4. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que l'on ait :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner u_0 et établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{6}\,(3n+2)$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n)$: il existe un réel u_n tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

▸ **Initialisation** :

- Tout d'abord : $A^0 = I_3$.
- Par ailleurs : $\begin{pmatrix} 1 & \frac{0}{2} & u_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Notons alors $u_0 = 0$. On a bien démontré l'existence d'un réel u_0 tel que : $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{0}{2} & u_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (il existe $u_{n+1} \in \mathbb{R}$ tel que $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n+1}{2} & u_{n+1} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$).

- Par hypothèse de récurrence, il existe $u_n \in \mathbb{R}$ tel que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A\ A^n \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2}+\frac{1}{2} & u_n+\frac{n}{2}+\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notons alors $u_{n+1} = u_n + \frac{n}{2} + \frac{1}{3}$.

On a bien démontré l'existence d'un réel u_{n+1} tel que : $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n+1}{2} & u_{n+1} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n).}$

$\boxed{\text{En particulier : } u_0 = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{3} = u_n + \dfrac{1}{6}\,(3n+2).}$ □

b) En déduire, par sommation, l'expression de u_n pour tout entier n.

Démonstration.

- D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$u_{k+1} - u_k = \frac{1}{6}\ (3k+2)$$

- On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{6}\ (3k+2) \\
&= \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{n-1} (3k+2) \\
&= \frac{1}{6} \left(3 \sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} 2 \right) \\
&= \frac{1}{6} \left(3\ \frac{n(n-1)}{2} + 2n\right) \\
&= \frac{1}{12} \left(3\ n(n-1) + 4n\right) \\
&= \frac{1}{12} \Big(n\big(3\ (n-1) + 4\big)\Big) \\
&= \frac{n\ (3n+1)}{12}
\end{aligned}$$

- Par ailleurs :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0 = u_n$$

- On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{n\ (3n+1)}{12}$$

Cette relation est aussi vraie pour $n = 0$. En effet :

× d'une part : $u_0 = 0$,

× d'autre part : $\dfrac{0\ (3 \times 0 + 1)}{12} = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{n\ (3n+1)}{12}.}$$

□

c) Écrire A^n sous forme de tableau matriciel.

Démonstration.

D'après les questions précédentes : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & \frac{n\,(3n+1)}{12} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Commentaire

Cette question peut dérouter puisque le terme « tableau matriciel » n'est pas habituel. C'est simplement l'occasion, pour les candidats ayant réussi la question précédente, de prendre des points supplémentaires.

□

Exercice 3

Soit V une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, dont la fonction de répartition est la fonction F_V définie par : $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

On pose $W = -\ln(V)$ et on admet que W est aussi une variable aléatoire dont le fonction de répartition est notée F_W. On dit que W suit une loi de Gumbel.

1. a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_W(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$.

Démonstration.

- Notons $h : x \mapsto -\ln(x)$, de sorte que $W = h(V)$.
  Comme $V \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, alors $V(\Omega) = \,]0, +\infty[$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} W(\Omega) & = & h(V)(\Omega) \ = \ h\big(V(\Omega)\big) & \\ & = & h\big(]0, +\infty[\big) & \\ & = &]\lim\limits_{x \to +\infty} h(x), \lim\limits_{x \to 0} h(x)[& \textit{(car } h \textit{ est continue et strictement décroissante sur }]0, +\infty[\textit{)} \\ & = &]-\infty, +\infty[& \textit{(car } \lim\limits_{x \to +\infty} -\ln(x) = -\infty \textit{ et } \lim\limits_{x \to 0} -\ln(x) = +\infty\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } W(\Omega) = \mathbb{R}.}$$

- Déterminons la fonction de répartition de W. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} F_W(x) & = & \mathbb{P}([W \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([-\ln(V) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([\ln(V) \geqslant -x]) & \\ & = & \mathbb{P}([V \geqslant \mathrm{e}^{-x}]) & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & = & 1 - \mathbb{P}([V < \mathrm{e}^{-x}]) & \\ & = & 1 - F_V(\mathrm{e}^{-x}) & \textit{(car } V \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\ & = & \cancel{1} - \left(\cancel{1} - \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}\right) & \textit{(car } e^{-x} > 0\textit{)} \\ & = & \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}} & \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_W(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}}$$

Commentaire

- Commencer par déterminer l'ensemble image $V(\Omega)$ est un bon réflexe : cela peut guider l'étude de la fonction de répartition F_V. Plus précisément, cela fournit la disjonction de cas à effectuer. Typiquement, si l'on démontre que $V(\Omega)$ est de la forme $[a, b]$ (où a et b sont deux réels tels que $a < b$), on peut rédiger comme suit :
  - × si $x < a$ alors $[V \leqslant x] = \varnothing$.
    Ainsi, $F_V(x) = \mathbb{P}([V \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
  - × si $x \in [a, b]$ alors [...`démo à produire` ...]
  - × si $x > b$ alors $[X \leqslant x] = \Omega$.
    Ainsi, $F_V(x) = \mathbb{P}([V \leqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- Les ensembles images $V(\Omega)$ de types différents (essentiellement $]-\infty, b]$ et $[a, +\infty[$) amènent des disjonctions de cas analogues.

