HEC 2016

Exercice

Soit n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Si M est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice ${}^tM$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ désigne la transposée de M.
On identifie les ensembles $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ en assimilant une matrice de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ à son unique coefficient.
On note $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}_p$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ $(q \in \mathbb{N}^*)$, *on admet* que ${}^t(MN) = {}^tN\,{}^tM$.

1. Soit X une matrice colonne non nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de composantes $x_1, x_2, ..., x_n$ dans la base $\mathcal{B}_n$.
On pose : $A = X\,{}^tX$ et $\alpha = {}^tXX$.

a) Exprimer A et α en fonction de $x_1, x_2, ..., x_n$. Justifier que la matrice A est diagonalisable.

b) Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice A dans la base $\mathcal{B}_n$.
Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$; donner une base de $\mathrm{Im}(f)$ et préciser la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.

c) Calculer la matrice AX.
Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associés.

2. On suppose que n et p vérifient $1 \leqslant p \leqslant n$.
Soit $(V_1, V_2, ..., V_p)$ une famille libre de p vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On note V la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont, dans cet ordre, $V_1, V_2, ..., V_p$.
Soit g l'application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice V dans les bases $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$.

a) Justifier que le rang de V est égal à p. Déterminer $\mathrm{Ker}(g)$.

b) Soit Y une matrice colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Montrer que l'on a $VY = 0$ si et seulement si l'on a ${}^tVVY = 0$.

c) En déduire que la matrice ${}^tVV$ est inversible.

Problème

On s'intéresse dans ce problème à quelques aspects mathématiques de la fonction de production d'une entreprise qui produit un certain bien à une époque donnée, à partir de deux facteurs de production travail et capital.

Dans tout le problème :

- *On note respectivement x et y les quantités de travail et de capital requises pour produire une certaine quantité de ce bien.*
- *On suppose que $x > 0$ et $y > 0$. On pose $\mathcal{D} = (\mathbb{R}_+^*)^2$ et pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, $z = \dfrac{x}{y}$.*

La partie III est indépendante des parties I et II.

Partie I : Fonction de production CES (Constant Elasticity of Substitution).

Dans toute cette partie, on note c un réel vérifiant $0 < c < 1$ et θ un réel vérifiant $\theta < 1$ avec $\theta \neq 0$.
Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}, \quad f(x, y) = \Big(c\, x^\theta + (1-c)\, y^\theta\Big)^{\frac{1}{\theta}} \quad (\textit{fonction de production CES})$$

1. *Exemple.* Dans cette question **uniquement,** on prend $\theta = -1$ et $c = \dfrac{1}{2}$.

a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a : $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x+y}$. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ et calculer pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, les dérivées partielles $\partial_1(f)(x, y)$ et $\partial_2(f)(x, y)$.

b) Soit w et U les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t > 0$, $w(t) = \dfrac{2t}{1+t}$ et $U(t) = w(t) - t\, w'(t)$.
Dresser le tableau de variation de la fonction U sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier la convexité de U sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) On rappelle que $z = \dfrac{x}{y}$. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a $f(x, y) = y\, w(z)$.

d) Vérifier pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, les relations : $\partial_1(f)(x, y) = w'(z)$ et $\partial_2(f)(x, y) = U(z)$.

2. ***a)*** Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$ et pour tout réel $\lambda > 0$, on a : $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda\, f(x, y)$.

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ et, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, calculer $\partial_1(f)(x, y)$ et $\partial_2(f)(x, y)$.

c) Déterminer pour tout $y > 0$ fixé, le signe et la monotonie de la fonction $x \mapsto \partial_1(f)(x, y)$.
Déterminer pour tout $x > 0$ fixé, le signe et la monotonie de la fonction $y \mapsto \partial_2(f)(x, y)$.

3. Soit G la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par $G(x, y) = \dfrac{\partial_1(f)(x, y)}{\partial_2(f)(x, y)}$ (*taux marginal de substitution technique*) et g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t > 0$, $g(t) = \dfrac{c}{1-c} t^{-1+\theta}$.

a) Pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, exprimer $G(x, y)$ en fonction de $g(z)$.

b) Pour tout $t > 0$, on pose $s(t) = -\dfrac{g(t)}{t\, g'(t)}$. Calculer $s(z)$ (*élasticité de substitution*). Conclusion.

