HEC 2014

Exercice avec préparation 1

1. Question de cours : Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes. Lien entre indépendance et covariance.
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes finies à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On suppose que $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ et $Y(\Omega) \subset [\![0, m]\!]$, où n et m sont deux entiers de $\mathbb{N}^*$.
Pour tout couple $(i, j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, m]\!]$, on pose : $p_{i,j} = \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$.
Soit F_X et F_Y les deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par : $F_X(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X = i])x^i$ et
$F_Y(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} \mathbb{P}([Y = j])x^j$.
Soit $Z = (X, Y)$ et G_Z la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $G_Z(x, y) = \sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{m} p_{i,j}x^i y^j$.

2. Donner la valeur de $G_Z(1, 1)$ et exprimer les espérances de X, Y et XY, puis la covariance de (X, Y) à l'aide des dérivées partielles premières et secondes de G_Z au point $(1, 1)$.

3. Soit f une fonction polynomiale de deux variables définies sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = \sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{m} a_{i,j}x^i y^j$ avec $a_{i,j} \in \mathbb{R}$.
On suppose que pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) = 0$.

a) Montrer que pour tout $(i, j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, m]\!]$, on a $a_{i,j} = 0$.

b) En déduire que X et Y sont indépendantes, si et seulement si, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $G_Z(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$. (on pourra poser : $a_{i,j} = p_{i,j} - \mathbb{P}([X = i])\mathbb{P}([Y = j])$).

4. Une urne contient des jetons portant chacun une des lettres A, B ou C. La proportion des jetons portant la lettre A est p, celle des jetons portant la lettre B est q et celle des jetons portant la lettre C est r, où p, q et r sont trois réels strictement positifs vérifiant $p + q + r = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages d'un jeton avec remise dans cette urne. On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de jetons tirés portant la lettre A (resp. B) à l'issue de ces n tirages.

a) Quelles sont les lois de X et Y respectivement ? Déterminer F_X et F_Y.

b) Déterminer la loi de Z. En déduire G_Z.

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

d) Calculer la covariance de (X, Y). Le signe de cette covariance était-il prévisible ?

Exercice sans préparation 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^t AA^t AA = I$, où I est la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la matrice A est symétrique.

2. Déterminer A.

Exercice avec préparation 2

1. Question de cours : Définition et représentation graphique de la fonction partie entière.
On note E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par les quatre fonctions f_0, f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = \mathrm{e}^x,\ f_3(x) = x\mathrm{e}^x.$$

2. On note : $\mathscr{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$.

a) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de F.

b) Montrer que toutes les fonctions de F sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

3. Soit Φ l'application définie par : pour tout $f \in F$, $\Phi(f) = f'$, où f' est la dérivée de f.

a) Justifier que Φ est un endomorphisme de F et écrire la matrice M de Φ dans la base $\mathscr{B}$.

b) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

c) Montrer que f_3 appartient à $\mathrm{Im}(\Phi)$ et résoudre dans F l'équation : $\Phi(f) = f_3$.

4. On note G l'ensemble des fonctions g de E telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x+1) - g(x) = 0.$$

a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et trouver $F \cap G$.

b) Trouver un élément de G qui n'appartienne pas à F.

5. Trouver toutes les fonctions de F vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1 - f(x) = (\mathrm{e}-1)f'(x)$.

Exercice sans préparation 2

Soit p un réel de $]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, de même loi de Bernoulli telle que :
$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_k = 1]) = p$ et $\mathbb{P}([X_k = 0]) = q$. Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on définit pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ la variable aléatoire $Y_k = X_k + X_{k+1}$.

1. *a)* Calculer pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Cov}(Y_k, Y_{k+1})$.

b) Montrer que $0 < \mathrm{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

2. Calculer pour tout couple (k, l) tel que $1 \leqslant k < l \leqslant n$, $\mathrm{Cov}(Y_k, Y_l)$.

3. On note ε un réel strictement positif fixé. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k - 2p\right| > \varepsilon\right]\right) = 0$.

Exercice avec préparation 3

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2. On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on note D et T les deux applications suivantes :

$$D : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & ad - bc \end{array} \right. \quad \text{et} \quad T : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & a + d \end{array} \right.$$

2. Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Exprimer $D(AB)$ en fonction de $D(A)$ et $D(B)$. Montrer que $T(AB) = T(BA)$.

b) En déduire que si A et B sont semblables, on a $D(A) = D(B)$ et $T(A) = T(B)$.

