ORAUX HEC 2010

I. Annales 2010

Exercice 1
Exercice avec préparation

1. La loi géométrique est la loi d'attente du premier succès dans une succession illimitée d'épreuves de Bernouilli identiques et indépendantes, de paramètre p.
Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, on a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([[X = k]]) = (1-p)^{k-1}p$.
De plus X admet une espérance et une variance, et $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

2. Pour tout $h \in [\![1;n]\!]$, on définit la variable aléatoire T_h égale au nombre d'années nécessaires pour que le h-ième bulbe fleurisse.

a) $T_h \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

b) $T = \max(T_1, T_2, \ \dots \ T_n)$ donc $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \geqslant 1$:
$\mathbb{P}([[T \leqslant k]]) = P\left(\left[\bigcap_{h=1} n[T_h \leqslant k]\right]\right) = \prod_{h=1} n\mathbb{P}([[T_h \leqslant k]]) = \left(1-q^k\right)^n$, qui est valable aussi pour $k = 0$ (cela donne bien 0).
On en déduit que $\mathbb{P}([[T = k]]) = \mathbb{P}([[T \leqslant k]]) - \mathbb{P}([[T \leqslant k-1]]) = \left(1-q^k\right)^n - \left(1-q^{k-1}\right)^n$.

3. **a)** $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k N(q^k)^N = 0$ car c'est une somme finie de termes tendant vers 0 par croissances comparées de la suite $u_N = N$ et de la suite géométrique $v_N = (q^k)^N$.

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sum\limits_{j=1}^{N} (q^k)^{j-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \times \frac{1-q^{kN}}{1-q^k} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \times \frac{1}{1-q^k}$.

c) On étudie $\sum\limits_{j=1}^{N} j\mathbb{P}([[T = j]]) = \sum\limits_{j=1}^{N} j \left[\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k (q^j)^k - \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k (q^{j-1})^k\right]$

$= \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k \sum\limits_{j=1}^{N} j(q^k)^j - \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k \sum\limits_{j=1}^{N} j(q^k)^{j-1}$

$= \binom{n}{0}(-1)^0 \sum\limits_{j=1}^{N} j(1)^j + \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k \sum\limits_{j=1}^{N} j(q^k)^j - \binom{n}{0}(-1)^0 \sum\limits_{j=1}^{N} j(1)^{j-1} - \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k \sum\limits_{j=1}^{N} j(q^k)^{j-1}$

$= \frac{N(N+1)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k q^k \sum\limits_{j=1}^{N} j(q^k)^{j-1} - \frac{N(N+1)}{2} - \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k \sum\limits_{j=1}^{N} j(q^k)^{j-1}$

$xrightarrow[N \to +\infty] \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k q^k \frac{1}{(1-q^k)^2} - \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k \frac{1}{(1-q^k)^2} = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k \frac{q^k+1}{(1-q^k)(1+q^k)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k \frac{1}{1-q^k}$

On retrouve le même résultat qu'à partir de la question b, mais je ne m'en suis pas du tout servi. On doit probablement pouvoir l'utiliser d'une manière ou d'une autre, peut-être en regroupant les deux sommes en k tout de suite au lieu de le faire à la fin.

Exercice sans préparation

f est diagonalisable, on étudier la question dans une base $\mathcal{B}$ où la matrice de f est diagonale, égale à $D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$.
Pour avoir $\mathrm{Im}(f) \subset \ker f$ il faut avoir $f^2 = 0$, donc $D^2 = 0$, donc $a_i 2 = \Leftrightarrow a_i = 0$ pour tout i, et $D = 0$. La seule solution est donc l'endomorphisme nul, $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Autre solution : $f^2 = 0$ donc 0 est la seule valeur propre possible, et f diagonalisable donc la matrice diagonale contenant 0 uniquement sur la diagonale, donc nulle, est une matrice de f, et $f = 0$.

