les questions suivantes auxquelles il lui est répondu par "oui" ou par "non". LA carte C est-elle rouge ? La carte C est-elle un pique ? La carte C est-elle le valet, la dame, le roi ou l'as de trèfle ?
Soit N la variable aléatoire égale au nombre de questions posées (l'enfant cesse de poser des questions dès qu'il a obtenu une réponse "oui").

a) Calculer l'entropie $H(X)$ de X.

b) Déterminer la loi et l'espérance $E(N)$ de N. Comparer $\mathbb{E}(N)$ et $H(X)$.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles telle que : $f(x, y) = x \ln x + y \ln y + (1 - x - y) \ln(1 - x - y)$.

a) Préciser le domaine de définition de f. Dessiner ce domaine dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

b) Montrer que f ne possède qu'un seul point critique et qu'en ce point, f admet un extremum local.

c) Soit X une variable aléatoire réelle prenant les valeurs x_1, x_2 et x_3 avec les probabilités non nulles p_1, p_2 et p_3 respectivement.

Calculer $H(X)$ et montrer que $H(X)$ est maximale lorsque $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$.

Exercice sans préparation 34

On rappelle l'identité remarquable $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = 0$, $AB = BA$ et B inversible.
Montrer que $A + B$ est inversible.

Exercice avec préparation 35

1. Question de cours : Critères de convergence d'une intégrale sur un intervalle du type $[a;+\infty[$ $(a \in \mathbb{R})$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$. On pose alors $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$.

b) Montrer que f est monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soit g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telles que :

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{x+t}\,dt \quad \text{et} \quad h(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt.$$

a) Soit φ la fonction définie sur $[0;1]$ par : $\varphi(t) = \begin{cases} \frac{e^{-t}-1}{t} & \text{si } t \in]0;1] \\ -1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

Montrer que φ est continue sur le segment $[0;1]$.

b) En déduire que la fonction g est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Montrer de même que la fonction h est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $f(x) = \ln(x+1) - \ln x + g(x) + h(x)$. En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

4. À l'aide de l'encadrement $0 \leqslant \frac{1}{x} - \frac{1}{x+t} \leqslant \frac{t}{x^2}$ valable pour tout $x > 0$ et pour tout $t \geqslant 0$, montrer que $f(x)$ est équivalent à $\frac{1}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice sans préparation 35

Les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que : $Y(\Omega) = \{1;2\}, P(Y=1) = P(Y=2) = \frac{1}{2}$. On pose $Z = XY$.

1. Déterminer la loi de Z.

2. On admet que : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}$. Quelle est la probabilité que Z prenne une valeur paire ?

V. Annales 2012

Exercice avec préparation 36

1. Question de cours : Définition d'une série convergente. Pour quels réels $x > 0$ la série de terme général $(\ln x)^n$ est-elle convergente ? Calculer alors sa somme.

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note f_n la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$, à valeurs réelles, par : $f_n(x) = (\ln x)^n - x$.

a) Calculer les dérivées première et seconde $f_n^{'}$ et $f_n^{''}$ de la fonction f_n.

b) Montrer que la fonction f_1 ne s'annule jamais.

c) Justifier l'existence d'un réel $a \in]0, 1[$ vérifiant l'égalité : $f_2(a) = 0$.

3. On suppose désormais que n est un entier supérieur ou égal à 3, et on s'intéresse aux solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$. On donne : $\ln 2 \simeq 0,693$.

a) Dresser le tableau de variations de f_n sur $]1, +\infty[$ et montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux racines, notées u_n et v_n, sur $]1, +\infty[$. (u_n désigne la plus petite des deux racines).

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice sans préparation 36

Soit p un réel de $]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, de même loi de Bernoulli telle que :
$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_k = 1]) = p$ et $\mathbb{P}([X_k = 0]) = q$. Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on définit pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ la variable aléatoire $Y_k = X_k + X_{k+1}$.

1. *a)* Calculer pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $Cov(Y_k, Y_{k+1})$.

b) Montrer que $0 < Cov(Y_k, Y_{k+1}) \leqslant \frac{1}{4}$.

2. Calculer pour tout couple (k, l) tel que $1 \leqslant k < l \leqslant n$, $Cov(Y_k, Y_l)$.

3. On note ε un réel strictement positif fixé. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k - 2p\right| > \varepsilon\right]\right) = 0$.

Exercice avec préparation 37

1. Question de cours : Formule des probabilités totales.

2. Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels, on pose : $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^p dx$.

a) Calculer $I_{n,0}$.

b) Exprimer $I_{n,p+1}$ en fonction de $I_{n+1,p}$.

c) En déduire l'expression de $I_{n,p}$ en fonction de n et p.
On dispose de N urnes ($N \geqslant 1$) notées U_1, U_2, ..., U_N. Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, l'urne U_k contient k boules rouges et $N - k$ boules blanches.
On choisit au hasard une urne avec une probabilité proportionnelle au nombre de boules rouges qu'elle contient ; dans l'urne ainsi choisie, on procède à une suite de tirages d'une seule boule avec remise dans l'urne considérée.
on suppose que l'expérience précédente est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

3. Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, calculer la probabilité de choisir l'urne U_k.
Soit n un entier fixé de $\mathbb{N}^*$. On note E_n et R_{2n+1} les évènements suivants :
E_n ="au cours des $2n$ premiers tirages, on a obtenu n boules rouges et n boules blanches" ;
R_{2n+1} ="on a obtenu une boule rouge au $2n+1$-ième tirage".

4. *a)* exprimer $\mathbb{P}(E_n)$ sous forme d'une somme.

b) Donner une expression de la probabilité conditionnelle $P_{E_n}(R_{2n+1})$.

5. Montrer que $\lim\limits_{N\to+\infty} P_{E_n}(R_{2n+1}) = \frac{I_{n+2,n}}{I_{n+1,n}} = \frac{n+2}{2n+3}$.

Exercice sans préparation 37

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 2.

1. Donner une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Peut-on trouver une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices inversibles ?

3. Peut-on trouver une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices diagonalisables ?

Exercice avec préparation 38

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $[0, \theta]$ où θ est un paramètre réel strictement positif inconnu. Une densité f de X est donnée par $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & \text{si } x \in]0, \theta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Question de cours : Estimateur sans biais ; risque quadratique d'un estimateur.

2. Calculer l'espérance et la variance de X.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

3. ***a)*** Déterminer la fonction de répartition F de X.

b) Tracer dans un repère orthogonal l'allure de la courbe représentative de F.

4. ***a)*** Déterminer un estimateur T_n de θ, sans biais et de la forme $c\overline{X_n}$, où c est un réel que l'on précisera.

b) Quels sont les risques quadratiques respectifs associés aux estimateurs $\overline{X_n}$ et T_n de θ ?

5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M_n = max(X_1, X_2, ..., X_n)$.

a) Déterminer la fonction de répartition G_n et une densité g_n de M_n.

b) Calculer l'espérance de M_n. En déduire un estimateur sans biais W_n de θ.

c) Entre T_n et W_n, quel estimateur doit-on préférer pour estimer θ ?

6. Soit α un réel donné vérifiant $0 < \alpha < 1$.

a) Établir l'existence de deux réels a et b tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$, vérifiant $\mathbb{P}(M_n \leqslant a\theta) = \frac{\alpha}{2}$ et $\mathbb{P}(b\theta \leqslant M_n \leqslant \theta) = \frac{\alpha}{2}$.

b) En déduire un intervalle de confiance pour le paramètre θ au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Exercice sans préparation 38

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $A^3 + A^2 + A = 0$. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que A est inversible. Déterminer A^{-1} en fonction de A et I.

