ECE2
Mathématiques

Programme de colle - Semaine 12

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Stabilité des lois de Poisson**
Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ avec X et Y **indépendantes**, alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Démonstration.

- Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, on a : $(X + Y)(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. La famille $([X = i])_{i \in \mathbb{N}}$ est un SCE.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([X+Y=k]) \\
= \ & \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i] \cap [X+Y=k]) \\
= \ & \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=k-i]) \\
= \ & \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i])\, \mathbb{P}([Y=k-i]) && \textit{(par indépendance de } X \textit{ et } Y\textit{)} \\
= \ & \sum_{\substack{i=0 \\ k-i \in Y(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i])\, \mathbb{P}([Y=k-i]) \\
& + \cancel{\sum_{\substack{i=0 \\ k-i \notin Y(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i])\, \mathbb{P}([Y=k-i])} && \textit{(car } [Y=k-i]=\varnothing \textit{ si } k-i \notin Y(\Omega)\textit{)} \\
= \ & \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}([X=i])\, \mathbb{P}([Y=k-i])
\end{aligned}$$

- La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{\begin{array}{l} k-i \in Y(\Omega) = \mathbb{N} \\ i \in [\![0, +\infty[\![\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant k-i \\ 0 \leqslant i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} i \leqslant k \\ 0 \leqslant i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\ 0 \leqslant i \leqslant k\right.$$

- Ainsi, en reprenant les égalités précédentes :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([X+Y=k] & = & \sum\limits_{i=0}^{k} \mathbb{P}([X=i])\,\mathbb{P}([Y=k-i]) & \\
& = & \sum\limits_{i=0}^{k} \dfrac{\lambda^i}{i!}\ \mathrm{e}^{-\lambda}\ \dfrac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}\ \mathrm{e}^{-\mu} & \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \textit{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)\textit{)} \\
& = & \mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{e}^{-\mu} \sum\limits_{i=0}^{k} \dfrac{1}{i!\,(k-i)!}\ \lambda^i\,\mu^{k-i} & \\
& = & \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\ \dfrac{1}{k!} \sum\limits_{i=0}^{k} \dfrac{k!}{i!\,(k-i)!}\ \lambda^i\,\mu k - i & \\
& = & \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\ \dfrac{1}{k!} \sum\limits_{i=0}^{k} \dbinom{k}{i}\ \lambda^i\,\mu k - i & \\
& = & \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\ \dfrac{1}{k!}\ (\lambda+\mu)^k & \textit{(d'après la formule du binôme de Newton)}
\end{array}$$

Finalement : $X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$. □

- **Inégalité de Cauchy-Schwarz**
Attention : cette propriété n'est pas au programme. Il est néanmoins nécessaire de connaître sa démonstration.
Soient X et Y deux v.a. discrètes admettant un moment d'ordre 2.

$$(\mathrm{Cov}(X,Y))^2 \leqslant V(X)V(Y)$$

Démonstration.

1. On montre que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathbb{V}(X+\lambda Y) = \mathbb{V}(X) + 2\lambda\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \lambda^2\mathbb{V}(Y)$$

   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{V}(X+\lambda Y) & = & \mathrm{Cov}(X+\lambda Y, X+\lambda Y) & \\
& = & \mathrm{Cov}(X, X+\lambda Y) + \lambda\,\mathrm{Cov}(Y, X+\lambda Y) & \textit{(par linéarité à gauche de la covariance)} \\
& = & \mathrm{Cov}(X,X) + \lambda\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \lambda\,\mathrm{Cov}(Y,X) + \lambda^2\,\mathrm{Cov}(Y,Y) & \textit{(par linéarité à droite de la covariance)} \\
& = & \mathrm{Cov}(X,X) + 2\lambda\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \lambda^2\,\mathrm{Cov}(Y,Y) & \textit{(par symétrie de la covariance)} \\
& = & \mathbb{V}(X) + 2\lambda\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \lambda^2\mathbb{V}(Y) &
\end{array}$$

2. Le polynôme P définit par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ P(\lambda) = \lambda^2\mathbb{V}(Y) + 2\lambda\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(X)$$

   est un polynôme de degré 2 en λ.
   De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) = \mathbb{V}(X+\lambda Y) \geqslant 0$, car une variance est toujours positive.
   Donc son discriminant est négatif, *i.e.*

$$(2\,\mathrm{Cov}(X,Y))^2 - 4\mathbb{V}(Y)\mathbb{V}(X) \leqslant 0$$

   On obtient donc : $(\mathrm{Cov}(X,Y))^2 \leqslant \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$.

