ECE2
Mathématiques

Colles - Semaine 3

Exercice 1

1. Déterminer que la fonction $F\ :\ x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction $f\ :\ x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$.

2. Démontrer que : $\forall k \geqslant 2,\ \displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln(t)\ dt \leqslant \ln(k) \leqslant \int_{k}^{k+1} \ln(t)\ dt.$

3. En déduire que : $\forall n \geqslant 2,\ n\ln(n) - n \leqslant \ln(n!) \leqslant (n+1)\ln(n+1) - (n+1) + 1.$

4. En déduire un équivalent simple de $\ln(n!)$.

5. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n!)}{n^3}$ est-elle convergente ?

Exercice 2

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et (u_n) une suite de réels positifs.
On définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \ln(1 + u_n^k)$.

1. Montrer que si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum v_n$ converge.

2. On se propose d'étudier la réciproque de l'implication précédente.

a) On suppose que $k = 1$. Montrer que si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.

b) On suppose que $k > 1$. Donner un exemple de suite (u_n) telle que la série $\sum v_n$ converge et la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2 \end{cases}$.

1. *a)* Montrer que la suite (u_n) est croissante.

b) Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

2. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.

1. Montrer que pour tout $t > 0$, $\ln(1+t) \leqslant t$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1} u_n}$.

3. Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ est convergente.

4. En déduire que la suite (v_n) converge. On note ℓ sa limite.

3. *a)* Montrer, à l'aide de la question *2.b)*, que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_{n+p+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n u_n}.$$

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant \ell - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^n u_n}$.

c) En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{2^n \ell}$.