HEC 2016

EXERCICE

Soit n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Si M est une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice ${}^tM$ de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ désigne la transposée de M.
On identifie les ensembles $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ en assimilant une matrice de $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ à son unique coefficient.
On note $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{B}_p$ la base canonique de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Si $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ ($q \in \mathbb{N}^*$), *on admet* que ${}^t(MN) = {}^tN\,{}^tM$.

1. Soit X une matrice colonne non nulle de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de composantes $x_1, x_2, ..., x_n$ dans la base $\mathscr{B}_n$.
On pose : $A = X\,{}^tX$ et $\alpha = {}^tXX$.

a) Exprimer A et α en fonction de $x_1, x_2, ..., x_n$. Justifier que la matrice A est diagonalisable.

Démonstration.

- D'une part :

$$A = X\,{}^tX = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_1x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1x_n & x_2x_n & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix}}$$

- D'autre part :

$$\alpha = {}^tX\,X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

$$\boxed{\alpha = \sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est une matrice symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable.}}$$

□

b) Soit f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice A dans la base $\mathscr{B}_n$.
Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$; donner une base de $\mathrm{Im}(f)$ et préciser la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé :

$$\forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ f(Y) = AY$$

- On note $\mathscr{B}_n = (e_1, \dots, e_n)$. Donc :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ i^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

- Par caractérisation de l'image d'une application linéaire :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\right)$$

Or, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$f(e_i) = A \times e_i = \begin{pmatrix} x_1 x_i \\ x_2 x_i \\ \vdots \\ x_n x_i \end{pmatrix} = x_i \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_i \cdot X$$

Donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(x_1 \cdot X, x_2 \cdot X, \dots, x_n \cdot X\right)$$

Deux cas se présentent alors :
× si : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i = 0$, alors : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\right) = \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.
× si : $\exists i \in [\![1,n]\!]$, $x_i \neq 0$, alors : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(X)$.
Or X est un vecteur non nul de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Donc il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que : $x_i \neq 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(X).}$$

- Donc la famille (X) :
× engendre $\mathrm{Im}(f)$;
× est une famille libre, car elle est constituée d'un unique vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi, } (X) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f).}$$

- D'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) \ + \ \dim(\mathrm{Im}(f)) \ = \ \dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})) \ = \ n$$

Or la famille (X) est une base de $\mathrm{Im}(f)$, donc :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) \ = \ \mathrm{Card}((X)) \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n - 1.}$$

- Soit $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors il existe $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} Y \in \mathrm{Ker}(f) & \Leftrightarrow & f(Y) = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \ \Leftrightarrow \ AY = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcccrcl} x_1^2\, y_1 & + & x_1 x_2\, y_2 & + & x_1 x_3\, y_3 & + & \cdots & + & x_1 x_n\, y_n & = & 0 \\ x_1 x_2\, y_1 & + & x_2^2\, y_2 & + & x_2 x_3\, y_3 & + & \cdots & + & x_2 x_n\, y_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ x_1 x_n\, y_1 & + & x_2 x_n\, y_2 & + & x_3 x_n\, y_3 & + & \cdots & + & x_n^2\, y_n & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On observe alors :

$$Y \in \mathrm{Ker}(f) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcccrcl} x_1(x_1\ y_1 & + & x_2\ y_2 & + & x_3\ y_3 & + & \cdots & + & x_n\ y_n) & = & 0 \\ x_2(x_1\ y_1 & + & x_2\ y_2 & + & x_3\ y_3 & + & \cdots & + & x_n\ y_n) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ x_n(x_1\ y_1 & + & x_2\ y_2 & + & x_3\ y_3 & + & \cdots & + & x_n\ y_n) & = & 0 \end{array} \right.$$

Or, comme X est un vecteur non nul, il existe $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que : $x_{i_0} \neq 0$.
On effectue alors l'opération suivante :

$$L_{i_0} \leftarrow \frac{1}{x_{i_0}} L_{i_0}$$

La ligne L_{i_0} devient donc :

$$x_1\,y_1 \ + \ x_2\,y_2 \ + \ x_3\,y_3 \ + \ \cdots \ + \ x_n\,y_n \ = \ 0$$

On effectue ensuite les opérations :

$$\left\{ \begin{array}{ccl} L_1 & \leftarrow & L_1 - x_1\,L_{i_0} \\ L_2 & \leftarrow & L_2 - x_2\,L_{i_0} \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - x_3\,L_{i_0} \\ & \vdots & \\ L_n & \leftarrow & L_n - x_n\,L_{i_0} \end{array} \right.$$

On obtient alors :

$$Y \in \mathrm{Ker}(f) \ \Leftrightarrow \ \{x_1\,y_1 \ + \ x_2\,y_2 \ + \ x_3\,y_3 \ + \ \cdots \ + \ x_n\,y_n \ = \ 0$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid x_1\,y_1 \ + \ x_2\,y_2 \ + \ x_3\,y_3 \ + \ \cdots \ + \ x_n\,y_n \ = \ 0\}}$$

□

c) Calculer la matrice AX.
Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associés.

Démonstration.

- On calcule :

$$AX = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_1x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1x_n & x_2x_n & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^3 + x_1x_2^2 + \cdots + x_1x_n^2 \\ x_2x_1^2 + x_2^3 + \cdots + x_2x_n^2 \\ \vdots \\ x_nx_1^2 + x_nx_2^2 + \cdots + x_n^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} = \alpha \cdot X$$

$$\boxed{AX = \alpha \cdot X}$$

- En résumé :
  × $f(X) = AX = \alpha \cdot X$,
  × $X \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

  Donc X est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\alpha \neq 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi le sous-espace propre associé à } \alpha \text{ vérifie :} \\ E_\alpha \supset \mathrm{Vect}\,(X).\end{array}}$$

- En notant $E_0 = \text{Ker}(f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 0, on sait que :
  × 0 et α sont valeurs propres de f,
  × $\dim(E_0) = n-1$ et $\dim(E_\alpha) \geqslant 1$.

  Donc :
  $$\dim(E_0) \ + \ \dim(E_\alpha) \ \geqslant \ n$$
  De plus, f est diagonalisable, donc : $\sum\limits_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim(E_\lambda) \ = \ \dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})) \ = \ n$.

  On en déduit que :
  × l'endomorphisme f n'admet pas d'autres valeurs propres que 0 et α (sinon : $\sum\limits_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim(E_\lambda) > n$)
  × $\dim(E_0) + \dim(E_\alpha) = n$.

  $$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ admet exactement deux valeurs propres : 0 et } \alpha.}$$

- D'après ce qui précède :
  $$\underset{\substack{\| \\ n-1}}{\dim(E_0)} \ + \ \dim(E_\alpha) \ = \ n$$
  Donc $\dim(E_\alpha) = 1$. On obtient alors :
  × la famille (X) est une famille libre de E_α,
  × $\text{Card}((X)) = 1 = \dim(E_\alpha)$.

  Donc (X) est une base de E_α.
  $$\boxed{\text{Finalement : } E_0 = \text{Ker}(f) \text{ et } E_\alpha = \text{Vect}\,(X).}$$

Commentaire

- Comme $\mathcal{F}$ est une base de vecteurs propres de f, on retrouve que f est diagonalisable.
  On a même :
  $$\text{Mat}_{\mathcal{F}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$
- On pouvait également montrer que 0 et α sont les seules valeurs propres de f en utilisant un polynôme annulateur de cet endomorphisme.
  Détaillons cette méthode.
  × On remarque :
  $$A^2 \ = \ A \times A \ = \ X\,{}^tX \times X\,{}^tX \ = \ X \times {}^tX\,X \times {}^tX \ = \ X \ \alpha \ {}^tX \ = \ \alpha \cdot X\,{}^tX \ = \ \alpha \cdot A$$
  Donc : $A^2 - \alpha \cdot A = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.
  D'où : $Q(X) = X^2 - \alpha\, X = X(X-\alpha)$ est un polynôme annulateur de A.
  Ces racines sont 0 et α. Donc : $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A) \subset \{0, \alpha\}$.
  × Comme on sait par ailleurs que 0 et α sont bien valeurs propres de f, on obtient :
  $$\text{Sp}(f) = \{0, \alpha\}$$

□

2. On suppose que n et p vérifient $1 \leqslant p \leqslant n$.
Soit $(V_1, V_2, ..., V_p)$ une famille libre de p vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On note V la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont, dans cet ordre, $V_1, V_2, ..., V_p$.
Soit g l'application linéaire de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice V dans les bases $\mathscr{B}_p$ et $\mathscr{B}_n$.

a) Justifier que le rang de V est égal à p. Déterminer $\mathrm{Ker}(g)$.

Démonstration.

- On note $\mathcal{G} = \mathrm{Vect}\,(V_1, \dots, V_p)$.
  - $\times$ La famille $(V_1, \dots, V_p)$ engendre $\mathcal{G}$.
  - $\times$ La famille $(V_1, \dots, V_p)$ est libre.

  Donc $(V_1, \dots, V_p)$ est une base de $\mathcal{G}$.
  Ainsi :
$$\mathrm{rg}(V) = \dim(\mathrm{Vect}\,(V_1, \dots, V_p)) = \dim(\mathcal{G}) = \mathrm{Card}((V_1, \dots, V_p)) = p$$
$$\boxed{\text{Donc : } \mathrm{rg}(V) = p}$$

Commentaire

On pouvait aussi rédiger de la manière suivante.
Le rang d'une matrice est la dimension du sous-espace engendré par ses vecteurs colonnes, ici $V_1, \dots, V_p$.
Or la famille $(V_1, \dots, V_p)$ est libre. Donc : $\mathrm{rg}(V) = p$.

- D'après le théorème du rang :
$$\begin{array}{ccccccc} \dim(\mathrm{Ker}(g)) & + & \dim(\mathrm{Im}(g)) & = & \dim(\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})) & = & p \\ & & \shortparallel & & & & \\ p \ = \ \mathrm{rg}(V) & = & \mathrm{rg}(g) & & & & \end{array}$$
  Donc : $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = 0$.
$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Ker}(g) = \{0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})}\}.}$$

□

b) Soit Y une matrice colonne de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Montrer que l'on a $VY = 0$ si et seulement si l'on a ${}^tVVY = 0$.

Démonstration.

$(\Rightarrow)$ Supposons : $VY = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors :
$${}^tVVY = {}^tV \times VY = {}^tV \times 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$$

$(\Leftarrow)$ Supposons ${}^tVVY = 0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$. Alors : ${}^tY{}^tVVY = 0_{\mathbb{R}}$.
Donc, en notant $Z = VY$, on obtient :
$${}^tZZ = {}^t(VY)VY = {}^tY{}^tVVY = 0_{\mathbb{R}}$$
Or $Z \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc il existe $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$. D'où :
$$\sum_{i=1}^{n} z_i^2 = {}^tZZ = 0_{\mathbb{R}}$$
Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $z_i^2 \geqslant 0$. Donc :
$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ z_i^2 = 0 \quad \text{donc} \quad z_i = 0$$
Ainsi : $Z = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, c'est-à-dire : $VY = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{VY = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \ \Leftrightarrow \ {}^tVVY = 0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})}}$$

□

c) En déduire que la matrice ${}^tVV$ est inversible.

Démonstration.
On note h l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_p}(h) = {}^tVV$.

- D'après la question précédente, pour toute matrice colonne $Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$:

$$g(Y) = VY = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \quad \Leftrightarrow \quad h(Y) = {}^tVVY = 0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$$

  Donc $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(h)$.

- De plus, d'après la question ***2.a)***, $\mathrm{Ker}(g) = \{0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})}\}$. Donc $\mathrm{Ker}(h) = \{0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})}\}$.
  D'où h est injective.
  L'application h est un endomorphisme injectif en dimension finie. Donc h est bijectif.

$$\boxed{\text{Ainsi } {}^tVV \text{ est inversible.}}$$

□

PROBLÈME

On s'intéresse dans ce problème à quelques aspects mathématiques de la fonction de production d'une entreprise qui produit un certain bien à une époque donnée, à partir de deux facteurs de production travail et capital.

Dans tout le problème :

- *On note respectivement x et y les quantités de travail et de capital requises pour produire une certaine quantité de ce bien.*
- *On suppose que $x > 0$ et $y > 0$. On pose $\mathcal{D} = (\mathbb{R}_+^*)^2$ et pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, $z = \dfrac{x}{y}$.*

La partie III est indépendante des parties I et II.