Exercice 2
Exercice avec préparation

1. $f = o(g)$ si et seulement si $f = g \times \epsilon$ avec $\epsilon(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ puis on définit $f \sim g$ si et seulement si $f = g + o(g)$, ou $g = f + o(f)$, ou encore $f = g \times u$, avec $u(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

Croissances comparées des fonctions usuelles :
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $\lambda > 0$, $x^\alpha = o(e^{\lambda x})$ donc $e^{-\lambda x} = o(x^\alpha)$ en $+\infty$.
D'autre part pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $\lambda > 0$, $x^\alpha = o(e^{-\lambda x})$ et $e^{\lambda x} = o(x^\alpha)$ en $-\infty$.
Pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, $(\ln x)^\beta = o(x^\alpha)$ en $+\infty$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles, telle que :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad g(x) = x\ln^2(x).$$

a) g est dérivable sur $]1;+\infty[$ et $g'(x) = \ln^2(x) + x \times \frac{1}{x} \times 2\ln(x) = \ln(x)(\ln x + 2) > 0$ sur $]1;+\infty[$ donc g est strictement croissante et continue donc réalise une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]\lim\limits_1 g; \lim\limits_{+\infty} g[$.

Or par continuité de g, $\lim\limits_1 g = g(1) = 0$ et par produit de limites, $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$, donc g réalise une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]0;+\infty[$.

Soit h la bijection réciproque de la restriction de g à l'intervalle $]1;+\infty[$.

b) (i) On écrit $g(h(x)) = h(x)\ln^2(h(x)) = x$ et on compose par ln :
On obtient $\ln(h(x)) + 2\ln(\ln(h(x))) = \ln(x)$.

(ii) On a $\ln x = \ln(h(x))\left(1 + 2\frac{\ln(\ln(h(x)))}{\ln(h(x))}\right)$.
On pose $X = \ln(h(x)) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ par composée de limites, on a alors par croissances comparées, $\frac{\ln X}{X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$ donc par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + 2\frac{\ln(\ln(h(x)))}{\ln(h(x))} = 1$, et enfin $\ln x \sim \ln(h(x))$ en $+\infty$.

ATTENTION : cela ne donne pas $h(x) \sim x$!!!!

On écrit alors $[\ \ln(h(x))]^2 = \ln(h(x)) \times \ln(h(x)) \sim \ln(x) \times \ln(x) = \ln^2(x)$ et on réutilise $h(x)\ln^2(h(x)) = x \sim h(x)\ln^2(x)$ donc $h(x) \sim \frac{x}{\ln^2(x)}$.

3. Soit X une variable aléatoire de densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2g(|x|)} & \text{si } |x| < \frac{1}{e} \text{ et } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) f est continue sauf éventuellement en 0, $\frac{1}{e}$ et $\frac{-1}{e}$ et positive par positivité de g, il reste à prouver que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ est convergente et vaut 1.
Par parité il suffit de prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge vers $\frac{1}{2}$.
On a $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{+\infty} f$ converge et vaut 0 comme intégrale de la fonction nulle.

Enfin on étudie $\displaystyle\int_x^{\frac{1}{e}} \frac{1}{2t\ln^2 t}\,dt$ car l'intégrale n'est généralisée qu'en 0.
$\displaystyle\int_x^{\frac{1}{e}} \frac{1}{2t\ln^2 t}\,dt = \left[-\frac{1}{2\ln t}\right]_x^{\frac{1}{e}} = -\frac{1}{-2\ln e} + \frac{1}{2\ln x} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$ donc l'intégrale converge et vaut $\frac{1}{2}$ et f est bien une densité de probabilité.

b) L'imparité puis la positivité permette de se restreindre à l'étude de la convergence de $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} t \times \frac{1}{2t\ln^2 t}\,dt = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dt}{2\ln^2 t}$.
Pour la convergence on peut écrire $\frac{1}{2\ln^2 t} = o\left(\frac{1}{t\ln^2(t)}\right)$ et on a prouvé la convergence de l'intégrale de cette fonction : on utilise alors le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives.
Ensuite l'imparité permet de donner $\mathbb{E}(X) = 0$ (sans réaliser le calcul d'intégrale, qui est impossible !)

c) Sur le même principe on écrit $\frac{t}{2\ln^2 t} = o\left(\frac{1}{t\ln^2(t)}\right)$ pour prouver l'existence du moment d'ordre deux et donc de la variance.
Par contre le calcul du moment d'ordre deux est celui de l'intégrale d'une fonction paire, et il faudrait réaliser le calcul de l'intégrale, qu'on ne sait pas faire.