□

b) En déduire que W est une variable à densité.

Démonstration.
La fonction de répartition F_W est :

× continue sur $\mathbb{R}$ (car elle est la composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$).

× de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (car elle est la composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$).

$$\boxed{\text{Ainsi, } W \text{ est une variable à densité.}}$$

□

- On désigne par n un entier naturel non nul et par $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi que V, c'est à dire la loi $\mathcal{E}(1)$.
- On considère la variable aléatoire Y_n définie par $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, c'est à dire que pour tout ω de Ω, on a : $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$.
On admet que Y_n est une variable aléatoire à densité.

2. a) Montrer que la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n est définie par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Démonstration.

- Déterminons tout d'abord $Y_n(\Omega)$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la v.a.r. X_i suit la loi $\mathcal{E}(1)$, et donc $X_i(\Omega) = [0, +\infty[$.
On rappelle que $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } Y_n(\Omega) \ \subset \ [0, +\infty[.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  - Si $x < 0$: alors $[Y_n \leqslant x] = \varnothing$. Ainsi :

$$F_{Y_n}(x) \ = \ \mathbb{P}([Y_n \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  - Si $x \geqslant 0$:

$$\begin{array}{rcll} F_{Y_n}(x) & = & \mathbb{P}([Y_n \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([X_1 \leqslant x] \ \cap \ \cdots \ \cap [X_n \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) \times \cdots \times \mathbb{P}([X_n \leqslant x]) & \textit{(car les v.a.r. } X_i \\ & & & \textit{sont indépendantes)} \\ & = & (\mathbb{P}([X_1 \leqslant x])^n & \textit{(car les v.a.r. } X_i \\ & & & \textit{ont même loi)} \\ & = & (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

Commentaire

- Cette question permet d'illustrer l'intérêt de la détermination de $Y_n(\Omega)$: cela nous fournit la disjonction de cas servant à déterminer la fonction de répartition F_{Y_n}.
- On notera au passage que démontrer l'inclusion $Y_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$ est suffisant pour mettre en place cette disjonction de cas.

□

b) En déduire une densité f_{Y_n} de Y_n.

Démonstration.

- Y_n est une variable à densité car :
  - × F_{Y_n} est continue sur $\mathbb{R}$.
  - × F_{Y_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0.

    En effet, sur $]-\infty, 0[$, F_{Y_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ car elle est constante sur cet intervalle.
    Sur $]0, +\infty[$, F_{Y_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ car elle est la composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Pour déterminer une densité de Y_n, on dérive F_{Y_n} sur les **intervalles ouverts**.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - Si $x \in]-\infty, 0[$:
$$f_{Y_n}(x) = F'_{Y_n}(x) = 0$$
  - Si $x \in]0, +\infty[$:
$$f_{Y_n}(x) = F'_{Y_n}(x) = n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1}$$
  - Si $x = 0$: on pose $f_{Y_n}(0) = 0$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

Commentaire

Il faut bien comprendre qu'on peut prendre n'importe quelle valeur positive pour f_n en 0. On peut ainsi construire une infinité de densités de Y_n.
C'est pourquoi on parle d'**une** densité.

□

3. a) Donner un équivalent de $1 - F_{Y_n}(t)$ lorsque t est au voisinage de $+\infty$, puis montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$ est convergente.

Démonstration.

On commence par déterminer un équivalent de $1 - F_{Y_n}(t)$ quand $t \to +\infty$.

- Soit $t \geqslant 0$.
$$F_{Y_n}(t) \quad = \quad \left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)^n$$
- On reconnaît une expression de la forme $(1+x)^\alpha$ dont on connaît un développement limité en 0. Plus précisément, il existe une fonction ε définie dans un voisinage de 0 et qui vérifie $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, telle que, au voisinage de 0 :
$$(1+x)^n \quad = \quad 1 + n\ x + x\ \varepsilon(x)$$
- Comme $-\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut appliquer l'égalité précédente à $x = -\mathrm{e}^{-t}$ pour t dans un voisinage de $+\infty$. On obtient :
$$\left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)^n \quad = \quad 1 - n\ \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}\ \varepsilon\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)$$
$$\text{ainsi} \quad 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)^n \quad = \quad n\ \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t}\ \varepsilon\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)$$
- On constate alors : $\mathrm{e}^{-t}\ \varepsilon\left(-\mathrm{e}^{-t}\right) = \underset{t\to+\infty}{o}(\mathrm{e}^{-t})$. En effet :
$$\frac{\mathrm{e}^{-t}\ \varepsilon\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)}{\mathrm{e}^{-t}} \quad = \quad \varepsilon\left(-\mathrm{e}^{-t}\right) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
  par théorème de composition des limites.