HEC 2007

Exercice avec préparation 1
Question de cours : Définition d'un estimateur ; définitions du biais et du risque quadratique d'un estimateur.

On considère n $(n > 2)$ variables aléatoires réelles indépendantes X_1, ... , X_n de même loi de densité :

$$f_0(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{\theta^3} & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où θ est un paramètre strictement positif. On pose :

$$S = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{et} \quad T = \max(X_1, \cdots, X_n)$$

1. Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathbb{V}(S)$.

2. Calculer $\mathbb{P}(T \leqslant t)$. En déduire une densité de T puis $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$.

3. On suppose maintenant que θ est un paramètre inconnu qu'on se propose d'estimer.

   a) Montrer qu'il existe des constantes réelles a et b telles que $S' = aS$ et $T' = bT$ soient des estimateurs sans biais de θ Calculer $\mathbb{V}(S')$ et $\mathbb{V}(T')$

   b) Entre les deux estimateurs de S' et T' lequel doit-on préférer ?

Exercice sans préparation 1
Un agriculteur souhaite améliorer le rendement de son exploitation en utilisant de l'engrais. Une étude a montré que le rendement, en tonnes par hectare, pour la variété de blé cultivée est donné par :

$$f(B, N) = 120B - 8B^2 + 4BN - 2N^2$$

B désigne la, quantité de semences de blé utilisée, N la quantité d'engrais utilisée.

1. Déterminer les extrema de la fonction f ; donner leur nature.

2. Si on suppose de plus qu'une contrainte de budget impose $B + 2N = 23$ déterminer l'optimum de rendement.

Exercice avec préparation 2
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
On note pour tout endomorphisme u de E et pour tout $\in \mathbb{N}^*$, $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et : $u^r = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{r \text{ termes}}$.

On commence par considérer un endomorphisme non nul de E tel que pour tout $x \in E$ il existe $r(x) \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^{r(x)}(x) = 0$.

1. Donner deux conditions suffisantes de diagonalisabilité d'une matrice réelle (en toute généralité).

2. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que u^r soit l'application nulle et que u^{r-1} ne soit pas l'application nulle.

3. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme u ; est-il diagonalisable ?

4. On pose : $v = \sum\limits_{k=0}^{r-1} \frac{u^k}{k!}$.
Montrer que v est un isomorphisme de E sur E. Exprimer l'inverse de v en fonction de u

5. Donner une relation simple entre $\ker(u)$ et $\ker(v - \mathrm{Id})$.

6. Déterminer les valeurs propres de v.

Exercice sans préparation 2
Soient n et N des entiers non nuls.
Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On effectue N tirages avec remise dans cette urne.

1. Soit F_i 1a, variable aléatoire égale au nombre de fois où le jeton i a été tiré.
Déterminer la loi de F_i.
On pose : $F = \sum\limits_{i=1}^{n} F_i$.
Déterminer la loi de F, son espérance et sa variance.
Les variables aléatoires F_i sont-elles deux à deux indépendantes ?

2. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on note X_i la variable aléatoire égale à 0 si le numéro i n'a pas été tiré et égale a 1 s'il été tiré au moins une fois.
Déterminer la loi de X_i, son espérance et sa variance.
Pour tout $(i, j) \in [\![0, 1]\!]^2$, déterminer la probabilité : $\mathbb{P}_{[X_i=0]}(X_j = 0)$.
Les variables X_i, et X_j sont-elles indépendantes ?

Exercice avec préparation 3

On considère un type de composants électroniques, dont la durée de vie X, exprimée en heures, est une variable aléatoire de densité f telle que :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{c}{t^2} & \text{si } t \geqslant 10 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Rappeler les qualités d'une densité de probabilité : en déduire la valeur du réel c.

2. Déterminer les réels m pour lesquels $\mathbb{P}(X \leqslant m) = \mathbb{P}(X > m)$.

3. Quelle est la probabilité que. sur un lot de 5 composants du type précédent, 3 au moins fonctionnent durant au moins 15 heures ?
Deux machines A et B sont équipées de composants du type précédent. Plus précisément :
- A contient deux composants et cesse de fonctionner dès que l'un de ces composants est défectueux,
- B contient également deux composants mais un seul de ces composants suffit à la faire fonctionner

On note T_A, T_B les durées de fonctionnement de ces machines.

4. Déterminer une densité pour chacune des variables T_A et T_B.

5. Pour chacune des variables T_A et T_B indiquer si elle possède une espérance. et le cas échéant, la calculer.

Exercice sans préparation 3

1. Donner s'il en existe un exemple de trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ tels que deux quelconques d'entre eux soient linéairement indépendants.
Existe-t-il un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont ces trois vecteurs soient vecteurs propres ?

2. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{F}$ une famille de $n+1$ vecteurs propres de f s'il en existe.

a) $\mathcal{F}$ peut-elle être une famille libre ?

b) On suppose que toute sous-famille de n vecteurs de $\mathcal{F}$ est libre.
Démontrer que les $n+1$ valeurs propres associées respectivement aux $n+1$ vecteurs de $\mathcal{F}$ sont égales.
Que peut-on en conclure pour f ?

Exercice avec préparation 4
Question de cours. Rappeler la formule des probabilités totales.

On lance deux pièces truquées : La pièce 1 donne pile avec une probabilité p_1 et la pièce 2 donne pile avec une probabilité, p_2.
On effectue les lancers de la façon suivante : on choisit une pièce uniformément au hasard et on lance la pièce choisie. Si on obtient pile, on relance la même pièce et ainsi de suite jusqu'a ce que l'on obtienne face ; à ce moment on change de pièce - plus généralement, dès que l'on obtient face, on change de pièce. On suppose que p_1 et p_2 sont dans $]0,1[$

1. Quelle est la probabilité de lancer la pièce 1 au n-ième lancer ?

2. Quelle est la probabilité, notée r_n, d'obtenir pile au $n^{\text{ème}}$ lancer ?

3. Calculer :$L = \lim\limits_{n\to+\infty} r_n$.

4. Dans cette question on suppose $p_1 = 1/3$ et $p_2 = 1/6$.
écrire en langage Pascal l'expression d'une fonction permettant de calculer la valeur d'un rang n_0 à partir duquel :
$$|r_n - L| \leqslant 10^{-6}$$

Exercice sans préparation 4
Soit u et v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices respectives dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ sont notées A et B. On suppose que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. v peut-il être bijectif ? Déterminer $\operatorname{Im}(v)$.

2. Déterminer $\ker(u)$

3. Donner la forme des matrices A et B.

Exercice avec préparation 5

Soit $\alpha > 0$, $x_0 > 0$ et f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{\alpha}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1} \text{ si } x \geqslant x_0 \quad \text{et} \quad f(x) = 0 \text{ sinon}$$

1. a) Donner la définition d'une variable aléatoire à densité et vérifier que la fonction f est bien la densité de probabilité d'une. variable aléatoire réelle X.
Déterminer la fonction de répartition de X et donner une allure de son graphe.
On dit, que X suit la loi de Pareto de paramètres x_0 et α.

b) Pour quelles valeurs de α 1a variable X admet-elle une espérance et une variance ? Calculer l'espérance de X lorsqu'elle existe.

c) On suppose $\alpha > 1$ et on pose, pour tout $x > x_0$

$$M_X(x) = \frac{\displaystyle\int_x^{+\infty} tf(t)\,dt}{\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,dt}$$

Calculer $M_X(x)$

2. On se propose d'établir une réciproque de la propriété précédente. Soit $x_0 > 0$ et Y une variable aléatoire à valeurs dans $[x_0, +\infty[$ de densité h continue, à valeurs strictement positives, admettant une espérance et telle qu'il existe un réel $k > 1$ vérifiant :

$$\forall x > x_0, \quad M_Y(x) = \frac{\displaystyle\int_x^{+\infty} th(t)\,dt}{\displaystyle\int_x^{+\infty} h(t)\,dt} = kx$$

a) On pose, pour tout $x > x_0$

$$G(x) = \int_x^{+\infty} h(t)\,dt$$

Montrer que

$$G(x) = \frac{1-k}{k} xG'(x)$$

b) En calculant, pour tout $x > x_0$, la dérivée de la fonction $x \to x^{\frac{k}{k-1}} G(x)$, déterminer la valeur de $G(x)$, puis la fonction de répartition de Y.
Quelle loi retrouve-t-on ?

Exercice sans préparation 5

Soient X et Y deux variables aléatoires binomiales de paramètres $(n, 1/2)$ indépendantes.
Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice avec préparation 6

1. Rappeler la définition d'une famille génératrice et d'une famille libre.

Dans l'espace vectoriel $C^O(\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère les trois fonctions :

$$f_1 : x \to 1 \quad f_2 : x \to x \quad \text{et} \quad f_0 : x \to \begin{cases} x \ln |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Soit E le sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R})$ engendré par (f_1, f_2, f_3)

2. Prouver que la famille (f_1, f_2, f_3) est une base de E.

3. À toute fonction f de E on associe la fonction $\Phi(f)$ définie par $\Phi(f) = (xf)'$, dérivée de la fonction $x \to x\ f(x)$
Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme de E dont on donnera la matrice M dans la base (f_1, f_2, f_3)

a) Montrer que M est une matrice inversible et déterminer son inverse (éviter le plus possible les calculs).

b) Résoudre dans E l'équation :

$$\Phi(f) = a + bx + x \ln |x|$$

Déterminer en particulier une primitive de $g : x \to x \ln |x|$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice sans préparation 6

Soit X et Y deux variables aléatoires binomiales de paramètres $(n, 1/2)$.
Calculer $\mathbb{P}([X = Y])$.

