ORAUX HEC 2012

I. Annales 2012

Exercice 1 *(Exercice avec préparation)*

1. La série de terme général (u_n) converge si la suite (S_n) des sommes partielles : $S_n = \sum\limits_{k=1} nu_k$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.
La série de terme général $(\ln x)^n$ est géométrique donc converge si et seulement si $|\ln x| < 1 \Leftrightarrow -1 < \ln x < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e} < x < e$ par stricte croissance de la fonction exponentielle. On a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\ln x)^n = \frac{1}{1 - \ln x}$$

2. ***a)*** f_n est de classe $\mathcal{C}2$ sur $]0, +\infty[$ comme somme de produits de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}2$ sur $]0, +\infty[$.
$\forall x > 0,\ f_n{}'(x) = \frac{n}{x}(\ln x)^{n-1} - 1$.
Ainsi, si $n = 1$, $f_1{}'(x) = \frac{1}{x} - 1$ donc $f_1{}''(x) = -\frac{1}{x^2}$;
si $n \geqslant 2$, $f_n{}''(x) = -\frac{1}{x^2}n(\ln x)^{n-1} + \frac{1}{x^2}n(n-1)(\ln x)^{n-2} = \frac{n}{x^2}(\ln x)^{n-2}[-\ln x + n - 1]$.

b)

x	0		1		$+\infty$
signe de $f_1{}''(x)$	$\|\|$	$-$		$-$	
variations de $f_1{}'$	$\|\|$	$\searrow$	0	$\searrow$	
signe de $f_1{}'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f_1	$\|\|$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	

c) $\lim\limits_{x\to 0} f_2 = -\infty$ et $f_2(1) = -1$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (f_2 est continue) il existe $a \in\ ]0, 1[$ tel que $f_2(a) = 0$.

3. ***a)*** $\frac{n}{x^2}(\ln x)^{n-2}$ est strictement positif sur $]1, +\infty[$ donc $f_n{}''(x)$ est du signe de $-\ln x + n - 1$.
$-\ln(x) + n - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln x \leqslant n - 1 \leftrightarrow x \leqslant e^{n-1}$ par croissance de exp.

x	1		α_n		e^{n-1}		β_n		$+\infty$
signe de $f_n{}''(x)$			$+$		0		$-$		
variations de $f_n{}'$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	> 0	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

On a ${f_n}'(e^{n-1}) > 0$, en effet : ${f_n}'(e^{n-1}) = n\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} - 1$ avec : si $n \geqslant 4$, $n-1 \geqslant e$ donc $\frac{n-1}{e} > 1$ donc $n\frac{n-1}{e} > 1$ d'où ${f_n}'(e^{n-1}) > 0$ et si $n = 3$, ${f_3}'(e^2) = 3\frac{2^2}{e^2} - 1 = \frac{12}{e^2} - 1 > 0$.
On cherche maintenant à étudier le signe de f_n' :
${f_n}'$ est continue et strictement croissante sur $]1, e^{n-1}]$ donc définit une bijection de $]1, e^{n-1}]$ dans $]-1, f_n(e^{n-1})]$ qui contient 0 donc il existe un unique $\alpha_n \in\,]1, e^{n-1}[$ tel que ${f_n}'(\alpha_n) = 0$.
De même, il existe un unique β_n sur $]e^{n-1}, +\infty[$ tel que ${f_n}'(\beta_n) = 0$.

x	1		α_n		u_n	e^{n-1}	β_n		v_n		$+\infty$
signe de ${f_n}'(x)$		$-$	0	$+$			0	$-$			
variations de f_n	-1		< -1		0		> 0		0		$-\infty$

En effet, $f_n(\beta_n) > f_n(e^{n-1})$ avec $f_n(e^{n-1}) = (n-1)^n - e^{n-1} > (n-1)^{n-1} - e^{n-1} > 0$ si $n \geqslant 4$ car $n-1 > e$ et la fonction puissance est strictement croissante sur R_+. Et on vérifie que $f_3(e^2) > 0$.

f_n est décroissante donc majorée par -1 sur $]1, \alpha_n]$ donc ne s'annule pas sur cet intervalle.
Par deux théorèmes de la bijection sur $[\ \alpha_n, \beta_n]$ et $]\beta_n, +\infty[$ on démontre l'existence de deux racines u_n et v_n sur $]1, +\infty[$.

b) $v_n > \beta_n > e^{n-1}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{n-1} = +\infty$ donc par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

4. Cette question est une vraie question de recherche. Il faut utiliser les méthodes habituelles d'étude des suites implicites :
• **On étudie les variations de la suite u_n en comparant $f_n(u_n)$ et $f_n(u_{n+1})$:**
$f_n(u_{n+1}) = (\ln u_{n+1})^n - u_{n+1}$ or $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ donc $u_{n+1} = (\ln u_{n+1})^{n+1}$ d'où :
$f_n(u_{n+1}) = (\ln u_{n+1})^n - (\ln u_{n+1})^{n+1} = (\ln u_{n+1})^n[1 - \ln(u_{n+1})]$. Avec $u_{n+1} \geqslant 1$ donc $\ln(u_{n+1}) \geqslant 0$.
Etudions le signe de $1 - \ln u_{n+1}$: pour cela, comparons u_{n+1} et e :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(e) = (\ln e)^n - e = 1 - e < 0$ donc d'après le tableau de variations de f_n, $e \in\,]1, u_n[$ ou $e \in\,]v_n, +\infty[$ or $v_n > e^{n-1} > e$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ e < u_n$.
Ainsi, $e < u_{n+1}$ donc $1 - \ln u_{n+1} < 0$
Donc $f_n(u_{n+1}) < 0 = f_n(u_n)$, ainsi $u_{n+1} \in\,]-\infty, u_n[$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$$

• **On conclut que la suite (u_n) converge vers un certain réel l :**
(u_n) est décroissante et minorée par 1 donc converge vers un réel $l \geqslant 1$
• **On trouve l en passant à la limite dans la relation $f_n(u_n) = 0$:**
$u_n = (\ln u_n)^n$: $u_n\frac{1}{n} = \ln u_n$ donc $e^{\frac{1}{n}\ln u_n} = \ln u_n$.
avec $\ln u_n \to \ln l$ donc $\frac{1}{n}\ln u_n \to 0$ donc $e^{\frac{1}{n}\ln u_n} \to 1$
En passant à la limite on obtient donc $1 = \ln l$ c-a-d $l = e$.

Exercice sans préparation

1. a) $cov(Y_k, Y_{k+1}) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{V}(Y_k + Y_{k+1}) - \mathbb{V}(Y_k) - \mathbb{V}(Y_{k+1})\right)$.
Or $\mathbb{V}(Y_k + Y_{k+1}) = \mathbb{V}(X_k + 2X_{k+1} + X_{k+2}) = \mathbb{V}(X_k) + 4\mathbb{V}(X_{k+1}) + \mathbb{V}(X_{k+2})$ par indépendance des X_k ;

$\mathbb{V}(Y_k + Y_{k+1}) = 6\mathbb{V}(X_1)$. et, de même, $\mathbb{V}(Y_k) = 2\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(Y_{k+1})$ d'où : $cov(Y_k, Y_{k+1}) = \mathbb{V}(X_1) = pq$.

b) On étudie $p \to p(1-p)$ sur $]0,1[$.

