ECE1
Mathématiques

Colles - Semaine 13

I. Série 1

Exercice 1

Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$ puis $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$.

Exercice 2

Soient A, B, C trois ensembles.
Soient $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : C \to A$ trois applications telles que :

- $h \circ g \circ f$ et $f \circ h \circ g$ sont injectives
- $g \circ f \circ h$ est surjective

Montrer que f, g et h sont bijectives.

II. Série 2

Exercice 1

Soient n et p deux entiers tels que $p \leqslant n$.

1. En raisonnant par récurrence sur n montrer la formule de « Pascal généralisée » :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

2. Justifier, que pour tout k, on a : $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$.

3. En déduire une nouvelle démonstration de la formule de « Pascal généralisée ».

Exercice 2

1) On considère tout d'abord les applications f et g suivantes.

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$$

  a. Étudier le caractère injectif, surjectif, bijectif de ces applications.

  b. Calculer $g \circ f$. Cette application est-elle injective / surjective / bijective ?

  c. Calculer $f \circ g$. Cette application est-elle injective / surjective / bijective ?

2) On considère maintenant $f : E \to E$ et $g : E \to E$ deux applications.

  a. Démontrer que :

$$g \circ f = id_E \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f \text{ injective} \\ g \text{ surjective} \end{cases}$$

  b. Donner un tel exemple avec f et g non bijectives.

  c. La réciproque de l'implication est-elle vraie ?

  d. Que devient ce résultat lorsque E est un ensemble fini ?

III. Série 3

Exercice 1

Montrer que : $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\dots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\dots$ et trouver la valeur commune des deux sommes.

Exercice 2

Démontrer que : $\forall a\in\mathbb{N},\forall b\in\mathbb{N},\forall p\in\mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{p}\binom{a}{k}\binom{b}{p-k}=\binom{a+b}{p}$.

1. En calculant de deux manières $(1+x)^a(1+x)^b$.

2. En cherchant le nombre de parties de cardinal p dans $E\cup F$ où E et F sont des ensembles disjoints de cardinaux a et b.

3. Application : soit n,p,q des entiers naturels. Montrer que : $\sum\limits_{k=0}^{q}\binom{q}{k}\binom{n}{p+k}=\binom{n+q}{p+q}$.