ECRICOME 2016

EXERCICE 1

Partie A

Pour tout couple de réels (x, y), on définit la matrice $M(x, y)$ par :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}$$

On appelle E l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où x et y décrivent $\mathbb{R}$:

$$E = \{M(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

On note $A = M(1, 0)$ et $B = M(0, 1)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
En déterminer une base et donner sa dimension.

Démonstration.

- Par définition de E, on a :

$$\begin{array}{rcl} E & = & \{M(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ & = & \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ & = & \{x \cdot M(1,0) + y \cdot M(0,1) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \{x \cdot A + y \cdot B \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \mathrm{Vect}\,(A, B) \end{array}$$

  De plus, $(A, B) \in (\mathscr{M}_3(\mathbb{R}))^2$.

  $$\boxed{\text{Donc } E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$$

- La famille (A, B) :
  - × engendre E (d'après le point précédent),
  - × est libre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, car elle est constituée de 2 matrices non proportionnelles.

  $$\boxed{\text{D'où } (A, B) \text{ est une base de } E.}$$

- Déterminons la dimension de E.

  $$\boxed{\dim(E) = \mathrm{Card}((A, B)) = 2}$$

□

2. Montrer que 1, 2 et 3 sont valeurs propres de A et déterminer les espaces propres associés.
A est-elle diagonalisable ?

Démonstration.

- Déterminons $E_1(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (A - 1 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_1(A) & \iff & (A - 1 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[4pt]
& \iff & \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[10pt]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\[10pt]
& \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3}{\overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ -x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ & & 2y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\[10pt]
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & 2y & - & z & = & 0 \\ & & 2y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\[10pt]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & 2y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\[10pt]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & -z \\ & & 2y & = & z \end{array} \right. \\[10pt]
& \overset{L_1 \leftarrow 2 L_1 + L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & & & = & -z \\ & & 2y & = & z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -\frac{1}{2} z \\ y & = & \frac{1}{2} z \end{array} \right.
\end{array}$$

  Finalement, on obtient l'expression de $E_1(A)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl}
E_1(A) & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -\dfrac{1}{2} z \text{ et } y = \dfrac{1}{2} z \} \\[10pt]
& = & \{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} z \\ \frac{1}{2} z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \} = \{ z \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

  Comme $E_1(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$, 1 est bien valeur propre de A, d'espace propre associé $E_1(A)$.

$$\boxed{E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)}$$

- Déterminons $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (A - 2 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_2(A) & \Longleftrightarrow & (A - 2 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 3z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 3z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & -2z \\ & & 4y & = & 3z \end{array} \right. \\
& \underset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & & & = & -z \\ & & 4y & = & 3z \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -\frac{1}{2}\, z \\ y & = & \frac{3}{4}\, z \end{array} \right.
\end{array}$$

Finalement, on obtient l'expression de $E_2(A)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl}
E_2(A) & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -\dfrac{1}{2}\, z \text{ et } y = \dfrac{3}{4}\, z \} \\
& = & \{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\, z \\ \frac{3}{4}\, z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \} \ = \ \{ z \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \} \ = \ \mathrm{Vect} \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

Comme $E_2(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$, 2 est bien valeur propre de A, d'espace propre associé $E_2(A)$.

$$\boxed{E_2(A) \ = \ \mathrm{Vect} \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \ = \ \mathrm{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)}$$

- Déterminons $E_3(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (A - 3 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_3(A) & \Longleftrightarrow & (A - 3 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 4z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{\substack{L_1 \leftarrow -\frac{1}{2} L_1 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{4} L_3}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -x & + & y & = & 2z \\ & & y & = & z \end{array} \right. \\
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -x & & & = & z \\ & & y & = & z \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -z \\ y & = & z \end{array} \right.
\end{array}$$

Finalement, on obtient l'expression de $E_3(A)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl}
E_3(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \text{ et } y = z \right\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

Comme $E_3(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$, 3 est bien valeur propre de A, d'espace propre associé $E_3(A)$.

$$\boxed{E_3(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)}$$

- On sait que :
  - × $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$,
  - × A possède 3 valeurs propres **distinctes**.

$$\boxed{\text{Donc } A \text{ est diagonalisable.}}$$ □

3. Déterminer une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et telle que :

$$A = PD_AP^{-1}, \quad \text{où} \quad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Démonstration.
D'après la question ***2.***, la matrice A est diagonalisable.
Il existe donc une matrice P inversible et une matrice D_A diagonale telles que $A = PD_AP^{-1}$.

Plus précisément, la matrice P est obtenue par concaténation de bases des sous-espaces propres de A et la matrice D_A est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A (dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres).
Comme $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ sont des bases respectives de $E_1(A)$, $E_2(A)$ et $E_3(A)$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } A = P D_A P^{-1}.}$$

□

4. Déterminer P^{-1} (faire figurer le détail des calculs sur la copie).

Démonstration.
On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_1 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.
On retrouve ainsi que P est inversible.

On effectue l'opération $\left\{ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_1 \leftarrow L_1 + 2\,L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{Finalement } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

5. En notant X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs colonnes formant la matrice P, calculer BX_1, BX_2 et BX_3. En déduire l'existence d'une matrice diagonale D_B que l'on explicitera telle que :

$$B = P D_B P^{-1}$$

Démonstration.

- On a : $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. D'où : $BX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot X_1$.

- On a : $X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. D'où : $BX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = -1 \cdot X_2$.

- On a : $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. D'où : $BX_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot X_3$.

$$\boxed{\text{Finalement, } BX_1 = 0 \cdot X_1,\ BX_2 = -1 \cdot X_2 \text{ et } BX_3 = -1 \cdot X_3.}$$

- D'après les calculs précédents : $X_1 \in E_0(B)$ et $(X_2, X_3) \in (E_{-1}(B))^2$. Or :
  - × (X_1) est une famille libre de $E_0(B)$, car elle est constituée d'une unique vecteur non nul,
  - × (X_2, X_3) est une famille libre de $E_{-1}(B)$, car elle est constituée de 2 vecteurs non colinéaires.

  La famille (X_1, X_2, X_3) est la concaténation de 2 familles libres de vecteurs propres associées à des valeurs propres **distinctes**.

  $$\boxed{\text{Ainsi, la famille } (X_1, X_2, X_3) \text{ est libre.}}$$

  On obtient alors :
  - × la famille (X_1, X_2, X_3) est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
  - × $\text{Card}\left((X_1, X_2, X_3)\right) = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$

  $$\boxed{\text{Donc } (X_1, X_2, X_3) \text{ est une base de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

- La famille (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de B.
  La matrice B est donc diagonalisable dans cette base.
  On en déduit que $B = PD_BP^{-1}$ où P est la matrice obtenue par concaténation des vecteurs X_1, X_2 et X_3 de la base et D_B est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de la matrice B (dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres).

  $$\boxed{\text{Plus précisément : } B = PD_BP^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}.}$$

□

6. En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x, y)$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$M(x, y) = PD(x, y)P^{-1}$$

Démonstration.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} M(x,y) & = & x \cdot A + y \cdot B \\ & = & x \cdot PD_A P^{-1} + y \cdot PD_B P^{-1} \qquad \textit{(d'après les questions 3. et 5.)} \\ & = & P(x \cdot D_A + y \cdot D_B)P^{-1} \\ & = & P\left(x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right) P^{-1} \\ & = & P \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x-y & 0 \\ 0 & 0 & 3x-y \end{pmatrix} P^{-1} \\ & = & PD(x,y)P^{-1} \end{array}$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ M(x,y) = PD(x,y)P^{-1}, \text{ où } D(x,y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x-y & 0 \\ 0 & 0 & 3x-y \end{pmatrix}}$$

□

7. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) pour que $M(x, y)$ soit inversible.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- Commençons par démontrer que :

$$M(x,y) \text{ est inversible } \Leftrightarrow D(x,y) \text{ est inversible}$$

($\Rightarrow$) Supposons que la matrice $M(x, y)$ est inversible.
On a l'égalité suivante : $D(x, y) = P^{-1}M(x, y)P$.
Ainsi $D(x, y)$ est inversible comme produit de trois matrices inversibles.