2. si $l \geqslant k+2$ alors Y_k et Y_l sont fonctions de variables X_n distinctes : c'est variables étant indépendantes, Y_k et Y_l sont indépendantes donc $cov(Y_k, Y_l) = 0$ si $l = k+1$ alors $cov(Y_k, Y_l) = pq$ d'après 1.a).

3. On note $Y = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1} nY_k$ alors d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $P\left([|Y - \mathbb{E}(Y)| > \varepsilon]\right)([Y])\,| > \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(Y)}{\varepsilon^2}$ c-a-d $\mathcal{P}\left(\left[\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1} nY_k - 2p\right| > \varepsilon\right]\right) \leqslant V\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1} nY_k\right)/\varepsilon^2$.
Avec $\mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1} nY_k\right) = \frac{1}{n^2}V\left(\sum\limits_{k=1} nY_k\right) = \frac{1}{n^2}[\sum\limits_{k=1} n\mathbb{V}(Y_k) + 2\sum\limits_{k=1} n \sum\limits_{l=k+1} ncov(Y_k, Y_l)] = \frac{1}{n^2}[\sum\limits_{k=1} n\mathbb{V}(Y_k) + 2\sum\limits_{k=1} n - 1cov(Y_k, Y_{k+1})] = \frac{4n-2}{n^2}\mathbb{V}(X_1) \to 0$.

Exercice 2 *(Exercice avec préparation)*

1. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements (c-a-d deux à deux incompatibles et dont la réunion fait l'univers) **de probabilités non nulles**, alors pour tout évènement B :

$$\mathbb{P}([B]) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i\in I} P_{A_i}(B)\mathbb{P}([A_i])$$

2. ***a)*** $I_{n,0} = \displaystyle\int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1}$.

b) On pose u et v les fonctions définies sur $[0,1]$ par $u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et $v(x) = (1-x)^{p+1}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}1$ sur $[0,1]$ de dérivées, $u'(x) = x^n$ et $v'(x) = -(p+1)(1-x)^p$
Par intégration par parties, on obtient :

$$\int_0^1 x^n(1-x)^{p+1}\, dx = [\frac{x^{n+1}}{n+1}(1-x)^{p+1}]_0 1 + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}(p+1)(1-x)^p\, dx$$

soit :

$$I_{n,p+1} = \frac{p+1}{n+1} I_{n+1,p}$$

c) On connait $I_{n,0}$, on part donc de $I_{n,p}$ et on se ramène par récurrence à un $I_{m,0}$:
On démontrer par récurrence que $I_{n,p} = \frac{p!n!}{(n+p)!} I_{n+p,0} = \frac{p!n!}{(n+p+1)!}$.

3. On note U_k l'évènement "choisir l'urne U_k". Il existe λ tel que pour tout $k \in [\![1,N]\!]$, $\mathbb{P}([U_k]) = \lambda k$ (probabilité proportionnelle au nombre de boules rouges.
Or $\sum\limits_{k=1} N\mathbb{P}([U_k]) = 1$ (les $(U_k)_{1\leqslant k\leqslant N}$ forment un s.c.e) donc $\lambda \sum\limits_{k=1} Nk = 1$, $\lambda = \frac{2}{N(N+1)}$.

$$\boxed{\forall k \in [\![,1,N]\!],\ \mathbb{P}([U_k]) = \frac{2k}{N(N+1)}}$$

4. ***a)*** La probabilité d'obtenir une boule rouge dépend de l'urne choisie, on décompose donc sur le système complet d'évènements $(U_k)_{1\leqslant k\leqslant N}$:

$$\mathbb{P}\left([E_n]\right) = \sum_{k=1} N\mathbb{P}\left([U_k]\right) P_{U_k}(E_n)$$

Sachant que l'on tire dans l'urne U_k, Les tirages étant indépendants, le nombre de boules rouges obtenues au cours de 2n tirages suit une loi binomiale de paramètres 2n et $p = \frac{k}{N}$ donc $P_{U_k}(E_n) = \binom{2n}{n}\left(\frac{k}{N}\frac{N-k}{N}\right)^n$. Ainsi,

$$\mathbb{P}\left([E_n]\right) = \sum_{k=1} N\frac{2k}{N(N+1)}\binom{2n}{n}\frac{k^n(N-k)^n}{N^{2n}}$$

b) $P_{E_n}(R_{2n+1}) = \frac{\mathbb{P}(E_n \cap R_{2n+1})}{\mathbb{P}([E_n])}$ avec
$\mathbb{P}(E_n \cap R_{2n+1}) = \sum\limits_{k=1} N\mathbb{P}\left([U_k]\right) P_{U_k}(E_n \cap R_{2n+1}) = \sum\limits_{k=1} N\mathbb{P}\left([U_k]\right) P_{U_k}(E_n)P_{U_k}(R_{2n+1}) = \sum\limits_{k=1} N\frac{2k}{N(N+1)}\binom{2n}{n}\left(\frac{k}{N}\right.$
Ainsi,

$$\mathbb{P}(E_n \cap R_{2n+1}) = \frac{\sum\limits_{k=1} N\left(\frac{k}{N}\right)^{n+2}\left(1-\frac{k}{N}\right)^n}{\sum\limits_{k=1} N\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}\left(1-\frac{k}{N}\right)^n}$$

$$\mathbb{P}(E_n \cap R_{2n+1}) = \frac{\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1} N\left(\frac{k}{N}\right)^{n+2}\left(1-\frac{k}{N}\right)^n}{\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1} N\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}\left(1-\frac{k}{N}\right)^n}$$

On reconnait les sommes de Riemann des fonctions $x \mapsto x^{n+2}(1-x)^n$ et $x \mapsto x^{n+1}(1-x)^n$ continues sur $[0,1]$ donc :

- $\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1} N\left(\frac{k}{N}\right)^{n+2}\left(1-\frac{k}{N}\right)^n \to \displaystyle\int_0^1 x^{n+2}(1-x)^{n?}\,dx$
- $\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1} N\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}\left(1-\frac{k}{N}\right)^n \to \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{n?}\,dx$

$\mathbb{P}(E_n \cap R_{2n+1}) \to \frac{I_{n+2,n}}{I_{n+1,n}} = \frac{n!(n+2)!}{(2n+3)!}\frac{(2n+2)!}{n!(n+1)!} = \frac{n+2}{2n+3}$.

5.

