Colles - Semaine 4

I. Série 1

Exercice 1

Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} k!\ \leqslant\ (n+1)!$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} S_k$.

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (n+1) \times S_n - n$

II. Série 2

Exercice 1

a. Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

b. Retrouver ce résultat de manière directe.

Exercice 2

Soit $n \geqslant 1$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{n+1-k}\right)$.

III. Série 3

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n^2} \end{array}\right.$

Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}\ >\ u_n$.

Exercice 2

Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies ?

a. $\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha + a_i) = \alpha + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$

b. $\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$

c. $\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha\, a_i) = \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$

d. $\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i b_i) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right)$

e. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{\alpha} = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^{\alpha}$

f. $\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}$