ECRICOME 2019

Exercice 1

On considère dans cet exercice l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, dont on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie A

1. ***a)*** Calculer A^2 puis vérifier que A^3 est la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Justifier que 0 est l'unique valeur propre possible de f.

c) Déterminer une base et la dimension du noyau de f.

d) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Soient $e'_1 = (-1, -1, 1)$, $e'_2 = (2, -1, 1)$ et $e'_3 = (-1, 2, 1)$.

a) Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.

b) Démontrer que la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$ est la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On pose : $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On note h l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice M.

a) Déterminer deux réels α et β tels que $M = \alpha A + \beta I$, où I est la matrice identité d'ordre 3.

b) Déterminer la matrice M' de h dans la base $\mathscr{B}'$.

c) En déduire que M est inversible.

d) À l'aide de la question ***1.a)***, calculer $(M - I)^3$. En déduire l'expression de M^{-1} en fonction des matrices I, M et M^2.

e) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer M^n pour tout entier naturel n, en fonction des matrices I, A et A^2.
Cette formule est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Partie B

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme g de E vérifiant $g \circ g = f$.
On suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice V carrée d'ordre 3 telle que :

$$V^2 = T$$

On note g l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}'$ est V.

4. Montrer : $VT = TV$. En déduire : $g \circ f = f \circ g$.

5. ***a)*** Montrer que $g(e'_1)$ appartient au noyau de f.
En déduire qu'il existe un réel a tel que : $g(e'_1) = a \cdot e'_1$.

b) Montrer que $g(e_2') - a \cdot e_2'$ appartient aussi au noyau de f.
En déduire qu'il existe un réel b tel que : $g(e_2') \; = \; b \cdot e_1' + a \cdot e_2'$.

c) Montrer : $f \circ g(e_3') \; = \; g \circ f(e_3') \; = \; a \cdot e_2' + b \cdot e_1'$.
En déduire que $g(e_3') - a \cdot e_3' - b \cdot e_2'$ appartient au noyau de f.

d) En déduire qu'il existe un réel c tel que : $V \; = \; \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

6. Calculer V^2 en fonction de a, b et c, puis en utilisant l'hypothèse $V^2 = T$, obtenir une contradiction.

Exercice 2

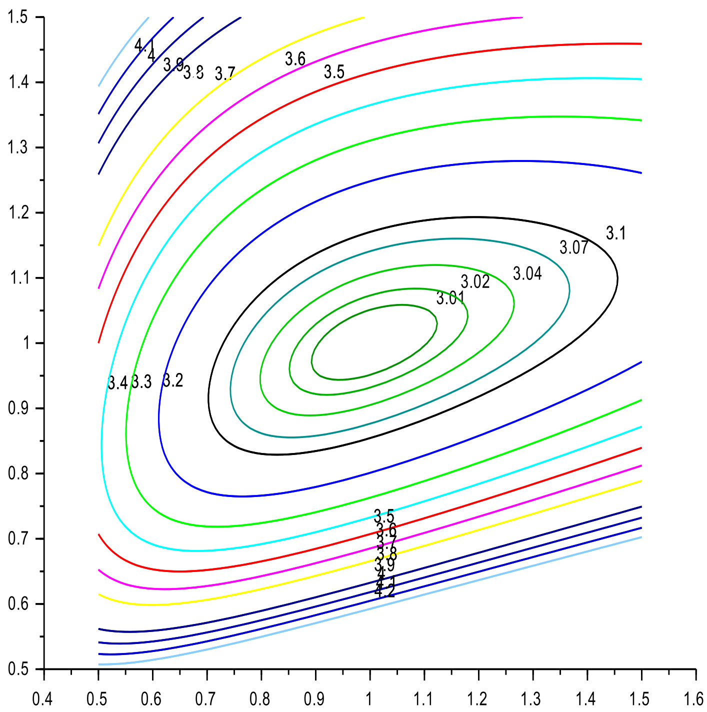
On considère la fonction f définie sur l'ouvert de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \; f(x,y) = \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}$$

La première partie consiste en l'étude des extrema éventuels de la fonction f, et la deuxième partie a pour objectif l'étude d'une suite implicite définie à l'aide de la fonction f.
Ces deux parties sont indépendantes.

Partie A

1. On utilise **Scilab** pour tracer les lignes de niveau de la fonction f. On obtient le graphe suivant :



Établir une conjecture à partir du graphique quant à l'existence d'un extremum local pour f, dont on donnera la nature, la valeur approximative et les coordonnées du point en lequel il semble Ãªtre atteint.

2. ***a)*** Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

b) Calculer les dérivées partielles premières de f, puis démontrer que f admet un unique point critique, noté A, que l'on déterminera.

c) Calculer les dérivées partielles secondes de f, puis démontrer que la matrice hessienne de f au point A est la matrice H définie par : $H = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$.

d) En déduire que la fonction f admet au point A un extremum local, préciser si cet extremum est un minimum, et donner sa valeur.