Exercice sans préparation

1. On donne la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$: $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$

2. on prend des matrices inversibles (colonnes non colinéaires) les plus simples possibles en faisant attention qu'elles forment une famille libre : $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right)$

3. On prend une base des matrices symétriques : $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$. On la complète en une base en prenant une matrice triangulaire à deux valeurs propres distinctes, exemple : $\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$.

Exercice 3 *(Exercice avec préparation)*

1. Un estimateur T de θ admettant une espérance est dit sans biais si $\mathbb{E}(T)=\theta$.
Si T admet un moment d'ordre 2, son risque quadratique est défini par $r(T)=E((T-\theta)^2)$.

2. X est une variable bornée donc admet des moments de tous ordres
$\mathbb{E}(X)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x\ dx=\int_0^\theta 2\frac{x^2}{\theta^2}dx=\frac{2}{3}\theta.$
$\mathbb{E}(X^2)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx=\int_0^\theta 2\frac{x^3}{\theta^2}dx=\frac{1}{2}\theta^2$. Ainsi, d'après Koenig-Huygens, $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}(X))^2=\frac{1}{18}\theta^2$.

3. ***a)*** $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)=\mathbb{P}\left([[X\leqslant x]]\right)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$

- si $x<0$, $F(x)=0$
- si $0\leqslant x\leqslant\theta$, $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt=\frac{x^2}{\theta^2}.$
- si $x>\theta$, $F(x)=1$

b)

4. ***a)*** $\mathbb{E}(\overline{X_n})=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k)=\mathbb{E}(X)=\frac{2}{3}\theta$ (linéarité de l'espérance).
Soit alors $T_n=\frac{3}{2}\overline{X_n}$. Par linéarité de l'espérance, T_n est un estimateur sans biais de θ.

b) $r(T_n)=\mathbb{V}(T_n)=\frac{c^2}{n^2}\mathbb{V}(\sum\limits_{k=1} nX_k)=\frac{c^2}{n^2}\sum\limits_{k=1} n\mathbb{V}(X_k)=\frac{c^2}{n}\mathbb{V}(X)$ par indépendance des X_k.
$r(T_n)=\frac{\theta^2}{8n}$.
$r(\overline{X_n})=\mathbb{V}(\overline{X_n})+\left(b(\overline{X_n})\right)^2=\frac{(2n+1)\theta^2}{18n}$

5. ***a)*** $\forall x\in\mathbb{R}, G_n(x)=\mathbb{P}\left([[M_n\leqslant x]]\right)=P([X_1\leqslant x]\cap[X_2\leqslant x]\cap...\cap X_n\leqslant x)=\mathbb{P}\left([[X_1\leqslant x]]\right)\mathbb{P}\left([[X_2\leqslant x]]\right)...\mathbb{P}\left([[X\right.$
$\mathbb{P}\left([[X\leqslant x]]\right)^n=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \frac{x^{2n}}{\theta^{2n}} & \text{si } 0\leqslant x\leqslant\theta\\ 1 & \text{si } x>\theta\end{cases}.$
G_n est de classe $\mathcal{C}_1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en 0 et θ, on vérifie aisément qu'elle est continue en 0 et θ donc M_n est une variable à densité de densité : $g_n(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \frac{2nx^{2n-1}}{\theta^{2n}} & \text{si } 0\leqslant x\leqslant\theta\\ 0 & \text{si } x>\theta\end{cases}$

b) M_n est une variable finie donc admet des moments de tous ordres :
$\mathbb{E}(M_n)=\displaystyle\int_0^\theta 2nx^{2n}\theta^{2n}dx=\frac{2n}{2n+1}\theta$. On choisit donc $W_n=\frac{2n+1}{2n}M_n$ comme estimateur sans biais de θ

c) Comparons leur risque quadratique : calculer $r(W_n)=\mathbb{V}(W_n)=\frac{(2n+1)^2}{(2n)^2}\mathbb{V}(M_n)$ avec,
$\mathbb{E}(M_n2)=\frac{n}{n+1}\theta^2$ donc $\mathbb{V}(M_n)=\frac{n}{(n+1)(2n+1)^2}\theta^2$ d'où $r(W_n)=\frac{\theta^2}{4n(n+1)}$.
W_n est meilleur estimateur que T_n car son risque quadratique est en $\frac{1}{n^2}$ au voisinage de $+\infty$ alors que celui de T_n est en $\frac{1}{n}$ (son risque quadratique tend plus vite vers 0).

6. ***a)*** On résout l'équation $G_n(a\theta)=\frac{\alpha}{2}\Leftrightarrow a=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}$ et on résout l'équation $G_n(\theta)-G_n(b\theta)=\frac{\alpha}{2}\leftrightarrow b=\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}$

b) On isole θ dans les inégalité en renversant ces inégalités :
On a $\mathbb{P}\left([M_n\leqslant a\theta]\right)=\frac{\alpha}{2}\Leftrightarrow\mathbb{P}\left(\left[\theta\geqslant\frac{M_n}{a}\right]\right)=\frac{\alpha}{2}$.

$\mathbb{P}([b\theta \leqslant M_n]) = \mathbb{P}([b\theta \leqslant M_n \leqslant \theta]) = \frac{\alpha}{2}$ donc $\mathbb{P}\left(\left[\theta \leqslant \frac{M_n}{b}\right]\right) = \frac{\alpha}{2}$.
Ainsi, $\mathbb{P}\left(\left[\frac{M_n}{b} \leqslant \theta \leqslant \frac{M_n}{a}\right]\right) = 1-P(\left(\left[\theta \leqslant \frac{M_n}{b}\right]\right) \cup (\theta \geqslant \frac{M_n}{a})) = 1-\mathbb{P}\left(\left[\theta \leqslant \frac{M_n}{b}\right]\right) - P\left(\left[\theta \geqslant \frac{M_n}{a}\right]\right) = 1-\alpha$.

Exercice sans préparation

1. $A(A^2+A+I)=0$. Si A est inversible, on peut simplifier par A en multipliant par A^{-1} à gauche, on obtient : $A^2+A+I=0$ soit $A(-A-I)=(-A-I)A=I$ donc $A^{-1}=-A-I$.

2. Si A est symétrique alors elle est diagonalisable c'est-à-dire il existe P inversible et D diagonale tels que $A=PDP^{-1}$ où D a sur sa diagonale des valeurs propres de A.
Or X^3+X^2+X est un polynôme annulateur de A donc si λ est valeur propre de A alors $\lambda^3+\lambda^2+\lambda=0$ donc $\lambda(\lambda^2+\lambda+1)=0$ or l'équation de degré 2 n'a pas de solutions donc $\lambda=0$ donc $D=0$ d'où $A=P0P^{-1}=0$.

Exercice 4 *(Exercice avec préparation)*

1. X et Y sont indépendantes si $\forall i \in X(\Omega), \forall j \in Y(\Omega), \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \mathbb{P}([[[X=i]]])\,\mathbb{P}([[[Y=j]]])$.