2. On suppose que A est symétrique. Montrer que $A = 0$.

Exercice avec préparation 39

1. Question de cours : Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires finies.
Une puce fait une suite de sauts de longueur 1 dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; chaque saut est effectué au hasard et avec équiprobabilité dans l'une des quatre directions portées par les axes $O\vec{i}$ et $O\vec{j}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note M_n la position de la puce après n sauts et X_n (resp Y_n) l'abscisse (resp. l'ordonnée) du point M_n.
On suppose qu'à l'instant initial 0, la puce est à l'origine O du repère ; c'est-à-dire que $M_0 = O$.
L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

2. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $T_n = X_n - X_{n-1}$. On suppose que les variables aléatoires $T_1, T_2, ..., T_n$ sont indépendantes.

a) Déterminer la loi de T_n. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(T_n)$ et la variance $\mathbb{V}(T_n)$ de T_n.

b) Exprimer pour tout ,$n \in \mathbb{N}^*$, X_n en fonction de T_1, T_2, ..., T_n.

c) Que vaut $\mathbb{E}(X_n)$?

d) Calculer $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de n.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Z_n la variable aléatoire égale à la distance OM_n.

a) Les variables X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?

b) Établir l'inégalité : $\mathbb{E}(Z_n) \leqslant \sqrt{n}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité que la puce soit revenue à l'origine O après n sauts.

a) Si n est impair, que vaut p_n ?

b) On suppose que n est pair et on pose : $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}^*$). On donne la formule : $\sum\limits_{k=0}^{m} \binom{m}{k}^2 = \binom{2m}{m}$.

Établir la relation : $p_{2m} = \binom{2m}{m}^2 \times \frac{1}{4^{2m}}$.

Exercice sans préparation 39

On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3}$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

2. *a)* Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$, on a : $\sum\limits_{k=n}^{n+m} \frac{1}{(k+1)^3} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+m+1} \frac{dx}{x^3} \leqslant \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{k^3}$.

b) En déduire un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice avec préparation 40

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.
Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Soit f l'endomorphisme de E défini par $f(i) = i - j + k$, $f(j) = i + 2j$ et $f(k) = j + k$.
On note Id l'application identité de E, $f^0 = Id$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = f \circ f^{k-1}$.

2. ***a)*** Montrer que $(2Id - f) \circ (f^2 - 2f + 2Id) = 0$ (endomorphisme nul de E)

b) L'endomorphisme f est-il un automorphisme ?

c) Déterminer les valeurs propres de f ainsi que les sous-espaces propres associés.

d) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. Soit P un sous-espace vectoriel de E défini par $P = \{(x, y, z) \in E | ax + by + cz = 0$ dans la base $\mathcal{B}\}$, où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
Soit U, V et W trois vecteurs de E dont les composantes dans la base $\mathcal{B}$ sont : $(-b, a, 0)$ pour U, $(0, c, -b)$ pour V et $(-c, 0, a)$ pour W.

a) Montrer que les sous-espace vectoriel engendré par (U, V, W) est de dimension 2.

b) En déduire tous les sous-espace vectoriels P qui vérifient $f(P) \subset P$.

Exercice sans préparation 40

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite, de fonction de répartition Φ.

1. Montrer pour tout réel $a > 1$ et pour tout réel $x > 0$, l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant x(1 - \Phi(ax)) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-ax^2/2}$$

2. En déduire que $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} \int_0^{+\infty} x(1 - \Phi(ax)) dx = 0$.

Exercice avec préparation 41

1. Question de cours : Convexité d'une fonction définie sur un intervalle $\mathbb{R}$.

2. ***a)*** Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt$ est convergente. On pose : $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt = \displaystyle\int_0^x \exp(t^2)dt$.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Étudier la parité et la convexité de f.

c) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

3. ***a)*** Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'existence d'un unique réel u_n vérifiant $f(u_n) = \frac{1}{n}$

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente.

c) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

4. ***a)*** Établir pour tout $u \in [0, \ln 2]$, l'encadrement : $1 + u \leqslant e^u \leqslant 1 + 2u$.

b) En interprétant le résultat de la question 3.c), en déduire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a : $\displaystyle\int_0^{u_n} (1+t^2)dt \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \int_0^{u_n} (1+2t^2)dt$.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n^3 = 0$ et en déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice sans préparation 41

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ (d'espérance $\frac{1}{p}$) et Y une variable aléatoire telle que :

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X \text{ est impair} \\ \frac{X}{2} & \text{si } X \text{ est pair} \end{cases}$$

Déterminer la loi de Y, puis calculer l'espérance de Y.

Exercice avec préparation 42

1. Question de cours : Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes ; lois marginales et lois conditionnelles.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Soit p un réel de $]0,1[$. On pose : $q = 1 - p$.
On suppose que :
- X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$;
- $Y(\Omega) = \mathbb{N}$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est une loi binomiale de paramètres n et p.

2. Déterminer la loi du couple (X, Y).

3. Montrer que Y suit une loi de Poisson de paramètre λp.

4. Déterminer la loi de $X - Y$.

5. ***a)*** Établir l'indépendance des variables aléatoires Y et $X - Y$.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.

Exercice sans préparation 42

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable ($n \geqslant 1$). On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I_n$. (matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
Montrer que $A^2 = I_n$.

Exercice avec préparation 43

1. Question de cours : Définition et propriétés des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ $(p \in \mathbb{N})$.
Soit α un réel non nul et soit f_1 et f_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = e^{\alpha x}$ et $f_2(x) = xe^{\alpha x}$.
On note E le sous-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ engendré par f_1 et f_2.
Soit Δ l'application qui, à toute fonction de E, associe sa fonction dérivée.

2. ***a)*** Montrer que (f_1, f_2) est une base de E.

b) Montrer que Δ est un endomorphisme de E. Donner la matrice A de Δ dans la base (f_1, f_2).

c) L'endomorphisme Δ est-il bijectif ? diagonalisable ?

3. Calculer A^{-1}. En déduire l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par : $f(x) = (2x-3)e^{\alpha x}$.

4. ***a)*** Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la matrice A^n.

b) En déduire la dérivée n-ième $f^{(n)}$ de la fonction f définie dans la question 3.

Exercice sans préparation 43

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose : $Y = (-1)^X$.

1. Déterminer $Y(\Omega)$. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ de Y.

2. Trouver la loi de Y.

Exercice avec préparation 44

1. Question de cours : Critères de convergence d'une intégrale impropre.

Soit f la fonction définie pour x réel par : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{-x}\sqrt{1+t}dt$.

2. Montrer que le domaine de définition de f est $D =]-\infty, 1[$.

3. Déterminer le sens de variation de f sur D.

4. ***a)*** Établir pour tout $x \in D$, l'encadrement : $0 \leqslant \frac{1}{1-x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{1-x}$.

b) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)$.

5. ***a)*** Calculer $f(0)$.

b) Établir pour tout $x < 0$, une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.

c) En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

6. Tracer la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

Exercice sans préparation 44

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On considère n boules numérotées de 1 à n que l'on place au hasard dans n urnes, chaque urne pouvant recevoir de 0 à n boules.

1. Calculer la probabilité p_n que chaque urne reçoive exactement 1 boule.

2. Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente.

3. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

VI. Annales 2011

Exercice avec préparation 45
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}.$$

1. Question de cours : Rappeler la définition d'une densité de probabilité.

2. Vérifier que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ dont f est une densité de probabilité.

3. ***a)*** Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de X.

b) A-t-on, pour tout réel s, pour tout réel t tel que $t \geqslant s$,

$$P_{[X>s]}([X > t]) = \mathbb{P}([X > t - s])?$$

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel x, on pose :

$$H_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)(1 + te^{-n|t|})\ dt.$$

Montrer que H_n est une fonction de répartition.

5. Soit X_n une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de fonction de répartition H_n. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X.

Exercice sans préparation 45
Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $(a_1, a_2, \ \dots \ , a_n) \in \mathbb{R}^n - \{0, \ \dots \ , 0)\}$.

On considère la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On pose $B = X\ {}^tX$ et $A = {}^tX\ X$.
On désigne par u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B.

