

# ECRICOME 2019

## Exercice 1

On considère dans cet exercice l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^3$ , dont on note  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique. Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est la matrice :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

### Partie A

1. a) Calculer  $A^2$  puis vérifier que  $A^3$  est la matrice nulle de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

*Démonstration.*

• Tout d'abord :

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A^2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

• Ensuite :

$$\begin{aligned} A^3 &= A \times A^2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{On a bien } A^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.$$

□

b) Justifier que 0 est l'unique valeur propre possible de  $f$ .

*Démonstration.*

D'après la question précédente, le polynôme  $Q(X) = X^3$  est un polynôme annulateur de la matrice  $A$ . Ainsi :  $\text{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{0\}$ .

$$\text{Ainsi : } \text{Sp}(f) = \text{Sp}(A) \subset \{0\} \text{ et } 0 \text{ est l'unique valeur propre possible de } f.$$

### Commentaire

- Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  possède TOUJOURS un polynôme annulateur non nul  $Q$ .  
On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus)  $n$ .
- Si  $Q$  est un polynôme annulateur de  $A$  alors, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , le polynôme  $\alpha Q$  est toujours un polynôme annulateur de  $A$  puisque :

$$(\alpha Q)(A) = \alpha Q(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

Cela suffit à démontrer que  $A$  possède une infinité de polynômes annulateurs.

On peut en obtenir d'autres. Par exemple  $R(X) = (X-5)Q(X)$  est un polynôme annulateur de  $A$  puisque :

$$R(A) = (A - 5I)Q(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

Il faut donc parler d'UN polynôme annulateur d'une matrice.

- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de  $A$ . Si c'était le cas,  $A$  aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus  $n$ ). Par exemple, comme  $R(X) = (X-5)Q(X)$  est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre. □

c) Déterminer une base et la dimension du noyau de  $f$ .

*Démonstration.*

- Soit  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Notons  $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned}
 u \in \text{Ker}(f) &\iff f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
 &\iff AU = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 &\iff \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ -x - y - 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ -3y - 3z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ -3y - 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -x + 2y = -z \\ -3y = 3z \end{cases} \\
 &\stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2}{\iff} \begin{cases} -x = z \\ -y = z \end{cases}
 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient l'expression de  $\text{Ker}(f)$  suivante :

$$\begin{aligned}\text{Ker}(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z \text{ et } y = -z\} \\ &= \{(-z, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z \cdot (-1, -1, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}((-1, -1, 1))\end{aligned}$$

- La famille  $\mathcal{F} = ((-1, -1, 1))$  :  
 × engendre  $\text{Ker}(f)$ ,  
 × est libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

Ainsi,  $\mathcal{F} = ((-1, -1, 1))$  est une base de  $\text{Ker}(f)$  et  $\dim(\text{Ker}(f)) = \text{Card}((-1, -1, 1)) = 1$ .

□

d) L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?

*Démonstration.*

- On a démontré en question 1.b) que 0 est la seule valeur propre possible de  $f$ .  
 Or, d'après la question précédente :  $\text{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ .

On en déduit que 0 est bien valeur propre de  $f$ , de sous-espace propre associé  $E_0(f) = \text{Ker}(f) = \text{Vect}((-1, -1, 1))$ .

- Le réel 0 est la seule valeur propre de  $f$ . Or :

$$\dim(E_0(f)) = 1 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

Ainsi, l'endomorphisme  $f$  n'est pas diagonalisable.

### Commentaire

- Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Si l'on sait :

$$\text{Ker}(f - \lambda \text{id}) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

alors on peut en conclure qu'il existe un vecteur **non nul**  $u \in \mathbb{R}^3$  tel que :  $f(u) = \lambda u$ .  
 Ainsi,  $\lambda$  est valeur propre de  $f$  et  $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}) = E_\lambda(f)$  est le sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda$ .

- Dans cette question on a utilisé la caractérisation générale suivante :

$$\text{L'endomorphisme } f : E \rightarrow E \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m \dim(E_{\lambda_i}(f)) = \dim(E)$$

où  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  sont les valeurs propres distinctes de  $f$ .

- On peut aussi procéder par l'absurde pour démontrer que  $f$  n'est pas diagonalisable.  
 Supposons que  $f$  est diagonalisable. Alors  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  l'est aussi.  
 Il existe donc une matrice inversible  $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et une matrice diagonale  $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de  $A$  telles que  $A = PDP^{-1}$ .  
 Or 0 est la seule valeur propre de  $A$ . Ainsi  $D = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$  et :

$$A = PDP^{-1} = P 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} P^{-1} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

Absurde !

□

2. Soient  $e'_1 = (-1, -1, 1)$ ,  $e'_2 = (2, -1, 1)$  et  $e'_3 = (-1, 2, 1)$ .

a) Démontrer que la famille  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  est une base de  $E$ .

*Démonstration.*

- Montrons que la famille  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  est libre.

Soit  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ . Supposons :  $\lambda_1 \cdot e'_1 + \lambda_2 \cdot e'_2 + \lambda_3 \cdot e'_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ .

Les équivalences suivantes sont vérifiées.

$$\begin{aligned}
 & \lambda_1 \cdot e'_1 + \lambda_2 \cdot e'_2 + \lambda_3 \cdot e'_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \\
 \iff & (-\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3, -\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0) \\
 \iff & \begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\
 \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} & \iff \begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \\
 \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix} & \iff \begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \\
 \iff & \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0\} \\
 & \text{(par remontées successives)}
 \end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  est une famille libre de  $\mathbb{R}^3$ .

- On a alors :

- × la famille  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  est une famille libre,
- ×  $\text{Card}((e'_1, e'_2, e'_3)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ .

Ainsi,  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

### Commentaire

- Le terme **cardinal** est réservé aux ensembles finis. La famille  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  est un ensemble qui contient 3 vecteurs. Elle est donc finie, de cardinal 3 (ce qu'on note  $\text{Card}((e'_1, e'_2, e'_3)) = 3$ ).
- $\text{Vect}(e'_1, e'_2, e'_3)$  est l'espace vectoriel constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs  $(e'_1, e'_2, e'_3)$ . C'est un ensemble **infini** de vecteurs, on ne peut parler de son cardinal. Par contre, si l'on dispose d'une base  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  d'un espace vectoriel, tout vecteur se décompose de manière unique sur cette base. Ceci permet de donner une représentation finie de cet ensemble infini.
- Les notations :  ~~$\text{Card}(\text{Vect}(e'_1, e'_2, e'_3))$~~  et  ~~$\dim((e'_1, e'_2, e'_3))$~~  n'ont aucun sens !

□

- b) Démontrer que la matrice représentative de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$  est la matrice  $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

*Démonstration.*

Notons  $E'_1 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $E'_2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $E'_3 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- $f(e'_1) = 0 \cdot e'_1 + 0 \cdot e'_2 + 0 \cdot e'_3$  car  $e'_1 \in E_0(f)$ .

$$\text{Ainsi : } \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e'_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e'_2)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_2) = AE'_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = E'_1$ .

Donc  $f(e'_2) = 1 \cdot e'_1 + 0 \cdot e'_2 + 0 \cdot e'_3$ .

$$\text{Ainsi : } \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e'_2)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e'_3)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_3) = AE'_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = E'_2$ .

Donc  $f(e'_3) = 0 \cdot e'_1 + 1 \cdot e'_2 + 0 \cdot e'_3$ .

$$\text{Ainsi : } \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e'_3)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Finalement, on a bien : } \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T.$$

### Commentaire

- Rappelons tout d'abord que déterminer la matrice représentative de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$  consiste à exprimer l'image par  $f$  des vecteurs  $e'_1, e'_2, e'_3$  suivant la base  $(e'_1, e'_2, e'_3)$ .
- L'énoncé ne donne pas directement accès à  $f$  mais à  $A$ , sa matrice représentative dans la base  $\mathcal{B}$ . La base  $\mathcal{B}$  étant fixée, l'application  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot)$ , appelée parfois isomorphisme de représentation, permet de traduire les propriétés énoncées dans le monde des espaces vectoriels en des propriétés énoncées dans le monde matriciel.

Voici quelques correspondances dans le cas général :

$$E \text{ espace vectoriel de dimension } n \longleftrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

$$f : E \rightarrow E \text{ endomorphisme } \longleftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$f \text{ bijectif } \longleftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{ inversible}$$

Ou encore, dans le cas précis de l'exercice :

$$\text{expression de } f(e'_1) \text{ dans } (e'_1, e'_2, e'_3) \longleftrightarrow \text{expression de } AE'_1 \text{ dans } (E'_1, E'_2, E'_3)$$

Il est très fréquent que les énoncés de concours requièrent de savoir traduire une propriété d'un monde à l'autre. Il est donc indispensable d'être à l'aise sur ce mécanisme.

### Commentaire

- Comme on l'a vu dans la question 1., l'endomorphisme  $f$  n'est pas diagonalisable. Il n'existe donc pas de base dans laquelle la matrice représentant  $f$  est diagonale.
- Dans ce cas, on se rabat sur une propriété plus faible : existe-t-il une base dans laquelle la représentation matricielle de  $f$  serait triangulaire supérieure ? Cette propriété est beaucoup plus simple à obtenir notamment si l'on accepte d'utiliser des matrices dont les coefficients sont complexes (hors de notre portée en ECE).  
On parle alors de **trigonaliser** (on dit aussi **triangulariser**) la matrice  $A$ .
- Si un endomorphisme  $f : E \rightarrow E$  est triangularisable, comment le triangularise-t-on ?  
Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  les valeurs propres de  $f$ . On cherche alors une base de chaque sous-espace propre  $E_{\lambda_i}$  et on considère la famille obtenue en concaténant toutes ces bases. Cette famille **N'EST PAS** une base de  $E$ . Si tel était le cas, on aurait formé une base de vecteurs propres et donc  $E$  serait diagonalisable.  
Par contre, cette famille est libre. On peut alors la compléter en une base de  $E$ .  
Sans entrer dans les détails, on peut faire en sorte (en choisissant correctement les vecteurs qu'on ajoute) que la matrice représentative de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$  soit triangulaire supérieure.
- C'est la méthode développée dans cette question. Ici,  $f$  n'a qu'une valeur propre. Le sous-espace propre  $E_0(f)$  a pour base la famille  $((-1, -1, 1))$ . On complète alors cette famille en ajoutant  $e'_2$  et  $e'_3$  choisis de sorte à ce que la matrice représentant  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$  ainsi formée soit triangulaire. □

3. On pose :  $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

On note  $h$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice représentative dans la base  $\mathcal{B}$  est la matrice  $M$ .

a) Déterminer deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $M = \alpha A + \beta I$ , où  $I$  est la matrice identité d'ordre 3.

*Démonstration.*

On remarque :

$$\begin{aligned}
 3M &= \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
 &= (-1) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= -3A + 3I
 \end{aligned}$$

On en déduit :  $M = -A + I$ . Les valeurs cherchées sont donc :  $\alpha = -1$  et  $\beta = 1$ .

### Commentaire

Les expressions des matrices  $M$  et  $A$  font toutes deux apparaître le coefficient  $\frac{1}{3}$ . Il faut y prendre garde pour cette question. Une manière de contourner le problème est d'effectuer les manipulations sur la matrice  $3M$  (ce qui explique la rédaction précédente). □

b) Déterminer la matrice  $M'$  de  $h$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

*Démonstration.*

- D'après la question précédente :  $M = -A + I$ . Ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned}\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) &= -\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}) && (\text{car } I = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{id}_{\mathbb{R}^3})) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(-f + \text{id}_{\mathbb{R}^3}) && (\text{par linéarité de l'application } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot))\end{aligned}$$

L'application  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot)$  étant bijective, on en déduit :  $h = -f + \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ .

- On en déduit alors :

$$\begin{aligned}\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(h) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(-f + \text{id}_{\mathbb{R}^3}) \\ &= -\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}) && (\text{par linéarité de l'application } \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\cdot)) \\ &= -T + I && (\text{car } I = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}))\end{aligned}$$

Ainsi :  $M' = -T + I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

#### Commentaire

- Cette manière de rédiger est conseillée car témoigne d'une prise de recul importante et permet de s'émanciper de calculs.
- Cependant, il est tout à fait possible de rédiger comme en question 2.b). Par exemple :

$$\begin{aligned}\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h(e'_2)) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_2) \\ &= ME'_2 = (-A + I)E'_2 = -AE'_2 + E'_2 = -E'_1 + E'_2\end{aligned}$$

Donc  $h(e'_2) = (-1) \cdot e'_1 + 1 \cdot e'_2 + 0 \cdot e'_3$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(h(e'_2)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(on retrouve, comme attendu, la deuxième colonne de la matrice  $M'$ )

Notons qu'on se sert ici des calculs précédents, ce qui permet de ne pas avoir à effectuer le calcul  $ME'_2$  de manière directe. □

c) En déduire que  $M$  est inversible.

