K
Mathématiques

Colles - Semaine 3

Planche 1

Exercice

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction polynomiale P_n sur $\mathbb{R}$ par :

$$P_n(x) \;=\; (x-1)(2-x) + \frac{x^3}{n}$$

1. Montrer que pour n suffisamment grand, P_n admet deux extrema locaux, aux points $r_{1,n} \leqslant r_{2,n}$ avec $r_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $r_{2,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \gamma\, n$ pour deux réels ℓ et γ à préciser.

2. Montrer que pour n suffisamment grand, P_n admet trois racines distinctes notées $a_n < b_n < c_n$.

3. Montrer que la suite (a_n) ainsi définie est croissante, de limite α à préciser.

4. En déduire le développement limité :

$$a_n \;=\; \alpha + \frac{\beta}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

pour un réel β à préciser.

Planche 2

Exercice

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f \; : \; x \mapsto \begin{cases} x^{1+\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. ***a)*** Montrer que f est continue en 0.

b) Étudier la dérivabilité de f en 0.

2. ***a)*** Montrer que, pour tout réel x strictement positif : $\ln(x) \leqslant x + 1$.

b) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et déterminer son signe.
Préciser le sens de variation de f.

3. ***a)*** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Déterminer un équivalent de $f(x) - x$ en $+\infty$.
En déduire la nature de la branche infinie de $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

4. On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

a) Montrer que la suite (u_n) est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

b) Que dire de la suite (u_n) si $u_0 = 0$?

c) On se place maintenant dans le cas : $u_0 = \dfrac{1}{2}$.

(i) Déterminer la monotonie de (u_n).

(ii) Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Planche 3

Exercice

Soient $a > 0$ et $\beta > 1$. On considère une fonction continue $f : [0,1] \to [0,1]$ qui peut s'écrire comme suit au voisinage de 0 :

$$f(x) \;=\; x - a\,x^{\beta} + \underset{x\to 0}{o}(x^{\beta})$$

On fixe $u_0 \in [0,1]$, et on considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Que vaut $f(0)$? Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que $f(x) < x$ sur $]0, \eta]$. En déduire que si u_0 est suffisamment petit, (u_n) converge vers 0.
Dans la suite, on suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$. Donner un équivalent de $(f(x))^{\gamma} - x^{\gamma}$ lorsque x tend vers 0. En déduire une valeur de γ pour laquelle la suite $u_{n+1}^{\gamma} - u_n^{\gamma}$ converge vers un réel strictement positif.

3. Soit $(v_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres réels tels que $v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\dfrac{v_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

4. En déduire un équivalente de (u_n).