HEC 2015

Exercice

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit v un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dans la base $\mathscr{B}$ et qui vérifie $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 1$.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ qui à tout vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, associe le vecteur $f(x)$ défini par : $f(x) = x - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot v$.

1. a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration.

- Montrons que f est une application linéaire.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$. Alors il existe $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ tels que :

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{et} \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Par définition de f :

$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) &= (\lambda \cdot x + \mu \cdot y) - \left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda\, x_i + \mu\, y_i)\right) \cdot v \\ &= \lambda \cdot x + \mu \cdot y - \left(\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i + \mu \sum_{i=1}^{n} y_i\right) \cdot v \\ &= \lambda \cdot x + \mu \cdot y - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot v - \mu \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \cdot v \\ &= \lambda \cdot \left(x - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot v\right) + \mu \cdot \left(y - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \cdot v\right) \\ &= \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est linéaire.}}$$

- Montrons que $f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^n$, *i.e.* : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \in \mathbb{R}^n$.
Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors : $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \in \mathbb{R}$.
On rappelle que : $f(x) = x - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot v$.
Ainsi, $f(x)$ appraît comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, x et v.
Comme $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel, on a bien : $f(x) \in \mathbb{R}^n$.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R}^n.}$$

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^n.}$$

□

b) Montrer que $f \circ f = f$.

Démonstration.
Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{rcll} (f \circ f)(x) & = & f(f(x)) \ = \ f\left(x - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot v\right) & \\ & = & f(x) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot f(v) & \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\ & = & f(x) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(v - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} v_i\right) \cdot v\right) & \\ & = & f(x) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot (v - v) & \textit{(car } \sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 1\textit{)} \\ & = & f(x) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } f \circ f = f.}$$

Commentaire

Si E est un espace vectoriel, un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ qui vérifie $f \circ f = f$ est appelé projecteur de E. Dans cet exercice, on va étudier quelques propriétés classiques (mais hors programme) des projecteurs.

□

2. Déterminer le spectre de f.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $f \circ f - f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}$.
  Donc $Q(X) = X^2 - X = X(X-1)$ est un polynôme annulateur de f.
  $$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}(f) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{0, 1\}.}$$
- On remarque alors :
  $$f(v) = v - \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) \cdot v = v - 1 \cdot v = 0$$
  Or $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ car $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 1$. Donc : $\left\{\begin{array}{l} v \neq 0_{\mathbb{R}^n} \\ f(v) = 0_{\mathbb{R}^n} \end{array}\right.$.
  On en déduit que v est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 0.
  $$\boxed{\text{Ainsi, } 0 \text{ est valeur propre de } f.}$$
- D'après ce qui précède, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f\big(f(x)\big) = f(x) = 1 \cdot f(x)$.
  Ainsi, tout vecteur $f(x)$ **non nul** est vecteur propre associé à la valeur propre 1.
  Un tel élément existe forcément. Pour le démontrer, remarquons tout d'abord que comme l'endomorphisme f n'est pas l'application nulle alors : $\mathrm{Im}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
  Ainsi il existe $u \in \mathrm{Im}(f)$ tel que $u \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Et d'après ce qui précède : $f(u) = 1 \cdot u$.
  (on peut de nouveau le détailler. Comme : $u \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $u = f(x)$ et $f(u) = f(f(x)) = (f \circ f)(x) = f(x) = u$)
  $$\boxed{\text{Ainsi, } 1 \text{ est valeur propre de } f.}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Sp}(f) = \{0, 1\}.}$$

Commentaire

- L'application f est définie à l'aide du vecteur v. Penser à déterminer $f(v)$, dès la lecture de cette définition, est un bon réflexe. Il faut alors penser à utiliser ce calcul au bon moment : pour démontrer 0 est bien une valeur propre de f puisque v en est un vecteur propre.
- Il est plus difficile de trouver un vecteur propre associé à la valeur propre 1.
  On se sert pour cette question du résultat suivant :
  $$\forall u \in \mathrm{Im}(f),\ f(u) = u$$
  Cette relation est vraie pour tout projecteur f et se démontre grâce à la relation : $f \circ f = f$ (c'est ce qui a été fait dans le corrigé de cette question et dans la suivante).
- Il est important de penser à la notion de polynôme annulateur dès que l'énoncé met en jeu des puissances de matrices ou des itérées d'applications linéaires.
  Ce réflexe permet de démontrer l'étape :
  $$\mathrm{Sp}(f) \subset \{0, 1\}$$
  S'il est évidemment préférable d'écrire toutes les étapes de démonstration d'une question, chacune d'entre elles rapporte des points. Il est donc vivement conseillé d'écrire la première étape de démonstration quitte à admettre celles qui suivent.