*Démonstration.*

- La matrice  $M'$  est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

On en déduit que  $M'$  est inversible.

- Or  $M'$  est la représentation matricielle, dans la base  $\mathcal{B}'$ , de l'endomorphisme  $h$ .

On en déduit que  $h$  est bijectif.

- Remarquons enfin que  $M$  est la représentation matricielle, dans la base  $\mathcal{B}$ , de l'endomorphisme bijectif  $h$ .

On en déduit que  $M$  est inversible.

### Commentaire

- On a opté ici pour une rédaction qui met en avant les liens entre l'endomorphisme  $h$  et ses matrices représentatives. On met ici en avant une correspondance déjà listée en question 2.b), à savoir :

$$h \text{ bijectif} \longleftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) \text{ inversible}$$

- Les matrices  $M$  et  $M'$  sont les représentations matricielles, dans des bases différentes ( $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ ), du même endomorphisme  $h$ . Ces deux matrices sont donc semblables. Plus précisément :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) & = & P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} & \times & \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(h) & \times & P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ M & = & P & \times & M' & \times & P^{-1} \end{array}$$

où l'on a noté  $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ .  
On peut déduire de cette écriture que  $M$  est inversible puisque s'écrit comme produit de matrices inversibles. □

d) À l'aide de la question 1.a), calculer  $(M - I)^3$ .

En déduire l'expression de  $M^{-1}$  en fonction des matrices  $I$ ,  $M$  et  $M^2$ .

*Démonstration.*

- D'après la question 3.a),  $M = -A + I$ . Ainsi :  $M - I = -A$ .
- On en déduit :

$$(M - I)^3 = (-A)^3 = (-1)^3 A^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \quad (\text{d'après la question 1.a)})$$

$$(M - I)^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

- Or, comme  $M$  et  $I$  commutent ( $I$  commute avec toute matrice du même ordre) :

$$(M - I)^3 = M^3(-I)^0 + 3M^2(-I)^1 + 3M(-I)^2 + (-I)^3 = M^3 - 3M^2 + 3M - I$$

D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned} M^3 - 3M^2 + 3M - I &= 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \\ \text{donc} \quad M^3 - 3M^2 + 3M &= I \\ \text{et} \quad M(M^2 - 3M + 3I) &= I \end{aligned}$$

On en déduit que la matrice  $M$  est inversible, d'inverse  $M^{-1} = M^2 - 3M + 3I$ .

□

e) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer  $M^n$  pour tout entier naturel  $n$ , en fonction des matrices  $I$ ,  $A$  et  $A^2$ .

Cette formule est-elle vérifiée pour  $n = -1$  ?

*Démonstration.*

- Rappelons tout d'abord que d'après la question 3.a) :  $M = I - A$ .
- De plus :  $A^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ .

On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout  $k \geq 3$ ,  $A^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ .  
(ou alors on remarque :  $\forall k \geq 3$ ,  $A^k = A^3 A^{k-3} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} A^{k-3} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ )



- Les matrices  $I$  et  $-A$  commutent (car la matrice  $I$  commute avec toutes les matrices du même ordre).
- Soit  $n \geq 2$ . D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
M^n &= (I - A)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (I)^{n-k} (-A)^k \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} I^{n-k} (-1)^k A^k \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k I A^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k A^k \quad (\text{car : } \forall j \in \mathbb{N}, I^j = I) \\
&= \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} (-1)^k A^k + \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} (-1)^k A^k \quad (\text{ce découpage est valable car } n \geq 2) \\
&= \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} (-1)^k A^k \quad (\text{car : } \forall k \geq 3, A^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}) \\
&= \binom{n}{0} (-1)^0 A^0 + \binom{n}{1} (-1)^1 A^1 + \binom{n}{2} (-1)^2 A^2 \\
&= I - nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2
\end{aligned}$$

- De plus :  $I - 0 \cdot A + 0 \cdot A^2 = I$  et  $M^0 = I$ .  
La formule précédente reste valable pour  $n = 0$ .  
De même :  $I - 1 \cdot A + 0 \cdot A^2 = I - A = M$  et  $M^1 = M$ .  
La formule précédente reste valable pour  $n = 1$ .

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M^n = I - nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2$ .

### Commentaire

- La « relation de Chasles » stipule que pour tout  $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$  tel que  $m \leq p \leq n$  :

$$\sum_{k=m}^n u_k = \sum_{k=m}^p u_k + \sum_{k=p+1}^n u_k$$

(la somme la plus à droite est nulle si  $p = n$ )

où  $(u_n)$  est une suite quelconque de réels ou de matrices.

- Dans cette question, on est dans le cas où  $m = 0$  et  $p = 2$ .  
L'argument  $n \geq 2$  est donc essentiel pour découper la somme.  
Les cas  $n = 0$  et  $n = 1$  doivent donc être traités à part.
- Ici, la matrice  $A$  vérifie :  $\forall k \geq 2, A^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ . Elle est dite nilpotente d'indice 3 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 4, il aurait fallu traiter à part les cas  $n = 0$  et  $n = 1$  mais aussi le cas  $n = 2$  (le découpage de la somme est alors valable pour  $n \geq 3$ ).

- Enfin, lorsque  $n = -1$ , le membre droit de l'égalité devient :

$$\begin{aligned}
 & I - (-1)A + \frac{(-1)(-2)}{2}A^2 \\
 = & I + A + A^2 \\
 = & I + (I - M) + (I - M)^2 && (\text{car } A = I - M) \\
 = & 2I - M + (I^2 - 2M + M^2) && (\text{car } I \text{ et } -M \text{ commutent}) \\
 = & 3I - 3M + M^2 = M^{-1} && (\text{d'après la question 3.d})
 \end{aligned}$$

La formule est bien vérifiée si  $n = -1$ .

□

## Partie B

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme  $g$  de  $E$  vérifiant  $g \circ g = f$ . On suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice  $V$  carrée d'ordre 3 telle que :

$$V^2 = T$$

On note  $g$  l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base  $\mathcal{B}'$  est  $V$ .

4. Montrer :  $VT = TV$ . En déduire :  $g \circ f = f \circ g$ .

*Démonstration.*

- Comme  $T = V^2$ , on a :  $VT = V \times V^2 = V^3 = V^2 \times V = TV$ .

$$VT = TV$$

- Cette égalité se réécrit :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(g)$$

ou encore

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f \circ g)$$

(par propriété de l'application  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\cdot)$ )

L'application  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\cdot)$  étant bijective, on en déduit :  $g \circ f = f \circ g$ .

$$\text{On a bien : } g \circ f = f \circ g.$$

□

5. a) Montrer que  $g(e'_1)$  appartient au noyau de  $f$ .

En déduire qu'il existe un réel  $a$  tel que :  $g(e'_1) = a \cdot e'_1$ .

*Démonstration.*

- Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned}
 f(g(e'_1)) &= (f \circ g)(e'_1) \\
 &= (g \circ f)(e'_1) && (\text{d'après ce qui précède}) \\
 &= g(f(e'_1)) = g(0_{\mathbb{R}^3}) && (\text{car } e'_1 \in \text{Ker}(f)) \\
 &= 0_{\mathbb{R}^3} && (\text{car } g \text{ est linéaire})
 \end{aligned}$$

$$g(e'_1) \in \text{Ker}(f)$$

- Or, d'après la question 1.c),  $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(e'_1)$ .

Comme  $g(e'_1) \in \text{Ker}(f) = \text{Vect}(e'_1)$ , il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que :  $g(e'_1) = a \cdot e'_1$ .

**Commentaire**

- On est ici confronté à une question théorique. En effet, afin de démontrer l'appartenance de  $g(e'_1)$  à  $\text{Ker}(f)$ , on se sert de propriétés précédemment démontrées sur  $f$  sans avoir recours à la définition explicite de  $f$  et de  $g$ .
- Il faut noter qu'une question théorique n'est pas forcément une question difficile. Illustrons ce propos avec la question étudiée. Il s'agit de démontrer que le vecteur  $g(e'_1)$  appartient au noyau de  $f$ . Par définition, il s'agit de démontrer :  $f(g(e'_1)) = 0_{\mathbb{R}^3}$ . On forme ainsi naturellement  $f \circ g$  et on conclut à l'aide de la question précédente. C'est donc la connaissance basique du cours qui est évaluée ici (plus précisément la notion de noyau). Il faut donc considérer cette question comme très abordable. □

b) Montrer que  $g(e'_2) - a \cdot e'_2$  appartient aussi au noyau de  $f$ .

En déduire qu'il existe un réel  $b$  tel que :  $g(e'_2) = b \cdot e'_1 + a \cdot e'_2$ .

*Démonstration.*

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
 f(g(e'_2) - a \cdot e'_2) &= f(g(e'_2)) - a \cdot f(e'_2) && (\text{car } f \text{ est linéaire}) \\
 &= g(f(e'_2)) - a \cdot f(e'_2) && (\text{car } f \circ g = g \circ f) \\
 &= g(e'_1) - a \cdot e'_1 && (\text{car } f(e'_2) = e'_1) \\
 &= a \cdot e'_1 - a \cdot e'_1 && (\text{d'après la question précédente}) \\
 &= 0_{\mathbb{R}^3}
 \end{aligned}$$

$$g(e'_2) - a \cdot e'_2 \in \text{Ker}(f)$$

- Or, d'après la question 1.c),  $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(e'_1)$ .

Comme  $g(e'_2) - a \cdot e'_2 \in \text{Ker}(f) = \text{Vect}(e'_1)$ , il existe  $b \in \mathbb{R}$  tel que :  $g(e'_2) - a \cdot e'_2 = b \cdot e'_1$ .

**Commentaire**

Cette question est analogue à la précédente. Il s'agit alors simplement d'appliquer les mécanismes du raisonnement précédent au vecteur  $g(e'_2) - a \cdot e'_2$ . □

c) Montrer :  $(f \circ g)(e'_3) = (g \circ f)(e'_3) = a \cdot e'_2 + b \cdot e'_1$ .

En déduire que  $g(e'_3) - a \cdot e'_2 - b \cdot e'_1$  appartient au noyau de  $f$ .

*Démonstration.*

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)(e'_3) &= (g \circ f)(e'_3) && (\text{car } f \circ g = g \circ f) \\
 &= g(f(e'_3)) \\
 &= g(e'_2) \\
 &= a \cdot e'_2 + b \cdot e'_1 && (\text{d'après la question précédente})
 \end{aligned}$$

$$\text{On a bien : } (f \circ g)(e'_3) = (g \circ f)(e'_3) = a \cdot e'_2 + b \cdot e'_1.$$

- On a alors :

$$\begin{aligned}
 f(g(e'_3) - a \cdot e'_3 - b \cdot e'_2) &= f(g(e'_3)) - a \cdot f(e'_3) - b \cdot f(e'_2) && (\text{car } f \text{ est linéaire}) \\
 &= f(g(e'_3)) - a \cdot e'_2 - b \cdot e'_1 \\
 &= (f \circ g)(e'_3) - (a \cdot e'_2 + b \cdot e'_1) \\
 &= 0_{\mathbb{R}^3} && (\text{d'après ce qui précède})
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien :  $g(e'_3) - a \cdot e'_3 - b \cdot e'_2 \in \text{Ker}(f)$ .

□

d) En déduire qu'il existe un réel  $c$  tel que :  $V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ .

*Démonstration.*

- Comme  $g(e'_3) - a \cdot e'_3 - b \cdot e'_2 \in \text{Ker}(f) = \text{Vect}(e'_1)$ , il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que :

$$g(e'_3) - a \cdot e'_3 - b \cdot e'_2 = c \cdot e'_1$$

- Résumons la situation :

$$\times g(e'_1) = a \cdot e'_1 + 0 \cdot e'_2 + 0 \cdot e'_3 \text{ donc } \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(g(e'_1)) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\times g(e'_2) = b \cdot e'_1 + a \cdot e'_2 + 0 \cdot e'_3 \text{ donc } \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(g(e'_2)) = \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\times g(e'_3) = c \cdot e'_1 + b \cdot e'_2 + a \cdot e'_3 \text{ donc } \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(g(e'_3)) = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}.$$

On a bien démontré qu'il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ .

□

6. Calculer  $V^2$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $c$ , puis en utilisant l'hypothèse  $V^2 = T$ , obtenir une contradiction.

*Démonstration.*

- Tout d'abord :

$$V^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & 2ac + b^2 \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

- Comme  $V^2 = T$ , on en déduit, par identification des coefficients de ces matrices :

$$\begin{cases} a^2 = 0 \\ 2ab = 1 \\ 2ac + b^2 = 0 \end{cases}$$

Or :  $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ .

On a donc  $a = 0$  et  $2ab = 0$ .

Contradiction !

### Commentaire

L'hypothèse de début de **Partie B** mène à une contradiction. Elle est donc fausse. On en conclut qu'il n'existe pas de matrice  $V \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $V^2 = T$ . Ainsi, il n'existe pas d'endomorphisme  $g$  de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $g \circ g = f$ .

□

## Exercice 2

On considère la fonction  $f$  définie sur l'ouvert de  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  par :

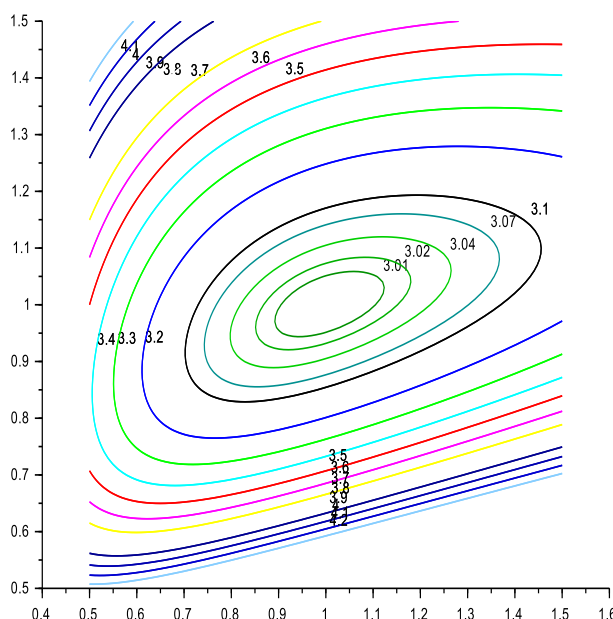
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, f(x, y) = \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}$$

La première partie consiste en l'étude des extrema éventuels de la fonction  $f$ , et la deuxième partie a pour objectif l'étude d'une suite implicite définie à l'aide de la fonction  $f$ .

Ces deux parties sont indépendantes.

### Partie A

1. On utilise **Scilab** pour tracer les lignes de niveau de la fonction  $f$ . On obtient le graphe suivant :



Établir une conjecture à partir du graphique quant à l'existence d'un extremum local pour  $f$ , dont on donnera la nature, la valeur approximative et les coordonnées du point en lequel il semble être atteint.

*Démonstration.*

- Le graphique fait apparaître les lignes de niveau de la fonction  $f$ . Ces courbes relient les points  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  pour lesquels la fonction  $f$  prend la même valeur. Sur la représentation, on constate que la fonction  $f$  prend des valeurs de plus en plus grande en s'écartant du point  $(1, 1)$ .
- De plus, en ce point, la valeur de la fonction  $f$  est :

$$f(1, 1) = \frac{1}{1^2} + 1^2 + \frac{1}{1} = 3$$

Cette valeur est plus faible que les valeurs des lignes de niveau apparaissant sur le graphique.

On peut émettre la conjecture que la fonction  $f$  admet un minimum local, de valeur 3, au point  $(1, 1)$ . □

2. a) Démontrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ .

*Démonstration.*

La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  car est la somme  $f = f_1 + f_2 + f_3$  des fonctions :

- ×  $f_1 : (x, y) \mapsto \frac{x}{y^2}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  en tant que quotient de fonctions de deux variables polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ .
- ×  $f_2 : (x, y) \mapsto y^2$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  en tant que fonction de deux variables polynomiale.
- ×  $f_3 : (x, y) \mapsto \frac{1}{x}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  en tant qu'inverse d'une fonction de deux variables polynomiale qui ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ .

La fonction  $f$  est bien de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ .

### Commentaire

- Il est important de noter que les fonctions  $f_2$  et  $f_3$  sont bien des fonctions de deux variables même si leur expression n'en fait apparaître qu'une. Considérer les fonctions  $y \mapsto y^2$  et  $x \mapsto \frac{1}{x}$  démontre un manque de compréhension des objets utilisés et est donc sanctionné.
- Il en est de même pour chacune des deux fonctions du quotient définissant  $f_1$ .

Plus précisément, cette fonction est le quotient :  $f_1 = \frac{h_1}{h_2}$  de :

×  $h_1 : (x, y) \mapsto x$  qui est une fonction de deux variables polynomiale.

×  $h_2 : (x, y) \mapsto y^2$  qui est une fonction de deux variables polynomiale.

Rappelons qu'une fonction de deux variables polynomiale est une fonction apparaissant comme combinaison linéaire de fonctions monomiales (fonctions de la forme  $(x, y) \mapsto x^r y^s$  avec  $(r, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ).

□

b) Calculer les dérivées partielles premières de  $f$ , puis démontrer que  $f$  admet un unique point critique, noté  $A$ , que l'on déterminera.

*Démonstration.*

- La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ .  
Elle admet donc des dérivées partielles premières sur cet ensemble.
- Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ . Tout d'abord :

$$\partial_1(f)(x, y) = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}$$

Par ailleurs :

$$\partial_2(f)(x, y) = -\frac{2x}{y^3} + 2y$$

$$\partial_1(f)(x, y) = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x, y) = -\frac{2x}{y^3} + 2y$$

- D'autre part :

$$(x, y) \text{ est un point critique de } f \Leftrightarrow \nabla(f)(x, y) = 0_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1(f)(x, y) = 0 \\ \partial_2(f)(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi : } (x, y) \text{ est un point critique de } f &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} = 0 \\ -\frac{2x}{y^3} + 2y = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2} \\ 2y = \frac{2x}{y^3} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = \frac{x}{y^3} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(car la fonction } x \mapsto \frac{1}{x^2} \text{ réalise} \\ \text{une bijection de } \mathbb{R}_+^* \text{ dans } \mathbb{R}_+^*) \end{array} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = \frac{x}{y^3} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(en remplaçant } y \text{ par } x \text{ dans la} \\ \text{seconde équation)} \end{array} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = \frac{1}{x^2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^3 = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(car la fonction } x \mapsto x^3 \text{ réalise} \\ \text{une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}) \end{array}
\end{aligned}$$

On en déduit que la fonction  $f$  admet comme unique point critique le point  $A$  de coordonnées  $(1, 1)$ .

### Commentaire

- La difficulté de cette question réside dans le fait qu'il n'existe pas de méthode générale pour résoudre l'équation  $\nabla(f)(x, y) = 0$  sur  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ .  
On est donc confronté à une question bien plus complexe qu'une résolution de système d'équations linéaires (que l'on résout aisément à l'aide de la méthode du pivot de Gauss).
- Lors de la recherche de points critiques, on doit faire appel à des méthodes ad hoc. Il est par exemple assez fréquent de faire apparaître une équation du type :

$$\varphi(x) = \varphi(y)$$

où  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction bijective. En réalité, c'est le caractère injectif ( $\varphi$  est strictement monotone sur  $\mathbb{R}$  par exemple) qui nous intéresse ici puisqu'il permet de conclure :

$$x = y$$

En injectant cette égalité  $x = y$  dans la seconde équation, on obtient une nouvelle équation qui ne dépend plus que d'une variable et qu'il est donc plus simple de résoudre.

C'est la stratégie utilisée ici avec la fonction  $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x^2}$  qui est strictement décroissante (et donc injective) sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

### Commentaire

- Il est aussi possible de détailler, pas à pas, l'équivalence  $\frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow y = x$ .  
Plus précisément :

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow y^2 = x^2 \Leftrightarrow \sqrt{y^2} = \sqrt{x^2} \Leftrightarrow |y| = |x| \Leftrightarrow y = x$$

La dernière étape est obtenue par le caractère positif de  $x$  et de  $y$ .

- Détaillons enfin la dernière étape de résolution de la question.

$$x^3 = 1 \Leftrightarrow x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ OU } x^2 + x + 1 = 0$$

Or le polynôme  $P(X) = X^2 + X + 1$  n'admet pas de racine réelle car il est de discriminant  $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ . On en déduit :  $x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ .

- On a opté pour une rédaction différente. Détaillons l'argument utilisé. On cherche à résoudre  $\psi(x) = 1$  où  $\psi : x \mapsto x^3$ . Cette équation admet comme solution évidente  $x = 1$  et c'est l'unique solution car la fonction  $\psi$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  (encore une fois, le caractère injectif suffisait ici).  $\square$

- c) Calculer les dérivées partielles secondes de  $f$ , puis démontrer que la matrice hessienne de  $f$  au point  $A$  est la matrice  $H$  définie par :  $H = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ .

*Démonstration.*

- La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ .  
Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2 sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ .
- Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ . Tout d'abord :

$$\partial_{11}^2(f)(x, y) = -\frac{-2}{x^3} = \frac{2}{x^3}$$

- Ensuite :

$$\partial_{12}^2(f)(x, y) = -\frac{2}{y^3} = \partial_{21}^2(f)(x, y)$$

La dernière égalité est obtenue en vertu du théorème de Schwarz puisque la fonction  $f$  est  $\mathcal{C}^2$  sur l'**ouvert**  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ .

- Enfin :

$$\partial_{22}^2(f)(x, y) = -2x \frac{-3}{y^4} + 2 = \frac{6x}{y^4} + 2$$

$$\text{Pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad \partial_{11}^2(f)(x, y) = \frac{2}{x^3}, \quad \partial_{12}^2(f)(x, y) = -\frac{2}{y^3} = \partial_{21}^2(f)(x, y)$$

$$\text{et } \partial_{22}^2(f)(x, y) = \frac{6x}{y^4} + 2.$$

### Commentaire

- Il faut penser à utiliser le théorème de Schwarz dès que la fonction à deux variables considérée est  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^2$ .
- Ici, le calcul de  $\partial_{12}^2(f)(x, y)$  et  $\partial_{21}^2(f)(x, y)$  est aisé. Il faut alors concevoir le résultat du théorème de Schwarz comme une mesure de vérification : en dérivant par rapport à la 1<sup>ère</sup> variable puis par rapport à la 2<sup>ème</sup>, on doit obtenir le même résultat que dans l'ordre inverse.



- On rappelle que la matrice hessienne de  $f$  en un point  $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  est :

$$\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_{11}^2(f)(x, y) & \partial_{12}^2(f)(x, y) \\ \partial_{21}^2(f)(x, y) & \partial_{22}^2(f)(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & -\frac{2}{y^3} \\ -\frac{2}{y^3} & \frac{6x}{y^4} + 2 \end{pmatrix}$$

- On en déduit :

$$H = \nabla^2(f)(1, 1) = \begin{pmatrix} \frac{2}{1^3} & -\frac{2}{1^3} \\ -\frac{2}{1^3} & \frac{6}{1^4} + 2 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

□

- d) En déduire que la fonction  $f$  admet au point  $A$  un extremum local, préciser si cet extremum est un minimum, et donner sa valeur.