1. Expliciter la matrice B et la matrice A.

2. Quel est le rang de u ? Déterminer son noyau.

3. B est-elle diagonalisable ?

4. Calculer B^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice avec préparation 46

On admet la propriété ($\mathbb{P}$) suivante :
Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le nombre réel L, alors la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{1}{n}(u_0 + u_1 + \dots u_{n-1})$$

converge aussi vers L.
On se donne deux nombres réels α et β tels que $0 < \alpha < \beta$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \frac{1+\alpha u_n}{1+\beta u_n}$$

1. Question de cours : Convergence et divergence des suites réelles monotones.

2. Dans cette question seulement, on suppose $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.

  a) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = x\frac{1+x}{1+2x}$$

  b) Étudier la convergence de la suite (u_n).

  c) Écrire un programme en Pascal permettant le calcul de u_{10}.

3. Dans le cas général, prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n}$. Prouver que la suite $(v_{n+1} - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\beta - \alpha$.

5. En utilisant la propriété $\mathbb{P}$, déduire du résultat précédent un équivalent de u_n de la forme $\frac{1}{qn}$ lorsque n tend vers $+\infty$, où q est un réel strictement positif.

Exercice sans préparation 46

n souris (minimum 3) sont lâchées en direction de 3 cages, chaque cage pouvant contenir les n souris et chaque souris allant dans une cage au hasard.

1. Calculer la probabilité pour qu'une cage au moins reste vide.

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de cages restées vides. Calculer l'espérance de X.

Exercice avec préparation 47

1. Question de cours : Variable aléatoire à densité. Propriétés de sa fonction de répartition.

On considère une densité de probabilité f, nulle sur $\mathbb{R}_-$, continue sur $\mathbb{R}_+^*$, associée à une variable aléatoire X. On suppose que X est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et on note F la fonction de répartition de X.

2. Montrer que F possède une unique primitive s'annulant en 0. On note H_f cette fonction.
Montrer que H_f est de classe C^1.

3. Donner H_f dans les cas suivants :

a) $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = e^{-x}$ si $x > 0$.

b) $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ si $x > 0$.

c) $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = \frac{1}{2(1+x)^{3/2}}$ si $x > 0$.

Dans chacune des cas, étudier l'existence d'une direction asymptotique et d'une asymptote oblique pour la courbe représentative de H_f lorsque x tend vers $+\infty$.

4. On suppose que X admet une espérance l.

a) En intégrant par parties $\displaystyle\int_0^x tf(t)\, dt$, montrer que $H_f(x) \sim x$ au voisinage de $+\infty$.
En déduire que la courbe représentative de H_f admet une direction asymptotique en $+\infty$.

b) A-t-on toujours une asymptote ?

Exercice sans préparation 47

Soit E l'ensemble des matrices $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où (a, b) prend toute valeur de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel réel de dimension 2.
Calculer le produit $M_{a,b}M_{a',b'}$ pou $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$.
Vérifier que ce produit appartient à E.

2. Calculer $M_{a,b}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice avec préparation 48

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Soit $p \in]0;1[$ et $q = 1 - p$.

1. Question de cours : Indépendance de n variables aléatoires discrètes ($n \in \mathbb{N}^*$).

2. On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie. On suppose qu'à chaque lancer la probabilité d'obtenir "Pile" est égale à p. On notera "P" et "F" les évènements (Obtenir "Pile") et (Obtenir "Face").
On définit les variables aléatoires X_1 et X_2 de la façon suivante : X_1 vaut k si le premier "Pile" de rang impair s'obtient au rang $2k-1$ (entier qui représente le k-ième nombre impair de $\mathbb{N}^*$;
X_2 vaut k si le premier "Pile" de rang pair s'obtient au rang $2k$ (entier qui représente le k-ième nombre pair de $\mathbb{N}^*$.
Par exemple si l'on obtient "(F, P, F, F, F, P, P)" alors X_1 prend la valeur 4 et X_2 prend la valeur 1.
On posera $X_1 = 0$ (respectivement $X_2 = 0$) si "Pile" n'apparaît à aucun rang impair (respectivement à aucun rang pair).

a) Prouver que $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_2 = 0) = 0$.

b) Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 1)$ et $\mathbb{P}(X_2 = 1)$. Déterminer les lois de X_1 et de X_2. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

c) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y égale au minimum de X_1 et de X_2.

3. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.

a) Montrer que la variable aléatoire $Y = \left\lfloor \frac{X+1}{2} \right\rfloor$ suit une loi géométrique ($\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du nombre x).

b) Montrer que les variables aléatoires Y et $2Y - X$ sont indépendantes.

Exercice sans préparation 48

On note E_4 l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 4 et on considère l'application Δ qui à un polynôme P de E_4 associe le polynôme $Q = \Delta(P)$ défini par :

$$Q(x) = P(x+2) - P(x)$$

1. Vérifier que l'application Δ est un endomorphisme de E_4.
Expliciter la matrice de Δ dans la base canonique de E_4.

2. Déterminer le noyau de Δ. On pourra prouver que si $P \in \ker \Delta$, alors $P(x) - P(0)$ a une infinité de racines.

3. L'endomorphisme Δ est-il diagonalisable ?

4. Existe-t-il un polynôme Q appartenant à E_4 ayant un unique antécédent par Δ ?

Exercice avec préparation 49

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n. On note $M(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de terme général :

$$m_{i,j} = \begin{cases} i & \text{si } j = i+1 \\ n+1-j & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont la matrice dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ est égale à M.

1. Question de cours : Rappeler la définition d'un vecteur propre d'un endomorphisme.
Enoncer la propriété relative à une famille de vecteurs propres d'un endomorphisme, associés à des valeurs propres distinctes.

2. ***a)*** Calculer $u(X^k)$ pour $k \in [\![0; n]\!]$.

b) En déduire l'expression de $u(P)$ pour $P \in E$ en fonction notamment de P et de P'.

3. Pour $k \in [\![0; n]\!]$, on pose $P_k(X) = (X-1)^k(X+1)^{n-k}$.

a) Calculer $u(P_k)$.

b) En déduire que $P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n[X]$.

c) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? Préciser ses valeurs propres et les espaces propres associés.

4. Dans cette question, on suppose que $n = 3$.

a) Expliciter M et déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $P^{-1}MP = D$.

b) Déterminer les matrices commutant avec D.

c) Existe-t-il un endomorphisme v de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $v \circ v = u$?

Exercice sans préparation 49

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes et telles que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(Y = i) = \frac{1}{2^i}$$

1. Reconnaître la loi de X et de Y.

2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = X+Y$ et la loi de X conditionnellement à $(X+Y = k)$, k étant un entier supérieur ou égal à 2 fixé.

3. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X > Y)$.

4. Calculer $\mathbb{P}(X \geqslant 2Y)$ et $P_{[X\geqslant Y]}(X \geqslant 2Y)$.

Exercice avec préparation 50

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{n}$ (d'espérance n).
Pour tout x réel on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ soient :

$$Y_n = \lfloor X_n \rfloor \quad \text{et} \quad Z_n = X_n - \lfloor X_n \rfloor$$

1. Question de cours : Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

2. Déterminer la loi de Y_n et son espérance.

3. Déterminer $Z_n(\Omega)$ et montrer que,

$$\forall t \in [0;1] \ : \quad \mathbb{P}(Z_n \leqslant t) = \frac{1 - e^{\frac{-t}{n}}}{1 - e^{\frac{-1}{n}}}.$$

4. Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on précisera la loi.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et N_n la variable aléatoire définie par :

$$N_n = \text{Card}\left\{k \in [\![1;n]\!] \text{ tel que } X_k \leqslant \frac{k}{n}\right\}$$

où Card(A) désigne le nombre d'éléments de l'ensemble fini A.

a) Reconnaître la loi de N_n et donner son espérance et sa variance.

b) Montrer que la suite de variables aléatoires $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire N dont on précisera la loi.

Exercice sans préparation 50

Soit E l'ensemble des matrices $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où (a, b) prend toute valeur de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel de dimension 2.

