ECE2
Mathématiques

Colles - Semaine 8

Exercice 1
On considère l'espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ avec

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M +{}^t M \end{array} \right.$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ et $g \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$.

2. Déterminer la matrice A de f relativement à la base $\mathscr{B}$.

3. En déduire sans calcul supplémentaire la matrice de g relativement à la base $\mathscr{B}$.

4. Les applications f et g sont-elles des automorphismes ? Si oui, déterminer l'application réciproque.

5. Si a et b sont deux automorphismes, est-ce que $a + b$ est également un automorphisme ?

Exercice 2
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $f \circ f = 0$.

2. Sans calcul, déterminer si f est bijectif.

3. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(f)$.

4. En déduire les dimensions de ces 2 espaces vectoriels.

5. Déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

6. Soit $u \notin \mathrm{Ker}(f)$ et $v \in \mathrm{Ker}(f)$.

a) Montrer que la famille $(u, f(u))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

b) Montrer que la famille $(u, f(u), v)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) Déterminer la matrice de f dans la base $(u, f(u), v)$.

Exercice 3
On note f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par : $f((x, y, z)) = (y + z, y, x + y)$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer le noyau de f. En déduire le rang de f.

3. Déterminer l'image de f.

4. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

5. Montrer que $H = \{u \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(u) = u\}$ est un espace vectoriel réel.
Déterminer une base de H.

6. On note F l'ensemble défini par $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = 0\}$.
Montrer que f stabilise F, *i.e.* $f(F) \subset F$.

Exercice 4
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
On dit qu'un endomorphisme f de E est un projecteur si $f \circ f = f$.
On considère p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur de E si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

2. On suppose dans cette question que $p + q$ est un projecteur de E.
Montrer que

$$\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Ker}(q)$$

$$\operatorname{Im}(p) \cap \operatorname{Im}(q) = \{0\}$$

$$\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im}(p) + \operatorname{Im}(q)$$

(si A et B sont deux espaces vectoriels, on note $A + B = \{a + b \ / \ a \in A \text{ et } b \in B\}$)

Exercice 5
L'application f désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une base $(e_1, \cdots, e_n)$.

1. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \exists \lambda_x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = \lambda_x x$$

a) Écrire de deux manières différentes le vecteur $f(e_1 + \cdots + e_n)$.

b) En déduire qu'il existe un réel λ tel que $f = \lambda \cdot \mathrm{id}$.

2. Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$.
Justifier qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ de la forme $(x, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$.
On note alors p_x l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\forall (a, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n, \ p_x\left(a \cdot x + \sum_{k=2}^{n} b_k \cdot \varepsilon_k\right) = a \cdot x$$

a) Montrer que p_x est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

b) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, on a

$$p_x(z) = z \ \Leftrightarrow \ z \in \operatorname{Vect}(x)$$

3. Montrer l'équivalence suivante :

$$\forall g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n), \ f \circ g = g \circ f \ \Leftrightarrow \ \exists \lambda \in \mathbb{R}, \ f = \lambda \cdot \mathrm{id}$$