2. ***a)*** faire un graphique pour représenter les différents déplacements possibles. On obtient :
$T_n(\Omega)=\{-1,0,1\}$, $\mathbb{P}([[[T_n=-1]]]) = \mathbb{P}([[[T_n=1]]]) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}([[[T_n=0]]]) = \frac{1}{2}$ (équiprobabilité des quatre déplacements) $\mathbb{E}(T_n) = -1\mathbb{P}([[[T_n=-1]]]) + 0\mathbb{P}([[[T_n=0]]]) + 1\mathbb{P}([[[T_n=1]]]) = 0$.
$\mathbb{E}(T_n2) = (-1)^2\mathbb{P}([[[T_n=-1]]]) + 1^2\mathbb{P}([[[T_n=1]]]) = \frac{1}{2}$ donc par K-H $\mathbb{V}(T_n) = \mathbb{E}(T_n2) = \frac{1}{2}$.

b) $\sum\limits_{k=1} nT_k = \sum\limits_{k=1} n(X_k - X_{k-1}) = X_n - X_0 = X_n$ (télescopage).

c) $\mathbb{E}(T_k) = -1\mathbb{P}([[[T_k=-1]]]) + 0\mathbb{P}([[[T_k=0]]]) + 1\mathbb{P}([[[T_k=1]]]) = 0$ et donc par linéarité de l'espérance $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=1} n\mathbb{E}(T_k) = 0$.

d) Commençons par calculer $\mathbb{V}(X_n)$ facile à calculer car somme de variables indépendantes donc $\mathbb{V}(X_n) = \sum\limits_{k=1} n\mathbb{V}(T_k) = \frac{n}{2}$. Et par K-H : $\mathbb{E}(x_n2) = \mathbb{V}(X_n) + \mathbb{E}(X_n)^2$ donc :

$$\mathbb{E}(X_n2) = \frac{n}{2}$$

3. ***a)*** $\mathbb{P}([X_n=n] \cap [Y_n=n]) = 0$ car à chaque déplacement, l'abscisse et l'ordonnée ne se modifient pas simultanément donc il faudrait 2n déplacements et non n déplacements pour avoir cette configuration.

b) Il faut utiliser l'inégalité $\mathbb{E}(Z_n)^2 \leqslant \mathbb{E}(Z_n2)$ vraie pour toute variable aléatoire : en effet, $\mathbb{V}(Z_n) \geqslant 0$ donc $\mathbb{E}(Z_n2) - \mathbb{E}(Z_n)^2 \geqslant 0$.
Ainsi, $\mathbb{E}(Z_n)^2 \leqslant \mathbb{E}(Z_n2)$ avec $Z_n2 = X_n2 + Y_n2$ donc par linéarité de l'espérance $\mathbb{E}(Z_n2) = \mathbb{E}(X_n2) + \mathbb{E}(Y_n2) = n$ par symétrie de X_n et Y_n.
Ainsi, $\mathbb{E}(Z_n)^2 \leqslant n$ donc $\mathbb{E}(Z_n) \leqslant \sqrt{n}$ (Z_n distance donc positive)

4. ***a)*** Soit k le nombre total de déplacements à l'est et l le nombre total de déplacements au nord. Pour revenir à l'origine la puce doit faire k déplacements à l'ouest et l déplacements au sud soit au total $2(k+l)$ déplacements (nombre pair de déplacements) ainsi, si n impair, $p_n=0$

b) D'après l'explication précédente, si la puce fait $2m$ déplacements alors la somme des déplacements à l'ouest et au nord vaut m.
Notons N le nombre de déplacements au nord, E le nombre de déplacements à l'est, O le nombre

de déplacements à l'ouest et S le nombre de déplacements au sud.
$[[N=k]]_{0\leqslant k\leqslant m}$ est un système complet d'évènements donc d'après la formule des probas totales :

$$\mathbb{P}\left([[M_n=0]]\right)=\sum_{k=0} n\mathbb{P}([M_n=0]\cap[N=k])=\sum_{k=0} n\mathbb{P}([N=k]\cap[S=k]\cap[O=m-k]\cap[E=m-k]) \text{ (d' après l}$$

Calculons $\mathbb{P}([N=k]\cap[S=k]\cap[O=m-k]\cap[E=m-k])$:
-on choisit la place des déplacements vers le nord au cours de $2m$ déplacements : on a $\binom{2m}{k}$ choix.
- ces emplacements étant choisis, on choisit la place des déplacements vers l'est parmi les places restantes : on a $\binom{2m-k}{m-k}$ choix.
- on choisit l'emplacement des déplacements vers le sud parmi les places restantes : $\binom{m}{k}$ choix.
et il ne reste plus de choix pour les déplacements vers l'est.
La probabilité de chacun de ces déplacements possibles, par indépendance des déplacements est $\frac{1}{4^{2m}}$, on a donc au final :

$$\mathbb{P}([N=k]\cap[S=k]\cap[O=m-k]\cap[E=m-k])=\binom{2m}{k}\binom{2m-k}{m-k}\binom{m}{k}\frac{1}{4^{2m}}$$

Or on montre facilement que $\binom{2m}{k}\binom{2m-k}{m-k}=\binom{2m}{m}\binom{m}{k}$ donc

$$\mathbb{P}([N=k]\cap[S=k]\cap[O=m-k]\cap[E=m-k])=\binom{2m}{m}\binom{m}{k}2\frac{1}{4^{2m}}$$

Ainsi, $\mathbb{P}\left([[M_n=0]]\right)=\binom{2m}{m}\frac{1}{4^{2m}}\sum\limits_{k=0} n\binom{m}{k}2.$

Exercice sans préparation

1. On se sait rien faire lorsque le premier indice tend vers l'infini, on va donc se ramener à ce que l'on connait (les séries) :
Soit $M>n$, $\sum\limits_{k=n} M\frac{1}{k^3}=\sum\limits_{k=1} M\frac{1}{k^3}-\sum\limits_{k=1} n\frac{1}{k^3}$ or la première somme converge lorsque M tend vers $+\infty$ comme série de Riemann avec $\alpha=3>1$ donc v_n existe bien et vaut :

$$v_n=\sum_{k=n}+\infty\frac{1}{k^3}=\sum_{k=1}+\infty\frac{1}{k^3}-\sum_{k=1} n\frac{1}{k^3}$$

On fait tendre n vers $+\infty$ dans la seconde expression, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n=\sum_{k=1}+\infty\frac{1}{k^3}-\sum_{k=1}+\infty\frac{1}{k^3}=0$$

2. On est clairement dans un exercice de comparaison série-intégrale.

a) La fonction $x\mapsto\frac{1}{x^3}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\forall k\geqslant 1$, soit $x\in[k,k+1]$, alors : $\frac{1}{(k+1)^3}\leqslant\frac{1}{x^3}\leqslant\frac{1}{k^3}$. La fonction étant de plus continue, on peut intégrer l'inégalité sur $[k,k+1]$. (bornes croissantes) :