2. Dans le cas où soit $a = b$, soit $a = -2b$, prouver que $M_{a,b}$ n'est pas inversible.
Dans le cas contraire, calculer son inverse et montrer qu'il appartient à E.

3. Calculer $M_{a,b}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice avec préparation 51

1. Question de cours : Estimateur, biais, risque quadratique.

Soient a, b et c trois réels strictement positifs et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 0 \text{ si } x < 0, \quad f(x) = c \text{ si } x \in [0; a[, \quad f(x) = \frac{b}{x^4} \text{ si } x \in [a; +\infty[.$$

2. Déterminer b et c en fonction de a pour que f soit une densité de probabilité continue sur $\mathbb{R}_+$.
On suppose que b et c sont ainsi définis dans la suite de l'exercice et X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de densité f.
Donner une allure de la représentation graphique de f.

3. Pour quelles valeurs $k \in \mathbb{N}^*$, X admet-elle un moment d'ordre k ?

4. Déterminer l'espérance et la variance de X si elles existent.

5. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On pose :

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

a) Montrer que (T_n) est un estimateur de a.

b) Construire à partir de (T_n) un estimateur (S_n) sans biais de a.

c) Quel est le risque quadratique de S_n ?

Exercice sans préparation 51

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - I$.

2. A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

VII. Annales 2010

Exercice avec préparation 52

Soit n un entier naturel non nul. Un jardinier plante n bulbes de tulipe(s) dans son jardin.
Chaque bulbe a une probabilité $p \in]0;1[$ de donner une fleur. Lorsqu'une tulipe fleurit une année, elle refleurit toutes les années suivantes. Par contre si un bulbe n'a pas donné de fleur une année, il a toujours une probabilité p de donner une fleur l'année suivante. On suppose de plus que les floraisons des différents bulbes sont indépendantes. On pose $q = 1 - p$.

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On appelle T la variable aléatoire correspondant au nombre d'années nécessaires pour que tous les bulbes fleurissent.

1. Question de cours : Loi géométrique, définition, propriétés.

2. Pour tout $h \in [\![1;n]\!]$, on définit la variable aléatoire T_h égale au nombre d'années nécessaires pour que le h-ième bulbe fleurisse.

   a) Déterminer la loi de T_h.

   b) Exprimer T en fonction de $T_1, T_2, \ldots, T_n$. En déduire la loi de T.

3. *a)* Calculer $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k N(q^k)^N$.

   b) Calculer $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sum\limits_{j=1}^{N} (q^k)^{j-1}$.

   c) En déduire $\mathbb{E}(T)$ sous forme d'une somme.

Exercice sans préparation 52

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.
Déterminer les endomorphismes f de E diagonalisables qui vérifient $\operatorname{Im} f \subset \ker f$.

Exercice avec préparation 53

1. Question de cours : Comparaison de fonctions au voisinage de l'infini.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles, telle que :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad g(x) = x\ln^2(x).$$

a) Montrer que g réalise une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]0;+\infty[$.
Soit h la bijection réciproque de la restriction de g à l'intervalle $]1;+\infty[$.

b) *a)* Montrer que :

$$\forall x > 0, \quad \ln h(x) + 2\ln(\ln h(x)) = \ln(x)$$

b) En déduire un équivalent simple de $h(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Soit X une variable aléatoire de densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2g(|x|)} & \text{si } |x| < \frac{1}{e} \text{ et } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

b) Montrer que X possède une espérance et la calculer.

c) X possède-t-elle une variance ?

Exercice sans préparation 53
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $f(e_1 + e_2 + e_3)$, $f(e_2$ et $f(-e_1 + e_3)$.

2. Montrer que M est semblable à la matrice $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. M est-elle diagonalisable ?

Exercice avec préparation 54
Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, avec $n \geqslant 2$ et $0 < p < 1$.

On définit sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ une variable aléatoire Y de la façon suivante :

× pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la réalisation de l'évènement $[X = k]$ entraîne celle de l'évènement $[Y = k]$;

× la loi conditionnelle de Y sachant $[X = 0]$ est la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$.

1. Question de cours : Le modèle binomial.

2. Déterminer la loi de probabilité de Y.

3. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ de Y.

4. ***a)*** Déterminer la loi de probabilité conditionnelle de Y sachant $[X \neq 0]$.

b) Calculer l'espérance, notée $\mathbb{E}(Y/X \neq 0)$, de la loi conditionnelle de Y sachant $[X \neq 0]$.

Exercice sans préparation 54
Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) et vérifiant $A^k = I_n$.
Que peut-on dire dans les cas suivants :

a) k est un entier naturel impair ?

b) k est un entier naturel pair non nul ?

Exercice avec préparation 55
Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. Question de cours : Espérance et variance d'une variable aléatoire discrète finie ; définition et interprétation.

2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On considère une variable aléatoire X (discrète ou possédant une densité) prenant toutes ses valeurs dans l'intervalle $[a; b]$ et ayant un moment d'ordre 2.

a) Montrer que pour tout réel λ, on a la relation $\mathbb{V}(X) \leqslant E\big([X-\lambda]^2\big)$.

b) En déduire que $\mathbb{V}(X) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$.

3. Dans la suite X est une variable aléatoire discrète ayant un moment d'ordre 2.

a) On suppose que X suite une loi uniforme sur $\{a; b\}$, c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(X=a) = \mathbb{P}(X=b) = \frac{1}{2}.$$

Montrer alors qu'il y a égalité dans l'inégalité précédente.

b) Etude d'une réciproque : on suppose que $\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{4}$.
Montrer que $X(\Omega) = \{a; b\}$, puis que X suit une loi uniforme sur $\{a; b\}$.

4. Que signifie le résultat précédent ? (on pourra s'appuyer sur l'interprétation de la variance).

Exercice sans préparation 55
Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes, suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose :

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 0 \\ 1 & Y(\omega) \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $P(\{w \in \Omega,\ M(\omega) \text{ inversible } \})$.

2. Déterminer $P(\{w \in \Omega,\ M(\omega) \text{ diagonalisable } \})$.

Exercice avec préparation 56
Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et p et q deux réels de $]0;1[$ tels que $p+q=1$. On considère deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur une espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
La loi du couple (X,Y) est donnée par :
pour tout (j,k) tels que $0 \leqslant j \leqslant n$ et $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\mathbb{P}([X=j]\cap[Y=k]) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } k=j,\ j\neq 0 \\ \frac{q^n}{n} & \text{si } j=0 \\ 0 & \text{si } k\neq j \text{ et } j\neq 0 \end{cases}$$

1. Question de cours : Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Lois marginales, lois conditionnelles.

2. ***a)*** Déterminer les lois marginales de X et Y respectivement.

b) Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

3. Soit j un entier tel que $0 \leqslant j \leqslant n$.

a) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X=j]$.

b) Calculer l'espérance conditionnelle, notée $\mathbb{E}(Y/X=j)$, de la loi conditionnelle de Y sachant $[X=j]$.

4. ***a)*** Montrer que, pour tout $q \in]0;1[$, on a :

$$\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) \neq \mathbb{P}([X=1]) \times \mathbb{P}([Y=1])$$

Conclure.

b) Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Montrer qu'il existe une valeur de q pour laquelle $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$.

c) Conclure.

Exercice sans préparation 56
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n} k \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

où α est un nombre réel,

1. Dans le cas où $\alpha = 2$.

2. Dans le cas où $\alpha \neq 2$.

Exercice avec préparation 57

1. Question de cours : Moment d'ordre r d'une variable aléatoire à densité ; définition, existence.

2. Montrer qu'il existe deux réels A et B, indépendants de x, tels que, pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

3. On pose :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x(x+1)} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où k est un paramètre réel.

a) Déterminer k pour que f soit une densité d'une variable aléatoire X.

b) X admet-elle une espérance ?

4. ***a)*** Déterminer la loi de $T = \lfloor X \rfloor$ où $\lfloor X \rfloor$ désigne la partie entière de X.

b) En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)$.