Exercice sans préparation

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. $f(e_1 + e_2 + e_3) = M\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $f(e_2) = M\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $f(-e_1 + e_3) = M\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$.

2. On prouve que la famille au-dessus est une base, et on a $M' = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$ est semblable à $M = Mat_{\mathcal{B}}(f)$.

3. M est diagonalisable si et seulement si M' l'est.
L'étude des valeurs propres de M' donne $\operatorname{Sp} M' = \{1\}$; si M' était diagonalisable, on aurait $M' = PIP^{-1} = I$ qui est absurde, donc M' et M ne sont pas diagonalisables.

Exercice 3 *(Exercice avec préparation)*
Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, avec $n \geqslant 2$ et $0 < p < 1$.

On définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ une variable aléatoire Y de la façon suivante :

- pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la réalisation de l'évènement $[X = k]$ entraîne celle de l'évènement $[Y = k]$;
- la loi conditionnelle de Y sachant $[X = 0]$ est la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$.

1. On réalise une succession de n épreuves de Bernouilli indépendantes et identiques de paramètre p, et on compte le nombre de succès.
La variable X associée vérifie alors $X(\Omega) = [\![0;b]\!]$.
Pour calculer $\mathbb{P}\left([[X = k]]\right)$, on compte le nombre de possibilités amenant à ce résultat et la probabilité de chacune.
Il faut obtenir k succès et $n-k$ échecs : on place les k succès parmi les n épreuves pour obtenir toutes les possibilités : il y en a donc $\binom{n}{k}$.
Dans chacun de ces cas, on obtient de manière indépendante k succès et n échecs avec une probabilité $p^k q^{n-k}$.
On obtient alors $\mathbb{P}\left([[X = k]]\right) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.
L'espérance s'obtient en écrivant les n X_i variables de Bernouilli, avec la linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(X) = np$.
De même grâce à l'indépendance on calcule facilement la variance de la somme : $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.

2. On a $Y(\Omega) = [\![1;n]\!]$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, en utilisant le système complet $[X = i]_{0 \leqslant i \leqslant n}$ on a :
$\mathbb{P}\left([[Y = k]]\right) = \sum\limits_{i=0}^{n} \mathbb{P}\left([[X = i]]\right) P_{[X=i]}\left[Y = k\right] = \mathbb{P}\left([[X = k]]\right) \times 1 + \mathbb{P}\left([[X = 0]]\right) \times \frac{1}{n} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \frac{q^n}{n}$.

3. $\mathbb{E}(Y) = \sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{q^n}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} - 0 + \frac{q^n}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} 1 = \mathbb{E}(X) + \frac{q^n}{n} \times n = np + q^n$.

4. ***a)*** Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$ on a $P_{X \neq 0}\left[Y = k\right] = \frac{\mathbb{P}([Y=k] \cap [X \neq 0])}{\mathbb{P}([X \neq 0])} = \frac{P[X=k]}{1 - \mathbb{P}([[X=0]])} = \binom{n}{k} \frac{p^k q^{n-k}}{1-q^n}$.

b) $\mathbb{E}(Y/X \neq 0) = \sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \frac{p^k q^{n-k}}{1-q^n} = \frac{1}{1-q^n} \sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{1}{1-q^n} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} - 0 \right) = \frac{\mathbb{E}(X)}{1-q^n} = \frac{np}{1-q^n}$.

Exercice sans préparation

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) et vérifiant $A^k = I_n$.
Que peut-on dire dans les cas suivants :

1. A est symétrique donc diagonalisable, et le polynôme $P\left([x]\right) = x^k - 1$ est annulateur de A.
1 est une racine évidente de ce polynôme, étudions l'existence d'autres racines.
$P'(x) = kx^{k-1} > 0$ sur $\mathbb{R}^*$ et nul en 0 car $k-1$ est pair, donc P est strictement croissante et l'équation $P\left([x]\right) = 1$ admet une unique solution, qui est donc $x = 1$.
On en déduit que $\operatorname{Sp} A \subset \{1\}$ et comme A est diagonalisable elle admet au moins une valeur propre : d'où 1 est la seule valeur propre de A, il existe P inversible tel que $A = PIP^{-1} = I$, donc A est forcément la matrice identité.

