MATHEMATIQUES (options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L)

Les épreuves orales de mathématiques concernent les candidats admissibles dans les options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L. Sur chacune des 4 sessions de 4 jours, ces épreuves ont mobilisé 3 à 5 jurys par demi-journée.

1. Procédure d'interrogation

Le sujet proposé aux candidats comprend deux parties:

- un *exercice principal* préparé pendant 30 minutes et portant sur l'une des trois parties suivantes du programme: *algèbre, probabilités et analyse*. De plus, une *question de cours* en rapport avec le thème de l'exercice fait partie de l'exercice principal.
- un *exercice sans préparation* portant sur une partie différente de celle de l'exercice principal, permettant de tester en temps réel les qualités de réactivité des candidats.

Rappelons que dans tous les cas, chaque candidat est interrogé en probabilités, soit au titre de l'exercice principal (20 à 25 minutes), soit à celui de l'exercice sans préparation (5 à 10 minutes).

2. Résultats statistiques

Par option, les notes moyennes obtenues sont les suivantes:

- *option scientifique* (441 candidats): 11,32 (11,52 en 2011)
- *option économique* (173 candidats): 9,77 (10,42 en 2011);
- *option technologique* (17 candidats): 12,59 (11,92 en 2011);
- *option littéraire B/L* (14 candidats): 10,71 (10,53 en 2011).

3. Commentaires

A l'issue des épreuves orales de mathématiques, on peut tirer un certain nombre d'enseignement:

Option scientifique

Le niveau général est bon, comparable à celui du concours 2011 : les notes s'étendent entre 3 et 20 et l'écart-type de 3,72 révèle une discrimination relativement élevée entre les admissibles.
Il y a quelques candidats excellents dont les exposés très clairs, concis et exhaustifs s'appuient sur une argumentation pertinente qui leur permet de prouver les résultats attendus.
Il est manifeste que beaucoup de candidats se préparent sérieusement à cet oral de mathématiques : les prestations sont essentiellement orales et le tableau n'est utilisé que comme support de l'exposé.

Option économique

On assiste cette année à un décrochage du niveau des candidats de cette option par rapport à ceux de l'option scientifique. Cette rupture est confirmée par la baisse de la note moyenne qui passe de 10,42 à 9,77.
Les observations relevées l'an passé restent non seulement d'actualité mais tous les points négatifs se sont renforcés.
Les concepts fondamentaux sont peu maîtrisés et font parfois l'objet de graves confusions (fonction de répartition et densité, « dimension » d'une application linéaire), le cours n'est pas bien assimilé (méthode des rectangles, définition de la convergence d'une intégrale généralisée), les explications utilisent un langage mathématique très approximatif qui nuit à la rigueur de l'exposé, les techniques de calculs élémentaires font souvent défaut (limites de fonctions) et les confusions entre condition nécessaire et condition suffisante se sont accrues : on retrouve les lacunes non comblées héritées du secondaire.

La présence de quantificateurs dans un sujet revêt souvent pour les candidats, un caractère purement « décoratif » tant ils sont mal utilisés voire ignorés.
On note enfin dans l'attitude de nombre de candidats un degré de maturité assez faible qui se traduit par une certaine difficulté à se concentrer et à établir des liens entre les questions d'un exercice, et par une prise d'initiative très « timide ».

Option technologique

Les niveaux des candidats sont assez disparates, les notes s'étalant entre 6 et 20 avec un écart-type élevé de 4,09.

Option littéraire B/L

Les résultats sont encore plus contrastés que ceux des candidats de l'option technologique : sur les 14 candidats admissibles présents, la moyenne est de 10,71 et s'accompagne d'un écart-type très élevé de 4,53. Il est fort probable que le choix de l'épreuve à option de l'écrit (sciences sociales ou mathématiques) constitue l'explication majeure de cette dispersion des notes.

4. Remarques

Les remarques formulées dans le rapport du concours 2011 restent valables pour 2012.
Le niveau de connaissances en probabilités est plutôt bon en option scientifique et acceptable en option économique. Dans ces deux options, on observe des progrès substantiels en algèbre et un déclin des connaissances en analyse (les études de fonctions et les représentations graphiques restent préoccupantes). Enfin, les candidats « massacrent » allègrement l'alphabet grec, très employé dans les notations mathématiques, avec des confusions de lettres quasi-systématiques.

Le jury recommande aux futurs candidats d'éviter de réciter à l'oral des recettes qu'ils ne maîtrisent pas : même si elles peuvent parfois faire illusion dans un problème d'écrit où la part d'initiative personnelle est réduite, ces phrases ou ces formules apprises par cœur et qui tiennent lieu de « prêt-à penser », passent difficilement le filtre de l'épreuve orale.

Les sujets suivants, posés aux candidats des options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L, constituent un échantillon des sujets proposés lors des épreuves orales du concours 2012.

1. SUJETS DE L'OPTION SCIENTIFIQUE

Exercice principal S8

1. Question de cours : Définition et propriétés des fonctions indicatrices des parties d'un ensemble.

Pour toute partie $A \subseteq \mathbb{N}$, on note $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de A et $\overline{A}$ le complémentaire de A dans $\mathbb{N}$.

2.a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, la série de terme général $\dfrac{\mathbf{1}_A(k)x^k}{k!}$ est convergente.

On pose alors : $S_x(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_A(k)x^k}{k!}$.

b) On suppose que $A \subseteq B$. Comparer $S_x(A)$ et $S_x(B)$.

c) On suppose que $A \cap B = \emptyset$. Exprimer $S_x(A \cup B)$ en fonction de $S_x(A)$ et $S_x(B)$.

d) Calculer $S_x(\emptyset)$, $S_x(\mathbb{N})$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_x(\{p\})$.

