

2. SUJETS DE L'OPTION ÉCONOMIQUE

Exercice principal E 26

1. Question de cours : Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes. Lien entre indépendance et covariance.

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes finies à valeurs dans \mathbb{N} , définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . On suppose que $X(\Omega) \subset [0, n]$ et $Y(\Omega) \subset [0, m]$, où n et m sont deux entiers de \mathbb{N}^* .

Pour tout couple $(i, j) \in [0, n] \times [0, m]$, on pose : $p_{i,j} = P((X = i) \cap (Y = j))$.

Soit F_X et F_Y les deux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies par : $F_X(x) = \sum_{i=0}^n P(X=i)x^i$ et $F_Y(y) = \sum_{j=0}^m P(Y=j)y^j$.

Soit $Z = (X, Y)$ et G_Z la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par : $G_Z(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m p_{i,j} x^i y^j$.

2. Donner la valeur de $G_Z(1, 1)$ et exprimer les espérances de X , Y et XY , puis la covariance de (X, Y) à l'aide des dérivées partielles premières et secondes de G_Z au point $(1, 1)$.

3. Soit f une fonction polynomiale de deux variables définie sur \mathbb{R}^2 par : $f(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{i,j} x^i y^j$ avec $a_{i,j} \in \mathbb{R}$.

On suppose que pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) = 0$.

a) Montrer que pour tout $(i, j) \in [0, n] \times [0, m]$, on a $a_{i,j} = 0$.

b) En déduire que X et Y sont indépendantes, si et seulement si, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $G_Z(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$. (on pourra poser : $a_{i,j} = p_{i,j} - P(X=i)P(Y=j)$)

4. Une urne contient des jetons portant chacun une des lettres A , B ou C . La proportion des jetons portant la lettre A est p , celle des jetons portant la lettre B est q et celle des jetons portant la lettre C est r , où p, q et r sont trois réels strictement positifs vérifiant $p + q + r = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages d'un jeton avec remise dans cette urne. On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de jetons tirés portant la lettre A (resp. B) à l'issue de ces n tirages.

a) Quelles sont les lois de X et Y respectivement ? Déterminer F_X et F_Y .

b) Déterminer la loi de Z . En déduire G_Z .

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

d) Calculer la covariance de (X, Y) . Le signe de cette covariance était-il prévisible ?

Exercice sans préparation E 26

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^t A A^t A A = I$, où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la matrice A est symétrique.

2. Déterminer A .

Exercice principal E 31

1. Question de cours : Définition et représentation graphique de la fonction partie entière.

On note E l'espace vectoriel des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et F le sous-espace vectoriel de E engendré par les quatre fonctions f_0, f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_0(x) = 1, f_1(x) = x, f_2(x) = e^x, f_3(x) = x e^x.$$

2. On note : $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$.

a) Montrer que \mathcal{B} est une base de F .

b) Montrer que toutes les fonctions de F sont continues et dérivables sur \mathbb{R} .

3. Soit Φ l'application définie par : pour tout $f \in F$, $\Phi(f) = f'$, où f' est la dérivée de f .

a) Justifier que Φ est un endomorphisme de F et écrire la matrice M de Φ dans la base \mathcal{B} .

b) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

c) Montrer que f_3 appartient à $\text{Im } \Phi$ et résoudre dans F l'équation : $\Phi(f) = f_3$.

4. On note G l'ensemble des fonctions g de E telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x+1) - g(x) = 0.$$

a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et trouver $F \cap G$.

b) Trouver un élément de G qui n'appartienne pas à F .

5. Trouver toutes les fonctions de F vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) - f(x) = (e-1)f'(x)$.

Exercice sans préparation E 31

Soit p un réel de $]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , de même loi de Bernoulli telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, P([X_k = 1]) = p$ et $P([X_k = 0]) = q$. Pour n entier de \mathbb{N}^* , on définit pour tout $k \in [1, n]$ la variable aléatoire $Y_k = X_k + X_{k+1}$.

1.a) Calculer pour tout $k \in [1, n]$, $\text{Cov}(Y_k, Y_{k+1})$.

b) Montrer que $0 < \text{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) \leq \frac{1}{4}$.

2. Calculer pour tout couple (k, l) tel que $1 \leq k < l \leq n$, $\text{Cov}(Y_k, Y_l)$.

3. On note ε un réel strictement positif fixé. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k - 2p\right| > \varepsilon\right) = 0$.

Exercice principal E 38

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension 2. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note D et T les deux applications suivantes :

$$D : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto ad - bc \quad \text{et} \quad T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto a + d.$$

2. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Exprimer $D(AB)$ en fonction de $D(A)$ et $D(B)$. Montrer que $T(AB) = T(BA)$.

b) En déduire que si A et B sont semblables, on a $D(A) = D(B)$ et $T(A) = T(B)$.

