HEC 2018

Sujet E 120

Exercice avec préparation 1

Dans tout l'exercice, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$.

1. Question de cours :
Donner la définition d'une famille génératrice de E. Que peut-on dire de son cardinal ?

Pour tout endomorphisme f de E, on note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f :

$$C(f) \;=\; \{g \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$$

2. ***a)*** Démontrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

b) Quelle est la plus grande dimension possible de $C(f)$?

3. On suppose dans cette seule question que $E = \mathbb{R}^2$.
On note j l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Trouver les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $MJ = JM$.

b) En déduire la dimension de $C(j)$.

4. On suppose dans cette question que f est un endomorphisme de E pour lequel il existe $a \in E$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la famille $(a, f(a), \ldots, f^{n_0}(a))$ est génératrice de E.

a) On note p le plus grand entier strictement positif pour lequel la famille $(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a))$ est libre.
Montrer que la famille $(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a))$ est une base de E. Que vaut p ?

b) Démontrer que, pour tout endomorphisme $g \in C(f)$, il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$g \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \, f^k$$

c) En déduire la dimension de $C(f)$.

Exercice sans préparation 1

Une urne contient au départ une boule verte et une boule rouge. On effectue des tirages successifs selon la procédure suivante : on tire une boule, si elle est rouge, on arrête les tirage, si elle est verte, on la remet dans l'urne en ajoutant une boule rouge.
On note X le nombre de tirages effectués.

1. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

2. Montrer que $\dfrac{1}{X}$ admet une espérance et la calculer.

Sujet E 121

Exercice avec préparation 2

Soit a un nombre réel strictement positif.

On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont *tous* les termes sont strictement positifs, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\left\{\begin{array}{lcl} w_n & = & \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \dfrac{a}{n} \\ \ell_n & = & \ln\left(n^a\, u_n\right) \end{array}\right.$$

On suppose que la *série* de terme général w_n est absolument convergente.

1. Question de cours : formule de Taylor-Young.

2. Soit $f : t \mapsto \ln(1+t) - t$.

a) Préciser le domaine de définition de f et donner un équivalent simple de cette fonction au voisinage de 0.

b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ est convergente.

3. Démontrer que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{w_n}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} (w_n)^2$ sont convergentes.

4. ***a)*** Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $\ell_{n+1} - \ell_n \ = \ f\left(w_n - \dfrac{a}{n}\right) + w_n + a\, f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

b) En déduire la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (\ell_{n+1} - \ell_n)$.

5. ***a)*** Justifier la convergence de la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) En déduire l'existence d'un réel $A > 0$ tel que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{n^a}$.

6. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{2\cdot 4 \cdots (2n)}{1\cdot 3 \cdots (2n+1)}$.

Exercice sans préparation 2

1. Indiquer l'allure de la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

2. La fonction **Scilab** `cdfnor` permet de déterminer les valeurs de la fonction de répartition d'une loi normale et de sa bijection réciproque.

En voici deux exemples d'utilisation :

```
cdfnor('PQ', 1.96, 0, 1)  =
    ans = 0.9750021
cdfnor('X', 0, 1, 0.975, 0.025)  =
    ans = 1.959964
```

a) Indiquer les sorties **Scilab** consécutives aux trois entrées suivantes :

```
cdfnor('PQ', 0, 0, 1)
cdfnor('X', 0, 1, 0.5, 0.5)
cdfnor('X', 0, 1, 0.025, 0.975)
```

b) Expliquer le script suivant et fournir une estimation de la valeur affectée à `p` à l'issue de l'exécution de ce script.

```
n = 1000;
X = zeros(n, 1)
for i=1:n X(i,1)=grand(1,1,'nor',0,1) * grand(1,1,'bin',1,0.5); end;
p = length(find(X < 1.96)) / n
```

Sujet E 122

Exercice avec préparation 3

1. ***a)*** Question de cours.
Rappeler la définition d'une bijection. Que peut-on dire de la composée de deux bijections ?

b) Justifier que la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{2x}\right)$ définit une bijection de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$ et trouver sa bijection réciproque.

