ECE2
Mathématiques

Programme de colle - Semaine 7

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

- si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.
- si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Variance d'une $\mathcal{P}(\lambda)$**
  Soit $\lambda > 0$ et soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Alors
  1. X admet une espérance et une variance
  2. De plus : $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\mathbb{V}(x) = \lambda$.

  Preuve.
  Montrons que $\mathbb{E}(X^2)$ existe. Soit $n \geqslant 0$, alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 \mathbb{P}([X=k]) &= \lambda \sum_{k=1}^{n} k \, \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= \lambda \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \, \frac{\lambda^j}{j!} \mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= \lambda \Big(\sum_{j=0}^{n-1} j \, \frac{\lambda^j}{j!} \mathrm{e}^{-\lambda} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda^j}{j!} \mathrm{e}^{-\lambda} \Big)
\end{aligned}$$

  On reconnaît la série exponentielle $\sum\limits_{j \geqslant 0} \frac{\lambda^j}{j!}$ qui est une série convergente, et la série $\sum\limits_{j=0}^{n-1} j \, \frac{\lambda^j}{j!} \mathrm{e}^{-\lambda}$ qui est convergente (on reconnaît l'expression de $\mathbb{E}(X)$ quand $n \to +\infty$).
  Donc X admet un moment d'ordre 2, donc une variance et :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \mathbb{P}([X=k]) = \lambda \left(\sum_{j=0}^{+\infty} j \frac{\lambda^j}{j!} \mathrm{e}^{-\lambda} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \mathrm{e}^{-\lambda} \right) = \lambda(\mathbb{E}(X) + \cancel{\mathrm{e}^{\lambda}} \cancel{\mathrm{e}^{-\lambda}}) = \lambda(\lambda+1)$$

  Enfin d'après la formule de Koenig-Huyghens,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda(\lambda+1) - \lambda^2 = \lambda.$$

  $\square$

- **Variance d'une $\mathcal{G}(p)$**
  Soit $p \in]0,1[$ et soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Alors
  1. X admet une espérance et une variance
  2. De plus : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(x) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

  Preuve.
  Calculons $\mathbb{E}(X^2)$:
  On rappelle que $k^2 = k(k-1)+k$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 \mathbb{P}([X=k]) &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)p(1-p)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} kp(1-p)^{k-1} && \textit{(car } k^2 = k(k-1)+k\textit{)} \\
&= p(1-p)\sum_{k=1}^{n} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p\sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} \\
&= p(1-p)\sum_{k=2}^{n} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p\sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} && \textit{(car } 1(1-1)(1-p)^{1-2} = 0\textit{)}
\end{aligned}$$

  On reconnaît la série géométrique dérivée $\sum\limits_{k\geqslant 1} k(1-p)^{k-1}$ et la série géométrique dérivée deux fois $\sum\limits_{k\geqslant 2} k(k-1)(1-p)^{k-2}$ toutes deux de raison $(1-p) \in]0,1[$ qui sont des séries convergentes.
  Donc X admet un moment d'ordre 2, donc une variance. Et on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= p(1-p)\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\
&= p(1-p)\frac{2}{(1-(1-p))^3} + p\frac{1}{(1-(1-p))^2} \\
&= 2\,\frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p} \\
&= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

  D'après la formule de Koenig-Huyghens, on en déduit que

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}$$

  $\square$

- **Le noyau et l'image sont des ev**
  Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :
  × $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous espace vectoriel de E,
  × $\mathrm{Im}(f)$ est un sous espace vectoriel de F.

  Preuve.
  - $\mathrm{Ker}(f)$:
    - $\mathrm{Ker}(f) \subset E$ par définition.
    - $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$ car $f(0_E) = 0_F$
    - Soit $(u_1, u_2) \in (\mathrm{Ker}(f))^2$ et soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, vérifions : $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 \in \mathrm{Ker}(f)$, *i.e.* montrons : $f(\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2) = 0_F$.

$$\begin{array}{rcll} f(\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2) & = & \lambda_1 \cdot f(u_1) + \lambda_2 \cdot f(u_2) & \textit{(car } f \textit{ est linéaire)} \\ & = & \lambda_1 \cdot 0_F + \lambda_2 \cdot 0_F & \textit{(car } u_1 \in \mathrm{Ker}(f) \textit{ et } u_2 \in \mathrm{Ker}(f)\textit{)} \\ & = & 0_F & \end{array}$$

      Donc $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 \in \mathrm{Ker}(f)$.

    $\mathrm{Ker}(f)$ est donc un sous espace vectoriel de E.
  - $\mathrm{Im}(f)$:
    - $\mathrm{Im}(f) \subset F$ par définition.
    - $0_F \in \mathrm{Im}(f)$ car $f(0_E) = 0_F$
    - Soit $(v_1, v_2) \in (\mathrm{Im}(f))^2$ et soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, vérifions : $v_3 = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 \in \mathrm{Im}(f)$, c'est-à-dire :

$$\exists u_3 \in E, \quad f(u_3) \ = \ v_3.$$

      Comme v_1 et v_2 appartiennent à $\mathrm{Im}(f)$, on sait alors :

$$\exists (u_1, u_2) \in E^2, \ f(u_1) = v_1 \ \text{ et } \ f(u_2) = v_2$$

      Donc, comme f est linéaire :

$$v_3 \ = \ \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 \ = \ \lambda_1 \cdot f(u_1) + \lambda_2 \cdot f(u_2) \ = \ f(\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2)$$

      Donc en posant $u_3 = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2$, on a bien $f(u_3) = v_3$, donc $v_3 \in \mathrm{Im}(f)$.

    On conclut que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

$\square$

Connaissances exigibles

Algèbre linéaire

- Application linéaire, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme.
- Noyau, image, caractérisation des injections et surjections, caractérisation de $\mathrm{Im}(f)$.
- Rang, théorème du rang, caractérisation des isomorphismes.
- Application linéaire associée à une matrice.
- Matrice associée à une application linéaire.
- **Aucun résultat de réduction n'est au programme.**

Probabilités

- définition de tribu, probabilité
- événements incompatibles, système complet d'événements, indépendance
- probabilités conditionnelles, formule de Bayes
- formule du crible, formule des probabilités totales, formule des probabilités composées
- v.a.r. discrètes finies et infinies, leurs lois (usuelles ou non)
- espérance, théorème de transfert, moments, variance, formule de Koenig-Huygens
- variables aléatoires discrètes finies et infinies, leurs lois
- variables aléatoires discrètes usuelles (finies et infinies), leurs espérances et variances.
- Les colleurs sanctionneront **très sévèrement** les confusions entre objets mathématiques : probabilité / événement, variable aléatoire / événement, etc.
- l'indépendance entre v.a.r. n'a pas encore été abordée.