Colles - Semaine 6

I. Série 1

Exercice 1

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$, et :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 2u_n + 3v_n \end{cases}$$

a. Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est constante.

b. En déduire que (u_n) est arithmético-géométrique.

c. Calculer u_n et v_n.

d. Sans utiliser le résultat de la question précédente, déterminer la nature de la suite $(u_n + v_n)$. En déduire, en utilisant une autre méthode, le calcul de u_n et v_n.

Exercice 2

Résoudre l'inéquation suivante : $\sqrt{x+5} \geqslant \sqrt{x^2 - 4}$

II. Série 2

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_1 \in \mathbb{R} \\ \forall n \geqslant 2,\ u_n = 4(u_{n-1} - u_{n-2}) \end{cases}$

1) Donner les valeurs de u_2, u_3 et u_4 en fonciton de u_0 et u_1.

2) On note (v_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n v_n$.

- ***a.*** Montrer que (v_n) vérifie la relation : $\forall n \geqslant 2,\ v_n - v_{n-1} = v_{n-1} - v_{n-2}$.
- ***b.*** Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
- ***c.*** Exprimer (v_n) en fonction de n, u_0 et u_1.
- ***d.*** En déduire l'expression de u_n.

3) Déterminer la suite (u_n) dans le cas où : $u_0 = 1$ et $u_1 = 8$.

4) ***a.*** Déterminer la suite (u_n) dans le cas où : $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.

- ***b.*** Que peut-on dire dans ce cas des suites (v_n) et (u_n) ?
- ***c.*** Calculer alors la somme : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

Exercice 2

Résoudre l'inéquation suivante : $\ln(3x + 1) \leqslant \ln(2x - 1)$

III. Série 3

Exercice 1

1) Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \ln(1+x)$.
En déduire le signe de f.

2) Soit a un réel strictement positif et (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1+u_n) \end{cases}$$

a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et $u_n > 0$.

b. Quel est le sens de variation de (u_n) ?

Exercice 2

Résoudre l'inéquation suivante : $5\left(\dfrac{1}{3}\right)^x \leqslant 10^{-10}$