2. Soit U une variable aléatoire réelle de la loi uniforme sur $]0,1]$.
On pose : $X = \ln\left(\dfrac{1+U}{2\,U}\right)$.

a) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

b) En déduire que X est une variable aléatoire à densité.

c) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ dx$ et la calculer.

d) Justifier que X admet une espérance et la calculer.

e) Compléter le code de la fonction **Scilab** suivante pour qu'elle permette de créer des simulations, indépendantes, de la loi de X.

```
function x = simulX(n)
  x = zeros(n,1)
  for i = 1:n
    x(i,1) = ........
  end
endfunction
```

3. Soient B_1, B_2, X_1, X_2 quatre variables aléatoires indépendantes telles que B_1 et B_2 suivent la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$, et que X_1 et X_2 suivent la même loi que la variable X de la question précédente.
On pose :

$$\begin{cases} Y_1 = B_1\,X_1 + (1-B_1)\,X_2 \\ Y_2 = B_1\,X_1 + B_2\,X_2 \end{cases}$$

a) Parmi les deux variables Y_1 et Y_2, une seule est une variable à densité. Laquelle et pourquoi ?

b) Les deux variables Y_1 et Y_2 ont-elles la même espérance ?

c) Proposer, pour chacune de ces deux variables, un script **Scilab** permettant d'en simuler une réalisation.

Exercice sans préparation 3

Pour tout nombre réel a, on note : $M(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de a la matrice $M(a)$ est-elle diagonalisable ?

2. Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la matrice $M(a)$ est semblable à la matrice :

$$N(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

Sujet E 123

Exercice avec préparation 4

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Question de cours.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

2. On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ et $N = M + 2\,I$.

a) Quel est le rang de N ?

b) En déduire une valeur propre de M et la dimension du sous-espace propre associé.

c) Calculer N^2.

d) Que peut-on en déduire concernant les valeurs propres de N et de M ?

3. ***a)*** À l'aide d'une propriété de M, justifier que f est diagonalisable.

b) Quelles sont les valeurs propres de f ?

c) Combien existe-t-il de matrices diagonales semblables à M ?

d) Déterminer l'image de f.

4. Soit r un nombre réel strictement positif.
On considère quatre suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & r\,(-u_n - v_n - w_n + t_n) \\ v_{n+1} & = & r\,(-u_n - v_n + w_n - t_n) \\ w_{n+1} & = & r\,(-u_n + v_n - w_n - t_n) \\ t_{n+1} & = & r\,(u_n - v_n - w_n - t_n) \end{array} \right.$$

a) Vérifier que, pour tout entier $p \geqslant 0$, on a : $\left\{ \begin{array}{rcl} M^{2p} & = & 4^p\, I \\ M^{2p+1} & = & 4^p\, M \end{array} \right.$.

b) En déduire que si r est strictement inférieur à $\dfrac{1}{2}$, alors les quatre suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de limite nulle.

c) Dans quels autres cas, hormis celui où $u_0 = v_0 = w_0 = t_0 = 0$, les quatre suites sont-elles toutes les quatre convergentes ?

Exercice sans préparation 4

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.
Pour tout $x > 0$, on pose :

$$f(x) = \mathbb{P}([x < X < 2x])$$

1. ***a)*** Justifier la continuité de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

b) Trouver les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2. ***a)*** Justifier l'existence d'une valeur maximale p pour la probabilité $\mathbb{P}([x < X < 2x])$.

b) Trouver a tel que $f(a) = p$.

Sujet E 125

Exercice avec préparation 5

1. Question de cours.
Quel est le lien entre la continuité d'une fonction et sa dérivabilité ?

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g : x \mapsto \begin{cases} x \ln\big(|x|\big) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Justifier la continuité de g sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que la fonction $h : x \mapsto x\, g(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

c) La fonction h est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?

3. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions g, $f_0 : x \mapsto 1$ et $f_1 : x \mapsto x$:

$$F \;=\; \text{Vect}\,(f_0, f_1, g)$$

a) Pour toute fonction f de F, on note $\Phi(f)$ la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto x\, f(x)$.
Montrer que Φ définit un endomorphisme de F.

b) Prouver que la famille (f_0, f_1, g) est une base de F et trouver la matrice M de Φ dans cette base.

4. ***a)*** Montrer que M est une matrice inversible et déterminer son inverse.