5. Déterminer la loi de $Z = \frac{1}{X}$.

6. ***a)*** Déterminer la loi de $Y = X - \lfloor X \rfloor$.

b) Montrer que, pour tout entier $r \geqslant 1$, Y admet un moment d'ordre r.

c) Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice sans préparation 57

Soit $n \geqslant 2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Calculer A^{-1}.

Exercice avec préparation 58

1. Question de cours : Définitions d'un estimateur, d'un estimateur sans biais d'un paramètre réel inconnu θ.

Soit Z une variable aléatoire discrète d'espérance $\mathbb{E}(Z) = \theta$ ($\theta \in \mathbb{R}^*$) et de variance $\mathbb{V}(Z) = 1$.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on dispose d'un n-échantillon $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que Z, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

On pose $\overline{Z_n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} Z_j$. On suppose que θ est inconnu.

2. ***a)*** La variable aléatoire $\overline{Z_n}$ est-elle un estimateur sans biais de θ ?

b) Quel est le risque quadratique de $\overline{Z_n}$ en θ ?

3. Soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ des réels non nuls et $Y_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j Z_j$.

a) Déterminer la condition que doivent vérifier les réels $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, pour que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^*$, on ait : $\mathbb{E}(Y_n) = \theta$?

On suppose que cette condition est vérifiée.

b) Calculer $\text{Cov}(\overline{Z_n}, Y_n)$ et $\mathbb{V}(\overline{Z_n})$, où Cov désigne la covariance et V la variance.
En déduire que $V(\overline{Z_n}) \leqslant \mathbb{V}(Y_n)$. Interprétation.

4. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des réels non nuls.
On définit la variable aléatoire U_n par : $U_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j Z_j$,
et on suppose que $\mathbb{E}(U_n) = \theta$ et $\mathbb{V}(U_n) = \frac{1}{n}$.
Montrer que $U_n = \overline{Z_n}$ avec une probabilité égale à 1.

Exercice sans préparation 58

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, à valeurs réelles, par :

$$f(x, y) = \frac{x^2 + xy + \sqrt{y}}{x\sqrt{y}}.$$

1. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

2. Déterminer les points critiques de f.

3. Quelle est la nature de ces points critiques ?

VIII. Annales 2009

Exercice avec préparation 59

On étudie la vente d'un certain type de produit sur internet sur trois sites A, B, C et on fait les constatations suivantes :

— si un client choisit le site A pour un achat, il choisit indifféremment A, B ou C pour l'achat suivant,

— si un client fait un achat auprès du site B, il fait l'achat suivant sur le même site B,

— si un client fait un achat sur le site C, il choisira pour l'achat suivant le site A avec une probabilité $1/12$, le site B avec une probabilité $7/12$ et le site C avec une probabilité $1/3$.

Au départ le client choisit au hasard l'un des trois sites.
On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par p_n, q_n et r_n les probabilités pour que, au n-ième achat, le client se fournisse respectivement auprès de A, B et C.

1. Question de cours : Enoncer la formule des probabilités totales.

2. Quelles sont les valeurs de p_1, q_1 et r_1 ?

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner une relation entre p_n, q_n et r_n.

4. Exprimer respectivement p_{n+1}, q_{n+1} et r_{n+1} en fonction des trois réels p_n, q_n et r_n.

5. Pour $n \geqslant 2$, exprimer p_n en fonction de r_n et r_{n-1}.

6. Prouver que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite récurrente linéaire. Donner l'expression de r_n, puis p_n et q_n en fonction de n.

7. Étudier la convergence des trois suites (r_n), (p_n) et (q_n).

Exercice sans préparation 59

Donner un exemple de matrice M non nulle telle que $(I, M, {}^tM)$ soit une famille liée.
Dans quel cas de telles matrices sont diagonalisables ?

Exercice avec préparation 60

1. Question de cours : Loi géométrique, espérance et variance.

2. Soit x un réel de $]0;1[$.

a) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$\int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$$

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt = 0$.

c) En déduire la convergence de la série de terme général $\frac{x^k}{k}$ ainsi que l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).$$

3. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ qui suit une loi géométrique de paramètre p $(0 < p < 1)$.
On pose $Y = \frac{1}{X}$.

a) Déterminer $Y(\Omega)$ et la loi de probabilité de Y.

b) Établir, pour tout entier m de $\mathbb{N}^*$, l'existence du moment d'ordre m, $\mathbb{E}(Y^m)$, de Y.

c) Calculer $\mathbb{E}(Y)$ en fonction de p.

Exercice sans préparation 60

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Existe-t-il $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_3$?

2. Existe-t-il $C \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telle que $CA = I_2$?

Exercice avec préparation 61
On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 3,\ u_1 = \frac{29}{9} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 9 - \frac{26}{u_{n+1}} + \frac{24}{u_n u_{n+1}}.$$

1. Question de cours : Enoncer les résultats concernant les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

2. Écrire une fonction en Pascal permettant de calculer la valeur du terme u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ entré par l'utilisateur.

3. Montrer qu'il existe une unique suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que :

$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+3} = 9a_{n+2} - 26a_{n+1} + 24a_n \end{cases}$$

4. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^n + 3^n + 4^n$.

5. Expliciter u_n en fonction de n, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice sans préparation 61
Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes et de lois géométriques de paramètres p_1 et p_2 respectivement ($p_i \in]0;1[$ pour $i = 1, 2$).
On pose $U = X_1 + X_2$ et $T = X_1 - X_2$.

a) On suppose $p_1 \neq p_2$. Les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?

b) On suppose $p_1 = p_2 = p$. Les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?

Exercice avec préparation 62

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On pose $N = A - I$ et $M = N^2 - N$ (où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).

Soient u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés aux matrices N et M.

1. Question de cours : Matrices semblables, définition et propriétés.

2. Étudier la diagonalisabilité de A.

3. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de I et de M.

4. On suppose dans cette question que le rang de u est égal à 2.

a) Montrer l'existence d'un vecteur x de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathcal{B} = (u^2(x), u(x), x)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

En déduire que N est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Exprimer la matrice de v dans la base $\mathcal{B}$ et en déduire que M et N sont semblables.

c) Conclure que A et A^{-1} sont aussi semblables.

Exercice sans préparation 62

Soit X une variable aléatoire que suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
On désigne l'espérance par E.

1. Établir l'existence de $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$.

2. Montrer que $E\left(\frac{1}{1+X}\right) \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$.

Exercice avec préparation 63
Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. Les proportions respectives de ces boules sont b pour les blanches, n pour les noires et r pour les rouges ($b+n+r=1$).
On effectue dans cette urne des tirages successifs indépendants avec remise. Les proportions de boules restent ainsi les mêmes au cours de l'expérience.
On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. Question de cours : Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Lois marginales.

2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note Z_k la variable aléatoire qui prend la valeur $+1$ si une boule blanche est tirée au k-ième tirag, -1 si une boule noire est tirée au k-ième tirage et 0 si une boule rouge est tirée au k-ième tirage. On note $S_k = Z_1 + \cdots + Z_k$.

   a) Trouver la loi de probabilité de S_1. Calculer son espérance et sa variance. En déduire l'espérance et la variance de S_k.

   b) Pour tout réel t strictement positif et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on pose $g_k(t) = E\left(t^{S_k}\right)$.
   Expliciter $g_k(t)$ en fonction de t et de k.

   c) Montrer que $g_k'(1) = \mathbb{E}(S_k)$ et retrouver le résultat de la question (a).

3. ***a)*** On note X_1 la variable aléatoire représentant le numéro du tirage auquel une boule blanche sort pour la première fois. Trouver la loi de probabilité de X_1. Calculer son espérance et sa variance.

   b) Sachant que $X_1 = k$, quelle est la probabilité de tirer une boule rouge à chacun des $k-1$ premiers tirages ?

   c) On note W la variable aléatoire représentant le nombre de boules rouges tirées avant l'obtention de la première boule blanche. Quelle est la loi conditionnelle de W sachant $X_1 = k$?

   d) En déduire la loi de W (sous forme d'une somme qu'on ne cherchera pas à calculer).