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{(k+1)^3}dx\leqslant\int_k^{k+1}\frac{1}{x^3}dx\leqslant\int_k^{k+1}\frac{1}{k^3}dx$$

$$\frac{1}{(k+1)^3}\leqslant\int_k^{k+1}\frac{1}{x^3}dx\leqslant\frac{1}{k^3}$$

On somme alors l'encadrement pour k allant de n à $n+m$ et on obtient le résultat.

b) Encadrons v_n grâce à la question précédente : • on a $\sum_{k=n} n+m\frac{1}{k^3} \geqslant \int_n^{n+m+1} \frac{1}{x^3}dx = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2(n+m+1)^2}$, on fait tendre m vers $+\infty$, on obtient :

$$v_n \geqslant \frac{1}{2n^2}$$

• La seconde inégalité est : $\sum_{k=n} n+m\frac{1}{(k+1)^3} \leqslant \int_n^{n+m+1} \frac{1}{x^3}dx$ or par changement d'indice on a : $\sum_{k=n} n+m\frac{1}{(k+1)^3} = \sum_{k=n+1} n+m+1\frac{1}{k^3} = \sum_{k=n} n+m+1\frac{1}{k^3} - \frac{1}{n^3}$.
On passe alors à la limite dans l'inégalité, on obtient :

$$v_n - \frac{1}{n^3} \leqslant \frac{1}{2n^2} \Leftrightarrow v_n \leqslant \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^3}$$

D'où

$$\frac{1}{2n^2} \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^3}$$

Grâce à cet encadrement, on montre par le théorème d'encadrement que $\frac{v_n}{\frac{1}{2n^2}} \to 1$ donc $v_n \sim \frac{1}{2n^2}$.

Exercice 5 *(Exercice avec préparation)*

1. Deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables s'il existe une matrice P de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

2. *a)* $f^2(i) = f(f(i)) = f(i-j+k) = f(i) - f(j) + f(k) = 2j - 2k$ (linéarité de f) donc $(f^2 - 2f + 2Id)(i) = f^2(i) - 2f(i) + 2i = 0$
ainsi, $(2Id - f)((f^2 - 2f + 2Id)(i)) = (2Id - f)(0) = 0$ par linéarité de $2Id - f$.
De même, on trouve : $(f^2-2f+2Id)(j) = i+j+k$ et $(2Id-f)((f^2-2f+2Id)(j)) = (2Id-f)(i+j+k) = 0$ et $(f^2-2f+2Id)(k) = i+j+k$ et $(2Id-f)((f^2-2f+2Id)(k)) = (2Id-f)(i+j+k) = 0$.

b) Montrons que f est surjective $\Leftrightarrow Im(f) = \mathbb{R}^3$.
$Im(f) = Vect(f(i), f(j), f(k)) = Vect(i-j+k, i+2j, j+k)$. Vérifions la liberté de la famille $(i-j+k, i+2j, j+k)$:
$a(i-j+k) + b(i+2j) + c(j+k) = 0 \Leftrightarrow (a+b)i + (-a+2b+c)j + (a+c)k = 0 \Leftrightarrow$
$\begin{cases} a+ & b & & = 0 \\ -a+ & 2b+ & c & = 0 \\ & -b+ & c & = 0 \end{cases}$ car (i,j,k) est une base de E donc une famille libre.
On résout le système par pivots, on obtient :$a = b = c = 0$. La famille est libre et génératrice de $Im(f)$ donc c'est une base de $Im(f)$ et $dim(Im(f) = 3$.
$Im(f)$ est un sous-espace de E de dimension 3 donc $Im(f) = E$.
f est une endomorphisme de E (E de dim finie) surjectif donc bijectif.

$$f \text{ est un automorphisme de } E$$

c) La matrice de f dans la base (ij,k) est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) D'après la question 2.a) $(2-X)(X^2 - 2X + 2)$ est un polynôme annulateur de f. Donc si λ est valeur propre de f alors $(2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0$ donc $\lambda = 2$.
On résout l'équation $(A - 2I)X = 0$ on obtient $E_2(f) = Vect(i+j+k)$.

3. La somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à 1 et non à 3 donc f n'est pas diagonalisable.

a) On résout l'équation $\alpha(-b,a,0)+\beta(0,c,-b)+\gamma(-c,0,a)=(0,0,0)$ en distinguant les cas $b\neq 0$ et $b=0$ (alors a ou $c\neq 0$), et on obtient dans tous les cas que la famille est liée or les vecteurs ne sont pas colinéaires deux à deux donc $Vect(U,V,W)=Vect(U,V)$ où (U,V) est une base de $Vect(U,V,W)$.

b) On remarque que U, V et W appartiennent à P car ils vérifient l'équation de P donc comme P espace vectoriel alors $Vect(U,V,W)\subset P$. On vérifie facilement en trouvant une base de P que P est de dimension 2 donc :

$$P=Vect(U,V,W)$$

Calculons $f(U)$, $f(V)$ et $f(W)$:
$f(U)=f(-bi+aj)=-bf(i)+af(j)=-b(i-j+k)+a(i+2j)=(a-b)i+(b+2a)j-bk.$
$f(V)=ci+(2c-b)j-bk$ et $f(W)=-ci+(c+a)j+(a-c)k$. comme $f(P)$ est un espace vectoriel alors $f(P)\subset P$ si et seulement si $f(U)$, $f(V)$ et $f(W)\in P$, si et seulement si $\begin{cases} a(a-b)+b(b+2a)-cb=0\\ ac+b(2c-b)-cb=0\\ -ac+b(c+a)+c(a-c)=0\end{cases}$.
Il reste à résoudre ce système d'équations (bonne chance...)

Exercice sans préparation

1. $x(1-\Phi(ax))=x\mathbb{P}\left([[X>ax]]\right)(clairementpositif)=x\displaystyle\int_{ax}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2}2dt=\frac{1}{a}\int_{ax}^{+\infty}\frac{ax}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2}2dt\leqslant \frac{1}{a}\int_{ax}^{+\infty}\frac{t}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2}2dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}a}e^{-a^2x2/2}\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{\frac{-ax^2}{2}}$.

2. La densité d'une variable centrée de variance $\frac{1}{a}$ est $f(x)=\sqrt{\frac{a}{2\pi}}e^{-ax^2/2}$. Cette densité étant paire, on a :

$$\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{a}{2\pi}}e^{-ax^2/2}dx=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{\frac{-ax^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{a}}$$

Ainsi, par croissance des bornes :

$$0\leqslant\int_0^{+\infty}x(1-\Phi(ax))dx\leqslant\frac{1}{\sqrt{a}}$$

Et par le théorème d'encadrement, on obtient : $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_0^{+\infty}x(1-\Phi(ax))dx=0.$

Exercice 6 *(Exercice avec préparation)*

1. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est convexe si elle est au dessus de toutes ses tangentes.
Caractérisation : une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si elle est au dessous de toutes ses cordes.
Si f est de classe $\mathcal{C}1$ sur $\mathbb{R}$ alors elle est convexe si et seulement si sa dérivée f' est croissante.
Si f est de classe $\mathcal{C}2$ sur $\mathbb{R}$ alors elle est convexe si et seulement si sa dérivée seconde f'' est positive.