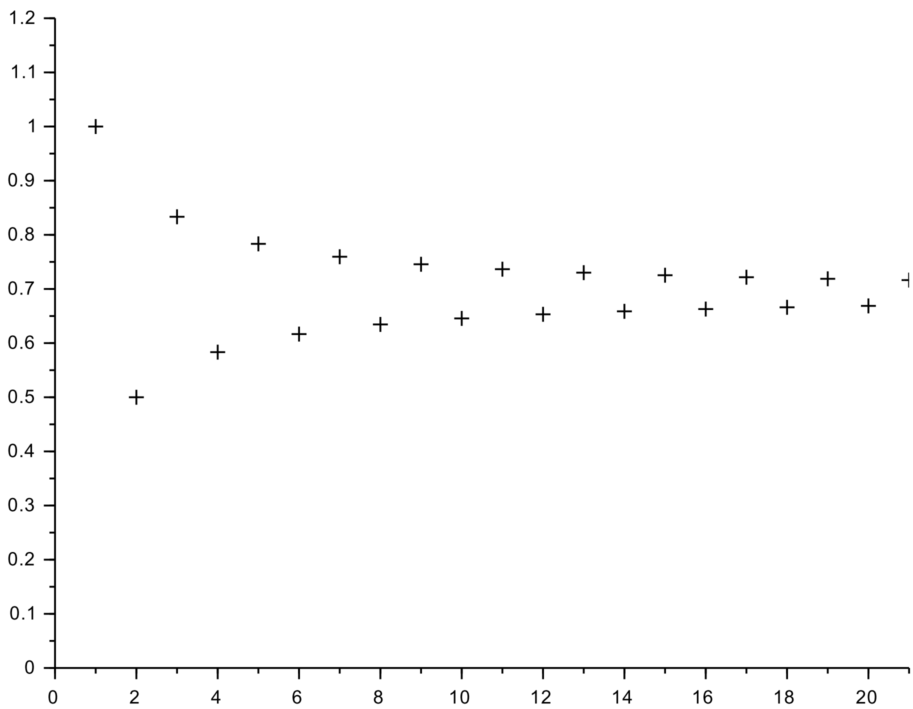
b) En déduire une primitive de la fonction g.

c) Trouver une primitive de la fonction h.

Exercice sans préparation 5
Soit le programme **Scilab** suivant :

```
x = [1:30];
y = zeros(1,30);
eps = 1;
for k = 1:30
  y(k) = eps / k;
  eps = eps * (-1);
end
z = cumsum(y);
plot2d(x, z, style = -1, rect = [0, 0, 21, 1.2])
```

Le graphe obtenu par l'exécution de ce programme est le suivant :



1. Préciser le contenu des variables `y` et `z` après l'exécution de ce programme.

2. ***a)*** Ce graphe suggère que deux suites sont adjacentes. Lesquelles ?

b) Démontrer cette conjecture.

Sujet E 129

Exercice avec préparation 6

Deux joueurs A et B s'affrontent dans un jeu de la manière suivante :
A joue le premier et jette deux dés : si la somme des points obtenus est 5, A gagne.
Le jeu cesse alors.
Sinon, B joue à son tour et jette deux dés : si la somme des points obtenus est 7, B gagne.
Le jeu cesse alors.
Sinon, le tour revient à A et on poursuit comme ci-dessus jusqu'à ce que A ou B ait gagné.

1. Question de cours : formule des probabilités composées.

2. *a)* Déterminer la probabilité pour que la somme des points lors du jet de deux dés soit égale à 5.

b) Déterminer la probabilité pour que la somme des points lors du jet de deux dés soit égale à 7.

3. *a)* Déterminer la probabilité pour que A gagne au $(2n+1)^{\text{ème}}$ jet des deux dés ($n \geqslant 0$).

b) Déterminer la probabilité pour que B gagne au $(2n+2)^{\text{ème}}$ jet des deux dés ($n \geqslant 0$).

4. En déduire les probabilités a et b pour que A et B gagnent le jeu.

5. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de jets de deux dés pour que le jeu s'arrête.
Montrer que N admet une espérance et la déterminer.

Exercice sans préparation 6

1. *a)* Donner le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{(t-1)^2\,(2-t)}}$.

b) Justifier la convergence de l'intégale impropre $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{(t-1)^2\,(2-t)}}\,dt$.

2. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{(t-1)^2\,(2-t)}}\,dt$ est-elle convergente ?

Sujet E ...

