ORAUX HEC 2013

I. Annales 2013

Exercice 1 *(Exercice avec préparation)*

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On dit qu'une expérience aléatoire suit le schéma binomial si elle consiste en n répétitions indépendantes de la même épreuve, pouvant mener à 2 résultat : succès ou échecs.
On sait alors que la variable aléatoire comptant le nombre de succès pendant l'expérience suit une loi binomiale de paramètres n et p, où p est la probabilité du succès lors d'une épreuve. On sait de même que le nombre d'échecs suit la loi binomiale de paramètres n et $q = 1 - p$.

2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2}$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \sum\limits_{k=1}^{n} kX_k$ et $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

a) Par linéarité de l'espérance, W_n admet une espérance et :

$$E(W_n) = \sum_{k=1}^{n} kE(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}s_n.$$

Par indépendance des variables X_i puis par quadracité de la variance, W_n admet une variance et :

$$V(X_n) = \sum_{k=1}^{n} V(kX_k) = \sum_{k=1}^{n} k^2V(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4}k^2 = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{4}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{12}s_n.$$

b) Comme une somme de termes positifs n'est nulle que si tous les termes sont nuls,

$$[W_n = 0] = \bigcap_{i=1} n\,[X_i = 0]$$

et par indépendances des X_i,

$$P\,[W_n = 0] = \prod_{i=1} nP\,[X_i = 0] = \prod_{i=1} n\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

D'autre par on remarque W_n atteint la valeur s_n lorsque tous les X_i valent 1. De plus si un ou plus des X_i ne vaut pas 1, la somme sera alors inférieure ou égale à $s_n - 1$, donc ne pourra pas valoir s_n. On en déduit l'écriture d'évènements suivante, puis par indépendance :

$$[W_n = s_n] = \bigcap_{i=1} n\,[X_i = 1] \quad \text{et} \quad P\,[X_n = 0] = \prod_{i=1} nP\,[X_i = 1] = \prod_{i=1} n\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

c) $W_n = 3$ peut être atteinte sous les formes suivantes :

$$3 = 0 + 0 + 3 + 0 + \cdots + 0 \quad \text{ou} \quad 3 = 1 + 2 + 0 + \cdots + 0$$

qui existent ou non selon que n dépasse 2, puis 3. On a donc :

- Pour $n=1$,

$$[W_1=3]=\varnothing \quad \text{et} \quad P\,[W_1=3]=0.$$

- Pour $n=2$,

$$[W_2=3]=[X_1=1]\cap[X_2=1] \quad \text{et} \quad P\,[W_2=3]=\frac{1}{4}.$$

- Pour $n\geqslant 3$,

$$[W_n=3]=\left[\,[X_1=1]\cap[X_2=1]\cap\left(\bigcap_{i=3} n\,[X_i=0]\right)\right]\cup\left[\,[X_1=0]\cap[X_2=0]\cap[X_3=1]\cap\left(\bigcap_{i=4} n\,[X_i=0\right.\right.$$

puis par incompatibilité de la réunion et indépendance des X_i,

$$P\,[W_n=3]=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{2}{2^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

3. Question difficile. Il faut comprendre que pour chaque situation menant à $W_n=k$, la situation "inverse" (tous les échecs transformés en succès et tous les succès en échecs) donnera $W_n=s_n-k$. Pour formaliser l'égalité d'évènements, on écrit :

$$(W_n=s_n-k)=(s_n-W_n=k)=\left(\sum_{i=1}^n i-\sum_{i=1}^n iX_i=k\right)=\left(\sum_{i=1}^n i(1-X_i)=k\right)=[Z_n=k]$$

où $Z_n=\sum\limits_{i=1}^n i(1-X_i)$ avec les variables $Y_i=1-X_i$ qui sont indépendantes et qui suivent la loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2}$, donc Z_n suit la même loi que W_n. On en déduit bien que :

$$P\,[W_n=k]=P\,[Z_n=k]=P\left([W_n=s_n-k]\right).$$

4. ***a)*** Sachant $[W_n=j]$, on a alors :

$$W_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}kX_k=\sum_{k=1}^{n}kX_k+(n+1)X_{n+1}=W_n+(n+1)W_{n+1}=j+(n+1)X_{n+1}$$

avec X_{n+1} qui vaut 0 ou 1, donc :

$$W_{n+1}\backslash\,[W_n=j]\,(\Omega)=\{j;j+n+1\} \quad P_{[W_n=j]}(W_{n+1}=j)=P_{[W_n=j]}(X_{n+1}=0)=\frac{1}{2}$$

et

$$P_{[W_n=j]}(W_{n+1}=j+n+1)=P_{[W_n=j]}(X_{n+1}=1)=\frac{1}{2}.$$

b) De plus $[W_n=j]_{j\in[\![0;s_n]\!]}$ est un système complet d'évènements donc par formule des probabilités totales, pour tout $k\in[\![0;s_{n+1}]\!]$:

$$(W_{n+1}=k)=\bigcup_{j=0}^{s_n}\left[\,[W_n=j]\cap(W_{n+1}=k)\right]$$

donc par incompatibilité de la réunion et probabilités composées :

$$P([W_{n+1}=k]) = \sum_{j=0}^{s_n} P[W_n=j]\, P_{[W_n=j]}(W_{n+1}=k)$$

et cette probabilité conditionnelle est non nulle nulle si et seulement $k \in \{j; j+n+1\}$ donc pour tout j vérifiant :

$$j=k \quad \text{ou} \quad j+n+1=k \Longleftrightarrow j=k-n-1.$$

On sépare alors selon que ces valeur existent ou non :

- Si $k \leqslant n$, $k-n-1 \leqslant -1$, k est bien dans le support de W_n mais $k-n-1$ n'y est pas donc :

$$P([W_{n+1}=k]) = \sum_{j=0}^{k-1} 0 + \frac{1}{2}\mathbb{P}([[W_n=k]]) + \sum_{j=k+1}^{s_n} 0.$$

- Si $n+1 \leqslant j \leqslant s_n$, k est bien dans le support de W_n et $0 \leqslant k-n-1 \leqslant s_n-n-1 \leqslant s_n$ donc $k-n-1$ y est aussi et :

$$P([W_{n+1}=k]) = \sum_{j=0}^{k-n-2} 0 + \frac{1}{2}P([W_n=k-n-1]) + \sum_{j=k-n}^{k-1} 0 + \frac{1}{2}\mathbb{P}([[W_n=k]]) + \sum_{j=k+1}^{s_n} 0$$

- Si $s_n+1 \leqslant k \leqslant s_{n+1}$, alors k n'est pas dans le support de W_n (trop grand) mais $k-n-1$ y est bien (en effet $s_{n+1}=s_n+n+1$ donc $k-n-1$ est inférieur à s_n, et supérieur à $s_n-n=s_{n-1}$ qui est positif). On obtient alors :

$$P([W_{n+1}=k]) = \sum_{j=0}^{k-n-2} 0 + \frac{1}{2}P([W_n=k-n-1]) + \sum_{j=n-k}^{s_n} 0$$

et en rassemblant :

$$P([W_{n+1}=k]) = \begin{cases} \frac{1}{2}P[W_n=k] & \text{si } k \leqslant n \\ frac12P[W_n=k] + \frac{1}{2}P([W_n=k-n-1]) & \text{si } n+1 \leqslant k \leqslant s_n \\ \frac{1}{2}P([W_n=k-n-1]) & \text{si } s_n+1 \leqslant k \leqslant s_{n+1} \end{cases}$$

Exercice 2 *(Exercice sans préparation)*

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \ln\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. On fait apparaître une somme de Riemann :

$$\frac{S_n}{n^3} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

et posant la fonction $f(x)=x^2\ln(x)$ qui est continue sur $]0;1]$, et qui se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0)=0$ (par croissances comparées). Les sommes de Riemann donnent alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^3} = \int_0^1 f(x)\, dx$$

qu'on calcule en revenant à l'intégrale partielle (car ln n'est pas définie en 0) : avec une IPP évidente,

$$\begin{aligned}
\int_y^1 f(x)\ dx &= \int_y^1 x^2 \ln x\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_y 1 - \int_y^1 \frac{x^3}{3}\times\frac{1}{x}\ dx \\
&= \frac{1}{3}\ln 1 - \frac{y^3 \ln y}{3} - \frac{1}{3}\int_y^1 x^2\ dx = -\frac{y^3\ln y}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{y^3}{3}\right) \\
&\xrightarrow[y\to 0]{} 0 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-0\right) = -\frac{1}{9}
\end{aligned}$$

donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^3} = \int_0^1 f(x)\ dx = -\frac{1}{9}.$$

2. On fait apparaître la somme précédente :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2 \ln\left(\frac{k+1}{n}\right) &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2\ln\left(\frac{k\left(1+\frac{1}{k}\right)}{n}\right) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2\left[\ln\left(\frac{k}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right] \\
&= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2\ln\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)
\end{aligned}$$

La première somme a pour limite $-\frac{1}{9}$, la deuxième n'est plus une somme de Riemann, on ne peut plus la calculer. On va chercher sa limite par encadrement.
Comme $1+\frac{1}{k}\geqslant 1$, cette somme est à termes positifs donc elle est positive. Pour la minorer on minore le ln, avec l'inégalité classique :

$$\ln(1+x)\leqslant x \quad \text{sur }]-1;+\infty[$$

(par étude de la fonction $g(x)=\ln(1+x)-x$, ou par concavité de ln et en remarquant que $y=x$ est la tangente au point $a=1$ de $h(x)=\ln(1+x)$). On obtient alors :

$$0\leqslant \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\leqslant\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2\times\frac{1}{k} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2n^3} = \frac{1+\frac{1}{n}}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par théorème d'encadrement, cette deuxième somme tend vers 0 puis la somme de départ tend vers $-\frac{1}{9}$.
Deuxième méthode pour faire apparaître S_n : changement d'indice : on pose $k'=k+1$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2\ln\left(\frac{k+1}{n}\right) &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=2}^{n+1}(k-1)^2\ln\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=2}^{n+1}(k^2-2k+1)\ln\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n^3}\sum_{k=2}^{n+1}k^2\ln\left(\frac{k}{n}\right) - 2\frac{1}{n^3}\sum_{k=2}^{n+1}k\ln\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n^3}\sum_{k=2}^{n+1}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n+1}\frac{k^2}{n^2}\ln\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{2}{n}\times\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n+1}\frac{k}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n^2}\times\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n+1}\ln\left(\frac{k}{n}\right)
\end{aligned}$$

La première somme de Riemann tend à nouveau vers $-\frac{1}{9}$ avec les sommes de Riemann. La deuxième tend vers $\displaystyle\int_0^1 g(x)\ dx$ en posant $g(x)=x\ln x$ qui se prolonge à nouveau par continuité en 0, donc cette intégrale est une constante finie et le deuxième terme tend vers 0 (on multiplie par une quantité qui tend vers 0).
Enfin le troisième terme ne peut pas s'écrire comme une somme de Riemann (car $h(x)=\ln x$ ne

se prolonge pas par continuité en 0). Par contre on peut encadrer ce terme entre $\frac{1}{n^3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ (majorant, avec tous les autres termes négatifs) qui tend vers 0 (DL) et avec $k \leqslant n$:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n^3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

(minorant, qui tend aussi vers 0 pour les mêmes raisons que le second terme) et conclure par encadrement.

Exercice 3 *(Exercice avec préparation)*

1. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soient X et Y deux v.a.r. discrètes.

- Les **v.a.r.** X **et** Y **sont indépendantes** (pour la probabilité $\mathbb{P}$) si :

$$\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}([[X = x]]) \times \mathbb{P}([[Y = y]])$$

- Autrement dit, les v.a.r. X et Y sont indépendantes si pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$, les événements $[X = x]$ et $[Y = y]$ sont indépendants.

2. *a)* X représente les nombres de succès (obtention de 1) lors de la succession de n épreuves de Bernoulli (lancers du dé) indépendantes et de même paramètre p. Ainsi : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.
En considérant l'obtention de 2 comme succès, on obtient : $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, q)$.

b) D'après la question précédente, $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
Soit $(k, j) \in [\![0, n]\!]^2$. On procède alors par disjonciton de cas.

- Si $k + j > n$ alors $[X = k] \cap [Y = j] = \varnothing$.
En effet, on ne peut obtenir plus de résultats que de lancers. Ainsi :

$$\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = j]) = 0$$

- Si $0 \leqslant k + j \leqslant n$ alors un tirage qui réalise $[X = k] \cap [Y = j]$ contient exactement k fois le nombre 1, j fois le nombre 2 et donc $n - k - j$ fois le nombre 3.

Ainsi, chaque tirage réalisant $[X = k] \cap [Y = j]$ est entièrement déterminé par :

× la position des k nombres 1 : $\binom{n}{k}$ possibilités.

× la position des j nombres 2 dans les places restantes : $\binom{n-k}{j}$ possibilités.