2. Ici l'étude de $P'(x)$ donne $P'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$, nul en 0 et strictement positif en 0.
De plus $P([0]) = -1 < 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ donc le théorème de la bijection donne exactement deux solutions, et celles-ci sont évidentes : 1 et -1.
Il y a donc 3 possibilités :
- Sp $A = \{1\}$ qui donne $A = I$.
- Sp $A = \{-1\}$ qui donne $A = -I$.
- Sp $A = \{-1; 1\}$ qui donne $A = PDP^{-1}$ avec D contenant 1 et -1 sur sa diagonale.

Exercice 4 *(Exercice avec préparation)*
Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Soit X une variable discrète finie telle que $X(\Omega) = \{x_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$.
On pose alors $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}([[X = x_i]])$ qui est la valeur moyenne obtenue lorsqu'on réalise un grand nombre de fois l'expérience.
$\mathbb{V}(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}([[X = x_i]])$ qui est la moyenne des écarts au carré, et qui permet de mesurer la dispersion des valeurs de X (pondérées par leurs probabilités) autour de son espérance (qui est la valeur moyenne).

2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On considère une variable aléatoire X (discrète ou possédant une densité) prenant toutes ses valeurs dans l'intervalle $[a; b]$ et ayant un moment d'ordre 2.

a) On a $\mathbb{V}(X) = E([X - \mathbb{E}(X)]^2) = E([(X - \lambda) + (\lambda - \mathbb{E}(X))^2)$
$= E([X - \lambda]^2 + 2[\ \lambda - \mathbb{E}(X)][X - \lambda] + [\ \lambda - \mathbb{E}(X)]^2)$
$= E([X - \lambda]^2) + 2(\lambda - \mathbb{E}(X))[\ \mathbb{E}(X - \lambda)] + [\ \lambda - \mathbb{E}(X)]^2$
$= \mathbb{E}([X - \lambda]^2) - [\ \lambda - \mathbb{E}(X)]^2 \leqslant \mathbb{E}([X - \lambda]^2)$ car un carré est toujours positif.

b) On se place en $\lambda = \frac{a+b}{2}$ la moyenne de a et b et on obtient :
$0 \leqslant \left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$ donc $0 \leqslant E\left[\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2\right] \leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$ et donc $\mathbb{V}(X) \leqslant E\left[\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2\right] \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$.

3. *a)* On a alors $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{a+b}{2}$ puis $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{2}\left[\ \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{2} \times 2 \times \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{4}$.

b) Étude d'une réciproque : on suppose que $\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{4}$.
On a alors $\mathbb{V}(X) = E\left[\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2\right] = \frac{(b-a)^2}{4}$ En reprenant la question 2.a., on voit que pour avoir $\mathbb{V}(X) = E\left[\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2\right]$, il faut avoir $\left(\frac{a+b}{2} - \mathbb{E}(X)\right)^2 = 0$ donc $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$.

Ensuite on reprend la question 2.b. : si il existe $c \in\ ]a; b[$ tel que $\mathbb{P}([X = c]) \neq 0$ on a :
$E\left[\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2\right] = \left(c - \frac{a+b}{2}\right)^2 \mathbb{P}([X = c]) + \sum\limits_{x \neq c} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \mathbb{P}([X = x]) \leqslant \left(c - \frac{a+b}{2}\right)^2 \mathbb{P}([X = c]) + \frac{(b-a)^2}{4} \sum\limits_{x \neq c}^{\mathbb{P}} ([X = x]) = \left(c - \frac{a+b}{2}\right)^2 \mathbb{P}([X = c]) + \frac{(b-a)^2}{4}(1 - P[X = c]) = \frac{(b-a)^2}{4} + \mathbb{P}([X = c]) \left(\left(c - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(b-a}{4}\right.$
$\frac{(b-a)^2}{4}$.

On en déduit que $X(\Omega) = \{a; b\}$, puis que $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} = a\mathbb{P}([[X = a]]) + b(1 - \mathbb{P}([[X = a]]))$ donc $\mathbb{P}([[X = a]]) = \frac{\frac{a+b}{2} - b}{a-b} = \frac{\frac{a-b}{2}}{a-b} = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}([[X = b]]) = 1 - \mathbb{P}([[X = a]]) = \frac{1}{2}$.

