# HEC 2006

**Exercice 1** *(Exercice avec préparation)*
Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes à densité continues.
Soit $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.
Soient $F_X$, $F_Y$, $F_U$, $F_V$ les fonctions de répartition de $X$, $Y$, $U$ et $V$ respectivement.

*1.* Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire.

*2.* Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{F}_U(t) = 1 - (1 - F_X(t))(1 - F_Y(t))$.

*3.* Établir une relation analogue entre $F_V,\ F_X$ et $F_Y$.

*4.* On suppose à présent que $X$ et $Y$ suivent la loi exponentielle de paramètre 1.

   ***a)*** Quelle est la loi de $U$ ? Que vaut $\mathbb{P}(U = X)$ ?

   ***b)*** Montrer que $V$ a même loi que $Z = X + Y$.
   En déduire l'espérance et la variance de $V$.

**Exercice 1** *(Exercice sans préparation)*

Soit $A$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

*1.* La matrice $A$ est-elle diagonalisable ? La matrice $A$ est-elle inversible ?

*2.* Déterminer tous les entiers naturels $p$ et $q$ tels que $A^{2p+1} = A^{2q}$

*3.* Existe-t-il un entier $n$ tel que $M^n = A$ si

   ***a)*** $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

   ***b)*** $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

**Exercice 2** *(Exercice avec préparation)*

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique s'écrit : $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

***1.*** Définition et propriétés des matrices de passage.

***2.*** Donner une base et la dimension de $\ker(f)$.

***3.*** Donner une base et la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$.

***4.*** Donner les valeurs propres et les sous espaces propres de $f$.

***5.*** $f$ est-il diagonalisable ?

***6.*** Calculer $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

***7.*** On note $I$ la matrice identité dans la base canonique.
Déterminer les réels $a$ tels que $(A - aI)^2 = I$.

**Exercice 2** *(Exercice sans préparation)*
Soient $X_1, \cdots, X_n$, des variables aléatoires indépendantes de même loi définie :

$$\mathbb{P}(X_i = -1) = \mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{3}$$

On définit alors des variables aléatoires $(Y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(Z_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ par :
$Y_i = 1$ si $X_i = 1$ et $Y_i = 0$ sinon.
$Z_i = 1$ si $X_i = 0$ et $Z_i = 0$ sinon.
On pose $T_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$, $\quad T_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} Z_i$ et $U = T_1 + T_2$.
Déterminer $\mathbb{P}_{(T_1=t_1)\cap(T_2=t_2)}(X_i = 1)$.
Déterminer $\mathbb{P}_{(U=k)}(T_1 = t_1)$ (avec $0 \leqslant t_1 \leqslant k \leqslant n$ et expliquer ce résultat.

**Exercice 3** *(Exercice avec préparation)*
Soit $E$ l'ensemble des fonctions $f$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de classe $C^2$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f''(x) - \left(1 + x^4\right) f(x) = 0$$

On admet que $E$ contient une unique fonction $f_0$ vérifiant $f_0(0) = f'(0) = 1$

*1.* Rappeler la définition et les propriétés des fonctions convexes et montrer que $f_0^2$ est convexe.

*2.* Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f_0(t) \geqslant 1$

*3.* Montrer l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{f_0^2(t)} dt$.

On définit $f_1$par $\forall x \in \mathbb{R}^+ : f_1(x) = f_0(x) \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{f_0^2(t)} dt$.

*4.* Montrer que $f_1 \in E$ et que $f_1$ est bornée.

**Exercice 3** *(Exercice sans préparation)*
Soit $(X_n)$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre $p$, $0 < p < 1$.
On pose $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $U_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.

*1.* Déterminer la loi de $Y_n$.

*2.* Les variables $Y_i$, sont-elles deux à eux indépendantes

*3.* Calculer $\mathbb{E}(U_n)$ et $\mathbb{V}(U_n)$

*4.* Étudier la convergence de la suite $\left(\frac{U_n}{n}\right)$.

**Exercice 4** *(Exercice avec préparation)*
Soient $\theta \in [-2;2]$ et $X$ une variable aléatoire à densité $f_\theta$ définie par $f_\theta(x) = \theta x - \frac{\theta}{2} + 1$ si $x \in [0,1]$ et 0 sinon.

*1.* Donner la définition et des exemples d'esimateurs.

*2.* Montrer que $X$ admet une espérance et une variance que l'on calculera.