3. Déterminer $\ker(D)$ et $\ker(T)$. Quelle est la dimension de $\ker(T)$?
Dorénavant, si $u \in\ll E$ de matrice A dans une base $\mathscr{B}$ de E, on note : $D(u) = D(A)$ et $T(u) = T(A)$.

4. On note id_E l'endomorphisme identité de E. Exprimer $u^2 = u \circ u$ en fonction de u et id_E.

5. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathcal{S}_0 = \{v \in \mathscr{L}(E) | u \circ v - v \circ u = 0\}$.
Montrer que $\mathcal{S}_0$ est un espace vectoriel contenant $\{P(u), P \in \mathbb{R}[X]\}$.

6. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ avec $u \neq 0$. On pose : $\mathcal{S} = \{v \in \mathscr{L}(E) | u \circ v - v \circ u = u\}$.

a) Montrer que si $\mathcal{S}$ est non vide, alors l'endomorphisme u ne peut être bijectif. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur u^2 pour que $\mathcal{S}$ soit non vide.

b) On suppose que $\mathcal{S}$ est non vide. Établir l'existence d'une base $\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2)$ de E dans laquelle la matrice M_u de u d'écrit $M_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et déterminer la forme générale de la matrice des éléments v de $\mathcal{S}$ dans cette même base.

c) On suppose que $\mathcal{S}$ est non vide. Montrer que $\mathcal{S} = \{v_0 + \alpha \text{id}_E + \beta u, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ où v_0 est un endomorphisme non inversible de E à déterminer.

Exercice sans préparation 3

Soit k et λ deux réels et soir f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles donnée par :

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{cl} kt\text{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

1. Exprimer k en fonction de λ pour que f soit une densité de probabilité.
On note X une variable aléatoire réelle ayant f pour densité.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X admet un moment d'ordre n que l'on calculera.

Exercice avec préparation 4

1. Question de cours :
Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Lois marginales. Lois conditionnelles.

Soit c un réel strictement positif et soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, telles que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = c\frac{i+j}{i!j!}$$

2. ***a)*** Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}([X=i]) = c\dfrac{(i+1)}{i!}$ e.
En déduire la valeur de c.

b) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

3. ***a)*** Déterminer la loi de $X+Y-1$.

b) En déduire la variance de $X+Y$.

c) Calculer la covariance de X et de $X+5Y$.
Les variables aléatoires X et $X+5Y$ sont-elles indépendantes ?

4. On pose : $Z = \dfrac{1}{X+1}$.

a) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

b) Déterminer pour $i \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X=i]$.

c) Pour $A \in \mathscr{A}$, on pose : $g_A(Y) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} kP_A([Y=k])$.
Établir l'existence d'une fonction affine f telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$g_{[X=X(\omega)]}(Y) = f(Z(\omega))$$

Exercice sans préparation 4

1. La somme de deux matrices diagonalisables est-elle diagonalisable ?

2. La somme de deux matrices inversibles est-elle inversible ?

3. Montrer que toute matrice carrée est la somme de deux matrices inversibles ?

Exercice avec préparation 5

On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Dans tout l'exercice, A est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ayant trois valeurs propres distinctes, notées λ_1, λ_2 et λ_3.

1. Question de cours :
Définition d'un polynôme annulateur d'une matrice. Lien avec les valeurs propres.

2. *a)* Donner en fonction de λ_1, λ_2 et λ_3, un polynôme annulateur de A de degré 3.

b) Peut-on trouver un polynôme annulateur de A de degré 1 ou de degré 2 ?

3. Soit φ l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, associe le triplet $\big(P(\lambda_1^5), P(\lambda_2^5), P(\lambda_3^5)\big)$.

a) Montrer que l'application φ est linéaire.

b) Déterminer $\ker(\varphi)$.

c) L'application φ est-elle un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur $\mathbb{R}^3$?

d) Établir l'existence d'un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que : pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, $Q(\lambda_i^5) = \lambda_i$.

e) Soit T le polynôme défini par : $T(X) = Q(X^5) - X$.
Montrer que le polynôme T est un polynôme annulateur de A.

4. On note $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ les deux sous-ensembles de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivants :

$$\mathcal{E} = \{N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid AN = NA\} \ \text{ et } \ \mathcal{F} = \{N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^5N = NA^5\}.$$

Déduire des questions précédentes que $\mathcal{E} = \mathcal{F}$.

Exercice sans préparation 5

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. Déterminer la loi de M_n.

2. Montrer que l'application g qui à tout réel x associe $g(x) = \mathrm{e}^{-x}\exp\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$ est une densité de probabilité.

3. Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de densité g.
Montrer que la suite de variables aléatoires $(\lambda M_n - \ln(n))_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers Y.