4. Cela signifie que la variance est maximale lorsque la dispersion est maximale et symétrique : il faut que les deux seules valeurs prises soient symétriques autour de l'espérance, et aient la même probabilité d'être atteintes.

Exercice sans préparation

1. M est triangulaire donc elle est inversible si et seulement si X et Y sont non nuls.
D'où $P([M \text{ inversible }]) = P([X \neq 0] \cap [Y \neq 0]) = 1$ car $0 \notin X(\Omega) = Y(\Omega)$.

2. On a $\operatorname{Sp} M = \{X; Y\}$ et comme M n'est pas diagonale on a : si il y a une unique valeur propre, M n'est pas diagonalisable et si il y a deux valeurs propres distinctes, elle l'est.
D'où $\mathbb{P}([M \text{ diagonalisable }]) = P([X \neq Y]) = 1 - P[X = Y] = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} p^2(q^2)^{k-1} = 1 - \frac{p^2}{1-q^2} = 1 - \frac{p}{1+q} = \frac{1+q-p}{1+q} = \frac{2q}{1+q}$.

Exercice 5 *(Exercice avec préparation)*
Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et p et q deux réels de $]0;1[$ tels que $p+q=1$. On considère deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur une espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
La loi du couple (X,Y) est donnée par :
pour tout (j,k) tels que $0 \leqslant j \leqslant n$ et $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\mathbb{P}([X=j]\cap[Y=k]) = \begin{cases} \binom{n}{k}p^k q^{n-k} & \text{si } k=j,\ j\neq 0 \\ fracq^n n & \text{si } j=0 \\ 0 & \text{si } k\neq j \text{ et } j\neq 0 \end{cases}$$

1. La loi d'un couple (X,Y) de variables aléatoires discrètes est la donnée de $(X,Y)(\Omega)$, ensemble des couples (i,j) de valeurs telles que l'évènement $[X=i]\cap[Y=j]$ est possible.
Les lois marginales sont les lois des variables X et Y, obtenues à partir du couple et de la formule des probabilités totales.
Les lois conditionnelles sont les lois d'une variable sachant que l'autre a donné un résultat précis, c'est-à-dire les lois du type $P_{[X=i_0]}[Y=j]$ ou $P_{[Y=j_0]}[X=i]$.

2. ***a)*** On a $X(\Omega)=[\![0;n]\!]$ et pour tout $j\in[\![1;n]\!]$, avec le système complet $[Y=k]_{1\leqslant k\leqslant n}$ on a :
$\mathbb{P}([[X=j]])=\binom{n}{j}p^j q^{n-j}$.
Enfin pour $j=0$ on a $\mathbb{P}([[X=0]])=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{q^n}{n}=q^n$.
Finalement on voit que $X\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p)$.

D'autre part on a $Y(\Omega)=[\![1;n]\!]$ et avec le système complet $[X=j]_{0\leqslant k\leqslant n}$ on a :
$\mathbb{P}([[Y=k]])=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}+\frac{q^n}{n}$.

b) $\mathbb{E}(Y)=\sum\limits_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}p^kq^{n-k}+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{q^n}{n}=\sum\limits_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^kq^{n-k}-0+\frac{q^n}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}1=\mathbb{E}(X)+\frac{q^n}{n}\times n=np+q^n$.

3. Soit j un entier tel que $0\leqslant j\leqslant n$.
a) Pour tout $j\geqslant 1$, pour tout $1\leqslant k\leqslant n$ on a $P_{[X=j]}[Y=k]=\frac{P([X=j]\cap[Y=k])}{P[X=j]}=0$ si $j\neq k$ et 1 si $j=k$.
Pour $j=0$, on a pour tout $1\leqslant k\leqslant n$, $P_{[X=0]}[Y=k]=\frac{\frac{q^n}{n}}{q^n}=\frac{1}{n}$.

b) Si $j>0$, on a $\mathbb{E}(Y/X=j)=j$ (c'est une variable certaine).
Pour $j=0$, on a $\mathbb{E}(Y/X=0)=\sum\limits_{k=1}^{n}k\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}$.