*Démonstration.*

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Rappelons tout d'abord que, pour toute matrice  $H \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est une valeur propre de } H &\Leftrightarrow H - \lambda I \text{ n'est pas inversible} \\ &\Leftrightarrow \det(H - \lambda I) = 0 \end{aligned}$$

- Or :

$$\begin{aligned} \det(\nabla^2(f)(1, 1) - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & 8 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (2 - \lambda)(8 - \lambda) - (-2)^2 \\ &= (16 - 10\lambda + \lambda^2) - 4 \\ &= 12 - 10\lambda + \lambda^2 \end{aligned}$$

Le polynôme  $P(X) = 12 - 10X + X^2$  admet pour discriminant :

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 12 = 100 - 48 = 52 > 0$$

Ainsi,  $P$  admet deux racines distinctes :

$$\lambda_1 = \frac{10 + \sqrt{52}}{2} = \frac{10 + 2\sqrt{13}}{2} = 5 + \sqrt{13} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{10 - \sqrt{52}}{2} = \frac{10 - 2\sqrt{13}}{2} = 5 - \sqrt{13}$$

Enfin, comme  $13 < 16$ , on a :  $\sqrt{13} < \sqrt{16} = 4$  et  $-\sqrt{13} > -4$ . On en déduit :

$$\lambda_2 = 5 - \sqrt{13} > 5 - 4 = 1 > 0$$

Ainsi,  $\nabla^2(f)(1, 1)$  admet pour valeurs propres  $\lambda_1 = 5 + \sqrt{13} > 0$  et  $\lambda_2 > 0$ .  
La fonction  $f$  admet donc un minimum local au point  $(1, 1)$ .

□

## Partie B

Pour tout entier  $n$  non nul, on note  $h_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\forall x > 0, \quad h_n(x) = f(x^n, 1) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

3. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul, la fonction  $h_n$  est strictement décroissante sur  $]0, 1[$  et strictement croissante sur  $[1, +\infty[$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- La fonction  $h_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  car elle est la somme des fonctions :
  - $\times x \mapsto x^n + 1$  dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  car polynomiale.
  - $\times x \mapsto \frac{1}{x^n}$  dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  en tant qu'inverse de la fonction  $x \mapsto x^n$  :
    - dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  car polynomiale,
    - et qui ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

$$h'_n(x) = nx^{n-1} - \frac{n}{x^{n+1}} = n \frac{x^{2n} - 1}{x^{n+1}}$$

Comme  $n > 0$  et  $x^{n+1} > 0$ , la quantité  $h'_n(x)$  est du signe de  $x^{2n} - 1$ . On en déduit :

$$h'_n(x) > 0 \Leftrightarrow x^{2n} - 1 > 0 \Leftrightarrow x^{2n} > 1 \Leftrightarrow x > 1$$

La dernière équivalence est obtenue par stricte croissance de la fonction  $x \mapsto x^{2n}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- On en déduit le tableau de variations suivant.

| $x$                 | 0         | 1          | $+\infty$          |
|---------------------|-----------|------------|--------------------|
| Signe de $h'_n(x)$  |           | -          | +                  |
| Variations de $h_n$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\nearrow +\infty$ |

### Commentaire

Afin de déterminer le signe de la quantité  $x^{2n} - 1$ , on pouvait rédiger autrement.

- Une première méthode consiste à étudier la fonction  $g_n : x \mapsto x^{2n} - 1$ .  
Cette fonction étant polynomiale, elle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$g'_n(x) = 2nx^{2n-1} > 0$$

La fonction  $g_n$  est donc strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ . Enfin, comme  $g_n(1) = 0$  :

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad x^{2n} - 1 < 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in ]1, +\infty[, \quad x^{2n} - 1 > 0$$

- Une deuxième méthode consiste à factoriser  $x^{2n} - 1$  :

$$x^{2n} - 1 = (x^n)^2 - 1^2 = (x^n - 1)(x^n + 1)$$

Comme  $x > 0$ , alors  $x^n > 0$  et  $x^n + 1 > 0$ . Le signe de  $x^{2n} - 1$  est donc celui de  $x^n - 1$ . Or :

$$x^n - 1 = (x - 1)(1 + x + \dots + x^{n-1})$$

Comme  $1 + x + \dots + x^{n-1} > 0$ , le signe de  $x^n - 1$  (et donc de  $x^{2n} - 1$ ) est celui de  $x - 1$ .  $\square$

4. En déduire que pour tout entier  $n$  non nul, l'équation  $h_n(x) = 4$  admet exactement deux solutions, notées  $u_n$  et  $v_n$  et vérifiant :  $0 < u_n < 1 < v_n$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- La fonction  $h_n$  est :

× continue sur  $]0, 1[$ ,

× strictement décroissante sur  $]0, 1[$ .

Elle réalise donc une bijection de  $]0, 1[$  sur  $h_n(]0, 1[)$ . Or :

$$h_n(]0, 1[) = ]h_n(1), \lim_{x \rightarrow 0} h_n(x)[ = ]3, +\infty[$$

Comme  $4 \in ]3, +\infty[$ , l'équation  $h_n(x) = 4$  admet une unique solution sur  $]0, 1[$ .

On note  $u_n$  cette solution.

- De même, la fonction  $h_n$  est :

× continue sur  $]1, +\infty[$ ,

× strictement croissante sur  $]1, +\infty[$ .

Elle réalise donc une bijection de  $]1, +\infty[$  sur  $h_n(]1, +\infty[)$ . Or :

$$h_n(]1, +\infty[) = ]h_n(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} h_n(x)[ = ]3, +\infty[$$

Comme  $4 \in ]3, +\infty[$ , l'équation  $h_n(x) = 4$  admet une unique solution sur  $]1, +\infty[$ .

On note  $v_n$  cette solution.

- On remarque enfin :  $h_n(1) = 3 \neq 4$ . Ainsi,  $x = 1$  n'est pas solution de l'équation  $h_n(x) = 4$ .

Pour tout entier  $n$  non nul, l'équation  $h_n(x) = 4$  admet exactement deux solutions, notées  $u_n$  et  $v_n$  et vérifiant :  $0 < u_n < 1 < v_n$ . □

5. a) Démontrer :

$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1} - 1)}{x^{n+1}}$$

*Démonstration.*

Soit  $x > 0$  et soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} h_{n+1}(x) - h_n(x) &= \left( x^{n+1} + \cancel{x} + \frac{1}{x^{n+1}} \right) - \left( x^n + \cancel{x} + \frac{1}{x^n} \right) \\ &= \frac{x^{2n+2} + 1}{x^{n+1}} - \frac{x^{2n+1} + x}{x^{n+1}} \\ &= \frac{x^{2n+2} - x^{2n+1} - (x-1)}{x^{n+1}} \\ &= \frac{x^{2n+1}(x-1) - (x-1)}{x^{n+1}} = \frac{(x-1)(x^{2n+1} - 1)}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1} - 1)}{x^{n+1}} \quad \square$$

b) En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(v_n) \geq 4$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- D'après la question précédente, pour tout  $x > 0$  :

$$h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1} - 1)}{x^{n+1}}$$

Comme  $x > 0$  alors  $x^{n+1} > 0$ . Ainsi, la quantité  $h_{n+1}(x) - h_n(x)$  est du signe du produit  $(x-1)(x^{2n+1} - 1)$ . Notons alors que pour tout  $x > 1$ ,  $x^{2n+1} - 1 > 0$  (vu précédemment).

$$\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 1, h_{n+1}(x) - h_n(x) > 0.$$

- On applique l'inégalité précédente à  $v_n > 1$  (d'après la question 4.). On obtient :

$$h_{n+1}(v_n) - h_n(v_n) > 0 \quad \text{ou encore} \quad h_{n+1}(v_n) > h_n(v_n) = 4$$

$$\text{On a bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(v_n) \geq 4.$$

□

c) Montrer alors que la suite  $(v_n)$  est décroissante.

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- Par définition de  $v_{n+1}$ , on a :  $h_{n+1}(v_{n+1}) = 4$ . Ainsi, d'après la question précédente :

$$h_{n+1}(v_n) \geq h_{n+1}(v_{n+1})$$

- De plus, on sait d'après la question 4. que :

×  $v_n > 1$  et  $v_{n+1} > 1$ ,

× la fonction  $h_{n+1}$  réalise une bijection de  $]1, +\infty[$  sur  $]3, +\infty[$ .

La réciproque de cette bijection, définie de  $]3, +\infty[$  sur  $]1, +\infty[$  est strictement croissante car de même monotonie que  $h_{n+1}$  sur  $]1, +\infty[$ . En l'appliquant de part et d'autre de l'inégalité :

$$v_n \geq v_{n+1}$$

$$\text{On en conclut : } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \geq v_{n+1}. \text{ La suite } (v_n) \text{ est donc décroissante.}$$

### Commentaire

- La **Partie B** consiste en l'étude de la suite  $(v_n)$ . On parle ici de « suite implicite » car on n'a pas accès à la définition explicite de la suite  $(v_n)$  mais simplement à la propriété qui permet de définir chacun de ses termes, à savoir :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n$  est l'unique racine de l'équation  $h_n(x) = 4$  sur  $]1, +\infty[$

On comprend alors que l'étude de  $(v_n)$  va passer par l'étude des propriétés de la fonction  $h_n$ .

- De cette définition, on tire la propriété :  $\forall m \in \mathbb{N}^*, h_m(v_m) = 4$ .

Cette propriété est au cœur de l'étude de la suite implicite  $(v_n)$ .

On l'utilise en 5.b) pour  $m = n$  et en 5.c) pour  $m = n + 1$ .

- Comme la suite  $(v_n)$  est définie de manière implicite, on n'étudie pas la monotonie de  $(v_n)$  à l'aide de la différence  $v_{n+1} - v_n$ . Il est par contre très classique de passer par l'inégalité :

$$h_{n+1}(v_n) \geq h_{n+1}(v_{n+1})$$

et de conclure :  $v_n \geq v_{n+1}$  à l'aide d'une propriété de  $h_{n+1}$ .

□

6. a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  converge vers un réel  $\ell$  et montrer :  $\ell \geq 1$ .

*Démonstration.*

La suite  $(v_n)$  est :

- × décroissante d'après la question 5.c),
- × minorée par 1 ( $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n > 1$ ) d'après la question 4.

On en conclut que la suite  $(v_n)$  converge vers un réel  $\ell \geq 1$ .

□

b) En supposant que  $\ell > 1$ , démontrer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n^n = +\infty$ .

En déduire une contradiction.

*Démonstration.*

Dans cette question, on suppose  $\ell > 1$ .

- Comme  $\ell \neq 0$ , on a :  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell$ . Ainsi :

$$(v_n)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad (\text{car } \ell > 1)$$

On a bien :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)^n = +\infty$ .

#### Commentaire

Comme la suite  $(v_n)$  est à termes strictement positifs, on pouvait aussi écrire :

$$(v_n)^n = \exp(n \ln(v_n))$$

Puis :  $\ln(v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ell)$  puisque  $\ell \neq 1$ .

Ainsi :  $n \ln(v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(\ell) \rightarrow +\infty$  car  $\ln(\ell) > 0$ . Et enfin, par composition de limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp(n \ln(v_n)) = +\infty$$

- Remarquons alors :

$$h_n(v_n) = (v_n)^n + 1 + \frac{1}{(v_n)^n}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)^n = +\infty$ , on en conclut :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(v_n) = +\infty$$

Or, par définition de la suite  $(v_n)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $h_n(v_n) = 4$  et ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(v_n) = 4$$

Contradiction !

#### Commentaire

C'est encore une fois la propriété de définition des termes de la suite  $(v_n)$  qui est utilisée ici ( $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_n(v_n) = 4$ ). On insiste sur le fait que cette propriété est fondamentale pour l'étude de la suite implicite  $(v_n)$ .

□

c) Déterminer la limite de  $(v_n)$ .

*Démonstration.*

- En question **6.a)**, on a démontré que la suite  $(v_n)$  converge vers un réel  $\ell \geq 1$ .
- En question **6.b)**, on a démontré que l'hypothèse  $\ell > 1$  menait à une contradiction. On en conclut que sa négation est vérifiée, à savoir :  $\ell \leq 1$ .

Ainsi, la suite  $(v_n)$  converge vers  $\ell = 1$ .

#### Commentaire

L'énoncé donne les réponses aux questions **6.a)** et **6.b)**. Il est donc possible de traiter la question **6.c)**, question bilan, sans avoir réussi à traiter les questions précédentes. □

7. a) Montrer :  $\forall n \geq 1, v_n \leq 3$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- Rappelons tout d'abord :  $v_n > 1$  (question **4.**). D'autre part :

$$\begin{aligned} v_n \leq 3 &\Leftrightarrow h_n(v_n) \leq h_n(3) && (\text{car } h_n \text{ est strictement croissante sur } ]1, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow 4 \leq h_n(3) && (\text{par définition de } v_n) \end{aligned}$$

- Or, comme  $3^n \geq 3$  (puisque  $n > 0$ ) :

$$h_n(3) = 3^n + 1 + \frac{1}{3^n} \geq 3 + 1 + \frac{1}{3^n} > 4$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a bien :  $h_n(3) \geq 4$  et donc  $v_n \geq 3$ .