× la position des $n - k - j$ nombres 3 dans les places restantes : $\binom{n-k-j}{n-k-j} = 1$ possibilité.

Il y a donc :

$$\binom{n}{k} \binom{n-k}{j} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{j} \times 1 = \frac{n!}{k!\ \cancel{(n-k)!}}\ \frac{\cancel{(n-k)!}}{j!(n-k-j)!} = \frac{n!}{k!\ j!\ (n-k-j)!}$$

tels tirages.

De plus, la probabilité d'un tirage ne dépend que du nombre de 1, 2 et 3 qu'il contient. Ainsi, les tirages qui réalisent $[X = k] \cap [Y = j]$ ont tous la même probabilité d'apparaître, qui est la probabilité d'apparition du tirage :

$$\underbrace{1\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ 1}_{k \text{ occurrences}}\ \underbrace{2\ \ \ldots\ \ 2}_{j \text{ occurrences}}\ \underbrace{3\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ 3}_{n-k-j \text{ occurrences}}$$

Ainsi, la probabilité d'apparition d'un tel tirage est : $p^k\ q^j\ (1 - p - q)^{n-k-j}$.
On en déduit que :

$$\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = j]) = \frac{n!}{k!\ j!\ (n-k-j)!}\ p^k\ q^j\ (1 - p - q)^{n-k-j}$$

c) On remarque tout d'abord que $[X = n] \cap [Y = n] = \varnothing$ car on ne peut obtenir à la fois n fois le nombre 1 et n fois le nombre 2 en seulement n lancers. Ainsi :

$$\mathbb{P}([X = n] \cap [Y = n]) = 0 \neq \mathbb{P}([[X = n]]) \times \mathbb{P}([[Y = n]])$$

et X et Y ne sont donc pas indépendantes.

d) La v.a.r. T_n admet une espérance (resp. une variance) car la v.a.r. X en admet une.
De plus, par linéarité de l'espérance et propriété de la variance :

$$\mathbb{E}_p(T_n) = \frac{1}{n+1}\ \mathbb{E}(X) = \frac{np}{n+1} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}_p(T_n) = \frac{1}{(n+1)^2}\ \mathbb{V}(X) = \frac{np(1-p)}{(n+1)^2}$$

Comme T_n admet une espérance, T_n admet un biais :

$$\begin{aligned} b_p(T_n) &= \mathbb{E}_p(T_n - p) \ = \ \mathbb{E}_p(T_n) - p \\ &= \frac{np}{n+1} - p \ = \ \left(\frac{n}{n+1} - 1\right)\ p \ = \ \frac{n-(n+1)}{n+1}\ p \ = \ -\frac{p}{n+1} \end{aligned}$$

Comme T_n admet une variance, T_n admet un risque quadratique. Par la formule de décomposition biais variance, on obtient :

$$\begin{aligned} r_p(T_n) &= \mathbb{V}_p(T_n) + (b_p(T_n))^2 \ = \ \frac{np(1-p)}{(n+1)^2} + \left(-\frac{p}{n+1}\right)^2 \\ &= \frac{np(1-p)}{(n+1)^2} + \frac{p^2}{(n+1)^2} \ = \ \frac{p\ (n(1-p)+p)}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $N = n$ alors la v.a.r. X prend ses valeurs dans $[\![0, n]\!]$. On en déduit que :

$$X(\Omega) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [\![0, n]\!] = \mathbb{N}$$

La famille $([N = n])_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
On en déduit, par la formule des probabilités totales que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([[X = k]]) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = n] \cap [X = k]) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}([N = n] \cap [X = k]) && \textit{(car si } k > n \textit{ alors } [N = n] \cap [X = k] = \varnothing\textit{)} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}([[N = n]])\ \mathbb{P}_{[N=n]}([X = k]) && \textit{(car } \mathbb{P}([[N = n]]) \neq 0\textit{)} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n\ \mathrm{e}^{-\lambda}}{\cancel{n}!} \times \frac{\cancel{n}!}{k!(n-k)!}\ p^k(1-p)^{n-k} \\ &= \frac{p^k\ \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-k)!}(1-p)^{n-k} \\ &= \frac{p^k\ \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+k}}{n!}(1-p)^n \ = \ \frac{\lambda^k\ p^k\ \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}(1-p)^n && \textit{(par décalage d'indice)} \\ &= \frac{\lambda^k\ p^k\ \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}\ \mathrm{e}^{\lambda(1-p)} \ = \ \frac{(\lambda p)^k\ \mathrm{e}^{-\lambda+\lambda-\lambda p}}{k!} \ = \ \frac{(\lambda p)^k\ \mathrm{e}^{-\lambda p}}{k!} \end{aligned}$$

On en déduit que : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$.
En raisonnant de même pour Y, on obtient : $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$.

b) Soit $(k, j) \in \mathbb{N}^2$. La famille $([N = n])_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
On en déduit, par la formule des probabilités totales que :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = j]) \\
= & \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = n] \cap [X = k] \cap [Y = j]) \\
= & \sum_{n=j+k}^{+\infty} \mathbb{P}([N = n] \cap [X = k] \cap [Y = j]) && \textit{(car si } j+k>n \textit{ alors } [N = n] \cap [X = k] \cap [Y = j]) \\
= & \sum_{n=j+k}^{+\infty} \mathbb{P}\left([[N = n]]\right)\ \mathbb{P}_{[N=n]}([X = k] \cap [Y = j]) && \textit{(car } \mathbb{P}\left([[N = n]]\right) \neq 0) \\
= & \sum_{n=j+k}^{+\infty} \frac{\lambda^n\ \mathrm{e}^{-\lambda}}{\cancel{n}!} \times \frac{\cancel{n}!}{j!\ k!\ (n-k-j)!}\ p^k q^j (1-p-q)^{n-j-k} && \textit{(d'après la question } \mathbf{2.b)}) \\
= & \frac{p^k\ q^j\ \mathrm{e}^{-\lambda}}{j!\ k!} \sum_{n=j+k}^{+\infty} \lambda^n\ \frac{(1-p-q)^{n-j-k}}{(n-k-j)!} \\
= & \frac{p^k\ q^j\ \mathrm{e}^{-\lambda}}{j!\ k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n+j+k}\ \frac{(1-p-q)^{n}}{n!} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= & \frac{\lambda^{j+k}\ p^k\ q^j\ \mathrm{e}^{-\lambda}}{j!\ k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n}\ \frac{(1-p-q)^{n}}{n!} \\
= & \frac{\lambda^{j+k}\ p^k\ q^j\ \mathrm{e}^{-\lambda}}{j!\ k!}\ \mathrm{e}^{\lambda(1-p-q)} \ = \ \frac{\lambda^{j+k}\ p^k\ q^j\ \cancel{\mathrm{e}^{-\lambda}}}{j!\ k!}\ \cancel{\mathrm{e}^{\lambda}}\ \mathrm{e}^{-\lambda p}\ \mathrm{e}^{-\lambda q} \\
= & \frac{(\lambda p)^k\ \mathrm{e}^{-\lambda p}}{k!} \times \frac{(\lambda q)^j\ \mathrm{e}^{-\lambda q}}{j!} \\
= & \mathbb{P}\left([[X = k]]\right)\ \mathbb{P}\left([[Y = j]]\right)
\end{aligned}$$

On en conclut que X et Y sont indépendantes.

c) Sous réserve de convergence, le théorème de transfert permet d'affirmer :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{X}{N+1}\right) & = \sum_{(n,k)\in N(\Omega)\times X(\Omega)} \frac{k}{n+1}\ \mathbb{P}([N = n] \cap [X = k]) \\
& = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n+1}\ \frac{\lambda^n\ \mathrm{e}^{-\lambda}}{n!} \times \binom{n}{k} p^k\ (1-p)^{n-k} \\
& = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n\ \mathrm{e}^{-\lambda}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\
& = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n\ \mathrm{e}^{-\lambda}}{(n+1)!}\ \mathbb{E}(W) && \textit{(si } W \textit{ est une v.a.r. telle que } T \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)) \\
& = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n\ \mathrm{e}^{-\lambda}}{(n+1)!}\ np \\
& = p\ \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n+1)!}\ n
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\frac{n}{(n+1)!} \;=\; \frac{(n+1-1)}{(n+1)!} \;=\; \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{X}{N+1}\right) &= p\ \mathrm{e}^{-\lambda}\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n+1)!}\right) \\
&= p\ \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\mathrm{e}^{\lambda} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{n!}\right) \;=\; p\ \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\mathrm{e}^{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} - 1\right)\right) \\
&= p\ \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\mathrm{e}^{\lambda} - \frac{\mathrm{e}^{\lambda}-1}{\lambda}\right) = p\ \left(1 - \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\right)
\end{aligned}$$

La réserve est ainsi levée et $\mathbb{E}\left(\dfrac{X}{n+1}\right) = p\ \left(1 - \dfrac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\right)$.

Comme la v.a.r. T admet une espérance, elle admet aussi un biais :

$$\begin{aligned}
b_p(T) &= \mathbb{E}_p(T-p) \;=\; \mathbb{E}_p(T_n) - p \\
&= p\ \left(1 - \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\right) - p \;=\; p\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}-1}{\lambda} \;\neq\; 0
\end{aligned}$$

donc T n'est pas un estimateur sans biais de p.

Remarque

- La question précédente était
- Question extrêmement difficile. On peut répondre très rapidement dans le cas $p = q = \frac{1}{3}$ par une astuce : en posant Z le nombre de 3 obtenus, on a :

$$X + Y + Z = N$$

donc par linéarité :

$$E\left(\frac{X+Y+Z}{N+1}\right) = E\left(\frac{X}{N+1}\right) + E\left(\frac{Y}{N+1}\right) + E\left(\frac{Z}{N+1}\right) = E\left(\frac{N}{N+1}\right) = 1 - E\left(\frac{1}{N+1}\right).$$

Or dans ce cas, X, Y et Z suivent la même loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{3}$ donc on en déduit que :

$$E\left(\frac{X}{N+1}\right) = \frac{1}{3} - E\left(\frac{1}{3(N+1)}\right)$$

et avec $N+1>0$, on obtient $\mathbb{E}\left(\frac{1}{3(N+1)}\right) > 0$ donc $\mathbb{E}\left(\frac{X}{N+1}\right) \neq \frac{1}{3}$: on en déduit que $\mathbb{E}\left(\frac{X}{N+1}\right)$ ne peut être égale à p pour tout p, donc que $\frac{X}{N+1}$ n'est pas un estimateur sans biais de p.

Exercice 3 *(Exercice sans préparation)*
Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. On suppose que A est diagonalisable, alors il existe P inversible et D diagonale telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

On obtient alors sans difficulté :

$$A^3 = PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1} = PDIDIDP^{-1} = PD^3P^{-1}$$

avec P inversible et D^3 diagonale, comme puissance d'une matrice diagonale, donc A^3 est bien diagonalisable.

2. On suppose dans cette question que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) On obtient sans difficulté :

$$A^3 = I$$

b) On en déduit que le polynôme $X^3 - 1$ est annulateur de A, et on a :

$$X^3 - 1 = 0 \Longleftrightarrow X^3 = 1 \Longleftrightarrow X = 1$$

donc 1 est la seule valeur propre possible de A.

Si A était diagonalisable, 1 serait forcément valeur propre, et il existerait P inversible et D diagonale telle que $A = PDP^{-1}$.
Enfin D ne peut comporter que des valeurs propres de A sur sa diagonale, donc $D = I$ et enfin :

$$A = PIP^{-1} = I$$

qui est absurde, donc A n'est pas diagonalisable.

Exercice 4 *(Exercice avec préparation)*

1. On peut écrire, avec φ la densité de la loi normale centrée réduite :

$$P([X \in [a;b]]) = P([a \leqslant X \leqslant b]) = \int_a^b \varphi(t)\ dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt.$$

Cette probabilité apparaît comme limite dans le théorème central limite : si X_n est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, admettant une espérance m et une variance σ^2 commune, alors la somme centrée réduite des X_i converge en loi vers la loi normale centrée réduite, donc :

$$P\left(\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - nm}{\sigma\sqrt{n}} \in [a;b]\right]\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt.$$

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi normale centrée réduite. On note Φ la fonction de répartition de de X. On pose $Y = |X|$ (valeur absolue de X).

