HEC 2011

Exercice avec préparation 1

1. Question de cours : Définition d'une série convergente. Pour quels réels $x > 0$ la série de terme général $(\ln x)^n$ est-elle convergente ? Calculer alors sa somme.

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note f_n la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$, à valeurs réelles, par : $f_n(x) = (\ln x)^n - x$.

a) Calculer les dérivées première et seconde $f_n^{'}$ et $f_n^{''}$ de la fonction f_n.

b) Montrer que la fonction f_1 ne s'annule jamais.

c) Justifier l'existence d'un réel $a \in]0, 1[$ vérifiant l'égalité : $f_2(a) = 0$.

3. On suppose désormais que n est un entier supérieur ou égal à 3, et on s'intéresse aux solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$. On donne : $\ln 2 \simeq 0,693$.

a) Dresser le tableau de variations de f_n sur $]1, +\infty[$ et montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux racines, notées u_n et v_n, sur $]1, +\infty[$. (u_n désigne la plus petite des deux racines).

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice sans préparation 1

Soit p un réel de $]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, de même loi de Bernoulli telle que :
$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_k = 1]) = p$ et $\mathbb{P}([X_k = 0]) = q$. Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on définit pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ la variable aléatoire $Y_k = X_k + X_{k+1}$.

1. a) Calculer pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $Cov(Y_k, Y_{k+1})$.

b) Montrer que $0 < Cov(Y_k, Y_{k+1}) \leqslant \frac{1}{4}$.

2. Calculer pour tout couple (k, l) tel que $1 \leqslant k < l \leqslant n$, $Cov(Y_k, Y_l)$.

3. On note ε un réel strictement positif fixé. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k - 2p\right| > \varepsilon\right]\right) = 0$.

Exercice avec préparation 2

1. Question de cours : Formule des probabilités totales.

2. Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels, on pose : $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^p dx$.

a) Calculer $I_{n,0}$.

b) Exprimer $I_{n,p+1}$ en fonction de $I_{n+1,p}$.

c) En déduire l'expression de $I_{n,p}$ en fonction de n et p.
On dispose de N urnes ($N \geqslant 1$) notées U_1, U_2, ..., U_N. Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, l'urne U_k contient k boules rouges et $N-k$ boules blanches.
On choisit au hasard une urne avec une probabilité proportionnelle au nombre de boules rouges qu'elle contient ; dans l'urne ainsi choisie, on procède à une suite de tirages d'une seule boule avec remise dans l'urne considérée.
on suppose que l'expérience précédente est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

3. Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, calculer la probabilité de choisir l'urne U_k.
Soit n un entier fixé de $\mathbb{N}^*$. On note E_n et R_{2n+1} les évènements suivants :
E_n ="au cours des $2n$ premiers tirages, on a obtenu n boules rouges et n boules blanches" ;
R_{2n+1} ="on a obtenu une boule rouge au $2n+1$-ième tirage".

4. *a)* exprimer $\mathbb{P}(E_n)$ sous forme d'une somme.

b) Donner une expression de la probabilité conditionnelle $P_{E_n}(R_{2n+1})$.

5. Montrer que $\lim\limits_{N \to +\infty} P_{E_n}(R_{2n+1}) = \frac{I_{n+2,n}}{I_{n+1,n}} = \frac{n+2}{2n+3}$.

Exercice sans préparation 2

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 2.

1. Donner une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Peut-on trouver une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices inversibles ?

3. Peut-on trouver une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices diagonalisables ?

Exercice avec préparation 3

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $[0, \theta]$ où θ est un paramètre réel strictement positif inconnu. Une densité f de X est donnée par $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & \text{si } x \in]0, \theta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Question de cours : Estimateur sans biais ; risque quadratique d'un estimateur.

2. Calculer l'espérance et la variance de X.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

3. ***a)*** Déterminer la fonction de répartition F de X.

b) Tracer dans un repère orthogonal l'allure de la courbe représentative de F.

4. ***a)*** Déterminer un estimateur T_n de θ, sans biais et de la forme $c\overline{X_n}$, où c est un réel que l'on précisera.

b) Quels sont les risques quadratiques respectifs associés aux estimateurs $\overline{X_n}$ et T_n de θ ?