4. ***a)*** $\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1])=npq^{n-1}$ et $\mathbb{P}([[X=1]])\,\mathbb{P}([[Y=1]])=npq^{n-1}\times\left(npq^{n-1}+\frac{q^n}{n}\right)$.
Il faut donc prouver que $\left(npq^{n-1}+\frac{q^n}{n}\right)=nq^{n-1}-nq^n+\frac{q^n}{n}\neq 1$.
On étudie la fonction $f(q)=nq^{n-1}-nq^n+\frac{q^n}{n}$ qui est dérivable :
$f'(q)=n(n-1)q^{n-2}-n^2q^{n-1}+q^{n-1}=q^{n-2}\big[n(n-1)-(n^2-1)q\big]=q^{n-2}\big[n(n-1)-(n-1)(n+1)q\big]=(n-1)q^{n-2}(n-(n+1)q)$ qui s'annule en $q=\frac{n}{n+1}$ en étant positive avant et négative après ; en rajoutant $f(0)=0$ et $f(1)=\frac{1}{n}$ et $f\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{n^n}{(n+1)^n}+\frac{n^{n-1}}{(n+1)^n}=\frac{n^n+n^{n-1}}{(n+1)^n}$.

De plus on a $(n+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^k \geqslant n^n + nn^{n-1} > n^n + n^{n-1}$ et on obtient que $f(q) < 1$ sur $]0;1[$.
On ne déduit que les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

b) On utilise le théorème de transfert :
$\mathbb{E}(XY) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=1}^{n} jk\mathbb{P}([X=j] \cap [Y=k]) = \sum_{j=1}^{n} j^2 \mathbb{P}([X=j] \cap [Y=j]) = \sum_{j=1}^{n} j^2 \binom{n}{j} p^j q^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} j^2 \binom{n}{j} p^j q^{n-j} = \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + [\,\mathbb{E}(X)]^2 = np(1-p) + n^2p^2 = np(1-p+np) = np[(n-1)p+1]$.
Enfin on a $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = np[(n-1)p+1] - np(np+q^n) = np[(n-1)p + 1 - np - q^n] = np[1-p-q^n] = npq(1-q^{n-1}) \neq 0$ sauf si $q^{n-1} = 1$ qui donne $q = 1$.

c) On retrouve que X et Y ne sont pas indépendantes, quelle que soit la valeur de q.

Exercice sans préparation

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} k \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

où α est un nombre réel,

1. Si $\alpha = 2$ on a $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 x\ln(1+x)\,dx = \int_1^2 (x-1)\ln x\,dx = \dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{1}{4}$ avec une intégration par parties (somme de Riemann).

2. Si $\alpha < 2$ on a $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \times n^{2-\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Si $\alpha > 2$ on a $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \times n^{2-\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 6 *(Exercice avec préparation)*

1. Soit X une variable à densité, de densité f. On dit que X admet un moment d'ordre r si X^r admet une espérance et on pose $\mathbb{E}(X^r)$ le moment d'ordre r de X.
Avec le théorème de transfert, X admet un moment d'ordre r si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\ dt$ converge absolument (équivalent à la convergence grâce à la décomposition en une fonction de signe constant sur $[0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0]$).
Enfin si X admet un moment d'ordre r, elle admet un moment d'ordre k pour tout $1 \leqslant k \leqslant r$.

2. On met au même dénominateur, on identifie et on obtient $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

3. On pose :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x(x+1)} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où k est un paramètre réel.

a) f est positive et continue sauf en 1, vérifions $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_1^{+\infty} \left(\frac{k}{x} - \frac{k}{x+1}\right)\ dx = 1$.
On a $\displaystyle\int_1^t \left(\frac{k}{x} - \frac{k}{x+1}\right)\ dx = k\left[\ \ln x - \ln(x+1)\right]_1 t = k\ln\left(\frac{t}{t+1}\right) + k\ln 2 \xrightarrow[t\to+\infty]{} k\ln 2$ donc l'intégrale converge et vaut $k\ln 2$.
D'où f est une densité de probabilité si et seulement si $k = \frac{1}{\ln 2}$.

b) L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} xf(x)\ dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\ln 2}\ dx$ diverge comme intégrale de Riemann avec $\alpha = 1$ donc X n'admet pas d'espérance.