2. *a)* Par théorème de transfert, on s'intéresse à l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\varphi(t)\ dt = 2\int_0^{+\infty} |t|\varphi(t)\ dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}\ dt$$

par parité de φ et de la valeur absolue. On passe alors par l'intégrale partielle :

$$\int_0^A te^{-\frac{t^2}{2}}\ dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0 A = 1 - e^{-\frac{A^2}{2}} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 1.$$

Cette intégrale est donc convergente, et comme la fonction intégrée est positive, elle converge absolument. On en déduit que Y admet une espérance et que :

$$E(Y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \times 1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Pour la variance, on s'intéresse au moment d'ordre 2 de Y, donc à :

$$E(Y^2) = E[\ |X|^2] = E(X^2) = V(X) + [\ \mathbb{E}(X)]^2 = 1 + 0^2.$$

On en déduit que Y admet un moment d'ordre deux et donc une variance (car x admet un moment d'ordre 2) et que :

$$V(Y) = 1 - \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^2 = 1 - \frac{2}{\pi} = \frac{\pi - 2}{\pi}.$$

b) De nouveau avec le théorème de transfert, avec $XY = X|X|$, on s'intéresse à l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t \times |t|\varphi(t)\ dt$$

La fonction intégrée est clairement impaire : si l'intégrale est convergente, alors elle vaudra 0. De plus elle converge si et seulement si l'intégrale suivante converge :

$$\int_0^{+\infty} t|t|\varphi(t)\ dt = \int_0^{+\infty} t^2\varphi(t)\ dt$$

qui converge puisque la loi normale centrée réduite admet un moment d'ordre deux. On en déduit que XY admet une espérance et que :

$$E(XY) = 0.$$

3. On pose $Z = X + Y$.

a) On remarque que

$$Z = X + |X| = \begin{cases} X - X & \text{si } X \leqslant 0 \\ X + X & \text{si } X \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } X \leqslant 0 \\ X + X & \text{si } X \geqslant 0 \end{cases}$$

donc on obtient :

$$Z = 0 \Longleftrightarrow X \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad X \geqslant 0 \text{ et } 2X = 0 \Longleftrightarrow X = 0$$

et finalement :

$$[Z = 0] = [X \leqslant 0] \quad \text{donc} \quad P\,[Z = 0] = \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

b) D'après ce qu'on a vu précédemment, Z est nulle quand X est négative, et vaut $2X$ quand X est positive, donc prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}_+$ dans ce cas. On en déduit que $Z(\Omega) = \mathbb{R}_+$, donc :

- $\forall x < 0$ (avant le support),

$$F_Z(x) = P\,[Z \leqslant x] = 0$$

- Pour $x = 0$,

$$F_Z(0) = P\,[Z \leqslant 0] = P\,[Z < 0] + P\,[Z = 0] = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

- Pour $x > 0$, en utilisant le sce $[X \leqslant 0]\,, [X > 0]$:

$$\begin{aligned} [Z \leqslant x] &= [\,[X \leqslant 0] \cap [Z \leqslant x]] \cup [\,[X > 0] \cap [Z \leqslant x]] = [\,[X \leqslant 0] \cap [0 \leqslant x]] \cup [\,[X > 0] \cap [2X \leqslant x]] \\ &= [X \leqslant 0] \cup \left[0 < X \leqslant \frac{x}{2}\right] = \left(X \leqslant \frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$F_Z(x) = \mathbb{P}\left([[Z \leqslant x]]\right) = P\left(\left[X \leqslant \frac{x}{2}\right]\right) = \Phi\left(\frac{x}{2}\right)$$

et en rassemblant :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ \Phi\left(\frac{x}{2}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

c) Z n'est pas à densité puisqu'il existe une valeur (0) pour laquelle la probabilité de tomber "pile" est non nulle. Elle n'est pas discrète car son support ($\mathbb{R}_+$) est un intervalle.

4. Soit $y \in \mathbb{R}$.

a) Lorsque $y < 0$, l'évènement $[Y \leqslant y]$ est impossible donc :

$$P[\ [X \leqslant 1] \cap [Y \leqslant y]] = 0.$$

Lorsque $y \geqslant 0$, on a :

$$[\ [X \leqslant 1] \cap [Y \leqslant y]] = [\ [X \leqslant 1] \cap (|x| \leqslant y)] = [\ [X \leqslant 1] \cap (-y \leqslant X \leqslant y)] = [-y \leqslant X \leqslant \min(1, y)].$$

On en déduit que pour $0 \leqslant y \leqslant 1$:

$$P[\ [X \leqslant 1] \cap [Y \leqslant y]] = P[-y \leqslant X \leqslant y] = \Phi(y) - \Phi(-y) = \Phi(y) - [1 - \Phi(y)] = 2\Phi(y) - 1.$$

Enfin pour $y > 1$ on a :

$$P[\ [X \leqslant 1] \cap [Y \leqslant y]] = P[-y \leqslant X \leqslant 1] = \Phi(1) - \Phi(-y) = \Phi(1) - [1 - \Phi(y)] = \Phi(1) + \Phi(y) - 1.$$

b) On calcule dans les 3 cas :

- Si $y < 0$,

$$P[X \leqslant 1]\, P[Y \leqslant y] = \Phi(1) \times 0 = 0 = P[\ [X \leqslant 1] \cap [Y \leqslant y]]$$

donc les évènements $[X \leqslant 1]$ et $[Y \leqslant y]$ dont indépendants.

- Si $0 \leqslant y \leqslant 1$,

$$P[X \leqslant 1]\, P[Y \leqslant y] = \Phi(1) P([-y \leqslant X \leqslant y]) = \Phi(1) \times [2\Phi(y) - 1] \neq P[\ [X \leqslant 1] \cap [Y \leqslant y]]$$

(sauf si $2\Phi(y) - 1 = 0$) car $\Phi(1) < 1$ (φ n'est pas nulle après 1, donc la probabilité d'être supérieure à 1 est non nulle), et les évènements $[X \leqslant 1]$ et $[Y \leqslant y]$ ne sont pas indépendants, sauf pour

$$2\Phi(y) - 1 = 0 \Longleftrightarrow \Phi(y) = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow y = 0.$$

- Si $y > 1$,

$$P[X \leqslant 1]\, P[Y \leqslant y] = \Phi(1) P([-y \leqslant X \leqslant y]) = \Phi(1) \times [2\Phi(y) - 1]$$

donc

$$\begin{aligned} P[X \leqslant 1]\, P[Y \leqslant y] = P[\ [X \leqslant 1] \cap [Y \leqslant y]] &\Longleftrightarrow \Phi(1) \times [2\Phi(y) - 1] = \Phi(1) + \Phi(y) - 1 \\ &\Longleftrightarrow \Phi(y)\,(2\Phi(1) - 1) = 2\Phi(1) - 1 \Longleftrightarrow \Phi(y) = 1 \end{aligned}$$

qui est absurde car Φ est strictement croissante donc n'atteint jamais 1, qui est sa limite en $+\infty$.

Finalement les évènements $[X \leqslant 1]$ et $[Y \leqslant y]$ sont indépendants si et seulement si $y \leqslant 0$.

Exercice sans préparation

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 0$.

1. Question très difficile. On suppose que $A^2 \neq 0$, alors en posant u l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A, on a $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$.

On en déduit alors qu'il existe un vecteur x dans $\mathbb{R}^2$ tel que $u^2(x) \neq 0$, et on étudie la liberté de la famille $(x, u(x), u^2(x))$: on considère a, b et c tels que

$$ax + bu(x) + cu^2(x) = 0$$

alors en composant par u et par u^2, on obtient (avec $u(0) = u^2(0) = 0$ car ce sont des applications linéaires) :

$$au(x) + bu^2(x) = 0 \quad \text{et} \quad au^2(x) = 0.$$

De plus $u^2(x) \neq 0$, donc on obtient $a = 0$. On en déduit alors que :

$$bu(x) + cu^2(x) = 0 \quad \text{et} \quad bu^2(x) = 0$$

On obtient de même $b = 0$, puis $cu^2(x) = 0$, et enfin $c = 0$, donc la famille $(x, u(x), u^2(x))$ est libre ; or elle comporte trois vecteurs dans un espace de dimension 2, elle ne peut être libre : c'est absurde et on obtient donc :

$$A^2 = 0.$$

2. On peut conclure à la première partie par caractérisation des sous-espaces vectoriels. Mais comme la dimension est demandée, il faudra de toute manière expliciter l'espace. On sépare deux cas :

- si $A = 0$, alors $AM = 0 = MA$ est vrai pour toute matrice M, donc l'ensemble considéré est $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, qui est bien un espace vectoriel, de dimension 4.

- si $A \neq 0$, un raisonnement analogue à la question 1 montre qu'il existe x dans $\mathbb{R}^2$ tel que la famille $(x, u(x))$ est une base de $\mathbb{R}^2$, et dans cette base la matrice de u est :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit par formule de changement de base qu'il existe une matrice P inversible (constituée des coordonnées de x et $u(x)$, en colonnes, dans la base canonique) telle que :

$$A = PNP^{-1}.$$

On montre alors que l'équation recherchée se ramène à :

$$\begin{aligned} AM = MA \iff & PNP^{-1}M = MPNP^{-1} \iff P^{-1}[PNP^{-1}M]P = P^{-1}[MPNP^{-1}]P \\ \iff & N(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)N. \end{aligned}$$

On pose alors $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on obtient :

$$\begin{aligned} AM = MA \iff & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \\ \iff & \left\{ \begin{array}{l} b = 0 \\ a = d \end{array} \right. \iff P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} = aI + cN \\ \iff & M = P\left([aI + cN]\right)P^{-1} = aPIP^{-1} + cPNP^{-1} = aI + cA. \end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble cherché est $\mathrm{Vect}\,(I, A)$ qui est un espace vectoriel, et la famille (I, A) en est génératrice. Elle est de plus libre si et seulement si A n'est pas colinéaire à I. Si c'était le cas, on aurait :

$$A = \lambda I \quad \text{donc} \quad A^3 = \lambda^3 I = 0 \quad \text{donc} \quad \lambda^3 = 0 \quad \text{donc} \quad \lambda = 0$$

et enfin $A = 0I = 0$ ce qui est absurde. Cette famille est donc libre, c'est une base de l'espace vectoriel donc celui-ci est de dimension 2.

Remarque : on pouvait éviter ce raisonnement par l'absurde en écrivant :

$$aI + bA = 0 \iff P^{-1}(aPIP^{-1} + bPNP^{-1})P = 0 \iff aI + bN = 0$$

qui donne immédiatement $a = c = 0$.

Exercice 5 *(Exercice avec préparation)*

1. Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable X si pour tout x réel tel que F_X est continue en x, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$$

Cas particulier des variables discrètes (la définition précédente est toujours valable, mais il y a une caractérisation beaucoup plus simple). S'il existe un ensemble **discret** I tel que les supports de tous les X_n et de X sont inclus dans I (en général on trouve I comme "limite" des supports des X_n), (X_n) converge en loi vers X si et seulement si :

$$\forall i \in I,\ \lim_{n\to+\infty} P\left[X_n = i\right] = P\left[X = i\right].$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant toutes la loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2}$.

On définit la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les relations :

$$Z_0 = \frac{X_0}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*\ \ Z_n = \frac{Z_{n-1} + X_n}{2}.$$

2. ***a)*** On itère la relation de récurrence (on ne peut procéder par récurrence puisque le résultat n'est pas donné) :

$$Z_n = \frac{Z_{n-1}}{2} + \frac{X_n}{2} = \frac{\frac{Z_{n-2}}{2} + \frac{X_{n-1}}{2}}{2} + \frac{X_n}{2} = \frac{Z_{n-2}}{4} + \frac{X_{n-1}}{4} + \frac{X_n}{2}.$$

A l'ordre suivant on obtient alors :

$$Z_n = \frac{Z_{n-3}}{8} + \frac{X_{n-2}}{8} + \frac{X_{n-1}}{4} + \frac{X_n}{2} = \frac{Z_{n-3}}{2^3} + \frac{X_{n-2}}{2^3} + \frac{X_{n-1}}{2^2} + \frac{X_n}{2}.$$

En itérant k fois on obtiendra alors :

$$Z_n = \frac{Z_{n-k}}{2^k} + \frac{X_{n-(k-1)}}{2^k} + \frac{X_{n-(k-2)}}{2^{k-1}} + \cdots + \frac{X_n}{2}.$$

Enfin lorsqu'on arrive à $k = n$ on obtiendra :

$$Z_n = \frac{Z_0}{2^n} + \frac{X_1}{2^n} + \frac{X_2}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{X_n}{2} = \frac{X_0}{2^{n+1}} + \frac{X_1}{2^n} + \cdots + \frac{X_{n-1}}{2^2} + \frac{X_n}{2}.$$

Enfin cette somme se réécrit avec le symbole $\sum$: en posant i l'indice sur les variables X on remarque que :

$$Z_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{X_i}{2^{n+1-i}} = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-i} X_i.$$

b) On en déduit que

$$Z_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i} X_i$$

ne dépend que des variables $X_0, \ldots, X_{n-1}$. De plus les (X_i) sont indépendantes, donc par lemme des coalitions, Z_{n-1} et X_n sont indépendantes.

c) Par linéarité de l'espérance d'une part, indépendance des X_i et quadracité de la variance d'autre part, Z_n admet une espérance et une variance et :

$$\begin{aligned}
E(Z_n) &= \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-i} E(X_i) = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-i} \times \frac{1}{2} = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2-i} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \sum_{i=0}^{n} 2^i = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} (2^{n+1}-1) \\
&= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
V(Z_n) &= \sum_{i=0}^{n} V\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-i} X_i\right] = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2-2i} V(X_i) = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2-2i} \times \frac{1}{4} = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+4-2i} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+4} \sum_{i=0}^{n} 4^i = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+4} \times \frac{1-4^{n+1}}{1-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+4} \times \frac{2^{2n+2}-1}{3} \\
&= \frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+4}}{3} = \frac{1}{12}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}\right)
\end{aligned}$$

3. On va montrer ce résultat par récurrence sur n, puisque c'est ainsi qu'est définie la suite (Z_n) :

- **Initialisation** : $2^{0+1}Z_0 = 2E_0 = X_0$ suit la loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2}$, qui est bien la loi uniforme sur $[\![0;1]\!]$, avec $2^{0+1}-1 = 2^1-1 = 2-1 = 1$.