4. On note Y_1 la variable représentant le numéro du tirage auquel une boule noire sort pour la première fois.

   a) Trouver, pour tout couple d'entiers strictement positifs (k, l), la probabilité de l'évènement $[X_1 = k\ ,\ Y_1 = l]$ (on pourra distinguer selon que $k > l,\ k = l$ ou $k < l$).
   Les variables aléatoires X_1 et Y_1 sont-elles indépendantes ?

   b) On se place, pour cette question, dans le cas particulier où $r = 0$ (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de boule rouge). Calculer alors la covariance de X_1 et Y_1.

Exercice sans préparation 63
Soient $n \geqslant 2$ et $(x_1, x_2, \ \ldots\ , x_n) \in \mathbb{R}^n - \{(0, \ \ldots\ , 0)\}$.

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, puis $B = {}^tXX$ et $A = X^tX$.

1. Écrire la matrice B.

2. Déterminer les vecteurs propres et les sous-espaces propres de la matrice A.

IX. Annales 2008

Exercice avec préparation 64

1. Question de cours : Donner la formule de la variance d'une somme finie de variables aléatoires prenant un nombre fini de valeurs.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, à valeurs dans $\{-1;1\}$, définies sur une même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p = \mathbb{P}([X_n = 1])$, et on suppose que $p \in]0;1[$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$.

a) Déterminer les lois de Y_2 et de Y_3.

b) On pose, pour $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}([Y_n = 1]) = p_n$. Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n, puis la valeur de p_n pour tout $n \geqslant 1$.

c) Existe-t-il des valeurs de n pour lesquelles les variables Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes ?

3. On pose : $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Déterminer la loi de S_n, son espérance et sa variance.
(Indication : on pourra se ramener à des variables aléatoires X_i' $(1 \leqslant i \leqslant n)$ indépendantes suivant une loi de Bernoulli).

4. Écrire un programme en Pascal permettant de simuler la loi de S_n.

Exercice sans préparation 64

Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 \in]0;1[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$$

Déterminer deux réels a et b tels que : $u_n = 1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{1}{n^2}\epsilon\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \epsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Exercice avec préparation 65

1. Définition et propriétés de la loi de Bernoulli et de la loi binomiale.

Une urne contient $2n$ boules ($n \in \mathbb{N}^*$) de couleurs toutes différentes. La moitié d'entre elles sont marquées du chiffre zéro et les autres sont numérotées de 1 à n.
On extrait simultanément n boules de cette urne, obtenant ce qu'on appelle une poignée. On suppose que toutes les poignées sont équiprobables. Pour i entier compris entre 1 et n, on note X_i la variable aléatoire réelle qui prend la valeur 1 si la boule i se trouve dans la poignée et 0 sinon.

2. Déterminer la loi de probabilité de X_i.

3. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, calculer la covariance du couple (X_i, X_j).

4. On note S la variable aléatoire réelle prenant pour valeur la somme des numéros portés par les boules figurant dans la poignée.

a) Exprimer S en fonction de $X_1, X_2, \ \dots \ , X_n$.

b) En déduire l'espérance et la variance de S.

5. On désigne par Z la variable aléatoire réelle donnant le nombre de boules portant le numéro zéro au sein de la poignée. Donner la loi de probabilité de Z puis son espérance.

Exercice sans préparation 65

Soit f la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1.$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de f.

2. Déterminer les points critiques de f.

3. La fonction f a-t-elle des extrema locaux ?

Exercice avec préparation 66

1. Question de cours : Donner la définition d'un estimateur et définir la notion de risque quadratique.

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On sait que N est au moins égal à deux, mais on ne connaît pas sa valeur exacte et on cherche à l'estimer. Pour cela, on effectue n tirages avec remise ($n \in \mathbb{N}^*$) et on note Z_k le numéro de la boule obtenue au k-ième tirage ($1 \leqslant k \leqslant n$). On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} Z_k$.
Donner l'expression d'un estimateur sans biais de N, fonction de M_n et dont la suite des variances converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On note $S_n = \max(Z_1, Z_2, \ \dots\ , Z_n)$.

a) Déterminer la fonction de répartition de S_n.

b) Montrer que pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\{1, 2, \ \dots\ , N\}$, on a la relation :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}([Y \geqslant k]).$$

c) En déduire que : $\mathbb{E}(S_n) \geqslant N - \frac{N}{n+1}$.

d) En déduire que S_n est un estimateur de N, dont l'espérance converge vers N lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice sans préparation 66

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *a)* Trouver une relation entre A^2, A et I (matrice identité d'ordre 2).

b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

2. Calculer les valeurs propres possibles de A.

3. A est-elle diagonalisable ?

Exercice avec préparation 67
Dans cet exercice, on note C^0 l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Question de cours : Donner la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre d'un endomorphisme.

Soit Φ l'application définie sur C^0 qui, à toute fonction f de C^0, associe la fonction $g = \Phi(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^x f(t)\ dt.$$

2. Rappeler pourquoi, pour toute fonction f de C^0, $\Phi(f)$ est dérivable et expliciter sa fonction dérivée.

3. Vérifier que Φ est un endomorphisme de C^0.

4. Donner un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}$ et non dérivable sur $\mathbb{R}$.
L'application Φ est-elle surjective ? Injective ?

Soit λ un réel quelconque. On dit que λ est une valeur propre de Φ s'il existe une fonction f non nulle de C^0, telle que $\Phi(f) = \lambda f$. Une telle fonction est appelée fonction propre associée à la valeur propre λ.

5. Recherche des valeurs propres non nulles de Φ. On suppose, dans cette question, que Φ admet une valeur propre λ non nulle.

Soit f une fonction propre associée à λ.

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) En dérivant la fonction $x \to f(x)e^{-\frac{x}{\lambda}}$, montrer que f ne peut être que la fonction nulle.

c) Conclure alors que Φ n'admet aucune valeur propre.

6. Pour toute fonction f de C^0, on pose : $F_0 = \Phi(f)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_n = \Phi(F_{n-1})$.

a) Montrer que F_n est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ et préciser la valeur de ses dérivées successives en 0.

b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\ dt.$

Exercice sans préparation 67
X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et ayant la même loi de densité φ, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = ke^{-|x|}.$$

1. Déterminer la valeur du réel k.

2. Déterminer la fonction de répartition F de X.

3. Justifier l'existence de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ et les calculer.

Exercice avec préparation 68

Pour tout nombre réel a, on note $A(a)$ la matrice

$$A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1+a & 1 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. ***a)*** Question de cours : Rappeler la définition d'une matrice diagonalisable.

b) Montrer que si une matrice est diagonalisable, sa transposée est également diagonalisable.

2. ***a)*** Justifier le fait que pour tout a réel, la matrice $A(a)$ est diagonalisable.

b) montrer que a est valeur propre de $A(a)$ et déterminer le sous-espace propre associé.

c) Calculer $A(a)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A(a)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

d) Diagonaliser $A(a)$.

3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles vérifiant, pour tout n entier naturel,

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n + z_n \\ z_{n+1} = y_n + 2z_n \end{cases}$$

a) Si l'on pose pour tout n entier naturel, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, quelle relation a-t-on entre X_{n+1} et X_n ?

b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur x_0, y_0 et z_0 pour que les suites (x_n), (y_n) et (z_n) soient bornées. Que peut-on dire alors de ces trois suites ?

4. ***a)*** Montrer que si B et B' sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et qu'il existe $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = B$, alors il existe $C' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C'^2 = B'$.

b) Montrer que si B et C sont deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $C^2 = B$, alors $BC = CB$.

c) Si $a \in \mathbb{R}$, déterminer les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ commutant avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

d) Existe-t-il une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A(3)$?

