ECS2
Mathématiques

Colles - Semaine 1

Série 1

Question de cours

Développement limité en 0 à l'ordre 6 de $f(x) = \cos(x)\sin(3x)$.

Exercice 1

Montrer que $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ sont alignés si et seulement si $a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a} \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + n + 1} \end{cases}$$

1. ***a)*** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. En déduire que (u_n) est bien définie.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

2. ***a)*** Déterminer la limite de la suite (nu_n).

b) En déduire un équivalent de u_n.

3. ***1.*** Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3\left(u_n - \dfrac{1}{n}\right) = -1$.

2. En déduire que $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

Série 2

Question de cours

Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x(1+(\ln(x))^4)}\, dx$.

Exercice 1

Pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{C}[X]$, on pose $[P,Q] = \bar{P}Q - P\bar{Q}$.

1. Discuter le degré de $[P,Q]$ si $\deg(P) = p$ et $\deg(Q) = q$.

2. Montrer que pour tous polynômes P, Q et R :

$$[[P,Q],R] + [[Q,R],P] + [[R,P],Q] = 0$$

Exercice 2

On introduit la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^x - 2$.

On note (u_n) la suite telle que : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution strictement négative.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha \leqslant u_n \leqslant -1$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_{n+1} - \alpha \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}(u_n - \alpha)$.

4. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - \alpha \leqslant \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$$

5. Écrire un programme **Scilab** permettant de déterminer une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

Série 3

Question de cours

Déterminer l'expression explicite de la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{4}{5}u_n + 1 \end{cases}$

Exercice 1

Étudier la suite définie par $u_0 = 2017$ et pour tout $n \geqslant 0$:

$$u_{n+1} = 1805 + \sqrt{u_n}$$

Exercice 2

1. Montrer que pour tous a, b de $\mathbb{C}^*$, on a $\left|\dfrac{a}{|a|^2} - \dfrac{b}{|b|^2}\right| = \dfrac{|a-b|}{|a| \cdot |b|}$.

2. Montrer que : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, $|x| \cdot |y - z| \leqslant |y| \cdot |z - x| + |z| \cdot |x - y|$.

3. Montrer l'inégalité dite de Ptolémée :

$$\forall (x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4,\ |x - y| \cdot |z - w| \leqslant |x - z| \cdot |y - w| + |x - w| \cdot |y - z|$$