3. On suppose désormais que $x \in]0, \ln 2[$.

a) Établir pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'inégalité stricte : $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} < \frac{x^m}{m!}$.

b) Soit A et B deux parties de $\mathbb{N}$ telles que $A \cap B = \emptyset$.
Montrer que si A n'est pas vide et si le plus petit élément m de $A \cup B$ appartient à A, alors :

$$S_x(B) < \frac{x^m}{m!} \leqslant S_x(A)$$

En déduire que si $S_x(A) = S_x(B)$, alors : $A = B = \emptyset$.

c) Montrer que l'application $A \mapsto S_x(A)$ est injective.

Exercice sans préparation S8

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi uniforme sur $[0, 1]$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $X_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} U_i^{1/n}$ et $Y_n = (\mathrm{e}X_n)^{\sqrt{n}}$.

Montrer que la suite de variables aléatoires $\big(\ln(Y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice principal S9

1. Question de cours : Sommes de Riemann.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient des boules numérotées de 1 à n ; on effectue dans cette urne des tirages aléatoires successifs d'une boule avec remise. On note $X_1, X_2, \ldots$, les numéros successifs obtenus et on suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On note Y le rang du premier tirage pour lequel le numéro de la boule tirée est supérieur ou égal à X_1, sous réserve qu'un tel numéro existe.

2. Pour tout entier $k \geqslant 2$, on pose : $B_k = [X_k < X_1]$.

a) En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $P[B_2 \cap B_3 \cap \ldots \cap B_k]$.

b) Montrer que $P\left(\bigcap_{k=2}^{+\infty} B_k\right) = 0$.

c) Que peut-on dire de l'ensemble des éléments ω de Ω pour lesquels $Y(\omega)$ existe ? On admet désormais que cet ensemble est confondu avec Ω.

3.a) Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$, on a : $P[Y = m+1] = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{n}\right)\left(\frac{i}{n}\right)^{m-1}$.

b) Montrer que Y admet une espérance $E(Y)$ donnée par : $E(Y) = 1 + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$.

4. On ne considère plus l'entier n fixé et on note désormais $Y^{(n)}$ la variable aléatoire notée précédemment Y.

a) Calculer pour tout entier $m \geqslant 1$, $\lim_{n \to +\infty} P[Y^{(n)} = m+1]$.

b) En déduire que la suite $(Y^{(n)})_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire discrète qui n'a pas d'espérance.

Exercice sans préparation S9

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $U = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que $a_1 \neq 0$ et $a_n \neq 0$.

On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$.

1. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Justifier que A est diagonalisable. Calculer les valeurs propres de A.

2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que A n'est pas nécessairement diagonalisable.

Exercice principal S12

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite de densité f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, et de fonction de répartition Φ.

2. Montrer que X admet des moments de tous ordres et établir pour tout entier naturel n, la formule :

$$E(X^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \dfrac{(2p)!}{2^p p!} & \text{si } n = 2p \text{ est pair } (p \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

3.a) Montrer que pour tout $a > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x)\Phi(ax)dx$ est convergente. On note alors pour tout $a > 0$: $F(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x)\Phi(ax)dx$.

b) Exprimer pour tout $a > 0$, $F(a)$ en fonction de a.

4. Soit a un réel strictement positif fixé. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2f(x)\Phi(ax)$.

a) Vérifier que g peut être considérée comme une densité de probabilité d'une variable aléatoire Y.

b) Calculer $E(Y^2)$ et exprimer la variance $V(Y)$ en fonction de a.

Exercice sans préparation S12

Soit $E(\langle , \rangle)$ un espace euclidien et soit f un endomorphisme symétrique de E. On suppose l'existence d'une constante réelle $\alpha \geqslant 0$ telle que $\forall x \in E, \| f(x) \| = \alpha \| x \|$.
Montrer que $f^2 = \alpha^2 \, \mathrm{id}_E$.

Exercice principal S16

1. Question de cours : Loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes, dans le cas où les deux variables sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ et dans le cas où elles possèdent une densité.

2. Soit Y et Z deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent respectivement la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ (d'espérance $1/\lambda$) et la loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$ (d'espérance $1/\mu$).

a) Donner une densité de $-Y$.

b) On pose $D = Z - Y$. Donner une densité de D.

c) Calculer $P(Y \leqslant Z)$.

Pour n entier supérieur ou égal à 2, soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, strictement positives et telles que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, X_k suit la loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$.

3. On pose : $U = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a) Identifier la loi de U.

b) Soit j un entier donné de $[\![1, n]\!]$. En utilisant la variable aléatoire $Z_j = \inf\limits_{i \in [\![1,n]\!], i \neq j} X_i$, calculer $P(U = X_j)$.

c) La variable aléatoire $X_j - U$ est-elle à densité ? discrète ?

4. On pose : $V = \sup(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$: $X'_j = -\dfrac{1}{\theta} \ln(1 - e^{-\theta X_j})$.

a) Montrer que les variables aléatoires $X'_1, X'_2, \ldots, X'_n$ sont indépendantes et suivent chacune la même loi que les variables aléatoires X_j.

b) En déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $P(V = X_i) = \dfrac{1}{n}$.

Exercice sans préparation S16

Soit $n \in \mathbb{N}$ et P_n le polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$ défini par $P_n(X) = X^n + 1$.
Pour quelles valeurs de n, P_n est-il divisible par $X^2 + 1$?