5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M_n = max(X_1, X_2, ..., X_n)$.

a) Déterminer la fonction de répartition G_n et une densité g_n de M_n.

b) Calculer l'espérance de M_n. En déduire un estimateur sans biais W_n de θ.

c) Entre T_n et W_n, quel estimateur doit-on préférer pour estimer θ ?

6. Soit α un réel donné vérifiant $0 < \alpha < 1$.

a) Établir l'existence de deux réels a et b tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$, vérifiant $\mathbb{P}(M_n \leqslant a\theta) = \frac{\alpha}{2}$ et $\mathbb{P}(b\theta \leqslant M_n \leqslant \theta) = \frac{\alpha}{2}$.

b) En déduire un intervalle de confiance pour le paramètre θ au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Exercice sans préparation 3

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $A^3 + A^2 + A = 0$. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que A est inversible. Déterminer A^{-1} en fonction de A et I.

2. On suppose que A est symétrique. Montrer que $A = 0$.

Exercice avec préparation 4

1. Question de cours : Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires finies.
Une puce fait une suite de sauts de longueur 1 dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; chaque saut est effectué au hasard et avec équiprobabilité dans l'une des quatre directions portées par les axes $O\vec{i}$ et $O\vec{j}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note M_n la position de la puce après n sauts et X_n (resp Y_n) l'abscisse (resp. l'ordonnée) du point M_n.
On suppose qu'à l'instant initial 0, la puce est à l'origine O du repère ; c'est-à-dire que $M_0 = O$.
L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

2. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $T_n = X_n - X_{n-1}$. On suppose que les variables aléatoires $T_1, T_2, ..., T_n$ sont indépendantes.

a) Déterminer la loi de T_n. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(T_n)$ et la variance $\mathbb{V}(T_n)$ de T_n.

b) Exprimer pour tout ,$n \in \mathbb{N}^*$, X_n en fonction de T_1, T_2, ..., T_n.

c) Que vaut $\mathbb{E}(X_n)$?

d) Calculer $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de n.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Z_n la variable aléatoire égale à la distance OM_n.

a) Les variables X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?

b) Établir l'inégalité : $\mathbb{E}(Z_n) \leqslant \sqrt{n}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité que la puce soit revenue à l'origine O après n sauts.

a) Si n est impair, que vaut p_n ?

b) On suppose que n est pair et on pose : $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}^*$). On donne la formule : $\sum\limits_{k=0}^{m} \binom{m}{k}^2 = \binom{2m}{m}$.
Établir la relation : $p_{2m} = \binom{2m}{m}^2 \times \frac{1}{4^{2m}}$.

Exercice sans préparation 4

On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3}$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

2. ***a)*** Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$, on a : $\sum\limits_{k=n}^{n+m} \frac{1}{(k+1)^3} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+m+1} \frac{dx}{x^3} \leqslant \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{k^3}$.

b) En déduire un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice avec préparation 5

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.
Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Soit f l'endomorphisme de E défini par $f(i) = i - j + k$, $f(j) = i + 2j$ et $f(k) = j + k$.
On note Id l'application identité de E, $f^0 = Id$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = f \circ f^{k-1}$.

2. ***a)*** Montrer que $(2Id - f) \circ (f^2 - 2f + 2Id) = 0$ (endomorphisme nul de E)

b) L'endomorphisme f est-il un automorphisme ?

c) Déterminer les valeurs propres de f ainsi que les sous-espaces propres associés.

d) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. Soit P un sous-espace vectoriel de E défini par $P = \{(x, y, z) \in E | ax + by + cz = 0 \text{ dans la base } \mathcal{B}\}$, où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
Soit U, V et W trois vecteurs de E dont les composantes dans la base $\mathcal{B}$ sont : $(-b, a, 0)$ pour U, $(0, c, -b)$ pour V et $(-c, 0, a)$ pour W.

a) Montrer que les sous-espace vectoriel engendré par (U, V, W) est de dimension 2.

b) En déduire tous les sous-espace vectoriels P qui vérifient $f(P) \subset P$.

