

## Programme de colle - Semaine 6

---

### Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

- × si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note  $> 8$ .
- × si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note  $\leq 8$ .

### Questions de cours

- **Propriétés d'une probabilité** On choisira 3 propriétés à démontrer parmi les suivantes :  
Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé. Alors

1. Pour tous événements  $A$  et  $B$  tel que  $A \subset B$ , alors  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ .
2. Pour tout événement  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ . En particulier,  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .
3.  $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
4.  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
5. 
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ &- \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ &+ \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

(formule du crible)

*Preuve.*

1. Pour tous événements  $A$  et  $B$ , les événements  $A \cap B$  et  $\bar{A} \cap B$  sont incompatibles. Si  $A \subset B$  alors  $A \cap B = A$ . Ainsi

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(A) + \underbrace{\mathbb{P}(\bar{A} \cap B)}_{\geq 0}.$$

Donc  $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$ .

2.  $A$  et  $\bar{A}$  forment un système complet d'événements donc  $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup \bar{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A})$ . Donc  $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A})$ .
3. On a :  $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$  (réunion disjointe).  
Ainsi, par  $\sigma$ -additivité :

$$\mathbb{P}((A \setminus B) \cup (A \cap B)) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$$

4. On a :  $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$  (la deuxième réunion est disjointe).  
On en déduit, à l'aide du point 2) que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \end{aligned}$$

5. Généralisation de la formule précédente :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(A \cup B \cup C) \\
&= \mathbb{P}(A \cup (B \cup C)) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cup C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\
&\quad - (\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cap (A \cap C))) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\
&\quad - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) \\
&\quad + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

□

• **Probabilité conditionnelle**

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini. Soit  $B$  un événement tel que  $\mathbb{P}(B) \neq 0$ . Alors l'application  $\mathbb{P}_B : A \mapsto \mathbb{P}_B(A)$  est une probabilité sur  $\Omega$ .

*Preuve.*

Il s'agit de vérifier que  $\mathbb{P}_A$  vérifie les axiomes d'une probabilité.

1. Soit  $B \in \mathcal{A}$ .

- Comme  $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0$  et  $\mathbb{P}(A) > 0$  (car  $\mathbb{P}(A) \neq 0$ ), on a :  $\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \geq 0$
- Comme  $A \cap B \subset A$ , on a  $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)$  et donc :  $\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \leq 1$

2.  $\mathbb{P}_A(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \Omega)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$

3. Soit  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements deux à deux incompatibles. Alors :

$$\mathbb{P}_A \left( \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \right) = \frac{\mathbb{P} \left( A \cap \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \right)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P} \left( \bigcup_{n=0}^{+\infty} (A \cap B_n) \right)}{\mathbb{P}(A)}$$

Notons alors  $C_n = A \cap B_n$ .

Les événements de la suite  $(C_n)$  sont deux à deux incompatibles.

En effet, si  $i \neq j$  :

$$C_i \cap C_j = (A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = A \cap (B_i \cap B_j) = A \cap \emptyset = \emptyset$$

Par  $\sigma$ -additivité de  $\mathbb{P}$ , on a alors :  $\mathbb{P} \left( \bigcup_{n=0}^{+\infty} (A \cap B_n) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A \cap B_n)$ .

Et ainsi :

$$\mathbb{P}_A \left( \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \right) = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A \cap B_n)}{\mathbb{P}(A)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}(A \cap B_n)}{\mathbb{P}(A)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_A(B_n)$$

□

- **Variance d'une  $\mathcal{G}(p)$**

Soit  $p \in ]0, 1[$  et soit  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ . Alors

1.  $X$  admet une espérance et une variance

2. De plus :  $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$  et  $\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$ .

*Preuve.*

Calculons  $\mathbb{E}(X^2)$  :

On rappelle que  $k^2 = k(k-1) + k$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 \mathbb{P}([X = k]) &= \sum_{k=1}^n k(k-1)p(1-p)^{k-1} + \sum_{k=1}^n kp(1-p)^{k-1} \quad (\text{car } k^2 = k(k-1) + k) \\ &= p(1-p) \sum_{k=1}^n k(k-1)(1-p)^{k-2} + p \sum_{k=1}^n k(1-p)^{k-1} \\ &= p(1-p) \sum_{k=2}^n k(k-1)(1-p)^{k-2} + p \sum_{k=1}^n k(1-p)^{k-1} \quad (\text{car } 1(1-1)(1-p)^{1-2} = 0) \end{aligned}$$

On reconnaît la série géométrique dérivée  $\sum_{k \geq 1} k(1-p)^{k-1}$  et la série géométrique dérivée deux fois

$\sum_{k \geq 2} k(k-1)(1-p)^{k-2}$  toutes deux de raison  $(1-p) \in ]0, 1[$  qui sont des séries convergentes.

Donc  $X$  admet un moment d'ordre 2, donc une variance. Et on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= p(1-p) \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\ &= p(1-p) \frac{2}{(1-(1-p))^3} + p \frac{1}{(1-(1-p))^2} \\ &= 2 \frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p} \\ &= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} \end{aligned}$$

D'après la formule de Koenig-Huyghens, on en déduit que

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}$$

□

## Connaissances exigibles

- définition de tribu, probabilité
- événements incompatibles, système complet d'événements, indépendance
- probabilités conditionnelles, formule de Bayes
- formule du crible, formule des probabilités totales, formule des probabilités composées
- v.a.r. discrètes finies et infinies, leurs lois (usuelles ou non)
- espérance, théorème de transfert, moments, variance, formule de Koenig-Huygens
- variables aléatoires discrètes finies et infinies, leurs lois
- variables aléatoires discrètes usuelles (finies et infinies), leurs espérances et variances.
- Les colleurs sanctionneront **très sévèrement** les confusions entre objets mathématiques : probabilité / événement, variable aléatoire / événement, etc.
- l'indépendance entre v.a.r. n'a pas encore été abordée.