Colles - Semaine 11

Série 1

Question de cours

Démontrer que tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie admet un polynôme annulateur non nul, et son spectre est inclus dans les racines de ce polynôme annulateur.

Exercice 1

Soit $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \dfrac{x^2}{2} - y + z + xyz$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et calculer les dérivées partielles de f.

2. Déterminer les points critiques de f.

3. Calculer pour tout $(h, k, \ell) \in \mathbb{R}^3$, $f(1 + h, -1 + k, 1 + \ell) - f(1, -1, 1)$.

4. Montrer que f n'admet aucun extremum sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère deux projecteurs p et q de E différents de l'identité id_E et de l'application nulle ; on suppose en outre que p et q commutent et que leur somme f n'est pas égale à l'identité.

1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E et calculer $f^3 - 3f^2 + 2f$.
On note $\mathrm{Sp}(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f.

2. ***a)*** Montrer que $0 \in \mathrm{Sp}(f)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \neq \{0_E\}$.

b) Montrer que $2 \in \mathrm{Sp}(f)$ si et seulement si $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \neq \{0_E\}$.

c) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_E) = E$.

3. En déduire que $[2 \notin \mathrm{Sp}(f)$ ou $0 \notin \mathrm{Sp}(f)]$ entraîne que $1 \in \mathrm{Sp}(f)$ et $\mathrm{Sp}(f) \neq \{1\}$.

Série 2

Question de cours

Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On note $\mathscr{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.
Soit p un projecteur de E tel que $p \neq 0$ et $p \neq \mathrm{id}_E$. Pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, on pose :

$$\varphi(f) = \frac{1}{2}\,(f \circ p + p \circ f)$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$.

2. Calculer $(\varphi \circ \varphi)(f)$ et $(\varphi \circ \varphi \circ \varphi)(f)$; en déduire les valeurs propres possibles de φ.

3. Pour tout sous-espace vectoriel F de E, montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{L}(E)$:

$$\mathcal{K}(F) = \{f \in \mathscr{L}(E) \;/\; F \subset \mathrm{Ker}(f)\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}(F) = \{f \in \mathscr{L}(E) \;/\; \mathrm{Im}(f) \subset F\}$$

4. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$.

a) Calculer $f \circ g$ lorsque $f \in \mathcal{K}(\mathrm{Im}(g))$ ou lorsque $g \in \mathcal{I}(\mathrm{Ker}(f))$.

b) Calculer $p \circ f$ lorsque $f \in \mathcal{I}(\mathrm{Im}(p))$.

c) Montrer que $f \circ p = f$ lorsque $f \in \mathcal{K}(\mathrm{Ker}(p))$.

5. ***a)*** Pour chacun des sous-espaces vectoriels suivants, montrer que leurs éléments non nuls sont des vecteurs propres de φ et préciser les valeurs propres correspondantes :

$$\mathcal{A} = \mathcal{K}(\mathrm{Im}(p)) \cap \mathcal{I}(\mathrm{Ker}(p)), \quad \mathscr{B} = \mathcal{K}(\mathrm{Im}(p)) \cap \mathcal{I}(\mathrm{Im}(p)) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \mathcal{K}(\mathrm{Ker}(p)) \cap \mathcal{I}(\mathrm{Im}(p))$$

b) Montrer que les sous-espaces $\mathcal{A}$, $\mathscr{B}$ et $\mathcal{C}$ sont en somme directe.

c) Quelles sont les valeurs propres de φ ?

Série 3

Question de cours

Démontrer la stabilité par somme des lois de Poisson.

Exercice 1

Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$.

1. *a)* Calculer les dérivées partielles premières de f.

b) En déduire que le seul point critique A de f.

2. Montrer que f présente un minimum global en A.

3. On considère la fonction g définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x, y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y$$

a) Utiliser la question 2 pour établir que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x, y) \geq -\frac{1}{6}\cdot$

b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Exercice 2

On désigne pour tout entier naturel non nul n : $E_n = \mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel des polynômes à coefficients réels qui sont soit le polynôme nul, soit de degré inférieur ou égal à n.
Pour tout polynôme P de E_n, on note P' le polynôme dérivé de P. On définit sur E_n l'application f, qui à tout polynôme P associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P) = (X^2 - 1)P' - (nX + 1)P$$

1. Propriétés générales.

a) Calculer $f(X^n)$, $f(1)$. Calculer $f(P)$ pour $P = X^k$, $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $n \geqslant 2$.
Quelles sont les valeurs de $k \in [\![0, n]\!]$ pour lesquelles le degré de X^k est égal à celui $f(X^k)$?

b) Montrer que f est un endomorphisme de E_n.

c) Écrire la matrice A de f dans la base canonique de E_n : $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$.

2. Étude pour des valeurs particulières de n.

a) On suppose dans cette question seulement que $n = 1$.
Trouver les valeurs propres de A.
Déterminer les vecteurs propres de l'endomorphisme f.

b) On suppose dans cette question seulement que $n = 2$.
Trouver les valeurs propres de A.
Déterminer les vecteurs propres de l'endomorphisme f.

3. On suppose désormais que n est un entier naturel non nul quelconque.

a) Montrer que si un polynôme P est vecteur propre de f, alors P est de degré n.

b) On considère les polynômes $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ tels que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$P_k(X) = (X - 1)^k (X + 1)^{n-k}$$

Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f(P_k) = (2k - n - 1)P_k$
En déduire les valeurs propres et vecteurs propres associés de l'endomorphisme f.
L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
Pour quelles valeurs de n est-il bijectif ? (on justifiera ses réponses)