Partie B

Pour tout entier n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad h_n(x) \ = \ f(x^n, 1) \ = \ x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

3. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

4. En déduire que pour tout entier n non nul, l'équation $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.

5. ***a)*** Démontrer :

$$\forall x > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}$$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ h_{n+1}(v_n) \geqslant 4$.

c) Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.

6. ***a)*** Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et montrer : $\ell \geqslant 1$.

b) En supposant que $\ell > 1$, démontrer : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n^n = +\infty$.
En déduire une contradiction.

c) Déterminer la limite de (v_n).

7. ***a)*** Montrer : $\forall n \geqslant 1, \ v_n \leqslant 3$.

b) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tÃªte `function y=h(n,x)` qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel n non nul et un réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ en entrée.

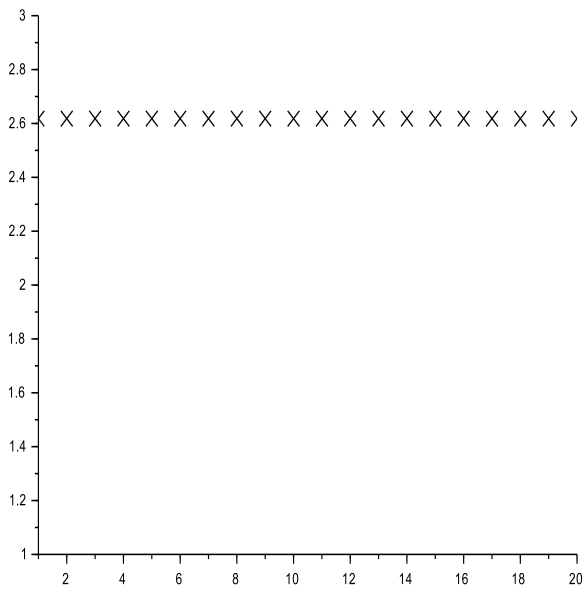
c) Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de v_n par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier $n \geqslant 1$ en entrée :

```
function res=v(n)
  a = 1
  b = 3
  while (b-a) > 10 ^ (-5)
    c = (a+b)/2
    if h(n,c) < 4 then
      ........
    else
      ........
    end
  end
  ..........
endfunction
```

d) À la suite de la fonction `v`, on écrit le code suivant :

```
X = 1:20
Y = zeros(1,20)
for k = 1:20
  Y(k) = v(k) ^ k
end
plot2d(X, Y, style=-2, rect=[1,1,20,3])
```

À l'exécution du programme, on obtient la sortie graphique suivante :



Expliquer ce qui est affiché sur le graphique ci-dessus.
Que peut-on conjecturer ?

e) Montrer : $\forall n \geqslant 1, \ (v_n)^n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

f) Retrouver ainsi le résultat de la question ***4.c)***.

Exercice 3

On suppose que toutes les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } -1 < t < 1 \\ -\dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \leqslant -1 \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est paire.

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$, alors : $-t \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent.

- Si $t \in]-\infty, -1]$, alors $-t \in [1, +\infty[$. Donc :

$$f(-t) \ = \ \frac{1}{(-t)^3} \ = \ \frac{1}{-t^3} \ = \ -\frac{1}{t^3} \ = \ f(t)$$

- Si $t \in]-1, 1[$, alors $-t \in]-1, 1[$. Donc :

$$f(-t) \ = \ 0 \ = \ f(t)$$

- Si $t \in [1, +\infty[$, alors $-t \in]-\infty, -1]$. Donc :

$$f(-t) \ = \ -\frac{1}{(-t)^3} \ = \ -\frac{1}{-t^3} \ = \ \frac{1}{t^3} \ = \ f(t)$$

Finalement, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $f(-t) = f(t)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f \text{ est paire.}}$$

□

2. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ converge et calculer sa valeur.

Démonstration.

- La fonction f est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.
- Soit $A \in [1, +\infty[$.

$$\int_1^A f(t)\, dt \ = \ \int_1^A \frac{1}{t^3}\, dt \ = \ \int_1^A t^{-3}\, dt \ = \ \left[\frac{1}{-2}\, t^{-2} \right]_1^A \ = \ -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A^2} - 1\right) \ = \ -\frac{1}{2\,A^2} + \frac{1}{2}$$

Or : $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{2\,A^2} \ = \ 0.$

$$\boxed{\text{Ainsi l'intégrale } \int_1^{+\infty} f(t)\, dt \text{ converge et vaut } \frac{1}{2}.}$$

□

3. a) À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel A strictement supérieur à 1, on a :

$$\int_{-A}^{-1} f(t)\, dt \;=\; \int_{1}^{A} f(u)\, du$$

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\, dt$ converge et donner sa valeur.

Démonstration.

