HEC 2008

Exercice avec préparation 1

1. Question de cours : Donner la formule de la variance d'une somme finie de variables aléatoires prenant un nombre fini de valeurs.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, à valeurs dans $\{-1;1\}$, définies sur une même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $p=\mathbb{P}([X_n=1])$, et on suppose que $p\in]0;1[$.

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $Y_n=\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$.

a) Déterminer les lois de Y_2 et de Y_3.

b) On pose, pour $n\geqslant 1$, $\mathbb{P}([Y_n=1])=p_n$. Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n, puis la valeur de p_n pour tout $n\geqslant 1$.

c) Existe-t-il des valeurs de n pour lesquelles les variables Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes ?

3. On pose : $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Déterminer la loi de S_n, son espérance et sa variance.
(Indication : on pourra se ramener à des variables aléatoires X_i' $(1\leqslant i\leqslant n)$ indépendantes suivant une loi de Bernoulli).

4. Écrire un programme en Pascal permettant de simuler la loi de S_n.

Exercice sans préparation 1

Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) définie par :

$$u_0\in]0;1[\text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=1+\frac{u_n}{n+1}$$

Déterminer deux réels a et b tels que : $u_n=1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{1}{n^2}\epsilon\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\epsilon\left(\frac{1}{n}\right)=0$.

Exercice avec préparation 2

1. Définition et propriétés de la loi de Bernoulli et de la loi binomiale.

   Une urne contient $2n$ boules ($n \in \mathbb{N}^*$) de couleurs toutes différentes. La moitié d'entre elles sont marquées du chiffre zéro et les autres sont numérotées de 1 à n.
   On extrait simultanément n boules de cette urne, obtenant ce qu'on appelle une poignée. On suppose que toutes les poignées sont équiprobables. Pour i entier compris entre 1 et n, on note X_i la variable aléatoire réelle qui prend la valeur 1 si la boule i se trouve dans la poignée et 0 sinon.

2. Déterminer la loi de probabilité de X_i.

3. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, calculer la covariance du couple (X_i, X_j).

4. On note S la variable aléatoire réelle prenant pour valeur la somme des numéros portés par les boules figurant dans la poignée.

   a) Exprimer S en fonction de $X_1, X_2, \ \ldots \ , X_n$.

   b) En déduire l'espérance et la variance de S.

5. On désigne par Z la variable aléatoire réelle donnant le nombre de boules portant le numéro zéro au sein de la poignée. Donner la loi de probabilité de Z puis son espérance.

Exercice sans préparation 2

Soit f la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1.$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de f.

2. Déterminer les points critiques de f.

3. La fonction f a-t-elle des extrema locaux ?

Exercice avec préparation 3

1. Question de cours : Donner la définition d'un estimateur et définir la notion de risque quadratique.

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On sait que N est au moins égal à deux, mais on ne connaît pas sa valeur exacte et on cherche à l'estimer. Pour cela, on effectue n tirages avec remise ($n \in \mathbb{N}^*$) et on note Z_k le numéro de la boule obtenue au k-ième tirage ($1 \leqslant k \leqslant n$). On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} Z_k$.
Donner l'expression d'un estimateur sans biais de N, fonction de M_n et dont la suite des variances converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On note $S_n = \max(Z_1, Z_2, \ \ldots \ , Z_n)$.

a) Déterminer la fonction de répartition de S_n.

b) Montrer que pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\{1, 2, \ \ldots \ , N\}$, on a la relation :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}([Y \geqslant k]).$$

c) En déduire que : $\mathbb{E}(S_n) \geqslant N - \dfrac{N}{n+1}$.

d) En déduire que S_n est un estimateur de N, dont l'espérance converge vers N lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice sans préparation 3

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. ***a)*** Trouver une relation entre A^2, A et I (matrice identité d'ordre 2).

b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

2. Calculer les valeurs propres possibles de A.

3. A est-elle diagonalisable ?

Exercice avec préparation 4
Dans cet exercice, on note C^0 l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Question de cours : Donner la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre d'un endomorphisme.

Soit Φ l'application définie sur C^0 qui, à toute fonction f de C^0, associe la fonction $g = \Phi(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^x f(t)\ dt.$$

2. Rappeler pourquoi, pour toute fonction f de C^0, $\Phi(f)$ est dérivable et expliciter sa fonction dérivée.

3. Vérifier que Φ est un endomorphisme de C^0.

4. Donner un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}$ et non dérivable sur $\mathbb{R}$.
L'application Φ est-elle surjective ? Injective ?

