EDHEC 2005

Exercice 1

On note $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on rappelle que la famille (J_1, J_2, J_3, J_4) est une base de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit f l'application qui, à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, associe $f(M) = M + (a+b)I$ où I désigne la matrice (
1 0
0 1 .

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

2. ***a)*** Exprimer $f(J_1)$, $f(J_2)$, $f(J_3)$, et $f(J_4)$ comme combinaisons linéaires de J_1, J_2, J_3 et J_4.

b) Vérifier que la matrice A de f dans la base (J_1, J_2, J_3, J_4) est $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Justifier que f est diagonalisable.

3. ***a)*** Montrer que $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I)$ est une base de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Écrire la matrice D de f dans cette base.

c) En déduire l'existence d'une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$.

4. ***a)*** Déterminer la matrice P^{-1}.

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

c) En déduire explicitement la matrice A^n.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x\, e^{x(y^2+1)}$.

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

2. ***a)*** Déterminer les dérivées partielles premières de f.

b) En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A = (-1, 0)$.

3. ***a)*** Déterminer les dérivées partielles secondes de f.

b) Montrer qu'effectivement, f présente un extremum local en A. En préciser la nature et la valeur.

4. ***a)*** Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \geqslant x\, e^x$.

b) En étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\, e^x$, conclure que l'extremum trouvé à la question 2b) est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif.

1. On considère la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \begin{cases} a(1-t)^{a-1} & \text{si} \quad t \in [0,1[\\ 0 & \text{si} \quad t \notin [0,1[\end{cases}$

a) Pour tout x de $[0,1[$, calculer $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.

b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$ est une intégrale convergente et donner sa valeur.

c) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.
On considère maintenant une variable aléatoire X admettant f comme densité et on note F sa fonction de répartition.

2. Expliciter $F(x)$ pour tout réel x.
On se propose de déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X)$et la variance $\mathbb{V}(X)$ de la variable aléatoire X. Pour ce faire, on pose $Y = -\ln(1-X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité. On note alors G sa fonction de répartition.

3. *a)* Pour tout réel x positif, exprimer $G(x)$ en fonction de x.

b) En déduire que Y suit la loi exponentielle de paramètre a.

4. *a)* Pour tout réel $\lambda > 0$, donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$.

b) En déduire que la variable aléatoire e^{-Y} possède une espérance et donner sa valeur en fonction de a.

c) Exprimer X en fonction de Y, puis en déduire que X possède une espérance dont on donnera l'expression en fonction de a.

d) Montrer que la variable aléatoire e^{-2Y} possède une espérance et que $\mathbb{E}\left(e^{-2Y}\right) = \dfrac{a}{a+2}$.
En déduire la variance de e^{-Y} puis la variance de X.

Problème

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O.
Au départ, le mobile est à l'origine.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.
On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. *a)* Pour tout k de $\mathbb{N}^\times$, exprimer l'évènement $(T = k)$ en fonction d'évènements mettant en jeu certaines des variables X_i.

b) Donner la loi de X_1.

c) En déduire $P([T=k])$ pour tout k de $\mathbb{N}^{\times}$, puis reconnaître la loi de T.

2. *a)* Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^{\times}$, utiliser le système complet d'évènements $(X_{n-1} = k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ pour montrer que : $P([X_n = 0]) = 1 - p$.

3. *a)* Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots n+1\}, \quad P([X_{n+1} = k]) = pP([X_n = k-1])$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad \forall k \in \{0, 1, 2 \ldots, n-1\}, \quad P([X_n = k]) = p^k (1-p)$.
En déduire également la valeur de $P([X_n = n])$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

c) Vérifier que $\sum\limits_{k=0}^{n} P([X_n = k]) = 1$.

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.
On rappelle que `random(3)` renvoie au hasard un entier de $\{0, 1, 2\}$.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
Program edhec2005 ;
Var k, n, u, X : integer ;
begin
     Readln(n) ;
     Randomize ;
     X : = 0;
     For k : = 1 to n do
     begin
          u : = random(3) ;
          if (u = 2) then X : =.........;
               else X : =.......;
          end ;
     Writeln (X) ;
end.
```

5. *a)* Montrer que : $\forall n \geqslant 2, \quad \sum\limits_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \dfrac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

b) En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{p(1-p^n)}{1-p}$.

6. *a)* Montrer, en utilisant la question 3a), que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad E(X_{n+1}2) = p(E(X_n2) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1)$.

b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = E(X_n2) + (2n-1)\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$.

Montrer que $u_{n+1} = pu_n + \dfrac{p(1+p)}{1-p}$.

c) En déduire l'expression de u_n, puis celle de $\mathbb{E}(X_n2)$ en fonction de p et n.

d) Montrer enfin que : $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{p}{(1-p)^2}\left(1 - (2n+1)\,p^n(1-p) - p^{2n+1}\right)$.