ECS2
Mathématiques

Colles - Semaine 9

Série 1

Question de cours

Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x(1+(\ln(x))^4)}\,dx$.

Exercice

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif.
On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, et suivant toutes deux la loi uniforme sur $[0, a[$.
On pose $Z = |X - Y|$ et on admet que $-Y$, $X - Y$ et Z sont des variables aléatoires à densité, elles aussi définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. ***a)*** Déterminer une densité de $-Y$.

b) En déduire que la variable aléatoire $X - Y$ admet pour densité la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{a-|x|}{a^2} & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note G la fonction de répartition de $X - Y$.

2. ***a)*** Exprimer la fonction de répartition H de la variable Z en fonction de G.

b) En déduire qu'une densité de Z est la fonction h définie par : $\quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{2(a-x)}{a^2} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

3. Montrer que Z possède une espérance et une variance et les déterminer.

4. Simulation informatique.
On rappelle qu'en **Scilab**, la commande `rand()` permet de simuler la loi uniforme sur $[0, 1[$.
Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle retourne à chaque appel un nombre réel choisi selon la loi de Z.

```
function v=z(a)
  x = ..........
  y = ..........
  v = ..........
endfunction
```

Série 2

Question de cours

Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice

Dans cette exercice, $E = \mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, avec $n \in \mathbb{N}^*$, D représente l'endomorphisme de dérivation $D : P \mapsto P'$.

1. Montrer que $\varphi : P \mapsto P\left(\dfrac{X}{2}\right)$ est un automorphisme de E. Les endomorphismes φ et D commutent-ils ?

2. Soit Φ l'application définie sur E par :

$$\forall P \in E,\ \Phi(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}\left(\frac{X}{2}\right)$$

- ***a)*** Montrer que Φ est bien définie et appartient à $\mathscr{L}(E)$.
- ***b)*** Montrer que $\varphi^{-1} \circ \Phi = (I - D)^{-1}$ et que $\Phi \circ \varphi^{-1} = (I - 2D)^{-1}$, où I représente l'endomorphisme identité de E.
- ***c)*** En déduire que Φ est un automorphisme de E.

3. ***a)*** Déterminer les valeurs propres possibles de Φ.

- ***b)*** Soit $(\lambda, P) \in \mathbb{R} \times E$ un couple propre de Φ, c'est-à-dire vérifiant $\Phi(P) = \lambda P$, avec $P \neq 0$. Montrer que cette équation est équivalente à l'équation :

$$\mu P(X) = P(2X) - 2P'(2X)$$

  où μ s'exprime en fonction de λ.
- ***c)*** Soit P un polynôme propre unitaire (*i.e.* de coefficient dominant égal à 1) de Φ de degré n. Déterminer l'expression de ses coefficients en fonction de n.

Série 3

Question de cours

Soit X une v.a.r. à densité. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Étudier la v.a.r. $Y = aX + b$.

Exercice

1. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \exp(-e^{-x})$.

a) Justifier que F est une fonction de répartition.

b) Soit X une v.a.r. de fonction de répartition F. Déterminer une densité f de X.

On suppose désormais que X est une v.a.r. sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et que toutes les v.a.r. citées sont définies sur ce même espace.

2. ***a)*** Soit $Z = e^{-X}$. Justifier que Z est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et déterminer sa loi.

b) On rappelle que `grand(1,1,'exp',1)` simule une variable aléatoire et suivant une loi exponentielle de paramètre 1. Écrire une fonction `Scilab` qui simule la variable aléatoire X.

c) Soient x et y deux réels strictement positifs. Établir une relation entre la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X \leqslant -\ln(X)]}([X \leqslant -\ln(x+y)])$ et $\mathbb{P}([X \leqslant -\ln(y)])$.

3. Soit $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1.
Soit d'autre part L une v.a.r. de loi de Poisson de paramètre 1 indépendante des variables aléatoires de la suite $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.
On définit S par :

× si $L(\omega) = 0$, alors $S(\omega) = 0$.

× si $L(\omega) = k$, avec $k \in \mathbb{N}^*$, alors $S(\omega) = \max(Y_1(\omega), \dots, Y_k(\omega))$.

a) Soit k un entier naturel non nul.
Déterminer la loi de la variable aléatoire $S_k = \max(Y_1, \dots, Y_k)$.

b) Démontrer que pour tous réels a et b tels que $0 < a < b$, on a :

$$\mathbb{P}([a \leqslant S \leqslant b]) = \mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b])$$

c) Calculer $\mathbb{P}([S = 0])$.