K
Mathématiques

Colles - Semaine 8

Planche 1

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Montrer que la variable aléatoire 2^{-Z} admet une espérance. On la note $r(Z)$.
On suppose dans la suite de l'exercice que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([Z = n]) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

2. ***a)*** Montrer que l'on définit ainsi une loi de probabilité et calculer $r(Z)$.

b) Montrer que pour tout $(n, q) \in \mathbb{N}^2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{k+q}{q} = \binom{n+q+1}{q+1}$.

c) Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que Z et pour tout entier $q \geqslant 1$, on pose $S_q = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} X_i$.
Montrer que la loi de S_q est définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([S_q = n]) = \binom{n+q-1}{q-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+q}$$

d) Calculer $r(S_q)$. En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+q-1}{q-1} \left(\frac{1}{4}\right)^{n} = \left(\frac{4}{3}\right)^{q}$$

3. On suppose dans cette question que Z représente le nombre de lionceaux devant naître en 2014 d'un couple de lions. Chaque lionceau a la probabilité $\frac{1}{2}$ d'être mâle ou femelle, indépendamment des autres. On note F la variable aléatoire représentant le nombre de femelles devant naître en 2014.
Déterminer la loi de F.

Planche 2

Soit a un nombre réel tel que $0 < a < 1$ et b un nombre réel strictement positif.
On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \dfrac{b^i \, \mathrm{e}^{-b} a^j (1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } i \geqslant j \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de probabilité de X. Déterminer, si elles existent, son espérance et sa variance.

2. Déterminer la loi de probabilité de Y.

3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

4. Soit Z la variable aléatoire $Z = X - Y$. Déterminer sa loi.

5. Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?

Planche 3

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et u un endomorphisme de E. Si F est un sous-espace vectoriel de E, on dit qu F est stable par u si : $\forall x \in F,\ u(x) \in F$. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on note u^k l'application $u \circ u \circ \cdots \circ u$ où u apparaît k fois.
Soient $n \geqslant 1$ un entier et p un projecteur. On suppose que u^n est l'application linéaire identité et que $\mathrm{Im}(p)$ est stable par u. On pose :

$$q \ = \ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}$$

1. Montrer que $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p)$ et que $p \circ q = q$.

2. Montrer : $q \circ u = u \circ q$.

3. Montrer : $q \circ p = p$.

4. Montrer que q est un projecteur.

5. Montrer que $\mathrm{Ker}(q)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Im}(p)$ stable par u.