Colles - Semaine 14

Exercice 1

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\, dx$ est convergente et donner sa valeur.

2. On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2(1+|x|)^2}$

a) Montrer que f est paire.

b) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ admettant f comme densité.
On note F la fonction de répartition de X.

3. On pose $Y = \ln(1+|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) Déterminer $Y(\Omega)$.

b) Exprimer la fonction de répartition G de Y à l'aide de F.

c) En déduire que Y admet pour densité la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2\,\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x - 1) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

d) Montrer enfin que Y suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.

Exercice 2

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.
On définit les variable aléatoires $U = \min(X,Y)$ et $V = \max(X,Y)$.

1. Démontrer que :

$$[U > t] = [X > t] \cap [Y > t] \qquad \text{et} \qquad [V \leqslant t] = [X \leqslant t] \cap [Y \leqslant t]$$

2. Déterminer la fonction de répartition G, puis une densité g de U.

3. Déterminer la fonction de répartition H, puis une densité h de V.

4. Calculer l'espérance de U.

5. Exprimer $U+V$ en fonction de X et Y. En déduire l'espérance de V.

Exercice 3

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont considérées comme définies sur des espaces probabilisés non nécessairement identiques, mais qui, par souci de simplification, seront tous notés $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{1}{2} \times \mathrm{e}^{-|x|}$.

a) Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^0 g(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\, dx$ sont convergentes et de même valeur.

b) Établir que g est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Soit Y une variable aléatoire à valeurs réelles admettant g pour densité.
On dit alors que Y suit la loi $\mathcal{L}(0)$.

2. Étudier les variations de g et tracer l'allure de sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

3. *a)* Pour $r \in \mathbb{N}$, montrer l'existence de $m_r(Y)$ (moment d'ordre r de Y).

b) Calculer, pour tout r de $\mathbb{N}$, $m_r(Y)$ en fonction de r. Quelles sont les valeurs de l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ et de la variance $\mathbb{V}(Y)$ de la v.a.r. Y ?