Partie I : Fonction de production CES (Constant Elasticity of Substitution).

Dans toute cette partie, on note c un réel vérifiant $0 < c < 1$ et θ un réel vérifiant $\theta < 1$ avec $\theta \neq 0$.
Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}, \quad f(x, y) = \Big(c\, x^\theta + (1 - c)\, y^\theta\Big)^{\frac{1}{\theta}} \quad (\textit{fonction de production CES})$$

1. *Exemple.* Dans cette question **uniquement,** on prend $\theta = -1$ et $c = \dfrac{1}{2}$.

a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a : $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x + y}$. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ et calculer pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, les dérivées partielles $\partial_1(f)(x, y)$ et $\partial_2(f)(x, y)$.

Démonstration.

- Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \left(\frac{1}{2}x^{-1} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) y^{-1}\right)^{\frac{1}{-1}} \\ &= \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y}\right)^{-1} = \left(\frac{y+x}{2xy}\right)^{-1} \\ &= \frac{2xy}{y+x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathcal{D},\ f(x, y) = \frac{2xy}{x + y}}$$

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ en tant que quotient de fonctions polynomiales (donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$) dont le dénominateur ne s'annule pas ($\forall (x, y) \in \mathcal{D}$, $x + y > 0$).

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathcal{D}.}$$

- Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$.

$$\partial_1(f)(x, y) = \frac{2y(\cancel{x} + y) - \cancel{2xy}}{(x+y)^2} = \frac{2y^2}{(x+y)^2}$$

De même :

$$\partial_2(f)(x, y) = \frac{2x^2}{(x+y)^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall (x, y) \in \mathcal{D}, \\ \partial_1(f)(x, y) = \dfrac{2y^2}{(x+y)^2} \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x, y) = \dfrac{2x^2}{(x+y)^2} \end{array}}$$

□

b) Soit w et U les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t > 0,\ w(t) = \dfrac{2t}{1+t}$ et $U(t) = w(t) - t\,w'(t)$.
Dresser le tableau de variation de la fonction U sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier la convexité de U sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- La fonction w est bien dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas ($\forall t \in\ ]0,+\infty[,\ 1+t > 0$).
Soit $t > 0$.
$$w'(t) \ = \ \frac{2(1+\cancel{t}) - \cancel{2t}}{(1+t)^2} \ = \ \frac{2}{(1+t)^2}$$
- On en déduit :
$$U(t) \ = \ w(t) - t\,w'(t) \ = \ \frac{2t}{1+t} - \frac{2t}{(1+t)^2} \ = \ \frac{2t(\cancel{1}+t) - \cancel{2t}}{(1+t)^2} \ = \ \frac{2t^2}{(1+t)^2}$$
- La fonction U est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas ($\forall t \in\ ]0,+\infty[,\ (1+t)^2 > 0$).
Soit $t > 0$.
$$U'(t) \ = \ \frac{4t(1+t)^2 - 4t^2(1+t)}{(1+t)^4} \ = \ \frac{(1+t)(4t(1+\cancel{t}) - \cancel{4t^2})}{(1+t)^4} \ = \ \frac{4t}{(1+t)^3}$$
On en déduit :
$$\forall t > 0,\ U'(t) = \frac{4t}{(1+t)^3} > 0$$
On obtient le tableau de variations suivant :

t	$0 \qquad\qquad +\infty$
Signe de $U'(t)$	$+$
Variations de U	$0 \nearrow 2$

Détaillons les éléments de ce tableau :

× Calculons $\lim\limits_{t\to 0^+} U(t)$.
$$\lim_{t\to 0^+} U(t) = \frac{2\times 0^2}{(1+0)^2} = 0$$
× Calculons $\lim\limits_{t\to +\infty} U(t)$.
$$U(t) = \frac{2t^2}{(1+t)^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2\cancel{t^2}}{\cancel{t^2}} = 2$$
Donc : $\lim\limits_{t\to +\infty} U(t) = 2$.

- Soit $t > 0$.

$$U''(t) = \frac{4(1+t)^3 - 12t(1+t)^2}{(1+t)^6} = \frac{(1+t)^2\,(4(1+t) - 12t)}{(1+t)^6} = \frac{4(1-2t)}{(1+t)^4}$$

Donc :

$$U''(t) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - 2t \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2} \geqslant t$$

Donc la fonction U'' s'annule et change de signe en $\frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{La fonction } U \text{ n'est ni convexe, ni concave.}}$$

Commentaire

Sa courbe représentative admet un point d'inflexion au point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$.

□

c) On rappelle que $z = \frac{x}{y}$. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a $f(x, y) = y\, w(z)$.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$. On a bien $z = \frac{x}{y} > 0$.

$$y\, w(z) = y\,\frac{2z}{1+z} = \cancel{y}\,\frac{2\frac{x}{\cancel{y}}}{1+\frac{x}{y}} = \frac{2x}{\frac{y+x}{y}} = \frac{2xy}{y+x} = f(x, y)$$

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathcal{D},\ f(x, y) = yw(z)}$$

□

d) Vérifier pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, les relations : $\partial_1(f)(x, y) = w'(z)$ et $\partial_2(f)(x, y) = U(z)$.

Démonstration.

- Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$.

$$w'(z) = \frac{2}{(1+z)^2} = \frac{2}{\left(1+\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{2}{\left(\frac{y+x}{y}\right)^2} = \frac{2}{\frac{(x+y)^2}{y^2}} = \frac{2y^2}{(x+y)^2} = \partial_1(f)(x, y)$$

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathcal{D},\ \partial_1(f)(x, y) = w'(z)}$$

- Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$.

$$U(z) = \frac{2z^2}{(1+z)^2} = \frac{2\left(\frac{x}{y}\right)^2}{\left(1+\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{2\frac{x^2}{\cancel{y^2}}}{\frac{(x+y)^2}{\cancel{y^2}}} = \frac{2x^2}{(x+y)^2} = \partial_2(f)(x, y)$$

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathcal{D},\ \partial_2(f)(x, y) = U(z)}$$

□

2. a) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$ et pour tout réel $\lambda > 0$, on a : $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda\, f(x,y)$.

Démonstration.
Soit $(x,y) \in \mathcal{D}$. Soit $\lambda > 0$.

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \left(c(\lambda x)^\theta + (1-c)(\lambda y)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= \left(c\lambda^\theta x^\theta + (1-c)\lambda^\theta y^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= \left(\lambda^\theta(cx^\theta + (1-c)y^\theta)\right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= \lambda^{\cancel{\theta}\times\frac{1}{\cancel{\theta}}}\left(cx^\theta + (1-c)y^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= \lambda\, f(x,y) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathcal{D},\ \forall \lambda > 0,\ f(\lambda x, \lambda y) = \lambda\, f(x,y).}$$

□

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ et, pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$, calculer $\partial_1(f)(x,y)$ et $\partial_2(f)(x,y)$.

Démonstration.
- La fonction $(x,y) \mapsto x^\theta$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ car elle est la composée $\psi_1 \circ g_1$ où :
  × $g_1 : (x,y) \mapsto x$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ en tant que fonction polynomiale,
    - telle que $g_1(\mathcal{D}) \subset\ ]0,+\infty[$.

  × $\psi_1 : u \mapsto u^\theta$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

  De même, la fonction $(x,y) \mapsto y^\theta$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$.
  Donc la fonction $(x,y) \mapsto cx^\theta + (1-c)y^\theta$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ en tant que combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$.
  D'où la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ car elle est la composée $\psi_2 \circ g_2$ où :
  × $h_1 : (x,y) \mapsto cx^\theta + (1-c)y^\theta$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$,
    - telle que : $h_1(\mathcal{D}) \subset\ ]0,+\infty[$, car $c > 0$ et $1-c > 0$.

  × $h_2 : u \mapsto u^{\frac{1}{\theta}}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathcal{D}.}$$

Commentaire

On détaille ici assez précisément l'obtention du caractère $\mathcal{C}^2$ de f.
Le détail d'une seule composée sur les deux aurait sans doute permis d'obtenir tous les points.

- Soit $(x,y) \in \mathcal{D}$.

$$\partial_1(f)(x,y) = \frac{1}{\cancel{\theta}} \times c\cancel{\theta}x^{\theta-1} \times (cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}-1} = cx^{\theta-1}(cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}-1}$$

De même :

$$\partial_2(f)(x,y) = \frac{1}{\cancel{\theta}} \times (1-c)\cancel{\theta}y^{\theta-1} \times (cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}-1} = (1-c)y^{\theta-1}(cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}-1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\forall (x,y) \in \mathcal{D},\ \partial_1(f)(x,y) = cx^{\theta-1}(cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}-1} \\ &\qquad \text{et } \partial_2(f)(x,y) = (1-c)y^{\theta-1}(cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}-1} \end{aligned}}$$

□

c) Déterminer pour tout $y > 0$ fixé, le signe et la monotonie de la fonction $x \mapsto \partial_1(f)(x,y)$.
Déterminer pour tout $x > 0$ fixé, le signe et la monotonie de la fonction $y \mapsto \partial_2(f)(x,y)$.

Démonstration.

- Soit $(x,y) \in \mathcal{D}$. On a :
  - × $c > 0$ et $1-c > 0$ (car $0 < c < 1$),
  - × $x^{\theta-1} > 0$ et $y^{\theta-1} > 0$,
  - × $cx^\theta + (1-c)y^\theta > 0$. Donc : $(cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}-1} > 0$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall (x,y) \in \mathcal{D},\ \partial_1(f)(x,y) > 0 \text{ et } \partial_2(f)(x,y) > 0.}$$

- Soit $(x,y) \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned}
\partial_1(f)(x,y) &= cx^{\theta-1}(cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}-1} = c\frac{1}{x^{1-\theta}}\left((cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}}\right)^{1-\theta} \\
&= c\left(\frac{(cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}}}{x}\right)^{1-\theta} = c\left(\left(\frac{cx^\theta + (1-c)y^\theta)}{x^\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)^{1-\theta} \\
&= c\left(c + (1-c)\left(\frac{y}{x}\right)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}-1}
\end{aligned}$$

Deux cas se présentent alors :

× si $\theta > 0$, alors $\dfrac{1}{\theta} - 1 > 0$, car $\theta < 1$. Soit $(x_1, x_2) \in]0,+\infty[^2$.

$$\begin{aligned}
& x_1 < x_2 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} && \textit{(car } x \mapsto \frac{1}{x} \textit{ est strictement décroissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{y}{x_1} > \frac{y}{x_2} && \textit{(car } y > 0\textit{)} \\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{y}{x_1}\right)^\theta > \left(\frac{y}{x_2}\right)^\theta && \textit{(car, comme } \theta > 0, x \mapsto x^\theta \textit{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
\Leftrightarrow\ & (1-c)\left(\frac{y}{x_1}\right)^\theta > (1-c)\left(\frac{y}{x_2}\right)^\theta && \textit{(car } c < 1\textit{)} \\
\Leftrightarrow\ & c + (1-c)\left(\frac{y}{x_1}\right)^\theta > c + (1-c)\left(\frac{y}{x_2}\right)^\theta \\
\Leftrightarrow\ & \left(c + (1-c)\left(\frac{y}{x_1}\right)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}-1} > \left(c + (1-c)\left(\frac{y}{x_2}\right)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}-1} && \textit{(car, comme } \frac{1}{\theta} - 1 > 0, x \mapsto x^{\frac{1}{\theta}-1} \textit{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
\Leftrightarrow\ & c\left(c + (1-c)\left(\frac{y}{x_1}\right)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}-1} > c\left(c + (1-c)\left(\frac{y}{x_2}\right)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}-1} && \textit{(car } c > 0\textit{)} \\
\Leftrightarrow\ & \partial_1(f)(x_1,y) > \partial_1(f)(x_2,y)
\end{aligned}$$

Donc $x \mapsto \partial_1(f)(x,y)$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

× si $\theta < 0$, alors on a : $\dfrac{1}{\theta} - 1 < 0$.
Avec un raisonnement analogue au précédent, on obtient que la fonction $x \mapsto \partial_1(f)(x,y)$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

On prouverait de même que $y \mapsto \partial_2(f)(x,y)$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les fonctions } x \mapsto \partial_1(f)(x,y) \text{ et } y \mapsto \partial_2(f)(x,y) \\ \text{sont strictement décroissantes sur }]0,+\infty[.\end{array}}$$

□

3. Soit G la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par $G(x,y) = \dfrac{\partial_1(f)(x,y)}{\partial_2(f)(x,y)}$ (*taux marginal de substitution technique*) et g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t > 0,\ g(t) = \dfrac{c}{1-c} t^{-1+\theta}$.

a) Pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$, exprimer $G(x,y)$ en fonction de $g(z)$.

