

HEC 2015

Sujet E 67

Exercice avec préparation 1

1. Question de cours : Condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^n .

Soit v un vecteur de \mathbb{R}^n de coordonnées v_1, v_2, \dots, v_n dans la base \mathcal{B} telles que $\sum_{i=1}^n v_i = 2$.

On considère l'application f définie sur \mathbb{R}^n qui, à tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, associe

$$f(x) = x - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot v.$$

2. a) Montrer que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^n .
 b) Déterminer $f \circ f$. L'endomorphisme f est-il bijectif?
 c) Quelles sont les valeurs propres possibles de f ?
3. a) Déterminer les valeurs propres de f .
 b) Quels sont les sous-espaces propres de f ? L'endomorphisme f est-il diagonalisable?
4. a) Écrire la matrice M de f dans la base \mathcal{B} .

b) Montrer que les matrices $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_1 & \cdots & v_1 \\ v_2 & v_2 & \cdots & v_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_n & v_n & \cdots & v_n \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice sans préparation 1

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f strictement positive sur \mathbb{R} et possédant une espérance.

Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, on note h_α la fonction définie sur \mathbb{R} par : $h_\alpha(t) = |t| + (2\alpha - 1)t$.

Pour tout $q \in \mathbb{R}$, on pose : $L(q) = E(h_\alpha(X - q))$.

1. Établir l'existence d'un unique réel q_α en lequel la fonction L est minimale.
2. On suppose que $\alpha = \frac{1}{2}$ et que X suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Calculer $q_{\frac{1}{2}}$.

Sujet E 68

Exercice avec préparation 2

Dans cet exercice, toutes les variables sont définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

1. Question de cours : Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.
2. Soit X une variable aléatoire strictement positive suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On pose : $Z = -\ln(X)$ et on note F_Z la fonction de répartition de Z .
- a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $F_Z(x) = e^{-e^{-x}}$.
- b) Montrer que Z admet une densité de probabilité continue f_Z qui atteint sa valeur maximale en un unique point x_0 .
- c) Tracer l'allure de la courbe représentative de F_Z dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
- d) Que représente le point d'abscisse x_0 et d'ordonnée $F_Z(x_0)$ pour cette courbe?

3. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ indépendantes et de même loi que X .
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $Z_n = Y_n - \ln(n)$.
- Déterminer les fonctions de répartition F_{Y_n} et F_{Z_n} de Y_n et Z_n respectivement.
 - Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire Z .
 - Établir pour tout réel $c > 0$, l'inégalité : $\mathbb{E}(Y_n) \geq c\mathbb{P}(Y_n \geq c)$.
 - En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Y_n)$.

Exercice sans préparation 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A . La matrice A est-elle diagonalisable ? inversible ?
- On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'existence d'une matrice N telle que $A = I + N$. Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice A^k .
- On rappelle l'identité remarquable : $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$. Déterminer A^{-1} .

Sujet E 69

Exercice avec préparation 3

- Question de cours : Définition de la dimension d'un espace vectoriel.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note E_n le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à $n - 1$ et F_n le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par $X, X^2, \dots, X^{n-1}, X^n$.
- Montrer que les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x + 1) = P(x)$, sont les polynômes constants.
- Préciser les dimensions respectives de E_n et F_n .
- Pour tout $P \in F_n$, on note Q le polynôme tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = P(x + 1) - P(x)$.
 - Vérifier que $Q \in E_n$. Quelle relation existe-t-il entre les degrés de P et de Q ?
 - Soit Δ l'application de F_n sur E_n qui à tout $P \in F_n$ associe $Q = \Delta(P)$, où $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = P(x + 1) - P(x)$.
Montrer que l'application Δ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
 - Déterminer un polynôme P vérifiant $\Delta(P) = X^3$. En déduire la valeur des sommes $\sum_{k=1}^n k^3$ et $\sum_{k=0}^{n-1} (2k + 1)^3$.

Exercice sans préparation 3

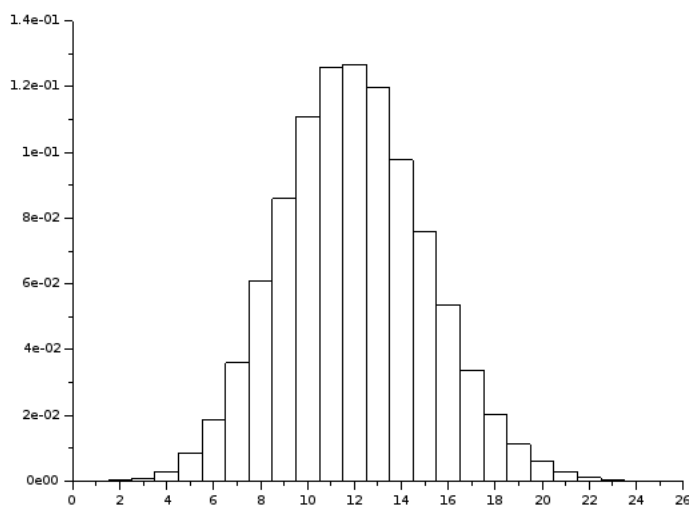
Après une alerte incendie, les 60 élèves d'une école se répartissent au hasard dans 5 salles de classe. Afin de savoir comment se répartissent les élèves on exécute le programme **Scilab** suivant :

```

1  Y = grand(100000, 1, 'bin', 60, 1/5)
2  hisplot(0.5:25,Y)