4. ***a)*** On a $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ puis $\mathbb{P}\left([[T=k]]\right) = \mathbb{P}\left([k \leqslant X < k+1]\right) = \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\ dt = \left[\ \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_k k+1 = \ln\left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right) = \ln\left(\frac{k^2+2k+1}{k(k+2)}\right) = \ln\left(\frac{k(k+2)+1}{k(k+2)}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right)$.

b) On en déduit que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) = 1$ (c'est la somme des probabilités sur un système complet d'évènements).

5. $Z(\Omega) =]0;1]$ et on a pour tout $x \leqslant 0$, $F_Z(x) = 0$;
Pour $0 < x \leqslant 1$, $F_Z(x) = \mathbb{P}\left([0 < Z \leqslant x]\right) = P\left(\left[X \geqslant \frac{1}{x}\right]\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{\ln 2}\ln(1+x)$;
Enfin pour $x \geqslant 1$, $F_Z(x) = 1$.
Enfin on obtient $f_Z(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 1$ et $f_Z(x) = \frac{1}{(1+x)\ln 2}$ si $x \in]0;1[$.

6. ***a)*** On a $Y(\Omega) = [0;1[$ donc $F_Y(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et 1 si $x \geqslant 1$.
Enfin si $0 < x < 1$ on a $F_Y(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([k \leqslant X \leqslant k+x]\right) = \frac{1}{\ln 2}\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{(k+x)(k+1)}{k(k+x+1)}\right) = \frac{1}{\ln 2}\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{(k+x)}{k} - \frac{k+x+}{k+}\right.$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln 2}\ln(1+x) - \frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{n+x+1}{n+1}\right) = \frac{1}{\ln 2}\ln(1+x)$ (télescopage).

On reconnaît la même loi que Z.

b) Les deux autres intégrales étant trivialement convergentes vers 0, il faut prouver que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^r}{(1+x)\ln 2}$ converge, ce qui ne pose aucun problème puisque la fonction est continue sur $[0;1]$ et l'intégrale n'estg pas généralisée.

c) $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\ln 2}\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1+x)}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int_1^2 \frac{x-1}{(x)}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int_1 \,dx - \frac{1}{\ln 2}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\ln 2 = \frac{1}{\ln 2} - 1.$

Exercice sans préparation

Soit $n \geqslant 2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Avec des pivots habiles et des calculs très rigoureux, on trouve $A^{-1} = \frac{1}{n-1}(A + (2-n)I)$.
Méthode beaucoup plus simple : chercher un polynôme annulateur en calculant A^2 :
On trouve $A^2 = (n-2)A + (n-1)I$ donc $A(A + (2-n)I) = (n-1)I$ et enfin $A^{-1} = \frac{1}{n-1}(A + (2-n)I)$.

Exercice 7 *(Exercice avec préparation)*

1. Un estimateur d'un paramètre θ de la loi P_X d'une variable aléatoire X dont on dispose d'un échantillon (X_n) est une suite de variables aléatoires (T_n) où pour tout n, T_n est une fonction des variables $X_1, \dots X_n$). On dit qu'il est sans biais si pour tout n, $\mathbb{E}(T_n) = \theta$.

Soit Z une variable aléatoire discrète d'espérance $\mathbb{E}(Z) = \theta$ ($\theta \in \mathbb{R}^*$) et de variance $\mathbb{V}(Z) = 1$.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on dispose d'un n-échantillon $(Z_1, Z_2, \dots Z_n)$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que Z, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On pose $\overline{Z_n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} Z_j$. On suppose que θ est inconnu.

2. ***a)*** Oui. Le calcul est évident.

b) $R_\theta = \mathbb{V}(\overline{Z_n}) = \frac{1}{n^2} \times n\mathbb{V}(Z) = \frac{1}{n}$.

3. Soient $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n$ des réels non nuls et $Y_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j Z_j$.

a) Il faut $\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j = 1$.

On suppose que cette condition est vérifiée.

b) On a vu $\mathbb{V}(\overline{Z_n}) = \frac{1}{n}$.
On a $\mathbb{V}(\overline{Z_n} + Y_n) = V\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \left(\beta_j - \frac{1}{n}\right) Z_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\beta_j - \frac{1}{n}\right)^2 \mathbb{V}(Z_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\beta_j - \frac{1}{n}\right)^2$.
On en déduit que $\mathbb{V}(\overline{Z_n}) + \mathbb{V}(Y_n) + 2\mathrm{Cov}(\overline{Z_n}, Y_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\beta_j - \frac{1}{n}\right)^2$.

