ESCP 2001

Exercice 1

1. On considère la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et on note ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique.

- ***a) i)*** Montrer que A admet les valeurs propres 1 et 2 et n'en admet pas d'autre.
  Déterminer les sous-espaces propres E_1 et E_2 associés à ces valeurs propres
  ii) La matrice A est-elle diagonalisable ?
- ***b)*** Soit V un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1. Trouver un vecteur W de $\mathbb{R}^3$ tel que $\phi(W) = v + W$.
- ***c)*** Soit U un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2. Montrer que la famille (U, V, W) est une base de $\mathbb{R}^3$.
- ***d)*** Déterminer la matrice B représentant l'endomorphisme ϕ dans la base (U, V, W) ainsi qu'une matrice inversible P telle qu'on ait l'égalité $B = P^{-1}AP$.

2. Etant données les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on associe à tout élément (a, b, c) de R^3 la matrice $C_{(a,b,c)}$ définie par :

$$C_{(a,b,c)} = aI + bH + cN$$

On note M l'ensemble des matrices $C_{(a,b,c)}$ où (a, b, c) décrit $\mathbb{R}^3$.

- ***a)*** Montrer que M est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 et déterminer sa dimension.
- ***b)*** Vérifier que la matrice B définie en ***4.b)*** appartient à M.
- ***c)*** Préciser les conditions que doivent vérifier (a, b, c) pour que $C_{(a,b,c)}$ soit inversible. Déterminer, quand elle existe, sa matrice inverse.
- ***d)*** Déterminer les valeurs propres de $C_{(a,b,c)}$.
  Montrer que cette matrice est diagonalisable si et seulement si c est nul.

Exercice 2

1. On considère la fonction G de deux variables réelles définie, pour tout x et y strictement positifs, par :

$$G(x,y) = \frac{x^2}{2y^2} - \ln x + y - \frac{3}{2}$$

a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de la fonction G.

b) Rechercher les extrema éventuels de la fonction G dans le domaine $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

2. On considère maintenant la fonction f définie, pour tout x strictement positif, par :

$$f(x) = G(x,1) = \frac{x^2}{2} - \ln x - \frac{1}{2}$$

a) Étudier les variations de f. Montrer que c'est une fonction convexe. Donner sa représentation graphique.

b) i) Calculer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

ii) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ existe et calculer sa valeur.

c) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On pose $S_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$.

i) Établir, pour tout entier j vérifiant $1 \leqslant j \leqslant n$, les inégalités :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{j+1}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$$

ii) En déduire l'encadrement :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\ dx \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\ dx$$

iii) Montrer les inégalités :

$$0 \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\ dx$$

d) On considère la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ définie précédemment. Montrer que cette suite converge et déterminer sa limite.

e) On rappelle que, pour tout entier naturel non nul, on a l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(i) Exprimer, pour tout entier naturel non nul, la somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$ en fonction de n.

(ii) En déduire la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$.

Exercice 3

1. **Préliminaire**

Montrer, pour tout entier naturel non nul n, l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2. Soit N un entier supérieur ou égal à 2.
Une urne contient N boules dont $N-2$ sont blanches et 2 sont noires. On tire au hasard, successivement et sans remise, les N boules de cette urne.
Les tirages étant numérotés de 1 à N, on note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la première fois, une boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la deuxième fois, une boule noire.

a) Préciser l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on peut utiliser pour modéliser cette expérience aléaoire.

b) Soit i et j deux entiers de l'intervale $[\![1, N]\!]$. Montrer que l'on a :

$$\mathbb{P}\left([X_1 = i,\ X_2 = j]\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant N \\ \dfrac{2}{N(N-1)} & \text{si} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant N \end{cases}$$

c) Déterminer les lois de probabilité des variables X_1 et X_2. Ces variables sont-elles indépendantes ?

d) i) Démontrer que la variable $N+1-X_2$ a même loi que X_1.

ii) Déterminer la loi de la variable $X_2 - X_1$ et la comparer à celle de X_1.

e) À l'aide des résultats de la question 4 :

i) Calculer les espérances $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$.

ii) Montrer l'égalité des variances $\mathbb{V}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_2)$.

iii) établir la relation : $2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{V}(X_1)$ où $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ désigne la covariance des variables X_1 et X_2.

f) Calculer $\mathbb{V}(X_1)$; en déduire $\mathbb{V}(X_2)$ et $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

3. Dans cette partie, N désigne encore un entier supérieur ou égal à deux.

a) On considère le programme **Scilab** suivant, où `grand(1,1,'uin',1,10)` désigne un nombre entier tiré au hasard par l'ordinateur dans l'intervalle $[1, 10]$:

```
a = grand(1,1,'uin',1,10)
b = grand(1,1,'uin',1,10)
if a > b then
    c = a
    a = b
    b = c
end
if a < b then
    disp('a = ' + string(a))
    disp('b = ' + string(b))
end
```

i) Que fait l'ordinateur dans le cas où les variables `a` et `b` contiennent toutes les deux le même nombre ?

ii) Qu'affiche l'ordinateur dans le cas où les variables `a` et `b` contiennent respectivement les nombres 3 et 5 ?

iii) Qu'affiche l'ordinateur dans le cas où les variables `a` et `b` contiennent respectivement les nombres 10 et 1 ?

b) On suppose que A et B sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, suivant la même loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N)$ et on désigne par D l'évènement : "A ne prend pas la même valeur que B".

i) Montrer que la probabilité de l'évènement D est $\dfrac{N-1}{N}$.

ii) Soit Y_1 et Y_2 les variables aléatoires définies par : $\left\{\begin{array}{l} Y_1 = \min(A, B) \\ Y_2 = \max(A, B) \end{array}\right.$

Calculer, pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, 2, \ldots, N\}$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_D\left([Y_1 = i, Y_2 = j]\right)$.

c) Expliquer pourquoi le programme de la question ***3.a)*** permet de simuler les variables aléatoires X_1 et X_2, dans le cas où N est égal à 10.