- **Hérédité** : on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $2^{n+1}Z_n$ suit la loi uniforme discrète sur $[\![0;2^{n+1}-1]\!]$, alors :

$$2^{n+2}Z_{n+1} = 2^{n+2} \times \frac{Z_n + X_{n+1}}{2} = 2^{n+1}(Z_n + X_{n+1}) = 2^{n+1}Z_n + 2^{n+1}X_{n+1}.$$

La valeur minimale possible est obtenue avec la valeur minimale de $2^{n+1}Z_n$, qui vaut 0, et de X_{n+1}, qui vaut 0 : c'est donc 0.

La valeur maximale possible est obtenue avec la valeur maximale de $2^{n+1}Z_n$, qui vaut $2^{n+1}-1$, et de X_{n+1}, qui vaut 1 : c'est donc :

$$2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \times 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1.$$

Vérifions que toutes les valeurs entières sont obtenues (il est immédiat que toutes les valeurs sont bien entières comme somme de deux entiers) :

  - Avec $X_{n+1} = 0$, Z_{n+1} peut prendre toutes les valeurs de $(2^{n+1}Z_n)(\Omega)$, donc tous les entiers de 0 à $2^{n+1}-1$.

  - Avec $X_{n+1} = 1$, Z_{n+1} donne un entier entre 0 et $2^{n+1}-1$, auquel on ajoute 2^{n+1} : cela donne tous les entiers de

$$0 + 2^{n+1} = 2^{n+1} \quad \text{à} \quad 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1.$$

On obtient bien que $(2^{n+2}Z_{n+1})(\Omega) = [\![0; 2^{n+2-1}]\!]$. Montrons à présent que toutes les probabilités de la loi sont égales : on sait que toutes celles de la loi de $2^{n+1}Z_n$ le sont donc il existe $a \in]0;1[$ tel que :

$$\forall k \in [\![0; 2^{n+1}-1]\!],\ P\left(\left[2^{n+1}Z_n = k\right]\right) = a.$$

On a vu dans la recherche du support que :

$$\forall k \in [\![0; 2^{n+1}-1]\!],\ (2^{n+2}Z_{n+1} = k) = (2^{n+1}Z_n = k) \cap (X_{n+1} = 0)$$

et par indépendance (question 2b),

$$P\left(\left[2^{n+2}Z_{n+1} = k\right]\right) = \frac{1}{2}a.$$

De même on a vu que (et par indépendance pour la probabilité) :

$$\forall k \in [\![2^{n+1}; 2^{n+2}-1]\!],\ (2^{n+2}Z_{n+1} = k) = (2^{n+1}Z_n = k - 2^{n+1}) \cap (X_{n+1} = 1) \quad \text{donc} \quad P\left(\left[2^{n+2}Z_{n+1} = k\right]\right) = \frac{1}{2}a$$

On en déduit bien que toutes les probabilités de la loi sont égales, c'est une loi uniforme et $2^{n+2}Z_{n+1}$ suit bien la loi uniforme discrète sur $[\![0; 2^{n+2}-1]\!]$, la propriété est encore vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{n+1}Z_n$ suit la loi uniforme discrète sur $[\![0; 2^{n+1}-1]\!]$.

4. Comme la variable aléatoire d'arrivée est à densité, sa fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$, et il faut donc prouver la convergence de $F_{Z_n}(x)$ vers $F_Z(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On commence donc par chercher la fonction de répartition de Z_n.

D'après la question précédente, on remarque que Z_n suit la loi uniforme discrète sur l'ensemble :

$$Z_n(\Omega) = \left\{\frac{k}{2^{n+1}} \text{ tq } k \in [\![0; 2^{n+1}-1]\!]\right\} = \left\{0; \frac{1}{2^{n+1}}; \ldots; \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right\} = \left\{0; \frac{1}{2^{n+1}}; \ldots; 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right\}$$

On en déduit que pour tout $x < 0$ (avant le support) on a :

$$F_{Z_n}(x) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

De même pour tout $x \geqslant 1$ (après le support pour tout n, puisque $1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ tend en croissant vers 1 :

$$F_{Z_n}(x) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Considérons à présent un $x \in [0;1[$, on a :

$$F_{Z_n}(x) = \sum_{k=0}^{j(x)} \mathbb{P}\left[Z_n = k\right]$$

avec $j(x)$ le plus grand entier vérifiant :

$$\frac{j}{2^{n+1}} \leqslant x.$$

On en déduit d'une part que :

$$F_{Z_n}(x) = \sum_{k=0}^{j(x)} \frac{1}{\mathrm{Card}(\llbracket 0; 2^{n+1}-1 \rrbracket)} = \sum_{k=0}^{j(x)} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{j(x)+1}{2^{n+1}}$$

et d'autre part pour exprimer $j(x)$, que

$$\frac{j(x)}{2^{n+1}} \leqslant x < \frac{j(x)+1}{2^{n+1}} \iff j(x) \leqslant 2^{n+1}x < j(x)+1 \iff j(x) = \lfloor 2^{n+1}x \rfloor.$$

Finalement on en déduit que :

$$F_{Z_n}(x) = \frac{\lfloor 2^{n+1}x \rfloor + 1}{2^{n+1}}.$$

Pour déterminer la limite de cette quantité, il faut encadrer la partie entière et utiliser le théorème d'encadrement. On sait que :

$$\lfloor 2^{n+1}x \rfloor \leqslant 2^{n+1}x < \lfloor 2^{n+1}x \rfloor + 1 \quad \text{donc} \quad 2^{n+1}x - 1 < \lfloor 2^{n+1}x \rfloor \leqslant 2^{n+1}x.$$

On en déduit (on rajoute un et on divise par un nombre strictement positif, opérations strictement croissantes) que :

$$\frac{2^{n+1}x}{2^{n+1}} < F_{Z_n}(x) \leqslant \frac{2^{n+1}x+1}{2^{n+1}} \iff x < F_{Z_n}(x) \leqslant x + \frac{1}{2^{n+1}}$$

et comme les termes de gauche et droite ont pour limite immédiate x lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = x.$$

Enfin en rassemblant tous les cas, on a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$F_{Z_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

On reconnaît exactement la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0;1]$ (à densité), donc si Z est une variable aléatoire qui suit cette loi, (Z_n) converge en loi vers Z.

Exercice sans préparation

1. Cette intégrale est généralisée en 0 (car ln n'y est pas défini) et en 1 (le dénominateur vaut alors 0).

- Au voisinage de 0, par croissances comparées, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^n \ln x}{x^n - 1} = \frac{0}{-1} = 0$$

  donc l'intégrale est faussement généralisée (la fonction intégrée est prolongeable par continuité en 0), elle converge donc.

- Au voisinage de 1, la limite donne une forme indéterminée. On cherche un équivalent de chaque facteur au point 1.

- Par produit immédiat, x^n converge vers 1 donc

$$x^n \underset{x \to 1}{\sim} 1.$$

- Pour le ln, on pose $x = 1 + y \iff y = x - 1$, avec y qui tend vers 0, on a par DL :

$$\ln(1+y) = y + o(y) \underset{y \to 0}{\sim} y$$

donc

$$\ln x \underset{x \to 1}{\sim} x - 1.$$

- Enfin avec le même changement de variable et par DL :

$$(1+y)^n - 1 = 1 + ny + o(y) - 1 = ny + o(y) \underset{y \to 0}{\sim} ny$$

donc

$$x^n - 1 \underset{x \to 1}{\sim} n(x-1).$$

On obtient finalement :

$$\frac{x^n \ln x}{x^n - 1} \underset{x \to 1}{\sim} \frac{1 \times (x-1)}{n(x-1)} = \frac{1}{n} \underset{x \to 1}{\longrightarrow} \frac{1}{n}.$$

De nouveau la fonction est prolongeable par continuité, et l'intégrale est faussement généralisée donc converge au voisinage de 1.

Finalement l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n \ln x}{x^n - 1}$ converge, elle existe bien.

2. La question appelle clairement le théorème de convergence monotone, puisque la limite n'est pas demandée. On étudie la monotonie de (u_n), en cherchant le signe de :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \ln x \left(\frac{x^{n+1}}{x^{n+1} - 1} - \frac{x^n}{x^n - 1} \right) dx = \int_0^1 \ln x \times \frac{x^{n+1}(x^n - 1) - x^n(x^{n+1} - 1)}{(x^{n+1} - 1)(x^n - 1)} \, dx \\
&= \int_0^1 \frac{\ln x}{(x^{n+1} - 1)(x^n - 1)} \times x^n \times \big(x(x^n - 1) - x^{n+1} + 1 \big) \, dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^n \ln x}{(x^{n+1} - 1)(x^n - 1)} \big(x^{n+1} - x - x^{n+1} + 1 \big) \, dx = \int_0^1 \frac{x^n (1-x) \ln x}{(x^{n+1} - 1)(x^n - 1) \, dx}
\end{aligned}$$

Or pour tout $x \in]0;1[$, on a :

$$x^n \geqslant 0 \quad 1 - x \geqslant 0 \quad \ln x \leqslant 0 \quad x^n \leqslant 1 \text{ donc } x^n - 1 \leqslant 0 \quad x^{n+1} \leqslant 1 \text{ donc } x^{n+1} - 1 \leqslant 0$$

et par produit et quotient de deux facteurs positifs et trois négatifs, la fonction intégrée est négative sur $]0;1[$. Comme les bornes sont dans l'ordre croissant, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n \leqslant 0$$

et la suite (u_n) est décroissante.

Enfin la suite est positive car la fonction intégrée est positive sur $]0;1[$ avec un facteur positif et deux négatifs et les bornes sont dans l'ordre croissant, donc elle décroît et elle est minorée par 0 : c'est une suite convergente.

Exercice 6 *(Exercice avec préparation)*

1. Soit f une fonction de classe C^{p+1} sur $[0;1]$, alors pour tous a et b de $[0;1]$, on a :

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a)+f'(a)(b-a)+\cdots+f^{(p)}(a)\frac{(b-a)^p}{p!}+\int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!}f^{(p+1)}(t)\ dt \\ &= \sum_{k=0}^{p} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!}+\int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!}f^{(p+1)}(t)\ dt \end{aligned}$$

2. Soit x un réel de l'intervalle $[0;1[$.

a) Comme $t \in [0;x]$ et $x \in [0;1[$ on a $0 \leqslant t \leqslant x < 1$, et donc :

$$x-t \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 1-t>0 \quad \text{donc par quotient} \quad \frac{x-t}{1-t} \geqslant 0.$$

Pour l'autre côté, on considère la différence :

$$\frac{x-t}{1-t}-x=\frac{x-t-x(1-t)}{1-t}=\frac{x-t-x+xt}{1-t}=\frac{t(x-1)}{1-t}$$

et comme $t \geqslant 0$, $x-1 \leqslant 0$ et $1-t>0$, cette quantité est négative donc on a bien :

$$\forall t \in [0;x],\ 0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant x.$$

b) On reconnaît à droite une intégration de la série géométrique. On part de la somme géométrique finie : pour tout $p \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{n=1}^{p} x^{n-1}=\sum_{n=0}^{p-1} x^n=\frac{1-x^p}{1-x}.$$

On intègre cette inégalité entre 0 et x (en la réécrivant pour tout t au lieu de x) :

$$\sum_{n=1}^{p}\int_0^x t^{n-1}\ dt=\int_0^x \frac{1-t^p}{1-t}\ dt=\int_0^x \frac{1}{1-t}\ dt-\int_0^x \frac{t^p}{1-t}\ dt.$$

On calcule les intégrales "faciles" :

$$\sum_{n=1}^{p}\int_0^x t^{n-1}\ dt=\sum_{n=1}^{p}\frac{x^n}{n}$$

et

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\ dt=[-\ln(1-t)]_0\,x=-\ln(1-x)$$

donc :

$$\ln(1-x)=\int_0^x \frac{t^p}{1-t}\ dt-\sum_{n=1}^{p}\frac{x^n}{n}.$$

Enfin l'intégrale restante ne peut pas se calculer, mais on va montrer que sa limite lorsque p tend vers $+\infty$ est nulle : pour cela on encadre l'intégrale en écrivant :

$$0 \leqslant t \leqslant x \quad \text{donc} \quad -x \leqslant -t \leqslant 0 \quad \text{donc} \quad 1-x \leqslant 1-t \leqslant 1$$

et comme tous les termes sont strictement positifs (avec $x<1$), par stricte décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$1 \leqslant \frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-x} \quad \text{et enfin} \quad t^p \leqslant \frac{t^p}{1-t} \leqslant \frac{t^p}{1-x}$$

avec $t^p \geqslant 0$. On intègre avec les bornes dans l'ordre croissant :

$$\int_0^x t^p \, dt \leqslant \int_0^x \frac{t^p}{1-t} \, dt \leqslant \frac{1}{1-x} \int_0^x t^p \, dt$$

et en calculant les termes de gauche et droite :

$$\frac{x^{p+1}}{p+1} \leqslant \int_0^x \frac{t^p}{1-t} \, dt \leqslant \frac{x^{p+1}}{(1-x)(p+1)}.$$

Enfin comme $|x| < 1$, par quotient de limites, les deux termes extrémaux tendent vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$, et par encadrement le terme central aussi.