Exercice avec préparation 6

1. Question de cours : Définition de la convergence d'une série numérique (à termes réels).
Dans tout l'exercice, a est un réel strictement supérieur à 1.

2. ***a)*** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^a)^n}$ est convergente. On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^a)^n}$.

b) Établir la convergence de la suite $(u_n(a))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. ***a)*** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n(a) = an(u_n(a) - u_{n+1}(a))$. En déduire $u_n(a)$ en fonction de $u_1(a)$.

b) Montrer que la série de terme général $\left(\dfrac{u_n(a)}{an}\right)$ est convergente.

c) En déduire la limite de la suite $(u_n(a))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n(a) = \ln(u_n(a)) + \dfrac{\ln(n)}{a}$.

a) Montrer que la série de terme général $(w_{n+1}(a) - w_n(a))$ est convergente.

b) En déduire l'existence d'un réel $K(a)$ tel que $u_n(a)$ soit équivalent à $\dfrac{K(a)}{n^{\frac{1}{a}}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice sans préparation 6

Les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que : $Y(\Omega) = \{1, 2\}$, $\mathbb{P}([Y = 1]) = \mathbb{P}([Y = 2]) = \dfrac{1}{2}$.
On pose : $Z = XY$.

1. Déterminer la loi de Z.

2. On admet que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2}$. Quelle est la probabilité que Z prenne des valeurs paires ?

Exercice avec préparation 7

1. Question de cours : Critères de convergence d'une intégrale impropre.
Préciser la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, où a est un réel strictement positif et α un réel quelconque.
Soit T une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, suivnt la loi normale centrée réduite. On note Φ et φ respectivement, la fonction de répartition et une densité de T.

2. ***a)*** À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$0 \leqslant 1 - \Phi(x) \leqslant \frac{1}{2x^2}$$

b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(x))\, dx$ est convergente et calculer sa valeur.

3. On note φ' la dérivée de φ.

a) Déterminer pour tout $x \in \mathbb{R}$, une relation entre $\varphi'(x)$ et $\varphi(x)$.

b) En déduire, à l'aide de deux intégrations par parties, que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \leqslant \frac{1 - \Phi(x)}{\varphi(x)} \leqslant \frac{1}{x}$$

c) Donner un équivalent de $1 - \Phi(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

4. Soit $a > 0$. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathbb{P}_{[T>x]}\left(\left[T > x + \tfrac{a}{x}\right]\right)$.

Exercice sans préparation 7

Soit D la matrice définie par : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les matrices $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AD = DA$.

2. En déduire les matrices $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $M^3 - 2M = D$.

Exercice avec préparation 8

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on pose : $f^2 = f \circ f$.

2. ***a)*** Montrer que $2f - f^2 = \text{id}$.

b) Montrer que l'endomorphisme f est un automorphisme. Quel est l'automorphisme réciproque de f ?

c) Montrer que f admet l'unique valeur propre 1. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

d) Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre 1. Quelle est sa dimension ?

3. ***a)*** Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de n.

b) Le résultat précédent s'étend-t-il au cas où $n \in \mathbb{Z}$?

4. Déterminer une base (u, v, w) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice sans préparation 8 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et suivant toutes la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

1. Pour tout entier $k \geqslant 1$, déterminer une densité de la variable aléatoire $Y_k = \max(X_1, X_2, \ldots, X_k)$.

2. Déterminer une densité de la variable aléatoire $Z_k = -Y_k$.

Exercice avec préparation 9

1. Question de cours : Énoncer une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'un endomorphisme.
On considère la matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. On note $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à 2 lignes et 1 colonne à coefficients réels.
Soit u l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ défini par : pour tout $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $u(X) = AX$.

a) Déterminer une base de $\ker(u)$ et une base de $\mathrm{Im}(u)$.

b) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

c) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^n.

3. Soit v l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : pour tout $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $v(M) = AM$.
On note $\mathscr{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on rappelle que :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Écrire la matrice V de l'endomorphisme v dans la base $\mathscr{B}$.

b) Déterminer une base de $\ker(v)$ et une base de $\mathrm{Im}(v)$.

c) L'endomorphisme v est-il diagonalisable ?

Exercice sans préparation 9 Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes U_1, U_2, ..., U_n contenant chacune trois boules. Dans l'ensemble des $3n$ boules, une seule est rouge, les autres étant bleues.
Sachant que l'on a tiré sans remise deux boules bleues dans l'urne U_1, quelle est la probabilité que l'urne U_2 contienne la boule rouge ?