Démonstration.
Soit $(x,y) \in \mathcal{D}$.

$$\begin{array}{rcl} G(x,y) & = & \dfrac{\partial_1(f)(x,y)}{\partial_2(f)(x,y)} \\[2ex] & = & \dfrac{c x^{\theta-1} \cancel{(cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}-1}}}{(1-c)y^{\theta-1} \cancel{(cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}-1}}} \\[2ex] & = & \dfrac{c}{1-c} \dfrac{x^{\theta-1}}{y^{\theta-1}} \ = \ \dfrac{c}{1-c} \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\theta-1} \\[2ex] & = & \dfrac{c}{1-c} z^{\theta-1} \ = \ \dfrac{c}{1-c} z^{-1+\theta} \ = \ g(z) \end{array}$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathcal{D},\ G(x,y) = g(z)}$$

□

b) Pour tout $t > 0$, on pose $s(t) = -\dfrac{g(t)}{t\, g'(t)}$. Calculer $s(z)$ (*élasticité de substitution*). Conclusion.

Démonstration.

- La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ qui ne s'annule pas ($\forall t > 0,\ t^{1-\theta} > 0$).
Soit $t > 0$.
$$g'(t) \ = \ \frac{c}{1-c}(-1+\theta) t^{-2+\theta}$$
- Soit $(x,y) \in \mathcal{D}$. Alors $z = \dfrac{x}{y} > 0$.

$$s(z) \ = \ -\frac{g(z)}{z g'(z)} \ = \ -\frac{\cancel{\frac{c}{1-c}}\, z^{-1+\theta}}{z\, \cancel{\frac{c}{1-c}}(-1+\theta) z^{-2+\theta}} \ = \ -\frac{\cancel{z^{-1+\theta}}}{\cancel{z^{-1+\theta}}(-1+\theta)} \ = \ \frac{1}{1-\theta}$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathcal{D},\ s(z) = \frac{1}{1-\theta}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que l'élasticité de substitution est constante, égale à } \dfrac{1}{1-\theta}. \\ \text{En particulier, elle ne dépend pas de } z.\end{array}}$$

□

4. Soit w et U les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t > 0$, $w(t) = f(t,1)$ et $U(t) = w(t) - t\,w'(t)$.

a) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$, on a : $f(x,y) = y\,w(z)$.

Démonstration.
Soit $(x,y) \in \mathcal{D}$.

$$\begin{array}{rcl} y\,w(z) & = & y\,f(z,1) \;=\; y(cz^\theta + (1-c)1^\theta)^{\frac{1}{\theta}} \\ & = & y\left(c\left(\dfrac{x}{y}\right)^\theta + 1 - c\right)^{\frac{1}{\theta}} \;=\; y\left(c\,\dfrac{x^\theta}{y^\theta} + 1 - c\right)^{\frac{1}{\theta}} \\ & = & (y^\theta)^{\frac{1}{\theta}}\left(c\,\dfrac{x^\theta}{y^\theta} + 1 - c\right)^{\frac{1}{\theta}} \;=\; \left(y^\theta\left(c\,\dfrac{x^\theta}{y^\theta} + 1 - c\right)\right)^{\frac{1}{\theta}} \\ & = & \left(c\,\cancel{y^\theta}\dfrac{x^\theta}{\cancel{y^\theta}} + (1-c)y^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \;=\; (cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}} \\ & = & f(x,y) \end{array}$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathcal{D},\; f(x,y) = y\,w(z)}$$

□

b) En distinguant les deux cas $0 < \theta < 1$ et $\theta < 0$, dresser le tableau de variation de U sur $\mathbb{R}_+^*$.
Préciser $\lim\limits_{t \to 0^+} U(t)$, $\lim\limits_{t \to +\infty} U(t)$ ainsi que la convexité de U sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- La fonction w est dérivable sur $]0, +\infty[$.
  Soit $t > 0$.
  $$w'(t) \;=\; \frac{1}{\cancel{\theta}} \times c\cancel{\theta}t^{\theta-1} \times (ct^\theta + 1 - c)^{\frac{1}{\theta}-1} \;=\; ct^{\theta-1}(ct^\theta + 1 - c)^{\frac{1}{\theta}-1}$$
- On obtient alors :
  $$\begin{array}{rcl} U(t) & = & w(t) - t\,w'(t) \\ & = & (ct^\theta + 1 - c)^{\frac{1}{\theta}} - t \times ct^{\theta-1}(ct^\theta + 1 - c)^{\frac{1}{\theta}-1} \\ & = & (ct^\theta + 1 - c)^{\frac{1}{\theta}} - ct^\theta(ct^\theta + 1 - c)^{\frac{1}{\theta}-1} \\ & = & (ct^\theta + 1 - c)^{\frac{1}{\theta}-1}\left((\cancel{ct^\theta} + 1 - c) - \cancel{ct^\theta}\right) \\ & = & (1-c)(ct^\theta + 1 - c)^{\frac{1}{\theta}-1} \end{array}$$
- La fonction U est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.
  Soit $t > 0$.
  $$\begin{array}{rcl} U'(t) & = & (1-c)\left(\dfrac{1}{\theta} - 1\right) \times c\theta t^{\theta-1} \times (ct^\theta + 1 - c)^{\frac{1}{\theta}-2} \\ & = & (1-c) \times \dfrac{1-\theta}{\cancel{\theta}} \times c\cancel{\theta}t^{\theta-1} \times (ct^\theta + 1 - c)^{\frac{1}{\theta}-2} \\ & = & c(1-c)(1-\theta)t^{\theta-1}(ct^\theta + 1 - c)^{\frac{1}{\theta}-2} \end{array}$$
  Or, on a :
  × $c > 0$ et $1 - c > 0$ (car $0 < c < 1$),
  × $1 - \theta > 0$ (car $\theta < 1$),
  × $t^{\theta-1} > 0$ (car $t > 0$),
  × $ct^\theta + 1 - c) > 0$. Donc : $(ct^\theta + 1 - c)^{\frac{1}{\theta}-2} > 0$
  D'où : $U'(t) > 0$.
  Ainsi, la fonction U est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

- Pour les calculs de limites, deux cas se présentent.
  - × Si $0 < \theta < 1$, alors : $\lim\limits_{t \to 0^+} t^\theta = 0$.

    De plus, par stricte croissance de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$: $\dfrac{1}{\theta} > 1$.

    D'où :
$$\lim_{t \to 0^+} U(t) \ = \ (1-c)(1-c)^{\frac{1}{\theta}-1} \ = \ (1-c)^{\frac{1}{\theta}}$$

    Par ailleurs : $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\theta = +\infty$. Donc, comme $c > 0$:
$$\lim_{t \to +\infty} \left(c t^\theta + 1 - c\right) \ = \ +\infty$$

    D'où, comme $\dfrac{1}{\theta} - 1 > 0$:
$$\lim_{t \to +\infty} U(t) \ = \ +\infty$$

    On obtient alors le tableau de variations suivant :

t	0		$+\infty$
Signe de $U'(t)$		$+$	
Variations de U	$(1-c)^{\frac{1}{\theta}}$	↗	$+\infty$

  - × Si $\theta < 0$, alors : $\lim\limits_{t \to 0^+} t^\theta = +\infty$.
    Donc, comme $c > 0$:
$$\lim_{t \to 0^+} \left(c t^\theta + 1 - c\right) \ = \ +\infty$$

    De plus : $\dfrac{1}{\theta} < 0$. D'où, comme $\dfrac{1}{\theta} - 1 < 0$:
$$\lim_{t \to +\infty} U(t) \ = \ 0$$

    Par ailleurs : $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\theta = 0$. Donc, comme $\dfrac{1}{\theta} - 1 < 0$:
$$\lim_{t \to +\infty} U(t) \ = \ (1-c)(1-c)^{\frac{1}{\theta}-1} \ = \ (1-c)^{\frac{1}{\theta}}$$

    On obtient alors le tableau de variations suivant :

t	0		$+\infty$
Signe de $U'(t)$		$+$	
Variations de U	0	↗	$(1-c)^{\frac{1}{\theta}}$

Commentaire

On retrouve bien le cas $\theta = -1$ développé en question ***1.b)***.

- Étudions l'éventuelle convexité de U.
Soit $t > 0$.

$$\begin{array}{rcl} U''(t) & = & c(1-c)(1-\theta)(\theta-1)t^{\theta-2}(ct^\theta+1-c)^{\frac{1}{\theta}-2} \\ & & + \, c(1-c)(1-\theta)t^{\theta-1}\left(\dfrac{1}{\theta}-2\right) \times c\theta t^{\theta-1} \times (ct^\theta+1-c)^{\frac{1}{\theta}-3} \\ & = & c(1-c)(1-\theta)t^{\theta-2}(ct^\theta+1-c)^{\frac{1}{\theta}-3}\left((\theta-1)(ct^\theta+1-c)+t^\theta\,\dfrac{1-2\theta}{\cancel{\theta}}\,c\cancel{\theta}\right) \\ & = & c(1-c)(1-\theta)t^{\theta-2}(ct^\theta+1-c)^{\frac{1}{\theta}-3}(c\theta t^\theta-\cancel{ct^\theta}+(\theta-1)(1-c)+\cancel{ct^\theta}-2c\theta t^\theta) \\ & = & c(1-c)(1-\theta)t^{\theta-2}(ct^\theta+1-c)^{\frac{1}{\theta}-3}\left((\theta-1)(1-c)-c\theta t^\theta\right) \end{array}$$

On a : $0 < c < 1$, $\theta < 1$ et $t > 0$. Donc :

$$c(1-c)(1-\theta)t^{\theta-2}(ct^\theta+1-c)^{\frac{1}{\theta}-3} > 0$$

D'où :

$$\begin{array}{rcl} U''(t) \leqslant 0 & \Leftrightarrow & (\theta-1)(1-c) - c\,\theta\,t^\theta \leqslant 0 \\ & \Leftrightarrow & (\theta-1)(1-c) \leqslant c\,\theta\,t^\theta \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{(\theta-1)(1-c)}{c\theta} \leqslant t^\theta \quad (*) \end{array}$$

Deux cas se présentent alors :

× si $0 < \theta < 1$, alors : $\theta - 1 < 0$. Donc :

$$\frac{(\theta-1)(1-c)}{c\,\theta} \;<\; 0$$

Or : $t > 0$. Donc $t^\theta > 0$.
L'inégalité $(*)$ est donc vérifiée pour tout $t \in \,]0,+\infty[$.
Donc : $\forall t \in \,]0,+\infty[$, $U''(t) \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{Si } 0 < \theta < 1, \text{ alors la fonction } U \text{ est concave sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

× si $\theta < 0$, alors :

$$\frac{(\theta-1)(1-c)}{c\,\theta} \;>\; 0$$

De plus : $\dfrac{1}{\theta} < 0$. Donc, par stricte décroissance de la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{\theta}}$ sur $]0,+\infty[$:

$$U''(t) \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{(\theta-1)(1-c)}{c\,\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \geqslant t$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } \theta < 0, \text{ la fonction } U \text{ n'est ni convexe, ni concave.} \\ \text{Elle admet un point d'inflexion d'abscisse } \left(\dfrac{(\theta-1)(1-c)}{c\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}. \end{array}}$$

□

Partie II : Caractérisation des fonctions de production à élasticité de substitution constante.

Dans toute cette partie, on note Ψ une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant la condition $\Psi(1,1) = 1$ et pour tout réel $\lambda > 0$, la relation : $\Psi(\lambda x, \lambda y) = \lambda\,\Psi(x,y)$.
De plus, on suppose que pour tout $y > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto \partial_1(\Psi)(x,y)$ est strictement positive et strictement décroissante et que pour tout $x > 0$ fixé, la fonction $y \mapsto \partial_2(\Psi)(x,y)$ est également strictement positive et strictement décroissante.

5. Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t > 0,\ v(t) = \Psi(t,1)$.

a) Justifier que la fonction v est de classe $\mathcal{C}^2$, strictement croissante et concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- La fonction Ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$.

  $\boxed{\text{Donc la fonction } v \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[.}$

- Soit $y > 0$.
  Par définition de la dérivée partielle première $\partial_1(\Psi)$ de Ψ, la fonction $x \mapsto \Psi(x,y)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ (car Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$) de dérivée $x \mapsto \partial_1(\Psi)(x,y)$.
  Donc, en prenant $y = 1$, on obtient :

  $$\forall t > 0,\ v'(t) = \partial_1(\Psi)(t,1)$$

  Or, d'après l'énoncé, la fonction $x \mapsto \partial_1(\Psi)(t,1)$ vérifie : $\forall x > 0$, $\partial_1(\Psi)(t,1) > 0$.
  Donc : $\forall t > 0$, $v'(t) > 0$.

  $\boxed{\text{Ainsi, la fonction } v \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[.}$

  Toujours d'après l'énoncé, la fonction $x \mapsto \partial_1(\Psi)(x,1)$ est strictement décroissante.
  Donc la fonction v' est strictement décroissante.

  $\boxed{\text{Ainsi, la fonction } v \text{ est concave sur }]0,+\infty[.}$

Commentaire

Pour déterminer v', on aurait pu utiliser la définition de la dérivée d'une fonction (à l'aide du taux d'accroissement).
Soit $t > 0$.

$$\begin{array}{rcll} v'(t) & = & \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{v(t+h)-v(t)}{h} & \\ & = & \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\Psi(t+h,1)-\Psi(t,1)}{h} & \textit{(par définition de } v\textit{)} \\ & = & \partial_1(\Psi)(t,1) & \textit{(par définition de la dérivée partielle première } \partial_1(\Psi)\textit{)} \end{array}$$

Commentaire

La preuve faite ici du caractère $\mathcal{C}^2$ de v rapportait sans doute la totalité des points de barème. Mais elle n'est en fait pas si évidente.
Plus précisément, v est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ car elle est la composée $\Psi \circ h_1$ où :

× $h_1 : t \mapsto (t, 1)$ est :
  - de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$,
  - telle que : $h_1(]0, +\infty[) = \,]0, +\infty[\, \times \{1\} \subset \mathcal{D}$.

× Ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$.

Cependant, les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, telles que :

$$h_1 : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t, 1) \end{array}$$

ne sont pas étudiées en ECE.
Pour rédiger une preuve complète du caractère $\mathcal{C}^2$ de v en restant dans le cadre du programme ECE, on aurait pu rédiger de la manière suivante :

- la fonction Ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$, donc, par définition de la dérivée partielle première $\partial_1(\Psi)$, la fonction v est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée v' définie par :

$$\forall t > 0, \ v'(t) = \partial_1(\Psi)(t, 1)$$

- De même, par définition de la dérivée partielle seconde $\partial^2_{1,1}(\Psi)$, la fonction v' est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée v'' définie par :

$$\forall t > 0, \ v''(t) = \partial^2_{1,1}(\Psi)(t, 1)$$

- Il reste à montrer que la fonction v'' est continue sur $]0, +\infty[$. Pour cela, on utilise la définition de la continuité. On note d la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.
  La fonction $\partial^2_{1,1}(\Psi)$ est continue sur $\mathcal{D}$.
  Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$. On a alors : $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ \forall (x, y) \in \mathcal{D}$,

$$d((x_0, y_0), (x, y)) < \eta \quad \Rightarrow \quad |\partial^2_{1,1}(\Psi)(x, y) - \partial^2_{1,1}(\Psi)(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

  Soit $t_0 > 0$.
  En choisissant $x_0 = t_0$ et $y_0 = 1$, on obtient alors : $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ \forall t \in \,]0, +\infty[$,

$$d((t_0, 1), (t, 1)) < \eta \quad \Rightarrow \quad |\partial^2_{1,1}(\Psi)(t, 1) - \partial^2_{1,1}(\Psi)(t_0, 1)| < \varepsilon$$

  Or, par définition de la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$:

$$d((t_0, 1), (t, 1)) \ = \ \sqrt{(t - t_0)^2 + (1 - 1)^2} \ = \ \sqrt{(t - t_0)^2} \ = \ |t - t_0|$$

  Donc : $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ \forall t \in \,]0, +\infty[$,

$$|t - t_0| < \eta \ \Rightarrow \ |v''(t) - v''(t_0)| < \varepsilon$$

  C'est la définition de la continuité de v'' en t_0.
  La fonction v'' est continue en tout point t_0 de $]0, +\infty[$. Donc la fonction v'' est continue sur $]0, +\infty[$.
  On en déduit que v est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

□

b) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t > 0,\ \varphi(t) = v(t) - t\, v'(t)$. On suppose l'existence de la limite de $\varphi(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures et que $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi(t) = \mu$, avec $\mu \geqslant 0$.
Déterminer pour tout $t > 0$, le signe de $\varphi(t)$ et montrer que $\mu \leqslant 1$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
  Soit $t > 0$.
  $$\varphi'(t) = \cancel{v'(t)} - (\cancel{1 \times v'(t)} + t\, v''(t)) = -t v''(t)$$
- Or la fonction v' est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, donc : $v''(t) < 0$.
  D'où : $\varphi'(t) > 0$.
  On obtient le tableau de variations suivant :

t	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $\varphi'(t)$	$+$
Variations de φ	$\mu \nearrow$

- Par stricte croissance de φ sur $]0, +\infty[$:
  $$\forall t > 0,\ \ \varphi(t) > \mu \geqslant 0$$
  $$\boxed{\text{Ainsi : } \forall t > 0,\ \varphi(t) > 0.}$$
- Par ailleurs :
  $$\begin{array}{rcll} \varphi(1) & = & v(1) - 1 \times v'(1) \ = \ \Psi(1,1) - v'(1) & \\ & = & 1 - v'(1) & \textit{(d'après l'énoncé)} \\ & < & 1 & \textit{(car, d'après } \textbf{\textit{5.a)}} \textit{ :} \\ & & & \forall t > 0,\ v'(t) > 0\textit{)} \end{array}$$
  Donc, par croissance de φ sur $]0, +\infty[$:
  $$\mu \leqslant \varphi(1) < 1$$
  $$\boxed{\text{Ainsi : } \mu \leqslant 1.}$$

□

c) Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathcal{D},\ \Psi(x, y) = y\, v(z)$.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$.

$$\begin{array}{rcll} y\, v(z) & = & y\, \Psi(z, 1) \ = \ y\, \Psi\left(\dfrac{x}{y}, 1\right) & \\ & = & \Psi\left(\cancel{y} \times \dfrac{x}{\cancel{y}}, y \times 1\right) & \textit{(car, d'après l'énoncé :} \\ & & & \forall \lambda > 0,\ \lambda \Psi(x,y) = \Psi(\lambda x, \lambda y)\textit{)} \\ & = & \Psi(x, y) & \end{array}$$

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathcal{D},\ \Psi(x, y) = y\, v(z)}$$

□

6. a) Pour tout $t > 0$, on pose : $h(t) = \dfrac{v'(t)}{\varphi(t)}$.

Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a : $\dfrac{\partial_1(\Psi)(x, y)}{\partial_2(\Psi)(x, y)} = h(z)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D},\ \Psi(x, y) = y\, v(z) = y\, v\Big(\frac{x}{y}\Big)$$

- En dérivant cette égalité par rapport à x, on obtient : $\forall (x, y) \in \mathcal{D}$,

$$\partial_1(\Psi)(x, y) \ = \ \cancel{y} \times \frac{1}{\cancel{y}} v'(\frac{x}{y}) \ = \ v'(z)$$

- En dérivant par rapport à y, on obtient : $\forall (x, y) \in \mathcal{D}$,

$$\partial_2(\Psi)(x, y) \ = \ v\Big(\frac{x}{y}\Big) + \cancel{y} \times \Big(-\frac{x}{y^{\cancel{2}}}\Big) \times v'(\frac{x}{y}) \ = \ v(z) - \frac{x}{y}\, v'(z) \ = \ v(z) - z\, v'(z)$$

- Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$. On obtient alors :

$$h(z) \ = \ \frac{v'(z)}{\varphi(z)} \ = \ \frac{v'(z)}{v(z) - z\, v'(z)} \ = \ \frac{\partial_1(\Psi)(x, y)}{\partial_2(\Psi)(x, y)}$$

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathcal{D},\ h(z) = \frac{\partial_1(\Psi)(x, y)}{\partial_2(\Psi)(x, y)}}$$

□

b) Pour tout $t > 0$, on pose : $\sigma(t) = -\dfrac{h(t)}{t\, h'(t)}$. Déterminer pour tout $t > 0$, le signe de $\sigma(t)$.

Démonstration.

- La fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, dont le dénominateur ne s'annule pas ($\forall t > 0$, $\varphi(t) > 0$, d'après la question ***5.b)***).
  Soit $t > 0$.

$$\begin{aligned} h'(t) \ &= \ \frac{v''(t)\varphi(t) - v'(t)\varphi'(t)}{(\varphi(t))^2} \\ &= \ \frac{v''(t)(v(t) - t\, v'(t)) - v'(t)(-t\, v''(t))}{(\varphi(t))^2} \\ &= \ \frac{v(t)\, v''(t) - \cancel{t\, v'(t)\, v''(t)} + \cancel{t\, v'(t)\, v''(t)}}{(\varphi(t))^2} \\ &= \ \frac{v(t)\, v''(t)}{(\varphi(t))^2} \end{aligned}$$

- On obtient alors :

$$\sigma(t) = -\frac{h(t)}{t\, h'(t)} = -\frac{\frac{v'(t)}{\cancel{\varphi(t)}}}{t\, \frac{v(t)\, v''(t)}{(\varphi(t))^{\cancel{2}}}} = -\frac{v'(t)\, \varphi(t)}{t\, v(t)\, v''(t)}$$

- D'après l'énoncé : $v(t) > 0$.
  D'après la question ***5.a)*** : $v'(t) > 0$.
  D'après la question ***5.b)*** : $v''(t) < 0$ et $\varphi(t) > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall t > 0,\ \sigma(t) > 0.}$$

□

7. Les fonctions σ et h sont celles qui ont été définies dans la question ***6***. On suppose que la fonction σ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$; on note σ_0 cette constante et on suppose $\sigma_0 \neq 1$. On pose : $r = 1 - \dfrac{1}{\sigma_0}$.

a) Pour tout $t > 0$, on pose $\ell(t) = t^{1-r}h(t)$. Calculer $\ell'(t)$ et en déduire que : $\forall t > 0$, $h(t) = h(1)t^{r-1}$.

Démonstration.

- La fonction ℓ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
  Soit $t > 0$.
  $$\ell'(t) \;=\; (1-r)t^{-r}h(t) + t^{1-r}h'(t)$$
- Or : $\sigma_0 \;=\; \sigma(t) \;=\; -\dfrac{h(t)}{t\,h'(t)}$.
  Donc : $h'(t) \;=\; -\dfrac{h(t)}{\sigma_0\, t}$
- De plus : $1 - r \;=\; \cancel{1} - \left(\cancel{1} - \dfrac{1}{\sigma_0}\right) \;=\; \dfrac{1}{\sigma_0}$.
  Donc :
  $$\ell'(t) \;=\; \frac{1}{\sigma_0}\, t^{-r}\, h(t) + t^{1-r} \times \left(-\frac{h(t)}{\sigma_0\, t}\right) \;=\; \frac{t^{-r}}{\sigma_0}\, h(t) - \frac{t^{-r}}{\sigma_0}\, h(t) \;=\; 0$$
  $$\boxed{\text{Ainsi : } \forall t > 0,\ \ell'(t) = 0.}$$
- Donc ℓ est une fonction constante. Ainsi, pour tout $t > 0$:
  $$\begin{array}{ccccccc} \ell(t) & = & \ell(1) & = & 1^{1-r}h(1) & = & h(1) \\ \shortparallel & & & & & & \\ t^{1-r}\,h(t) & & & & & & \end{array}$$
  $$\boxed{\text{D'où : } \forall t > 0,\ h(t) = h(1)\, t^{r-1}.}$$

□

b) Par une méthode analogue à celle de la question ***7a***, établir la relation :
$$\forall t > 0,\ \ v(t) = \left(\frac{1 + h(1)t^r}{1 + h(1)}\right)^{\frac{1}{r}}$$

Démonstration.

