# Colles - Semaine 1

---

**Exercice 1**

*1.* Étudier la fonction $f$ définie sur $[0, +\infty($, par $f(x) = \dfrac{4}{3+x}$.

*2.* On considère la suite $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R}_+^* \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{4}{3+u_n} \end{cases}$

*a)* Montrer que la suite $(u_n)$ est bien définie.

*b)* Déterminer la seule limite possible $\ell$ de la suite $(u_n)$.

*c)* Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{4}{9}$.

*d)* Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^n |a - \ell|$.

*e)* Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)$.

**Exercice 2**

On considère les fonctions $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

*1.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in ]0, 1[$.
On s'intéresse maintenant à la suite $(x_n)$.

*2.* Démontrer que, pour tout $n > 0$ : $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$.
En déduire que : $\forall n > 0,\ x_n < x_{n+1}$.

*3.* Démontrer que $(x_n)$ converge et que sa limite $\ell$ est telle que $0 < \ell \leqslant 1$.

*4.* Démontrer que : $\forall n > 0,\ x_n \leqslant \ell$.

*5.* En procédant par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.

**Exercice 3**

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \exp(u_n) - 1 \end{cases}$

On note $f$ la fonction définie par : $f(x) = \exp(x) - 1$.

*1.* Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution qui est 0.
Déterminer le signe de $f(x) - x$. Préciser le sens de variations de $f$.

**On suppose maintenant que $u_0 = 1$.**

*2.* Montrer que pour tout entier $n$, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$.

*3.* Montrer que $(u_n)$ n'est pas majorée et en déduire sa limite.

*4.* Monter que si $x \geqslant 1$ alors $f(x) \geqslant (e-1)x$.

*5.* En déduire que pour tout entier $n$, $u_n \geqslant (e-1)^n$ et retrouver la limite de la suite.

**On suppose maintenant que $u_0 < 0$.**

*6.* Montrer que pour tout entier $n$, $u_n < 0$.

*7.* En déduire que $(u_n)$ est croissante puis qu'elle converge vers 0.