Enfin on peut passer à la limite l'égalité obtenue précédemment sur $\ln(1-x)$, avec tous les termes qui convergent :

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

3. Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{P}([[X = n]]) = \frac{1}{n(n+1)}$.

a) Difficile. Comme ce n'est pas une série usuelle, il faut penser à faire apparaître un télescopage en remarquant que :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

On peut alors écrire :

$$P([X \in \mathbb{N}^*]) = \sum_{n=1}^{+\infty} P[X = n] = \lim_{p \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{p \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{p+1} \right) = 1.$$

b) Soit $r \geqslant 1$, on étudie l'existence du moment d'ordre r de X, en considérant la série de terme général :

$$n^r \mathbb{P}[X = n] = \frac{n^r}{n(n+1)} = \frac{n^{r-1}}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} n^{r-2} = \frac{1}{n^{2-r}}.$$

Les deux termes généraux sont positifs donc par théorème de comparaison X admet un moment d'ordre r si et seulement si la série de terme général $\frac{1}{n^{2-r}}$ est convergente. Cette série de Riemann converge si et seulement si :

$$2 - r > 1 \Longleftrightarrow r < 1 \Longleftrightarrow r \leqslant 0$$

puisque r est un entier : la variable X n'admet donc aucun moment (à part celui d'ordre 0, qui correspond à la somme des probabilités et qui doit obligatoirement exister et valoir 1 pour x soit une variable aléatoire).

c) Par théorème de transfert, on s'intéresse à la série (sous réserve de convergence absolue) :

$$E(s^X) \quad = \quad \sum_{n=1}^{+\infty} s^n P\left[X=n\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s^n}{n(n+1)}.$$

La convergence absolue de cette série s'obtient immédiatement, avec $s^n \leqslant 1$ donc $\frac{s^n}{n(n+1)} \leqslant \frac{1}{n(n+1)}$ qui est le terme général d'une série convergente (3a), et avec les deux termes généraux positifs le théorème de comparaison donne la convergence puis la convergence absolue (puisque le terme général est positif) de la série considérée.

Pour la calculer (seulement valable pour $s \in]0;1[$), on pense à utiliser la question 2, et pour ne plus avoir que n au dénominateur on pense à la transformation de la question 3a :

$$\begin{aligned}
E(s^X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s^n}{n+1} = -\ln(1-s) - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{s^{n-1}}{n} \\
&= -\ln(1-s) - \frac{1}{s}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s^n}{n} - \frac{s}{1}\right) = -\ln(1-s) - \frac{1}{s}\left(-\ln(1-s) - s\right) \\
&= -\ln(1-s) + \frac{\ln(1-s)}{s} + 1 = \frac{-s\ln(1-s) + \ln(1-s) + s}{s} = \frac{s + (1-s)\ln(1-s)}{s}.
\end{aligned}$$

d) On calcule les valeurs en $s=0$ et $s=1$:

$$E(0^X) = E(0) = 0 \quad \text{et} \quad E(1^X) = E(1) = 1$$

donc :

$$\phi(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s = 0 \\ \frac{s+(1-s)\ln(1-s)}{s} & \text{si } 0 < s < 1 \\ 1 & \text{si } s = 1 \end{cases}$$

Cette fonction est continue (et dérivable) sur $]0;1[$ comme somme, produit, quotient, composée de fonctions dérivables, avec $s \neq 0$ et $1-s > 0$.

Etudions la continuité en 0 et 1 :

- Au voisinage de 0, par DL de $\ln(1-s)$, on a :

$$\phi(s) = 1 + \frac{(1-s)\left(-s - \frac{s^2}{2} + o(s^2)\right)}{s} = 1 + (1-s)\left(-1 - \frac{s}{2} + o(s)\right) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 1 + 1\times(-1) = 0 = \phi(0)$$

  et ϕ est continue en 0.

- Au voisinage de 1, par croissances comparées (avec $y = 1-s$ qui tend vers 0), on obtient :

$$\lim_{s\to 1} \phi(s) = \frac{1+0}{1} = 1 = \phi(1)$$

  et ϕ est continue en 1.

On en déduit que ϕ est continue sur $[0;1]$, on étudie à présent sa dérivabilité en 0 et 1 :

- Au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\phi(s)-\phi(0)}{s-0} &= \frac{\phi(s)}{s}=\frac{s+(1-s)\ln(1-s)}{s^2}=\frac{s+(1-s)\left(-s-\frac{s^2}{2}+o(s^2)\right)}{s^2}\\ &= \frac{1+(1-s)\left(-1-\frac{s}{2}+o(s)\right)}{s}=\frac{1-1-\frac{s}{2}+s+o(s)}{s}=\frac{1}{2}+o(1)\\ &\underset{s\to 0}{\longrightarrow}\frac{1}{2}\end{aligned}$$

donc ϕ est dérivable en 0.

- Au voisinage de 1, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\phi(s)-\phi(1)}{s-1} &= \frac{\phi(s)-1}{s-1}=\frac{\frac{s+(1-s)\ln(1-s)}{s}-\frac{s}{s}}{s-1}=\frac{s+(1-s)\ln(1-s)-s}{s(s-1)}\\ &= \frac{(1-s)\ln(1-s)}{s(s-1)}=-\frac{\ln(1-s)}{s}\underset{s\to 1}{\longrightarrow}-\frac{-\infty}{1}=+\infty\end{aligned}$$

donc ϕ n'est pas dérivable en 1.

On en déduit que ϕ est continue sur $[0;1]$, dérivable sur $[0;1[$, mais pas dérivable en 1.

e) Par théorème de transfert, on s'intéresse à la série :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ns^nP\left[X=n\right]=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{s^n}{n+1}.$$

Cette série est à termes positifs ; pour $0\leqslant s<1$, le terme général est négligeable devant s^n qui est le terme général d'une série convergente, donc l'espérance existe bien.

Pour $s=1$, on reconnaît la série harmonique, la série diverge et l'espérance n'existe pas.

Pour $s>1$, le terme général diverge par croissances comparées, la série diverge donc grossièrement et l'espérance n'existe pas. Enfin, pour $0\leqslant s<1$:

$$E(Xs^X)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{s^n}{n+1}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{s^{n-1}}{n}=\frac{1}{s}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{s^n}{n}=\frac{-\ln(1-s)-s}{s}.$$

Pour le moment d'ordre deux, toujours par transfert, on s'intéresse à :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2s^{2n}P\left[X=n\right]=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{ns^{2n}}{n+1}.$$

Cette série est à termes positifs, et le terme général est équivalent en $+\infty$ à $s^{2n}=(s^2)^n$, donc la série converge absolument si et seulement si :

$$s^2<1\Longleftrightarrow 0\leqslant s<1$$

Enfin pour ces valeurs de s, on a :

$$\begin{aligned}E(X^2s^{2X}) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1-1)(s^2)^n}{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}(s^2)^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(s^2)^n}{n+1}\\ &= \frac{1}{1-s^2}-1-E(Xs^X)=\frac{s^2}{1-s^2}+\frac{\ln(1-s)+s}{s}.\end{aligned}$$

Enfin Xs^X admet une variance si et seulement si $0 \leqslant s < 1$, et :

$$V(Xs^X) = \frac{s^2}{1-s^2} + \frac{\ln(1-s)+s}{s} - \left(\frac{\ln(1-s)+s}{s}\right)^2.$$

<u>**Exercice sans préparation**</u>

1. On étudie les variations de f : f est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

et ce polynôme du second degré a pour discriminant $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$, donc avec $3 > 0$, $f'(x)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec pour limites $+\infty$ et $-\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$ (terme prépondérant x^3 à chaque fois), donc par théorème de bijection, f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. Pour qu'un polynôme soit surjectif, il faut qu'il prenne toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$. Pour cela, comme il est continue, il faut et il suffit qu'il ait une limite égale à $-\infty$ et une égale à $+\infty$, et comme les seules limites sont en $+\infty$ et $-\infty$, l'une doit être égale à $+\infty$, l'autre à $-\infty$.

Or un polynôme est équivalent en $\pm\infty$, à son terme de plus haut degré, qui sera de la forme $a_n x^n$, avec $a_n \neq 0$ (où le polynôme est de degré n). La limite en $+\infty$ sera décidée par le signe de a_n, et celle en $-\infty$ par le signe de a_n et la parité de n.

Si n est pair, les deux limites sont les mêmes (car x^n a la même limite en $+\infty$et $-\infty$), si n est impaire elle seront opposées, et dans tous les cas elles seront infinies.

On en déduit qu'un polynôme est surjectif de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ si et seulement si il est de degré impair.

3. Pour être injective, une fonction continue à valeurs réelles doit être strictement monotone, donc sa dérivée (tout polynôme est dérivable) ne doit jamais s'annuler.

on en déduit que la dérivée f' de f n'est pas surjective, donc par 2. f' est de degré pair, et f est de degré impair.

Je ne vois comment aller plus loin sans la décomposition en facteurs premiers des polynômes réels, qui n'est pas au programme, et qui permettrait de prouver que f' doit s'écrire :

$$f'(x) = \prod_{k=1} pP_k(x)$$

avec, pour tout k, P_k un polynôme du second degré dont le discriminant est strictement négatif.

Exercice 7 *(Exercice avec préparation)*

1. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements, avec I un ensemble discret (fini ou indexé par $\mathbb{N}$) et B un évènement, alors :

$$B = \bigcup_{i\in I}^{(} A_i \cap B)$$

avec l'union incompatible car les (A_i) le sont, et les A_i de probabilité non nulles donc par probabilités composées on obtient :

$$P\left([B]\right) = \sum_{i\in I}^{P} (A_i \cap B) = \sum_{i\in I}^{P} \left([A_i]\right) P_{A_i}(B).$$

Soit p et q deux réels vérifiant $0 < p < 1$ et $p + 2q = 1$. On note Δ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$\Delta = \begin{pmatrix} p & q & q \\ q & p & q \\ q & q & p \end{pmatrix}$$

2. Δ est symétrique donc diagonalisable.

3. Il faut donc déterminer les valeurs propres de Δ. On remarque que

$$\Delta = pI + qA$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est symétrique donc diagonalisable, donc en diagonalisant A on obtiendra :

$$\Delta = pI + qPD'P^{-1} = pPIP^{-1} + qPD'P^{-1} = P\left(\left[pI + qD'\right]\right)P^{-1}$$

et les valeurs propres de Δ sont donc données par :

$$\mathrm{Sp}(\Delta) = \{p + q\lambda \text{ tq } \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}.$$

On cherche donc les valeurs propres de A, c'est-à-dire les λ réels tels que $A-\lambda I$ n'est pas inversible :

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow L_1 \leftrightarrow L_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda-1 & 1+\lambda \\ 0 & 1+\lambda & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda-1 & 1+\lambda \\ 0 & 0 & 2+\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

et les valeurs propres de A sont les solution de $-\lambda - 1 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -1$ et de $-\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$, qui a pour discriminant et racines :

$$\Delta = 1 + 8 = 9 \quad \lambda_1 = \frac{-1-3}{-2} = 2 \quad \lambda_2 = \frac{-1+3}{-2} = -1$$

On en déduit que

$$D' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad D = \begin{pmatrix} p-q & 0 & 0 \\ 0 & p-q & 0 \\ 0 & 0 & p+2q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-q & 0 & 0 \\ 0 & p-q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On ne déduit que

$$D^n = \begin{pmatrix} (p-q)^n & 0 & 0 \\ 0 & (p-q)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on remarque par inégalité triangulaire que

$$|p-q| = |p+(-q)| \leqslant |p| + |-q| = p+q = p+2q-q = 1-q < 1$$

donc on peut conclure que :

$$D^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un village possède trois restaurants R_1, R_2 et R_3. Un couple se rend dans un de ces trois restaurants chaque dimanche. A l'instant $n = 1$ (c'est-à-dire le premier dimanche) il choisit le restaurant R_1, puis tous les dimanches suivants (instants $n = 2$, $n = 3$, etc.) il choisit le même restaurant que le dimanche précédent avec la probabilité p ou change de restaurant avec la probabilité $2q$, chacun des deux autres restaurants étant choisis avec la même probabilité.

