ECS2
Mathématiques

Colles - Semaine 5

Série 1

Question de cours

Montrer que $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice

Dans cet exercice, x désigne un réel élément de $[0,1[$ et n un entier supérieur ou égal à 1.

1. ***a)*** Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{p+1} \leq \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{1}{t}\, dt \leq \frac{1}{p}$.

b) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} - \ln(k) \leq 1$.

2. ***a)*** Montrer que : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt$.

b) En déduire que la série de terme général $\dfrac{x^n}{n}$ converge et exprimer sa somme en fonction de x.

3. ***a)*** Pour tout x de $]0,1[$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n^2 \ln(n) x^n)$.

b) En déduire que, pour tout x de $[0,1[$, la série de terme général $\ln(n)x^n$ est convergente.

On pose maintenant $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) x^k$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(k) x^k$.

4. Le but de cette question est de trouver un équivalent simple de $S(x)$ lorsque x est au voisinage de 1^-.

a) Montrer, en utilisant la première question, que : $\quad 0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{k} \frac{x^k}{p} - S_n(x) \leq \sum_{k=1}^{n} x^k$.

b) En déduire que : $\quad 0 \leq \dfrac{1}{1-x} \left(\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} - x^{n+1} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \right) - S_n(x) \leq \frac{x}{1-x}$.

c) Justifier que : $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1} \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = 0$.

d) En déduire que : $\quad S(x) \underset{x\to1^-}{\sim} -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$.

Série 2

Question de cours

Montrer que la loi binomiale est stable par somme.

Exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose alors $v_n = \displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx$ et $w_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx$.

- ***a)*** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 0 \leq w_n \leq \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
- ***b)*** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ v_n \geq \dfrac{1}{\mathrm{e}} \ln(n+1)$.
- ***c)*** Donner la limite de la suite (u_n).

3. On se propose de déterminer un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

- ***a)*** Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{1} \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x} dx$ est une intégrale convergente.
- ***b)*** Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 0 \leq \displaystyle\int_0^{1} \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx \leq I$.
- ***c)*** En déduire un encadrement de v_n valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- ***d)*** Donner enfin, en utilisant cet encadrement, un équivalent simple de u_n.

Série 3

Question de cours

Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x(1+(\ln(x))^4)}\,dx$.

Exercice

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

1. Montrer que I_n existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3. ***a)*** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{2n}{2n+1}\,I_{n-1}$.

b) En déduire l'existence et la nature de la série de terme général $v_n = \ln(I_n) - \ln(I_{n-1})$, puis la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \sqrt{n}\,I_n$ et $K_n = \sqrt{n+1}\,I_n$.

a) Montrer que les suites $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

b) En déduire qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{\sqrt{n}}$.

5. ***a)*** Calculer I_n en fonction de n.

b) On admet la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$.

c) Déterminer la valeur de α.