- Soit $A \in \,]1, +\infty[$.
  - $\times$ La fonction f est continue par morceaux sur $[-A, -1]$.
    Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-A}^{-1} f(t)\, dt$ est bien définie.
  - $\times$ On effectue le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -t \quad \text{(et donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \bullet\ t = -A \;\Rightarrow\; u = A \\ \bullet\ t = -1 \;\Rightarrow\; u = 1 \end{array}\right.$$

  - $\times$ Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-A, -1]$.
    On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_{-A}^{-1} f(t)\, dt &= \int_{A}^{1} f(-u)\big(-\ du\big) \\ &= \int_{1}^{A} f(-u)\, du \\ &= \int_{1}^{A} f(u)\, du \qquad \textit{(car } f \textit{ est paire d'après } \textbf{\textit{1.}}\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } A \in \,]1, +\infty[\, : \int_{-A}^{-1} f(t)\, dt = \int_{1}^{A} f(u)\, du.}$$

- D'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

  On déduit alors de l'égalité du point précédent que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\, dt$ converge et, en passant à la limite quand A tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{-1} f(t)\, dt \;=\; \int_{1}^{+\infty} f(t)\, dt \;=\; \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{-1} f(t)\, dt \text{ converge et vaut } \frac{1}{2}.}$$

□

b) Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.

Démonstration.

- La fonction f est continue :
  - $\times$ sur $]-\infty,-1[$, en tant qu'inverse d'une fonction continue et qui ne s'annule pas sur cet intervalle,
  - $\times$ sur $]-1,1[$, en tant que fonction constante,
  - $\times$ sur $]1,+\infty[$, en tant qu'inverse d'une fonction continue et qui ne s'annule pas sur cet intervalle.

  $$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } -1 \text{ et en } 1.}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :
  - $\times$ si $t \in]-\infty,-1]$, alors en particulier : $t < 0$. Donc : $t^3 < 0$. Ainsi : $\dfrac{1}{t^3} < 0$.
    D'où : $f(t) = -\dfrac{1}{t^3} > 0$.
  - $\times$ si $t \in]-1,1[$, alors : $f(t) = 0$. Ainsi : $f(t) \geqslant 0$.
  - $\times$ si $t \in [1,+\infty[$, alors en particulier : $t > 0$. Ainsi : $f(t) = \dfrac{1}{t^3} > 0$.

  $$\boxed{\text{Finalement : } \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \geqslant 0.}$$

- Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1.
  - $\times$ D'après la question ***3.a)***, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.
  - $\times$ La fonction f est nulle en dehors de $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ converge et vaut 0.
  - $\times$ D'après la question ***2.***, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.
  - $\times$ On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et :

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt \;=\; \int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt + \int_{-1}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt \;=\; \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} \;=\; 1$$

  $$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge et vaut 1.}}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

□

4. On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité. On note F_X la fonction de répartition de X.

a) Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$F_X(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leqslant -1 \\[2mm] \dfrac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\[2mm] 1 - \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent.

- Si $x \in]-\infty, -1]$, alors :

$$F_X(x) \ = \ \mathbb{P}([X \leqslant x]) \ = \ \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$$

Or, soit $A \in]-\infty, x]$:

$$\int_A^x f(t)\ dt \ = \ \int_A^x -\frac{1}{t^3}\ dt \ = \ -\left[\ \frac{1}{-2}\ \frac{1}{t^2}\ \right]_A^x \ = \ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{A^2}\right) \ = \ \frac{1}{2\,x^2} - \frac{1}{2\,A^2}$$

De plus : $\lim\limits_{A \to -\infty} \dfrac{1}{2\,A^2} = 0$.
On en déduit : $F_X(x) \ = \ \dfrac{1}{2\,x^2}$.

- Si $x \in]-1, 1[$, alors :

$$\begin{aligned} F_X(x) \ &= \ \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \\ &= \ \int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt \quad \textit{(car f est nulle en dehors de }]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[\textit{)} \\ &= \ \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Si $x \in [1, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned} F_X(x) \ &= \ \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \\ &= \ \int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt + \int_{-1}^{1} f(t)\ dt + \int_{1}^{x} f(t)\ dt \\ &= \ \frac{1}{2} + 0 + \int_1^x \frac{1}{t^3}\ dt \quad \textit{(car f est nulle en dehors de }]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[\textit{)} \\ &= \ \frac{1}{2} + \left[\ \frac{1}{-2}\ \frac{1}{t^2}\ \right]_1^x \\ &= \ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} - 1\right) \\ &= \ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\,x^2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_X : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2\,x^2} & \text{si } x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2\,x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.}$$

□

b) Démontrer que X admet une espérance, puis que cette espérance est nulle.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt$ est absolument convergent, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour un calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m\, f(t)\, dt$.
- Commençons par étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t\, f(t)\, dt$.
  - × Tout d'abord, comme la fonction f est nulle en dehors de $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$:
  $$\int_0^{+\infty} t\, f(t)\, dt \ = \ \int_1^{+\infty} t\, f(t)\, dt$$
  - × De plus, la fonction $t \mapsto t\, f(t)$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.
  - × Enfin, soit $t \in [1, +\infty[$:
  $$t\, f(t) \ = \ t\, \frac{1}{t^3} \ = \ \frac{1}{t^2}$$
  Or, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $2 > 1$. Elle est donc convergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } \int_0^{+\infty} t\, f(t)\, dt \text{ converge.}}$$

- D'après la question ***1.***, la fonction f est paire. On en déduit que la fonction $t \mapsto t\, f(t)$ est impaire.

$$\boxed{\text{Ainsi, l'intégrale } \int_{-\infty}^{0} t\, f(t)\, dt \text{ converge et : } \int_{-\infty}^{0} t\, f(t)\, dt = -\int_0^{+\infty} f(t)\, dt.}$$

- On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt$ converge.