```

qui donne la représentation ci-dessous :



Que représente la valeur maximale prise par cet histogramme ? Prouver un résultat concernant cette valeur.

Sujet E 70

Exercice avec préparation 4

1. Question de cours : Soit I un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction continue sur I .

Propriétés de l'application $x \in I \mapsto \int_a^x f(t) dt$.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur \mathbb{R} à valeurs réelles.

Pour tout fonction $f \in E$, on note $T(f)$ l'application définie sur \mathbb{R} à valeurs réelles, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt.$$

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, soit f_a la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f_a(x) = e^{ax}$. Déterminer $T(f_a)$.

3. a) Montrer que pour toute fonction $f \in E$, l'application $T(f)$ appartient à E et est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Déterminer la fonction dérivée de la fonction $T(f)$.

b) On suppose que f est une fonction bornée de E . Montrer que $T(f)$ est bornée et établir l'existence d'un réel K tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|T(f)(x) - T(f)(y)| \leq K|x - y|$.

4. Soit T l'application de E dans E qui à $f \in E$, associe $T(f)$.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E . Est-il surjectif ?

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n . Montrer que $T(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

c) Soit T_n la restriction à $\mathbb{R}_n[X]$ de l'endomorphisme T et $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. L'endomorphisme T_n est-il diagonalisable ? T_n est-il bijectif ?

Exercice sans préparation 4

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , de même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $W_n = \sum_{k=1}^n kX_k$.

1. Calculer $\mathbb{E}(W_n)$ et $\mathbb{V}(W_n)$.
2. Les variables W_n et W_{n+1} sont-elles indépendantes ?

Sujet E 71

Exercice avec préparation 5

1. Question de cours : Définition d'un isomorphisme d'espaces vectoriels.
 Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 1. Si $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_p[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p .
 On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}_p[X]$, alors $P(A)$ désigne la matrice $a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_p A^p$.
2. Soit A et Q deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 On suppose que la matrice Q est inversible, d'inverse notée Q^{-1} .
 Soit P un polynôme à coefficients réels. Expliciter $P(Q^{-1}AQ)$ en fonction de $P(A)$, Q et Q^{-1} .
3. a) Soit x_1, x_2, \dots, x_n des réels deux à deux distincts et soit φ l'application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans \mathbb{R}^n qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, associe le n -uplet $(P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n))$. Montrer que l'application φ est bijective.
 b) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ n réels distincts non nuls et $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $t_{i,i} = \lambda_i$.
 Établir l'existence d'un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $\lambda_i \times P(\lambda_i) = 1$.
 Que vaut $T \times P(T)$? Conclure.
4. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ soit égale à $P(A)$.

Exercice sans préparation 5

Soit X_1, X_2, \dots, X_n n variables aléatoires telles que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_k suit la loi de Bernoulli de paramètre p_k avec $0 < p_k < 1$.

On pose : $Y = \sum_{k=1}^n X_k$. Montrer que $\mathbb{V}(Y) \leq \frac{n^2}{4}$.

Sujet E 73

Exercice avec préparation 6

1. Question de cours : Formule des probabilités totales.
 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
 On considère n urnes numérotées de 1 à n et N un entier naturel multiple de 2^n .
 Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la k -ième urne contient N boules dont $\frac{N}{2^k}$ boules blanches, les autres étant noires.
 On tire dans l'urne 1 une boule au l'on place dans l'urne 2, puis on tire dans l'urne 2 une boule que l'on place dans l'urne 3 et ainsi de suite jusqu'à tirer dans l'urne $n-1$ une boule que l'on place dans l'urne n , puis on tire une boule dans l'urne n .
 L'expérience est modélisée par un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .
2. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit p_k la probabilité que la boule tirée dans l'urne k soit blanche.
 Trouver une relation de récurrence entre p_{k+1} et p_k ($1 \leq k \leq n-1$).

3. a) Calculer p_n en fonction de n et N .
 b) Pour n fixé, calculer $\lim_{N \rightarrow +\infty} p_n$. Interpréter cette limite.
4. Soit $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Calculer la probabilité conditionnelle que la n -ième boule tirée soit blanche sachant que la boule tirée dans l'urne i est blanche.