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

4. On note A_n, B_n et C_n les trois évènements. La formule des probabilités totales avec le sce (A_n, B_n, C_n) donne :

$$A_{n+1} = (A_n \cap A_{n+1}) \cup (B_n \cap A_{n+1}) \cup (C_n \cap (A_{n+1})$$

et de même pour B_{n+1} et C_{n+1} ; par incompatibilité de la réunion et probabilité composées, on obtient :

$$\begin{cases} P([A_{n+1}]) = pP([A_n]) + qP([B_n]) + qP([C_n]) \\ P([B_{n+1}]) = qP([A_n]) + pP([B_n]) + qP([C_n]) \\ P([C_{n+1}]) = qP([A_n]) + qP([B_n]) + pP([C_n]) \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{pmatrix} P([A_{n+1}]) \\ P([B_{n+1}]) \\ P([C_{n+1}]) \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} P([A_n]) \\ P([B_n]) \\ P([C_n]) \end{pmatrix}$$

Une récurrence immédiate donne alors :

$$\begin{pmatrix} P([A_n]) \\ P([B_n]) \\ P([C_n]) \end{pmatrix} = \Delta^{n-1} \begin{pmatrix} P([A_1]) \\ P([B_1]) \\ P([C_1]) \end{pmatrix} = PD^{n-1}P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour aller plus loin il faut la matrice P et P^{-1} : en calculant les sous-espaces propres de A puis en inversant la matrice P on obtient :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui donne finalement :

$$\begin{pmatrix} P([A_n]) \\ P([B_n]) \\ P([C_n]) \end{pmatrix} = \frac{1}{3}PD^{n-1}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}P\begin{pmatrix} -(p-q)^{n-1} \\ -(p-q)^{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2(p-q)^{n-1} \\ 1-(p-q)^{n-1} \\ 1-(p-q)^{n-1} \end{pmatrix}$$

5. Soit T la variable aléatoire égale au rang du premier dimanche où le couple retourne au restaurant R_1, s'il y retourne, et 0 sinon.

a) Le premier retour au restaurant se fait au minimum lors du 2e jour, et la valeur 0 est rajoutée artificiellement donc :

$$T(\Omega) = [\![2;+\infty[\![\cup \{0\}.$$

Pour $k=2$, on a :

$$[T=2] = A_1 \cap A_2 \quad \text{donc} \quad P[T=2] = 1 \times p = p.$$

Pour tout $k \geqslant 3$, en a de plus :

$$[T=k] = A_1 \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k.$$

Or lorsqu'on est à un restaurant autre que le premier, la probabilité d'aller au premier à l'instant suivant est q, donc de ne pas y aller est $1-q = p+q$, ce qui donne :

$$P[T=k] = 1 \times (2q) \times (p+q) \times \cdots \times (p+q) \times q = 2q(p+q)^{k-3}q = 2q^2(p+q)^{k-3}.$$

Enfin on calcule la dernière probabilité à partir des autres :

$$\begin{aligned} P[T=0] &= 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} P[T=k] = 1 - p - 2q^2\sum_{k=3}^{+\infty}(p+q)^{k-3} = 1 - p - 2q^2\sum_{k=0}^{+\infty}(p+q)^k \\ &= 1 - p - 2q^2 \times \frac{1}{1-(p+q)} = 1 - p - 2q^2 \times \frac{1}{q} = 1 - p - 2q = 1 - (p+2q) = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

b) On a vu que la valeur 0 n'arrive qu'avec une probabilité 0, on peut donc la retirer. On considère les séries :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} kP[T=k] = 2p + 2q^2\sum_{k=3}^{+\infty} k(p+q)^{k-3}$$

et

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k^2P[T=k] = 4p + 2q^2\sum_{k=3}^{+\infty} k^2(p+q)^{k-3}$$

Comme $0 < p+q = 1-q < 1$, ces séries géométriques dérivées et dérivées secondes convergent absolument donc T admet une espérance, un moment d'ordre deux, et enfin une variance et :

$$\begin{aligned} E(T) &= 2p + \frac{2q^2}{(p+q)^2}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k(p+q)^{k-1} - 1 - 2(p+q)\right) = 2p + \frac{2q^2}{(1-q)^2}\left(\frac{1}{[1-(p+q)]^2} - 1 - 2(1-q)\right) \\ &= 2p + \frac{2q^2}{(1-q)^2}\left(\frac{1}{q^2} - 1 - 2(1-q)\right) = 2p + \frac{2q^2}{(1-q)^2} \times \frac{1-q^2-2q^2(1-q)}{q^2} \\ &= 2p + 2 \times \frac{(1-q)(1+q) - 2q^2(1-q)}{(1-q)^2} = 2\left(p + \frac{1+q-2q^2}{1-q}\right). \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
E(T^2) &= 4p + 2q^2 \sum_{k=3}^{+\infty} [k(k-1)+k](p+q)^{k-3} = 2p + 2q^2 \sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(p+q)^{k-3} + 2q^2 \sum_{k=3}^{+\infty} k(p+q)^{k-3} \\
&= 4p + 2 \times \frac{1+q-2q^2}{1-q} + \frac{2q^2}{p+q}\left(\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(p+q)^{k-2} - 2\right) \\
&= 4p + 2 \times \frac{1+q-2q^2}{1-q} + \frac{2q^2}{1-q}\left(\frac{2}{[1-(p+q)]^3} - 2\right) \\
&= 4p + 2 \times \frac{1+q-2q^2}{1-q} + \frac{2q^2}{1-q}\left(\frac{2}{q^3} - 2\right) = 4p + 2 \times \frac{1+q-2q^2}{1-q} + 4\frac{1-q^3)}{(1-q)q}
\end{aligned}$$

et enfin :

$$\mathbb{V}(T) = 4p + 2 \times \frac{1+q-2q^2}{1-q} + 4\frac{1-q^3)}{(1-q)q} - 4\left(p + \frac{1+q-2q^2}{1-q}\right)^2$$

6. On réalise l'expérience sur 52 dimanches, en rajoutant un compteur qui devra être incrémenté) chaque visite de R_1 et qui sera divisé par 52 à la fin de la boucle pour avoir la fréquence de visite (on rassemble les restaurants 1 et 2 en un seul restaurant, noté 2) :

```
x = 1
c = 1
for k = 2 :52 do
 if x = 1 then
 if rand()<p then c = c + 1
 else x = 2
 end
 else if rand()<q then
 x = 1, c = c + 1
 end
 end
end
f = c/52
```

Exercice sans préparation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction réelle f_n par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x + 1 - \frac{e^x}{n}$.

1. On étudie la fonction f_n sur $\mathbb{R}_-$: elle y est dérivable, avec

$$f_n'(x) = 1 - \frac{e^x}{n} = \frac{n-e^x}{n} > 0$$

puisque $x \leqslant 0$, donc $e^x \leqslant 1$, et enfin $n - e^x \geqslant n - 1 \geqslant 0$ avec $n \geqslant 1$. On en déduit que f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$, avec par opérations élémentaires

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty \quad \text{et} \quad f_n(0) = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \geqslant 0$$

On en déduit que f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_-$ dans $\left]-\infty; \frac{n-1}{n}\right]$, avec $0 \in \left]-\infty; \frac{n-1}{n}\right]$, donc il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_-$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

2. ***a)*** Pour comparer x_n et x_{n+1}, on va comparer leurs images par f_n : on sait que $f_n(x_n) = 0$ et on a :

$$f_n(x_{n+1}) = x_{n+1} - 1 - \frac{e^{x_{n+1}}}{n}$$

Or on sait que $f_{n+1}(x_{n+1}) = x_{n+1} + 1 - \frac{e^{x_{n+1}}}{n+1} = 0$ donc on obtient :

$$f_n(x_{n+1}) = \frac{e^{x_{n+1}}}{n+1} - \frac{e^{x_{n+1}}}{n} = e^{x_{n+1}} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) = -\frac{e^{x_{n+1}}}{n(n+1)} < 0$$

et on en déduit par croissance de f_n sur $\mathbb{R}_-$ que :

$$f_n(x_{n+1}) < 0 = f_n(x_n) \quad \text{donc} \quad x_{n+1} < x_n$$

et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite (x_n) est décroissante.

On cherche alors l'existence d'un minorant à la suite. 0 n'a aucune chance d'être un minorant puisque la suite est négative, essayons -1. Pour comparer -1 et x_n, on compare les images par f_n :

$$f_n(-1) = -1 + 1 - \frac{e^{-1}}{n} = -\frac{1}{ne} < 0 = f_n(x_n)$$

donc par croissance de f_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geqslant -1$ et la suite (x_n) est décroissante et minorée par -1 : elle converge.

b) On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x_n) = x_n + 1 - \frac{e^{x_n}}{n} = 0$$

donc en passant à la limite cette égalité, on obtient immédiatement :

$$\ell + 1 - \frac{e^{\ell}}{+\infty} = 0 \quad \text{donc} \quad \ell + 1 = 0 \quad \text{et enfin} \quad \ell = -1.$$

3. On pa donc $y_n = x_n + 1$, et d'après la définition de x_n on a :

$$f_n(x_n) = y_n - \frac{e^{x_n}}{n} = 0 \quad \text{donc} \quad y_n = \frac{e^{x_n}}{n}.$$

Or le numérateur converge par composition vers $\frac{1}{e}$, qui n'est pas nul donc c'est un équivalent de ce numérateur. Par quotient on en déduit que :

$$y_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{ne}.$$

Exercice 8 *(Exercice avec préparation)*

1. Une matrice est diagonalisable lorsque l'une des conditions suivantes est vérifiées :

- Elle est symétrique (condition suffisante).
- Elle est d'ordre n et admet n valeurs propres distinctes (condition suffisante).
- Elle est d'ordre n et la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut n (condition nécessaire et suffisante).
- Il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de cette matrice (nécessaire et suffisante).

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. ***a)*** $AX = \lambda X$ possède des solutions non nulles si et seulement si $A - \lambda I$ n'est pas inversible, et on en cherche une réduite triangulaire :

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \iff L_1 \leftrightarrow L_3 \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff L_3 \leftrightarrow 2L_3 - \lambda L_1 \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda & \lambda(\lambda-2) \end{pmatrix}$$

$$\iff L_2 \leftrightarrow L_2 - L_3 \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & -2 & 1-\lambda(\lambda-2) \\ 0 & 2-\lambda & \lambda(\lambda-2) \end{pmatrix}$$

$$\iff L_3 \leftrightarrow 2L_3 + (2-\lambda)L_2 \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & -2 & 1-\lambda(\lambda-2) \\ 0 & 0 & P([\lambda]) \end{pmatrix}$$

avec

$$P([\lambda]) = 2\lambda(\lambda-2) + (2-\lambda)[1 - \lambda(\lambda-2)]$$

On simplifie alors $P([\lambda])$, en espérant faire apparaître le polynôme annoncé :

$$\begin{aligned} P([\lambda]) &= (\lambda-2)\Big[\,2\lambda - 1 + \lambda(\lambda-2)\Big] = (\lambda-2)\Big[\,2\lambda - 1 + \lambda^2 - 2\lambda\Big] \\ &= (\lambda-2)(\lambda^2-1). \end{aligned}$$

On en déduit sans difficulté que la valeurs de λ correspondantes sont $-1, 1$ et 2, qui sont donc les valeurs propres de A. On cherche alors les sous-espaces propres associés en se servant de la réduite triangulaire précédente :

- Pour $\lambda = -1$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on obtient :

$$AX = -X \iff (A+I)X = 0 \iff \left\{ \begin{aligned} -2x + y + 3z &= 0 \\ -2y - 2z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} x &= z \\ y &= -z \end{aligned} \right.$$

$$\iff X = z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $E_{-1}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- Pour $\lambda = 1$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on obtient :

$$AX = X \iff (A - I)X = 0 \iff \left\{ \begin{array}{r} -2x + y + z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = z \end{array} \right.$$

$$\iff X = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- Pour $\lambda = 2$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on obtient :

$$AX = 2X \iff (A - 2I)X = 0 \iff \left\{ \begin{array}{r} -2x + y \quad\; = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 1/4z \\ y = 1/2z \end{array} \right.$$

$$\iff X = z \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$.

b) A est diagonalisable car elle est d'ordre 3 et admet 3 valeurs propres distinctes. On en déduit que la concaténation des bases des sous-espaces propres forme une base de vecteurs propres de A, donc en posant :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

P est inversible et la formule de changement de base donne $A = PDP^{-1}$.