- Soit $t > 0$.
  $$\begin{array}{rcl} v(t) = \left(\dfrac{1 + h(1)t^r}{1 + h(1)}\right)^{\frac{1}{r}} & \Leftrightarrow & (v(t))^r = \dfrac{1 + h(1)t^r}{1 + h(1)} \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{(v(t))^r}{1 + h(1)t^r} = \dfrac{1}{1 + h(1)} \end{array}$$
  Prouver l'égalité demandée revient donc à montrer que la fonction $w : t \mapsto \dfrac{(v(t))^r}{1 + h(1)t^r}$ est constante sur $]0, +\infty[$.
- La fonction w est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas ($\forall t > 0$, $1 + h(1)t^r > 0$).

Soit $t > 0$.

$$\begin{aligned} w'(t) &= \frac{r v'(t)(v(t))^{r-1}(1+h(1)t^r) - (v(t))^r \left(r h(1) t^{r-1}\right)}{(1+h(1)t^r)^2} \\ &= r(v(t))^{r-1} \frac{v'(t)(1+h(1)t^r) - v(t)h(1)t^{r-1}}{(1+h(1)t^r)^2} \\ &= r(v(t))^{r-1} \frac{v'(t) + h(1)t^{r-1}(t\, v'(t) - v(t))}{(1+h(1)t^r)^2} \\ &= r(v(t))^{r-1} \frac{v'(t) - h(1)t^{r-1}\varphi(t)}{(1+h(1)t^r)^2} \end{aligned}$$

Or : $\dfrac{v'(t)}{\varphi(t)} = h(t) = h(1)t^{r-1}$. Donc : $v'(t) = h(1)t^{r-1}\varphi(t)$. D'où :

$$w'(t) = 0$$

On en déduit que la fonction w est constante. Donc, pour tout $t > 0$:

$$\underset{\dfrac{(v(t))^r}{1+h(1)t^r}}{\underset{\parallel}{w(t)}} = w(1) = \frac{(v(1))^r}{1+h(1)} = \frac{1}{1+h(1)}$$

En effet, d'après l'énoncé :

$$v(1) = \Psi(1,1) = 1$$

$$\boxed{\forall t > 0,\ v(t) = \left(\frac{1+h(1)t^r}{1+h(1)}\right)^{\frac{1}{r}}}$$

□

c) En déduire l'existence d'une constante $a \in]0,1[$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathcal{D}$, $\Psi(x,y) = (ax^r + (1-a)y^r)^{\frac{1}{r}}$.

Démonstration.
Soit $(x,y) \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned} \Psi(x,y) &= y\, v(z) && \textit{(d'après la question } \textbf{5.c)}\textit{)} \\ &= y \left(\frac{1+h(1)z^r}{1+h(1)}\right)^{\frac{1}{r}} \\ &= (y^r)^{\frac{1}{r}} \left(\frac{1+h(1)\left(\frac{x}{y}\right)^r}{1+h(1)}\right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \left(y^r \, \frac{1+h(1)\frac{x^r}{y^r}}{1+h(1)}\right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \left(\frac{1}{1+h(1)}\, y^r + \frac{h(1)}{1+h(1)}\, x^r\right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Donc, en posant } a = \dfrac{h(1)}{1+h(1)} : \\ \forall (x,y) \in \mathcal{D},\ \Psi(x,y) = (ax^r + (1-a)y^r)^{\frac{1}{r}}. \end{array}}$$

□

d) Quelle conclusion peut-on tirer des résultats des questions ***3.b)*** et ***7.c)*** ?

Démonstration.

- D'après la question ***3.b)***, toute fonction de production CES possède une élasticité de substitution constante.
- Réciproquement, d'après la question ***7.c)***, toute fonction de production possédant une élasticité de substitution constante est une fonction de production CES.

$$\boxed{\text{Une fonction de production est à élasticité constante si et seulement si c'est une fonction de production CES.}}$$

Commentaire

Ce résultat justifie l'appellation des fonctions de production CES : Constant Elasticity of Substitution.

□

8. Soit $a \in]0,1[$. Pour tout $t > 0$, soit S_t la fonction définie sur $]-\infty,1[\setminus\{0\}$ par : $S_t(r) = (at^r+1-a)^{\frac{1}{r}}$.

a) On pose $H_t(r) = \ln S_t(r)$. Calculer la limite de $S_t(r)$ lorsque r tend vers 0.

Démonstration.

- Soit $r \in]-\infty,1[\setminus\{0\}$.

$$H_t(r) \ = \ \ln(S_t(r)) \ = \ \frac{1}{r}\ln(at^r+1-a) \ = \ \frac{1}{r}\ln(1+a(t^r-1))$$

- Or : $\lim\limits_{r\to 0} t^r = 1$. Donc : $\lim\limits_{r\to 0} a(t^r-1) = 0$. D'où :

$$\ln(1+a(t^r-1)) \underset{r\to 0}{\sim} a(t^r-1)$$

Ainsi :

$$H_t(r) \underset{r\to 0}{\sim} a\,\frac{t^r-1}{r} = a\,\frac{\mathrm{e}^{r\ln(t)}-1}{r}$$

- Or : $\lim\limits_{r\to 0} r\,\ln(t) = 0$. Donc :

$$\mathrm{e}^{r\ln(t)}-1 \underset{r\to 0}{\sim} r\,\ln(t)$$

D'où :

$$H_t(r) \underset{r\to 0}{\sim} a\,\frac{\cancel{r}\ln(t)}{\cancel{r}} = a\,\ln(t)$$

Ainsi : $\lim\limits_{r\to 0} H_t(r) = a\,\ln(t)$.

De plus : $\forall r \in]-\infty,1[\setminus\{0\}$, $S_t(r) = \exp(H_t(r))$.

$$\boxed{\text{D'où : } \lim_{r\to 0} S_t(r) = \exp(a\,\ln(t)) = t^a.}$$

□

b) Pour tout couple $(x, y) \in \mathcal{D}$ fixé, on pose : $N_{(x,y)}(r) = y\, S_z(r)$ et $F(x, y) = \lim\limits_{r \to 0} N_{(x,y)}(r)$.
Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a $F(x, y) = x^a\, y^{1-a}$ (*fonction de production de Cobb-Douglas*).

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$.
D'après la question précédente :

$$F(x,y) \;=\; \lim_{r \to 0} y\, S_z(r) \;=\; y\, z^a \;=\; y \left(\frac{x}{y}\right)^a \;=\; y\, \frac{x^a}{y^a} \;=\; x^a\, y^{1-a}$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathcal{D},\ F(x,y) = x^a\, y^{1-a}.}$$

□

Partie III : Estimation des paramètres d'une fonction de production de Cobb-Douglas.

Soit a un réel vérifiant $0 < a < 1$ et B un réel strictement positif.
On suppose que la production totale Q présente une composante déterministe et une composante aléatoire.

- La *composante déterministe* est une fonction de production de type Cobb-Douglas, c'est-à-dire telle que :
$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}, \quad f(x,y) = Bx^a y^{1-a}$$
- La *composante aléatoire* est une variable aléatoire de la forme $\exp(R)$ où R est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée, de variance $\sigma^2 > 0$.
- La *production totale* Q est une variable aléatoire à valeurs strictement positives telle que :
$$Q = Bx^a y^{1-a} \exp(R)$$

On suppose que les variables aléatoires Q et R sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Commentaire

En général, la fonction de production de Cobb-Douglas est exprimée à l'aide de v.a.r. :

$$Q = B\, X^a\, Y^{1-a}$$

où :
- × la v.a.r. X exprime la quantité de travail nécessaire à la production d'un volume physique de ce bien (par exemple pour 1 tonne, ou 1 litre, ou encore un nombre fixé de produits),
- × la v.a.r. Y exprime la quantité de capital nécessaire à la production de la même quantité de ce bien de consommation.

Le sujet définit la fonction de production de Cobb-Douglas de manière un peu différente en mêlant réalisations et variables aléatoires.
On sera d'autant plus attentif à la nature des objets manipulés.

On pose : $b = \ln(B)$, $u = \ln(x) - \ln(y)$ et $T = \ln(Q) - \ln(y)$. On a donc : $T = au + b + R$.
On sélectionne n entreprises ($n \geqslant 1$) qui produisent le bien considéré à l'époque donnée.
On mesure pour chaque entreprise i ($i \in [\![1, n]\!]$) la quantité de travail x_i et la quantité de capital y_i utilisées ainsi que la quantité produite Q_i^*.
On suppose que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $x_i > 0$, $y_i > 0$ et $Q_i^* > 0$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la production totale de l'entreprise i est alors une variable aléatoire Q_i telle que $Q_i = B\, x_i^a\, y_i^{1-a} \exp(R_i)$, où $R_1, R_2, \ldots, R_n$ sont des variables aléatoires supposées indépendantes et de même loi que R et le réel strictement positif Q_i^* est une réalisation de la variable aléatoire Q_i.
On pose pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $u_i = \ln(x_i) - \ln(y_i)$, $T_i = \ln(Q_i) - \ln(y_i)$ et $t_i = \ln(Q_i^*) - \ln(y_i)$.
Ainsi, pour chaque entreprise $i \in [\![1, n]\!]$, on a $T_i = au_i + b + R_i$ et le réel t_i est une réalisation de la variable aléatoire T_i.
On rappelle les définitions et résultats suivants :

- Si $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une série statistique, la moyenne et la variance empiriques, notées respectivement $\overline{v}$ et s_v^2, sont données par : $\overline{v} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} v_i$ et $s_v^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} (v_i - \overline{v})^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} v_i^2 - \overline{v}^2$.
- Si $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(w_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont deux séries statistiques, la covariance empirique de la série double $(v_i, w_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, notée $\text{cov}(v, w)$, est donnée par :

$$\text{cov}(v, w) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (v_i - \overline{v})(w_i - \overline{w}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i\, w_i - \overline{v}\overline{w} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (v_i - \overline{v}) w_i$$

9. a) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire T_i suit la loi normale $\mathcal{N}\left(au_i + b, \sigma^2\right)$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

- La v.a.r. $T_i = a\, u_i + b + R_i$ est une transformée affine de la v.a.r. R_i qui suit la loi $\mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$. Donc T_i suit une loi normale. Déterminons les paramètres de cette loi.
- Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(T_i) = \mathbb{E}(a\, u_i + b + R_i) = a\, u_i + b + \mathbb{E}(R_i)$$

Or : $R_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$. Donc : $\mathbb{E}(R_i) = 0$.
Ainsi : $\mathbb{E}(T_i) = a\, u_i + b$

- Par propriété de la variance :

$$\mathbb{V}(T_i) = \mathbb{V}(a\, u_i + b + R_i) = \mathbb{V}(R_i)$$

Or : $R_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$. Donc : $\mathbb{V}(R_i) = \sigma^2$.
Ainsi : $\mathbb{V}(T_i) = \sigma^2$

$$\boxed{\text{Finalement : } T_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(a\, u_i + b, \sigma^2\right).}$$

Commentaire

On rappelle le résultat de cours suivant : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$,

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right) \;\Leftrightarrow\; aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}\left(am + b, \sigma^2\right)$$

En particulier : $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right) \;\Leftrightarrow\; X^* = \dfrac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

□

b) Les variables aléatoires $T_1, T_2, ..., T_n$ sont-elles indépendantes ?

Démonstration.
D'après l'énoncé, les v.a.r. $R_1, \ldots, R_n$ sont indépendantes.

$$\boxed{\text{Donc, d'après le lemme des coalitions, les v.a.r. } T_1, \ldots, T_n \text{ sont indépendantes.}}$$

□

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit φ_i la densité continue sur $\mathbb{R}$ de T_i :

$$\forall d \in \mathbb{R},\ \varphi_i(d) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(d - (au_i + b))^2\right)$$

Soit $\mathcal{F}$ l'ouvert défini par $\mathcal{F} =]0, 1[\times\mathbb{R}$ et M la fonction de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$M(a, b) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \varphi_i(t_i)\right)$$

On suppose que : $0 < \operatorname{cov}(u, t) < s_u^2$.