Exercice principal S20

1. Question de cours : Théorème de la limite centrée.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires centrées réduites définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, de même densité de probabilité, et admettant des moments jusqu'à l'ordre 4.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note m_4 le moment d'ordre 4 de X_n.

a) Montrer que $m_4 > 1$.

b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Y_n^* = \frac{1}{\sqrt{n(m_4-1)}}\sum_{k=1}^{n}(X_k^2 - 1)$.

Justifier la convergence en loi de la suite $(Y_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $U_n = \sqrt{\frac{n}{m_4-1}}\,\overline{X}_n^2$.

Calculer $E(U_n)$ et en déduire la convergence en probabilité vers 0 de la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Soit x et ε deux réels arbitraires avec $\varepsilon > 0$.

a) Établir l'encadrement : $P(Y_n^* \leqslant x) \leqslant P(Y_n^* - U_n \leqslant x) \leqslant P(Y_n^* \leqslant x+\varepsilon) + P(U_n \geqslant \varepsilon)$.

b) En déduire l'existence d'un entier N_ε tel que pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$, on a :

$$\Phi(x) - \varepsilon \leqslant P(Y_n^* - U_n \leqslant x) \leqslant \Phi(x+\varepsilon) + \varepsilon$$

c) Que peut-on en conclure pour la suite $(Y_n^* - U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left((X_k - \overline{X}_n)^2 - 1\right)$.

Déduire des résultats précédents, la limite en loi de la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice sans préparation S20

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$. Soit T l'application qui à toute fonction $f \in E$, associe la fonction $F = T(f)$ définie par : $F(0) = f(0)$ et $\forall x > 0, F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?
2. Déterminer les réels λ et les fonctions f vérifiant $T(f) = \lambda f$.

Exercice principal S23

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est *convexe* si et seulement si :

$$\forall \lambda \in [0,1], \quad \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle et on note $\langle\, ,\rangle$ son produit scalaire canonique.

1. Question de cours : Développement limité d'ordre 1 au point $a \in \mathbb{R}^n$ pour une fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.

2. Soit f_1 et f_2 deux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ convexes et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Les fonctions suivantes sont-elles convexes : $f_1 + f_2$, αf_1 , $\min(f_1, f_2)$ et $\max(f_1, f_2)$?

b) Lorsque $n = 1$ a-t-on $f_1 \circ f_2$ convexe ?

3. Soit f une fonction convexe et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.
Pour tout $(x,h) \in (\mathbb{R}^n)^2$, soit $g_{x,h}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g_{x,h}(t) = f(x+th)$.

a) Montrer que $g_{x,h}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $g_{x,h}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimer pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g'_{x,h}(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.

c) En déduire que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\langle \nabla f(x), y - x\rangle \leqslant f(y) - f(x)$, où $\nabla f(x)$ est le gradient de f en x.

d) Soit a un point critique de f. Montrer que f admet un minimum global au point a.

4. Dans cette question, soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n et soit f la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{1}{2}\langle Ax, x\rangle$.

a) Vérifier que f est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \nabla f(x) = Ax$.

b) En déduire que si f est convexe, alors toutes les valeurs propres de A sont positives.

Exercice sans préparation S23

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, vérifiant les conditions suivantes :

- $P(X = 0) = 0$;
- $P(X > 0) = \alpha > 0$;
- $P_{[X>0]}(X \leqslant x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-ax} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ avec $a > 0$;
- $P_{[X<0]}(-X \leqslant x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-bx} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ avec $b > 0$.

1. Déterminer la fonction de répartition de X.
2. La variable aléatoire X est-elle à densité ?
3. Établir l'existence de $E(X)$. Calculer $E(X)$.

Exercice principal S27

1. Question de cours : Ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.

2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ défini par : $P(X) = X^3 - X^2 - 1$.

a) Montrer que toutes les racines de P sont simples.

b) Montrer que P admet une racine réelle, notée b, et deux racines complexes conjuguées, notées z et $\bar{z}$.

c) Calculer le produit $bz\bar{z}$. Comparer b et $|z|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note S une partie de $[\![1, n]\!]$ qui possède la propriété suivante : si $p \in S$, alors $p+1$ et $p+2$ n'appartiennent pas à S ; on dit que S est une "partie spéciale" de $[\![1, n]\!]$. Par exemple, l'ensemble vide est une partie spéciale.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note t_n le nombre de parties spéciales de $[\![1, n]\!]$ et on pose $t_0 = 1$.

a) Calculer t_1 , t_2 et t_3.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $t_{n+3} = t_n + t_{n+2}$.

4. Soit V l'ensemble des suites réelles $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $(v_0, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+3} = v_n + v_{n+2}$.

a) Montrer que V est un espace vectoriel.

b) Déterminer la dimension de V ainsi qu'une base de V.

5) Soit M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & z & \bar{z} \\ b^2 & z^2 & \bar{z}^2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que la matrice M est inversible.

b) Quelles sont les suites géométriques de V ?

c) Soit α, β et γ des constantes complexes telles que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha b^n + \beta z^n + \gamma \bar{z}^n = 0$.
Montrer que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

d) En déduire qu'il existe une constante réelle A et une constante complexe B vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$: $t_n = Ab^n + Bz^n + \overline{B}\bar{z}^n$.

Exercice sans préparation S27

Soit X une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_*^+$.