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } X \text{ admet une espérance.}}$$

- Enfin :
$$\mathbb{E}(X) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt \ = \ \int_{-\infty}^{0} t\, f(t)\, dt + \int_0^{+\infty} t\, f(t)\, dt \ = \ -\cancel{\int_0^{+\infty} t\, f(t)\, dt} + \cancel{\int_0^{+\infty} t\, f(t)\, dt} \ = \ 0$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 0}$$

Commentaire

On rappelle que l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{0} t\, f(t)\ dt \ = \ -\int_{0}^{+\infty} t\, f(t)\ dt$$

se démontre à l'aide du changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left| \begin{array}{l} u = -t \quad \text{(et donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \bullet\ t = -\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = 0 \end{array} \right.$$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$. □

c) La variable aléatoire X admet-elle une variance ?

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une variance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f(t)\ dt$ est absolument convergent, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour un calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m\, f(t)\ dt$.
- Commençons par étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^2\, f(t)\ dt$.
  - × Tout d'abord, comme la fonction f est nulle en dehors de $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$:
  $$\int_{0}^{+\infty} t^2\, f(t)\ dt \ = \ \int_{1}^{+\infty} t^2\, f(t)\ dt$$
  - × De plus, la fonction $t \mapsto t^2\, f(t)$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.
  - × Enfin, soit $t \in [1, +\infty[$:
  $$t^2\, f(t) \ = \ t^2\, \frac{1}{t^3} \ = \ \frac{1}{t}$$
  Or, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t}\ dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 1. Elle est donc divergente.

  $$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } \int_{0}^{+\infty} t^2\, f(t)\ dt \text{ diverge.}}$$

- Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\ dt$ diverge.

  $$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } X \text{ n'admet pas de variance.}}$$

Commentaire

Lorsqu'un résultat à démontrer est formulé sous forme d'interrogation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général), on pensera, dans une majorité de cas à répondre par la négative. À titre d'illustration, lorqu'on rencontre les questions :

× « Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ? »

× « La v.a.r. X admet-elle une variance ? »

× « La matrice A est-elle diagonalisable ? »

× « La suite (u_n) est-elle majorée ? »

la réponse est, généralement, « non » (à justifier évidemment).

□

5. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = |X|$.

a) Donner la fonction de répartition de Y, et montrer que Y est une variable aléatoire à densité.

Démonstration.

- Tout d'abord, par définition de Y : $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

× si $x \in]-\infty, 0[$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$, car $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$. Donc :

$$F_Y(x) \ = \ \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

× si $x \in [0, +\infty[$, alors :

$$F_Y(x) \ = \ \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([|X| \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([-x \leqslant X \leqslant x]) \ = \ F_X(x) - F_X(-x)$$

où la dernière égalité est obtenue car X est une v.a.r. à densité.
Deux cas se présentent alors :

- si $x \in [0, 1[$, alors $-x \in]-1, 0]$. On obtient alors avec la question ***4.a)*** :

$$F_Y(x) \ = \ F_X(x) - F_x(-x) \ = \ \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} \ = \ 0$$

- si $x \in [1, +\infty[$, alors $-x \in]-\infty, -1]$. On obtient alors avec la question ***4.a)*** :

$$F_Y(x) \ = \ F_X(x) - F_X(-x) \ = \ \left(1 - \frac{1}{2\,x^2}\right) - \frac{1}{2\,(-x)^2} \ = \ 1 - \frac{1}{2\,x^2} - \frac{1}{2\,x^2} \ = \ 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}}$$

- Montrons que Y est une v.a.r. à densité.

  × La fonction F_Y est continue :

  - sur $]-\infty, 1[$, en tant que fonction constante,
  - sur $]1, +\infty[$, en tant que somme de fonctions continues sur $]1, +\infty[$,
  - en 1. En effet, d'une part : $\lim\limits_{x \to 1^+} F_Y(x) \ = \ F_Y(1) \ = \ 1 - \dfrac{1}{1^2} \ = \ 0$.
    D'autre part : $\lim\limits_{x \to 1^-} F_Y(x) = 0$. Ainsi :

$$\lim_{x \to 1^-} F_Y(x) \ = \ F_Y(1) \ = \ \lim_{x \to 1^+} F_Y(x)$$

$$\boxed{\text{La fonction } F_Y \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

  × La fonction F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$ avec des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{La fonction } F_Y \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en 1.}}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } Y \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

□

b) Montrer que Y admet pour densité la fonction f_Y définie par :

$$f_Y : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration.
Pour déterminer une densité f_Y de Y, on dérive la fonction F_Y sur les intervalles **ouverts** $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.