2. ***a)*** Si $x \geqslant 0$, $t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $[0,x]$ donc $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt$ existe ;
Si $x \leqslant 0$, $t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $[x,0]$ donc $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt$ existe.

b) $g : t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive G sur cet intervalle. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = G(x) - G(0)$ or G est de classe $\mathcal{C}2$ sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de g, fonction de classe $\mathcal{C}1$ sur $\mathbb{R}$ donc f est aussi de classe $\mathcal{C}_2$ sur $\mathbb{R}$.
• $\mathbb{R}$ est centré en 0.
• Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} e^{t^2}\,dt$. On pose le changement de variable $u = -t$ de classe $\mathcal{C}1$ sur $[0,x]$ ($t \mapsto -t$ affine), alors $f(-x) = \displaystyle\int_0^x e^{(-u)^2} - du = -\int_0^x e^{u^2}du = -f(x)$

$$\boxed{f \text{ est impaire}}$$

.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x) = e^{x^2}$ et $f''(x) = 2xe^{x^2}$ est du signe de $2x$ car $\exp > 0$ donc $f'' > 0$ sur $]-\infty, 0[$ et $f'' > 0$ sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{f \text{ est concave sur }]-\infty,0] \text{ et convexe sur } [0,+\infty[}$$

c) $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. ***a)*** si $t > 1$ alors $t^2 > t$ donc $\exp(t^2) > \exp(t)$ donc $\displaystyle\int_1^x e^{t^2}dt > \int_1^x e_t = e^x - e \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$.
Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et par imparité, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ainsi,pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $f(u_n) = \frac{1}{n}$.

b) $f(u_n) = \frac{1}{n}$ et $f(u_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$ or $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ par stricte décroissante de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+*$ donc $f(u_{n+1}) < f(u_n)$ d'où $u_{n+1} < u_n$ en composant par f^{-1} strictement croissante.

$$\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$$

De plus, $f(x) < f(0) = 0$ si $x < 0$ donc $u_n > 0$.
La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0) donc convergente vers un certain réel l.

c) On passe à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans l'égalité $f(u_n) = \frac{1}{n}$. Par continuité de f sur $\mathbb{R}$ donc en l, on obtient $f(l) = 0$. Or l'unique antécédent par f de 0 est 0 donc $l = 0$.

4. ***a)*** La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$ donc au dessus de sa tangente en 0 donc $\forall u \in \mathbb{R}$, $\exp(u) \geqslant 1+u$. Pour démontrer l'autre inégalité, on étudie la fonction $u \mapsto 1 + 2u - e^u$ sur $[0, \ln(2)]$.

b) Soit $t \in [0, \sqrt{\ln(2)}]$, alors $t^2 \in [0, \ln(2)]$ donc en appliquant l'inégalité précédente pour $u = t^2$, on obtient $1 + t^2 \leqslant e^{t^2} \leqslant 1 + 2t^2$.

Pour pouvoir alors intégrer l'encadrement sur $[0, u_n]$, il faut que $u_n \leqslant \sqrt{\ln(2)}$ or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc en prenant la définition de la limite pour $\epsilon = \sqrt{\ln(2)}$, on sait qu'il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n| = u_n \leqslant \sqrt{\ln(2)}$.
Pour $n \geqslant n_0$, par croissance des bornes on obtient :

$$\int_0^{u_n} (1+t^2)dt \leqslant \int_0^{u_n} e^{t^2}\,dt = f(u_n) = \frac{1}{n} \leqslant \int_0^{u_n} (1+2t^2)dt$$

c) On calcule les intégrales de cette inégalité, on obtient : $u_n + \frac{u_n 3}{3} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant u_n + \frac{2u_n 3}{3}$.
c-a-d $nu_n + \frac{nu_n 3}{3} \leqslant 1 \leqslant nu_n + \frac{2nu_n 3}{3}$.
• En divisant par nu_n, on obtient déjà que $nu_n \sim 1$ car par le théorème d'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{nu_n} = 1$
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 1$. Au passage, on a montré que $u_n \sim \frac{1}{n}$.
On renverse alors l'encadrement pour encadrer $nu_n 3$:

$$\frac{3}{2}(1 - nu_n) \leqslant nu_n 3 \leqslant 3(1 - nu_n)$$

Par encadrement, on obtient $nu_n 3 \to 0$.

Exercice sans préparation

• Y prend la valeur 0 et lorsque X prend toutes les valeurs paires supérieures à 2 alors $\frac{X}{2}$ prend toutes les valeurs entières supérieures à 1 donc

$$\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}}$$

• Soit $k \geqslant 1$, $\mathbb{P}\left([[Y = k]]\right) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{X}{2} = k\right]\right) = \mathbb{P}\left([[X = 2k]]\right) = pq^{2k-1}$.
$\mathbb{P}\left([[Y = 0]]\right) = \mathbb{P}\left(\left[\bigcup\limits_{k=0} +\infty[X = 2k+1]\right]\right) = \sum\limits_{k=0} +\infty\mathbb{P}\left([[[X = 2k+1]]]\right)$ (incompatibilité deux à deux des évènements de l'union) $= \sum\limits_{k=0} +\infty pq^{2k} = \frac{p}{1-q^2} = \frac{1}{1+q}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k\mathbb{P}\left([[[Y = k]]]\right) \geqslant 0$ donc la série de terme général $k\mathbb{P}\left([[[Y = k]]]\right)$ converge absolument si et seulement si elle converge.
Sous réserve de convergence, on a :
$\mathbb{E}(Y) = 0\mathbb{P}\left([[[Y = 0]]]\right) + \sum\limits_{k=1} +\infty k\mathbb{P}\left([[[Y = k]]]\right) = \sum\limits_{k=1} +\infty kpq^{2k-1} = pq \sum\limits_{k=1} +\infty k(q^2)^{k-1}$. On reconnaît une série géométrique dérivée de raison q^2 avec $|q^2| = q^2 < 1$ donc la série converge et

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{pq}{(1-q^2)^2} = \frac{q}{(1+q)^2(1-q)}$$

Exercice 7 *(Exercice avec préparation)*

1. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. La loi du couple (X, Y) est déterminée par :
• La donnée de $(X, Y)(\Omega)$: l'ensemble des valeurs prises par le couple.
• La donnée, pour tout $(i, j) \in (X, Y)(\Omega)$ de $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$.
Les lois marginales sont les lois de X et de Y. On déterminer la loi d'une variable en utilisant la formule des probas totales sur le sce des valeurs prises par l'autre variable :

$$\mathbb{P}\left([[[X = i]]]\right) = \sum_{j \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$$

$$\mathbb{P}\left([[[Y = j]]]\right) = \sum_{i \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$$

