HEC 2010

Exercice avec préparation 1

Soit n un entier naturel non nul. Un jardinier plante n bulbes de tulipe(s) dans son jardin.
Chaque bulbe a une probabilité $p \in]0;1[$ de donner une fleur. Lorsqu'une tulipe fleurit une année, elle refleurit toutes les années suivantes. Par contre si un bulbe n'a pas donné de fleur une année, il a toujours une probabilité p de donner une fleur l'année suivante. On suppose de plus que les floraisons des différents bulbes sont indépendantes. On pose $q = 1 - p$.

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On appelle T la variable aléatoire correspondant au nombre d'années nécessaires pour que tous les bulbes fleurissent.

1. Question de cours : Loi géométrique, définition, propriétés.

2. Pour tout $h \in [\![1;n]\!]$, on définit la variable aléatoire T_h égale au nombre d'années nécessaires pour que le h-ième bulbe fleurisse.

a) Déterminer la loi de T_h.

b) Exprimer T en fonction de $T_1, T_2, \ \dots \ , T_n$. En déduire la loi de T.

3. ***a)*** Calculer $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k N (q^k)^N$.

b) Calculer $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sum\limits_{j=1}^{N} (q^k)^{j-1}$.

c) En déduire $\mathbb{E}(T)$ sous forme d'une somme.

Exercice sans préparation 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.
Déterminer les endomorphismes f de E diagonalisables qui vérifient $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$.

Exercice avec préparation 2

1. Question de cours : Comparaison de fonctions au voisinage de l'infini.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles, telle que :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad g(x) = x\ln^2(x).$$

a) Montrer que g réalise une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]0;+\infty[$.
Soit h la bijection réciproque de la restriction de g à l'intervalle $]1;+\infty[$.

b) *a)* Montrer que :

$$\forall x > 0, \quad \ln h(x) + 2\ln(\ln h(x)) = \ln(x)$$

b) En déduire un équivalent simple de $h(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Soit X une variable aléatoire de densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2g(|x|)} & \text{si } |x| < \frac{1}{e} \text{ et } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

b) Montrer que X possède une espérance et la calculer.

c) X possède-t-elle une variance ?

Exercice sans préparation 2

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $f(e_1 + e_2 + e_3)$, $f(e_2$ et $f(-e_1 + e_3)$.

2. Montrer que M est semblable à la matrice $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. M est-elle diagonalisable ?

Exercice avec préparation 3
Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, avec $n \geqslant 2$ et $0 < p < 1$.

On définit sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ une variable aléatoire Y de la façon suivante :

× pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la réalisation de l'évènement $[X = k]$ entraîne celle de l'évènement $[Y = k]$;

× la loi conditionnelle de Y sachant $[X = 0]$ est la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$.

1. Question de cours : Le modèle binomial.

2. Déterminer la loi de probabilité de Y.

3. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ de Y.

4. ***a)*** Déterminer la loi de probabilité conditionnelle de Y sachant $[X \neq 0]$.

b) Calculer l'espérance, notée $\mathbb{E}(Y \mid [X \neq 0])$, de la loi conditionnelle de Y sachant $[X \neq 0]$.

Exercice sans préparation 3
Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) et vérifiant $A^k = I_n$.
Que peut-on dire dans les cas suivants :

a) k est un entier naturel impair ?

b) k est un entier naturel pair non nul ?

Exercice avec préparation 4

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. Question de cours : Espérance et variance d'une variable aléatoire discrète finie ; définition et interprétation.

2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On considère une variable aléatoire X (discrète ou possédant une densité) prenant toutes ses valeurs dans l'intervalle $[a, b]$ et ayant un moment d'ordre 2.

   a) Montrer que pour tout réel λ, on a la relation $\mathbb{V}(X) \leqslant \mathbb{E}\Big((X-\lambda)^2 \Big)$.

   b) En déduire que $\mathbb{V}(X) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$.

3. Dans la suite X est une variable aléatoire discrète ayant un moment d'ordre 2.

   a) On suppose que X suite une loi uniforme sur $\{a, b\}$, c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}([X = a]) \;=\; \mathbb{P}([X = b]) \;=\; \frac{1}{2}$$

   Montrer alors qu'il y a égalité dans l'inégalité précédente.

   b) Etude d'une réciproque : on suppose que $\mathbb{V}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{4}$.
   Montrer que $X(\Omega) = \{a, b\}$, puis que X suit une loi uniforme sur $\{a, b\}$.