□

3. a) Montrer que le vecteur y appartient à l'image de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, si et seulement si $f(y) = y$.

Démonstration.
Soit $y \in \mathbb{R}^n$.

($\Rightarrow$) Supposons que $y \in \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que : $y = f(x)$.
On obtient alors :
$$f(y) = f(f(x)) = (f \circ f)(x) = f(x) = y$$

($\Leftarrow$) Supposons que : $f(y) = y$.
Alors, en posant : $x = y$, on exhibe bien $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$.
Donc $y \in \mathrm{Im}(f)$.

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}^n,\ \ (y \in \mathrm{Im}(f)) \ \Leftrightarrow\ (f(y) = y)}$$

Commentaire

Cette démonstration n'utilise pas la définition de f mais seulement la propriété : $f \circ f = f$.
C'est donc un résultat général sur les projecteurs que l'on montre ici.

□

b) Montrer que la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est inférieure ou égale à $n - 1$.

Démonstration.

- D'après la question ***2.***, 0 est valeur propre de f. Donc : $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
  On en déduit : $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geqslant 1$.
- Ainsi, d'après le théorème du rang :
  $$\underset{\substack{\parallel \\ n}}{\dim(\mathbb{R}^n)} \ = \ \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) \ \geqslant\ 1 + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

$$\boxed{\text{Comme } n \geqslant 1 + \dim(\text{Im}(f)), \text{ on a bien : } \dim(\text{Im}(f)) \leqslant n - 1.}$$

□

c) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a : $(e_i - e_{i+1}) \in \mathrm{Im}(f)$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$.

- Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, notons : $e_j = (e_j^1, e_j^2, \ldots, e_j^n)$. Alors, par définition de e_j :
$$\forall k \in [\![1, n]\!], \ e_j^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Ainsi : $\sum\limits_{k=1}^{n} e_j^k = 1$.
- On calcule alors :
$$f(e_i) = e_i - 1 \cdot v = e_i - v$$
De même : $f(e_{i+1}) = e_{i+1} - v$.
On en déduit, par linéarité de f :
$$f(e_i - e_{i+1}) = f(e_i) - f(e_{i+1}) = (e_i - \cancel{v}) - (e_{i+1} - \cancel{v}) = e_i - e_{i+1}$$
D'après la question ***3.a)***, on en déduit : $(e_i - e_{i+1}) \in \mathrm{Im}(f)$.

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n-1]\!], \ (e_i - e_{i+1}) \in \mathrm{Im}(f)}$$

□

d) En déduire une base et la dimension de $\mathrm{Im}(f)$. Quel est le rang de f ?

Démonstration.

- Montrons que la famille $(e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n)$ est une famille libre de $\mathrm{Im}(f)$.
  - × D'après la question précédente :
$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \ (e_i - e_{i+1}) \in \mathrm{Im}(f)$$
  - × Démoontrons maintenant que cette famille est libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Supposons :
$$\lambda_1 \cdot (e_1 - e_2) + \lambda_2 \cdot (e_2 - e_3) + \cdots + \lambda_{n-1} \cdot (e_{n-1} - e_n) = 0_{\mathbb{R}^n}$$
On obtient alors :
$$\lambda_1 \cdot e_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot e_2 + \cdots + (\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}) \cdot e_{n-1} + \lambda_{n-1} \cdot e_n = 0_{\mathbb{R}^n}$$
Or la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. La proposition précédente équivaut donc à :
$$\left\{ \begin{array}{rcccccccl} \lambda_1 & & & & & & & = & 0 \\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & & & = & 0 \\ & & & \vdots & & & & & \\ & & & & - & \lambda_{n-2} & + \ \lambda_{n-1} & = & 0 \\ & & & & & & \lambda_{n-1} & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \ \{\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-2} = \lambda_{n-1} = 0$$
(par remontées successives)

$$\boxed{\text{La famille } (e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n) \text{ est une famille libre de } \mathrm{Im}(f).}$$

- On en déduit :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) \geqslant \mathrm{Card}((e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n)) = n - 1$$

Or, d'après la question ***3.b)*** : $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant n - 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim(\mathrm{Im}(f)) = n - 1}$$