Exercice avec préparation 7

1. Question de cours : énoncé de l'inégalité de Markov.
Citer une conséquence de cette inégalité.

2. Soit X_1, ..., X_n des v.a.r. mutuellement indépendantes, de même loi définie par :

$$X_1(\Omega) = \{-1, 1\}$$
$$\mathbb{P}([X_1 = -1]) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X_1 = 1]) = \frac{1}{2}$$

On note : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

a) Calculer $\mathbb{E}(S_n)$.

b) Calculer $\mathbb{V}(S_n)$.

3. Déterminer $\mathbb{E}(S_n^4)$.

4. Soit $\alpha > 0$. Montrer que $\mathbb{P}\left(\left[\frac{|S_n|}{n} \geqslant \frac{1}{n^\alpha}\right]\right) \leqslant ....$

Exercice sans préparation 7

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Quel est le lien entre le spectre de f et un polynôme annulateur de f ?

2. Supposons que l'endomorphisme f est diagonalisable et que : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
Que dire de l'endomorphisme f ?

Sujet E ...

Exercice avec préparation 8

1. Question de cours. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$.
Que signifie graphiquement que a est un point d'inflexion de la courbe représentative de f ?
Quelles sont les méthodes pour le calculer ?

2. On note ϕ la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccc} \phi & : &]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & -\dfrac{1}{x} - \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right) \end{array}$$

a) La fonction ϕ réalise-t-elle une bijection ? Sur quel intervalle ?

b) La fonction ϕ admet-elle un point d'inflexion ?

c) Écrire un programme **Scilab** qui trace la fonction ϕ.

3. On dira qu'une fonction f est « ... » s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} f(0) = x_0 \\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = r \times (\cdots) \end{cases}$$

a) Si $r = 0$, existe-t-il une unique fonction qui remplit cette condition ?

b) On se place de nouveau dans le cas général : $r \in \mathbb{R}$.

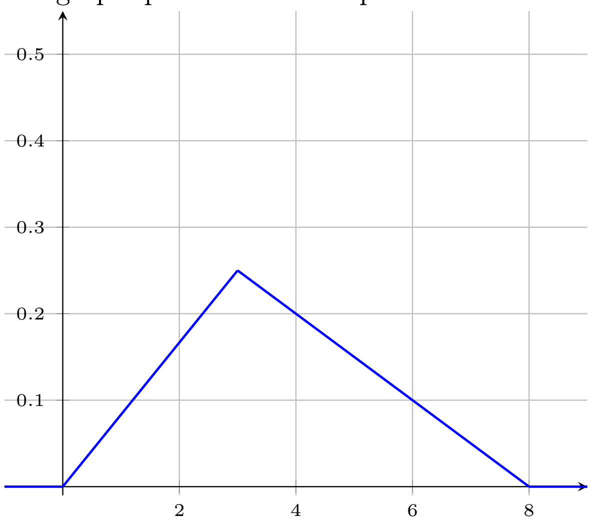
(i) Simplifier l'intégrale $\displaystyle\int_0^t \frac{f'(u)}{(f(u))^2\,(1 - f(u))}\,du$.

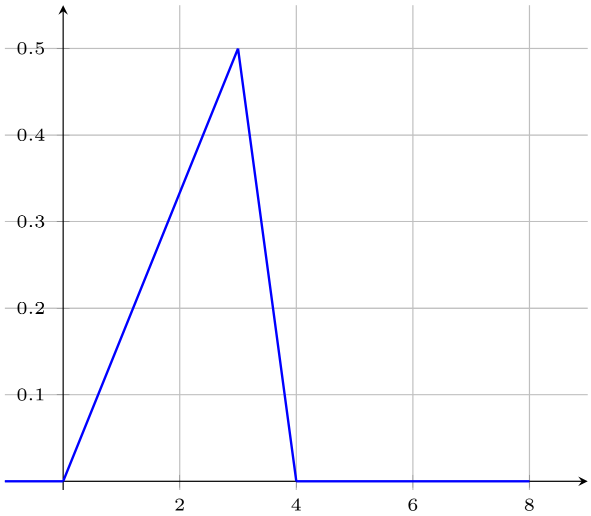
(ii) Montrer que la fonction ϕ est l'unique fonction ...

Exercice sans préparation 8

On considère deux variables aléatoires X et Y telles que : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{7}{3}$ et $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{14}{3}$.

1. Les graphiques ci-dessous représentent les densités des deux v.a.r. X et Y.





Associer chaque densité à la v.a.r. correspondante.

2. Comparer $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$.