

EML 2000

Exercice 1 :

On considère une matrice carrée d'ordre 3 :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 de matrice J dans la base canonique de \mathbb{R}^3 . On considère, pour tout nombre réel a , la matrice carrée réelle d'ordre 3 :

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

1. a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .
 b) Montrer que J est diagonalisable. Déterminer une matrice réelle diagonale D d'ordre trois et une matrice réelle inversible P d'ordre trois telles que $J = PDP^{-1}$.
 c) En déduire que, pour tout nombre réel a , il existe une matrice réelle diagonale D_a d'ordre trois, que l'on calculera, telle que $M_a = PD_aP^{-1}$.
 d) Quel est l'ensemble des nombres réels a tels que M_a soit inversible ?
2. On se propose, dans cette question, de déterminer l'ensemble des nombres réels a tels qu'il existe une matrice carrée réelle d'ordre trois vérifiant $X^2 = M_a$.
 a) Soient a un nombre réel et X une matrice carrée réelle d'ordre trois tels que $X^2 = M_a$.
 (i) Montrer que X commute avec M_a , puis que X commute avec J .
 (ii) On note h l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice X dans la base canonique de \mathbb{R}^3 . Déduire de la question précédente que tout vecteur propre de f est vecteur propre de h .
 (iii) Établir qu'il existe une matrice réelle diagonale Δ d'ordre trois telle que $X = P\Delta P^{-1}$ et montrer : $\Delta^2 = D_a$.
 (iv) En déduire : $a \geq 2$.
 b) Réciproquement, montrer que, pour tout nombre réel a supérieur ou égal à 2, il existe une matrice carrée réelle X d'ordre trois telle que $X^2 = M_a$.
 c) Conclure.

Exercice 2 :

On considère la fonction $f :]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]-1; +\infty[$, par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[\end{cases}.$$

1. a) Montrer que f est continue sur $]-1; +\infty[$.
 b) Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. Pour tout réel x de $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$, calculer $f'(x)$.

- c) Montrer que $f'(x)$ tend vers $-\frac{1}{2}$ lorsque x tend vers 0.
- d) En déduire que f est de classe C^1 sur $] -1; +\infty[$.
2. Montrer : $\forall x \in] -1; +\infty[, \frac{x}{x+1} - \ln(1+x) \leq 0$ En déduire les variations de f . On précisera les limites de f en -1 et $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x \in] -\frac{1}{2}; +\infty[$, l'intégrale $\int x2xf(t) dt$ existe.
4. On considère la fonction $F :] -\frac{1}{2}; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $] -\frac{1}{2}; +\infty[$, par : $F(x) = \int x2xf(t) dt$.
- a) Montrer que F est dérivable sur $] -\frac{1}{2}; +\infty[$ et que F est croissante.
- b) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, F(x) \geq xf(2x)$.
- c) En déduire que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
- d) Montrer que l'intégrale $\int^{-1-\frac{1}{2}f(t) dt}$ est convergente. En déduire que la fonction F admet une limite finie de $-\frac{1}{2}$. On ne cherchera pas à calculer cette limite.

Exercice 3 :

Soit a un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges, et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

I Premier protocole

Les cartes du jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et $\mathbb{E}(X)$ son espérance.

1. Montrer : $\forall k \in \{1, \dots, 2n-1\}, P([X = k]) = \frac{2n-k}{n(2n-1)}$
2. Montrer : $\mathbb{E}(X) = \frac{2n+1}{3}$ On rappelle que pour tout entier naturel $p \geq 1$, on a : $\sum_{k=1}^p k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$.
3. Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs lorsqu'il obtient le premier roi rouge. On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{ième}$ carte découverte, G_1 est égale à $a - k$. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire G_1 .

II Deuxième protocole

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes. Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte

et gagne a francs lorsqu'il obtient le premier roi rouge. On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ième}}$ carte découverte ($k \leq n$), G_2 est égale à $a - k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

1. Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, déterminer $P([G_2 = a - k])$.

2. Vérifier : $P([G_2 = -n]) = \frac{n-1}{2(2n-1)}$.

3. Montrer : $\mathbb{E}(G_2) = \frac{3(3n-1)a - (7n^2 - 1)}{6(2n-1)}$.

III Comparaison des deux protocoles

On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$). Déterminer, selon les valeurs de a , le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.