($\Leftarrow$) De même, si $D(x, y)$ est inversible, alors $M(x, y) = PD(x, y)P^{-1}$.

$$\boxed{M(x,y) \text{ est inversible si et seulement si } D(x,y) \text{ est inversible.}}$$

- On en déduit alors :

$$\begin{array}{rcl} M(x,y) \text{ est inversible} & \Leftrightarrow & D(x,y) \text{ est inversible} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x & \neq & 0 \\ 2x-y & \neq & 0 \\ 3x-y & \neq & 0 \end{array} \right. \qquad \textit{(car } D(x,y) \textit{ est une matrice diagonale)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ M(x,y) \text{ est inversible si et seulement si } \left\{ \begin{array}{rcl} x & \neq & 0 \\ 2x-y & \neq & 0 \\ 3x-y & \neq & 0 \end{array} \right. .}$$

□

8. Montrer que B^2 est un élément de E. La matrice A^2 est-elle aussi un élément de E ?

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = -B$$

$$\boxed{\text{Or } B \in E. \text{ Donc } B^2 = -B \in E.}$$

- Par ailleurs :

$$A^2 = (PD_AP^{-1})^2 = PD_A\cancel{P^{-1}} \times \cancel{P}D_AP^{-1} = P(D_A)^2P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}P^{-1}$$

Pour savoir si $A^2 \in E$, on cherche à savoir s'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = D(x, y)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = D(x,y) \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x-y & 0 \\ 0 & 0 & 3x-y \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & & = & 1 \\ 2x & - & y & = & 4 \\ 3x & - & y & = & 9 \end{array} \right. \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & & = & 1 \\ & - & y & = & 2 \\ & - & y & = & 6 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ceci est impossible, donc } A^2 \notin E.}$$

□

Partie B

On souhaite dans cette partie étudier les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les conditions initiales $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} a_{n+1} & = & 3a_n & + & 4b_n & - & c_n \\ b_{n+1} & = & -4a_n & - & 5b_n & + & c_n \\ c_{n+1} & = & -6a_n & - & 8b_n & + & 2c_n \end{array} \right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

9. Que vaut X_0 ?

Démonstration.

$$\boxed{X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

□

10. Déterminer une matrice C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$X_{n+1} = CX_n$$

Déterminer ensuite deux réels x et y tels que $C = M(x, y)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Notons $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$. Alors :

$$CX_n = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_n + 4b_n - c_n \\ -4a_n - 5b_n + c_n \\ -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

$$\boxed{\text{On a bien trouvé } C \text{ tel que : } \forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = C\,X_n.}$$

- On cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $C = M(x, y)$.

$$C = M(x,y) \iff \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcr} 3x & & & = & 3 \\ -2x & + & 2y & = & 4 \\ 2x & - & y & = & -1 \\ -x & - & y & = & -4 \\ 4x & - & 3y & = & -5 \\ -2x & + & y & = & 1 \\ & - & 2y & = & -6 \\ 4x & - & 4y & = & -8 \\ -x & + & y & = & 2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 3 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{Finalement : } C = M(1,3)}$$

□

11. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^n X_0$.

Démonstration.
Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n)$: $X_n = C^n X_0$.

- ▸ **Initialisation** :
  $C^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* : $X_{n+1} = C^{n+1} X_0$).

$$\begin{array}{rcll} X_{n+1} & = & C\,X_n & \textit{(d'après la question \textbf{10})} \\ & = & C \times (C^n X_0) & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & C^{n+1} X_0 & \end{array}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ X_n = C^n X_0.}$$

□

12. À l'aide des résultats de la partie A, exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $C = M(1,3)$. Donc, d'après la question ***6.*** :

$$C = P\,D(1,3)\,P^{-1}$$

Donc, par récurrence immédiate :

$$C^n = P\,(D(1,3))^n\,P^{-1}$$

- Or, comme $n \geqslant 1$: $(D(1,3))^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc :

$$\begin{array}{rcl} C^n & = & P\,(D(1,3))^n\,P^{-1} \\ & = & P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ (-1)^n & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 1-2(-1)^n & 2-2(-1)^n & -1 \\ -1+3(-1)^n & -2+3(-1)^n & 1 \\ -2+4(-1)^n & -4+4(-1)^n & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Enfin :

$$X_n = C^n X_0 = \begin{pmatrix} 1-2(-1)^n & 2-2(-1)^n & -1 \\ -1+3(-1)^n & -2+3(-1)^n & 1 \\ -2+4(-1)^n & -4+4(-1)^n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2(-1)^n \\ -1+3(-1)^n \\ -2+4(-1)^n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Par définition de } (X_n)_{n\in\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}^*, \left\{ \begin{array}{rcl} a_n & = & 1-2(-1)^n \\ b_n & = & -1+3(-1)^n \\ c_n & = & -2+4(-1)^n \end{array} \right. \text{ et pour } n=0 : X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$\square$

EXERCICE 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}$$

a) Étudier les variations de la fonction g_0, définie sur $[0,+\infty[$ par : $g_0(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$.
Préciser la limite de g_0 en $+\infty$, donner l'équation de la tangente en 0, et donner l'allure de la courbe représentative de g_0.

Démonstration.

- La fonction g_0 est dérivable sur $[0,+\infty[$ car elle est l'inverse de la fonction $x \mapsto (1+x)^2$ dérivable sur $[0,+\infty[$ et qui ne s'annule pas sur cet intervalle ($\forall x \in [0,+\infty[$, $(1+x)^2 \neq 0$).
- Soit $x \in [0,+\infty[$.

$$g_0'(x) = -2\,\frac{1}{(1+x)^3} < 0$$

Donc la fonction g_0 est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

- Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+x)^2 = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(1+x)^2} = 0$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} g_0(x) = 0$.
- On obtient finalement le tableau de variations suivant :

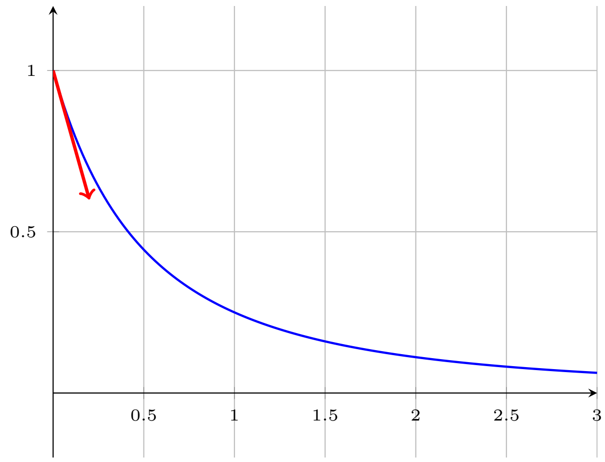
x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $g_0'(x)$	$-$
Variations de g_0	$1 \searrow 0$

- L'équation de la tangente à g_0 en 0 est :

$$y = g_0(0) + g_0'(0)(x-0)$$

$$\boxed{\text{L'équation de la tangente à } g_0 \text{ en } 0 \text{ est : } y = -2x+1.}$$

- On obtient la courbe représentative de g_0.



$\square$

b) Pour $n \geqslant 1$, justifier que g_n est dérivable sur $[0,+\infty[$ et montrer que :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ g_n'(x) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ n \geqslant 2\ln(1+x)$$

En déduire les variations de la fonction g_n lorsque $n \geqslant 1$.
Calculer soigneusement $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 1$.

- La fonction g_n est dérivable sur $[0,+\infty[$ car elle est le quotient de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas ($\forall x \in [0,+\infty[$, $(1+x)^2 \neq 0$).
- Soit $x \in [0,+\infty[$.