4. Soit w et U les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t > 0$, $w(t) = f(t, 1)$ et $U(t) = w(t) - t\, w'(t)$.

a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a : $f(x, y) = y\, w(z)$.

b) En distinguant les deux cas $0 < \theta < 1$ et $\theta < 0$, dresser le tableau de variation de U sur $\mathbb{R}_+^*$.
Préciser $\lim\limits_{t \to 0^+} U(t)$, $\lim\limits_{t \to +\infty} U(t)$ ainsi que la convexité de U sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie II : Caractérisation des fonctions de production à élasticité de substitution constante.

Dans toute cette partie, on note Ψ une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant la condition $\Psi(1,1) = 1$ et pour tout réel $\lambda > 0$, la relation : $\Psi(\lambda x, \lambda y) = \lambda\, \Psi(x,y)$.
De plus, on suppose que pour tout $y > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto \partial_1(\Psi)(x,y)$ est strictement positive et strictement décroissante et que pour tout $x > 0$ fixé, la fonction $y \mapsto \partial_2(\Psi)(x,y)$ est également strictement positive et strictement décroissante.

5. Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t > 0,\ v(t) = \Psi(t,1)$.

a) Justifier que la fonction v est de classe $\mathcal{C}^2$, strictement croissante et concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t > 0,\ \varphi(t) = v(t) - t\, v'(t)$. On suppose l'existence de la limite de $\varphi(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures et que $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi(t) = \mu$, avec $\mu \geqslant 0$.
Déterminer pour tout $t > 0$, le signe de $\varphi(t)$ et montrer que $\mu \leqslant 1$.

c) Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathcal{D},\ \Psi(x,y) = y\, v(z)$.

6. a) Pour tout $t > 0$, on pose : $h(t) = \dfrac{v'(t)}{\varphi(t)}$.
Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$, on a : $\dfrac{\partial_1(\Psi)(x,y)}{\partial_2(\Psi)(x,y)} = h(z)$.

b) Pour tout $t > 0$, on pose : $\sigma(t) = -\dfrac{h(t)}{t\, h'(t)}$. Déterminer pour tout $t > 0$, le signe de $\sigma(t)$.

7. Les fonctions σ et h sont celles qui ont été définies dans la question 6. On suppose que la fonction σ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$; on note σ_0 cette constante et on suppose $\sigma_0 \neq 1$. On pose : $r = 1 - \dfrac{1}{\sigma_0}$.

a) Pour tout $t > 0$, on pose $\ell(t) = t^{1-r} h(t)$. Calculer $\ell'(t)$ et en déduire que : $\forall t > 0,\ h(t) = h(1) t^{r-1}$.

b) Par une méthode analogue à celle de la question 7a, établir la relation :

$$\forall t > 0,\ \ v(t) = \left(\frac{1 + h(1) t^r}{1 + h(1)} \right)^{\frac{1}{r}}$$

c) En déduire l'existence d'une constante $a \in]0,1[$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathcal{D},\ \Psi(x,y) = (a x^r + (1-a) y^r)^{\frac{1}{r}}$.

d) Quelle conclusion peut-on tirer des résultats des questions 3b et 7c ?

8. Soit $a \in]0,1[$. Pour tout $t > 0$, soit S_t la fonction définie sur $]-\infty, 1[\setminus \{0\}$ par : $S_t(r) = (a t^r + 1 - a))^{\frac{1}{r}}$.

a) On pose $H_t(r) = \ln S_t(r)$. Calculer la limite de $S_t(r)$ lorsque r tend vers 0.

b) Pour tout couple $(x,y) \in \mathcal{D}$ fixé, on pose : $N_{(x,y)}(r) = y\, S_z(r)$ et $F(x,y) = \lim\limits_{r \to 0} N_{(x,y)}(r)$.
Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$, on a $F(x,y) = x^a\, y^{1-a}$ (*fonction de production de Cobb-Douglas*).

Partie III : Estimation des paramètres d'une fonction de production de Cobb-Douglas.

Soit a un réel vérifiant $0 < a < 1$ et B un réel strictement positif.
On suppose que la production totale Q présente une composante déterministe et une composante aléatoire.