Exercice sans préparation 5

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite, de fonction de répartition Φ.

1. Montrer pour tout réel $a > 1$ et pour tout réel $x > 0$, l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant x(1 - \Phi(ax)) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-ax^2/2}$$

2. En déduire que $\lim_{a \to +\infty} \int_0^{+\infty} x(1 - \Phi(ax))dx = 0$.

Exercice avec préparation 6

1. Question de cours : Convexité d'une fonction définie sur un intervalle $\mathbb{R}$.

2. ***a)*** Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt$ est convergente. On pose : $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt = \int_0^x \exp(t^2)dt$.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Étudier la parité et la convexité de f.

c) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

3. ***a)*** Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'existence d'un unique réel u_n vérifiant $f(u_n) = \frac{1}{n}$

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4. ***a)*** Établir pour tout $u \in [0, \ln 2]$, l'encadrement : $1 + u \leqslant e^u \leqslant 1 + 2u$.

b) En interprétant le résultat de la question 3.c), en déduire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a : $\displaystyle\int_0^{u_n} (1 + t^2)dt \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \int_0^{u_n} (1 + 2t^2)dt$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n^3 = 0$ et en déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice sans préparation 6

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ (d'espérance $\frac{1}{p}$) et Y une variable aléatoire telle que :

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X \text{ est impair} \\ \frac{X}{2} & \text{si } X \text{ est pair} \end{cases}$$

Déterminer la loi de Y, puis calculer l'espérance de Y.

Exercice avec préparation 7

1. Question de cours : Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes ; lois marginales et lois conditionnelles.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Soit p un réel de $]0, 1[$. On pose : $q = 1 - p$.
On suppose que :
- X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$;
- $Y(\Omega) = \mathbb{N}$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est une loi binomiale de paramètres n et p.

2. Déterminer la loi du couple (X, Y).

3. Montrer que Y suit une loi de Poisson de paramètre λp.

4. Déterminer la loi de $X - Y$.

5. ***a)*** Établir l'indépendance des variables aléatoires Y et $X - Y$.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.

Exercice sans préparation 7

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable ($n \geqslant 1$). On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I_n$. (matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
Montrer que $A^2 = I_n$.

Exercice avec préparation 8

1. Question de cours : Définition et propriétés des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ $(p \in \mathbb{N})$.
Soit α un réel non nul et soit f_1 et f_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = e^{\alpha x}$ et $f_2(x) = xe^{\alpha x}$.
On note E le sous-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ engendré par f_1 et f_2.
Soit Δ l'application qui, à toute fonction de E, associe sa fonction dérivée.

2. ***a)*** Montrer que (f_1, f_2) est une base de E.

b) Montrer que Δ est un endomorphisme de E. Donner la matrice A de Δ dans la base (f_1, f_2).

c) L'endomorphisme Δ est-il bijectif ? diagonalisable ?

3. Calculer A^{-1}. En déduire l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par : $f(x) = (2x - 3)e^{\alpha x}$.

4. ***a)*** Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la matrice A^n.

b) En déduire la dérivée n-ième $f^{(n)}$ de la fonction f définie dans la question 3.

Exercice sans préparation 8

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose : $Y = (-1)^X$.

1. Déterminer $Y(\Omega)$. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ de Y.

2. Trouver la loi de Y.

Exercice avec préparation 9

1. Question de cours : Critères de convergence d'une intégrale impropre.

Soit f la fonction définie pour x réel par : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{-x}\sqrt{1+t}dt$.

2. Montrer que le domaine de définition de f est $D =]-\infty, 1[$.

3. Déterminer le sens de variation de f sur D.

4. ***a)*** Établir pour tout $x \in D$, l'encadrement : $0 \leqslant \frac{1}{1-x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{1-x}$.

b) En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

5. ***a)*** Calculer $f(0)$.

b) Établir pour tout $x < 0$, une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.

c) En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

6. Tracer la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

Exercice sans préparation 9

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On considère n boules numérotées de 1 à n que l'on place au hasard dans n urnes, chaque urne pouvant recevoir de 0 à n boules.

1. Calculer la probabilité p_n que chaque urne reçoive exactement 1 boule.

2. Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente.

3. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.