ECE2
Mathématiques

Colles - Semaine 5

Exercice 1
On considère deux pièces de monnaies notées A_1 et A_2. Lorsqu'on lance la pièce A_1, la probabilité d'obtenir « face » est p_1 (avec $0 < p_1 < 1$), celle d'obtenir « pile » est $q_1 = 1 - p_1$. De même, lorsqu'on lance la pièce A_2, la probabilité d'obtenir « face » est p_2 (avec $0 < p_2 < 1$), celle d'obtenir « pile » est $q_2 = 1 - p_2$.
On effectue une suite de parties de la façon suivante : à la première partie, on choisit une pièce au hasard (avec probabilité $\frac{1}{2}$) et on joue avec cette pièce ; si le résultat est « face », on joue la deuxième partie avec A_1, si le résultat est « pile », on joue la deuxième partie avec A_2 ; ensuite, pour tout entier $n \geqslant 1$, on joue la $(n+1)^{\text{ième}}$ partie avec A_1 si l'on a obtenu « face » à la $n^{\text{ième}}$ partie, on joue la $(n+1)^{\text{ième}}$ partie avec A_2 si on a obtenu « pile » à la $n^{\text{ième}}$ partie.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n la probabilité d'avoir « face » à la $n^{\text{ième}}$ partie.

1. Exprimer u_1, puis u_2 en fonction de p_1 et p_2.

2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = (p_1 - p_2)u_n + p_2$.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend, quand n tend vers l'infini, vers une limite u que l'on calculera. Dans quels cas a-t-on $u = \frac{1}{2}$?

Exercice 2

1. Considérons n personnes, quelle est la probabilité notée $p(n)$ d'avoir au moins deux personnes nées le même jour de l'année ? Pour simplifier, toutes les années sont non- bissextiles.

2. En utilisant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$, montrer que

$$p(n) \geqslant 1 - \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2 \times 365}\right)$$

3. En déduire le nombre de personnes nécessaires pour avoir une chance sur deux que deux personnes aient leurs anniversaires le même jour.

Exercice 3
On lance successivement une pièce truquée dont la probabilité de faire face est de $p \in]0,1[$. Pour $n \geqslant 1$, notons F_n : « Obtenir Face au n-ième lancer », et P_n : « Obtenir Pile au n-ième lancer ».
On note T_n : « le premier Pile est obtenu au n-ième lancer ».

1. Pour $n \geqslant 1$, exprimer l'événement T_n en fonction des F_i et P_i.

2. Donner $\mathbb{P}(T_n)$ en fonction de p et n.

3. On lance la pièce une infinité de fois. Écrire les événements suivants :
A_n : « obtenir au moins un pile au cours des n premiers lancers », A : « obtenir au moins un pile ».

4. Parmi les suites (F_n), (P_n), (T_n) et (A_n), lesquelles sont croissantes ? décroissantes ?

5. Parmi les suites (F_n), (P_n), (T_n) et (A_n), lesquelles sont constituées d'événements mutuellement indépendants ?

6. Donner la probabilité $\mathbb{P}(A)$. Que peut-on dire de l'événement A ?

Exercice 4

N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Un joueur lance une pièce équilibrée indéfiniment. On note X_N la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de fois où, au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs ont été différents. On peut appeler X_N le « nombre de changements » au cours de N premiers lancers.
Par exemple, si les $N = 9$ premiers lancers ont donné successivement :
Pile, Pile, Face, Pile, Face, Face, Face, Pile, Pile, alors la variable X_9 aura pris la valeur 4 (quatre changements aux $3^{\text{ème}}$, $4^{\text{ème}}$, $5^{\text{ème}}$ et $8^{\text{ème}}$ lancers).

1. Justifier que $X_N(\Omega) = [\![0, N-1]\!]$.

2. Déterminer la loi de X_2, ainsi que son espérance. Déterminer la loi de X_3.

3. Montrer que $\mathbb{P}([X_N = 0]) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{N-1}$ et $\mathbb{P}([X_N = 1]) = 2(N-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{N}$

4. ***a)*** Justifier que pour tout entier $k \in [\![0, N-1]\!]$, $\mathbb{P}_{[X_N=k]}([X_{N+1} = k]) = \dfrac{1}{2}$.

b) En déduire que pour tout entier $k \in [\![0, N-1]\!]$, $\mathbb{P}\left([X_{N+1} - X_N = 0] \cap [X_N = k]\right) = \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_N = k])$.

c) En sommant cette relation pour k variant de 0 à $N-1$, montrer que $\mathbb{P}\left([X_{N+1} - X_N = 0]\right) = \dfrac{1}{2}$.

d) Montrer que la variable $X_{N+1} - X_N$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
En déduire la relation $\mathbb{E}(X_{N+1}) = \dfrac{1}{2} + \mathbb{E}(X_N)$, puis donner $\mathbb{E}(X_N)$ en fonction de N.

5. ***a)*** Montrer grâce aux résultats ***4.b)*** et ***4.c)*** que les variables $X_{N+1} - X_N$ et X_N sont indépendantes.

b) En déduire par récurrence sur N que X_N suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(N-1, \dfrac{1}{2}\right)$ En déduire la variance $\mathbb{V}(X_N)$.