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= \frac{n\,\dfrac{(\ln(1+x))^{n-1}}{\cancel{1+x}}\,(1+x)^{\cancel{2}} - 2(1+x)\,(\ln(1+x))^n}{(1+x)^4} \\ &= \frac{n\,(1+x)(\ln(1+x))^{n-1} - 2(1+x)(\ln(1+x))^n}{(1+x)^7} \\ &= \frac{(1+x)(\ln(1+x))^{n-1}\,(n-2\ln(1+x))}{(1+x)^7} \end{aligned}$$

Comme $x \geqslant 0$, on a :
$$1+x \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \ln(1+x) \geqslant 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On obtient alors : } \forall x \in [0,+\infty[,\\ g_n'(x) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ n - 2\ln(1+x) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ n \geqslant 2\ln(1+x).\end{array}}$$

- Soit $x \in [0,+\infty[$.

$$\begin{aligned} g_n'(x) \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad n \geqslant 2\ln(1+x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n}{2} \geqslant \ln(1+x) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{\frac{n}{2}} \geqslant 1+x \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{\frac{n}{2}} - 1 \geqslant x \end{aligned}$$

(car $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$)

Or : $\dfrac{n}{2} \geqslant 0$. Donc, par croissance de $x \mapsto \mathrm{e}^x$: $\mathrm{e}^{\frac{n}{2}} \geqslant \mathrm{e}^0 = 1$ et $\mathrm{e}^{\frac{n}{2}} - 1 \geqslant 0$.

On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{n}{2}} - 1$		$+\infty$
Signe de $g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g_n	0	$\nearrow$	$\left(\frac{n}{2\mathrm{e}}\right)^n$	$\searrow$	0

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - Tout d'abord :

$$g_n\left(\mathrm{e}^{\frac{n}{2}} - 1\right) = \frac{\left(\ln\left(\cancel{1} + \mathrm{e}^{\frac{n}{2}} - \cancel{1}\right)\right)^n}{\left(\cancel{1} + \mathrm{e}^{\frac{n}{2}} - \cancel{1}\right)^2} = \frac{\left(\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{n}{2}}\right)\right)^n}{\left(\mathrm{e}^{\frac{n}{2}}\right)^2} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{\mathrm{e}^{\cancel{2}\frac{n}{\cancel{2}}}} = \left(\frac{n}{2}\right)^n \frac{1}{\mathrm{e}^n} = \left(\frac{n}{2\mathrm{e}}\right)^n$$

  - Et :

$$g_n(0) = \frac{(\ln(1+0))^n}{(1+0)^2} = \frac{(\ln(1))^n}{1^2} = 0$$

  - Enfin : $\lim\limits_{x \to +\infty} (1+x) = +\infty$.

    Et : $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{(\ln(y))^n}{y^2} = 0$, par croissances comparées.

$$\boxed{\text{Finalement, par composition de fonctions, } \lim_{x \to +\infty} g_n(x) = 0.}$$

□

c) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, g_n admet un maximum sur $[0,+\infty[$ qui vaut :
$$M_n = \left(\frac{n}{2\mathrm{e}}\right)^n$$
et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} M_n$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 1$.

- La fonction g_n est :
  - × croissante sur l'intervalle $\left[0, \mathrm{e}^{\frac{n}{2}} - 1\right]$,
  - × décroissante sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{\frac{n}{2}} - 1, +\infty\right[$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Sur } [0,+\infty[\text{, La fonction } g_n \text{ admet un maximum } M_n \text{ en } e^{\frac{n}{2}}-1 \text{ et,} \\ \text{d'après la question } \textbf{\textit{1.b)}},\ M_n = \left(\dfrac{n}{2e}\right)^n\end{array}}$$

- On remarque :
$$M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(\frac{n}{2e}\right)\right)$$
Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(\dfrac{n}{2e}\right) = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(n\ln\left(\dfrac{n}{2e}\right)\right) = +\infty$.
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} M_n = +\infty}$$

□

d) Montrer enfin que pour tout $n \geqslant 1$:
$$g_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 1$.

- Tout d'abord, pour tout $x \in [0,+\infty[$:
$$\frac{g_n(x)}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} = x^{\frac{3}{2}}\, g_n(x) = x^{\frac{3}{2}}\,\frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}$$

- En posant $y = 1+x$, on a :
$$x^{\frac{3}{2}} g_n(x) = x^{\frac{3}{2}}\,\frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} = (y-1)^{\frac{3}{2}}\,\frac{(\ln(y))^n}{y^2}$$
Or :
$$(y-1)^{\frac{3}{2}}\,\frac{(\ln(y))^n}{y^2} \underset{y\to+\infty}{\sim} y^{\frac{3}{2}}\,\frac{(\ln(y))^n}{y^2} = \frac{(\ln(y))^n}{y^{\frac{1}{2}}}$$
De plus, par croissances comparées : $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{(\ln(y))^n}{y^{\frac{1}{2}}} = 0$. Donc : $\lim\limits_{y\to+\infty} (y-1)^{\frac{3}{2}}\,\dfrac{(\ln(y))^n}{y^2} = 0$.

- Finalement :
  × $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+x) = +\infty$,
  × $\lim\limits_{y\to+\infty} (y-1)^{\frac{3}{2}}\,\dfrac{(\ln(y))^n}{y^2} = 0$.

  On en déduit, par composition de fonctions : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}} g_n(x) = 0$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ g_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)}$$

□

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t)dt$$

a) Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.

Démonstration.
$$I_0 = \int_0^{+\infty} g_0(t)\ dt$$

- La fonction g_0 est continue sur $[0,+\infty[$.
- Soit $A \in [0,+\infty[$.

$$\int_0^A g_0(t)\ dt = \int_0^A \frac{1}{(1+t)^2}\ dt = \left[-\frac{1}{1+t} \right]_0^A = -\frac{1}{1+A} + 1$$

Or $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{1}{1+A} = 0$.

$$\boxed{\text{Donc l'intégrale } I_0 \text{ converge et vaut } 1.}$$ □

b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale I_n est convergente.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 1$.

- La fonction g_n est continue sur $[0,+\infty[$.
- × $g_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$
  × $\forall x \in [1,+\infty[$, $g_n(x) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \geqslant 0$
  × L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\ dx$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$, d'exposant $\dfrac{3}{2}$, donc elle converge.

  Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_n(x)\ dx$ converge.
- De plus, g_n est continue sur le segment $[0,1]$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\ dx$ est bien définie.

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } n \geqslant 1,\ I_n = \int_0^{+\infty} g_n(x)\ dx \text{ converge.}}$$ □

c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = (n+1) I_n$$

Démonstration.
Soit $A \geqslant 0$. On effectue une intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & (\ln(1+x))^{n+1} & & u'(x) & = & (n+1)\dfrac{(\ln(1+x))^n}{1+x} \\ v'(x) & = & \dfrac{1}{(1+x)^2} & & v(x) & = & -\dfrac{1}{1+x} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,A]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^A g_{n+1}(x)\ dx &= \int_0^A \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\ dx \\ &= \left[-\frac{(\ln(1+x))^{n+1}}{1+x} \right]_0^A + (n+1) \int_0^A \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\ dx \\ &= -\frac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} + (n+1) \int_0^A \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\ dx \\ &= -\frac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} + (n+1) \int_0^A g_n(x)\ dx \end{aligned}$$

Or, par croissances comparées : $\lim\limits_{A \to +\infty} \dfrac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} = 0$.

De plus l'intégrale I_n converge d'après la question ***2.b)***. D'où :

$$\int_0^{+\infty} g_{n+1}(x)\ dx = 0 + (n+1) \int_0^{+\infty} g_n(x)\ dx$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1} = (n+1) I_n.}$$ $\square$

d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ I_n = n!$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $I_n = n!$.

- **Initialisation** :
  D'après la question ***2.a)***, $I_0 = 1 = 0!$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire : $I_{n+1} = (n+1)!$).

$$\begin{array}{rcll} I_{n+1} & = & (n+1) I_n & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.c}}\textit{)} \\ & = & (n+1) \times n! & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & (n+1)! & \end{array}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!}$$ $\square$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{n!}\ g_n(x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une densité de probabilité.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  - × Si $x < 0$: $f_n(x) = 0$. Donc : $f_n(x) \geqslant 0$.
  - × Si $x \geqslant 0$. D'après le tableau de variations dressé en question ***1.b)***, on a : $f_n(x) = \dfrac{1}{n!} g_n(x) \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{D'où : } \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) \geqslant 0.}$$

- × La fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$ car elle est constante sur cet intervalle.
  × La fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$ car la fonction g_n l'est.

$$\boxed{\text{Ainsi } f_n \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

- Montrons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt$ converge et vaut 1.

  Tout d'abord : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$, car f_n est nulle en dehors de $[0,+\infty[$.