- La *composante déterministe* est une fonction de production de type Cobb-Douglas, c'est-à-dire telle que :
$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}, \quad f(x,y) = Bx^a y^{1-a}$$
- La *composante aléatoire* est une variable aléatoire de la forme $\exp(R)$ où R est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée, de variance $\sigma^2 > 0$.
- La *production totale* Q est une variable aléatoire à valeurs strictement positives telle que :
$$Q = Bx^a y^{1-a} exp(R)$$

On suppose que les variables aléatoires Q et R sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On pose : $b = \ln(B)$, $u = \ln(x) - \ln(y)$ et $T = \ln(Q) - \ln(y)$. On a donc : $T = au + b + R$.
On sélectionne n entreprises ($n \geqslant 1$) qui produisent le bien considéré à l'époque donnée.
On mesure pour chaque entreprise i ($i \in [\![1,n]\!]$) la quantité de travail x_i et la quantité de capital y_i utilisées ainsi que la quantité produite Q_i^*. On suppose que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $x_i > 0$, $y_i > 0$ et $Q_i^* > 0$.
Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la production totale de l'entreprise i est alors une variable aléatoire Q_i telle que $Q_i = B\, x_i^a\, y_i^{1-a} \exp(R_i)$, où R_1, R_2, $\ldots$, R_n sont des variables aléatoires supposées indépendantes et de même loi que R et le réel strictement positif Q_i^* est une réalisation de la variable aléatoire Q_i.
On pose tout $i \in [\![1,n]\!]$: $u_i = \ln(x_i) - \ln(y_i)$, $T_i = \ln(Q_i) - \ln(y_i)$ et $t_i = \ln(Q_i^*) - \ln(y_i)$.
Ainsi, pour chaque entreprise $i \in [\![1,n]\!]$, on a $T_i = au_i + b + R_i$ et le réel t_i est une réalisation de la variable aléatoire T_i.
On rappelle les définitions et résultats suivants :

- Si $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une série statistique, la moyenne et la variance empiriques, notées respectivement $\overline{v}$ et s_v^2, sont données par : $\overline{v} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} v_i$ et $s_v^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} (v_i - \overline{v})^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} v_i^2 - \overline{v}^2$.
- Si $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(w_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont deux séries statistiques, la covariance empirique de la série double $(v_i, w_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, notée $\mathrm{cov}(v,w)$, est donnée par :
$$\mathrm{cov}(v,w) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (v_i - \overline{v})(w_i - \overline{w}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i\, w_i - \overline{v}\overline{w} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (v_i - \overline{v}) w_i$$

9. a) Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la variable aléatoire T_i suit la loi normale $\mathcal{N}\left(au_i + b, \sigma^2\right)$.

b) Les variables aléatoires $T_1, T_2, ..., T_n$ sont-elles indépendantes ?

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, soit φ_i la densité continue sur $\mathbb{R}$ de T_i :
$$\forall d \in \mathbb{R},\ \varphi_i(d) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(d - (au_i + b))^2\right)$$

Soit $\mathcal{F}$ l'ouvert défini par $\mathcal{F} =]0,1[\times \mathbb{R}$ et M la fonction de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$M(a,b) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \varphi_i(t_i)\right)$$

On suppose que : $0 < \mathrm{cov}(u,t) < s_u^2$.

10. ***a)*** Calculer le gradient $\nabla(M)(a,b)$ de M en tout point $(a,b) \in \mathcal{F}$.

b) En déduire que M admet sur $\mathcal{F}$ un unique point critique, noté $(\hat{a}, \hat{b})$.

c) Exprimer $\hat{a}$ et $\hat{b}$ en fonction de $\text{cov}(u,t)$, s_u^2, $\overline{t}$ et $\overline{u}$.
($\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont les estimations de a et b par la méthode dite du maximum de vraisemblance)

11. ***a)*** Soit $\nabla^2(M)(a,b)$ la matrice hessienne de M en $(a,b) \in \mathcal{F}$.
Montrer que $\nabla^2(M)(a,b) = -\dfrac{n}{\sigma^2} \begin{pmatrix} s_u^2 + \overline{u}^2 & \overline{u} \\ \overline{u} & 1 \end{pmatrix}$

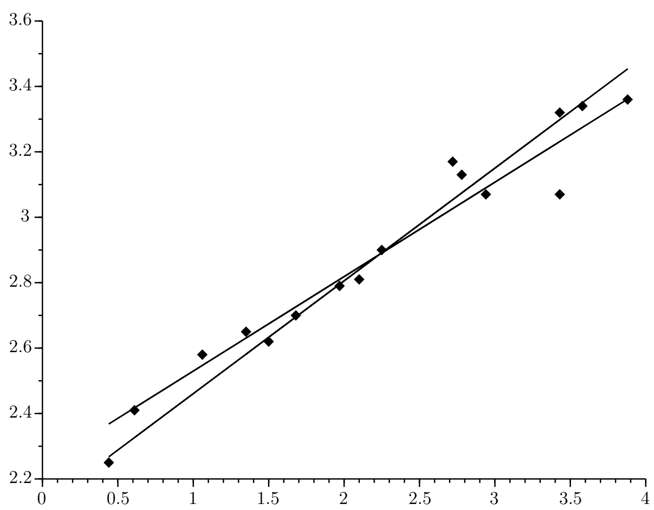
b) En déduire que M admet en $(\hat{a}, \hat{b})$ un maximum global.