- On sait que :
  × $(e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n)$ est une famille libre de $\mathrm{Im}(f)$,
  × $\mathrm{Card}((e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n)) = n - 1 = \dim(\mathrm{Im}(f))$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que } (e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f).\\ \text{De plus : } \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = n - 1.\end{array}}$$

Commentaire

Les énoncés de type HEC / ESSEC se distinguent des énoncés EML / EDHEC par un découpage plus faible des questions qui oblige à prendre plus d'initiatives. Ici, la formulation de la question « En déduire que ... » doit aider à comprendre qu'il s'agit de se servir du résultat précédent. En question précédente, on exhibe $(n - 1)$ vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$. Il s'agit alors de tester si la famille constituée de ces vecteurs est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

□

4. a) Déterminer une base du noyau de f.

Démonstration.

- D'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim(\mathrm{Ker}(f)) & + & \dim(\mathrm{Im}(f)) & = & \dim(\mathbb{R}^n) \\ & & \| & & \| \\ & & n-1 & & n \end{array}$$

Donc : $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n - (n - 1) = 1$.

- D'après la question ***2.*** :
  × $v \in \mathrm{Ker}(f)$,
  × $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

  Donc (v) forme une famille libre de $\mathrm{Ker}(f)$.

- On obtient alors :
  × (v) est une famille libre de $\mathrm{Ker}(f)$,
  × $\mathrm{Card}((v)) = 1 = \dim(\mathrm{Ker}(f))$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } (v) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f).}$$

□

b) Quels sont les sous-espaces propres de f ?

Démonstration.

- On a déjà, d'après la question ***4.a)*** :

$$E_0(f) = \mathrm{Ker}(f - 0_{\mathbb{R}} \cdot \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(v)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } E_0(f) = \mathrm{Vect}\,(v).}$$

- Soit $y \in \mathbb{R}^n$. D'après la question ***3.a)*** :

$$y \in \mathrm{Im}(f) \ \Leftrightarrow\ f(y) = y \ \Leftrightarrow\ y \in E_1(f)$$

On en déduit que : $\mathrm{Im}(f) = E_1(f)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{D'après la question } \textbf{\textit{3.d)}} \text{ :}\\ E_1(f) = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n)\end{array}}$$

□

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Démonstration.
D'après les questions ***3.d)***, ***4.a)*** et ***4.b)*** :

$$\dim(E_0(f)) + \dim(E_1(f)) = 1 + (n-1) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est diagonalisable.}}$$

□

5. Écrire la matrice M de l'endomorphisme f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et la matrice M' de f dans une base de vecteurs propres.

Démonstration.

- Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a déjà montré en question ***3.c)*** :

$$\begin{array}{rcl} f(e_i) & = & e_i - v \ = \ e_i - \sum\limits_{j=1}^{n} v_j \cdot e_j \\ & = & (-v_1)\cdot e_1 + \dots + (1 - v_i)\cdot e_i + (-v_{i+1})\cdot e_{i+1} + \dots + (-v_n)\cdot e_n \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient alors : } M = \begin{pmatrix} 1-v_1 & -v_1 & \cdots & -v_1 & -v_1 \\ -v_2 & 1-v_2 & \cdots & -v_2 & -v_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -v_{n-1} & -v_{n-1} & \cdots & 1-v_{n-1} & -v_{n-1} \\ -v_n & -v_n & \cdots & -v_n & 1-v_n \end{pmatrix}}$$

- La famille $(v, e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n)$ est une base de vecteurs propres de f.
  - × Comme $v \in E_0(f)$:

$$f(v) = 0_{\mathbb{R}^n} = 0 \cdot v + 0 \cdot (e_1 - e_2) + \dots + 0 \cdot (e_{n-1} - e_n)$$

  - × Comme $(e_1 - e_2) \in E_1(f)$:

$$f(e_1 - e_2) = e_1 - e_2 = 0 \cdot v + 1 \cdot (e_1 - e_2) + 0 \cdot (e_2 - e_3) + \dots + 0 \cdot (e_{n-1} - e_n)$$

  - × $\cdots$
  - × Comme $(e_{n-1} - e_n) \in E_1(f)$:

$$f(e_{n-1} - e_n) = e_{n-1} - e_n = 0 \cdot v + 0 \cdot (e_1 - e_2) + \dots + 0 \cdot (e_{n-2} - e_{n-1}) + 1 \cdot (e_{n-1} - e_n)$$

$$\boxed{\text{On obtient alors : } M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}$$

□