  De plus, comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\,dt$ converge :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{n!} g_n(t)\,dt = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} g_n(t)\,dt \\ &= \frac{1}{n!} I_n = \frac{1}{\cancel{n!}}\cancel{n!} \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{2.d)}\textit{)} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt \text{ converge et vaut } 1.}$$

Finalement, on a montré :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) \geqslant 0$,
- f_n est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0,
- L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt$ converge et vaut 1.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est une densité de probabilité.}}$$

□

On considère à présent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire réelle admettant f_n pour densité. On notera F_n la fonction de répartition de X_n.

b) La variable aléatoire X_n admet-elle une espérance ?

Démonstration.

- La v.a.r. X_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_n(t)\,dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour les calculs de moments du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m\, f_n(t)\,dt$.
- La fonction f_n est nulle en dehors de $[0,+\infty[$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t\, f_n(t)\,dt$$

- × Démontrons : $\displaystyle\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\,(t\, f_n(t))$.

$$\frac{\frac{1}{t}}{t\, f_n(t)} = \frac{\frac{1}{t}}{t\, g_n(t)} = \frac{(1+t)^2}{t^2\,(\ln(1+t))^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\cancel{t^2}}{\cancel{t^2}\,(\ln(1+t))^n} = \frac{1}{(\ln(1+t))^n}$$

  Or : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{(\ln(1+t))^n} = 0$. Donc : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{t}}{t\, f_n(t)} = 0$.

  Ainsi : $\displaystyle\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\,(t\, f_n(t))$.

× Pour tout $t \in [1, +\infty[$: $t\, f_n(t) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t} \geqslant 0$.

× L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\ dt$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$, d'exposant 1, donc elle diverge.

Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\, f_n(t)\ dt$ diverge.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_n(t)\ dt$ diverge.

$$\boxed{X_n \text{ n'admet pas d'espérance.}}$$

□

c) Que vaut $F_n(x)$ pour $x < 0$ et $n \in \mathbb{N}$?

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x < 0$.

$$F_n(x) = \mathbb{P}([X_n \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\ dt = 0 \quad \textit{(car : } \forall t < 0,\ f_n(t) = 0\textit{)}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x < 0,\ F_n(x) = 0}$$

□

d) Calculer $F_0(x)$ pour $x \geqslant 0$.

Démonstration.
Soit $x \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} F_0(x) &= \mathbb{P}([X_0 \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f_0(t)\ dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{0!}\, g_0(t)\ dt && \textit{(car } x \geqslant 0\textit{)} \\ &= \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}\ dt = \left[-\frac{1}{1+t} \right]_0^x \\ &= 1 - \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \geqslant 0,\ F_0(x) = 1 - \frac{1}{1+x}}$$

□

e) Soit $x \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} F_k(x) &= \mathbb{P}([X_k \leqslant x]) = \int_0^{+\infty} f_k(t)\ dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{k!} g_k(t)\ dt && \textit{(car } x \geqslant 0\textit{)} \\ &= \frac{1}{k!} \int_0^x \frac{(\ln(1+t))^k}{(1+t)^2}\ dt \end{aligned}$$

On effectue une intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & (\ln(1+t))^k & & u'(t) & = & k\dfrac{(\ln(1+t))^{k-1}}{1+t} \\ v'(t) & = & \dfrac{1}{(1+t)^2} & & v(t) & = & -\dfrac{1}{1+t} \end{array}\right.$$

L'IPP est valide car u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,x]$.

$$\begin{array}{rcl} F_k(x) & = & \dfrac{1}{k!}\left(\left[\ -\dfrac{(\ln(1+t))^k}{1+t}\ \right]_0^x + k\displaystyle\int_0^x \dfrac{(\ln(1+t))^{k-1}}{(1+t)^2}\ dt\right) \\ & = & -\dfrac{1}{k!}\dfrac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + \dfrac{k}{k!}\displaystyle\int_0^x \dfrac{(\ln(1+t))^{k-1}}{(1+t)^2}\ dt \\ & = & -\dfrac{1}{k!}\dfrac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + \dfrac{1}{(k-1)!}\displaystyle\int_0^x \dfrac{(\ln(1+t))^{k-1}}{(1+t)^2}\ dt \\ & = & -\dfrac{1}{k!}\dfrac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + \displaystyle\int_0^x f_{k-1}(t)\ dt \\ & = & -\dfrac{1}{k!}\dfrac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + F_{k-1}(x) \end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0,\ F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\dfrac{1}{k!}\dfrac{(\ln(1+x))^k}{1+x}}$$

□

f) En déduire une expression de $F_n(x)$ pour $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ faisant intervenir une somme (on ne cherchera pas à calculer cette somme).

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \geqslant 0$.

- D'après la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$$

- On somme alors ces égalités pour k variant de 0 à n. On obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} (F_k(x) - F_{k-1}(x)) = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}\right) = -\frac{1}{1+x}\sum_{k=1}^{n}\frac{(\ln(1+x))^k}{k!}$$

  Par télescopage, on a alors :

$$F_n(x) - F_0(x) = -\frac{1}{1+x}\sum_{k=1}^{n}\frac{(\ln(1+x))^k}{k!}$$

- Or, d'après la question ***3.d)*** : $F_0(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x}$. Donc :

$$\begin{array}{rcll} F_n(x) & = & F_0(x) - \dfrac{1}{1+x}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(\ln(1+x))^k}{k!} & \\ & = & 1 - \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{1+x}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(\ln(1+x))^k}{k!} & \\ & = & 1 - \dfrac{1}{1+x}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(\ln(1+x))^k}{k!} & \quad \textit{(car : } \dfrac{(\ln(1+x))^0}{0!} = 1\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \geqslant 0,\ F_n(x) = 1 - \frac{1}{1+x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!}}$$

$\square$

g) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $x < 0$, alors : $F_n(x) = 0$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$.
- Si $x \geqslant 0$, alors : $F_n(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(\ln(1+x))^k}{k!}$.

  Or $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{(\ln(1+x))^k}{k!}$ est la série exponentielle de paramètre $\ln(1+x)$.

  Elle est donc convergente et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!} = \exp\left(\ln(1+x)\right) = 1+x$$

  Ainsi la suite $(F_n(x))_{n \geqslant 1}$ converge et on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 1 - \frac{1}{\cancel{1+x}} \cancel{(1+x)} = 1 - 1 = 0$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 0.}$$

$\square$

h) La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle en loi ?

Démonstration.
Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une v.a.r. X de fonction de répartition G telle que (X_n) converge en loi vers X.
Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ où G est continue, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = G(x)$$

Or, d'après la question précédente : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = 0$.

Ceci est absurde car G est une fonction de répartition, donc, en particulier, $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = 1$.

$$\boxed{\text{La suite } (X_n) \text{ ne converge pas en loi.}}$$

$\square$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \ln(1 + X_n)$.

a) Justifier que Y_n est bien définie. Quelles sont les valeurs prises par Y_n ?

Démonstration.

- Sans perte de généralité, on considère pour la suite que : $X_n(\Omega) = [0, +\infty[$.
  Donc $\ln(1 + X_n)$ est bien définie.

$$\boxed{\text{Ainsi, } Y_n \text{ est bien définie.}}$$

- Déterminons $Y_n(\Omega)$, où $Y_n = h(X_n)$ avec $h : x \mapsto \ln(1+x)$.
  Comme précisé précédemment : $X_n(\Omega) = [0, +\infty[$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} Y_n(\Omega) & = & h(X_n)(\Omega) \ = \ h(X_n(\Omega)) & \\ & = & h([0,+\infty[) & \\ & = & [h(0), \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)[& \textit{(car h est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$)} \\ & = & [0,+\infty[& \textit{(car $h(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } Y_n(\Omega) = [0,+\infty[}$$

□

b) Justifier que Y_n admet une espérance et la calculer.

Démonstration.