D'où $\mathrm{Cov}(\overline{Z_n}, Y_n) = \frac{1}{2}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \left(\beta_j - \frac{1}{n}\right)^2 - \beta_j 2 - \frac{1}{n^2}\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{n} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j}{n} = \frac{1}{n}$.
On a alors $0 \leqslant \mathbb{V}(Y_n - \overline{Z_n}) = \mathbb{V}(Y_n) + V(\overline{Z_n} - 2\mathrm{Cov}(U_n, \overline{Z_n}) = \mathbb{V}(Y_n) + \frac{1}{n} - \frac{2}{n} = \mathbb{V}(Y_n) - \frac{1}{n} = \mathbb{V}(Y_n) - \mathbb{V}(\overline{Z_n})$ donc $\mathbb{V}(Y_n) \geqslant \mathbb{V}(\overline{Z_n})$.
Interprétation :

4. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ des réels non nuls.
On définit la variable aléatoire U_n par : $U_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j Z_j$,
et on suppose que $\mathbb{E}(U_n) = \theta$ et $\mathbb{V}(U_n) = \frac{1}{n}$.
On a alors $\mathbb{V}(U_n - \overline{Z_n}) = \mathbb{V}(U_n) + \mathbb{V}(\overline{Z_n}) - 2\mathrm{Cov}(U_n, \overline{Z_n}) = \frac{2}{n} - \frac{2}{n} = 0$.
On en déduit que la variable $U_n - \overline{Z_n}$ est quasi-certaine : si elle pouvait prendre deux valeurs distinctes avec une probabilité non nulle, l'une des deux au moins serait différente de son espérance et la variance serait donc strictement positive.
On en déduit qu'il existe a tel que $\mathbb{P}\left(\left[U_n - \overline{Z_n} = a\right]\right) = 1$.
On a alors $\mathbb{E}(U_n - \overline{Z_n}) = a$; or on sait que $\mathbb{E}(U_n - \overline{Z_n}) = \theta - \theta = 0$, donc $a = 0$ et $U_n = \overline{Z_n}$ avec une probabilité égale à 1 (presque sûrement).

Exercice sans préparation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, à valeurs réelles, par :

$$f(x,y) = \frac{x^2 + xy + \sqrt{y}}{x\sqrt{y}}.$$

1. On a des produits, sommes et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas des fonctions $(x,y) \to x$, $(,y) \to y$ et $(x,y) \to \sqrt{y}$ qui sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

2. $f'_x(x,y) = \frac{(2x+y)x\sqrt{y} - \sqrt{y}(x^2+xy+\sqrt{y})}{x^2y} = \frac{x^2-\sqrt{y}}{x^2\sqrt{y}}$ après simplifications.
$f'_y(x,y) = \frac{\left(x+\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)x\sqrt{y} - \frac{x}{2\sqrt{y}}(x^2+xy+\sqrt{y})}{x^2y} = \frac{y-x}{2y\sqrt{y}}$ après simplifications.
On en déduit que $f'_x(x,y) = f'_y(x,y)$ si et seulement si $x = y$ et $x^2 = \sqrt{y}$, qui donne $x^2 = \sqrt{x}$, $x^4 = x$, $x^3 = 1$ car $x \neq 0$, et enfin $x = y = 1$.

3. On a $f''_{x,x}(x,y) = \frac{2x^3\sqrt{y} - 2x\sqrt{y}(x^2-\sqrt{y})}{x^4y} = \frac{2}{x^3}$ donc $r = 2$.
$f''_{x,y}(x,y) = -\frac{1}{2y\sqrt{y}}$ donc $s = -\frac{1}{2}$.
$f''_{y,y} = \frac{2y\sqrt{y} - (y-x)3\sqrt{y}}{4y^3} = \frac{3x-y}{4y^2\sqrt{y}}$ donc $t = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
On a alors $rt - s^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$ donc f admet un extremum local en $(1,1)$, et $r = 2 > 0$ donc c'est un minimum local.