1. On suppose que la variable aléatoire $X + \dfrac{1}{X}$ admet une espérance. Montrer que X admet une espérance.

2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice principal S28

Soit p un paramètre réel inconnu vérifiant $0 < p < 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi de Bernoulli d'espérance p.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$; on note $E(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X et exp la fonction exponentielle.

1. Question de cours : Rappeler comment l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet de définir à partir de $\overline{X}_n$, un intervalle de confiance de risque α $(0 < \alpha < 1)$ pour le paramètre p.

2. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(t) = -p\,t + \ln(1 - p + p\,e^t)$.

a) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée seconde vérifie : $\forall t \geqslant 0,\ f''(t) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

b) Montrer à l'aide d'une formule de Taylor que pour tout $t \geqslant 0$, on a : $f(t) \leqslant \dfrac{t^2}{8}$.

c) En déduire que pour tout $t \geqslant 0$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $E\big(\exp(t(X_k - p))\big) \leqslant \exp\left(\dfrac{t^2}{8}\right)$.

3.a) Montrer que si S est une variable aléatoire discrète finie à valeurs positives et a un réel strictement positif, on a : $P(S \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(S)}{a}$.

b) À l'aide des questions 2.c) et 3.a), établir pour tout couple $(t, \varepsilon) \in (\mathbb{R}^+)^2$, l'inégalité :

$$P(\overline{X}_n - p \geqslant \varepsilon) \leqslant \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{8n}\right)$$

c) Montrer que pour tout $\varepsilon \geqslant 0$, on a : $P(|\overline{X}_n - p| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\exp(-2n\varepsilon^2)$.

d) En déduire un intervalle de confiance de risque α pour le paramètre p et comparer sa longueur, lorsque α est proche de 0, à celle de l'intervalle de confiance demandé dans la question 1.

Exercice sans préparation S28

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$. On note $P = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$.

1. Exprimer P^{-1} en fonction de P.

2. Établir l'inégalité : $\left|\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} p_{i,j}\right| \leqslant n$.

Exercice principal S33

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs.
Rappeler la signification de la relation : $v_n = o(u_n)$.
Montrer que si $v_n = o(u_n)$ et si la série de terme général u_n est convergente, la série de terme général v_n l'est aussi et que l'on a : $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} v_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right)$.

2. Soit α un réel strictement positif.

a) Établir la relation : $\mathrm{e}^{-n^\alpha} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

b) En déduire l'existence d'un réel c_α et d'une variable aléatoire X_α à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P([X_\alpha = n]) = c_\alpha \,\mathrm{e}^{-n^\alpha}$$

c) On suppose que $\alpha = 1$.
Identifier la loi de X_1 et calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité conditionnelle $P_{[X_1 \geqslant n]}([X_1 \geqslant n+1])$.

3. On suppose dans cette question que $\alpha > 1$ et on lui associe X_α comme en 2.b).

a) Établir la relation : $\mathrm{e}^{-(n+1)^\alpha} = o\big(\mathrm{e}^{-n^\alpha} - \mathrm{e}^{-(n+1)^\alpha}\big)$.

b) À l'aide du résultat de la question 1, établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation : $P([X_\alpha \geqslant n+1]) = o\big(P([X_\alpha = n])\big)$.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_{[X_\alpha \geqslant n]}([X_\alpha \geqslant n+1]) = 0$.

4. On suppose dans cette question que $0 < \alpha < 1$ et on lui associe X_α comme en 2.b).

a) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{(n+1)^\alpha}\big(\mathrm{e}^{-n^\alpha} - \mathrm{e}^{-(n+1)^\alpha}\big)$.

b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_{[X_\alpha \geqslant n]}([X_\alpha \geqslant n+1])$.

Exercice sans préparation S33

Soit D la matrice définie par : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $M^3 - 2M = D$.

Exercice principal S34

1. Question de cours : Donner deux conditions suffisantes de diagonalisabilité d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Dans les deux cas, préciser les propriétés des sous-espaces propres.

Dans tout l'exercice, on associe à tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, la matrice-colonne $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On considère des réels a, b et c strictement positifs et la matrice $A = \begin{pmatrix} -b & b & a \\ b & -c & c \\ a & c & -a \end{pmatrix}$.

2. Montrer que l'application φ définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, à valeurs réelles, telle que $\varphi(u, v) = {}^tUAV$ est une forme bilinéaire symétrique.

3.a) Soit $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Déterminer les signes de $\varphi(u, u)$ et $\varphi(v, v)$ respectivement.
L'application φ est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

b) Montrer que A admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative.
(on ne cherchera pas à les calculer)

4. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x, y, z) = x\,e^y + y\,e^z + z\,e^x$.

a) Montrer qu'un point critique $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ de f vérifie les conditions : $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} = -1$, $\overline{x} < 0$, $\overline{y} < 0$ et $\overline{z} < 0$.
Donner un point critique de f.

b) Justifier l'existence du développement limité à l'ordre 2 de f en un point critique, et écrire ce développement.

c) La fonction f admet-elle un extremum local ?

Exercice sans préparation S34

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1.a) Montrer que pour tout entier $n > \lambda - 1$, on a : $P(X \geqslant n) \leqslant P(X = n) \times \dfrac{n+1}{n+1-\lambda}$.

b) En déduire que $P(X \geqslant n) \underset{n \to +\infty}{\sim} P(X = n)$.