#### Commentaire

- Encore une fois, c'est la propriété de définition des termes de la suite  $(v_n)$  qui est utilisée ici. C'est logique puisqu'on ne connaît pas d'expression explicite des termes de  $(v_n)$ .
- La présence de la quantification «  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  » peut faire penser à utiliser une récurrence. Ce type de raisonnement nécessite l'existence d'une propriété liant les termes de rangs successifs afin pouvoir mettre en œuvre l'étape d'hérédité. C'est pourquoi la récurrence est l'outil de base de démonstration des propriétés des suites récurrentes d'ordre 1 (le terme au rang  $n+1$  s'exprime directement en fonction du terme au rang  $n$ ). L'utilisation est plus rare dans le cas des suites implicites mais était possible dans cette question. En effet, comme la suite  $(v_n)$  est décroissante, on sait que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$v_{n+1} \leq v_n$$

L'étape d'hérédité ne pose pas de problème.

En effet, si l'on sait  $v_n \leq 3$ , on obtient alors, par transitivité :  $v_{n+1} \leq v_n \leq 3$ .

Il reste alors à démontrer la propriété d'initialisation, à savoir  $v_1 \leq 3$ .

Encore une fois, il faut revenir à la propriété de définition des termes de la suite  $(v_n)$  :

$$h_1(v_1) = v_1 + 1 + \frac{1}{v_1} = 4$$

Ainsi :  $v_1 = 3 - \frac{1}{v_1} \leq 3$  car  $v_1 > 0$  (question **4.**). □

- b) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function y = h(n,x)` qui renvoie la valeur de  $h_n(x)$  lorsqu'on lui fournit un entier naturel  $n$  non nul et un réel  $x \in \mathbb{R}_+^*$  en entrée.

*Démonstration.*

```

1  function y = h(n, x)
2      y = x^n + 1 + (1 / x^n)
3  endfunction

```

#### Commentaire

Il n'y a aucune difficulté à coder en **Scilab** une fonction dont l'expression est donnée dans l'énoncé. Il est donc impensable de ne pas traiter cette question. □

- c) Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à  $10^{-5}$  près de  $v_n$  par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier  $n \geq 1$  en entrée :

```

1  function res = v(n)
2      a = 1
3      b = 3
4      while (b-a) > 10 ^ (-5)
5          c = (a+b) / 2
6          if h(n,c) < 4 then
7              .....
8          else
9              .....
10         end
11     end
12     .....
13 endfunction

```

*Démonstration.*

Commençons par rappeler le cadre de la recherche par dichotomie.

*Calcul approché d'un zéro d'une fonction par dichotomie*

**Données :**

- × une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,
- × un intervalle de recherche  $[a, b]$ ,
- × une précision de recherche  $\varepsilon$ .

**Résultat :** une valeur approchée à  $\varepsilon$  près d'un zéro (sur l'intervalle  $[a, b]$ ) de la fonction  $f$ .  
Autrement dit, une valeur approchée (à  $\varepsilon$  près) d'un réel  $x \in [a, b]$  tel que :  $f(x) = 0$ .

- La dichotomie est une méthode itérative dont le principe, comme son nom l'indique, est de découper à chaque itération l'intervalle de recherche en deux nouveaux intervalles. L'intervalle de recherche est découpé en son milieu. On obtient deux nouveaux intervalles :
    - × un intervalle dans lequel on sait que l'on va trouver un zéro de  $f$ .  
Cet intervalle est conservé pour l'itération suivante.
    - × un intervalle dans lequel ne se trouve pas forcément un zéro de  $f$ .  
Cet intervalle n'est pas conservé dans la suite de l'algorithme.
- La largeur de l'intervalle de recherche est ainsi divisée par 2 à chaque itération.  
On itère jusqu'à obtenir un intervalle  $I$  contenant un zéro de  $f$  et de largeur plus faible que  $\varepsilon$ .  
Les points de cet intervalle  $I$  sont tous de bonnes approximations du zéro contenu dans  $I$ .

- C'est le **théorème des valeurs intermédiaires** qui permet de choisir l'intervalle qu'il faut garder à chaque étape. Rappelons son énoncé et précisons maintenant l'algorithme :

### Théorème des Valeurs Intermédiaires

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur l'intervalle  $[a, b]$ .

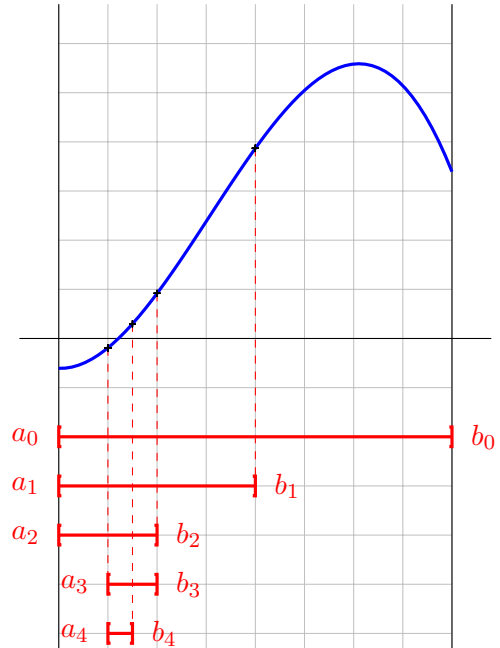
Supposons :  $f(a) f(b) \leq 0$ .

Alors il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = 0$ .

### Calcul des suites $(a_m)$ , $(b_m)$ , $(c_m)$

Cas  $f(a) \leq 0$  et  $f(b) \geq 0$

- Initialement,  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$
- À chaque tour de boucle (tant que  $b_m - a_m > \varepsilon$ ) :
  - ×  $c_m = \frac{a_m + b_m}{2}$  (point milieu de  $[a_m, b_m]$ )
  - × si  $f(c_m) < 0$  alors :
    - \*  $a_{m+1} = c_m$
    - \*  $b_{m+1} = b_m$
  - × si  $f(c_m) \geq 0$  alors :
    - \*  $a_{m+1} = a_m$
    - \*  $b_{m+1} = c_m$



- On construit ainsi une suite  $([a_m, b_m])_{m \in \mathbb{N}}$  de segments emboîtés :
  - × contenant tous un zéro de  $f$ ,
  - × dont la largeur est divisée par deux d'un rang au suivant.
- Il reste enfin à adapter cet algorithme à l'énoncé.  
Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On cherche une valeur de  $x$  telle que :  $h_n(x) = 4$  ce qui s'écrit :

$$h_n(x) - 4 = 0 \quad \text{ou encore} \quad f_n(x) = 0 \quad \text{où} \quad f_n : x \mapsto h_n(x) - 4$$

On se fixe initialement l'intervalle de recherche  $[1, 3]$  de sorte que l'équation  $f_n(x) = 0$  ne possède qu'une solution, à savoir la valeur  $v_n$  qu'on cherche à approcher. D'un point de vue informatique, on crée des variables **a** et **b** destinées à contenir les valeurs successives de  $a_m$  et  $b_m$ . Ces variables sont initialisées respectivement à 1 et 3.

|   |              |
|---|--------------|
| 2 | <b>a</b> = 1 |
| 3 | <b>b</b> = 3 |

On procède alors de manière itérative, tant que l'intervalle de recherche n'est pas de largeur plus faible que la précision  $10^{-5}$  escomptée.

|   |  |
|---|--|
| 4 | <b>while</b> ( <b>b</b> - <b>a</b> ) > 10 ^ (-5) |
|---|--|

On commence par définir le point milieu du segment de recherche.

|   |  |
|---|--|
| 5 | <b>c</b> = ( <b>a</b> + <b>b</b> ) / 2 |
|---|--|

Puis on teste si  $f_n(c) < 0$ , c'est-à-dire si  $h_n(c) < 4$ .

Si c'est le cas, la recherche s'effectue dans le demi-segment de droite.

|   |  |
|---|--|
| 6 | <b>if</b> <b>h</b> ( <b>n</b> , <b>c</b> ) < 4 <b>then</b> |
| 7 | <b>a</b> = <b>c</b>  |



Sinon, elle s'effectue dans le demi-segment de gauche.

```

8           else
9           b = c
10          end

```

En sortie de boucle, on est assuré que le segment de recherche, mis à jour au fur et à mesure de l'algorithme, est de largeur plus faible que  $10^{-5}$  et contient un zéro de  $f_n$ . Tout point de cet intervalle est donc une valeur approchée à  $10^{-5}$  près de ce zéro.

On peut alors choisir de renvoyer le point le plus à gauche du segment.

```

12         res = a

```

On peut tout aussi bien choisir le point le plus à droite :

```

12         res = b

```

Ou encore le point milieu :

```

12         res = (a + b) / 2

```

Ce dernier choix présente un avantage : tout point (dont le zéro recherché) du dernier intervalle de recherche se situe à une distance d'au plus  $\frac{10^{-5}}{2}$  de ce point milieu.

On obtient ainsi une valeur approchée à  $\frac{10^{-5}}{2}$  du zéro recherché.

### Commentaire

- On peut se demander combien de tours de boucle sont nécessaires pour obtenir le résultat. Pour le déterminer, il suffit d'avoir en tête les éléments suivants :

- × l'intervalle de recherche initial  $[1, 3]$  est de largeur 4.

- × la largeur de l'intervalle de recherche est divisée par 2 à chaque tour de boucle.

À la fin du  $m^{\text{ème}}$  tour de boucle, l'intervalle de recherche est donc de largeur  $\frac{4}{2^m}$ .

- × l'algorithme s'arrête lorsque l'intervalle devient de largeur plus faible que  $10^{-5}$ .

On obtient le nombre d'itérations nécessaires en procédant par équivalence :

$$\frac{4}{2^m} \leq 10^{-5} \Leftrightarrow \frac{2^m}{4} \geq 10^5 \quad (\text{par stricte croissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^*)$$

$$\Leftrightarrow 2^m \geq 4 \times 10^5 \quad (\text{car } 4 > 0)$$

$$\Leftrightarrow m \ln(2) \geq \ln(4) + 5 \ln(10) \quad (\text{par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^*)$$

Ainsi :  $\left\lceil 5 \frac{\ln(10)}{\ln(2)} + \frac{\ln(4)}{\ln(2)} \right\rceil$  tours de boucle suffisent.

On retiendra que si l'on souhaite obtenir une précision de 5 chiffres après la virgule, il suffit d'effectuer de l'ordre de 5 tours de boucle. Cette algorithme est donc extrêmement rapide.

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé avec beaucoup de précision la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** (on place ci-dessous le programme obtenu) démontre la bonne compréhension de l'algorithme demandé et permet d'obtenir tous les points alloués à cette question.

- On obtient le programme complet suivant.

```

1  function res = v(n)
2      a = 1
3      b = 3
4      while (b-a) > 10 ^ (-5)
5          c = (a+b) / 2
6          if h(n,c) < 4 then
7              a = c
8          else
9              b = c
10         end
11     end
12     res = a
13 endfunction

```

□

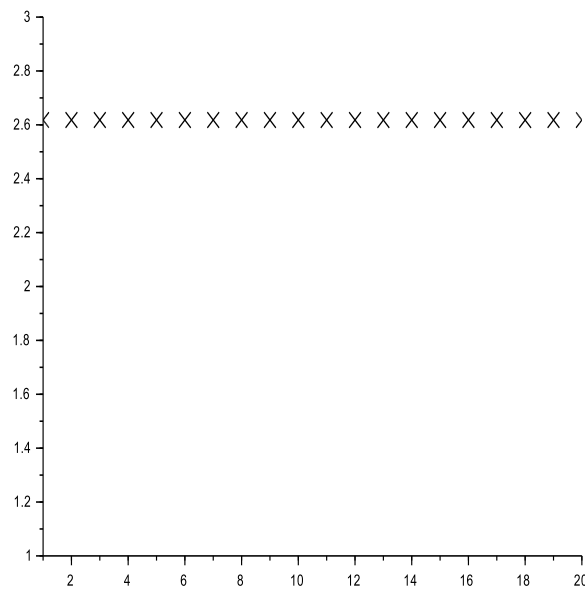
d) À la suite de la fonction  $v$ , on écrit le code suivant :

```

1  X = 1:20
2  Y = zeros(1,20)
3  for k = 1:20
4      Y(k) = v(k) ^ k
5  end
6  plot2d(X, Y, style=-2, rect=[1,1,20,3])

```

À l'exécution du programme, on obtient la sortie graphique suivante :



Expliquer ce qui est affiché sur le graphique ci-dessus.  
Que peut-on conjecturer ?