Pour tout $j \in Y(\Omega)$, la loi de X sachant $[Y = j]$ est définie par :
Pour tout $i \in X(\Omega)$, $P_{[Y=j]}\left[[X = i]\right] = \frac{\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])}{\mathbb{P}([[[Y=j]]])}$

2. • $(X, Y)(\Omega) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 | j \leqslant i\}$.
• $\forall (i, j) \in (X, Y)(\Omega)$, $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}\left([[[X = i]]]\right) P_{[X=i]}\left[[Y = j]\right] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}\binom{i}{j}p^j(1-p)^{i-j} = e^{-\lambda}\frac{1}{j!(i-j)!}(\lambda p)^j(1-p)^{i-j}$

3. $\forall j \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([[Y = j]]) = \sum_{i=0} +\infty \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \sum_{i=j} +\infty \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \sum_{i=j} +\infty e^{-\lambda} \frac{1}{j!(i-j)!} (\lambda p)^j (1-p)^{i-j} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^j}{j!} \sum_{i=j} +\infty \frac{(1-p)^{i-j}}{(i-j)!}$. On pose le changement d'indice $k = i - j$: $\mathbb{P}([[Y = j]]) = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^j}{j!} \sum_{k=0} +\infty \frac{(1-p)^k}{k!} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^j}{j!} e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^j}{j!}$.
Y suit une loi de Poisson de paramètre λp.

4. • $(X - Y)(\Omega) = \mathbb{N}$ (X peut prendre n'importe quelle valeur entière et de nombre de succès de la binomiale a tjrs une proba non nulle de valoir 0).
• Soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([[[X - Y] = n]]) = \sum_{i=0} +\infty \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = i - n]) = \sum_{i=n} +\infty \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = i - n]) = \sum_{i=n} +\infty e^{-\lambda} \frac{1}{(i-n)!} n! (\lambda p)^{i-n} (1-p)^n = e^{-\lambda} \frac{(1-p)^n}{n!} \sum_{i=n} +\infty \frac{1}{(i-n)!} (\lambda p)^{i-n}$. On pose le changement d'indice $k = i - n$:
$\mathbb{P}([[[X - Y] = n]]) = e^{-\lambda} \frac{(1-p)^n}{n!} \sum_{k=0} +\infty \frac{1}{k!} (\lambda p)^k = e^{\lambda(1-p)} \frac{(1-p)^n}{n!}$

5. ***a)*** $\forall (j, n) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}([Y = j] \cap [X - Y = n]) = \mathbb{P}([Y = j] \cap [X = j + n]) = e^{-\lambda} \frac{1}{j!n!} (\lambda p)^j (1-p)^n = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^j}{j!} \times e^{\lambda(1-p)} \frac{(1-p)^n}{n!} = \mathbb{P}([[[Y = j]]]) \mathbb{P}([[[X - Y = n]]])$.
Les variables Y et $X - Y$ sont indépendantes.

b) Y et $X - Y$ étant indépendantes, on a $cov(Y, X - Y) = 0$ cad $cov(Y, X) - Cov(Y, Y) = Cov(X, Y) - \mathbb{V}(Y) = 0$ (linéarité à droite et symétrie de la covariance).
Ainsi, $Cov(X, Y) = \mathbb{V}(Y)$ donc $\frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)} = \sqrt{p}$.

Exercice sans préparation

A est diagonalisable donc il existe $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale constituée de valeurs propres de A telles que $A = PDP^{-1}$.
Or $X^k - 1$ est un polynôme annulateur de A donc si λ est valeur propre de A alors $\lambda^k = 1$.
• Si k est impair alors $\lambda = 1$ donc $D = I_n$ donc $A = PI_nP^{-1} = I_n$ donc $A^2 = I_n$.
• Si k est pair alors $\lambda = \pm 1$. Donc D est diagonale de coefficients diagonaux tous égaux à ± 1 donc $D^2 = I_n$.
Ainsi, $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} = PI_nP^{-1} = I_n$.

Exercice 8 *(Exercice avec préparation)*

1. Une fonction est de classe $\mathcal{C}p$ sur un intervalle I si elle est p fois dérivable et que sa dérivée p-ième est continue.
Toute fonction de classe $\mathcal{C}p$ admet une formule de Taylor à l'ordre $p - 1$ cad pour tout a, $b \in I$, $f(b) = \sum_{k=0}^{(p-1)} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b (b - t)^{p-1} f^{(p)}(t) dt$.

2. ***a)*** Montrons que (f_1, f_2) est libre :
Soit a et b deux réels tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $af_1(x) + bf_2(x) = 0$. Alors, en prenant des valeurs particulières ($x = 0$ et $x = 1$) on obtient $a = 0$ et $a + b = 0$ cad $a = b = 0$.
La famille est libre et génératrice de E donc est une base de E.

b) La dérivation est linéaire donc Δ est linéaire.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\Delta(f_1)(x) = f_1'(x) = \alpha f_1(x)$ donc $\delta(f_1) = \alpha f_1 \in E$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\Delta(f_2)(x) = e^{\alpha x} + \alpha x e^{\alpha(x)}$ donc $\Delta(f_2) = f_1 + \alpha f_2 \in E$. Par linéarité der Δ et par stabilité de E par combinaisons linéaires, on obtient, $\Delta(E) \subset E$.

$\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } E}$

La matrice de Δ dans la base (f_1, f_2) est $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

c) A est inversible car trig sup avec des coeff diag non nuls donc Δ est bijective et comme A est triangulaire, son unique valeur propre est α.
Si A était diagonalisable alors il existerait P inversible telle que $A = P\alpha I_n P^{-1} = \alpha I_n$: contradiction donc Δ n'est pas diagonalisable.

3. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha^2} \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$.
Soit $f \in E$, si $\Delta^{-1}(f) = g$ alors $\Delta(g) = f$ cad $g' = f$ cad g est une primitive de f. Δ^{-1} associe donc à f une primitive de f (celle qui est dans E).
$A^{-1}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3\alpha+2}{\alpha^2} \\ \frac{2}{\alpha} \end{pmatrix}$ donc $\Delta^{-1}(-3f_1 + 2f_2) = -\frac{3\alpha+2}{\alpha^2} f_1 + \frac{2}{\alpha}$.
Les primitive de f sont donc les fonctions de la forme $-\frac{3\alpha+2}{\alpha^2} f_1 + \frac{2}{\alpha} + constante$

4. *a)* On calcule les premières puissances, on trouve $A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} \alpha^3 & 3\alpha^2 \\ 0 & \alpha^3 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} \alpha^4 & 4\alpha^3 \\ 0 & \alpha^4 \end{pmatrix}$.
On fait alors l'hypothèse que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$ et on démontrer cette relation par récurrence.

b) $A^n\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\alpha^n + 2n\alpha^{n-1} \\ 2\alpha^n \end{pmatrix}$ donc $\Delta^n(f) = \alpha^{n-1}[(-3\alpha + 2n)f_1 + 2\alpha f_2]$.