2. Montrer que $P(X > n) = o\big(P(X = n)\big)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice principal S36

1. Question de cours : Continuité d'une fonction réelle d'une variable réelle.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\cos(u_n) = \dfrac{n-1}{n}$ et $u_n \in]0, \pi/2]$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

b) Déterminer une constante réelle C telle que $u_n \sim \dfrac{C}{\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et exp la fonction exponentielle.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right)\left(1 - \Phi(x)\right)$.

a) On pose pour tout $x > 0$: $\theta(x) = 1 - \Phi(x) - \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. Déterminer le signe de $\theta(x)$.

b) Calculer $f(0)$. Montrer que f est décroissante et bornée sur $\mathbb{R}^+$.

4.a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u_n}{x^2 + u_n^2}\,dx$ et calculer cette intégrale. En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u_n f(x)}{x^2 + u_n^2}\,dx$; on note I_n cette intégrale.

b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $K_n = \displaystyle\int_{\sqrt{u_n}}^{+\infty} \frac{u_n\big(f(x) - f(0)\big)}{x^2 + u_n^2}\,dx$.
Montrer que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et a pour limite 0.

c) En déduire la convergence et la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice sans préparation S36

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
1. Établir l'existence d'un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = 0$.
2. On suppose que la matrice A est inversible. Montrer que A^{-1} s'écrit comme un polynôme en A.

Exercice principal S39

1. Question de cours : Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et E_0 le sous-ensemble de E constitué des fonctions continues s'annulant en 0.
Soit $t \in]0,1[$ et $\varphi_t : E_0 \longrightarrow E_0$ définie par : $\forall f \in E_0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_t(f)(x) = f(x) - f(tx)$.

2.a) Montrer que E_0 est un sous-espace vectoriel de E et que φ_t est un endomorphisme de E_0.

b) Déterminer un sous-espace vectoriel supplémentaire de E_0 dans E.

c) Montrer que l'endomorphisme φ_t est injectif.

3. Soit g une fonction de E_0 telle que : $\exists K > 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |g(x) - g(y)| \leqslant K|x - y|$.

a) Soit $f \in E_0$ vérifiant $\varphi_t(f) = g$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g(t^k x) + f(t^n x)$.

En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g(t^k x)$.

b) Montrer que g admet un unique antécédent pour φ_t.

4. Trouver l'ensemble des fonctions $f \in E_0$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - 2f(tx) + f(t^2 x) = x$.

Exercice sans préparation S39

Les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que : $Y(\Omega) = \{1,2\}, P(Y = 1) = P(Y = 2) = \dfrac{1}{2}$. On pose : $Z = XY$.

1. Déterminer la loi de Z.

2. Quelle est la probabilité que Z prenne des valeurs paires ?

Exercice principal S40

1. Question de cours : Comparaison de séries à termes positifs.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5} \times u_n$.

2. Écrire une fonction Pascal ayant pour argument un entier n et renvoyant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}$.

a) Rappeler le développement limité à l'ordre deux au voisinage de 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$.

Montrer que $\ln v_n = (\alpha+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\dfrac{5}{2n}\right)$.

Pour quelle valeur α_0 du réel α la série de terme général $\ln v_n$ est-elle convergente ?

b) Expliciter $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln v_k$ sans signe $\sum$, et en déduire qu'il existe un réel strictement positif C tel que $u_n \sim \dfrac{C}{n^{\alpha_0}}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Qu'en déduit-on pour la série $\sum u_n$?

c) Justifier l'existence d'un réel strictement positif D (indépendant de n) tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k u_k \leqslant D \times \sqrt{n}$.

4.a) Établir pour tout entier naturel n, la relation : $2\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k u_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} k u_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k$.

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice sans préparation S40

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suit la loi uniforme sur le segment $[0,1]$.

Déterminer toutes les fonctions g continues et strictement monotones de $]0,1[$ sur $g(]0,1[)$ telles que la variable aléatoire réelle $Y = g(X)$ suive la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice principal S42

1. Question de cours : Définition de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire $\rho_{X,Y}$ de deux variables aléatoires discrètes X et Y, prenant chacune au moins deux valeurs avec une probabilité strictement positive. Indiquer dans quels cas $\rho_{X,Y}$ vaut 1 ou -1.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

2. Pour $r \in \mathbb{R}$, soit M_r la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $M_r = \begin{pmatrix} 1 & r & r & \cdots & r \\ r & 1 & r & \cdots & r \\ r & r & 1 & \cdots & r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r & r & r & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $(1-r)$ est une valeur propre de M_r et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

b) Trouver une matrice diagonale semblable à M_r.

c) Pour quelles valeurs de r, l'application $(x, y) \mapsto {}^tX M_r Y$ est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$? (X et Y désignent les matrices-colonnes dont les composantes sont celles des vecteurs x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$)

3. Soit $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$, n variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et possédant toutes une variance égale à 1. On pose : $Z = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Z_k$.

a) Calculer pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la variance $V(Z_1 + \alpha Z)$ et la covariance $\mathrm{Cov}(Z_1 + \alpha Z, Z_2 + \alpha Z)$.

b) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe un réel c_α tel que la matrice de variance-covariance du vecteur aléatoire $\big(c_\alpha(Z_1 + \alpha Z), \cdots, c_\alpha(Z_n + \alpha Z)\big)$ soit égale à une matrice M_r définie dans la question 2.

4. Déduire des résultats précédents que M_r est la matrice de variance-covariance d'un vecteur aléatoire discret *si et seulement si* on a : $\dfrac{1}{1-n} \leqslant r \leqslant 1$.

Exercice sans préparation S42

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k^\alpha}{n^2}\right)$.