Exercice avec préparation 7

Question de cours : Définition d'une loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$ $(a < b)$
Donner une densité, la fonction de répartition d'une telle loi.
Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $Y = \min(X, 1-X)$ et $Z = (X, 1-X)$.

1. Expliciter la fonction de répartition de Y. En déduire une densité , puis $\mathbb{E}(Y)$ si elle existe

2. Expliciter la fonction de répartition de Z. En déduire une densité, puis $\mathbb{E}(Z)$ si elle existe.

3. Mêmes questions pour $R = Y/Z$

4. Écrire un programme en Pascal permettant d'obtenir une simulation des lois de X, Y et Z

Exercice sans préparation 7

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est diagonalisable

2. On admet que les valeurs propres de A sont 2 et -2.
Calculer M^n pour tout n entier naturel.

Exercice avec préparation 8
Question de cours : énoncer la formule des probabilités totales et la formule de Bayes.

Une coccinelle se déplace sur un tétraèdre régulier PQRS (une pyramide) en longeant les arêtes. Elle est placée à l'instant $n = 0$ sur le sommet P. On suppose que, si. elle se, trouve sur un sommet à l'instant n, elle sera sur l'un des trois autres sommets à l'instant $n + 1$ de, façon équiprobable.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note p_n (respectivement q_n, r_n et s_n) la probabilité que la coccinelle se trouve sur le sommet P (respectivement Q, R et S) à l'instant n.

1. On définit la matrice colonne X_n par
$$X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \\ s_n \end{pmatrix}$$
Déterminer une matrice, carrée $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, indépendante de n, telle que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

2. Montrer que cette matrice est diagonalisable.

3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; donner une expression de p_n, q_n, r_n et s_n en fonction de n.

4. On note T le temps nécessaire à la coccinelle pour visiter au moins 3 sommets distincts du tétraèdre. Déterminer la loi de T. Calculer son espérance.

5. On note U le temps nécessaire à la coccinelle pour visiter tous les sommets du tétraèdre. Montrer que pour tout entier ℓ supérieur on égal à 3
$$\mathbb{P}(U = \ell) = \frac{2^{\ell-1} - 2}{3^{\ell-1}}$$

6. Déterminer l'espérance de U si elle existe.

Exercice sans préparation 8
Un agriculteur souhaite améliorer le rendement de son exploitation en utilisant de l'engrais. Une étude a montré que le rendement, en tonnes par hectare, pour la variété de blé cultivée est donné par :

$$f(B, N) = 120B - 8B^2 + 4BN - 2N^2$$

B désigne la, quantité de semences de blé utilisée, N la quantité d'engrais utilisée.

1. Déterminer les extrema de la fonction f ; donner leur nature.

2. Si on suppose de plus qu'une contrainte de budget impose $B + 2N = 23$ déterminer l'optimum de rendement.

Exercice avec préparation 9
Question de cours : Donner une condition nécessaire ci suffisante de diagonalisabilité d'une matrice.

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Justifiez que f est diagonalisable.

2. Montrer que -2 est valeur propre de f et déterminer la dimension du sous espace propre E_{-2} associé

3. Calculer $f(1, -1, -1, 1)$. En déduire une autre valeur propre ainsi que le sous-espace propre associé.

4. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice M' de f est diagonale. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à la base $\mathcal{B}$. Calculer M'^2.

5. Calculer M^n pour tout entier naturel n.

6. On considère les suites $(u_n), (v_n), (w_n), (t_n)$ définies par : $u_0,\ v_0,\ w_0,\ t_0$ et

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}(-u_n - v_n - w_n + t_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(-u_n - v_n + w_n - t_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{4}(-u_n + v_n - w_n - t_n) \\ t_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n - v_n - w_n - t_n) \end{cases}$$

Calculer $u_n,\ v_n,\ w_n$ et t_n en fonction de $u_0,\ v_0,\ w_0,\ t_0$ et de n
Que dire de leurs limites respectives ?

Exercice sans préparation 9
Soient A, B, C, des événements de même probabilité p et tels que $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$

1. Prouver que $p \leqslant \dfrac{2}{3}$

2. p peut-il prendre la valeur $\dfrac{2}{3}$?

3. On suppose en outre que A, B et C sont indépendants deux à deux. Prouver l'inégalité :

$$p \leqslant \frac{1}{2}$$

4. p peut-il prendre la, valeur $\dfrac{1}{2}$?