- Soit $x \in\ ]-\infty, 1[$.

$$f_Y(x) \ = \ F_Y'(x) \ = \ 0$$

- Soit $x \in\ ]1, +\infty[$.

$$f_Y(x) \ = \ F_Y'(x) \ = \ -(-2)\ \frac{1}{x^3} \ = \ \frac{2}{x^3}$$

- On choisit enfin : $f_Y(1) = \dfrac{2}{1^3} = 2$.

$$\boxed{\text{Ainsi, une densité } f_Y \text{ de } Y \text{ est : } f_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in\ ]-\infty, 1[\\ \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}}$$

□

c) Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Démonstration.

- La v.a.r. Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_Y(t)\ dt$ est absolument convergent, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour un calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m\, f_Y(t)\ dt$.

- Tout d'abord, comme la fonction f_Y est nulle en dehors de $[1, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_Y(t)\, dt \;=\; \int_{1}^{+\infty} t\, f_Y(t)\, dt$$

- De plus, la fonction $t \mapsto t\, f_Y(t)$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.
- Enfin, soit $t \in [1, +\infty[$:

$$t\, f_Y(t) \;=\; t\, \frac{3}{t^3} \;=\; \frac{2}{t^2}$$

Ainsi, soit $B \in [1, +\infty[$.

$$\int_1^B t\, f_Y(t)\, dt \;=\; \int_1^B \frac{1}{t^2}\, dt \;=\; 2 \int_1^B t^{-2}\, dt \;=\; \cancel{2} \left[\frac{1}{-\cancel{2}}\, t^{-1} \right]_1^B \;=\; -\left(\frac{1}{B} - 1\right) \;=\; 1 - \frac{1}{B}$$

Or : $\lim\limits_{B \to +\infty} \dfrac{1}{B} = 0$. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\, f_Y(t)\, dt$ converge.

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } Y \text{ admet une espérance.}}$$

- De plus :

$$\mathbb{E}(Y) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_Y(t)\, dt \;=\; \int_1^{+\infty} t\, f_Y(t)\, dt \;=\; 1$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = 1}$$

□

Partie B

6. Soit D une variable aléatoire prenant les valeurs -1 et 1 avec équiprobabilité, indépendante de la variable aléatoire Y.
Soit T la variable aléatoire définie par $T = DY$.

a) Déterminer la loi de la variable $Z = \dfrac{D+1}{2}$. En déduire l'espérance et la variance de D.

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $D \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1, 1\})$. Ainsi :
  × $D(\Omega) = \{-1, 1\}$,
  × $\mathbb{P}([D = -1]) \;=\; \mathbb{P}([D = 1]) \;=\; \dfrac{1}{2}$.
- Tout d'abord, comme $D(\Omega) = \{-1, 1\}$, on obtient : $Z(\Omega) \;=\; \left\{\dfrac{-1+1}{2}, \dfrac{1+1}{2}\right\} \;=\; \{0, 1\}$.
- De plus :

$$[Z = 1] \;=\; \left[\frac{D+1}{2} = 1\right] \;=\; [D + 1 = 2] \;=\; [D = 1]$$

On en déduit : $\mathbb{P}([Z = 1]) \;=\; \mathbb{P}([D = 1]) \;=\; \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } Z \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right).}$$

□

b) Justifier que T admet une espérance et préciser sa valeur.

Démonstration.

- La v.a.r. T admet une espérance en tant que produit de v.a.r. indépendantes admettant une espérance.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } T \text{ admet une espérance.}}$$

- De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &= \mathbb{E}(DY) \\ &= \mathbb{E}(D)\,\mathbb{E}(Y) \quad \textit{(car } D \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \end{aligned}$$

- Enfin, par définition de l'espérance :

$$\mathbb{E}(D) = (-1) \times \mathbb{P}([D=-1]) + 1 \times \mathbb{P}([D=1]) = -\cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(D)\,\mathbb{E}(Y) = 0 \times \mathbb{E}(Y) = 0.}$$

□

c) Montrer que pour tout réel x, on a :

$$\mathbb{P}([T \leqslant x]) = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([Y \leqslant x]) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([Y \geqslant -x])$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
La famille $([D=-1], [D=1])$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([T \leqslant x]) &= \mathbb{P}([D=-1] \cap [T \leqslant x]) + \mathbb{P}([D=1] \cap [T \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([D=-1] \cap [DY \leqslant x]) + \mathbb{P}([D=1] \cap [DY \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([D=-1] \cap [-Y \leqslant x]) + \mathbb{P}([D=1] \cap [Y \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([D=-1])\,\mathbb{P}([-Y \leqslant x]) + \mathbb{P}([D=1])\,\mathbb{P}([Y \leqslant x]) \quad \textit{(car les v.a.r. } D \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \\ &= \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([Y \geqslant -x]) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([Y \leqslant x]) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([T \leqslant x]) = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([Y \leqslant x]) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([Y \geqslant -x])}$$