3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+3} = 2x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}$ et $Y_n = P^{-1}X_n$.

a) On obtient sans difficulté que :

$$X_{n+1} = AX_n.$$

b) On en déduit que

$$Y_{n+1} = P^{-1}AX_n = P^{-1}PDP^{-1}X_n = DP^{-1}X_n = DY_n$$

donc par une récurrence immédiate ou par itération de la relation,

$$Y_n = D^n Y_0.$$

c) On va calculer x_n pour tout n : on commence par calculer Y_n : il faut pour cela calculer $Y_0 = P^{-1}X_0$, et donc P^{-1}. Par méthode de Gauss-Jordan on obtient sans difficulté :

$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad Y_0 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2x_0 - 3x_1 + x_2 \\ 6x_0 + 3x_1 - 3x_2 \\ -2x_0 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

puis

$$Y_n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} Y_0 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} (-1)^n[2x_0 - 3x_1 + x_2] \\ 3(2x_0 + x_1 - x_2) \\ 2^{n+1}(x_2 - x_0) \end{pmatrix}$$

et enfin x_n est la première ligne de $X_n = PY_n$, donc :

$$x_n = \frac{1}{6}\left[(-1)^n[2x_0 - 3x_1 + x_2] + 3(2x_0 + x_1 - x_2) + 2^{n+1}(x_2 - x_0)\right]$$

Pour que cette suite converge, il faut que les coefficients devant les suites géométriques divergentes soient nuls. En effet si $x_2 - x_0 \neq 0$, on montre que :

$$x_n = \frac{1}{6}(x_2 - x_0)2^{n+1}(1 + o(1)) \underset{+\infty}{\sim} (x_2 - x_0)2^{n+1}$$

diverge, donc il faut que $x_2 - x_0 = 0$. Ensuite puisque l'autre partie est constante, il faut que $[(-1)^n(2x_0 - 3x_1 + x_2)]$ converge, ce qui n'est possible que si la constante est nulle puisque $[(-1)^n]$ diverge. On en déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si :

$$\begin{cases} 2x_0 + -3x_1 + x_2 = 0 \\ x_0 = x_2 \end{cases} \iff x_0 = x_1 = x_2.$$

Enfin pour que la série de terme général (x_n) converge, il faut que la suite x_n converge (vers 0) donc que les conditions précédentes soient vérifiées. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \frac{3}{6}(2x_0 + x_1 - x_2) = x_0$$

est une suite constante, et la série de terme général (x_n) ne peut converger que si $x_n = x_0 = 0$, donc si et seulement si :

$$x_0 = x_1 = x_2 = 0.$$

4. On pose $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & -4 \\ 8 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ et pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $M(a,b) = \begin{pmatrix} 5b & a & -2b \\ 4b & 3b & a - 4b \\ -2a + 8b & a & 2a - 5b \end{pmatrix}$.

a) On a montré que les vecteurs propres de A sont les vecteurs de la forme :

$$\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

et on les teste tous :

$$B\lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}=3\lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

donc les vecteurs propres de A associé à la valeur propre -1 sont vecteurs propres de B associés à la valeur propre 3. De même,

$$B\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=3\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

donc les vecteurs propres de A associé à la valeur propre 1 sont vecteurs propres de B associés à la valeur propre 3. Enfin

$$B\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}-3\\-6\\-12\end{pmatrix}=-3\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$$

donc les vecteurs propres de A associé à la valeur propre 2 sont vecteurs propres de B associés à la valeur propre -3.

La réciproque n'est pas vraie, car on a ici testé tous les vecteurs propres de A. Or, comme on a trouvé deux fois la même valeur propre pour B, on peut construire par combinaison d'autres vecteurs propres de B. Par exemple,

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$

est vecteur propre de B (associé à la valeur propre 3) mais pas vecteur propre de A :

$$B\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\\6\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\qquad\text{mais}\qquad A\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$

qui n'est pas colinéaire à $\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$.

b) On en déduit que la base de vecteurs propres de A précédente est aussi base de vecteurs propres de B : avec la même matrice P que précédemment et avec $D'=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$, la formule de changement de base donne $B=PD'P^{-1}$ puis :

$$M(a,b)=aA+bB=aPDP^{-1}+bPD'P^{-1}=P\left(\left[aD+bD'\right]\right)P^{-1}=P\begin{pmatrix}3b-a&0&0\\0&a+3b&0\\0&0&2a-3b\end{pmatrix}P^{-1}$$

On en déduit que $M(a,b)$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont $3b-a$, $a+3b$ et $2a-3b$.

c) On en déduit que

$$M(a,b)^n = P\begin{pmatrix}(3b-a)^n & 0 & 0\\ 0 & (a+3b)^n & 0\\ 0 & 0 & (2a-3b)^n\end{pmatrix}P^{-1}$$

qui aura pour limite $PD_\infty P^{-1}$, où D_∞ est la limite de D^n, si elle existe (et si elle n'existe pas, $M(a,b)^n$ n'a pas de limite. Comme P et P^{-1} sont inversibles, ce produit est nul si et seulement si $D_\infty = 0$, et donc si et seulement si les trois suites géométriques convergent vers 0, donc si et seulement si :

$$-1 < 3b - a < 0 \quad \text{et} \quad -1 < a + 3b < 1 \quad \text{et} \quad -1 < 2a - 3b < 1.$$

Exercice sans préparation

Soit $p \in]0;1[$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes et de même loi donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P[X_n = -1] = p \quad \text{et} \quad P[X_n = 1] = 1 - p.$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \prod_{i=1} nX_i$.

1. Les (X_i) sont indépendantes donc :

$$E(Z_n) = E\left(\prod_{i=1} nX_i\right) = \prod_{i=1} nE(X_i) = \prod_{i=1} n\left(1\times(1-p) - 1\times p\right) = (1-2p)^n.$$

Or on sait que

$$0 < p < 1 \quad \text{donc} \quad -2 < -2p < 0 \quad \text{et enfin} \quad -1 < 1 - 2p < 1$$

et donc $\mathbb{E}(Z_n)$ converge vers 0.

2. Z_n est un produit de nombres qui valent 1 ou -1, elle vaut donc 1 et ou -1 :

$$Z_n(\Omega) = \{-1; 1\}$$

De plus $[Z_n = 1]$ signifie que le nombre de valeurs X_i qui valent -1 est pair, donc en posant S la variable égale au nombre de X_i qui valent -1 (qui suit une loi binomiale de paramètres n et p), on a :

$$[Z_n = 1] = (S \text{ est paire }) = \bigcup_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} [S = 2k].$$

On en déduit par incompatibilité que :

$$P[Z_n = 1] = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} p^{2k}(1-p)^{n-2k}.$$

Cependant on ne sait pas calculer cette somme. On va alors trouver la valeur des probabilités de manière beaucoup plus astucieuse, en se servant de l'espérance précédemment calculée. Posons q la probabilité de $[Z_n = 1]$, alors l'autre probabilité vaut $1 - q$, et on a :

$$E(Z_n) = 1 \times q - 1 \times (1 - 2q) = 2q - 1$$

ce qui donne :

$$2q - 1 = (1 - 2p)^n \quad \text{et} \quad q = \frac{(1 - 2p)^n + 1}{2}$$

donc on obtient finalement :

$$P[Z_n = 1] = \frac{(1 - 2p)^n + 1}{2} \quad \text{et} \quad P[Z_n = -1] = 1 - q = \frac{1 - (1 - 2p)^n}{2}.$$

3. On connaît les lois de Z_1 et Z_2, on cherche la loi du couple :

$$[Z_1 = 1] \cap [Z_2 = 1] = [X_1 = 1] \cap [X_2 = 1] \quad \text{donc} \quad P[\,[Z_1 = 1] \cap [Z_2 = 1] = P[X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]] = (1-p)^2.$$

$$[Z_1 = 1] \cap [Z_2 = -1] = [X_1 = 1] \cap [X_2 = -1] \quad \text{donc} \quad P[\,[Z_1 = 1] \cap [Z_2 = -1] = P[X_1 = 1] \cap [X_2 = -1]] = p(1-p).$$

$$[Z_1 = -1] \cap [Z_2 = 1] = [X_1 = -1] \cap [X_2 = -1] \quad \text{donc} \quad P[\,[Z_1 = -1] \cap [Z_2 = 1] = P[X_1 = -1] \cap [X_2 = -1]] = p^2.$$

$$[Z_1 = -1] \cap [Z_2 = -1] = [X_1 = -1] \cap [X_2 = 1] \quad \text{donc} \quad P[\,[Z_1 = -1] \cap [Z_2 = -1] = P[X_1 = -1] \cap [X_2 = 1]] = p(1-$$

Enfin Z_1 et Z_2 sont indépendantes si on a :

$$\left\{ \begin{array}{c} (1-p)^2 = (1-p) \times \frac{(1-2p)^2+1}{2} \\ p(1-p) = (1-p) \times \frac{1-(1-2p)^2}{2} \\ p^2 = p \times \frac{(1-2p)^2+1}{2} \\ p(1-p) = p \times \frac{1-(1-2p)^2}{2} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} 2(1-p) = (1-2p)^2 + 1 \\ 2p = 1 - (1-2p)^2 \\ 2p = (1-2p)^2 + 1 \\ 2(1-p) = 1 - (1-2p)^2 \end{array} \right.$$

Ceci impose que $p = 1 - p$ donc que $p = 1/2$, on vérifie alors les valeurs :

$$(1 - 2 \times 1/2)^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1 = 2p = 2(1-p) \quad \text{et} \quad 1 - (1 - 2 \times 1/2)^2 = 1 - 0^2 = 1 = 2p = 2(1-p)$$

et les quatre égalités sont bien vérifiées. On en déduit que Z_1 et Z_2 sont indépendantes si et seulement si $p = \frac{1}{2}$.

Exercice 9 *(Exercice avec préparation)*

1. Un point critique de f est un couple (a,b) tel que $\partial_1(f)(a,b) = \partial_2(f)(a,b) = 0$.

De plus on sait que lorsque la matrice Hessienne au point (a,b), $\nabla^2(f)(a,b) = \begin{pmatrix} \partial_{1,1}2(f)(a,b) & \partial_{1,2}2(f)(a,b) \\ \partial_{2,1}2(f)(a,b) & \partial_{2,2}2(f)(a,b) \end{pmatrix}$ admet des valeurs propres de même signe (strict), f admet un extremum local au point (a,b).

Soit X une variable aléatoire discrète finie définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ et on suppose que $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $P\,[X = x_i] \neq 0$.

On définit l'entropie de X par : $H(X) = -\frac{1}{\ln 2} \sum\limits_{i=1}^{n} P\,[X = x_i] \ln\big(\mathbb{P}\,([[X = x_i]])\big)$.

2. Soient x_1, x_2, x_3, x_4 quatre réels distincts. On considère un jeu de 32 cartes dont on tire une carte au hasard. Soit X la variable aléatoire prenant les valeurs suivantes :

- x_1 si la carte tirée est rouge (coeur ou carreau),
- x_2 si la carte tirée est un pique,
- x_3 si la carte tirée est le valet, la dame, le roi ou l'as de trèfle,
- x_4 dans les autres cas.