1. Montrer que si $\alpha = 2$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente.
2. Montrer que si $0 \leqslant \alpha < 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

2. SUJETS DE L'OPTION ÉCONOMIQUE

Exercice principal E3

1. Question de cours : Définition d'une série convergente. Pour quels réels $x > 0$, la série de terme général $(\ln x)^n$ est-elle convergente ? Calculer alors sa somme.

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note f_n la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$, à valeurs réelles, par : $f_n(x) = (\ln x)^n - x$.

a) Calculer les dérivées première et seconde f_n' et f_n'' de la fonction f_n.

b) Montrer que la fonction f_1 ne s'annule jamais.

c) Justifier l'existence d'un réel $a \in]0,1[$ vérifiant l'égalité : $f_2(a) = 0$.

3. On suppose désormais que n est un entier supérieur ou égal à 3, et on s'intéresse aux solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ sur l'intervalle $]1,+\infty[$. On donne : $\ln 2 \simeq 0,693$.

a) Dresser le tableau de variations de f_n sur $]1,+\infty[$ et montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux racines, notées u_n et v_n, sur $]1,+\infty[$ (u_n désigne la plus petite de ces deux racines).

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice sans préparation E3

Soit p un réel de $]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi de Bernoulli telle que :
$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P([X_k = 1]) = p$ et $P([X_k = 0]) = q$. Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on définit pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ la variable aléatoire $Y_k = X_k + X_{k+1}$.

1.a) Calculer pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Cov}(Y_k, Y_{k+1})$.

b) Montrer que $0 < \mathrm{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

2. Calculer pour tout couple (k,l) tel que $1 \leqslant k < l \leqslant n$, $\mathrm{Cov}(Y_k, Y_l)$.

3. On note ε un réel strictement positif fixé. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left[\left|\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k - 2p\right| > \varepsilon\right]\right) = 0$.

Exercice principal E4

1. Question de cours : Formule des probabilités totales.

2. Pour tout couple (n,p) d'entiers naturels, on pose : $I_{n,p} = \int_0^1 x^n(1-x)^p dx$.

a) Calculer $I_{n,0}$.

b) Exprimer $I_{n,p+1}$ en fonction de $I_{n+1,p}$.

c) En déduire l'expression de $I_{n,p}$ en fonction de n et p.

On dispose de N urnes ($N \geqslant 1$) notées $U_1, U_2, \dots, U_N$. Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, l'urne U_k contient k boules rouges et $N-k$ boules blanches.
On choisit au hasard une urne avec une probabilité proportionnelle au nombre de boules rouges qu'elle contient ; dans l'urne ainsi choisie, on procède à une suite de tirages d'une seule boule avec remise dans l'urne considérée.
On suppose que l'expérience précédente est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

3. Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, calculer la probabilité de choisir l'urne U_k.

Soit n un entier fixé de $\mathbb{N}^*$. On note E_n et R_{2n+1} les événements suivants :
E_n ="au cours des $2n$ premiers tirages, on a obtenu n boules rouges et n boules blanches" ;
R_{2n+1} ="on a obtenu une boule rouge au $(2n+1)$-ième tirage".

4.a) Exprimer $P(E_n)$ sous forme d'une somme.

b) Donner une expression de la probabilité conditionnelle $P_{E_n}(R_{2n+1})$.

5. Montrer que $\lim\limits_{N \to +\infty} P_{E_n}(R_{2n+1}) = \dfrac{I_{n+2,n}}{I_{n+1,n}} = \dfrac{n+2}{2n+3}$.

Exercice sans préparation E4

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 2.

1. Donner une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Peut-on trouver une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices inversibles ?
3. Peut-on trouver une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices diagonalisables ?

Exercice principal E6

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $[0, \theta]$ où θ est un paramètre réel strictement positif inconnu. Une densité f de X est donnée par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\theta^2} & \text{si } x \in]0, \theta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Question de cours : Estimateur sans biais ; risque quadratique d'un estimateur.

2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

3.a) Déterminer la fonction de répartition F de X.

b) Tracer dans un repère orthogonal, l'allure de la courbe représentative de F.

4.a) Déterminer un estimateur T_n de θ, sans biais et de la forme $c\overline{X}_n$, où c est un réel que l'on précisera.

b) Quels sont les risques quadratiques respectifs associés aux estimateurs $\overline{X}_n$ et T_n de θ ?

5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$.

a) Déterminer la fonction de répartition G_n et une densité g_n de M_n.

b) Calculer l'espérance de M_n. En déduire un estimateur sans biais W_n de θ.

c) Entre T_n et W_n, quel estimateur doit-on préférer pour estimer θ ?

6. Soit α un réel donné vérifiant $0 < \alpha < 1$.

a) Établir l'existence de deux réels a et b tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$, vérifiant $P(M_n \leqslant a\,\theta) = \alpha/2$ et $P(b\theta \leqslant M_n \leqslant \theta) = \alpha/2$.

b) En déduire un intervalle de confiance pour le paramètre θ au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Exercice sans préparation E6

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $A^3 + A^2 + A = 0$ (matrice nulle). On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que A est inversible. Déterminer A^{-1} en fonction de A et I.