3. Déterminer $\text{Ker } D$ et $\text{Ker } T$. Quelle est la dimension de $\text{Ker } T$?

Dorénavant, si $u \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A dans une base \mathcal{B} de E , on note : $D(u) = D(A)$ et $T(u) = T(A)$.

4. On note id_E l'endomorphisme identité de E . Exprimer $u^2 = u \circ u$ en fonction de u et id_E .

5. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{S}_0 = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v - v \circ u = 0\}$.

Montrer que \mathcal{S}_0 est un espace vectoriel contenant $\{P(u), P \in \mathbb{R}[X]\}$.

6. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $u \neq 0$. On pose : $\mathcal{S} = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v - v \circ u = u\}$.

a) Montrer que si \mathcal{S} est non vide, alors l'endomorphisme u ne peut être bijectif. En déduire une condition nécessaire portant sur u^2 pour que \mathcal{S} soit non vide.

b) On suppose que \mathcal{S} est non vide. Établir l'existence d'une base $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2)$ de E dans laquelle la matrice M_u de u s'écrit $M_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et déterminer la forme générale de la matrice des éléments v de \mathcal{S} dans cette même base.

c) On suppose que \mathcal{S} est non vide. Montrer que $\mathcal{S} = \{v_0 + \alpha \text{id}_E + \beta u, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ où v_0 est un endomorphisme non inversible de E à déterminer.

Exercice sans préparation E 38

Soit k et λ deux réels et soit f la fonction définie sur \mathbb{R} à valeurs réelles donnée par :

$$f(t) = \begin{cases} k t e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Exprimer k en fonction de λ pour que f soit une densité de probabilité.

On note X une variable aléatoire réelle ayant f pour densité.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X admet un moment d'ordre n que l'on calculera.

Exercice principal E 39

1. Question de cours : Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Lois marginales. Lois conditionnelles.

Soit c un réel strictement positif et soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , telles que :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P([X = i] \cap [Y = j]) = c \frac{i+j}{i!j!}.$$

2.a) Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a : $P(X = i) = c \frac{(i+1)}{i!}$. En déduire la valeur de c .

b) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

3.a) Déterminer la loi de $X + Y - 1$.

b) En déduire la variance de $X + Y$.

c) Calculer la covariance de X et de $X + 5Y$. Les variables aléatoires X et $X + 5Y$ sont-elles indépendantes ?

4. On pose : $Z = \frac{1}{X+1}$.

a) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

b) Déterminer pour $i \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = i]$.

c) Pour $A \in \mathcal{A}$, on pose : $g_A(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} k P_A(Y = k)$.

Établir l'existence d'une fonction affine f telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, on a : $g_{[X=X(\omega)]}(Y) = f(Z(\omega))$.

Exercice sans préparation E 39

1. La somme de deux matrices diagonalisables est-elle diagonalisable ?

2. La somme de deux matrices inversibles est-elle inversible ?

3. Montrer que toute matrice carrée est la somme de deux matrices inversibles.

Exercice principal E 43

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.

Dans tout l'exercice, A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant trois valeurs propres distinctes, notées λ_1 , λ_2 et λ_3 .

1. Question de cours : Définition d'un polynôme annulateur d'une matrice. Lien avec les valeurs propres.
- 2.a) Donner en fonction de λ_1 , λ_2 et λ_3 , un polynôme annulateur de A de degré 3.
- b) Peut-on trouver un polynôme annulateur de A de degré 1 ou de degré 2 ?
3. Soit φ l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans \mathbb{R}^3 qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, associe le triplet $(P(\lambda_1^5), P(\lambda_2^5), P(\lambda_3^5))$.
 - a) Montrer que l'application φ est linéaire.
 - b) Déterminer $\text{Ker } \varphi$.
 - c) L'application φ est-elle un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur \mathbb{R}^3 ?
 - d) Établir l'existence d'un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que : pour tout $i \in [1, 3]$, $Q(\lambda_i^5) = \lambda_i$.
 - e) Soit T le polynôme défini par : $T(X) = Q(X^5) - X$.

Montrer que le polynôme T est un polynôme annulateur de A .

4. On note \mathcal{E} et \mathcal{F} les deux sous-ensembles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivants :

$$\mathcal{E} = \{N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AN = NA\} \text{ et } \mathcal{F} = \{N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^5 N = N A^5\}.$$

Déduire des questions précédentes que $\mathcal{E} = \mathcal{F}$.

