ECS2
Mathématiques

Colles - Semaine 3

Série 1

Question de cours

Quelle est la nature de la série $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Exercice

Si $a=(a_1,a_2,a_3,a_4)\in\mathbb{R}^4$, on pose $M(a)=\begin{pmatrix}0&0&0&a_1\\0&0&0&a_2\\0&0&0&a_3\\a_1&a_2&a_3&a_4\end{pmatrix}$.

On note F le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ constitué des matrices $M(a)$ lorsque a parcourt $\mathbb{R}^4$.

On note $J=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie égale à n.

- ***a)*** Question de cours : Rappeler la définition du sous-espace vectoriel engendré par une famille $(x_1,\dots,x_p)$ de vecteurs de E. Dans quel cas la famille $(x_1,\dots,x_p)$ est-elle une base de $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_p)$?
- ***b)*** Soit E_1 de base $(x_1,\dots,x_p)$ et E_2 de base $(y_1,\dots,y_q)$ deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E_1\cap E_2=\{0_E\}$. Montrer que la famille $(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q)$ est libre. Qu'en déduit-on sur $p+q$?

2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ et en donner la dimension.

3. Soit (e_1,e_2,e_3,e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Pour $i\in[\![1,4]\!]$, on pose $M_i=M(e_i)$. Montrer que $\forall i\in[\![1,4]\!]$, la matrice M_i+J est inversible et que la famille $(M_i+J)_{1\leq i\leq 4}$ est libre.

4. Soit $a\in\mathbb{R}^4$. Montrer que si pour tout réel θ non nul, la matrice $M(a)+\theta J$ est non inversible, alors $a=(0,0,0,0)$.

5. Soit G un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ qui ne contient aucune matrice inversible et tel que $J\in G$.

- ***a)*** Déterminer $G\cap F$ et en déduire que la dimension de G est inférieure ou égale à 12.
- ***b)*** Existe-t-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ de dimension 12 ne contenant aucune matrice inversible et contenant J ?

Série 2

Question de cours

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{(-5)^k}$.

Exercice

Un péage comporte 10 guichets numérotés de 1 à 10. Le nombre de voitures N, arrivant au péage en 1 heure, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur file au hasard et indépendamment des autres. Soit X_1 la variable aléatoire égale au nombre de voitures se présentant au guichet n°1 en une heure.

1. Déterminer le nombre moyen de voitures arrivant au péage en une heure.

2. Quelle est la proba qu'une voiture qui arrive au péage se dirige vers le guichet n°1 ?

3. Calculer $\mathbb{P}_{[N=n]}([X_1 = k])$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$. Et pour $k > n$?

4. Justifier que $\displaystyle\mathbb{P}([X_1 = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}_{[N=n]}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}([N = n])$

puis montrer que $\displaystyle\mathbb{P}([X_1 = k]) = \mathrm{e}^{-\lambda} \left(\frac{1}{10}\right)^k \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n \frac{\lambda^n}{n!}$.

5. En déduire la loi de X_1, son espérance et sa variance

Série 3

Question de cours

Démonstration de « Une application linéaire est un isomorphisme si et seulement si elle envoie bases sur bases »

Exercice

On lance successivement une pièce truquée dont la probabilité de faire face est de $p \in]0,1[$. Pour $n \geqslant 1$, notons F_n :« Obtenir Face au n-ième lancer », et
P_n :« Obtenir Pile au n-ième lancer ».
On note T_n : « le premier Pile est obtenu au n-ième lancer ».

1. Pour $n \geqslant 1$, exprimer l'événement T_n en fonction des F_i et P_i.

2. Donner $\mathbb{P}(T_n)$ en fonction de p et n.

3. On lance la pièce une infinité de fois. Écrire les événements suivants :
   - A_n :« obtenir au moins un pile au cours des n premiers lancers. »,
   - A : « obtenir au moins un pile ».

4. Parmi les suites (F_n), (P_n), (T_n) et (A_n), lesquelles sont croissantes ? décroissantes ?

5. Parmi les suites (F_n), (P_n), (T_n) et (A_n), lesquelles sont constituées d'événements mutuellement indépendants ?

6. Donner la probabilité $\mathbb{P}(A)$. Que peut-on dire de l'événement A ?

Exercice supplémentaire

1. Un tirage au Loto est une combinaison (l'ordre ne compte pas) de 6 numéros distincts compris entre 1 et 49. Quelle est la probabilité (on donne : $\binom{49}{6} = 13983816$), notée p dans la suite, de gagner (c-à-d d'avoir les 6 bons numéros) au Loto ?

2. On joue au loto indéfiniment et on définit un événement en posant : $A =$ « on gagne au moins une fois », et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   - $A_n =$ « on gagne pour la première fois au $n^{\text{ème}}$ tirage »,
   - $B_n =$ « on gagne au n-ème tirage ».

   Exprimer A_n à l'aide des B_k. En déduire $\mathbb{P}(A_n)$ en fonction de p.

3. En déduire $\mathbb{P}(A)$ en exprimant A à l'aide des A_n. Comment appelle-t-on un tel événement A ?