□

d) En déduire la fonction de répartition de T.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- D'après la question précédente :

$$F_T(x) = \mathbb{P}([T \leqslant x]) = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([Y \leqslant x]) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([Y \geqslant -x]) = \frac{1}{2}\,F_Y(x) + \frac{1}{2}\,(1 - F_Y(-x))$$

où la dernière égalité est obtenue car Y est une v.a.r. à densité d'après la question ***5.a)***.

- Trois cas se présentent alors :
  × si $x \in\,]-\infty, -1]$, alors $-x \in [1, +\infty[$. On obtient donc, avec la question ***5.a)*** :

$$F_T(x) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2}\left(\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{1}{(-x)^2}\right)\right) = \frac{1}{2\,x^2}$$

× si $x \in \,]-1,1[$, alors $-x \in \,]-1,1[$. On obtient donc, avec la question ***5.a)*** :

$$F_T(x) \;=\; \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2}\,(1-0) \;=\; \frac{1}{2}$$

× si $x \in [1,+\infty[$, alors $-x \in \,]-\infty,-1]$. On obtient donc, avec la question ***5.a)*** :

$$F_T(x) \;=\; \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2}\,(1-0) \;=\; \frac{1}{2} - \frac{1}{2\,x^2} + \frac{1}{2} \;=\; 1 - \frac{1}{2\,x^2}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_T : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2\,x^2} & \text{si } x \in \,]-\infty,-1] \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in \,]-1,1[\\ 1 - \dfrac{1}{2\,x^2} & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}.}$$

Commentaire

On remarque que les v.a.r. T et X ont même fonction de répartition. Or, la fonction de répartition caractérise la loi. On en déduit que les v.a.r. X et T ont même loi.

□

7. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$ et V la variable aléatoire définie par : $V = \dfrac{1}{\sqrt{1-U}}$.

a) Rappeler la fonction de répartition de U.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Comme } U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]), \text{ alors } F_U : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty,0] \\ x & \text{si } x \in \,]0,1[\\ 1 & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}.}$$

□

b) Déterminer la fonction de répartition de V et vérifier que les variable V et Y suivent la même loi.

Démonstration.

- On note $h : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ de telle sorte que $V = h(U)$.
  On sait tout d'abord : $U(\Omega) = \,]0,1[$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} V(\Omega) \;&=\; \big(h(U)\big)(\Omega) \;=\; h\big(U(\Omega)\big) \\ &=\; h(]0,1[) \\ &=\; \Big]\lim_{x\to 0} h(x), \lim_{x\to 1} h(x)\Big[\qquad \textit{(car h est continue et strictement croissante sur $]0,1[$) $(*)$} \\ &=\;]1,+\infty[\end{aligned}$$

Détaillons $(*)$.

× La fonction h est continue sur $]0,1[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]0,1[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.

× La fonction h est dérivable sur $]0,1[$ avec des arguments similaires.
Soit $x \in]0,1[$.
$$h'(x) \;=\; -\frac{1}{2}\,\frac{-1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} \;=\; \frac{1}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}} \;>\; 0$$
Donc la fonction h est bien strictement croissante sur $]0,1[$.

$$\boxed{V(\Omega) \;=\;]1,+\infty[}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

× si $x \in]-\infty,1]$, alors : $[V \leqslant x] = \varnothing$, car $V(\Omega) =]1,+\infty[$. Donc :
$$F_V(x) \;=\; \mathbb{P}([V \leqslant x]) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$$

× si $x \in [1,+\infty[$, alors :
$$\begin{array}{rcll}
F_V(x) & = & \mathbb{P}([V \leqslant x]) \;=\; \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{1}{\sqrt{1-U}} \leqslant x\right]\right) & \\
& = & \mathbb{P}\left(\left[\sqrt{1-U} \geqslant \dfrac{1}{x}\right]\right) & \textit{(car la fonction inverse est strictement décroissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
& = & \mathbb{P}\left(\left[1-U \geqslant \dfrac{1}{x^2}\right]\right) & \textit{(car la fonction } x \mapsto x^2 \textit{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[\textit{)} \\
& = & \mathbb{P}\left(\left[1-\dfrac{1}{x^2} \geqslant U\right]\right) & \\
& = & F_U\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right) &
\end{array}$$
De plus :
$$\begin{array}{lll}
 & x > 1 & \\
\text{donc} & x^2 > 1 & \textit{(par stricte croissance de la fonction } x \mapsto x^2 \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \\
\text{d'où} & \dfrac{1}{x^2} < 1 & \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
\text{ainsi} & 0 < \dfrac{1}{x^2} < 1 &
\end{array}$$
On en déduit, d'après la question précédente :
$$F_V(x) \;=\; F_U\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \;=\; 1-\frac{1}{x^2}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_V : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,1] \\ 1-\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}.}$$

- On remarque que les v.a.r. V et Y ont même fonction de répartition, d'après la question ***5.a)***. Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en déduit que les v.a.r. } V \text{ et } Y \text{ ont même loi.}}$$

□

8. *a)* Écrire une fonction en langage **Scilab**, d'en-tête `function a=D(n)`, qui prend un entier $n \geqslant 1$ en entrée, et renvoie une matrice ligne contenant n réalisations de la variable aléatoire D.