- La fonction f_n est nulle en dehors de $[0,+\infty[$.
  Ainsi, d'après le théorème de transfert, la v.a.r. $Y_n = \ln(1+X_n)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+t) f_n(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence car l'intégrande est positive :

$$\forall t \in [0,+\infty[,\ \ln(1+t)\ f_n(t) \geqslant 0$$

- Soit $t \in [0,+\infty[$.

$$\begin{array}{rcll} \ln(1+t) f_n(t) & = & \ln(1+t) \dfrac{1}{n!} \dfrac{(\ln(1+t))^n}{(1+t)^2} & \textit{(par définition de f_n)} \\ & = & \dfrac{1}{n!} \dfrac{(\ln(1+t))^{n+1}}{(1+t)^2} & \\ & = & (n+1) \dfrac{1}{(n+1)!} \dfrac{(\ln(1+t))^{n+1}}{(1+t)^2} & \\ & = & (n+1) f_{n+1}(t) & \textit{(par définition de f_{n+1})} \end{array}$$

- Or la fonction f_{n+1} est une densité nulle en dehors de $[0,+\infty[$.
  Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n+1}(t)\ dt$ converge et vaut 1.
  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+t) f_n(t)\ dt$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} \ln(1+t) f_n(t)\ dt = (n+1) \times 1 = (n+1)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y_n \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(Y_n) = n+1.}$$

□

c) Justifier que Y_n admet une variance et la calculer.

Démonstration.

- La fonction f_n est nulle en dehors de $[0,+\infty[$.
  Donc, d'après le théorème de transfert, la v.a.r. $Y_n = \ln(1+X_n)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(1+t))^2 f_n(t)\, dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence puisque l'intégrande est positive :
  $$\forall t \in [0,+\infty[,\ (\ln(1+t))^2 f_n(t) \geqslant 0$$
- Soit $t \in [0,+\infty[$.
  $$\begin{aligned}(\ln(1+t))^2 f_n(t) &= (\ln(1+t))^2 \frac{1}{n!}\frac{(\ln(1+t))^n}{(1+t)^2} && \textit{(par définition de } f_n\textit{)}\\ &= \frac{1}{n!}\frac{(\ln(1+t))^{n+2}}{(1+t)^2}\\ &= (n+2)(n+1)\frac{1}{(n+2)!}\frac{(\ln(1+t))^{n+2}}{(1+t)^2}\\ &= (n+2)(n+1) f_{n+2}(t) && \textit{(par définition de } f_{n+2}\textit{)}\end{aligned}$$
- Or la fonction f_{n+2} est une densité nulle en dehors de $[0,+\infty[$.
  Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n+2}(t)\, dt$ converge et vaut 1.
  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(1+t))^2 f_n(t)\, dt$ converge et :
  $$\int_0^{+\infty} (\ln(1+t))^2 f_n(t)\, dt = (n+1)(n+2)\times 1 = (n+1)(n+2)$$
  $$\boxed{\text{Ainsi } Y_n \text{ admet un moment d'ordre 2 et } \mathbb{E}(Y_n^2) = (n+2)(n+1).}$$
- D'après la formule de Kœnig-Huyghens :
  $$V(Y_n) = \mathbb{E}(Y_n^2) - (\mathbb{E}(Y_n))^2 = (n+2)(n+1) - (n+1)^2 = (n+1)(\cancel{n}+2-(\cancel{n}+1)) = n+1$$
  $$\boxed{\text{On en déduit que } Y_n \text{ admet une variance et : } \mathbb{V}(Y_n) = n+1.}$$
  □

d) On note H_n la fonction de répartition de Y_n. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = F_n(\mathrm{e}^x - 1)$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}H_n(x) &= \mathbb{P}([Y_n \leqslant x]) = \mathbb{P}([\ln(1+X_n) \leqslant x])\\ &= \mathbb{P}([1+X_n \leqslant \mathrm{e}^x]) && \textit{(car } x \mapsto \mathrm{e}^x \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)}\\ &= \mathbb{P}([X_n \leqslant \mathrm{e}^x - 1]) = F_n(\mathrm{e}^x - 1)\end{aligned}$$
$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = F_n(\mathrm{e}^x - 1)}$$
□

e) Montrer que Y_n est une variable aléatoire à densité et donner une densité de Y_n.

Démonstration.

- Commençons par expliciter H_n.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  - Soit $x < 0$. Alors : $\mathrm{e}^x - 1 < 0$. Donc, d'après la question ***4.d)***, on obtient :
$$H_n(x) = F_n(\mathrm{e}^x - 1) = 0$$
  - Soit $x \geqslant 0$. Alors $\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$. Donc, toujours d'après la question ***4.d)***, on obtient :
$$\begin{array}{rcl} H_n(x) & = & F_n(\mathrm{e}^x - 1) \\ & = & 1 - \dfrac{1}{\cancel{1} + \mathrm{e}^x - \cancel{1}} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(\ln(\cancel{1} + \mathrm{e}^x - \cancel{1}))^k}{k!} \\ & = & 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(\ln(\mathrm{e}^x))^k}{k!} \\ & = & 1 - \mathrm{e}^{-x} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$$

- Ainsi :
  × H_n est continue sur $]-\infty, 0[$ car elle est constante sur cet intervalle.
  × H_n est continue sur $]0, +\infty[$ comme somme et produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$.
  × d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} H_n(x) = 0$. D'autre part :
$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to 0^+} H_n(x) & = & H_n(0) \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-0} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{0^k}{k!} \\ & = & 1 - 1 \ = \ 0 \qquad \textit{(car } \forall x \in \mathbb{R},\ \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k!}\textit{)} \end{array}$$
  Donc H_n est continue en 0.

  Ainsi la fonction H_n est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction H_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, par des arguments similaires aux précédents.

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y_n \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

- Pour déterminer une densité h_n de Y_n, on dérive H_n sur les intervalles **ouverts**. Soit $x \in \mathbb{R}$.
  × Si $x \in]-\infty, 0[$.
$$h_n(x) = H_n'(x) = 0$$
  × Si $x \in]0, +\infty[$.
$$\begin{array}{rcl} h_n(x) & = & \mathrm{e}^x F_n'(\mathrm{e}^x - 1) \ = \ \mathrm{e}^x f_n(\mathrm{e}^x - 1) \\ & = & \mathrm{e}^x \, \dfrac{1}{n!} \, \dfrac{(\ln(\cancel{1} + \mathrm{e}^x - \cancel{1}))^n}{(\cancel{1} + \mathrm{e}^x - \cancel{1})^2} \\ & = & \dfrac{1}{n!} \, \dfrac{\cancel{\mathrm{e}^x}}{(\mathrm{e}^x)^{\cancel{2}}} \, (\ln(\mathrm{e}^x))^n \ = \ \dfrac{x^n}{n!} \, \mathrm{e}^{-x} \end{array}$$
  × On choisit enfin $h_n(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ h_n(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \end{array} \right. .}$$

□

f) Reconnaître la loi de Y_0. À l'aide de ce qui précède, déterminer le moment d'ordre k de Y_0 pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, on a :

$$H_0 : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{array} \right.$$

  On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. de loi exponentielle de paramètre 1.

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y_0 \hookrightarrow \mathcal{E}\,(1).}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  - La v.a.r. Y_0 admet un moment d'ordre k si et seulement si Y_0^k admet une espérance.
  - La fonction f_0 est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.
    Donc, d'après le théorème de transfert, la v.a.r. $Y_0^k = (\ln(1 + X_n))^k$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(1+t))^k f_0(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence puisque l'intégrande est positive :

$$\forall t \in [0, +\infty[,\ (\ln(1+t))^k f_0(t) \geqslant 0$$

  - Soit $t \in [0, +\infty[$.

$$\begin{array}{rcll} (\ln(1+t))^k f_0(t) & = & (\ln(1+t))^k \dfrac{1}{(1+t)^2} & \textit{(par définition de } f_0\textit{)} \\[2mm] & = & g_k(t) & \textit{(par définition de } g_k\textit{)} \end{array}$$

  - Or, d'après la question ***2.d)***, l'intégrale $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_k(t)\ dt$ converge et vaut $k!$.
    On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(1+t))^k f_0(t)\ dt$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} (\ln(1+t))^k f_0(t)\ dt = k!$$

$$\boxed{\text{On en déduit que, pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ Y_0 \text{ admet un moment d'ordre } k \text{ et : } \mathbb{E}(Y_0^k) = k!}$$

□

EXERCICE 3

Dans tout l'exercice, X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que les deux variables X et Y sont **échangeables** si :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = i])$$

Résultats préliminaires

1. On suppose que X et Y sont deux variables indépendantes et de même loi.
Montrer que X et Y sont échangeables.

Démonstration.
Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) & = & \mathbb{P}([X = i]) \times \mathbb{P}([Y = j]) & \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \mathbb{P}([Y = i]) \times \mathbb{P}([Y = j]) & \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ ont même loi)} \\ & = & \mathbb{P}([Y = i]) \times \mathbb{P}([X = j]) & \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ ont même loi)} \\ & = & \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = i]) & \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \end{array}$$

$\boxed{\text{Ainsi, si } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes et de même loi, alors elles sont échangeables.}}$ □

2. On suppose que X et Y sont échangeables.
Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([X = i]) = \mathbb{P}([Y = i])$$

Démonstration.
Soit $i \in \mathbb{N}$.
La famille $([Y = j])_{j \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.
On en déduit, par application de la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X = i]) & = & \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) & \\ & = & \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = i]) & \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ sont échangeables)} \\ & = & \mathbb{P}([Y = i]) & \end{array}$$

La dernière égalité est obtenue en appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X = j])_{j \in \mathbb{N}}$.

