ECE2
Mathématiques

Colles - Semaine 4

Exercice 1
Soient F et G deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y - z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + y + z = 0\}$$

1. Montrer que F et G sont deux espaces vectoriels.

2. Déterminer une base de F et une base de G.

3. Déterminer $F \cap G$.

4. Soit un vecteur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

  a) Montrer qu'il existe u dans F et v dans G tels que $(a, b, c) = u + v$.

  b) Les vecteurs u et v sont-ils uniques ?

Exercice 2
Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - 3z = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont deux espaces vectoriels réels.

2. Déterminer une base de F et une base de G.

3. La famille obtenue en réunissant les vecteurs de la base de F et ceux de la base de G obtenues à la question précédente est-elle une famille libre ?

4. Déterminer l'espace vectoriel $F \cap G$.

Exercice 3
On considère les sous-ensembles $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y+z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = y = z\}$.

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer la dimension de F et celle de G.

3. Déterminer $F \cap G$.

4. Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

5. Que peut-on en déduire de $F + G$? En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ différente de la base canonique.