

EDHEC 2019

Exercice 1

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de \mathbb{R}^3 et id l'endomorphisme identité de \mathbb{R}^3 dont la matrice est I .

1. a) Déterminer $(A - I)^2$.

b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et de A .

2. On pose $A = N + I$.

a) Exprimer pour tout entier naturel n , la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et de N puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A .

b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

3. a) Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur propre de A .

b) En déduire si A est ou n'est pas diagonalisable.

4. On pose $u_1 = (f - \text{id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.

a) Montrer que le rang de $f - \text{id}$ est égal à 1.

b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\text{Ker}(f - \text{id})$.

5. a) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de \mathbb{R}^3 .

b) Déterminer la matrice T de f dans cette même base.

6. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier l'inversibilité de P puis écrire la relation existant entre les matrices A , T , P et P^{-1} .

7. On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T , c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de E est égale à 5.

b) Soit N une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :

$$NA = AN \quad \Leftrightarrow \quad (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP)$$

c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, P E_{1,2} P^{-1}, P E_{1,3} P^{-1}, P E_{2,2} P^{-1}, P E_{2,3} P^{-1})$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Une urne contient une boule noire non numérotée et $n - 1$ boules blanches dont $n - 2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.

Pour chaque i de $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, on note B_i l'événement : « le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche », on pose $\overline{B_i} = N_i$, et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X .

2. a) Pour tout i de $\llbracket 2, n - 1 \rrbracket$, justifier que $\mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}$.

b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $\mathbb{P}([X = k])$, pour tout k de $X(\Omega)$.

c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

3. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente et qui vaut 0 sinon.

a) Pour tout k de $X(\Omega)$, montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que :

$$\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 0]) = \frac{n-k}{n(n-1)}$$

b) En déduire $\mathbb{P}([Y = 0])$.

c) Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance.

4. Simulation informatique.

On rappelle qu'en **Scilab**, la commande `grand(1, 1, 'uin', a, b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\llbracket a, b \rrbracket$.

a) Compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cet exercice et affiche la valeur prise par la variable aléatoire X .

On admettra que la boule noire est codée tout au long de ce script par le nombre `nB + 1`, où `nB` désigne le nombre de boules blanches.

```

1  n = input('Entrez une valeur pour n : ')
2  nB = n-1
3  X = 1
4  u = grand(1, 1, 'uin', 1, nB+1)
5  while u < nB + 1
6      nB = --
7      u = grand(1, 1, 'uin', 1, --)
8      X = --
9  end
10 disp(X, 'La boule noire est apparue au tirage numéro')
```

- b) Compléter les lignes 4 et 9 ajoutées au script précédent afin que le script qui suit renvoie et affiche, en plus de celle prise par X , la valeur prise par Y .

```

1  n = input('Entrez une valeur pour n : ')
2  nB = n-1
3  X = 1
4  Y = --
5  u = grand(1, 1, 'uin', 1, nB+1)
6  while u < nB + 1
7      nB = --
8      if u == 1 then
9          Y = --
10     end
11     u = grand(1, 1, 'uin', 1, --)
12     X = --
13 end
14 disp(X, 'La boule noire est apparue au tirage numéro ')
15 disp(Y, 'La valeur de Y est ')

```

Exercice 3

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$. On a donc, en particulier : $u_0 = 1$.

1. Déterminer u_1 et u_2 .

2. a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. On se propose dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n) .

a) Rappeler la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} dt$, puis celle de $\int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt$.

c) Montrer que, pour tout réel t , on a : $\forall t \in \mathbb{R}, e^{-t^2} \geq 1 - t^2$.

d) En déduire : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$. Puis donner la limite de la suite (u_n) .

4. Calculer $\int_0^1 (1-t)^n dt$ puis montrer : $u_n \geq \frac{1}{n+1}$. Que peut-on en déduire en ce qui concerne la série de terme général u_n ?

5. a) Établir, grâce à une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} = (2n+2)(u_n - u_{n+1})$$

b) En déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

c) On admet l'équivalent $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$. En écrivant $u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$, montrer :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

6. Informatique.

On admet que, si \mathbf{t} est un vecteur, la commande `prod(t)` renvoie le produit des éléments de \mathbf{t} .

Compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher la valeur de u_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```

1  n = input('entrez une valeur pour n : ')
2  x = 1:n
3  m = 2 * n + 1
4  y = 1:m
5  v = .....
6  w = .....
7  u = ..... * v ^ 2 / w
8  disp(u)

```

Problème

Partie I : étude de quelques propriétés d'une variable aléatoire X

Dans cet exercice, θ (theta) désigne un réel élément de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

On considère la fonction f définie par : $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\theta x^{1+\frac{1}{\theta}}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition.

2. Montrer que X possède une espérance et une variance et les déterminer.

3. Déterminer, pour tout réel x , l'expression de $F(x)$ en fonction de x et θ .

4. a) Montrer que l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ possède une seule solution, notée M_e , que l'on déterminera.

b) Montrer : $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], 2^x (1-x) \leq 1$.

c) Comparer $\mathbb{E}(X)$ et M_e .

5. Soit a un réel supérieur ou égal à 1 et b un réel strictement positif.

a) Montrer : $\mathbb{P}_{[X > a]}([X > a + b]) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^{\frac{1}{\theta}}$.

b) Déterminer la limite de cette quantité lorsque a tend vers $+\infty$. Interpréter cette dernière valeur si l'on admet que la variable X représente la durée de vie d'un certain appareil.

Partie 2 : simulation de X

6. On pose $Y = \ln(X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X . On note G sa fonction de répartition.
- a) Pour tout réel x , exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction F .
 - b) En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
7. On rappelle qu'en **Scilab**, la commande `grand(1, 1, 'exp', 1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ . Écrire des commandes **Scilab** utilisant `grand` et permettant de simuler X .

Partie 3 : estimation d'un paramètre

On suppose dans la suite que le paramètre θ est inconnu et on souhaite en trouver une estimation ponctuelle puis par intervalle de confiance.

On considère pour cela n variables aléatoires Y_1, \dots, Y_n toutes définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que Y .

8. On pose $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_k$.
- a) Justifier que T_n est un estimateur de θ .
 - b) T_n est-il un estimateur sans biais de θ ?
 - c) Calculer le risque quadratique de T_n en tant qu'estimateur de θ . T_n est-il un estimateur convergent de θ ?
9. a) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable T_n .
- b) Établir l'inégalité :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}([\theta \in [T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]]) \geq 1 - \frac{\theta^2}{n \varepsilon^2}$$
 - c) En utilisant le fait que $\theta \leq \frac{1}{2}$, déterminer un intervalle de confiance pour θ au niveau de confiance 90% lorsque l'on choisit $n = 1000$.