10. a) Calculer le gradient $\nabla(M)(a, b)$ de M en tout point $(a, b) \in \mathcal{F}$.

Démonstration.

- Soit $(a, b) \in \mathcal{F}$.

$$\begin{aligned}
M(a,b) &= \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(t_i - (au_i + b))^2\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(t_i - (au_i + b))^2\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(-\ln((2\pi)^{\frac{1}{2}}) + \ln\left(\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(t_i - (au_i + b))^2\right)\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}(t_i - (au_i + b))^2\right) \\
&= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} (t_i - (au_i + b))^2 \\
&= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} (t_i^2 + a^2u_i^2 + b^2 - 2au_it_i - 2bt_i + 2abu_i) \\
&= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^2 + a^2\sum_{i=1}^{n} u_i^2 + n\,b^2 - 2a\sum_{i=1}^{n} u_it_i - 2b\sum_{i=1}^{n} t_i + 2ab\sum_{i=1}^{n} u_i\right)
\end{aligned}$$

- La fonction M est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{F}$ en tant que fonction polynomiale.
  Soit $(a, b) \in \mathcal{F}$. On a les relations suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = n(s_u^2 + \bar{u}^2) \qquad \sum_{i=1}^{n} u_it_i = n(\operatorname{cov}(u,t) + \bar{u}\bar{t})$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = n\bar{u} \qquad \sum_{i=1}^{n} t_i = n\bar{t}$$

Donc :

$$\partial_1(M)(a,b) = -\frac{1}{\sigma^2}\left(a\sum_{i=1}^{n} u_i^2 - \sum_{i=1}^{n} u_it_i + b\sum_{i=1}^{n} u_i\right) = -\frac{n}{\sigma^2}(a(s_u^2 + \overline{u}^2) - (\operatorname{cov}(u,t) + \overline{u}\overline{t}) + b\overline{u})$$

De même :

$$\partial_2(M)(a,b) = -\frac{1}{\sigma^2}\left(nb - \sum_{i=1}^{n} t_i + a\sum_{i=1}^{n} u_i\right) = -\frac{n}{\sigma^2}(b - \overline{t} + a\overline{u})$$

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathcal{F},\ \nabla(M)(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2}(\operatorname{cov}(u,t) + \overline{u}\overline{t} - a(s_u^2 + \overline{u}^2) - b\overline{u}) \\ \frac{n}{\sigma^2}(\overline{t} - a\overline{u} - b) \end{pmatrix}}$$

□

b) En déduire que M admet sur $\mathcal{F}$ un unique point critique, noté $(\hat{a}, \hat{b})$.

Démonstration.
Soit $(a,b) \in \mathcal{F}$.
Le couple (a,b) est un point critique de M si et seulement si $\nabla(M)(a,b) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.
On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\nabla(M)(a,b) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} & \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \partial_1(M)(a,b) & = & 0 \\ \partial_2(M)(a,b) & = & 0 \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cancel{\dfrac{n}{\sigma^2}}(\mathrm{cov}(u,t) + \overline{u}\,\overline{t} - a(s_u^2 + \overline{u}^2) - b\overline{u}) \ = \ 0 \\ \cancel{\dfrac{n}{\sigma^2}}(\overline{t} - a\overline{u} - b) \ = \ 0 \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathrm{cov}(u,t) + \overline{u}\,\overline{t} - a(s_u^2 + \overline{u}^2) - b\overline{u} \ = \ 0 \\ b \ = \ \overline{t} - a\overline{u} \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathrm{cov}(u,t) + \overline{u}\,\overline{t} - a(s_u^2 + \overline{u}^2) - (\overline{t} - a\overline{u})\overline{u} \ = \ 0 \\ b \ = \ \overline{t} - a\overline{u} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\nabla(M)(a,b) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} & \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathrm{cov}(u,t) + \cancel{\overline{u}\,\overline{t}} - a s_u^2 - \cancel{a\overline{u}^2} - \cancel{\overline{t}\,\overline{u}} + \cancel{a\overline{u}^2} \ = \ 0 \\ b \ = \ \overline{t} - a\overline{u} \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a s_u^2 & = & \mathrm{cov}(u,t) \\ b & = & \overline{t} - a\overline{u} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \dfrac{\mathrm{cov}(u,t)}{s_u^2} \\ b & = & \overline{t} - a\overline{u} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } M \text{ admet un unique point critique sur } \mathcal{F}.}$$
□

c) Exprimer $\hat{a}$ et $\hat{b}$ en fonction de $\mathrm{cov}(u,t)$, s_u^2, $\overline{t}$ et $\overline{u}$.
($\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont les estimations de a et b par la méthode dite du maximum de vraisemblance)

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après les calculs de la question précédente : } (\hat{a}, \hat{b}) = \left(\dfrac{\mathrm{cov}(u,t)}{s_u^2},\ \overline{t} - \dfrac{\mathrm{cov}(u,t)}{s_u^2}\overline{u}\right).}$$
□

11. a) Soit $\nabla^2(M)(a,b)$ la matrice hessienne de M en $(a,b) \in \mathcal{F}$.
Montrer que $\nabla^2(M)(a,b) = -\dfrac{n}{\sigma^2}\begin{pmatrix} s_u^2 + \overline{u}^2 & \overline{u} \\ \overline{u} & 1 \end{pmatrix}$

Démonstration.
Soit $(a,b) \in \mathcal{F}$.

- D'après la question ***10.a)*** :

$$\partial_1(M)(a,b) = \frac{n}{\sigma^2}(\mathrm{cov}(u,t) + \overline{u}\,\overline{t} - a(s_u^2 + \overline{u}^2) - b\overline{u})$$

et

$$\partial_2(M)(a,b) = \frac{n}{\sigma^2}(\overline{t} - a\overline{u} - b)$$

- On obtient alors :
$$\partial^2_{1,1}(M) = \frac{n}{\sigma^2}(-(s_u^2+\bar{u}^2)) = -\frac{n}{\sigma^2}(s_u^2+\bar{u}^2)$$
De plus :
$$\partial^2_{1,2}(M)(a,b) = \frac{n}{\sigma^2}(-\bar{u}) = -\frac{n}{\sigma^2}\bar{u}$$
De même :
$$\partial^2_{2,1}(M)(a,b) = -\frac{n}{\sigma^2}\bar{u}$$
Enfin :
$$\partial^2_{2,2}(M)(a,b) = \frac{n}{\sigma^2}(-1) = -\frac{n}{\sigma^2}$$

$$\boxed{\forall (a,b)\in\mathcal{F},\ \nabla^2(M)(a,b) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(M)(a,b) & \partial^2_{1,2}(M)(a,b) \\ \partial^2_{2,1}(M)(a,b) & \partial^2_{2,2}(M)(a,b)\end{pmatrix} = -\frac{n}{\sigma^2}\begin{pmatrix} s_u^2+\bar{u}^2 & \bar{u} \\ \bar{u} & 1\end{pmatrix}}$$

□

b) En déduire que M admet en $(\hat{a},\hat{b})$ un maximum local.

Démonstration.

- La matrice $\nabla^2(M)(\hat{a},\hat{b})$ est une matrice réelle symétrique. Donc elle est diagonalisable. On note λ_1 et λ_2 ses valeurs propres (éventuellement égales).
- On souhaite déterminer le signe de λ_1 et λ_2.
Soit $\lambda\in\mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}\det\left(\nabla^2(M)(\hat{a},\hat{b}) - \lambda\cdot I_2\right) &= \det\begin{pmatrix} -\frac{n}{\sigma^2}(s_u^2+\bar{u}^2)-\lambda & -\frac{n}{\sigma^2}\bar{u} \\ -\frac{n}{\sigma^2}\bar{u} & -\frac{n}{\sigma^2}-\lambda\end{pmatrix} \\ &= \left(-\frac{n}{\sigma^2}(s_u^2+\bar{u}^2)-\lambda\right)\left(-\frac{n}{\sigma^2}-\lambda\right) - \left(-\frac{n}{\sigma^2}\bar{u}\right)^2 \\ &= \lambda^2 + \frac{n}{\sigma^2}(s_u^2+\bar{u}^2+1)\lambda + \left(\frac{n}{\sigma^2}\right)^2 s_u^2\end{aligned}$$
On en déduit que la matrice $\nabla^2(M)(\hat{a},\hat{b}) - \lambda\cdot I_2$ n'est pas inversible si et seulement si :
$$\lambda^2 \ + \ \frac{n}{\sigma^2}(s_u^2+\bar{u}^2+1)\lambda \ + \ \left(\frac{n}{\sigma^2}\right)^2 s_u^2 \ = \ 0 \quad (*)$$
- Or λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de $\nabla^2(M)(\hat{a},\hat{b})$, donc $\nabla^2(M)(\hat{a},\hat{b}) - \lambda\cdot I_2$ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda\in\{\lambda_1,\lambda_2\}$.
Ainsi, les réels λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation $(*)$. D'où :
$$\lambda^2 \ + \ \frac{n}{\sigma^2}(s_u^2+\bar{u}^2+1)\lambda \ + \ \left(\frac{n}{\sigma^2}\right)^2 s_u^2 \ = \ (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$$
Par identification des coefficients de ces polynômes de degré 2, on en déduit le système d'équations suivant :
$$\left\{\begin{array}{lcll} \lambda_1\,\lambda_2 & = & \left(\frac{n}{\sigma^2}\right)^2 s_u^2 & (\star) \\ \lambda_1+\lambda_2 & = & -\frac{n}{\sigma^2}(s_u^2+\bar{u}^2+1) & (\star\star)\end{array}\right.$$
  × L'équation $(\star)$ implique : $\lambda_1\,\lambda_2 > 0$.
  Donc λ_1 et λ_2 ont même signe.
  × L'équation $(\star\star)$ implique : $\lambda_1+\lambda_2 < 0$.
  Or λ_1 et λ_2 ont même signe. Donc : $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } M \text{ admet un maximum local en } (\hat{a},\hat{b}).}$$

□

12. Soit (h,k) un couple de réels non nuls. Calculer $M(\hat{a}+h,\hat{b}+k) - M(\hat{a},\hat{b})$.
En déduire que M admet en $(\hat{a},\hat{b})$ un maximum global.

Démonstration.

- Soit $(a,b) \in \mathcal{F}$. D'après la question ***10.a)*** :

$$\begin{aligned} M(a+h,b+k) &= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{\sigma^2}\Bigg((a+h)^2\sum_{i=1}^{n} u_i^2 - 2(a+h)\sum_{i=1}^{n} u_it_i + 2(a+h)(b+k)\sum_{i=1}^{n} u_i \\ &\qquad - 2(b+k)\sum_{i=1}^{n} t_i + n(b+k)^2 + \sum_{i=1}^{n} t_i^2\Bigg) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} (a+h)^2\sum_{i=1}^{n} u_i^2 &= a^2\sum_{i=1}^{n} u_i^2 + 2ah\sum_{i=1}^{n} u_i^2 + h^2\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \\ 2(a+h)\sum_{i=1}^{n} u_it_i &= 2a\sum_{i=1}^{n} u_it_i + 2h\sum_{i=1}^{n} u_it_i \\ 2(a+h)(b+k)\sum_{i=1}^{n} u_i &= 2ab\sum_{i=1}^{n} u_i + 2ak\sum_{i=1}^{n} u_i + 2bh\sum_{i=1}^{n} u_i + 2hk\sum_{i=1}^{n} u_i \\ 2(b+k)\sum_{i=1}^{n} t_i &= 2b\sum_{i=1}^{n} t_i + 2k\sum_{i=1}^{n} t_i \\ n(b+k)^2 + \sum_{i=1}^{n} t_i^2 &= nb^2 + 2nbk + nk^2 + \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} M(a+h,b+k) - M(a,b) &= -\frac{1}{2\sigma^2}\Bigg(2ah\sum_{i=1}^{n} u_i^2 + h^2\sum_{i=1}^{n} u_i^2 - 2h\sum_{i=1}^{n} u_it_i + 2ak\sum_{i=1}^{n} u_i + 2bh\sum_{i=1}^{n} u_i \\ &\qquad + 2hk\sum_{i=1}^{n} u_i - 2k\sum_{i=1}^{n} t_i + 2nbk + nk^2\Bigg) \end{aligned}$$