□

- **Propriétés de la covariance**
  *(On demandera la démonstration des propriétés **1., 2., 4.** ou **1., 3., 4.**)*

  1. Symétrie :
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$$

  2. Linéarité à gauche :
$$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{Cov}(\lambda X_1 + \mu X_2, Y) = \lambda\,\mathrm{Cov}(X_1,Y) + \mu\,\mathrm{Cov}(X_2,Y)$$

  3. Linéarité à droite :
$$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{Cov}(X, \lambda Y_1 + \mu Y_2) = \lambda\,\mathrm{Cov}(X,Y_1) + \mu\,\mathrm{Cov}(X,Y_2)$$

  4. Soit $a \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{Cov}(a,X) = 0$$

  Preuve.

  1. Par définition de la covariance,
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Cov}(X,Y) & = & \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))) \\ & = & \mathbb{E}((Y-\mathbb{E}(Y))(X-\mathbb{E}(X))) \\ & = & \mathrm{Cov}(Y,X) \end{array}$$

  2. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Soient X_1, X_2 et Y des v.a.r. admettant un moment d'ordre 2.
$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Cov}(\lambda X_1 + \mu X_2, Y) & = & \mathbb{E}((\lambda X_1 + \mu X_2)Y) - \mathbb{E}(\lambda X_1 + \mu X_2)\mathbb{E}(Y) & \textit{(d'après la formule de Koenig-Huyghens)} \\ & = & \mathbb{E}(\lambda X_1 Y + \mu X_2 Y) - \mathbb{E}(\lambda X_1 + \mu X_2)\mathbb{E}(Y) & \\ & = & \lambda\mathbb{E}(X_1Y) + \mu\mathbb{E}(X_2Y) - (\lambda\mathbb{E}(X_1) + \mu\mathbb{E}(X_2))\mathbb{E}(Y) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \lambda\mathbb{E}(X_1Y) + \mu\mathbb{E}(X_2Y) - \lambda\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y) - \mu\mathbb{E}(X_2)\mathbb{E}(Y) & \\ & = & \lambda(\mathbb{E}(X_1Y) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y)) + \mu(\mathbb{E}(X_2Y) - \mathbb{E}(X_2)\mathbb{E}(Y)) & \\ & = & \lambda\,\mathrm{Cov}(X_1,Y) + \mu\,\mathrm{Cov}(X_2,Y) & \textit{(d'après la formule de Koenig-Huyghens)} \end{array}$$

  3. Idem point précédent

  4. Soit $a \in \mathbb{R}$ et X une v.a.r. admettant un moment d'ordre 2. D'après la formule de Koenig-Huyghens, on a :
$$\mathrm{Cov}(a,X) = \mathbb{E}(aX) - \mathbb{E}(a)\mathbb{E}(X) = a\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(a)\mathbb{E}(X)$$

  Or $a \in \mathbb{R}$, donc $\mathbb{E}(a) = a$. D'où $\mathrm{Cov}(a,X) = 0$.

  □

Connaissances exigibles

- On ne considère que des couples de v.a. **discrètes**.
- Les colleurs sanctionneront très sévèrement les confusions entre objets mathématiques :
  probabilité / événement, variable aléatoire / événement, expérience / variable aléatoire, etc.
- Lois de couples, lois marginales, lois conditionnelles.
- Indépendance (pour 2 ou n v.a.), lemme des coalitions.
- Loi d'une fonction d'un couple de v.a. discrète $Z = g(X, Y)$. En particulier, loi de la somme, du produit, du maximum, du minimum. Stabilité par somme de la loi binomiale et de la loi de Poisson.
- Espérance de la somme, du produit.
- Covariance, lien avec la variance. X et Y indépendantes implique $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
- Variance d'une somme.
- Coefficient de corrélation linéaire.