K
Mathématiques

Colles - Semaine 7

Planche 1

On considère E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère f un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$.

A) Suite des noyaux itérés

1. Démontrer : $\forall i \in \mathbb{N}$, $\text{Ker}\left(f^i\right) \subset \text{Ker}\left(f^{i+1}\right)$.

2. Dans cette question, on suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\text{Ker}\left(f^r\right) = \text{Ker}\left(f^{r+1}\right)$$

Démontrer : $\forall i \in [\![r, +\infty[\![$, $\text{Ker}\left(f^i\right) = \text{Ker}\left(f^{i+1}\right)$.

3. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note : $d_i = \dim\left(\text{Ker}\left(f^i\right)\right)$.

a) Démontrer que la suite $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est monotone.

b) En procédant par l'absurde, démontrer qu'il existe $r \in [\![0, n]\!]$ tel que : $d_r = d_{r+1}$.

c) En déduire que la suite $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

B) Suite des images itérées

1. Démontrer : $\forall j \in \mathbb{N}$, $\text{Im}\left(f^{j+1}\right) \subset \text{Im}\left(f^j\right)$.

2. Dans cette question, on suppose qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\text{Im}\left(f^{s+1}\right) = \text{Im}\left(f^s\right)$$

Démontrer : $\forall j \in [\![s, +\infty[\![$, $\text{Im}\left(f^{j+1}\right) = \text{Im}\left(f^j\right)$.

3. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note : $m_j = \dim\left(\text{Im}\left(f^j\right)\right)$.

a) Démontrer que la suite $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est monotone.

b) Démontrer : $m_{r+1} = m_r$ (où r est l'entier défini en question ***A.3.d)***).

c) En déduire que la suite $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Planche 2

Exercice 1
Soit E un espace vectoriel. Une *involution* de $\mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u \circ u = \mathrm{id}_E$, où id_E désigne l'endomorphisme identité.

1. Soient a et b deux endomorphismes bijectifs de $\mathscr{L}(E)$ vérifiant :

$$a \circ b \circ a = b \quad \text{et} \quad b \circ a \circ b = a$$

Montrer que $a^2 = b^2$ et que a^2 est une involution.

2. Soient a et b deux involutions de $\mathscr{L}(E)$.

a) Montrer que $\mathrm{Im}(a \circ b - b \circ a) \subset \mathrm{Im}(a - b) \cap \mathrm{Im}(a + b)$.

b) Montrer que $\mathrm{Im}(a - b) \cap \mathrm{Im}(a + b) \subset \mathrm{Im}(a \circ b - b \circ a)$.

Exercice 2
Soient E, F, G trois espaces vectoriels, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. Montrer :

1. $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f) \iff \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$

2. $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g) \iff \mathrm{Ker}(g) + \mathrm{Im}(f) = F$

Planche 3

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et u un endomorphisme de E. Si F est un sous-espace vectoriel de E, on dit qu F est stable par u si : $\forall x \in F,\ u(x) \in F$. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on note u^k l'application $u \circ u \circ \cdots \circ u$ où u apparaît k fois.
Soient $n \geqslant 1$ un entier et p un projecteur. On suppose que u^n est l'application linéaire identité et que $\mathrm{Im}(p)$ est stable par u. On pose :

$$q \ = \ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}$$

1. Montrer que $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p)$ et que $p \circ q = q$.

2. Montrer : $q \circ u = u \circ q$.

3. Montrer : $q \circ p = p$.

4. Montrer que q est un projecteur.

5. Montrer que $\mathrm{Ker}(q)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Im}(p)$ stable par u.