ECE2
Mathématiques

Programme de colle - Semaine 5

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Stabilité d'un sev engendré**
  Soit E un $\mathbb{R}$-ev. Soit $(u_1, \dots, u_m) \in E^m$. On a :

$$u_{m+1} \in \text{Vect}\,(u_1, \dots, u_m) \ \Rightarrow \ \text{Vect}\,(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}) = \text{Vect}\,(u_1, \dots, u_m)$$

  Preuve.
  Supposons $u_{m+1} \in \text{Vect}\,(u_1, \dots, u_m)$.
  Démontrons que $\text{Vect}\,(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}) = \text{Vect}\,(u_1, \dots, u_m)$.

  × $(\supset)$ Évident.

  × $(\subset)$ Comme $u \in \text{Vect}\,(u_1, \dots, u_m, u_{m+1})$, alors le vecteur u s'écrit $u = \sum\limits_{i=1}^{m+1} \lambda_i \cdot u_i$.
  Or $u_{m+1} \in \text{Vect}\,(u_1, \dots, u_m)$, donc $u_{m+1} = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i \cdot u_i$. Ainsi :

$$\begin{aligned} u &= \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot u_i\right) + \lambda_{m+1} \cdot u_{m+1} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot u_i\right) + \lambda_{m+1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i \cdot u_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i + \lambda_{m+1} \times \mu_i) \cdot u_i \end{aligned}$$

  et donc $u \in \text{Vect}\,(u_1, \dots, u_m)$. □

- **Techniques de base**
  On choisira de demander au choix à l'étudiant de :

  × montrer qu'un espace F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E, sur un exemple dans $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, etc.

  × montrer qu'une famille de vecteurs est génératrice d'un espace vectoriel donné, sur un exemple.

  × montrer qu'une famille de vecteurs est libre dans un espace vectoriel donné, sur un exemple.

- **Propriétés d'une probabilité** <u>On choisira 3 propriétés à démontrer parmi les suivantes</u> :
  Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Alors

  1. Pour tous événements A et B tel que $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

  2. Pour tout événement $A \in \mathscr{A}$, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$. En particulier, $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

  3. $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

  4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

  5. $$\begin{array}{rcrcrcr} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) & = & \mathbb{P}(A) & + & \mathbb{P}(B) & + & \mathbb{P}(C) \\ & - & \mathbb{P}(A \cap B) & - & \mathbb{P}(A \cap C) & - & \mathbb{P}(B \cap C) \\ & + & \mathbb{P}(A \cap B \cap C) & & & & \end{array}$$

  (formule du crible)

  Preuve.

  1. Pour tous événements A et B, les événements $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ sont incompatibles. Si $A \subset B$ alors $A \cap B = A$. Ainsi

  $$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\big((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)\big) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(A) + \underbrace{\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)}_{\geqslant 0}.$$

  Donc $\mathbb{P}(B) \geqslant \mathbb{P}(A)$.

  2. A et $\overline{A}$ forment un système complet d'événements donc $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$. Donc $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

  3. On a : $(A \setminus B) \ \cup \ (A \cap B) = A$ (réunion disjointe).
  Ainsi, par σ-additivité :

  $$\mathbb{P}((A \setminus B) \ \cup \ (A \cap B)) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$$

  4. On a : $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ (la deuxième réunion est disjointe).
  On en déduit, à l'aide du point ***2)*** que :

  $$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \end{aligned}$$

  5. Généralisation de la formule précédente :

  $$\begin{aligned} & \mathbb{P}(A \cup B \cup C) \\ &\quad = \mathbb{P}(A \cup (B \cup C)) \\ &\quad = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cup C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) \\ &\quad = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) \\ &\quad = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &\quad = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ &\qquad - (\ \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cap (A \cap C))\ ) \\ &\quad = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ &\qquad - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) \\ &\qquad + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

  $\square$

Connaissances exigibles

- espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels
- famille génératrice, famille libre, base
- bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[X]$.
- coordonnées dans une base
- dimension d'un espace vectoriel
- rang d'une famille de vecteurs, rang d'une matrice
- ⚠ les élèves ne connaissent pas les endomorphismes (et donc pas le théorème du rang)
- définition de tribu, probabilité
- événements incompatibles, système complet d'événements, indépendance
- probabilités conditionnelles, formule de Bayes
- formule du crible, formule des probabilités totales, formule des probabilités composées
- la notion de variable aléatoire n'a pas encore été revue.