$\boxed{\text{On en déduit : } \forall i \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X = i]) = \mathbb{P}([Y = i]).}$ □

Étude d'un exemple

Soient n, b et c trois entiers strictement positifs.
Une urne contient initialement n boules noires et b boules blanches. On effectue l'expérience suivante, en distinguant trois variantes.

- On pioche une boule dans l'urne.
  On définit X la variable aléatoire qui vaut 1 si cette boule est noire et 2 si elle est blanche.
- On replace la boule dans l'urne et :
  - ⋆ Variante 1 : on ajoute dans l'urne c boules de la même couleur que la boule qui vient d'être piochée.

- ⋆ Variante 2 : on ajoute dans l'urne c boules de la couleur opposée à celle de la boule qui vient d'être piochée.
- ⋆ Variante 3 : on n'ajoute pas de boule supplémentaire dans l'urne.

- On pioche à nouveau une boule dans l'urne.
On définit Y la variable aléatoire qui vaut 1 si cette seconde boule piochée est noire et 2 si elle est blanche.

3. a) Compléter la fonction **Scilab** suivante, qui simule le tirage d'une boule dans une urne contenant b boules blanches et n boules noires et qui retourne 1 si la boule tirée est noire, et 2 si la boule tirée est blanche.

```
1 function res = tirage(b, n)
2   r = rand()
3   if .......... then
4     res = 2
5   else
6     res = 1
7   end
8 endfunction
```

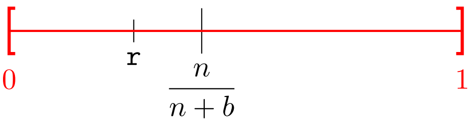
Démonstration.

- D'après l'énoncé, la fonction `tirage` a pour but de simuler la v.a.r. X.
Ainsi, le paramètre de sortie `res` de cette fonction doit :
  - × prendre la valeur 1 avec probabilité $\mathbb{P}([X = 1]) = \dfrac{n}{n+b}$.
  - × prendre la valeur 2 avec probabilité $\mathbb{P}([X = 2]) = \dfrac{b}{n+b}$.
- La fonction débute par la ligne 2 :

```
2   r = rand()
```

L'instruction `rand()` renvoie un réel choisi aléatoirement dans $[0, 1]$.
Plus formellement, il s'agit de simuler une v.a.r. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.

- Cette valeur `r` choisie aléatoirement dans $[0, 1]$ permet d'obtenir la valeur `res`.



Deux cas se présentent.

– Si $\mathtt{r} \leqslant \dfrac{n}{n+b}$: alors, on affecte à la variable `res` la valeur 1.
Ce cas se produit avec la probabilité attendue :

$$\mathbb{P}\left(\left[0 \leqslant U \leqslant \frac{n}{n+b}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant \frac{n}{n+b}\right]\right) = \frac{n}{n+b} = \mathbb{P}([X = 1])$$

– Si $\mathtt{r} > \dfrac{n}{n+b}$: alors, on affecte à la variable `res` la valeur 2.
Ce cas se produit avec la probabilité attendue :

$$\mathbb{P}\left(\left[\frac{n}{n+b} < U \leqslant 1\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{n}{n+b} < U\right]\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant \frac{n}{n+b}\right]\right) = \frac{b}{n+b} = \mathbb{P}([X = 2])$$

- On en déduit la ligne 3 à compléter :

```
3    if r > n / (n + b) then
```

b) Compléter la fonction suivante, qui effectue l'expérience étudiée avec une urne contenant initialement b boules blanches, n boules noires et qui ajoute éventuellement c boules après le premier tirage, selon le choix de la variante dont le numéro est `variante`.
Les paramètres de sortie sont :

- `x` : une simulation de la variable aléatoire X
- `y` : une simulation de la variable aléatoire Y

```
1  function [x, y] = experience (b, n, c, variante)
2    x = tirage (b, n)
3    if variante == 1 then
4      if x == 1 then
5        ...........
6      else
7        ...........
8      end
9    else if variante == 2 then
10     ...........
11     ...........
12     ...........
13     ...........
14     ...........
15   end
16   y = tirage (b, n)
17 endfunction
```

Démonstration.

- Comme on l'a vu dans la question précédente, l'instruction `tirage(b, n)` permet de simuler la v.a.r. X. C'est ce que réalise l'instruction en ligne 2 du programme :

```
2    x = tirage (b, n)
```

- Il reste alors à simuler la v.a.r. Y.
  Le paramètre de sortie `y` doit :
  × prendre la valeur 1 avec probabilité $\mathbb{P}([Y=1]) = \dfrac{m}{m+d}$.
  × prendre la valeur 2 avec probabilité $\mathbb{P}([Y=2]) = \dfrac{d}{m+d}$.
  où m (resp. d) représente le nombre de boules noires (resp. blanches) de l'urne après l'ajout éventuel issu du premier tirage.
- Plus précisément m et d sont définies en fonction du résultat du premier tirage et des variantes.
  Variante 1 : deux cas se présentent.
  × Si `x` vaut 1 : c'est qu'on a tiré une boule noire lors du premier tirage.
  On remet, en plus de cette boule, c boules noires dans l'urne. Ainsi :
  $$m = n + c \quad \text{et} \quad d = b \quad \text{(pas de modification)}$$
  × Sinon (`x` vaut 2) : c'est qu'on a tiré une boule blanche lors du premier tirage.
  On remet, en plus de cette boule, c boules noires dans l'urne. Ainsi :
  $$m = n \quad \text{(pas de modification)} \quad \text{et} \quad d = b + c$$

On en déduit les lignes 3 à 8 du programme dans lesquelles on met à jour les variables `n` et `b` en fonction de leur nouvelle valeur.

```
3     if variante == 1 then
4       if x == 1 then
5         n = n + c
6       else
7         b = b + c
8       end
```

Variante 2 : l'étude est similaire mais, comme on remet des boules de couleur opposée à la première boule tirée, les rôles de `n` et `b` sont échangés par rapport à la première variante. On en déduit les lignes 9 à 14 du programme dans lesquelles on met à jour les variables `n` et `b` en fonction de leur nouvelle valeur.

```
9     else if variante == 2 then
10      if x == 1 then
11        b = b + c
12      else
13        n = n + c
14      end
```

Variante 3 : il n'y a pas de modifications des boules blanches ou noires. Il n'y a donc pas lieu de mettre à jour les variables `n` et `b`.

- On obtient alors la valeur `y` en simulant le tirage dans l'urne modifiée (c'est à dire avec les valeurs de `n` et `b` mise à jour). C'est l'objectif de la ligne 16.

```
16    y = tirage(b, n)
```

☐

c) Compléter la fonction suivante, qui simule l'expérience N fois (avec $N \in \mathbb{N}^*$), et qui estime la loi de X, la loi de Y et la loi du couple (X, Y).
Les paramètres de sortie sont :

- `loiX` : un tableau unidimensionnel à deux éléments qui estime $[\ \mathbb{P}([X = 1]),\ \ \mathbb{P}([X = 2])\ ]$
- `loiY` : un tableau unidimensionnel à deux éléments qui estime $[\ \mathbb{P}([Y = 1]),\ \ \mathbb{P}([Y = 2])\ ]$
- `loiXY` : un tableau bidimensionnel à deux lignes et deux colonnes qui estime :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) & \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) \\ \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 2]) & \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) \end{bmatrix}$$

```
function [loiX, loiY, loiXY] = estimation(b, n, c, variante, N)
  loiX = [0, 0]
  loiY = [0, 0]
  loiXY = [0, 0 ; 0, 0]
  for k = 1 : N
    [x , y] = experience(b, n, c, variante)
    loiX(x) = loiX(x) + 1
    ...........
    ...........
  end
  loiX = loiX / N
  loiY = loiY / N
  loiXY = loiXY / N
endfunction
```

Démonstration.