12. Soit (h,k) un couple de réels non nuls. Calculer $M(\hat{a}+h, \hat{b}+k) - M(\hat{a}, \hat{b})$.
En déduire que M admet en $(\hat{a}, \hat{b})$ un maximum global.

13. On rappelle qu'en **Scilab**, les commandes `variance` et `corr` permettent de calculer respectivement la variance d'une série statistique et la covariance d'une série statistique double.
Si $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(w_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont deux séries statistiques, alors la variance de $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est calculable par `variance(v)` et la covariance de $(v_i, w_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est calculable par `corr(v,w,1)`.
On a relevé pour $n = 16$ entreprises qui produisent le bien considéré à l'époque donnée, les deux séries statistiques $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(t_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ reproduites dans les lignes 1 à 4 du code **Scilab** suivant dont la ligne 9 est incomplète :

```
1   u = [1.06, 0.44, 2.25, 3.88, 0.61, 1.97, 3.43, 2.10,
2       1.50, 1.68, 2.72, 1.35, 2.94, 2.78, 3.43, 3.58]
3   v = [2.58, 2.25, 2.90, 3.36, 2.41, 2.79, 3.32, 2.81,
4       2.62, 2.70, 3.17, 2.65, 3.07, 3.13, 3.07, 3.34]
5   plot2d(u, t, -4)
6   // -4 signifie que les points sont représentés par des losanges.
7   plot2d(u, corr(u,t,1)/variance(u)*u + mean(t) - corr(u,t,1)/variance(u)*mean(u))
8   // équation de la droite de régression de t en u.
9   plot2d(u,..........................................)
10  // équation de la droite de régression de u en t.
```

Le code précédent complété par la ligne 9 donne alors la figure suivante :



a) Compléter la ligne 8 du code permettant d'obtenir la figure précédente (*on reportera sur sa copie, uniquement la ligne 8 complétée*).

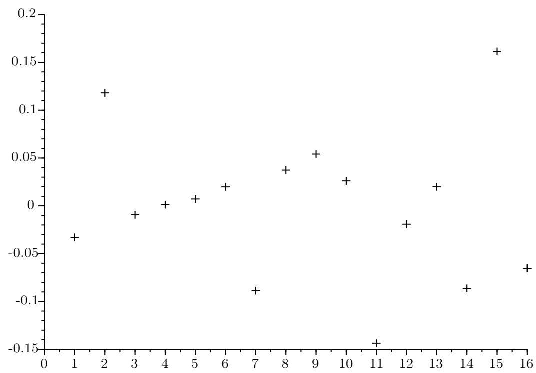
b) Interpréter le point d'intersection des deux droites de régression.

c) Estimer graphiquement les moyennes empiriques $\overline{u}$ et $\overline{t}$.

d) Le coefficient de corrélation empirique de la série statistique double $(u_i, t_i)_{1 \leqslant i \leqslant 16}$ est-il plus proche de -1, de 1 ou de 0 ?

e) On reprend les lignes 1 à 4 du code précédent que l'on complète par les instructions 11 à 17 qui suivent et on obtient le graphique ci-dessous :

```
11  a0 = corr(u,t,1)/variance(u)
12  b0 = mean(t) - corr(u,t,1)/variance(u)*mean(u)
13  t0 = a0 * u + b0
14  e = t0 - t
15  p = 1:16
16  plot2d(p,e,-1)
17  // -1 signifie que les points sont représentés par des symboles d'addition.
```



Que représente ce graphique ? Quelle valeur peut-on conjecturer pour la moyenne des ordonnées des 16 points obtenus sur le graphique ?
Déterminer mathématiquement la valeur de cette moyenne.

14. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $A_n = \dfrac{1}{n\, s_u^2} \sum\limits_{i=1}^{n} (u_i - \overline{u}) T_i$. On suppose que le paramètre σ^2 est connu.

a) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(A_n)$ et la variance $\mathbb{V}(A_n)$ de la variable aléatoire A_n.
Préciser la loi de A_n.

b) On suppose que a est un paramètre inconnu. Soit α un réel donné vérifiant $0 < \alpha < 1$.
On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et d_α le réel tel que $\Phi(d_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.
Déterminer un intervalle de confiance du paramètre a au niveau de confiance $1 - \alpha$.