On tire une carte notée C et un enfant décide de déterminer la valeur $X(C)$ en posant dans l'ordre les questions suivantes auxquelles il lui est répondu par "oui" ou par "non". LA carte C est-elle rouge ? La carte C est-elle un pique ? La carte C est-elle le valet, la dame, le roi ou l'as de trèfle ? Soit N la variable aléatoire égale au nombre de questions posées (l'enfant cesse de poser des questions dès qu'il a obtenu une réponse "oui").

a) On obtient sans difficulté que $X(\Omega) = \{x_1; x_2; x_3; x_4\}$ et :

$$P\,[X = x_1] = \frac{1}{2} \quad P\left(\left[X = x_2 = \frac{1}{4}\right]\right) \quad P\,[X = x_3] = P\,[X = x_4] = \frac{1}{8}.$$

On peut alors calculer :

$$\begin{aligned} H(X) &= -\frac{1}{\ln 2}[1/2\ln(1/2) + 1/4\ln(1/4) + 2 \times 1/8\ln(1/8)] = -\frac{1}{4\ln 2}[-2\ln 2 - \ln 4 - \ln 8] \\ &= \frac{2\ln 2 + \ln 2^2 + \ln 2^3}{4\ln 2} = \frac{(2+2+3)\ln 2}{4\ln 2} = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

b) Il faut au minimum 1 question, et au maximum trois questions pour déterminer $X(C)$. De plus on remarque que :

$$[N = 1] = [X = x_1] \quad [N = 2] = [X = x_2] \quad [N = 3] = [X = x_3] \cup ([X = X_4]$$

donc :

$$P\,[N = 1] = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P\,[N = 2] = P\,[N = 3] = \frac{1}{4}.$$

Enfin on calcule :

$$E(N) = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} = H(X).$$

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles telle que : $f(x,y) = x\ln x + y\ln y + (1 - x - y)\ln(1 - x - y)$.

a) f est bien définie si et seulement si les ln le sont, il faut donc :

$$x > 0 \quad y > 0 \quad \text{et} \quad 1 - x - y > 0 \Longleftrightarrow x + y < 1 \Longleftrightarrow y < 1 - x.$$

On trace alors dans un repère orthonormé la droite d'équation $y = 1 - x$, et on hachure la partie du plan au-dessus de l'axe des abscisses ($y > 0$), à droite de l'axe des ordonnées ($x > 0$) et en-dessous de la droite tracée ($y < 1 - x$).

b) f est de classe C^2 sur son en semble de définition et :

$$\partial_1(f)(x, y) = \ln x + 1 - \ln(1 - x - y) - 1 = \ln x - \ln(1 - x - y) \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x, y) = \ln y - \ln(1 - x - y).$$

On résout alors le système, avec ln bijective :

$$\begin{cases} \ln x - \ln(1 - x - y) = 0 \\ \ln y - \ln(1 - x - y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ln x = \ln(1 - x - y) \\ \ln y - \ln(1 - x - y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 - x - y \\ \ln y - \ln(1 - x - y) = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ \ln(1 - 2x) - \ln(1 - x - 1 + 2x) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ \ln(1 - 2x) = \ln(x) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 1 - 2x = x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 3x = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 1/3 \\ x = 1/3 \end{cases}$$

donc le seul point critique de f est $(1/3; 1/3)$. On calcule alors les dérivées partielles secondes puis la matrice Hessienne au point $(1/3; 1/3)$:

$$\partial_{1,1}2(f)(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1 - x - y} \quad \partial_{1,2}2(f)(x, y) = \partial_{2,1}2(f)(x, y) = \frac{1}{1 - x - y} \quad \partial_{2,2}2(f)(x, y) = \frac{1}{y} + \frac{1}{1 - x - y}$$

puis au point $(1/3; 1/3)$:

$$\partial_{1,1}2(f)(1/3, 1/3) = 3 + 3 = 6 \quad \partial_{1,2}2(f)(1/3, 1/3) = \partial_{2,1}2(f)(1/3, 1/3) = 3 \quad \partial_{2,2}2(f)(1/3, 1/3) = 6$$

et on cherche les valeurs propres de la Hessienne :

$$\begin{pmatrix} 6 - \lambda & 3 \\ 3 & 6 - \lambda \end{pmatrix} \Longleftrightarrow L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 - \lambda \\ 6 - \lambda & 3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow L_2 \leftarrow 3L_2 - (6 - \lambda)L_1 \begin{pmatrix} 3 & 6 - \lambda \\ 0 & 9 - (6 - \lambda)^2 \end{pmatrix}$$

donc les valeurs propres sont les solutions de l'équation :

$$9 - (6 - \lambda)^2 = 0 \Longleftrightarrow (3 + 6 - \lambda)(3 - 6 + \lambda) = 0 \Longleftrightarrow (9 - \lambda)(\lambda - 3) = 0$$

donc 3 et 9, qui sont strictement positives donc f admet un minimum local au point $(1/3, 1/3)$.

c) On calcule sans difficulté :

$$H(X) = -\frac{1}{\ln 2}[p_1 \ln(p_1) + p_2 \ln(p_2) + p_3 \ln(p_3)] = -\frac{1}{\ln 2} f(p_1, p_2)$$

car on sait que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, donc $p_3 = 1 - p_1 - p_2$. On en déduit avec $-\frac{1}{\ln 2}$ que f et $H(X)$ atteignent leurs extrema locaux aux mêmes points, mais que les natures sont inversées.

Finalement $H(X)$ admet un maximum local au point $p_1 = p_2 = \frac{1}{3}$, donc $p_3 = 1 - p_1 - p_2 = \frac{1}{3}$.

Exercice sans préparation

On rappelle l'identité remarquable $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

On vérifie à l'aide de la commutativité de A et B que l'identité remarquable est toujours valable sur les matrices :

$$(A+B)(A^2-AB+B^2) = A^3-A^2B+AB^2+BA^2-BAB+B^3 = A^3-A^2B+AB^2+A^2B-AB^2+B^3 = A^3+B^3$$

et puisque $A^3 = 0$, on en déduit que

$$B^3 = A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2).$$

De plus puisque B est inversible on peut multiplier par B^{-1} (on le fait trois fois, à droite obligatoirement pour obtenir $(A + B) \times ...$) :

$$B^3(B^{-1})^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)(B^{-1})^3 \quad \text{et enfin} \quad (A + B)[(A^2 - AB + B^2)(B^{-1})^3] = I$$

donc $A + B$ est inversible, et son inverse est la matrice qui la multiplie pour donner I.

Exercice 10 *(Exercice avec préparation)*

1. Dans le cas général, cette intégrale est dite convergente si l'intégrale $\int_a^x f(t)\ dt$ converge lorsque x tend vers $+\infty$.

Si la fonction intégrée est positive, on a alors 4 critères possibles pour obtenir la convergence :

- Si l'intégrale partielle est bornée (condition nécessaire et suffisante).
- Si la fonction intégrée est majorée par une fonction dont l'intégrale converge (condition suffisante).
- Si la fonction intégrée est négligeable en l'infini devant une fonction dont l'intégrale converge (condition suffisante).
- Si la fonction intégrée est équivalente en l'infini à une fonction dont l'intégrale converge (condition nécessaire et suffisante).

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Cette intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$, et comme $\frac{1}{t}$ tend vers 0 on a :

$$e^{-t}x + t = \frac{e^{-t}}{t\left(1+\frac{x}{t}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-t}}{t} = o_{+\infty}(e^{-t})$$

Or les deux fonctions sont à termes positifs, et l'intégrale de 0 à $+\infty$ de e^{-t} converge (densité de la loi exponentielle), donc par théorème de comparaison l'intégrale de la question converge. On pose alors

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\ dt.$$

b) Question difficile par manque d'habitude. Cette fonction n'a rien à voir avec les fonctions intégrales habituellement étudiées, car la dépendance en x ne se trouve pas sur la borne : on ne peut pas poser une primitive de la fonction à l'intérieur fixée (elle devrait dépendre de x).

Il faut alors s'inspirer les suites intégrales, qui, sur le même modère que f, dépendent en général de n avec le n à l'intérieur de l'intégrale et pas sur la borne, et on revient à la définition de la monotonie :

Soient x et y deux réels strictement positifs, tels que $x < y$. On obtient alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$0 < x+t < y+t \quad \text{donc (inverse strictement décroissante sur } \mathbb{R}+^*) \quad \frac{1}{y+t} < \frac{1}{x+t}$$

On multiplie par $e^{-t} > 0$ et on intègre avec des bornes dans l'ordre croissant, on obtient :

$$x < y \Longrightarrow f(y) \leqslant f(x)$$

et la fonction f est décroissante.

3. Soit g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telles que :

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{x+t}\ dt \quad \text{et} \quad h(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\ dt.$$

a) φ est continue sur $]0;1]$ par opérations élémentaires, et en 0 on a $-t$ qui tend vers 0 donc par DL :

$$\varphi(t) = \frac{e^{-t}-1}{t} = \frac{1-t+o(t)-1}{t} = -1+o(1) \xrightarrow[t\to 0]{} -1 = \varphi(0)$$

donc φ est continue en 0, et donc sur $[0;1]$.

b) Pour tout $x>0$ et $t\in]0;1]$, on a :

$$x+t > t > 0 \quad \text{donc} \quad 0 < \frac{1}{x+t} < \frac{1}{t}$$

puis en multipliant par $e^{-t}-1<0$ (avec $-t<0$ donc $e^{-t}<1$) :

$$\varphi(t) \leqslant \frac{e^{-t}-1}{x+t} \leqslant 0$$

et cette inégalité reste vraie en $t=0$, car $\frac{e^0-1}{x+0}=0$, donc en intégrant avec des bornes dans l'ordre croissant (avec des intégrales qui convergent car aucune n'est généralisée) on obtient :

$$\int_0^1 \varphi(t)\ dt \leqslant g(x) \leqslant 0$$

et la fonction g est bien bornée (l'intégrale à gauche est une constante, elle ne dépend pas de x).

c) Avec une preuve strictement identique à la fonction f (sauf que cette fois-ci la fonction h est définie en $x=0$, et qu'on intègre entre 1 et $+\infty$), la fonction h est décroissante et vérifie :

$$h(x) \leqslant h(0) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\ dt$$

avec l'intégrale de droite qui est constante (ne dépend pas de x) donc h est majorée.

De plus h est minorée par 0 car c'est l'itnégrale d'une fonction positive avec des bornes dans l'ordre croissant, elle est donc positive. On en déduit finalement que h est bornée.

d) On sépare l'intégrale avec la relation de Chasles pour faire apparaître $h(x)$:

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\ dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\ dt = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\ dt + h(x).$$

Ensuite on fait apparaître $g(x)$:

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{x+t}\ dt + \int_0^1 \frac{1}{x+t}\ dt + h(x) = g(x)+h(x)+\int_0^1 \frac{1}{x+t}\ dt.$$

Enfin on calcule l'intégrale restante :

$$f(x) = g(x)+h(x)+\Big[\ \ln(x+t)\Big]_0 1 = g(x)+h(x)+\ln(1+x)-\ln(x).$$

Au voisinage de 0, les fonctions g et h sont bornées et $\ln(1+x)$ tend vers 0 donc le terme prépondérant est $-\ln x$ qui tend vers $-\infty$:

$$f(x) = -\ln x + o(\ln x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln x.$$

4. Cet encadrement s'obtient immédiatement en mettant les deux fractions au même dénominateur. On va alors s'en servir pour faire apparaître un équivalent de $f(x)$, donc en obtenant un encadrement concernant $f(x)$.

On multiplie donc par $e^{-t} > 0$ et on intègre avec des bornes dans l'ordre croissant (toutes les intégrales sont convergentes) :

$$0 \leqslant \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt - f(x) \leqslant \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt.$$

On reconnaît la densité et l'espérance d'une loi exponentielle, on obtient donc :

$$0 \leqslant \frac{1}{x} - f(x) \leqslant \frac{1}{x^2}$$

puis on encadre f :

$$-\frac{1}{x} \leqslant -f(x) \leqslant -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

Enfin en multipliant par $x > 0$:

$$1 - \frac{1}{x} \leqslant \frac{f(x)}{\frac{1}{x}} \leqslant 1$$

et par encadrement (les termes de gauche et droite convergent facilement vers 1), on obtient :

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \quad \text{et enfin} \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Exercice sans préparation

Les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que : $Y(\Omega) = \{1; 2\}, P[Y = 1] = P[Y = 2] = \frac{1}{2}$. On pose $Z = XY$.

1. Lorsque $Y = 1$, $Z = XY$ prend toutes les valeurs de $\mathbb{N}$; lorsque $Y = 2$, $Z = XY$ prend toutes les valeurs paires de $\mathbb{N}$. Finalement on obtient :

$$Z(\Omega) = \mathbb{N}.$$

Si $k = 2j + 1$ est impair, il ne peut être atteint qu'avec $Y = 1$ donc (avec X et Y indépendantes) :

$$\forall j \in \mathbb{N},\ (Z = 2j+1) = (X = 2j+1) \cap [Y = 1] \quad \text{et} \quad P([Z = 2j+1]) = \frac{1}{2}P([X = 2j+1]) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{2j+1}}{2(2j+1)!}$$

Si $k = 2j$ est pair, il peut être atteint avec $Y = 1$ ou 2, donc :

$$\forall j \in \mathbb{N},\ [Z = 2j] = [\,[X = 2j] \cap [Y = 1]] \cup [\,[X = j] \cap [Y = 2]]$$

et

$$P[Z = 2j] = \frac{P[X = 2j] + P[X = j]}{2} = \frac{e^{-\lambda}}{2}\left(\frac{\lambda^{2j}}{(2j)!} + \frac{\lambda^j}{j!}\right).$$

2. On décompose :

$$(Z \text{ est paire }) = \bigcup_{j=0}^{+\infty} [Z = 2j]$$

avec une union incompatible donc :

$$\begin{aligned}
P([Z \text{ est paire }]) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \left[\frac{e^{-\lambda}}{2} \left(\frac{\lambda^{2j}}{(2j)!} + \frac{\lambda^j}{j!} \right) \right] \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{2} \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2j}}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \right] \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{2} \left[\frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} + e^{\lambda} \right] = \frac{1 + e^{-2\lambda} + 2}{4} = \frac{3 + e^{-2\lambda}}{4}.
\end{aligned}$$