*Démonstration.*

- Le programme commence par définir deux tableaux (matrices lignes) **X** et **Y**.

```

1  X = 1:20
2  Y = zeros(1,20)

```

Le tableau **X** contient initialement  $[1, 2, \dots, 20]$ , c'est-à-dire les 20 premiers entiers non nuls.  
Le tableau **Y** est destiné à contenir les 20 premières valeurs de la suite  $(v_n^n)$ .  
Il est initialement rempli de 0.

- À l'aide d'une boucle, la  $k^{\text{ème}}$  case **Y** est modifiée de sorte à contenir une valeur approchée de  $v_k^k$ .

```

3  for k = 1:20
4      Y(k) = v(k) ^ k
5  end

```

- On effectue alors le tracé des points d'abscisse une valeur de **X** et d'ordonnée la valeur correspondante de **Y**. On obtient ainsi le tracé des points de coordonnées  $(k, v_k^k)$  pour  $k$  variant de 1 à 20.

```

6  plot2d(X, Y, style=-2, rect=[1,1,20,3])

```

Le nuage de points obtenu correspond au tracé des 20 premières valeurs de la suite  $(v_n^n)$ .  
Au vu de la représentation graphique obtenue, on peut faire la conjecture que la suite  $(v_n^n)$  est constante et approximativement de valeur 2.61. □

e) Montrer :  $\forall n \geq 1, (v_n)^n = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- Par définition de la suite  $(v_n)$  :  $h_n(v_n) = 4$ . Ainsi :

$$(v_n)^n + 1 + \frac{1}{(v_n)^n} = 4 \quad \text{ou encore} \quad (v_n)^n - 3 + \frac{1}{(v_n)^n} = 0$$

En multipliant par  $(v_n)^n$ , on obtient alors :

$$((v_n)^n)^2 - 3(v_n)^n + 1 = 0$$

Ainsi,  $(v_n)^n$  apparaît comme racine du polynôme  $P(X) = X^2 - 3X + 1$ .

- Le polynôme  $P$  admet pour discriminant :  $\Delta = 9 - 4 = 5 > 0$ .  
Il admet donc deux racines réelles distinctes :

$$x_+ = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_- = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

Comme  $4 < 5 < 9$ , on a :  $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$  et  $-2 > -\sqrt{5} > -3$ . On en déduit :

$$\frac{5}{2} < \frac{3 + \sqrt{5}}{2} < 3 \quad \text{et} \quad 0 < \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}$$

- Or, comme  $v_n > 1$ , par stricte croissance de la fonction  $x \mapsto x^n$  sur  $]1, +\infty[$ , on a :

$$(v_n)^n > 1^n = 1$$

On en déduit :  $(v_n)^n \neq x_-$ .

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(v_n)^n = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ .

#### Commentaire

Dans cette question, on démontre la propriété :  $\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \in ]2.5, 3[$ .

En prenant 2.24 comme valeur approchée de  $\sqrt{5}$ , on obtient alors la valeur approchée :

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \simeq 2.62$$

Cela correspond à la valeur affichée par le graphique de la question **6.d**).

□

**f)** Retrouver ainsi le résultat de la question **6.c**).

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- D'après la question précédente :  $(v_n)^n = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ . Comme  $v_n > 0$ , on en déduit :

$$n \ln(v_n) = \ln\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{ou encore} \quad \ln(v_n) = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

- Finalement :

$$v_n = \exp(\ln(v_n)) = \exp\left(\frac{1}{n} \ln\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(0) = 1$$

On retrouve le résultat de la question **6.c** : la suite  $(v_n)$  converge vers 1.

□

### Exercice 3

On suppose que toutes les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé.

#### Partie A

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } -1 < t < 1 \\ -\frac{1}{t^3} & \text{si } t \leq -1 \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction  $f$  est paire.

*Démonstration.*

Soit  $t \in \mathbb{R}$ , alors :  $-t \in \mathbb{R}$ .

Trois cas se présentent.

- Si  $t \in ]-\infty, -1]$ , alors  $-t \in [1, +\infty[$ . Donc :

$$f(-t) = \frac{1}{(-t)^3} = \frac{1}{-t^3} = -\frac{1}{t^3} = f(t)$$

- Si  $t \in ]-1, 1[$ , alors  $-t \in ]-1, 1[$ . Donc :

$$f(-t) = 0 = f(t)$$

- Si  $t \in [1, +\infty[$ , alors  $-t \in ]-\infty, -1]$ . Donc :

$$f(-t) = -\frac{1}{(-t)^3} = -\frac{1}{-t^3} = \frac{1}{t^3} = f(t)$$

Finalement, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :  $f(-t) = f(t)$ .

On en déduit que la fonction  $f$  est paire.

□

2. Justifier que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  converge et calculer sa valeur.

*Démonstration.*

- La fonction  $f$  est continue par morceaux sur  $[1, +\infty[$ .
- Soit  $A \in [1, +\infty[$ .

$$\int_1^A f(t) dt = \int_1^A \frac{1}{t^3} dt = \int_1^A t^{-3} dt = \left[ \frac{1}{-2} t^{-2} \right]_1^A = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{A^2} - 1 \right) = -\frac{1}{2A^2} + \frac{1}{2}$$

Or :  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2A^2} = 0$ .

Ainsi l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  converge et vaut  $\frac{1}{2}$ .

□

3. a) À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel  $A$  strictement supérieur à 1, on a :

$$\int_{-A}^{-1} f(t) dt = \int_1^A f(u) du$$

En déduire que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{-1} f(t) dt$  converge et donner sa valeur.

*Démonstration.*

- Soit  $A \in ]1, +\infty[$ .

× La fonction  $f$  est continue par morceaux sur  $[-A, -1]$ .

Ainsi, l'intégrale  $\int_{-A}^{-1} f(t) dt$  est bien définie.

- × On effectue le changement de variable  $\boxed{u = -t}$ .

$$\left| \begin{array}{l} u = -t \quad (\text{et donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \bullet t = -A \Rightarrow u = A \\ \bullet t = -1 \Rightarrow u = 1 \end{array} \right.$$

Ce changement de variable est valide car  $\varphi : u \mapsto -u$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[-A, -1]$ .

- × On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_{-A}^{-1} f(t) dt &= \int_A^1 f(-u)(-du) \\ &= \int_1^A f(-u) du \\ &= \int_1^A f(u) du \quad (\text{car } f \text{ est paire d'après 1.}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } A \in ]1, +\infty[ : \int_{-A}^{-1} f(t) dt = \int_1^A f(u) du.}$$

- D'après la question précédente, l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  converge.

On déduit alors de l'égalité du point précédent que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{-1} f(t) dt$  converge et, en passant à la limite quand  $A$  tend vers  $+\infty$ , on obtient :

$$\int_{-\infty}^{-1} f(t) dt = \int_1^{+\infty} f(t) dt = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{-1} f(t) dt \text{ converge et vaut } \frac{1}{2}.}$$

□

b) Montrer que la fonction  $f$  est une densité de probabilité.

*Démonstration.*

- La fonction  $f$  est continue :
  - × sur  $] - \infty, -1[$ , en tant qu'inverse de la fonction  $t \mapsto t^3$  :
    - continue sur  $] - \infty, -1[$  car polynomiale,
    - et qui ne s'annule pas sur  $] - \infty, -1[$ .
  - × sur  $] - 1, 1[$ , en tant que fonction constante,
  - × sur  $] 1, +\infty[$ , en tant qu'inverse de la fonction  $t \mapsto -t^3$  continue (car polynomiale) et qui ne s'annule pas sur cet intervalle.

On en déduit que la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf éventuellement en  $-1$  et en  $1$ .

- Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Trois cas se présentent :
  - × si  $t \in ] - \infty, -1]$ , alors en particulier :  $t < 0$ . Donc :  $t^3 < 0$ . Ainsi :  $\frac{1}{t^3} < 0$ .  
D'où :  $f(t) = -\frac{1}{t^3} > 0$ .
  - × si  $t \in ] - 1, 1[$ , alors :  $f(t) = 0$ . Ainsi :  $f(t) \geq 0$ .
  - × si  $t \in [1, +\infty[$ , alors en particulier :  $t > 0$ . Ainsi :  $f(t) = \frac{1}{t^3} > 0$ .

Finalement :  $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \geq 0$ .

- Montrons que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  converge et vaut 1.
  - × D'après la question 3.a), l'intégrale  $\int_{-\infty}^{-1} f(t) dt$  converge et vaut  $\frac{1}{2}$ .
  - × La fonction  $f$  est nulle sur  $] - 1, 1[$ , donc l'intégrale  $\int_{-1}^1 f(t) dt$  converge et vaut 0.
  - × D'après la question 2., l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  converge et vaut  $\frac{1}{2}$ .
  - × On en déduit que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  converge et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^1 f(t) dt + \int_1^{+\infty} f(t) dt = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1$$

L'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  converge et vaut 1.

On en déduit que la fonction  $f$  est une densité de probabilité. □

4. On considère une variable aléatoire  $X$  admettant  $f$  pour densité. On note  $F_X$  la fonction de répartition de  $X$ .

a) Montrer que, pour tout réel  $x$ , on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

*Démonstration.*

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Trois cas se présentent.

- Si  $x \in ]-\infty, -1]$ , alors :

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leq x]) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Soit  $A \in ]-\infty, x]$ . On a :

$$\int_A^x f(t) dt = \int_A^x -\frac{1}{t^3} dt = -\left[ \frac{1}{-2} \frac{1}{t^2} \right]_A^x = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{A^2} \right) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2A^2}$$

De plus :  $\lim_{A \rightarrow -\infty} \frac{1}{2A^2} = 0$ .

On en déduit :  $F_X(x) = \frac{1}{2x^2}$ .

- Si  $x \in ]-1, 1[$ , alors :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{-1} f(t) dt \quad (\text{car } f \text{ est nulle en dehors de } ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Si  $x \in [1, +\infty[$ , alors :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt \\ &= \frac{1}{2} + 0 + \int_1^x \frac{1}{t^3} dt \quad (\text{car } f \text{ est nulle en dehors de } ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[) \\ &= \frac{1}{2} + \left[ \frac{1}{-2} \frac{1}{t^2} \right]_1^x \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x^2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

|   |
|---|
| Finalement : $F_X : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ . |
|---|

□



b) Démontrer que  $X$  admet une espérance, puis que cette espérance est nulle.

*Démonstration.*

- La v.a.r.  $X$  admet une espérance si et seulement si l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$  est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^m f(t) dt$ .
- Commençons par étudier la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t f(t) dt$ .
  - × Tout d'abord, comme la fonction  $f$  est nulle en dehors de  $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$  :

$$\int_0^{+\infty} t f(t) dt = \int_1^{+\infty} t f(t) dt$$

- × De plus, la fonction  $t \mapsto t f(t)$  est continue par morceaux sur  $[1, +\infty[$ .
- × Enfin, soit  $t \in [1, +\infty[$  :

$$t f(t) = t \frac{1}{t^3} = \frac{1}{t^2}$$

Or, l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  est une intégrale de Riemann, impropre en  $+\infty$ , d'exposant  $2 > 1$ . Elle est donc convergente.

On en déduit que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t f(t) dt$  converge.

- D'après la question 1., la fonction  $f$  est paire.  
On en déduit que la fonction  $t \mapsto t f(t)$  est impaire.

Ainsi, l'intégrale  $\int_{-\infty}^0 t f(t) dt$  converge et :  $\int_{-\infty}^0 t f(t) dt = - \int_0^{+\infty} t f(t) dt$ .

- On en déduit que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$  converge.

Ainsi, la v.a.r.  $X$  admet une espérance.

- Enfin :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 t f(t) dt + \int_0^{+\infty} t f(t) dt \\ &= - \int_0^{+\infty} t f(t) dt + \int_0^{+\infty} t f(t) dt = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(X) = 0$$

**Commentaire**

On rappelle que l'égalité :

$$\int_{-\infty}^0 t f(t) dt = - \int_0^{+\infty} t f(t) dt$$

se démontre à l'aide du changement de variable  $\boxed{u = -t}$ .

$$\left| \begin{array}{l} u = -t \quad (\text{et donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \bullet \quad t = -\infty \Rightarrow u = +\infty \\ \bullet \quad t = 0 \Rightarrow u = 0 \end{array} \right.$$

Ce changement de variable est valide car  $\varphi : u \mapsto -u$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -\infty, 0]$ . □

c) La variable aléatoire  $X$  admet-elle une variance ?