- Dans la question précédente, on a simulé les v.a.r. X et Y.
  Il s'agit maintenant d'obtenir une approximation des lois de ces v.a.r.
- Rappelons tout d'abord que X ne prend que deux valeurs : $X(\Omega) = \{1, 2\}$.
  Ainsi, la loi de X est entièrement déterminée par les valeurs :

  $$\mathbb{P}([X = 1]) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X = 2])$$

  L'idée naturelle pour obtenir un approximation de ces valeurs est :
  × de simuler un grand nombre de fois (N est ce grand nombre) la v.a.r. X.
  Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(x_1, \dots, x_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(X_1, \dots, X_N)$ de la v.a.r. X.
  × de compter le nombre de 1 (resp. de 2) de cette observation.

  Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

  $$\frac{\text{nombre de 1 de l'observation}}{\text{taille de l'observation}} \simeq \mathbb{P}([X = 1])$$

- Dans le programme, les valeurs $(x_1, \dots, x_N)$ sont obtenues par des appels successifs (à l'aide d'une boucle `for`) à la fonction `experience` et stockées les unes après les autres dans la variable `x`.

```
for k = 1 : N
  [x , y] = experience(b, n, c, variante)
```

  (seules les valeurs de `x` *nous intéressent dans un premier temps)*
  Le tableau `loiX` est alors mis à jour à chaque tour de boucle :

```
    loiX(x) = loiX(x) + 1
```

  Détaillons cette mise à jour :
  × si `x` vaut 1 alors l'instruction suivante est effectuée :

  `loiX(1) = loiX(1) + 1`

  × si `x` vaut 2 alors l'instruction suivante est effectuée :

  `loiX(2) = loiX(2) + 1`

  Cela signifie que le 1^{er} élément du tableau compte le nombre de 1 de l'observation et que le $2^{\text{ème}}$ compte le nombre de 2.
  Une fois cette boucle effectuée, l'approximation formulée par la LfGN est obtenue en divisant ces nombres par la taille de l'observation :

```
  loiX = loiX / N
```

- On agit de même pour obtenir l'approximation de la loi de Y.
  On génère des observations $(y_1, \dots, y_N)$ d'un N-échantillon $(Y_1, \dots, Y_N)$ de la v.a.r. Y.

```
for k = 1 : N
  [x , y] = experience(b, n, c, variante)
```

  (ce sont maintenant les valeurs de `y` *qui nous intéressent)*
  Puis on met à jour le tableau `loiY` de sorte à compter le nombre de 1 et de 2 que contient cette observation.

```
8        loiY(y) = loiY(y) + 1
```

L'approximation formulée par la LfGN est obtenue en divisant ces nombres par la taille de l'observation :

```
12       loiY = loiY / N
```

- On agit encore de même pour obtenir l'approximation de la loi de couple. On génère des couples d'observations $((x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N))$ d'un N-échantillon $((X_1, Y_1), \dots, (X_N, Y_N))$ du couple (X, Y). C'est toujours les lignes 5 et 6 :

```
5     for k = 1 : N
6        [x , y] = experience(b, n, c, variante)
```

(ce sont à présent les couples de valeurs qui nous intéressent)
Puis on met à jour le tableau `loiXY` de sorte à compter le nombre de $(1, 1)$, de $(1, 2)$, de $(2, 1)$, de $(2, 2)$:

```
9        loiXY(x, y) = loiXY(x, y) + 1
```

L'approximation formulée par la LfGN est obtenue en divisant ces nombres par la taille de l'observation :

```
13       loiXY = loiXY / N
```

□

d) On exécute notre fonction précédente avec $b = 1$, $n = 2$, $c = 1$, $N = 10000$ et dans chacune des variantes. On obtient :

```
--> [loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,1,10000)
    loiXY =
        0.49837     0.16785
        0.16697     0.16681
    loiY =
        0.66534     0.33466
    loiX =
        0.66622     0.33378

--> [loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,2,10000)
    loiXY =
        0.33258     0.33286
        0.25031     0.08425
    loiY =
        0.58289     0.41711
    loiX =
        0.66544     0.33456

--> [loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,3,10000)
    loiXY =
        0.44466     0.22098
        0.22312     0.11124
    loiY =
        0.66778     0.33222
    loiX =
        0.66564     0.33436
```

En étudiant ces résultats, émettre des conjectures quant à l'indépendance et l'échangeabilité de X et Y dans chacune des variantes.
On donne les valeurs numériques approchées suivantes :

$$\begin{array}{c} 0.33 \times 0.33 \simeq 0.11 \\ 0.33 \times 0.41 \simeq 0.14 \\ 0.33 \times 0.58 \simeq 0.19 \\ 0.33 \times 0.66 \simeq 0.22 \\ 0.41 \times 0.66 \simeq 0.27 \\ 0.58 \times 0.66 \simeq 0.38 \\ 0.66 \times 0.66 \simeq 0.44 \end{array}$$

Démonstration.

- **Variante 1** :
  - × Indépendance. On lit $\mathbb{P}([X=1] \cap [Y=1])$ sur la coordonnée $(1,1)$ de `loiXY`.

    Donc : $\mathbb{P}([X=1] \cap [Y=1]) \simeq 0,49$

    On lit $\mathbb{P}([X=1])$ sur la 1ère coordonnée de `loiX`. Donc $\mathbb{P}([X=1]) \simeq 0,66$.
    On lit $\mathbb{P}([Y=1])$ sur la 1ère coordonnée de `loiX`. Donc $\mathbb{P}([Y=1]) \simeq 0,66$.

    D'après les données de l'énoncé, on obtient donc :

    $$\mathbb{P}([X=1])\mathbb{P}([Y=1]) \simeq 0,44 \neq \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=1])$$

    On conjecture alors que X et Y ne sont pas indépendantes.
  - × Échangeabilité. On lit $\mathbb{P}([X=1] \cap [Y=2])$ sur la coordonnée $(1,2)$ de `loiXY`, et $\mathbb{P}([X=2] \cap [Y=1])$ sur la coordonnée $(2,1)$ de `loiXY`. Donc :

    $$\mathbb{P}([X=1] \cap [Y=2]) \simeq 0,16 \simeq \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=2])$$

    On conjecture alors que X et Y sont échangeables.

Dans le cas de la variante 1, on conjecture que les v.a.r. X et Y sont échangeables et non indépendantes.

- **Variante 2** :
  - × Indépendance. Par lecture : $\mathbb{P}([X=1] \cap [Y=1]) \simeq 0,33$

    De plus : $\mathbb{P}([X=1]) \simeq 0,66$ et $\mathbb{P}([Y=1]) \simeq 0,58$.

    D'après les données de l'énoncé, on obtient donc :

    $$\mathbb{P}([X=1])\mathbb{P}([Y=1]) \simeq 0,38 \neq \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=1])$$

    On conjecture alors que X et Y ne sont pas indépendantes.
  - × Échangeabilité. Par lecture : $\mathbb{P}([X=1] \cap [Y=2]) \simeq 0,33$ et $\mathbb{P}([X=2] \cap [Y=1]) \simeq 0,25$.

    Donc : $\mathbb{P}([X=1] \cap [Y=2]) \neq \mathbb{P}([X=2] \cap [Y=1])$.

    On conjecture alors que X et Y ne sont pas échangeables.

Dans le cas de la variante 2, on conjecture que les v.a.r. X et Y sont non échangeables et non indépendantes.

