ECS2
Mathématiques

Colles - Semaine 15

Série 1

Question de cours

Démontrer que les espaces vectoriels F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires dans E, et que $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Exercice

On considère l'application F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(t) = \dfrac{e^t}{1+e^t}$.

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité dont on déterminera une densité notée f.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que X admet des moments d'ordre n pour tout entier naturel n.

On pose : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+e^t}\, dt$.

Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de X ainsi que sa variance $\mathbb{V}(X)$ en fonction de I.

3. On considère une suite de v.a.r. $(X_n)_{n\geqslant 1}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et de densité f.
Soit $(\overline{X}_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de v.a.r. définie par :

$$\forall n \geqslant 1,\ \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

a) Montrer que la suite $(\overline{X}_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0, puis déterminer une suite de réels $(a_n)_{n\geqslant 1}$ telle que la suite $(a_n\,\overline{X}_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

b) On pose $S_n^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2$.
Construire à partir de S_n^2 un estimateur sans biais de I. Montrer que cet estimateur est convergent.

4. Proposer en **Scilab** une simulation de la loi associée à f.

Série 2

Question de cours

Déterminer le spectre de $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients de degré inférieur ou égal à $2n+1$.
On définit l'application f qui à tout $P \in E$ associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(P)(x) = x^{2n+1}\, P\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2. ***a)*** Déterminer $f \circ f$.

   b) En déduire que f est diagonalisable (on pourra utiliser l'application $p = \dfrac{1}{2}(f + \mathrm{id}_E)$).

3. Soit φ l'application définie sur $E \times E$ par :

$$\text{pour } P(X) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, X^k \text{ et } Q(X) = \sum_{k=0}^{2n+1} b_k\, X^k, \quad \varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, b_k$$

   Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

4. ***a)*** Montrer que f est un endomorphisme symétrique de (E, φ).

   b) En déduire que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires.

   c) Déterminer la dimension de chaque sous-espace propre de f.

5. Les résultats précédents restent-ils valables si $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(P)(x) = x^{2n}\, P\left(\frac{1}{x}\right)$$

Série 3

Question de cours

Démontrer l'inégalité de Markov, puis celle de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice

Soit α un réel strictement positif et $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On suppose de plus que pour tout i, Y_i suit la loi exponentielle de paramètre $i\,\alpha$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ et on note g_n la densité de Z_n nulle sur $\mathbb{R}_-$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. ***a)*** Déterminer la fonction g_2.

b) Montrer que pour $n \geqslant 1$ et $x > 0$, on a : $g_n(x) = n\,\alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha\,x}\left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha\,x}\right)^{n-1}$

c) Calculer l'espérance de Z_n et en donner un équivalent simple lorsque n tend vers l'infini.

d) Calculer la variance de Z_n et montrer qu'elle admet une limite finie lorsqie n tend vers l'infini.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \dfrac{1}{n}\,Z_n$.

a) Déterminer la fonction de répartition H_n de U_n.

b) Montrer que la suite (U_n) converge en loi et déterminer la loi limite.

c) Déterminer la limite quand n tend vers l'infini de $\mathbb{E}(U_n)$ et $\mathbb{V}(U_n)$.