Exercice sans préparation 68

1. Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$, vérifie les propriétés d'une fonction de répartition.

2. Déterminer la loi du maximum de deux variables aléatoires indépendantes définies sur une même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, et de même loi de fonction de répartition F.
Généraliser à n variables.

Exercice avec préparation 69

1. Question de cours : Écrire la formule de Taylor à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) avec reste intégral pour une fonction d'une variable réelle de classe C^{n+1} et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$, et F la primitive de f qui vérifie $F(0) = 0$.

2. Étudier les variations de F et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

3. *a)* Montrer que, pour tout x réel, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{-(xt)^2}\, dt$ existe.
On définit alors la fonction G par :

$$G(x) = \int_0^1 e^{-(xt)^2}\, dt.$$

b) Démontrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ G'(x) = \frac{xe^{-x^2} - F(x)}{x^2}.$$

En déduire les variations de G.

c) Montrer que G est continue en 0 et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$.

d) Vérifier que G est dérivable en 0 et que G' est continue sur $\mathbb{R}$.

4. *a)* Montrer que G vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ xG'(x) + G(x) = f(x).$$

b) On veut prouver que G est l'unique fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ xg'(x) + g(x) = f(x) \quad (E).$$

Soit G_1 une fonction réelle dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation (E). On pose $H = G - G_1$. Déterminer $H(x)$ pour $x > 0$ puis pour $x < 0$. conclure en utilisant la continuité de H en 0.

Exercice sans préparation 69

Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Soit a un réel strictement positif et X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0; 2a]$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ qui ont toutes la même loi que X. On pose :

$$M_n = \max(X_1, \ldots, X_n).$$

Déterminer la loi de M_n et calculer son espérance et sa variance.

b) En déduire que $U_n = \frac{n+1}{2n} M_n$ est un estimateur sans biais de $\mathbb{E}(X)$.
Est-il préférable à l'estimateur $V_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$?

X. Annales 2007

Exercice avec préparation 70
Question de cours : Définition d'un estimateur ; définitions du biais et du risque quadratique d'un estimateur.

On considère n $(n > 2)$ variables aléatoires réelles indépendantes X_1, ... , X_n de même loi de densité :

$$f_0(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{\theta^3} & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où θ est un paramètre strictement positif. On pose :

$$S = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{et} \quad T = \max(X_1, \cdots, X_n)$$

1. Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathbb{V}(S)$.

2. Calculer $\mathbb{P}(T \leqslant t)$. En déduire une densité de T puis $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$.

3. On suppose maintenant que θ est un paramètre inconnu qu'on se propose d'estimer.

   a) Montrer qu'il existe des constantes réelles a et b telles que $S' = aS$ et $T' = bT$ soient des estimateurs sans biais de θ Calculer $\mathbb{V}(S')$ et $\mathbb{V}(T')$

   b) Entre les deux estimateurs de S' et T' lequel doit-on préférer ?

Exercice sans préparation 70
Un agriculteur souhaite améliorer le rendement de son exploitation en utilisant de l'engrais. Une étude a montré que le rendement, en tonnes par hectare, pour la variété de blé cultivée est donné par :

$$f(B, N) = 120B - 8B^2 + 4BN - 2N^2$$

B désigne la, quantité de semences de blé utilisée, N la quantité d'engrais utilisée.

1. Déterminer les extrema de la fonction f ; donner leur nature.

2. Si on suppose de plus qu'une contrainte de budget impose $B + 2N = 23$ déterminer l'optimum de rendement.

Exercice avec préparation 71

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

On note pour tout endomorphisme u de E et pour tout $\in \mathbb{N}^*$, $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et : $u^r = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{r \text{ termes}}$.

On commence par considérer un endomorphisme non nul de E tel que pour tout $x \in E$ il existe $r(x) \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^{r(x)}(x) = 0$.

1. Donner deux conditions suffisantes de diagonalisabilité d'une matrice réelle (en toute généralité).

2. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que u^r soit l'application nulle et que u^{r-1} ne soit pas l'application nulle.

3. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme u ; est-il diagonalisable ?

4. On pose : $v = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{u^k}{k!}$.
Montrer que v est un isomorphisme de E sur E. Exprimer l'inverse de v en fonction de u

5. Donner une relation simple entre $\ker(u)$ et $\ker(v - \mathrm{Id})$.

6. Déterminer les valeurs propres de v.

Exercice sans préparation 71

Soient n et N des entiers non nuls.

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On effectue N tirages avec remise dans cette urne.

1. Soit F_i 1a, variable aléatoire égale au nombre de fois où le jeton i a été tiré.
Déterminer la loi de F_i.

On pose : $F = \sum_{i=1}^{n} F_i$.
Déterminer la loi de F, son espérance et sa variance.
Les variables aléatoires F_i sont-elles deux à deux indépendantes ?

2. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on note X_i la variable aléatoire égale à 0 si le numéro i n'a pas été tiré et égale a 1 s'il été tiré au moins une fois.

Déterminer la loi de X_i, son espérance et sa variance.
Pour tout $(i, j) \in [\![0, 1]\!]^2$, déterminer la probabilité : $\mathbb{P}_{[X_i=0]}(X_j = 0)$.
Les variables X_i, et X_j sont-elles indépendantes ?

Exercice avec préparation 72

On considère un type de composants électroniques, dont la durée de vie X, exprimée en heures, est une variable aléatoire de densité f telle que :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{c}{t^2} & \text{si } t \geqslant 10 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Rappeler les qualités d'une densité de probabilité : en déduire la valeur du réel c.

2. Déterminer les réels m pour lesquels $\mathbb{P}(X \leqslant m) = \mathbb{P}(X > m)$.

3. Quelle est la probabilité que. sur un lot de 5 composants du type précédent, 3 au moins fonctionnent durant au moins 15 heures ?
Deux machines A et B sont équipées de composants du type précédent. Plus précisément :
- $\times$ A contient deux composants et cesse de fonctionner dès que l'un de ces composants est défectueux,
- $\times$ B contient également deux composants mais un seul de ces composants suffit à la faire fonctionner

On note T_A, T_B les durées de fonctionnement de ces machines.

4. Déterminer une densité pour chacune des variables T_A et T_B.

5. Pour chacune des variables T_A et T_B indiquer si elle possède une espérance. et le cas échéant, la calculer.

Exercice sans préparation 72

1. Donner s'il en existe un exemple de trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ tels que deux quelconques d'entre eux soient linéairement indépendants.
Existe-t-il un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont ces trois vecteurs soient vecteurs propres ?

2. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{F}$ une famille de $n+1$ vecteurs propres de f s'il en existe.

a) $\mathcal{F}$ peut-elle être une famille libre ?

b) On suppose que toute sous-famille de n vecteurs de $\mathcal{F}$ est libre.
Démontrer que les $n+1$ valeurs propres associées respectivement aux $n+1$ vecteurs de $\mathcal{F}$ sont égales.
Que peut-on en conclure pour f ?

Exercice avec préparation 73
Question de cours. Rappeler la formule des probabilités totales.

On lance deux pièces truquées : La pièce 1 donne pile avec une probabilité p_1 et la pièce 2 donne pile avec une probabilité, p_2.
On effectue les lancers de la façon suivante : on choisit une pièce uniformément au hasard et on lance la pièce choisie. Si on obtient pile, on relance la même pièce et ainsi de suite jusqu'a ce que l'on obtienne face ; à ce moment on change de pièce - plus généralement, dès que l'on obtient face, on change de pièce. On suppose que p_1 et p_2 sont dans $]0,1[$

1. Quelle est la probabilité de lancer la pièce 1 au n-ième lancer ?

2. Quelle est la probabilité, notée r_n, d'obtenir pile au $n^{\text{ème}}$ lancer ?

3. Calculer :$L = \lim\limits_{n\to+\infty} r_n$.

4. Dans cette question on suppose $p_1 = 1/3$ et $p_2 = 1/6$.
écrire en langage Pascal l'expression d'une fonction permettant de calculer la valeur d'un rang n_0 à partir duquel :
$$|r_n - L| \leqslant 10^{-6}$$

Exercice sans préparation 73
Soit u et v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices respectives dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ sont notées A et B. On suppose que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. v peut-il être bijectif ? Déterminer $\operatorname{Im}(v)$.