Exercice sans préparation 6

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k}{n} \right)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.
 2. Quelle est la nature de la suite $(n!)^{\frac{1}{n}}$?

Sujet E 76

Exercice avec préparation 7

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Dans cet exercice, les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , à valeurs dans \mathbb{R}_+ et admettent une densité.

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$. On note respectivement F et f , la fonction de répartition et une densité de X .

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X .

2. Pour $x \geq 0$:

a) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_x^{+\infty} t f(t) dt$.

b) Établir les inégalités : $\int_x^{+\infty} t f(t) dt \geq x(1 - F(x)) \geq 0$.

c) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F(t)) dt$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Z_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, G_n la fonction de répartition de Z_n et g_n une densité de Z_n .

a) Exprimer pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_n(t)$ en fonction de $F(t)$.

b) Établir l'existence de $\mathbb{E}(Z_n)$.

c) Pour $n \geq 2$, montrer que : $\mathbb{E}(Z_n) - \mathbb{E}(Z_{n-1}) = \int_0^{+\infty} (F(t))^{n-1} (1 - F(t)) dt$.

d) Soit $m > 0$. On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre m (d'espérance $\frac{1}{m}$).
 Calculer $\mathbb{E}(Z_n)$.

Donner un équivalent de $\mathbb{E}(Z_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice sans préparation 7

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et X une matrice colonne non nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On pose : $A = X^t X$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
 2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A .

Sujet E 77

Exercice avec préparation 8

1. Question de cours : Donner des critères de convergence des séries à termes positifs.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \ln \left(\frac{e}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right)$.

On note (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

2. Dresser le tableau de variation de f .

3. a) Montrer que la courbe (Γ) d'équation $y = \ln \left(\frac{e}{2} x \right)$ est asymptote à (\mathcal{C}) .

b) Tracer (\mathcal{C}) et (Γ) dans le même repère.

4. Établir pour tout réel $x \geq 1$, l'encadrement : $0 \leq f'(x) < 1$.

En déduire que le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \geq 1$ ainsi que la position de (\mathcal{C}) par rapport à la droite (\mathcal{D}) d'équation $y = x$.

5. Soit le programme **Scilab** suivant :

```

1  function y=f(x)
2      y = log(%e * (x + x ^ (-1))/2)
3  endfunction
4
5  x = [0.01:0.1:5] ;
6  plot2d(x, f(x), rect=[0,0,5,5])
7
8  x = [0,5]
9  plot2d(x,x)
10
11 u = input('u0=')
12 x = [u] ; y = [0]
13 for k=1:10
14     z = f(u)
15     x = [x,u]
16     x = [x,z]
17     y = [y,z,z]
18     u = z
19 end
20 plot2d(x,y)

```

Expliquer ce que fait ce programme et ce qu'il illustre.

Dans `plot2d, rect[0,0,5,5]` signifie que seule la partie de la courbe contenue dans le rectangle $\{(x, y) / 0 \leq x \leq 5 \text{ et } 0 \leq y \leq 5\}$ sera tracée.

6. Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in [1, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

7. a) Justifier l'existence d'un réel $a > 1$ tel que $x \in [1, a] \Rightarrow f'(x) \leq \frac{1}{2}$.

b) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 1$. Quelle est la nature de la série de terme général v_n ?

Exercice sans préparation 8

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que pour tout $n \geq 1$, X_n admet une densité f_n continue sur \mathbb{R} , nulle sur \mathbb{R}_- et sur $[\frac{2}{n}, +\infty[$, affine sur $[0, \frac{1}{n}]$ et sur $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$.

1. Déterminer une densité f_n de X_n .
2. Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Sujet E 79

Exercice avec préparation 9

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Soit a un paramètre réel et F la fonction définie sur \mathbb{R} , à valeurs réelles, telle que :

$$F(x) = \begin{cases} 1 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) & \text{si } x \geq a \\ 0 & \text{si } x < a \end{cases}$$

2. a) Montrer que F est continue sur \mathbb{R} si et seulement si $a = \frac{1}{e-1}$.
 b) Étudier les variations de F et tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
3. a) Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité.
 b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?
4. Soit Y la variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} définie par $Y = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X). On pose : $Z = X - Y$.
 a) Calculer $\mathbb{P}(Y = 0)$ et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{P}(Y = n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)$.
 b) Déterminer la fonction de répartition et une densité de Z .
 c) Établir l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(Z)$ de Z . Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

Exercice sans préparation 9

Soit a, b et c des réels non nuls vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. On pose : $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. a) Calculer la matrice $M = U^t U$ (où ${}^t U$ est la matrice transposée de la matrice colonne U).
 b) M est-elle diagonalisable ? inversible ?
2. a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer M^n .
 b) Quelles sont les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.