*Démonstration.*

- La v.a.r.  $X$  admet une variance si et seulement si l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$  est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^m f(t) dt$ .

- Commençons par étudier la nature de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt$ .

× Tout d'abord, comme la fonction  $f$  est nulle en dehors de  $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$  :

$$\int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt = \int_1^{+\infty} t^2 f(t) dt$$

× De plus, la fonction  $t \mapsto t^2 f(t)$  est continue par morceaux sur  $[1, +\infty[$ .

× Enfin, soit  $t \in [1, +\infty[$  :

$$t^2 f(t) = t^2 \frac{1}{t^3} = \frac{1}{t}$$

Or, l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$  est une intégrale de Riemann, impropre en  $+\infty$ , d'exposant 1. Elle est donc divergente.

On en déduit que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt$  diverge.

- Ainsi, l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$  diverge.

On en déduit que la v.a.r.  $X$  n'admet pas de variance.

**Commentaire**

Lorsqu'un résultat à démontrer est formulé sous forme d'interrogation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général), on pensera, dans une majorité de cas à répondre par la négative. À titre d'illustration, lorsqu'on rencontre les questions :

× « Les v.a.r.  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ? »

× « La v.a.r.  $X$  admet-elle une variance ? »

× « La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ? »

× « La suite  $(u_n)$  est-elle majorée ? »

la réponse est, généralement, « non » (à justifier évidemment).

□

5. Soit  $Y$  la variable aléatoire définie par  $Y = |X|$ .

a) Donner la fonction de répartition de  $Y$ , et montrer que  $Y$  est une variable aléatoire à densité.

*Démonstration.*

• Tout d'abord, par définition de  $Y$  :  $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$ .

• Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Deux cas se présentent :

× si  $x \in ]-\infty, 0]$ , alors  $[Y \leq x] = \emptyset$ , car  $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$ . Donc :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leq x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

× si  $x \in [0, +\infty[$ , alors :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leq x]) = \mathbb{P}([|X| \leq x]) = \mathbb{P}([-x \leq X \leq x]) = F_X(x) - F_X(-x)$$

où la dernière égalité est obtenue car  $X$  est une v.a.r. à densité.

Deux cas se présentent alors :

- si  $x \in [0, 1]$ , alors  $-x \in ]-1, 0]$ . On obtient alors avec la question 4.a) :

$$F_Y(x) = F_X(x) - F_X(-x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

- si  $x \in [1, +\infty[$ , alors  $-x \in ]-\infty, -1]$ . On obtient alors avec la question 4.a) :

$$F_Y(x) = F_X(x) - F_X(-x) = \left(1 - \frac{1}{2x^2}\right) - \frac{1}{2(-x)^2} = 1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^2} = 1 - \frac{1}{x^2}$$

Finalement :  $F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\infty, 1[ \\ 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x \in [1, +\infty[ \end{cases}$ .

- Montrons que  $Y$  est une v.a.r. à densité.

× La fonction  $F_Y$  est continue :

- sur  $] - \infty, 1[$ , en tant que fonction constante,
- sur  $]1, +\infty[$ , en tant que somme de fonctions continues sur  $]1, +\infty[$ ,
- en 1. En effet, d'une part :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} F_Y(x) = F_Y(1) = 1 - \frac{1}{1^2} = 0$ .  
D'autre part :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} F_Y(x) = 0$ . Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F_Y(x) = F_Y(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F_Y(x)$$

La fonction  $F_Y$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

- × La fonction  $F_Y$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] - \infty, 1[$  et  $]1, +\infty[$  avec des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

La fonction  $F_Y$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  sauf éventuellement en 1.

On en déduit que la v.a.r.  $Y$  est une v.a.r. à densité.

□

- b) Montrer que  $Y$  admet pour densité la fonction  $f_Y$  définie par :

$$f_Y : x \mapsto \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

*Démonstration.*

Pour déterminer une densité  $f_Y$  de  $Y$ , on dérive la fonction  $F_Y$  sur les intervalles **ouverts**  $] - \infty, 1[$  et  $]1, +\infty[$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

- Si  $x \in ] - \infty, 1[$ .

$$f_Y(x) = F'_Y(x) = 0$$

- Si  $x \in ]1, +\infty[$ .

$$f_Y(x) = F'_Y(x) = -(-2) \frac{1}{x^3} = \frac{2}{x^3}$$

- On choisit enfin :  $f_Y(1) = \frac{2}{1^3} = 2$ .

Ainsi, une densité  $f_Y$  de  $Y$  est :  $f_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ] - \infty, 1[ \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x \in [1, +\infty[ \end{cases}$ .

□

- c) Montrer que  $Y$  admet une espérance et la calculer.

*Démonstration.*

- La v.a.r.  $Y$  admet une espérance si et seulement si l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t) dt$  est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^m f_Y(t) dt$ .

- Tout d'abord, comme la fonction  $f_Y$  est nulle en dehors de  $[1, +\infty[$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t) dt = \int_1^{+\infty} t f_Y(t) dt$$

- De plus, la fonction  $t \mapsto t f_Y(t)$  est continue par morceaux sur  $[1, +\infty[$ .
- Enfin, soit  $t \in [1, +\infty[$  :

$$t f_Y(t) = t \frac{3}{t^3} = \frac{2}{t^2}$$

Ainsi, soit  $B \in [1, +\infty[$ .

$$\int_1^B t f_Y(t) dt = \int_1^B \frac{1}{t^2} dt = 2 \int_1^B t^{-2} dt = \textcolor{red}{2} \left[ \frac{1}{\textcolor{red}{-2}} t^{-1} \right]_1^B = - \left( \frac{1}{B} - 1 \right) = 1 - \frac{1}{B}$$

Or :  $\lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{B} = 0$ . On en déduit que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} t f_Y(t) dt$  converge.

Ainsi, la v.a.r.  $Y$  admet une espérance.

- De plus :

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t) dt = \int_1^{+\infty} t f_Y(t) dt = 1$$

$$\mathbb{E}(Y) = 1$$

□

## Partie B

6. Soit  $D$  une variable aléatoire prenant les valeurs  $-1$  et  $1$  avec équiprobabilité, indépendante de la variable aléatoire  $Y$ .

Soit  $T$  la variable aléatoire définie par  $T = DY$ .

a) Déterminer la loi de la variable  $Z = \frac{D+1}{2}$ . En déduire l'espérance et la variance de  $D$ .

*Démonstration.*

- D'après l'énoncé :  $D \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1, 1\})$ . Ainsi :

$$\times D(\Omega) = \{-1, 1\},$$

$$\times \mathbb{P}([D = -1]) = \mathbb{P}([D = 1]) = \frac{1}{2}.$$

- Tout d'abord, comme  $D(\Omega) = \{-1, 1\}$ , on obtient :  $Z(\Omega) = \left\{ \frac{-1+1}{2}, \frac{1+1}{2} \right\} = \{0, 1\}$ .

- De plus :

$$[Z = 1] = \left[ \frac{D+1}{2} = 1 \right] = [D+1 = 2] = [D = 1]$$

$$\text{On en déduit : } \mathbb{P}([Z = 1]) = \mathbb{P}([D = 1]) = \frac{1}{2}.$$

Finalement :  $Z \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ .

□

b) Justifier que  $T$  admet une espérance et préciser sa valeur.

*Démonstration.*

- La v.a.r.  $T$  admet une espérance en tant que produit de v.a.r. indépendantes admettant une espérance.

La v.a.r.  $T$  admet une espérance.

- De plus :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) &= \mathbb{E}(DY) \\ &= \mathbb{E}(D) \mathbb{E}(Y) \quad (\text{car } D \text{ et } Y \text{ sont} \\ &\quad \text{indépendantes})\end{aligned}$$

- Enfin, par définition de l'espérance :

$$\mathbb{E}(D) = (-1) \times \mathbb{P}([D = -1]) + 1 \times \mathbb{P}([D = 1]) = -\cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} = 0$$

On en déduit :  $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(D) \mathbb{E}(Y) = 0 \times \mathbb{E}(Y) = 0$ .

□

c) Montrer que pour tout réel  $x$ , on a :

$$\mathbb{P}([T \leq x]) = \frac{1}{2} \mathbb{P}([Y \leq x]) + \frac{1}{2} \mathbb{P}([Y \geq -x])$$

*Démonstration.*

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

La famille  $([D = -1], [D = 1])$  forme un système complet d'événements.

Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([T \leq x]) &= \mathbb{P}([D = -1] \cap [T \leq x]) + \mathbb{P}([D = 1] \cap [T \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([D = -1] \cap [DY \leq x]) + \mathbb{P}([D = 1] \cap [DY \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([D = -1] \cap [-Y \leq x]) + \mathbb{P}([D = 1] \cap [Y \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([D = -1]) \mathbb{P}([-Y \leq x]) + \mathbb{P}([D = 1]) \mathbb{P}([Y \leq x]) \quad (\text{car les v.a.r. } D \text{ et } Y \\ &\quad \text{sont indépendantes}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}([Y \geq -x]) + \frac{1}{2} \mathbb{P}([Y \leq x])\end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}([T \leq x]) = \frac{1}{2} \mathbb{P}([Y \leq x]) + \frac{1}{2} \mathbb{P}([Y \geq -x])$$

□

d) En déduire la fonction de répartition de  $T$ .

*Démonstration.*

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

- D'après la question précédente :

$$F_T(x) = \mathbb{P}([T \leq x]) = \frac{1}{2} \mathbb{P}([Y \leq x]) + \frac{1}{2} \mathbb{P}([Y \geq -x]) = \frac{1}{2} F_Y(x) + \frac{1}{2} (1 - F_Y(-x))$$

où la dernière égalité est obtenue car  $Y$  est une v.a.r. à densité d'après la question 5.a).

- Trois cas se présentent alors :

× si  $x \in ]-\infty, -1]$ , alors  $-x \in [1, +\infty[$ . On obtient donc, avec la question 5.a) :

$$F_T(x) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \left( \cancel{x} - \left( \cancel{x} - \frac{1}{(-x)^2} \right) \right) = \frac{1}{2x^2}$$

× si  $x \in ]-1, 1[$ , alors  $-x \in ]-1, 1[$ . On obtient donc, avec la question 5.a) :

$$F_T(x) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2}$$

× si  $x \in [1, +\infty[$ , alors  $-x \in ]-\infty, -1]$ . On obtient donc, avec la question 5.a) :

$$F_T(x) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2x^2}$$

$$\text{Finalement : } F_T : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \in ]-\infty, -1] \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in ]-1, 1[ \\ 1 - \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \in [1, +\infty[ \end{cases}.$$

#### Commentaire

On remarque que les v.a.r.  $T$  et  $X$  ont même fonction de répartition. Or, la fonction de répartition caractérise la loi. On en déduit que les v.a.r.  $X$  et  $T$  ont même loi.  $\square$

7. Soit  $U$  une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $]0, 1[$  et  $V$  la variable aléatoire définie par :

$$V = \frac{1}{\sqrt{1-U}}.$$

- a) Rappeler la fonction de répartition de  $U$ .

*Démonstration.*

$$\text{Comme } U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1]), \text{ alors } F_U : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\infty, 0] \\ x & \text{si } x \in ]0, 1[ \\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[ \end{cases}.$$

$\square$

- b) Déterminer la fonction de répartition de  $V$  et vérifier que les variable  $V$  et  $Y$  suivent la même loi.

*Démonstration.*

- On note  $h : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$  de telle sorte que  $V = h(U)$ .

On sait tout d'abord :  $U(\Omega) = ]0, 1[$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= (h(U))(\Omega) = h(U(\Omega)) \\ &= h(]0, 1[) \\ &= \left] \lim_{x \rightarrow 0} h(x), \lim_{x \rightarrow 1} h(x) \right[ \quad \left( \text{car } h \text{ est continue et} \right. \\ &\quad \left. \text{strictement croissante sur } ]0, 1[ \right) (*) \\ &= ]1, +\infty[ \end{aligned}$$

Détaillons (\*).