*3.* On admet que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^k e^{-u} du = k!$.
Montrer que la variable aléatoire $Y = -\ln(X)$ admet une espérance et une variance que l'on calculera (on pourra effectuer le changement de variable défini par la fonction $x \to -\ln(x)$ sur un intervalle adéquat)
On considère un échantillon de $n$ variables aléatoires indépendantes de même loi que $X$ et on pose $\widehat{X_n} = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ et $T_n = 12\left(\widehat{X_n} - \dfrac{1}{2}\right)$.

*4.* Montrer que $T_n$ est un estimateur sans biais de $\theta$.

**Exercice 4** *(Exercice sans préparation)*
Soient $a > 0$ et $f$ définie sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{a}{xy}$.
Déterminer les extrema de $f$.

Petits exercices à utiliser en cas de besoin.
La forme de l'oral a changé depuis, ils ne sont pas tellement caractéristiques dans leur forme mais intéressants sur le fond.

---

On dispose d'urnes $U_1,\ U_2,\ \cdots, U_n, \cdots$ . La première $U_1$ contient une boule noire, une boule blanche et une boule $B$ de couleur. inconnue. Les suivantes $U_2,\ \cdots, U_n, \cdots$ contiennent une boule blanche et une boule noire.

On tire une première boule de l'urne $U_1$ qu'on remet dans $U_2$.. Puis on tire une deuxième boule de $U_2$ qu'on remet clans $U_3$ etc.

On désigne par $p_n$ la probabilité que la $n^{ième}$ boule tirée (de $U_n$) soit blanche.

*1.* Dans cette question, on suppose que $p_{1000} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{999}$.
La boule $B$ était-elle blanche ?

*2.* Dans cette question, on suppose que. pour tout $n$ supérieur à 1000 on a l'égalité $p_n = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$
La boule $B$ était-elle noire.

---

On dispose de 7 Euros. Chaque semaine a lieu une loterie de 100 billets dont 10 sont gagnants. Chaque billet coûte 1 Euro.

*1.* Dans cette question on veut, maximiser la chance de gagner au moins une fois. Discuter l'affirmation "On a intérêt, à acheter sept billets la première semaine plutôt que d'acheter un billet pendant sept semaines".

*2.* On veut maximiser le nombre de billets gagnants achetés. Discuter l'affirmation "On a intérêt à acheter sept billets la première semaine plutôt que d'acheter un billet pendant sept semaines".

---

Vous disposez d'une trousse contenant 10 stylos dont un seul fonctionne.

*1.* Vous en essayez un (au hasard), puis s'il y a échec, un deuxième, s'il y a échec, vous remettez le premier et vous tirez (au hasard) le troisième puis, s'il y a échec, vous remettez le deuxième et vous tirer (au hasard) le quatrième, puis...
Combien devrez vous effectuer d'essais de stylo en moyenne pour trouver le bon ?

*2.* Vous les essayez l'un après l'autre jusqu'à trouver celui qui fonctionne.
Combien devrez vous effectuer d'essais de stylo en moyenne ?

*3.* Même question si suppose qu'à chaque essai infructueux. vous remettez (à tort ) le stylo et que vous tirez au hasard à, nouveau.

---

Dans un programme de calcul, l'opérateur décide d'utiliser $J$ chiffres significatifs après la virgule et d'arrondir tous les résultats d'opérations à cette configuration (donc à $0,5 \cdot 10^{-J}$ près).

On suppose qu'il effectue $10^6$ opérations élémentaires successives, que les erreurs commises pour chacune sont indépendantes, de loi uniforme sur $\left[-0,5 \cdot 10^{-J}; 0,5 \cdot 10^{-J}\right]$ et que l'erreur sur le résultat final est la somme des erreurs commises sur chaque opération.

Déterminer une valeur approchée de la probabilité pour que l'erreurs finale soit inférieure ou égale, en valeur absolue à $0,5 \cdot 10^{-J+3}$
On donne $2F\left(\sqrt{3}\right) - 1 \sim 0,92$ où $F$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

1. Montrer que la fonction $g_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) e^{-x}$ est dérivable et calculer sa dérivée.
2. Montrer que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ l'équation $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \frac{e^x}{2}$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}^+$

Dans la suite on note $a_n$ cette solution.

3. Écrire un programme Turbo-pascal permettant de calculer le plus "économiquement" possible la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ pour $x$ donné.
4. La suite de terme général $a_n$ est-elle monotone ?