2. On suppose que A est symétrique. Montrer que $A = 0$.

Exercice principal E7

1. Question de cours : Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires finies.

Une puce fait une suite de sauts de longueur 1 dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; chaque saut est effectué au hasard et avec équiprobabilité dans l'une des quatre directions portées par les axes $O\vec{\imath}$ et $O\vec{\jmath}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note M_n la position de la puce après n sauts et X_n (resp. Y_n) l'abscisse (resp. l'ordonnée) du point M_n.
On suppose qu'à l'instant initial 0, la puce est à l'origine O du repère, c'est-à-dire que $M_0 = O$.
L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose : $T_n = X_n - X_{n-1}$. On suppose que les variables aléatoires $T_1, T_2, \ldots, T_n$ sont indépendantes.

a) Déterminer la loi de T_n. Calculer l'espérance $E(T_n)$ et la variance $V(T_n)$ de T_n.

b) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n en fonction de $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

c) Que vaut $E(X_n)$?

d) Calculer $E(X_n^2)$ en fonction de n.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Z_n la variable aléatoire égale à la distance OM_n.

a) Les variables aléatoires X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?

b) Établir l'inégalité : $E(Z_n) \leqslant \sqrt{n}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité que la puce soit revenue à l'origine O après n sauts.

a) Si n est impair, que vaut p_n ?

b) On suppose que n est pair et on pose : $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}^*$). On donne la formule : $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}^2 = \binom{2m}{m}$.

Établir la relation : $p_{2m} = \displaystyle\binom{2m}{m}^2 \times \frac{1}{4^{2m}}$.

Exercice sans préparation E7

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

2.a) Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{(k+1)^3} \leqslant \int_n^{n+m+1} \frac{dx}{x^3} \leqslant \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{k^3}$.

b) En déduire un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice principal E8

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Soit f l'endomorphisme de E défini par : $f(i) = i - j + k$, $f(j) = i + 2j$ et $f(k) = j + k$.
On note Id l'application identité de E, $f^0 =$Id et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = f \circ f^{k-1}$.

2.a) Montrer que $(2\,\mathrm{Id} - f) \circ (f^2 - 2f + 2\,\mathrm{Id}) = 0$ (endomorphisme nul de E).

b) L'endomorphisme f est-il un automorphisme ?

c) Déterminer les valeurs propres de f ainsi que les sous-espaces propres associés.

d) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. Soit P un sous-espace vectoriel de E défini par : $P = \{(x, y, z) \in E / ax + by + cz = 0$ dans la base $\mathcal{B}\}$, où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
Soit U, V et W trois vecteurs de E dont les composantes dans la base $\mathcal{B}$ sont : $(-b, a, 0)$ pour U, $(0, c, -b)$ pour V et $(-c, 0, a)$ pour W.

a) Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par (U, V, W) est de dimension 2.

b) En déduire tous les sous-espaces vectoriels P de E qui vérifient $f(P) \subset P$.

Exercice sans préparation E8

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite, de fonction de répartition Φ.

1. Montrer pour tout réel $a > 1$ et pour tout réel $x > 0$, l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant x\big(1 - \Phi(ax)\big) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-ax^2/2}$$

2. En déduire que $\lim\limits_{a \to +\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} x\big(1 - \Phi(ax)\big)dx = 0$.

Exercice principal E10

1. Question de cours : Convexité d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

2.a) Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^x e^{t^2}\,dt$ est convergente. On pose : $f(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt = \int_0^x \exp(t^2)\,dt$.

b) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Étudier la parité et la convexité de f.

c) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

3.a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence d'un unique réel u_n vérifiant $f(u_n) = \dfrac{1}{n}$.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4.a) Établir pour tout $u \in [0, \ln 2]$, l'encadrement : $1 + u \leqslant e^u \leqslant 1 + 2u$.

b) En interprétant le résultat de la question 3.c), en déduire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a : $\int_0^{u_n} (1+t^2)\,dt \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \int_0^{u_n} (1+2t^2)\,dt$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,u_n^3 = 0$ et en déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice sans préparation E10

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ (d'espérance $\dfrac{1}{p}$) et Y une variable aléatoire telle que :

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X \text{ est impair} \\ \dfrac{X}{2} & \text{si } X \text{ est pair} \end{cases}$$

Déterminer la loi de Y, puis calculer l'espérance de Y.

Exercice principal E11

1. Question de cours : Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes ; lois marginales et lois conditionnelles.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit p un réel de $]0,1[$. On pose : $q = 1 - p$.
On suppose que :

- X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$;
- $Y(\Omega) = \mathbb{N}$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est une loi binomiale de paramètres n et p.

2. Déterminer la loi du couple (X, Y).

3. Montrer que Y suit une loi de Poisson de paramètre λp.

4. Déterminer la loi de $X - Y$.

5.a) Établir l'indépendance des variables aléatoires Y et $X - Y$.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.

Exercice sans préparation E11

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable ($n \geqslant 1$). On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I_n$ (matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
Montrer que $A^2 = I_n$.

Exercice principal E21

1. Question de cours : Définition et propriétés des fonctions de classe C^p ($p \in \mathbb{N}$).

Soit α un réel non nul et soit f_1 et f_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = e^{\alpha x}$ et $f_2(x) = x\, e^{\alpha x}$.
On note E le sous-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ engendré par f_1 et f_2.

Soit Δ l'application qui, à toute fonction de E, associe sa fonction dérivée.

2.a) Montrer que (f_1, f_2) est une base de E.

b) Montrer que Δ est un endomorphisme de E. Donner la matrice A de Δ dans la base (f_1, f_2).

c) L'endomorphisme Δ est-il bijectif ? diagonalisable ?

3. Calculer A^{-1}. En déduire l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par : $f(x) = (2x-3)\, e^{\alpha x}$.

4.a) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n.

b) En déduire la dérivée n-ième $f^{(n)}$ de la fonction f définie dans la question 3.

Exercice sans préparation E21

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose : $Y = (-1)^X$.