2. Déterminer $\ker(u)$

3. Donner la forme des matrices A et B.

Exercice avec préparation 74
Soit $\alpha > 0$, $x_0 > 0$ et f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{\alpha}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1} \text{ si } x \geqslant x_0 \quad \text{et} \quad f(x) = 0 \text{ sinon}$$

1. a) Donner la définition d'une variable aléatoire à densité et vérifier que la fonction f est bien la densité de probabilité d'une. variable aléatoire réelle X.
Déterminer la fonction de répartition de X et donner une allure de son graphe.
On dit, que X suit la loi de Pareto de paramètres x_0 et α.

b) Pour quelles valeurs de α 1a variable X admet-elle une espérance et une variance ? Calculer l'espérance de X lorsqu'elle existe.

c) On suppose $\alpha > 1$ et on pose, pour tout $x > x_0$

$$M_X(x) = \frac{\displaystyle\int_x^{+\infty} tf(t)\,dt}{\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,dt}$$

Calculer $M_X(x)$

2. On se propose d'établir une réciproque de la propriété précédente. Soit $x_0 > 0$ et Y une variable aléatoire à valeurs dans $[x_0, +\infty[$ de densité h continue, à valeurs strictement positives, admettant une espérance et telle qu'il existe un réel $k > 1$ vérifiant :

$$\forall x > x_0, \quad M_Y(x) = \frac{\displaystyle\int_x^{+\infty} th(t)\,dt}{\displaystyle\int_x^{+\infty} h(t)\,dt} = kx$$

a) On pose, pour tout $x > x_0$

$$G(x) = \int_x^{+\infty} h(t)\,dt$$

Montrer que

$$G(x) = \frac{1-k}{k} xG'(x)$$

b) En calculant, pour tout $x > x_0$, la dérivée de la fonction $x \to x^{\frac{k}{k-1}} G(x)$, déterminer la valeur de $G(x)$, puis la fonction de répartition de Y.
Quelle loi retrouve-t-on ?

Exercice sans préparation 74
Soient X et Y deux variables aléatoires binomiales de paramètres $(n, 1/2)$ indépendantes.
Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice avec préparation 75

1. Rappeler la définition d'une famille génératrice et d'une famille libre.

Dans l'espace vectoriel $C^O(\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère les trois fonctions :

$$f_1 : x \to 1 \quad f_2 : x \to x \quad \text{et} \quad f_0 : x \to \begin{cases} x\ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Soit E le sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R})$ engendré par (f_1, f_2, f_3)

2. Prouver que la famille (f_1, f_2, f_3) est une base de E.

3. À toute fonction f de E on associe la fonction $\Phi(f)$ définie par $\Phi(f) = (xf)'$, dérivée de la fonction $x \to x\ f(x)$

Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme de E dont on donnera la matrice M dans la base (f_1, f_2, f_3)

a) Montrer que M est une matrice inversible et déterminer son inverse (éviter le plus possible les calculs).

b) Résoudre dans E l'équation :

$$\Phi(f) = a + bx + x\ln|x|$$

Déterminer en particulier une primitive de $g : x \to x\ln|x|$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice sans préparation 75

Soit X et Y deux variables aléatoires binomiales de paramètres $(n, 1/2)$.
Calculer $\mathbb{P}([X = Y])$.

Exercice avec préparation 76
Question de cours : Définition d'une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ $(a < b\ )$
Donner une densité, la fonction de répartition d'une telle loi.
Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $Y = \min(X, 1 - X)$ et $Z = (X, 1 - X)$.

1. Expliciter la fonction de répartition de Y. En déduire une densité , puis $\mathbb{E}(Y)$ si elle existe
2. Expliciter la fonction de répartition de Z. En déduire une densité, puis $\mathbb{E}(Z)$ si elle existe.
3. Mêmes questions pour $R = Y/Z$
4. Écrire un programme en Pascal permettant d'obtenir une simulation des lois de X, Y et Z

Exercice sans préparation 76
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est diagonalisable
2. On admet que les valeurs propres de A sont 2 et -2.
   Calculer M^n pour tout n entier naturel.

Exercice avec préparation 77
Question de cours : énoncer la formule des probabilités totales et la formule de Bayes.

Une coccinelle se déplace sur un tétraèdre régulier PQRS (une pyramide) en longeant les arêtes. Elle est placée à l'instant $n = 0$ sur le sommet P. On suppose que, si. elle se, trouve sur un sommet à l'instant n, elle sera sur l'un des trois autres sommets à l'instant $n + 1$ de, façon équiprobable.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note p_n (respectivement $q_n,\ r_n$ et s_n) la probabilité que la coccinelle se trouve sur le sommet P (respectivement Q, R et S) à l'instant n.

1. On définit la matrice colonne X_n par

$$X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \\ s_n \end{pmatrix}$$

Déterminer une matrice, carrée $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, indépendante de n, telle que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

2. Montrer que cette matrice est diagonalisable.

3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; donner une expression de p_n, q_n, r_n et s_n en fonction de n.

4. On note T le temps nécessaire à la coccinelle pour visiter au moins 3 sommets distincts du tétraèdre. Déterminer la loi de T. Calculer son espérance.

5. On note U le temps nécessaire à la coccinelle pour visiter tous les sommets du tétraèdre. Montrer que pour tout entier ℓ supérieur on égal à 3

$$\mathbb{P}(U = \ell) = \frac{2^{\ell-1} - 2}{3^{\ell-1}}$$

6. Déterminer l'espérance de U si elle existe.

Exercice sans préparation 77
Un agriculteur souhaite améliorer le rendement de son exploitation en utilisant de l'engrais. Une étude a montré que le rendement, en tonnes par hectare, pour la variété de blé cultivée est donné par :

$$f(B, N) = 120B - 8B^2 + 4BN - 2N^2$$

B désigne la, quantité de semences de blé utilisée, N la quantité d'engrais utilisée.

1. Déterminer les extrema de la fonction f ; donner leur nature.

2. Si on suppose de plus qu'une contrainte de budget impose $B + 2N = 23$ déterminer l'optimum de rendement.

Exercice avec préparation 78

Question de cours : Donner une condition nécessaire ci suffisante de diagonalisabilité d'une matrice.

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Justifiez que f est diagonalisable.

2. Montrer que -2 est valeur propre de f et déterminer la dimension du sous espace propre E_{-2} associé

3. Calculer $f(1,-1,-1,1)$. En déduire une autre valeur propre ainsi que le sous-espace propre associé.

4. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice M' de f est diagonale. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à la base $\mathcal{B}$. Calculer M'^2.

5. Calculer M^n pour tout entier naturel n.

6. On considère les suites $(u_n),(v_n),(w_n),(t_n)$ définies par : $u_0,\ v_0,\ w_0,\ t_0$ et

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}(-u_n - v_n - w_n + t_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(-u_n - v_n + w_n - t_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{4}(-u_n + v_n - w_n - t_n) \\ t_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n - v_n - w_n - t_n) \end{cases}$$

Calculer $u_n,\ v_n,\ w_n$ et t_n en fonction de $u_0,\ v_0,\ w_0,\ t_0$ et de n
Que dire de leurs limites respectives ?

Exercice sans préparation 78

Soient A, B, C, des événements de même probabilité p et tels que $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$

1. Prouver que $p \leqslant \dfrac{2}{3}$

2. p peut-il prendre la valeur $\dfrac{2}{3}$?

3. On suppose en outre que A, B et C sont indépendants deux à deux. Prouver l'inégalité :

$$p \leqslant \frac{1}{2}$$

4. p peut-il prendre la, valeur $\dfrac{1}{2}$?