On a de plus les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} u_i^2 &= n(s_u^2 + \bar{u}^2) & \sum_{i=1}^{n} u_it_i &= n(\mathrm{cov}(u,t) + \bar{u}\bar{t}) \\ \sum_{i=1}^{n} u_i &= n\bar{u} & \sum_{i=1}^{n} t_i &= n\bar{t} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} M(a+h,b+k) - M(a,b) &= -\frac{n}{2\sigma^2}\big(2ah(s_u^2+\bar{u}^2) + h^2(s_u^2+\bar{u}^2) - 2h(\mathrm{cov}(u,t)+\bar{u}\bar{t}) \\ &\qquad + 2ak\bar{u} + 2bh\bar{u} + 2hk\bar{u} - 2k\bar{t} + 2bk + k^2\big) \end{aligned}$$

- Or, d'après la question ***10.c)*** :

$$\hat{a} = \frac{\mathrm{cov}(u,t)}{s_u^2} \quad \text{et} \quad \hat{b} = \bar{t} - \hat{a}\bar{u} = \bar{t} - \frac{\mathrm{cov}(u,t)}{s_u^2}\bar{u}$$

Donc, en particulier :

$$\begin{array}{rcl}
2\hat{a}h(s_u^2+\bar{u}^2) & = & 2\,\dfrac{\mathrm{cov}(u,t)}{s_u^2}h(s_u^2+\bar{u}^2) \;=\; 2\,\mathrm{cov}(u,t)h + 2\,\dfrac{\mathrm{cov}(u,t)}{s_u^2}\bar{u}^2h \\
2\hat{a}k\bar{u} & = & 2\,\dfrac{\mathrm{cov}(u,t)}{s_u^2}\bar{u}k \\
2\hat{b}h\bar{u} & = & 2\left(\bar{t}-\dfrac{\mathrm{cov}(u,t)}{s_u^2}\bar{u}\right)\bar{u}h \;=\; 2\bar{u}\bar{t}h - 2\,\dfrac{\mathrm{cov}(u,t)}{s_u^2}\bar{u}^2h \\
2\hat{b}k & = & 2\left(\bar{t}-\dfrac{\mathrm{cov}(u,t)}{s_u^2}\bar{u}\right)k \;=\; 2\bar{t}k - 2\,\dfrac{\mathrm{cov}(u,t)}{s_u^2}\bar{u}k
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
M(\hat{a}+h,\hat{b}+k)-M(\hat{a},\hat{b}) & = & -\dfrac{n}{2\sigma^2}\Big(\cancel{2\,\mathrm{cov}(u,t)h} + \cancel{2\dfrac{\mathrm{cov}(u,t)}{s_u^2}}\bar{u}^2h + s_u^2h^2 + \bar{u}^2h^2 - \cancel{2\,\mathrm{cov}(u,t)h} \\
 & & \quad - \cancel{2\bar{u}\bar{t}h} + 2\,\cancel{\dfrac{\mathrm{cov}(u,t)}{s_u^2}}\bar{u}k + \cancel{2\bar{u}\bar{t}h} - 2\,\cancel{\dfrac{\mathrm{cov}(u,t)}{s_u^2}}\bar{u}^2h \\
 & & \quad + 2\bar{u}hk - \cancel{2\bar{t}k} + \cancel{2\bar{t}k} - 2\,\cancel{\dfrac{\mathrm{cov}(u,t)}{s_u^2}}\bar{u}k + k^2\Big)
\end{array}$$

Ainsi :

$$M(\hat{a}+h,\hat{b}+k)-M(\hat{a},\hat{b}) \;=\; -\frac{n}{2\sigma^2}(s_u^2h^2+\bar{u}^2h^2+2\bar{u}hk+k^2) \;=\; -\frac{n}{2\sigma^2}(s_u^2h^2+(\bar{u}h+k)^2)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } M(\hat{a}+h,\hat{b}+k)-M(\hat{a},\hat{b}) = -\frac{n}{2\sigma^2}(s_u^2h^2+(\bar{u}h+k)^2).}$$

- On remarque alors :

$$\forall (h,k)\in(\mathbb{R}^*)^2,\ M(\hat{a}+h,\hat{b}+k)-M(\hat{a},\hat{b})\leqslant 0$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout $h\in\mathbb{R}^*$ et pour tout $k\in\mathbb{R}^*$, on en déduit :

$$\forall (a,b)\in\mathcal{F},\ M(a,b)-M(\hat{a},\hat{b})\leqslant 0$$

Donc :

$$\forall (a,b)\in\mathcal{F},\ M(a,b)\leqslant M(\hat{a},\hat{b})$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } M \text{ admet en } (\hat{a},\hat{b}) \text{ un maximum global.}}$$

Commentaire

Dans cette question, on dispose initialement d'un n-uplet d'observations $(t_1,\dots,t_n)$. Plus précisément, $(t_1,\dots,t_n)$ est une réalisation d'un n-uplet de v.a.r. indépendantes $(T_1,\dots,T_n)$.
Les lois des (T_i) dépendent de deux paramètres a et b, a priori inconnus et qu'on cherche à déterminer. Pour ce faire, une idée naturelle consiste à considérer que la valeur du couple (a,b) qui a permis de générer les observations est celle qui avait la plus grande probabilité de les générer. C'est cette idée qui guide la méthode dite du maximum de vraisemblance, dont les questions ci-dessus sont une illustration.
Le couple $(\hat{a},\hat{b})$ est précisément la valeur du paramètre (a,b) maximisant la réalisation des observations initiales.

La méthode du maximum de vraisemblance conduit à considérer la variable aléatoire construite à l'aide de ce maximum.

Commentaire

Plaçons-nous dans le cas où T est une v.a.r. discrète (la méthode est plus simple à appréhender dans ce cas). L'idée est de choisir comme estimation de (a, b) le couple de réels $(\hat{a}, \hat{b})$ tel que la **vraisemblance** d'avoir obtenu l'échantillon utilisé soit maximisée.
Autrement dit, le couple $(\hat{a}, \hat{b})$ tel que la probabilité :

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{L}(a,b) & = & \mathbb{P}_{(a,b)}([T_1 = t_1] \ \cap \ \ldots \ \cap \ [T_n = t_n]) & \\ & = & \mathbb{P}_{(a,b)}([T_1 = t_1]) \ \times \ \ldots \ \times \ \mathbb{P}([T_n = t_n]) & \textit{(par indépendance)} \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{(a,b)}([T_i = t_i]) & \end{array}$$

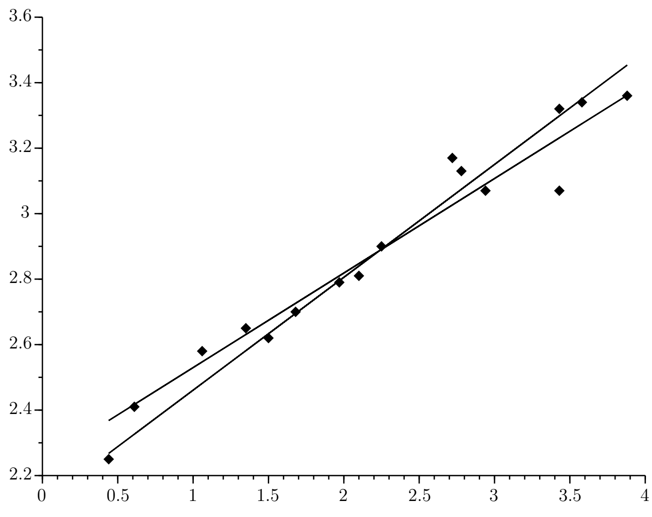
soit maximale. L'énoncé portait sur le cas de v.a.r. à densité, que l'on comprend aisément par analogie avec le cas des v.a.r. discrètes.

□

13. On rappelle qu'en **Scilab**, les commandes `variance` et `corr` permettent de calculer respectivement la variance d'une série statistique et la covariance d'une série statistique double.
Si $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(w_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont deux séries statistiques, alors la variance de $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est calculable par `variance(v)` et la covariance de $(v_i, w_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est calculable par `corr(v,w,1)`.
On a relevé pour $n = 16$ entreprises qui produisent le bien considéré à l'époque donnée, les deux séries statistiques $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(t_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ reproduites dans les lignes 1 à 4 du code **Scilab** suivant dont la ligne 9 est incomplète :

```
1  u = [1.06, 0.44, 2.25, 3.88, 0.61, 1.97, 3.43, 2.10,
2      1.50, 1.68, 2.72, 1.35, 2.94, 2.78, 3.43, 3.58]
3  t = [2.58, 2.25, 2.90, 3.36, 2.41, 2.79, 3.32, 2.81,
4      2.62, 2.70, 3.17, 2.65, 3.07, 3.13, 3.07, 3.34]
5  plot2d(u, t, -4)
6  // -4 signifie que les points sont représentés par des losanges.
7  plot2d(u, corr(u,t,1)/variance(u)*u + mean(t) - corr(u,t,1)/variance(u)*mean(u))
8  // équation de la droite de régression de t en u.
9  plot2d(u,.................................................)
10 // équation de la droite de régression de u en t.
```

Le code précédent complété par la ligne 9 donne alors la figure suivante :



a) Compléter la ligne 9 du code permettant d'obtenir la figure précédente (*on reportera sur sa copie, uniquement la ligne 9 complétée*).

Démonstration.
D'après les calculs des questions précédentes, la droite de régression de t en u est :

$$t = \hat{a}\, u + \hat{b}$$

Donc, la droite de régression de u en t est :

$$u = \frac{1}{\hat{a}}(t - \hat{b})$$

On obtient la ligne **Scilab** suivante :

```
9  plot2d(u, variance(u)/corr(u,t,1)*(t-mean(t)+corr(u,t,1)/variance(u)* mean(u))
```

Commentaire

- Chercher un **modèle de régression** entre deux variables aléatoires T et U consiste à savoir si T est une fonction de U à un bruit près. Plus formellement, on cherche à déterminer une fonction f telle que :

$$T = f(U) + \varepsilon,$$

  où la fonction f est appelée **fonction de régression** et ε est une variable aléatoire appelée **erreur d'ajustement** (ou résidu). Dans ce sujet, on s'intéresse à un modèle de régression particulier : le modèle de régression linéaire ; c'est-à-dire le cas où f est une fonction affine : $f(U) = aU + b$. Il existe cependant bien d'autres choix pour la fonction f. Par exemple :
  - × d'autres modèles paramétriques, c'est-à-dire déterminés par un nombre fini de paramètres : $f(U) = \exp(aU) + b$, etc.
  - × des modèles non paramétriques, c'est-à-dire déterminés par un nombre infini de paramètres : forêts aléatoires (on approche f par des fonctions constantes par morceaux), estimation par noyaux ($f(U) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k K(U - x_k)$, où K est une fonction positive d'intégrale 1 appelée noyau), etc.
- Dans le cas de la régression linéaire, le problème consiste donc à identifier une droite $t = au + b$ qui ajuste bien le nuage de points.
  L'erreur que l'on commet en utilisant la droite de régression pour prédire t_i à partir de u_i est : $t_i - (au_i + b)$.
  Une idée naturelle pour déterminer la valeur des coefficients a et b est donc de chercher la droite (donc le couple (a, b)) qui minimise la somme des carrés de ces erreurs :

$$\sum_{i=1}^{n} (t_i - (au_i + b))^2$$

  On en déduit, après calculs, que l'unique droite rendant minimale l'erreur $\sum\limits_{i=1}^{n} (t_i - (au_i + b))^2$ est la droite d'équation :

$$t = \frac{\mathrm{cov}(u, t)}{s_u^2}(u - \bar{u}) + \bar{t} = \hat{a}u + \hat{b}$$

□

b) Interpréter le point d'intersection des deux droites de régression.

Démonstration.
Toutes les droites de régression reliant deux variables passent par le point moyen du nuage.

$\boxed{\text{Donc, ici, le point d'intersection des deux droites de régression est ce point moyen : } (\bar{u}, \bar{t}).}$ □

c) Estimer graphiquement les moyennes empiriques $\overline{u}$ et $\overline{t}$.

Démonstration.
D'après la question précédente, le point $(\bar{u}, \bar{t})$ est le point d'intersection des deux droites de régression. Donc :

× $\bar{u}$ est l'abscisse du point d'intersection,

× $\bar{t}$ est l'ordonnée du point d'intersection.