1. Déterminer $Y(\Omega)$. Calculer l'espérance $E(Y)$ de Y.

2. Trouver la loi de Y.

Exercice principal E22

1. Question de cours : Critères de convergence d'une intégrale impropre.

Soit f la fonction définie pour x réel par : $f(x) = \int_0^1 t^{-x}\sqrt{1+t}\,dt$.

2. Montrer que le domaine de définition de f est $D =]-\infty, 1[$.

3. Déterminer le sens de variation de f sur D.

4.a) Établir pour tout $x \in D$, l'encadrement : $0 \leqslant \dfrac{1}{1-x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{1-x}$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$.

5.a) Calculer $f(0)$.

b) Établir pour tout $x < 0$, une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.

c) En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

6. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

Exercice sans préparation E22

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On considère n boules numérotées de 1 à n que l'on place au hasard dans n urnes, chaque urne pouvant recevoir de 0 à n boules.

1. Calculer la probabilité p_n que chaque urne reçoive exactement 1 boule.

2. Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente.

3. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. SUJETS DE L'OPTION TECHNOLOGIQUE

Exercice principal T1

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

2. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-t^2/2} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

a) Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité T.
b) Déterminer une densité f de T.

3. On pose pour tout réel A strictement positif :

$$I(A) = \int_0^A t^2 e^{-t^2/2} dt \text{ et } J(A) = \int_0^A t^3 e^{-t^2/2} dt$$

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
a) À l'aide d'intégrations par parties, établir les deux relations suivantes :

$$I(A) = -Ae^{-A^2/2} + \sqrt{2\pi}(\Phi(A) - \frac{1}{2}) \text{ et } J(A) = -A^2 e^{-A^2/2} + 2\int_0^A f(t)dt$$

b) En déduire les valeurs respectives de $\lim_{A \to +\infty} I(A)$ et $\lim_{A \to +\infty} J(A)$.
c) Calculer l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T.

Exercice sans préparation T1

Soit a, b, c et d des réels tous non nuls. Déterminer toutes les matrices carrées A d'ordre 2 avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ qui vérifient la propriété : $A^2 = 2A$ (on exprimera les solutions en fonction du produit bc).

Exercice principal T2

1. Question de cours : Définition d'une densité de probabilité d'une variable aléatoire à densité.

Soit α un réel donné vérifiant $\alpha > 3$.

2. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha - 1}{x^{\alpha}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité d'une variable aléatoire X définie sur $[1, +\infty[$.

3.a) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

b) Étudier les variations de F.

c) Tracer la courbe représentative de F dans le plan rapporté à un repère orthonormé (pour le dessin, on prendra $\alpha = 4$).

4. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X.

Exercice sans préparation T2

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice principal T3

1. Question de cours : La loi binomiale.

On considère un ensemble de composants électroniques dont on souhaite étudier les caractéristiques de durée de vie. On suppose que la durée de vie de chaque composant est une variable aléatoire T de densité de probabilité f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} e^{-t/a} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$$

(le paramètre a est un réel strictement positif).

2. Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction f.

3. Quelle est la probabilité qu'un composant soit encore "en vie" à l'instant t ? (c'est-à-dire la probabilité de survie au-delà du temps t).

4. Calculer la durée de vie moyenne (espérance mathématique) de chaque composant.

5. À l'instant $t = 0$, on commence une observation sur n composants ($n \geqslant 1$) dont les durées de vie sont supposées indépendantes. Pour un instant fixé t_0, on note N_{t_0} la variable aléatoire égale au nombre de composants encore "en vie" à l'instant t_0.

a) Quelle est la loi de probabilité de N_{t_0} ?

b) Donner l'espérance mathématique et la variance de N_{t_0}.

Exercice sans préparation T3

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1/2 & 0 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. On note I la matrice unité d'ordre 3. Trouver une relation entre A, A^2 et I.

2. En déduire que A est une matrice inversible. Calculer l'inverse A^{-1} de A.

4. SUJETS DE L'OPTION B/L

Exercice principal B/L1

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2.a) Établir l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

b) À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{x}$, que l'on justifiera, montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \pi$.

3. Montrer que la fonction $g = \dfrac{1}{\pi} f$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

4. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de densité g. Soit G la fonction de répartition de X.

a) Établir l'existence de l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X. En déduire la valeur de $E(X)$.

b) Calculer pour tout x réel, $G(x)$. Tracer la courbe représentative de G dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

Exercice sans préparation B/L1

Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E qui vérifient $f \circ g = \mathrm{Id}$, où Id est l'endomorphisme identité de E.

Démontrer les trois propositions suivantes :

a) $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$.

b) $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$.

c) $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$.

Exercice principal B/L6

1. Question de cours : Densité d'une variable aléatoire réelle et relation avec la fonction de répartition.

2.a) Montrer que pour $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ est convergente. On définit alors la fonction f sur $\mathbb{R}_*^+$ par : $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

b) Justifier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_*^+$. Pour $x > 0$, calculer la dérivée $f'(x)$.

3.a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt$.

b) À l'aide d'une intégration par parties dont on justifiera la validité, montrer que pour $x > 0$:
$f(x) = -e^{-x}\ln x + \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt$.

c) Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^k f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^k f(x)$.

4.a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. Montrer que g peut être considérée comme la densité de probabilité d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$.

b) Montrer que X admet des moments de tous ordres.

c) Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le moment $E(X^k)$ d'ordre k.

Exercice sans préparation B/L6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit f et g deux endomorphismes de E.

1. Montrer que : $|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

2. On suppose que $f+g$ est bijectif et que $g \circ f = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = n$.