Exercice sans préparation

1. si X pair alors $(-1)^X = 1$ et si X impair alors $(-1)^X = -1$ donc $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$.
D'après le théorème de transfert, sous réserve de convergence absolue, on a :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0} +\infty (-1)^k \mathbb{P}\left([[X = k]]\right)$$

Montrons la convergence absolue de cette série : la série de terme général $|(-1)^k \mathbb{P}\left([[[X = k]]]\right)| = \mathbb{P}\left([[X = k]]\right)$ converge (sce) donc la série converge bien absolument.

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0} +\infty (-1)^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0} +\infty \frac{(-\lambda)^k}{k!} = e^{-2\lambda}$$

2. on a $\mathbb{E}(Y) = 1\mathbb{P}\left([[[Y = 1]]]\right) - 1\mathbb{P}\left([[[Y = -1]]]\right) = e^{-2\lambda}$ et $\mathbb{P}\left([[[Y = 1]]]\right) + \mathbb{P}\left([[[Y = -1]]]\right) = 1$. On résout ce système de deux équations à deux inconnues, on obtient : $\mathbb{P}\left([[[Y = 1]]]\right) = \frac{e^{-2\lambda}+1}{2}$ et $\mathbb{P}\left([[[Y = -1]]]\right) = \frac{1-e^{-2\lambda}}{2}$

Exercice 9 *(Exercice avec préparation)*

1. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge absolument, alors elle converge.
Théorèmes de comparaison si f est positif et continue par morceaux sur $]a, b]$:

- Si $f \leqslant g$ avec $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t\ dt$ converge.

- Si $f = o_a(g)$ avec $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t\ dt$ converge.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$alors $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^b f(t\ dt$ converge.

2. Si $x \leqslant 0$ alors $t \to t^{-x}\sqrt{1+t}$ est continue sur $[0,1]$ donc l'intégrale converge.
Si $x > 0$,la fonction intérieure est positive et l'intégrale est impropre en 0 or $\frac{1}{t^x}\sqrt{1+t} \underset{t\to 0}{sim} \frac{1}{t^x}$ avec $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^x}dt$ converge si et seulement si $x < 1$ (intégrale de Riemann) donc d'après les théorèmes de comparaison, $f(x)$ existe si et seulement si $x < 1$.

3. On ne sait pas dériver f donc on revient à la définition des variations d'une fonction :
soient $a < b < 1$, alors $-a > -b$ donc pour tout $t \in]0,1[$, $-a\ln(t) < -b\ln(t)$ car $\ln(t) < 0$ donc $e^{-a\ln(t)} < e^{-b\ln(t)}$ par stricte croissance de l'exponentielle.
On a donc $t^{-a} < t^{-b}$ donc $t^{-a}\sqrt{1+t} < t^{-b}\sqrt{1+t}$. On intègre l'inégalité sur $]0,1[$, par croissance des bornes, on obtient $f(a) < f(b)$.
f est strictement croissante sur D.

4. ***a)*** $\forall t \in]0,1]$, $1 \leqslant 1+t \leqslant 2$ et $1 \leqslant \sqrt{1+t} \leqslant \sqrt{2}$ par croissance de la fct racine sur $\mathbb{R}_+$. d'où $t^{-x} \leqslant t^{-x}\sqrt{1+t} \leqslant \sqrt{2}t^{-x}$.
En intégrant cet encadrement sur $t \in]0,1]$, on obtient (croissance des bornes) :

$$\frac{1}{1-x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{1-x}$$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{1-x} = 0$ donc d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$.

5. ***a)*** $f(0) = \displaystyle\int_0^1 t^0\sqrt{1+t}dt = \int_0^1 (1+t)^{\frac{1}{2}}dt = \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1)$.

b) $f(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{-x}\sqrt{1+t}dt$.
On pose u et v définies sur $[0,1]$ par $u(t) = t^{-x}$ et $v(t) = \frac{2}{3}(1+t)\sqrt{1+t}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}1$ sur $]0,1]$ de dérivées $u'(t) = xt^{-(x+1)}$ et $v'(t) = \sqrt{1+t}$. Ainsi, pour tout $0 < M < 1$, on a, par I.P.P. :

$$\int_M^1 t^{-x}\sqrt{1+t}dt = [\ \frac{2}{3}t^{-x}(1+t)\sqrt{1+t}]_M 1 + x\frac{2}{3}\int_M^1 t^{-(x+1)}(1+t)\sqrt{1+t}dt$$

avec $\displaystyle\int_M^1 t^{-(x+1)}(1+t)\sqrt{1+t}dt = \int_M^1 (t^{-x}+t^{-(x+1)})\sqrt{1+t}dt = \int_M^1 t^{-x}\sqrt{1+t}dt + \int_M^1 t^{-(x+1)}\sqrt{1+t}dt$.
On fait tendre M vers 0, on obtient :

$$f(x) = \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3}x(f(x) + f(x+1))$$

On isole $f(x+1)$, on obtient :

$$f(x+1) = \frac{1}{x}[f(x)(\frac{3}{2} - x) - 2\sqrt{2}]$$

c) On obtient $f(x+1) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}[f(0)frac32 - 2\sqrt{2}] = -\frac{1}{x}$ à condition que f soit continue en 0 $(*]$.
Alors $f(X) \underset{X\to 1}{\sim} \frac{1}{1-X}$ en posant $X = x+1$.

$(*)$ continuité de f en 0 :
$|f(x) - f(0)| = \left|\int_0^1 (t^{-x}-1)\sqrt{1+t}dt\right| \leqslant \int_0^1 |t^{-x}-1|\sqrt{1+t}dt \leqslant \sqrt{2}\int_0^1 |t^{-x}-1|dt = \sqrt{2}|\dfrac{1}{1-x} - 1| \to 0$ lorsque x tend vers 0 d'où f est continue en 0.

6.

Exercice sans préparation

1. L'univers est l'ensemble des n-listes d'urnes, avec répétitions donc $card(\Omega) = n^n$.
On note A l'évènement "chaque urne reçoit exactement 1 boule", alors A est constitué de l'ensemble des permutations des n urnes donc $card(A) = n!$.
Par équiprobabilité des choix, on :

$$p_n = \mathbb{P}([A]) = \frac{n!}{n^n}$$

.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{n!}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = (n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1$
La suite (o_n) est donc décroissante et minorée (par 0 car chaque terme est une proba) donc convergente.

3. $p_n = \frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}....\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$ donc $0 \leqslant p_n \leqslant \frac{1}{n}$ et par le théorème d'encadrement, on trouve $p_n \to 0$.