4. Que signifie le résultat précédent ? (on pourra s'appuyer sur l'interprétation de la variance)

Exercice sans préparation 4

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes, suivant la loi géométrique de paramètre $p \in \,]0; 1[$.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose :

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 0 \\ 1 & Y(\omega) \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\mathbb{P}(\{w \in \Omega \mid M(\omega) \text{ inversible } \})$.

2. Déterminer $\mathbb{P}(\{w \in \Omega \mid M(\omega) \text{ diagonalisable } \})$.

Exercice avec préparation 5
Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et p et q deux réels de $]0;1[$ tels que $p+q=1$. On considère deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur une espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
La loi du couple (X, Y) est donnée par :
pour tout (j,k) tels que $0 \leqslant j \leqslant n$ et $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\mathbb{P}([X=j]\cap[Y=k]) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } k=j,\ j\neq 0 \\ \frac{q^n}{n} & \text{si } j=0 \\ 0 & \text{si } k\neq j \text{ et } j\neq 0 \end{cases}$$

1. Question de cours : Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Lois marginales, lois conditionnelles.

2. ***a)*** Déterminer les lois marginales de X et Y respectivement.

b) Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

3. Soit j un entier tel que $0 \leqslant j \leqslant n$.

a) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X=j]$.

b) Calculer l'espérance conditionnelle, notée $\mathbb{E}(Y \mid [X=j])$, de la loi conditionnelle de Y sachant $[X=j]$.

4. ***a)*** Montrer que, pour tout $q \in]0;1[$, on a :

$$\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) \neq \mathbb{P}([X=1]) \times \mathbb{P}([Y=1])$$

Conclure.

b) Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Montrer qu'il existe une valeur de q pour laquelle $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$.

c) Conclure.

Exercice sans préparation 5
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n} k \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

où α est un nombre réel,

1. Dans le cas où $\alpha = 2$.

2. Dans le cas où $\alpha \neq 2$.

Exercice avec préparation 6

1. Question de cours : Moment d'ordre r d'une variable aléatoire à densité ; définition, existence.

2. Montrer qu'il existe deux réels A et B, indépendants de x, tels que, pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

3. On pose :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x(x+1)} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où k est un paramètre réel.

a) Déterminer k pour que f soit une densité d'une variable aléatoire X.

b) X admet-elle une espérance ?

4. ***a)*** Déterminer la loi de $T = \lfloor X \rfloor$ où $\lfloor X \rfloor$ désigne la partie entière de X.

b) En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n(n+2)}\right)$.

5. Déterminer la loi de $Z = \dfrac{1}{X}$.

6. ***a)*** Déterminer la loi de $Y = X - \lfloor X \rfloor$.

b) Montrer que, pour tout entier $r \geqslant 1$, Y admet un moment d'ordre r.

c) Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice sans préparation 6

Soit $n \geqslant 2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Calculer A^{-1}.

Exercice avec préparation 7

1. Question de cours : Définitions d'un estimateur, d'un estimateur sans biais d'un paramètre réel inconnu θ.

Soit Z une variable aléatoire discrète d'espérance $\mathbb{E}(Z) = \theta$ ($\theta \in \mathbb{R}^*$) et de variance $\mathbb{V}(Z) = 1$.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on dispose d'un n-échantillon $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que Z, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

On pose $\overline{Z_n} = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} Z_j$. On suppose que θ est inconnu.

2. *a)* La variable aléatoire $\overline{Z_n}$ est-elle un estimateur sans biais de θ ?

b) Quel est le risque quadratique de $\overline{Z_n}$ en θ ?

3. Soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ des réels non nuls et $Y_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j Z_j$.

a) Déterminer la condition que doivent vérifier les réels $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, pour que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^*$, on ait : $\mathbb{E}(Y_n) = \theta$?

On suppose que cette condition est vérifiée.

b) Calculer $\text{Cov}(\overline{Z_n}, Y_n)$ et $\mathbb{V}(\overline{Z_n})$, où Cov désigne la covariance et $\mathbb{V}$ la variance.
En déduire que $\mathbb{V}(\overline{Z_n}) \leqslant \mathbb{V}(Y_n)$. Interprétation.

4. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des réels non nuls.
On définit la variable aléatoire U_n par : $U_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j Z_j$,
et on suppose que $\mathbb{E}(U_n) = \theta$ et $\mathbb{V}(U_n) = \frac{1}{n}$.
Montrer que $U_n = \overline{Z_n}$ avec une probabilité égale à 1.

Exercice sans préparation 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, à valeurs réelles, par :

$$f(x, y) = \frac{x^2 + xy + \sqrt{y}}{x\sqrt{y}}.$$

1. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

2. Déterminer les points critiques de f.

3. Quelle est la nature de ces points critiques ?