Colles - Semaine 9

Planche 1

Question de cours

Intégrale de Riemann au voisinage de $+\infty$

Exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x + \frac{1}{n}}\, dx$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose alors $v_n = \displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x + \frac{1}{n}}\, dx$ et $w_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x + \frac{1}{n}}\, dx$.

- ***a)*** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant w_n \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
- ***b)*** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}} \ln(n+1)$.
- ***c)*** Donner la limite de la suite (u_n).

3. On se propose de déterminer un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

- ***a)*** Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{1} \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x}\, dx$ est une intégrale convergente.
- ***b)*** Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^{1} \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x + \frac{1}{n}}\, dx \leqslant I$.
- ***c)*** En déduire un encadrement de v_n valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- ***d)*** Donner enfin, en utilisant cet encadrement, un équivalent simple de u_n.

Planche 2

Question de cours

Intégrale de Riemann au voisinage de 0

Exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$ et $u_n = \sqrt{n}\, I_n$.

On admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que I_n est convergente. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone et étudier sa convergence.

3. Calculer I_n, pour tout $n \geqslant 1$.

4. ***a)*** Montrer que, pour tout réel x, $\ln(1+x^2) \leqslant x^2$.

En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $I_n \geqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\,dx$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$.

c) En déduire une minoration de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Montrer qu'il existe un réel α tel que $\displaystyle\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha\, 4^n}{\sqrt{n}}$.

Planche 3

Question de cours

Théorème d'intégration par parties sur un segment

Exercice

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}}\, dx$.

1. Montrer que I_n existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3. ***a)*** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{2n}{2n+1}\, I_{n-1}$.

b) En déduire l'existence et la nature de la série de terme général $v_n = \ln(I_n) - \ln(I_{n-1})$, puis la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \sqrt{n}\, I_n$ et $K_n = \sqrt{n+1}\, I_n$.

a) Montrer que les suites $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

b) En déduire qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{\sqrt{n}}$.

5. ***a)*** Calculer I_n en fonction de n.

b) On admet la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n\, \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$.

c) Déterminer la valeur de α.