- **Variante 3** :

× Indépendance. Par lecture :

$$\mathbb{P}([X=1])\mathbb{P}([Y=1]) \simeq 0,66 \times 0,66 \simeq 0,44 \simeq \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=1])$$

$$\mathbb{P}([X=1])\mathbb{P}([Y=2]) \simeq 0,66 \times 0,33 \simeq 0,22 \simeq \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=2])$$

$$\mathbb{P}([X=2])\mathbb{P}([Y=1]) \simeq 0,33 \times 0,66 \simeq 0,22 \simeq \mathbb{P}([X=2] \cap [Y=1])$$

$$\mathbb{P}([X=2])\mathbb{P}([Y=2]) \simeq 0,33 \times 0,33 \simeq 0,11 \simeq \mathbb{P}([X=2] \cap [Y=2])$$

On conjecture alors que X et Y sont indépendantes.

× Échangeabilité. Par lecture :

$$\mathbb{P}([X=1] \cap [Y=2]) \simeq 0,22 \simeq \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=2])$$

On conjecture alors que X et Y sont échangeables.

Dans le cas de la variante 3, on conjecture que les v.a.r. X et Y sont échangeables et indépendantes.

□

4. On se place dans cette question dans le cadre de la variante 1.

a) Donner la loi de X.

Démonstration.

- Par définition de la v.a.r. X : $X(\Omega) = \{1, 2\}$.
- L'événement $[X=1]$ est réalisé par tous les tirages d'une boule de l'urne dont le résultat est une boule noire.
  Un tel 1-tirage est entièrement déterminé par la boule noire choisie.
  Il y a donc n tels 1-tirages possibles (autant que de boules noires).
  De plus, le nombre total de 1-tirages possibles est $n+b$ (autant que de boules dans l'urne).
  On obtient alors : $\mathbb{P}([X=1]) = \dfrac{n}{n+b}$.
- La famille $([X=1], [X=2])$ est un système complet d'événements. Donc :

$$\mathbb{P}([X=2]) = 1 - \mathbb{P}([X=1]) = 1 - \frac{n}{n+b} = \frac{b}{n+b}$$

Ainsi, $X(\Omega) = \{1, 2\}$. De plus : $\mathbb{P}([X=1]) = \dfrac{n}{n+b}$ et $\mathbb{P}([X=2]) = \dfrac{b}{n+b}$.

□

b) Déterminer la loi du couple (X, Y).

Démonstration.

- On sait déjà : $X(\Omega) = \{1, 2\}$. Par définition de la v.a.r. Y, on a aussi : $Y(\Omega) = \{1, 2\}$.
- Déterminons tout d'abord $\mathbb{P}_{[X=1]}([Y=1])$.

  Si l'événement $[X=1]$ est réalisé, c'est que la $1^{\text{ère}}$ boule tirée est noire. On se place dans le cadre de la variante 1 donc, à l'issue de ce tirage, c boules noires sont ajoutées dans l'urne.
  L'événement $[Y=1]$ est alors réalisé par tous les tirages d'une boule de l'urne dont le résultat est une boule noire.
  Un tel 1-tirage est entièrement déterminé par la boule noire choisie.
  Il y a donc $n+c$ tels 1-tirages possibles (autant que de boules noires).
  De plus, le nombre total de 1-tirages possibles est maintenant de $n+b+c$ (autant que de boules dans l'urne).

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{P}_{[X=1]}([Y=1]) = \dfrac{n+c}{n+b+c}}$$

(on remarque que la probabilité conditionnelle est bien définie car $\mathbb{P}([X=1]) = \dfrac{n}{n+b} \neq 0$)

- Déterminons alors $\mathbb{P}_{[X=1]}([Y=2])$.
  La famille $([Y=1], [Y=2])$ est un système complet d'événements. Donc :

$$\mathbb{P}_{[X=1]}([Y=2]) = 1 - \mathbb{P}_{[X=1]}([Y=1]) = 1 - \frac{n+c}{n+b+c} = \frac{b}{n+b+c}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_{[X=1]}([Y=2]) = \frac{b}{n+b+c}}$$

- Avec les mêmes raisonnements, on obtient :

$$\boxed{\mathbb{P}_{[X=2]}([Y=1]) = \frac{n}{n+b+c} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{[X=2]}([Y=2]) = \frac{b+c}{n+b+c}}$$

(les probabilités conditionnelles sont bien définies car $\mathbb{P}([X=2]) = \dfrac{b}{n+b} \neq 0$)

- On a alors les résultats suivants :

$$\mathbb{P}([X=1] \cap [Y=1]) = \mathbb{P}([X=1]) \times \mathbb{P}_{[X=1]}([Y=1]) = \frac{n}{n+b} \times \frac{n+c}{n+b+c} = \frac{n(n+c)}{(n+b)(n+b+c)}$$

$$\mathbb{P}([X=1] \cap [Y=2]) = \mathbb{P}([X=1]) \times \mathbb{P}_{[X=1]}([Y=2]) = \frac{n}{n+b} \times \frac{b}{n+b+c} = \frac{n\, b}{(n+b)(n+b+c)}$$

$$\mathbb{P}([X=2] \cap [Y=1]) = \mathbb{P}([X=2]) \times \mathbb{P}_{[X=2]}([Y=1]) = \frac{b}{n+b} \times \frac{n}{n+b+c} = \frac{n\, b}{(n+b)(n+b+c)}$$

$$\mathbb{P}([X=2] \cap [Y=2]) = \mathbb{P}([X=2]) \times \mathbb{P}_{[X=2]}([Y=2]) = \frac{b}{n+b} \times \frac{b+c}{n+b+c} = \frac{b(b+c)}{(n+b)(n+b+c)}$$

- En résumé, la loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant.

$x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$	1	2
1	$\dfrac{n(n+c)}{(n+b)(n+b+c)}$	$\dfrac{n\, b}{(n+b)(n+b+c)}$
2	$\dfrac{n\, b}{(n+b)(n+b+c)}$	$\dfrac{b(b+c)}{(n+b)(n+b+c)}$

□

c) Déterminer la loi de Y.

Démonstration.

- On rappelle : $Y(\Omega) = \{1, 2\}$.

- La famille $([X=1], [X=2])$ forme un système complet d'événements.
  On en déduit, par application de la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=1]) &= \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=1]) + \mathbb{P}([X=2] \cap [Y=1]) \\
&= \frac{n(n+c)}{(n+b)(n+b+c)} + \frac{n\,b}{(n+b)(n+b+c)} \\
&= \frac{n\,\cancel{(n+c+b)}}{(n+b)\cancel{(n+b+c)}} = \frac{n}{n+b}
\end{aligned}$$

- La famille $([Y=1], [Y=2])$ forme un système complet d'événements. Donc :

$$\mathbb{P}([Y=2]) = 1 - \mathbb{P}([Y=1]) = 1 - \frac{n}{n+b} = \frac{b}{n+b}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } Y(\Omega) = \{1,2\}. \text{ De plus : } \mathbb{P}([Y=1]) = \frac{n}{n+b} \text{ et } \mathbb{P}([Y=2]) = \frac{b}{n+b}.}$$

□

d) Montrer que X et Y sont échangeables mais ne sont pas indépendantes.

Démonstration.

- Échangeabilité.

$$\mathbb{P}([X=1] \cap [Y=2]) = \frac{n\,b}{(n+b)(n+b+c)} = \mathbb{P}([X=2] \cap [Y=1])$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } X \text{ et } Y \text{ sont échangeables.}}$$

- Indépendance.

$$\mathbb{P}([X=1]) \times \mathbb{P}([Y=2]) = \frac{n}{n+b} \times \frac{b}{n+b} = \frac{n\,b}{(n+b)^2}$$

De plus : $\mathbb{P}([X=1] \cap [Y=2]) = \dfrac{n\,b}{(n+b)(n+b+c)}$

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=2]) = \mathbb{P}([X=1]) \times \mathbb{P}([Y=2]) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{n\,b}{(n+b)(n+b+c)} = \frac{n\,b}{(n+b)^2} \\
\Leftrightarrow\ & n+b = n+b+c \\
\Leftrightarrow\ & c = 0
\end{aligned}$$

Or, d'après l'énoncé : $c \neq 0$ (on a même : $c > 0$). Ainsi :

$$\mathbb{P}([X=1] \cap [Y=2]) \neq \mathbb{P}([X=1]) \times \mathbb{P}([Y=2])$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

□