

# Oraux HEC 2007 - 2018 : questions de cours

---

## Analyse

### Suites

1. Convergence et divergence des suites réelles monotones.
2. Énoncer les résultats concernant les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

### Séries

1. Définition de la convergence d'une série numérique (à termes réels).
2. Définition d'une série convergente. Pour quels réels  $x > 0$  la série de terme général  $(\ln x)^n$  est-elle convergente? Donner sa somme en cas de convergence.
3. Donner des critères de convergence de séries à termes positifs.

### Intégrales

1. Définition de la convergence d'une intégrale impropre.
2. Donner des critères de convergence d'une intégrale impropre.  
Préciser la nature de l'intégrale  $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ , où  $a > 0$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
3. Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in I$ , et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $I$ . Donner les propriétés de l'application  $x \in I \mapsto \int_a^x f(t) dt$ .

### Fonctions

1. Définir le fait que deux fonctions soient équivalentes au voisinage de  $+\infty$ .
2. Définition et représentation graphique de la fonction partie entière.
3. Définition de la continuité en un point d'une fonction réelle d'une variable réelle.

4. Rappeler la définition d'une bijection. Que peut-on dire de la composée de deux bijections?
5. Quel est le lien entre la continuité d'une fonction et sa dérivabilité?
6. Définition et propriétés des fonctions de classe  $\mathcal{C}^p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ).
7. Convexité d'une fonction définie sur un intervalle de  $\mathbb{R}$ .
8. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{R}$ . Que signifie graphiquement le fait que  $a$  soit un point d'inflexion de la courbe représentative de  $f$ ? Quelles sont les méthodes pour le calculer?
9. Formule de Taylor-Young.
10. Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles de classe  $\mathcal{C}^2$  définie sur une partie de  $\mathbb{R}^2$ . Rappeler la définition d'un point critique de  $f$ , et donner une condition suffisante pour que  $f$  possède un extremum local en ce point.

## Probabilités

### Lois usuelles

1. Définition et propriétés de la loi uniforme sur  $[a, b]$ .
2. Définition et propriétés de la loi exponentielle.
3. Définition et propriétés de la loi géométrique.
4. Définition d'un schéma binomial.
5. Définition et propriétés de la loi de Bernoulli et de la loi binomiale.
6. Donner l'allure du graphe de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

### Formules classiques

1. Formule des probabilité composées.
2. Formule des probabilités totales.
3. Définition de la loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Définitions des lois marginales et conditionnelles.
4. Formule de Bayes.

## Indépendance

1. Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires finies.
2. Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes.  
Lien entre indépendance et covariance ?
3. Définition de l'indépendance de  $n$  variables aléatoires discrètes.

## Fonction de répartition et fonction de densité

1. Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
2. Définition d'une variable aléatoire à densité et propriétés de sa fonction de répartition.
3. Définition d'une densité de probabilité.

## Espérance, moments et variance

1. Espérance et variance d'une variable aléatoire discrète finie : définition et interprétation.
2. Moment d'ordre  $r$  d'une variable aléatoire à densité : définition et existence.
3. Formule de Koenig-Huygens.
4. Définition et propriétés de la covariance de deux variables aléatoires discrètes.

## Convergence, approximation et estimateurs

1. Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.
2. Étant donnée une variable aléatoire  $X$  suivant la loi normale centrée réduite, écrire sous forme d'intégrale la probabilité que  $X$  appartienne à un segment  $[a, b]$  donné. Dans quel théorème cette probabilité apparaît-elle comme une limite ?
3. Énoncé de l'inégalité de Markov.
4. Loi faible des grands nombres.

5. Définition d'un estimateur sans biais d'un paramètre inconnu.
6. Estimateur, biais et risque quadratique.

## Algèbre linéaire

### Généralités

1. Que peut-on dire du degré de la somme et du produit de deux polynômes ?
2. Qu'appelle-t-on système de Cramer ?
3. Définition d'un isomorphisme d'espaces vectoriels.
4. Définition de la dimension d'un espace vectoriel.
5. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Définir ce qu'est une famille génératrice de  $E$ . Que peut-on dire de son cardinal ?
6. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Définir ce qu'est une famille libre de  $E$ . Que peut-on dire de son cardinal ?
7. Théorème du rang.

### Réduction

1. Définition d'un endomorphisme diagonalisable.
2. Définition d'une matrice diagonalisable.
3. Matrices semblables : définition et propriétés.
4. Donner la définition d'une valeur propre pour un endomorphisme.
5. Rappeler la définition d'un vecteur propre d'un endomorphisme. Énoncer la propriété relative à une famille de vecteurs propres d'un endomorphisme associés à des valeurs propres distinctes.
6. Définition d'un polynôme annulateur d'une matrice. Lien avec les valeurs propres ?
7. Condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.
8. Énoncer deux conditions suffisantes de diagonalisabilité d'une matrice.