- × La fonction  $h$  est continue sur  $]0, 1[$  en tant que quotient de fonctions continues sur  $]0, 1[$  dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.
  - × La fonction  $h$  est dérivable sur  $]0, 1[$  avec des arguments similaires.
- Soit  $x \in ]0, 1[$ .

$$h'(x) = -\frac{1}{2} \frac{-1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

Donc la fonction  $h$  est bien strictement croissante sur  $]0, 1[$ .

$$V(\Omega) = ]1, +\infty[$$

- Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Deux cas se présentent :

- × si  $x \in ]-\infty, 1]$ , alors :  $[V \leq x] = \emptyset$ , car  $V(\Omega) = ]1, +\infty[$ . Donc :

$$F_V(x) = \mathbb{P}([V \leq x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

- × si  $x \in ]1, +\infty[$ , alors :

$$\begin{aligned} F_V(x) &= \mathbb{P}([V \leq x]) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{\sqrt{1-U}} \leq x\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\sqrt{1-U} \geq \frac{1}{x}\right]\right) && \text{(car la fonction inverse est strictement décroissante sur } ]0, +\infty[) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[1-U \geq \frac{1}{x^2}\right]\right) && \text{(car la fonction } x \mapsto x^2 \text{ est strictement croissante sur } ]0, +\infty[) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[1-\frac{1}{x^2} \geq U\right]\right) \\ &= F_U\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{array}{lll} \text{Comme} & x > 1 & \\ \text{alors} & x^2 > 1 & \text{(par stricte croissance de la fonction } x \mapsto x^2 \text{ sur } ]0, +\infty[) \\ \text{donc} & \frac{1}{x^2} < 1 & \text{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur } ]0, +\infty[) \\ \text{et} & 0 < \frac{1}{x^2} < 1 & \end{array}$$

On en déduit, d'après la question précédente :

$$F_V(x) = F_U\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = 1-\frac{1}{x^2}$$

$$\text{Finalement : } F_V : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\infty, 1] \\ 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x \in ]1, +\infty[ \end{cases}.$$

- On remarque que les v.a.r.  $V$  et  $Y$  ont même fonction de répartition, d'après la question **5.a**). Or la fonction de répartition caractérise la loi.

On en déduit que les v.a.r.  $V$  et  $Y$  ont même loi.

□



8. a) Écrire une fonction en langage **Scilab**, d'en-tête **function a = D(n)**, qui prend un entier  $n \geq 1$  en entrée, et renvoie une matrice ligne contenant  $n$  réalisations de la variable aléatoire  $D$ .

*Démonstration.*

```

1  function a = D(n)
2      a = zeros(1,n)
3      for i = 1:n
4          r = rand()
5          if r < 1/2 then
6              a(i) = -1
7          else
8              a(i) = 1
9          end
10     end
11 endfunction

```

#### • Début de la fonction

On commence par initialiser la variable **a** qui doit contenir, d'après l'énoncé, une matrice ligne à **n** colonnes.

```

2      a = zeros(1,n)

```

#### • Structure itérative

On met ensuite en place une structure itérative (boucle **for**) pour affecter à chaque coefficient de la matrice **a** une réalisation de la v.a.r.  $D$ .

```

3      for i = 1:n

```

On cherche maintenant à simuler la v.a.r.  $D$ .

× D'après l'énoncé :  $D \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1, 1\})$ .

Ainsi, chaque coefficient de la variable **a** doit :

- prendre la valeur  $-1$  avec probabilité  $\mathbb{P}([D = -1]) = \frac{1}{2}$ .
- prendre la valeur  $1$  avec probabilité  $\mathbb{P}([D = 1]) = \frac{1}{2}$ .

× Pour cela, on utilise la commande suivante :

```

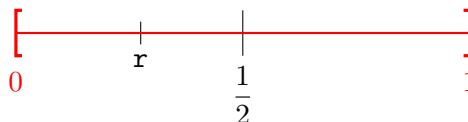
5          r = rand()

```

L'instruction **rand()** renvoie un réel choisi aléatoirement dans  $]0, 1[$ .

Plus formellement, il s'agit de simuler une v.a.r.  $U$  telle que  $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ .

× Cette valeur **r** choisie aléatoirement dans  $]0, 1[$  permet d'obtenir une simulation de  $D$ .



Deux cas se présentent :

- Si  $r < \frac{1}{2}$  : alors on affecte à **a(i)** ( la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée de **a**) la valeur  $-1$ .  
Ce cas se produit avec la probabilité attendue :

$$\mathbb{P}\left(\left[0 < U < \frac{1}{2}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[U < \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}([D = -1])$$

- Si  $r \geq \frac{1}{2}$  : alors on affecte à  $a(i)$  la valeur 1.  
Ce cas se produit avec la probabilité attendue :

$$\mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{2} < U < 1\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{2} < U\right]\right) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}([D = 1])$$

On obtient la suite du programme :

```

6         if r < 1/2 then
7             a(i) = -1
8         else
9             a(i) = 1
10        end

```

### Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, fournir la fonction **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir la totalité des points alloués à cette question. On procèdera de même dans la question suivante. □

b) On considère le script suivant :

```

1  n = input('entrer n')
2  a = D(n)
3  b = rand(1,n)
4  c = a ./ sqrt(1-b)
5  disp(sum(c)/n)

```

De quelle variable aléatoire les coefficients du vecteur  $c$  sont-ils une simulation ?  
Pour  $n$  assez grand, quelle sera la valeur affichée ? Justifier votre réponse.

*Démonstration.*

- On commence par demander à l'utilisateur d'entrer une valeur pour l'entier  $n$ .

```

1  n = input('entrer n')

```

- D'après la question précédente, on affecte ensuite à la variable  $a$  une matrice ligne contenant  $n$  réalisations de la v.a.r.  $D$ . Plus précisément, la variable  $a$  est un  $n$ -uplet  $(d_1, \dots, d_n)$  qui correspond à l'observation d'un  $n$ -échantillon  $(D_1, \dots, D_n)$  de la v.a.r.  $D$ .  
(cela signifie que les v.a.r.  $D_1, \dots, D_n$  sont indépendantes et de même loi que  $D$ )

```

2  a = D(n)

```

- On continue en affectant à la variable  $b$  une matrice ligne contenant  $n$  réalisations d'une loi uniforme sur  $]0, 1[$ . Autrement dit, la variable  $b$  est un  $n$ -uplet  $(u_1, \dots, u_n)$  qui correspond à l'observation d'un  $n$ -échantillon  $(U_1, \dots, U_n)$  de la v.a.r.  $U$ .

```

3  b = rand(1,n)

```

- La ligne 4 permet de définir une nouvelle variable `c` :

```
4  c = a ./ sqrt(1-b)
```

- × On sait déjà que la variable `a` contient une observation du `n`-échantillon  $(D_1, \dots, D_n)$ .
- × On rappelle de plus que la variable `b` contient une observation du `n`-échantillon  $(U_1, \dots, U_n)$ .  
Ainsi, la variable `1 ./ sqrt(1-b)` contient une observation du `n`-échantillon  $\left(\frac{1}{\sqrt{1-U_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{1-U_n}}\right)$ .  
D'après ce qui précède, cela correspond à un `n`-échantillon  $(V_1, \dots, V_n)$  de la v.a.r.  $V$ .  
Or, d'après la question **7.b**), les v.a.r.  $V$  et  $Y$  ont même loi.  
Finalement, on construit ainsi par étape un `n`-échantillon  $(Y_1, \dots, Y_n)$  de  $Y$ .  
La variable `1 ./ sqrt(1-b)` contient une observation de ce `n`-échantillon.

Ainsi, la variable `c` contient une observation du `n`-échantillon  $(D_1 \times Y_1, \dots, D_n \times Y_n)$ , c'est-à-dire une observation  $(t_1, \dots, t_n)$  du `n`-échantillon  $(T_1, \dots, T_n)$ .

Finalement, la variable `c` contient donc l'observation d'un `n`-échantillon de la v.a.r.  $T$ .

### Commentaire

L'énoncé original proposait la ligne 4 suivante :

```
4  c = a / sqrt(1-b)
```

Cette commande ne permettait pas d'aboutir au résultat voulu. En effet, la commande :

- `/` correspond à l'opérateur de division à droite. Autrement dit, la commande `A / B` renvoie la matrice `X` (si elle existe) telle que :  $X \times B = A$ .
- `./` correspond à la division terme à terme. Autrement dit, la commande `A ./ B` renvoie la matrice composée des termes  $\frac{a_{i,j}}{b_{i,j}}$ . C'est bien ce qu'on voulait faire ici : diviser la 1<sup>ère</sup> coordonnée de la matrice `a` par la 1<sup>ère</sup> coordonnée de la matrice `sqrt(1-b)`, diviser la 2<sup>ème</sup> coordonnée de la matrice `a` par la 2<sup>ème</sup> coordonnée de la matrice `sqrt(1-b)` ....

- Enfin, la ligne 5 :

```
5  disp(sum(c)/n)
```

permet d'afficher la valeur  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$  qui correspond à une observation de la v.a.r.  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$ , qui n'est autre que la moyenne empirique des variables aléatoires  $T_1, \dots, T_n$ .

Or, par loi faible des grands nombres (LfGN) :

$$\text{moyenne de l'observation} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \simeq \mathbb{E}(T)$$

Ainsi, si `n` est assez grand, le programme renvoie une valeur approchée de  $\mathbb{E}(T) = 0$ .

### Commentaire

- Le programme proposé par l'énoncé n'est ici rien d'autre qu'une illustration de l'idée naturelle pour obtenir une approximation de  $\mathbb{E}(T)$  :
  - × simuler un grand nombre de fois ( $n = 10000$  par exemple) la v.a.r.  $T$ .  
Formellement, on souhaite obtenir un  $n$ -uplet  $(t_1, \dots, t_n)$  qui correspond à l'observation d'un  $n$ -échantillon  $(T_1, \dots, T_n)$  de la v.a.r.  $T$ .
  - × réaliser la moyenne des résultats de cette observation.
- La réponse fournie à cette question passe à côté d'un détail : dans le programme d'ECE, l'énoncé de la LfGN comporte trois hypothèses. La suite de v.a.r.  $(T_n)$  doit être constituée de v.a.r. **indépendantes, de même espérance, de même variance**.  
Or, on pourrait démontrer que la v.a.r. n'admet pas de variance ! Il semble donc à première vue qu'on ne puisse pas appliquer la LfGN.  
Il existe en fait un énoncé de la LfGN (hors programme) se passant de l'hypothèse d'existence d'une variance. Ainsi, la réponse à cette question est toujours parfaitement correcte.
- Démontrons enfin que la v.a.r.  $T$  n'admet pas de variance. Pour cela, on raisonne par l'absurde. Supposons alors que la v.a.r.  $T$  admet une variance.
  - × Par formule de Koenig-Huygens :  $\mathbb{V}(T) = \mathbb{E}(T^2) - (\mathbb{E}(T))^2 = \mathbb{E}(T^2)$ .  
En effet, d'après la question **6.b** :  $\mathbb{E}(T) = 0$ .
  - × Or :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T^2) &= \mathbb{E}((DY)^2) = \mathbb{E}(D^2 Y^2) \\ &= \mathbb{E}(D^2) \mathbb{E}(Y^2) \quad (\text{car les v.a.r. } D \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}) \end{aligned}$$

- × De plus, par théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(D^2) = (-1)^2 \times \mathbb{P}([D = -1]) + 1^2 \times \mathbb{P}([D = 1]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Ainsi :  $\mathbb{V}(T) = \mathbb{E}(T^2) = \mathbb{E}(Y^2)$ .

- × Par ailleurs, la v.a.r.  $Y$  admet un moment d'ordre 2 si et seulement si l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_Y(t) dt$  est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^m f_Y(t) dt$ .  
Comme la fonction  $f_Y$  est nulle en dehors de  $[1, +\infty[$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_Y(t) dt = \int_1^{+\infty} t^2 f_Y(t) dt$$

Enfin, soit  $t \in [1, +\infty[$  :  $t^2 f_Y(t) = t^2 \frac{2}{t^3} = \frac{2}{t}$ .

Or, l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$  est une intégrale de Riemann, impropre en  $+\infty$ , d'exposant 1. Elle est donc divergente.

On en déduit que la v.a.r.  $Y$  n'admet pas de moment d'ordre 2.

On en déduit que la v.a.r.  $T$  n'admet pas de variance, ce qui est absurde. □