Soit λ un réel quelconque. On dit que λ est une valeur propre de Φ s'il existe une fonction f non nulle de C^0, telle que $\Phi(f) = \lambda f$. Une telle fonction est appelée fonction propre associée à la valeur propre λ.

5. Recherche des valeurs propres non nulles de Φ. On suppose, dans cette question, que Φ admet une valeur propre λ non nulle.

Soit f une fonction propre associée à λ.

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) En dérivant la fonction $x \to f(x)e^{-\frac{x}{\lambda}}$, montrer que f ne peut être que la fonction nulle.

c) Conclure alors que Φ n'admet aucune valeur propre.

6. Pour toute fonction f de C^0, on pose : $F_0 = \Phi(f)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_n = \Phi(F_{n-1})$.

a) Montrer que F_n est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ et préciser la valeur de ses dérivées successives en 0.

b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\ dt$.

Exercice sans préparation 4
X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et ayant la même loi de densité φ, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = ke^{-|x|}.$$

1. Déterminer la valeur du réel k.

2. Déterminer la fonction de répartition F de X.

3. Justifier l'existence de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ et les calculer.

Exercice avec préparation 5

Pour tout nombre réel a, on note $A(a)$ la matrice

$$A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1+a & 1 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. ***a)*** Question de cours : Rappeler la définition d'une matrice diagonalisable.

b) Montrer que si une matrice est diagonalisable, sa transposée est également diagonalisable.

2. ***a)*** Justifier le fait que pour tout a réel, la matrice $A(a)$ est diagonalisable.

b) montrer que a est valeur propre de $A(a)$ et déterminer le sous-espace propre associé.

c) Calculer $A(a)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A(a)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

d) Diagonaliser $A(a)$.

3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles vérifiant, pour tout n entier naturel,

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n + z_n \\ z_{n+1} = y_n + 2z_n \end{cases}$$

a) Si l'on pose pour tout n entier naturel, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, quelle relation a-t-on entre X_{n+1} et X_n ?

b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur x_0, y_0 et z_0 pour que les suites (x_n), (y_n) et (z_n) soient bornées. Que peut-on dire alors de ces trois suites ?

4. ***a)*** Montrer que si B et B' sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et qu'il existe $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = B$, alors il existe $C' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C'^2 = B'$.

b) Montrer que si B et C sont deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $C^2 = B$, alors $BC = CB$.

c) Si $a \in \mathbb{R}$, déterminer les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ commutant avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

d) Existe-t-il une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A(3)$?

Exercice sans préparation 5

1. Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$, vérifie les propriétés d'une fonction de répartition.

2. Déterminer la loi du maximum de deux variables aléatoires indépendantes définies sur une même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, et de même loi de fonction de répartition F.
Généraliser à n variables.

Exercice avec préparation 6

1. Question de cours : Écrire la formule de Taylor à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) avec reste intégral pour une fonction d'une variable réelle de classe C^{n+1} et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$, et F la primitive de f qui vérifie $F(0) = 0$.

2. Étudier les variations de F et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

3. *a)* Montrer que, pour tout x réel, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{-(xt)^2}\, dt$ existe.
On définit alors la fonction G par :

$$G(x) = \int_0^1 e^{-(xt)^2}\, dt.$$

b) Démontrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ G'(x) = \frac{xe^{-x^2} - F(x)}{x^2}.$$

En déduire les variations de G.

c) Montrer que G est continue en 0 et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$.

d) Vérifier que G est dérivable en 0 et que G' est continue sur $\mathbb{R}$.

4. *a)* Montrer que G vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ xG'(x) + G(x) = f(x).$$

b) On veut prouver que G est l'unique fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ xg'(x) + g(x) = f(x) \quad (E).$$

Soit G_1 une fonction réelle dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation (E). On pose $H = G - G_1$. Déterminer $H(x)$ pour $x > 0$ puis pour $x < 0$. conclure en utilisant la continuité de H en 0.

Exercice sans préparation 6

Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soit a un réel strictement positif et X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0; 2a]$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ qui ont toutes la même loi que X. On pose :

$$M_n = \max(X_1, \dots, X_n).$$

Déterminer la loi de M_n et calculer son espérance et sa variance.

b) En déduire que $U_n = \frac{n+1}{2n} M_n$ est un estimateur sans biais de $\mathbb{E}(X)$.
Est-il préférable à l'estimateur $V_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$?