$\boxed{\text{Par lecture : } \bar{u} \simeq 2,3 \text{ et } \bar{t} \simeq 2,9.}$

□

d) Le coefficient de corrélation empirique de la série statistique double $(u_i, t_i)_{1 \leqslant i \leqslant 16}$ est-il plus proche de -1, de 1 ou de 0 ?

Démonstration.

- Par définition du coefficient de corrélation empirique :
$$\rho(u, t) = \frac{\text{cov}(u, t)}{\sqrt{s_u^2}\,\sqrt{s_v^2}}$$
Donc :
$$\hat{a} = \frac{\text{cov}(u, t)}{s_u^2} = \frac{\rho(u, t)\,\sqrt{s_u^2}\,\sqrt{s_v^2}}{s_u^2} = \frac{\rho(u, t)\,\sqrt{s_v^2}}{\sqrt{s_u^2}}$$
- De plus :
$$t = \hat{a}u + \hat{b}$$
Trois cas se présentent alors.
  × Si $\rho(u, t)$ est plus proche de 0, alors $\hat{a}$ est proche de 0.
  Donc le coefficient directeur de la droite de régression de t en u est proche de 0.
  Ainsi, cette droite de régression est presque parallèle à l'axe des abscisses.
  Ce n'est pas le cas sur le graphique. Donc $\rho(u, t)$ n'est pas proche de 0.
  × Si $\rho(u, t)$ est plus proche de -1, alors $\hat{a}$ est négatif (car les écart-types empiriques $\sqrt{s_u^2}$ et $\sqrt{s_v^2}$ sont strictement positifs).
  Donc le coefficient directeur de la droite de régression de t en u est négatif.
  Ainsi, cette droite de régression admet une pente négative.
  Ce n'est pas le cas sur le graphique. Donc $\rho(u, t)$ n'est pas proche de -1.
  × Le cas $\rho(u, t)$ proche de 1 est le seul cas restant.

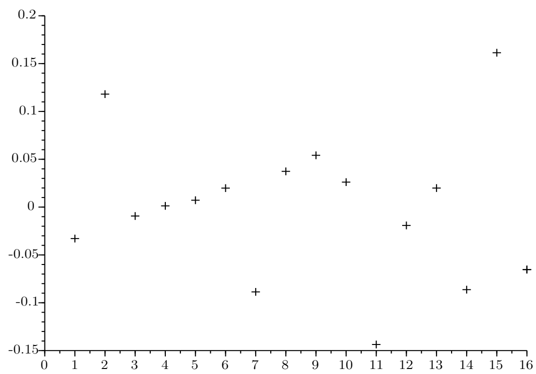
$\boxed{\text{Finalement, } \rho(u, t) \text{ est plus proche de } 1.}$

Commentaire

Le graphique nous confirme ce résultat : les droites de régression ont des pentes positives. □

e) On reprend les lignes 1 à 4 du code précédent que l'on complète par les instructions 11 à 17 qui suivent et on obtient le graphique ci-dessous :

```
11  a0 = corr(u,t,1)/variance(u)
12  b0 = mean(t) - corr(u,t,1)/variance(u)*mean(u)
13  t0 = a0 * u + b0
14  e = t0 - t
15  p = 1:16
16  plot2d(p,e,-1)
17  // -1 signifie que les points sont représentés par des symboles d'addition.
```

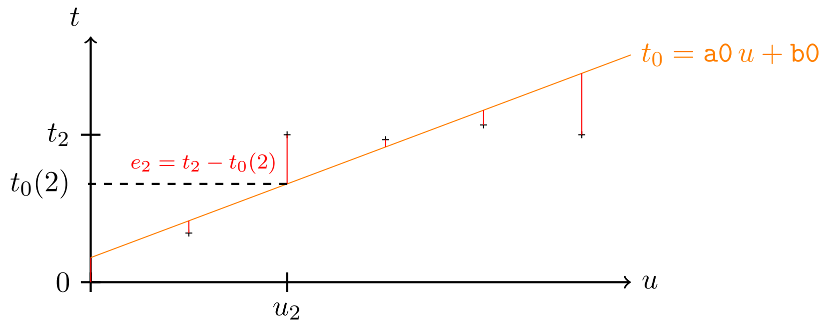


Que représente ce graphique ? Quelle valeur peut-on conjecturer pour la moyenne des ordonnées des 16 points obtenus sur le graphique ?
Déterminer mathématiquement la valeur de cette moyenne.

Démonstration.
On commence par remarquer :

$$\texttt{a0} = \hat{a} \quad \text{et} \quad \texttt{b0} = \hat{b}$$

On rappelle que l'erreur commise en utilisant la droite de régression pour prédire t_i à partir de u_i est : $e_i = t_i - (\hat{a}u_i + \hat{b}) = t_i - t_0(i)$.
On peut schématiser la situtation avec le graphique suivant :



Donc, en reprenant le code **Scilab** :

× `t0` est le vecteur obtenu en approchant `t` par régression linéaire,

× `e` est le vecteur des erreurs d'ajustement entre `t` et son approximation linéaire `t0`.

$\boxed{\text{Le graphique renvoyé représente les erreurs d'ajustement de chaque observation.}}$

$\boxed{\text{Par lecture, on peut conjecturer une moyenne des ordonnées de ces 16 points égale à 0.}}$

On rappelle : $T = au + b + R$. Donc $T - (au+b) = R$.
Ainsi, comme $R \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$:

$$\mathbb{E}(T - (au+b)) = \mathbb{E}(R) = 0$$

$$\boxed{\text{On retrouve bien mathématiquement que la moyenne des erreurs est nulle.}}$$

□

14. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $A_n = \dfrac{1}{n\, s_u^2} \sum\limits_{i=1}^{n} (u_i - \bar{u}) T_i$. On suppose que le paramètre σ^2 est connu.

a) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(A_n)$ et la variance $\mathbb{V}(A_n)$ de la variable aléatoire A_n.
Préciser la loi de A_n.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 1$.

- La v.a.r. A_n admet une espérance en tant que somme de v.a.r. qui en admettent une.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(A_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n\, s_u^2} \sum_{i=1}^{n} (u_i - \bar{u}) T_i\right) \\ &= \frac{1}{n\, s_u^2} \sum_{i=1}^{n} (u_i - \bar{u}) \mathbb{E}(T_i) \qquad \textit{(par linéarité de l'espérance)} \end{aligned}$$

Or, d'après la question ***9.a)*** : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $T_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(a\, u_i + b, \sigma^2\right)$. Donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(A_n) &= \frac{1}{n\, s_u^2} \sum_{i=1}^{n} (u_i - \bar{u})(a\, u_i + b) \\ &= \frac{1}{n\, s_u^2} \sum_{i=1}^{n} (a\, u_i^2 - a\, u_i\, \bar{u} + b\, u_i - b\, \bar{u}) \\ &= \frac{1}{n\, s_u^2} \left(a \sum_{i=1}^{n} u_i^2 - a\bar{u} \sum_{i=1}^{n} u_i + b \sum_{i=1}^{n} u_i - nb\bar{u}\right) \\ &= \frac{1}{n\, s_u^2} \left(a \sum_{i=1}^{n} u_i^2 - a\bar{u} \times n\bar{u} + \cancel{b \times n\bar{u}} - \cancel{nb\bar{u}}\right) \\ &= \frac{a}{n\, s_u^2} \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2 - n\bar{u}^2\right) \\ &= \frac{a}{\cancel{n\, s_u^2}} \times \cancel{n\, s_u^2} \\ &= a \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(A_n) = a}$$

- La v.a.r. A_n admet une variance en tant que somme de v.a.r. **indépendantes** qui admettent une variance.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{V}(A_n) & = & \mathbb{V}\left(\dfrac{1}{n\,s_u^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})T_i\right) & \\
& = & \dfrac{1}{(n\,s_u^2)^2}\,\mathbb{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})T_i\right) & \textit{(par propriété de la variance)} \\
& = & \dfrac{1}{(n\,s_u^2)^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{V}((u_i-\bar{u})T_i) & \begin{array}{l}\textit{(car, d'après la question } \textbf{\textit{9.b)}}, \\ T_1,\ \ldots,\ T_n \textit{ sont indépendantes)}\end{array} \\
& = & \dfrac{1}{(n\,s_u^2)^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2\,\mathbb{V}(T_i) & \\
& = & \dfrac{1}{(n\,s_u^2)^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2\sigma^2 & \begin{array}{l}\textit{(car : } \forall i\in[\![1,n]\!], \\ T_i\hookrightarrow\mathcal{N}\left(a\,u_i+b,\sigma^2\right)\textit{)}\end{array} \\
& = & \dfrac{\sigma^2}{(n\,s_u^2)^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2 & \\
& = & \dfrac{\sigma^2}{(n\,s_u^2)^{\cancel{2}}}\,\cancel{n\,s_u^2} & \\
& = & \dfrac{\sigma^2}{n\,s_u^2} &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(A_n)=\dfrac{\sigma^2}{n\,s_u^2}}$$

- La v.a.r. A_n est une combinaison linéaire des (T_i) qui suivent toutes une loi normale. Donc A_n suit une loi normale.
  On a déjà déterminé ses paramètres : $\mathbb{E}(A_n)$ et $\mathbb{V}(A_n)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } A_n\hookrightarrow\mathcal{N}\left(a,\dfrac{\sigma^2}{n\,s_u^2}\right).}$$

Commentaire

On peut remarquer que :
- × $\mathbb{E}(A_n)=a$. Donc la v.a.r. A_n est un estimateur sans biais du paramètre a.
- × $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{V}(A_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sigma^2}{n\,s_u^2}=0$. Donc A_n est un estimateur convergent de a.

□

b) On suppose que a est un paramètre inconnu. Soit α un réel donné vérifiant $0<\alpha<1$.
On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et d_α le réel tel que $\Phi(d_\alpha)=1-\dfrac{\alpha}{2}$.
Déterminer un intervalle de confiance du paramètre a au niveau de confiance $1-\alpha$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $A_n\hookrightarrow\mathcal{N}\left(a,\dfrac{\sigma^2}{n\,s_u^2}\right)$.
  On cherche alors à se ramener à la loi $\mathcal{N}(0,1)$ pour utiliser les données de l'énoncé.

Pour cela, on note A_n^* la v.a.r. centrée réduite associée à A_n. Alors :

$$A_n^* = \frac{A_n - \mathbb{E}(A_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(A_n)}} = \frac{A_n - a}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n\, s_u^2}}} = \sqrt{n\, s_u^2}\, \frac{A_n - a}{\sigma}$$

- Comme A_n^* est une transformée affine de A_n qui suit une loi normale, alors A_n^* suit également une loi normale.
  De plus, par construction de A_n^* :

$$\mathbb{E}(A_n^*) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(A_n^*) = 1$$

$$\boxed{\text{Donc : } A_n^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).}$$

- Ainsi, la fonction Φ est la fonction de répartition de A_n^*. Donc, par propriétés de Φ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([d_\alpha \leqslant A_n^* \leqslant d_\alpha]) &= \Phi(d_\alpha) - \Phi(-d_\alpha) \\
&= \Phi(d_\alpha) - (1 - \Phi(d_\alpha)) \ = \ 2\Phi(d_\alpha) - 1 \\
&= 2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - 1 \ = \ 2 - \cancel{2}\,\frac{\alpha}{\cancel{2}} - 1 \\
&= 1 - \alpha
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
1 - \alpha &= \mathbb{P}([-d_\alpha \leqslant A_n^* \leqslant d_\alpha]) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[-d_\alpha \leqslant \sqrt{n\, s_u^2}\, \frac{A_n - a}{\sigma} \leqslant d_\alpha\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[-d_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n\, s_u^2}} \leqslant A_n - a \leqslant d_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n\, s_u^2}}\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[d_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n\, s_u^2}} \geqslant a - A_n \geqslant -d_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n\, s_u^2}}\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[A_n + d_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n\, s_u^2}} \geqslant a \geqslant A_n - d_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n\, s_u^2}}\right]\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, l'intervalle $\left[A_n - d_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n\, s_u^2}} \ ; \ A_n + d_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n\, s_u^2}}\right]$ est un intervalle de confiance du paramètre a au niveau de confiance $1 - \alpha$. □