ECE2
Mathématiques

Colles - Semaine 15

Exercice 1. *ESC 2005*
On considère la fonction de deux variables f définie sur l'ouvert
$U =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par :

$$f(x, y) = x^2 \ln(y) - y \ln(x)$$

1. On note g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(t) = 4t^2 - 2t \ln t - 1$.

a) Montrer que g est $\mathcal{C}^2$ sur son domaine de définition et calculer $g'(t)$ et $g''(t)$ pour $t > 0$.

b) Étudier les variations de g' sur $]0; +\infty[$, puis celle de g sur $]0; +\infty[$.
(On précisera à chaque fois les limites aux bornes)

c) En déduire qu'il existe un unique élément strictment positif α tel que $g(\alpha) = 0$.

d) Vérifier : $\ln(\alpha) = 2\alpha - \dfrac{1}{2\alpha}$.

2. ***a)*** Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

c) En déduire que si (x_0, y_0) est un point critique de f , alors $x_0 > 1$ et $y_0 = \dfrac{(x_0)^2}{\ln(x_0)}$.

d) Établir alors que $g(\ln(x_0)) = 0$.
En déduire que f possède un unique point critique noté M , de coordonnées $\left(e^{\alpha}, \dfrac{e^{2\alpha}}{\alpha}\right)$ où α est le réel défini en ***1.c)***.

3. ***a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

b) En utilisant la relation de la question ***1.d)***, montrer : $2 \ln(y_0) + \dfrac{y_0}{(x_0)^2} = \dfrac{2}{\alpha}$.
En déduire que la fonction f ne présente pas d'extremum.

Exercice 2. *ESCP 2002*
Soit a un paramètre réel et F_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F_a(x, y) = \begin{pmatrix} x & y & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ a \end{pmatrix}$$

1. Déterminer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'expression de $F_a(x, y)$ en fonction de x, y et a.

2. Vérifier que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$.

3. Montrer qu'il existe un unique point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, que l'on précisera, en lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de F_a sont nulles. Calculer $F_a(x_0, y_0)$.

4. Calculer, pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$, le nombre :

$$G_a(x, y) = F_a(x, y) + \frac{1}{3}(3x - y - a)^2 + 2a^2,$$

et préciser son signe.

5. En déduire que la fonction F_a admet un unique extremum sur $\mathbb{R}^2$. Préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum global et donner sa valeur notée $M(a)$.

6. Montrer que la fonction M qui, à tout réel a associe le nombre $M(a)$, admet un unique extremum que l'on précisera. Que peut-on en conclure ?

Exercice 3. *INSEEC 2002*
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ g(x,y,z) = 4x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 4xz - 4yz$$

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = g(x,y,y^2)$.
On dit alors qu'on étudie la fonction g **sous la contrainte** $z = y^2$.

1. Expliciter $f(x,y)$, et calculer $\partial_1(f)(x,y)$, $\partial_2(f)(x,y)$, $\partial^2_{1,1}(f)(x,y)$, $\partial^2_{1,2}(f)(x,y)$ et $\partial^2_{2,2}(f)(x,y)$.

2. Déterminer les extrema éventuels de f sur $\mathbb{R}^2$.

3. Montrer, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$g(x,y,z) = 4\left(x + \frac{1}{2}z\right)^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}z\right)^2$$

En déduire que f admet un minimum global en $(0,0)$.

4. Montrer que f présente un minimum local en $(-2,2)$.

5. Déterminer le développement limité d'ordre 2 de f en $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$. En déduire le développement limité d'ordre 2 de $f\left(-\frac{1}{2} + h, 1 + h\right)$ et de $f\left(-\frac{1}{2} + h, 1 - h\right)$, lorsque h est au voisinage de 0. En déduire que f ne présente pas d'extremum local en $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

Exercice 4. *HEC 2017*
Soit f la fonction de deux variables définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f : (x,y) \mapsto x^3 + y^3 - 9xy + 1$$

1. *a)* Donner le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de $(0,0)$.

b) En déduire que $(0,0)$ est un point col de f.

2. *a)* Montrer que f admet un extremum local.

b) Cet extremum est-il global ?