Démonstration.

```
function a=D(n)
  a = zeros(1,n)
  for i = 1:n
    r = rand()
    if r < 1/2 then
      a(i) = -1
    else
      a(i) = 1
    end
  end
endfuntion
```

- **Début de la fonction**
  On commence par initialiser la variable `a` qui doit contenir, d'après l'énoncé, une matrice ligne à `n` colonnes.

```
  a = zeros(1,n)
```

- **Structure itérative**
  On met ensuite en place une structure itérative (boucle for) pour affecter à chaque coefficient de la matrice `a` une réalisation de la v.a.r. D.

```
  for i = 1:n
```

On cherche maintenant à simuler la v.a.r. D.

× D'après l'énoncé : $D \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1, 1\})$.
Ainsi, chaque coefficient de la variable `a` doit :

- prendre la valeur -1 avec probabilité $\mathbb{P}([D = -1]) = \frac{1}{2}$.

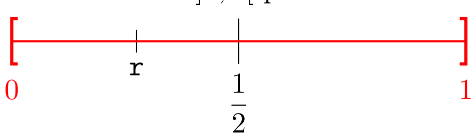
- prendre la valeur 1 avec probabilité $\mathbb{P}([D = 1]) = \frac{1}{2}$.

× Pour cela, on utilise la commande suivante :

```
    r = rand()
```

L'instruction `rand()` renvoie un réel choisi aléatoirement dans $]0, 1[$.
Plus formellement, il s'agit de simuler une v.a.r. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.

× Cette valeur `r` choisie aléatoirement dans $]0, 1[$ permet d'obtenir une simulation de D.



Deux cas se présentent :

- Si $\texttt{r} < \frac{1}{2}$: alors on affecte à `a(i)` (la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de `a`) la valeur -1.
  Ce cas se produit avec la probabilité attendue :

$$\mathbb{P}\left(\left[0 < U < \frac{1}{2}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[U < \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}([D = -1])$$

- Si r $\geqslant \frac{1}{2}$: alors on affecte à `a(i)` la valeur 1.
  Ce cas se produit avec la probabilité attendue :

$$\mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{2} < U < 1\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{2} < U\right]\right) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}([D = 1])$$

On obtient la suite du programme :

```
    if r < 1/2 then
      a(i) = -1
    else
      a(i) = 1
    end
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, fournir la fonction **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir la totalité des points alloués à cette question. On procèdera de même dans la question suivante. □

b) On considère le script suivant :

```
1  n = input('entrer n')
2  a = D(n)
3  b = rand(1,n)
4  c = a ./ sqrt(1-b)
5  disp(sum(c)/n)
```

De quelle variable aléatoire les coefficients du vecteur `c` sont- ils une simulation ? Pour `n` assez grand, quelle sera la valeur affichée ? Justifier votre réponse.

Démonstration.

- On commence par demander à l'utilisateur d'entrer une valeur pour l'entier `n`.

```
1  n = input('entrer n')
```

- D'après la question précédente, on affecte ensuite à la variable `a` une matrice ligne contenant `n` réalisations de la v.a.r. D.

```
2  a = D(n)
```

- On continue en affectant à la variable `b` une matrice ligne contenant `n` réalisations d'une loi uniforme sur $]0, 1[$, c'est-à-dire de la v.a.r. U.

```
3  b = rand(1,n)
```

- La ligne 4 permet de définir une nouvelle variable `c` :

```
4  c = a ./ sqrt(1-b)
```

  × On sait déjà que la variable `a` contient `n` réalisation de la v.a.r. D.
  × On rappelle de plus que la variable `b` contient `n` réalisations de la v.a.r. U. Ainsi, la variable `1 ./ sqrt(1-b)` contient `n` réalisations de la v.a.r. V. Or, d'après la question ***7.b)***, les v.a.r. V et Y ont même loi.
  On en déduit que la variable `1 ./ sqrt(1-b)` contient `n` réalisations de la v.a.r. Y.

$$\boxed{\text{Finalement, la variable c contient donc l'observation d'un n-échantillon de la v.a.r. } D \times Y = T.}$$

Commentaire

L'énoncé original proposait la ligne 4 suivante :