Exercice sans préparation E 43

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

1. Déterminer la loi de M_n .
2. Montrer que l'application g qui à tout réel x associe $g(x) = e^{-x} \exp(-e^{-x})$ est une densité de probabilité.
3. Soit Y une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) de densité g .

Montrer que la suite de variables aléatoires $(\lambda M_n - \ln n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers Y .

Exercice principal E 46

1. Question de cours : Définition de la convergence d'une série numérique (à termes réels).

Dans tout l'exercice, a est un réel strictement supérieur à 1.

2.a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^a)^n}$ est convergente. On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n(a) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^a)^n}.$$

b) Établir la convergence de la suite $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

3.a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n(a) = a n (u_n(a) - u_{n+1}(a))$. En déduire $u_n(a)$ en fonction de $u_1(a)$.

b) Montrer que la série de terme général $\left(\frac{u_n(a)}{a n}\right)$ est convergente.

c) En déduire la limite de la suite $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n(a) = \ln(u_n(a)) + \frac{\ln n}{a}$.

a) Montrer que la série de terme général $(w_{n+1}(a) - w_n(a))$ est convergente.

b) En déduire l'existence d'un réel $K(a)$ tel que $u_n(a)$ soit équivalent à $\frac{K(a)}{n^{\frac{1}{a}}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice sans préparation E 46

Les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que : $Y(\Omega) = \{1, 2\}$, $P(Y = 1) = P(Y = 2) = \frac{1}{2}$. On pose : $Z = XY$.

1. Déterminer la loi de Z .

2. On admet que : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2}$. Quelle est la probabilité que Z prenne des valeurs paires ?

Exercice principal E 47

1. Question de cours : Critères de convergence d'une intégrale impropre.

Préciser la nature de l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, où a est un réel strictement positif et α un réel quelconque.

Soit T une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , suivant la loi normale centrée réduite. On note Φ et φ respectivement, la fonction de répartition et une densité de T .

- 2.a) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $x > 0$, on a : $0 \leq 1 - \Phi(x) \leq \frac{1}{2x^2}$.

b) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(x)) dx$ est convergente et calculer sa valeur.

3. On note φ' la dérivée de φ .

a) Déterminer pour tout $x \in \mathbb{R}$, une relation entre $\varphi'(x)$ et $\varphi(x)$.

b) En déduire, à l'aide de deux intégrations par parties, que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \leq \frac{1 - \Phi(x)}{\varphi(x)} \leq \frac{1}{x}$.

c) Donner un équivalent de $1 - \Phi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4. Soit $a > 0$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(P_{[T > x]} \left[T > x + \frac{a}{x} \right] \right)$.

Exercice sans préparation E 47

Soit D la matrice définie par : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

- Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AD = DA$.
- En déduire les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $M^3 - 2M = D$.

Exercice principal E 49

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.

Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice A dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note id l'endomorphisme identité de \mathbb{R}^3 et on pose : $f^2 = f \circ f$.

2.a) Montrer que $2f - f^2 = \text{id}$.

b) Montrer que l'endomorphisme f est un automorphisme. Quel est l'automorphisme réciproque de f ?

c) Montrer que f admet l'unique valeur propre $\lambda = 1$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

d) Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre 1. Quelle est sa dimension ?

3.a) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de n .

b) Le résultat précédent s'étend-t-il au cas où $n \in \mathbb{Z}$?

4. Déterminer une base (u, v, w) de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice sans préparation E 49

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et suivant toutes la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

1. Pour tout entier $k \geq 1$, déterminer une densité de la variable aléatoire $Y_k = \max(X_1, X_2, \dots, X_k)$.

2. Déterminer une densité de la variable aléatoire $Z_k = -Y_k$.

Exercice principal E 63

1. Question de cours : Énoncer une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'un endomorphisme.

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. On note $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à 2 lignes et 1 colonne à coefficients réels.

Soit u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ défini par : pour tout $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $u(X) = AX$.

a) Déterminer une base de $\text{Ker } u$ et une base de $\text{Im } u$.

b) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

c) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^n .

3. Soit v l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $v(M) = AM$.

On note $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on rappelle que :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Écrire la matrice V de l'endomorphisme v dans la base \mathcal{B} .

b) Déterminer une base de $\text{Ker } v$ et une base de $\text{Im } v$.

c) L'endomorphisme v est-il diagonalisable ?

Exercice sans préparation E 63

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes U_1, U_2, \dots, U_n contenant chacune trois boules. Dans l'ensemble des $3n$ boules, une seule est rouge, les autres étant bleues.

Sachant que l'on a tiré sans remise deux boules bleues dans l'urne U_1 , quelle est la probabilité que l'urne U_2 contienne la boule rouge ?