```
4   c = a / sqrt(1-b)
```

Cette commande ne permettait pas d'aboutir au résultat voulu. En effet, la commande :

- `A / B` correspond à l'opération $A \times B^{-1}$. Celle-ci est impossible à effectuer ici car la matrice `sqrt(1-b)` est une matrice ligne. Elle n'est donc pas carrée, et ainsi non inversible.
- `A ./ B` correspond à la division terme de chaque élément de la matrice A par chaque élément de la matrice B. C'est bien ce qu'on voulait faire ici : diviser la 1ère coordonnée de la matrice `a` par la 1ère coordonnée de la matrice `sqrt(1-b)`, diviser la 2ème coordonnée de la matrice `a` par la 2ème coordonnée de la matrice `sqrt(1-b)` ....

- Enfin, la ligne 5 :

```
5   disp(sum(c)/n)
```

permet d'afficher la moyenne des réalisations de T. Plus précisément, la variable `c` est un `n`-uplet $(t_1, \dots, t_{\mathtt{n}})$ qui correspond à l'observation d'un `n`-échantillon $(T_1, \dots, T_{\mathtt{n}})$ de la v.a.r. T.
(cela signifie que les v.a.r. T_1, ..., $T_{\mathtt{n}}$ sont indépendantes et sont de même loi que T)
Ce programme renvoie donc la valeur $\dfrac{1}{\mathtt{n}} \sum\limits_{i=1}^{\mathtt{n}} t_i$ qui correspond à une réalisation de la moyenne empirique $\dfrac{1}{\mathtt{n}} \sum\limits_{i=1}^{\mathtt{n}} T_i$.

- On rappelle maintenant l'énoncé de la loi faible des grands nombres (LfGN).
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. :
  × indépendantes,
  × de même espérance m,
  × de même variance.

  Alors la v.a.r. $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ converge en probabilité vers m.

- On serait donc tenter de dire, que d'après la LfGN, si `n` est grand, le programme fourni par l'énoncé renvoie une valeur approchée de $\mathbb{E}(T)$. Vérifions donc que le cadre d'application de la LfGN est bien respecté.
  - Le `n`-uplet $(T_1, \dots, T_{\mathtt{n}})$ est un `n`-échantillon de la v.a.r. T. Ainsi, les v.a.r. T_1, ..., $T_{\mathtt{n}}$ sont indépendantes (et de même loi).
  - D'après la question ***6.b)***, la v.a.r. T admet une espérance. Comme les v.a.r. T_1, ..., $T_{\mathtt{n}}$ ont même loi que T, elles admettent bien la même espérance.
  - On cherche maintenant à savoir si la v.a.r. T admet une variance. Montrons par l'absurde que la v.a.r. T n'admet pas de variance.
  Supposons alors que la v.a.r. T admet une variance.
    × Par formule de Koenig-Huygens :

    $$\mathbb{V}(T) = \mathbb{E}(T^2) - \Big(\mathbb{E}(T)\Big)^2 = \mathbb{E}(T^2)$$

    En effet, d'après la question ***6.b)*** : $\mathbb{E}(T) = 0$.
    × Or :

    $$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(T^2\right) &= \mathbb{E}\left((DY)^2\right) = \mathbb{E}\left(D^2\, Y^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(D^2\right)\, \mathbb{E}\left(Y^2\right) \end{aligned}$$

    (car les v.a.r. D et Y sont indépendantes)

× De plus, par théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(D^2) \;=\; (-1)^2 \times \mathbb{P}([D=-1]) + 1^2 \times \mathbb{P}([D=1]) \;=\; \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \;=\; 1$$

Ainsi : $\mathbb{V}(T) \;=\; \mathbb{E}\left(T^2\right) \;=\; \mathbb{E}\left(Y^2\right)$.

× Par ailleurs, la v.a.r. Y admet un moment d'ordre 2 si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \, f_Y(t) \, dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour un calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m f_Y(t) \, dt$.
Comme la fonction f_Y est nulle en dehors de $[1, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \, f_Y(t) \, dt \;=\; \int_{1}^{+\infty} t^2 \, f_Y(t) \, dt$$

Enfin, soit $t \in [1, +\infty[$:

$$t^2 \, f_Y(t) \;=\; t^2 \, \frac{2}{t^3} \;=\; \frac{2}{t}$$

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t} \, dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 1. Elle est donc divergente.
On en déduit que la v.a.r. Y n'admet pas de moment d'ordre 2.
Finalement **la v.a.r. T n'admet pas de variance**, ce qui est absurde.

La v.a.r. T n'admet pas de variance. On ne peut donc pas appliquer la LfGN et conclure que le programme renvoie une valeur approchée de $\mathbb{E}(T) = 0$.

Commentaire

Il existe en fait un énoncé de la LfGN (hors programme) se passant de l'hypothèse d'existence d'une variance. Ainsi, si l'on répondait que, pour `n` assez grand, le programme renvoie une valeur approchée de $\mathbb{E}(T)$, alors cette réponse était correcte. Elle permet donc sans doute d'obtenir la totalité des points alloués à cette partie de la question.

□