ECE2
Mathématiques

Colles - Semaine 7

Exercice 1
On considère l'espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ avec

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M +{}^t M \end{array} \right.$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ et $g \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$.

2. Déterminer la matrice A de f relativement à la base $\mathscr{B}$.

3. En déduire sans calcul supplémentaire la matrice de g relativement à la base $\mathscr{B}$.

4. Les applications f et g sont-elles des automorphismes ? Si oui, déterminer l'application réciproque.

5. Si a et b sont deux automorphismes, est-ce que $a + b$ est également un automorphisme ?

Exercice 2
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

On considère les vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ définis par $u = (0, 1, -2)$ et $v = (0, 1, -1)$.

1. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.

2. Justifier de deux manières différentes que f n'est pas bijectif.

3. Montrer que (v) est une base de $\text{Ker}(f - id)$

4. Déterminer un vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la 3ème coordonnée (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) est nulle, tel que la famille $C = (u, v, w)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice de f dans la base C soit la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Dans cette question, on suppose qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $g \circ g = f$.

- ***a)*** Montrer que $f \circ g = g \circ f$.
- ***b)*** En déduire que $f(g(u)) = 0$ et $f(g(v)) = g(v)$.
- ***c)*** Justifier qu'il existe deux réels a et b tels que $g(u) = au$ et $g(v) = bv$.
- ***d)*** On note N la matrice de g dans la base $C = (u, v, w)$ définie à la question 4. Justifier que $N = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$, où a et b sont les deux réels définis à la question précédente, et c, d et e des réels.

6. Existe-t-il des endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ tels $g \circ g = f$?
Indication : Utiliser les matrices de f et g dans la base $C = (u, v, w)$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
On dit qu'un endomorphisme f de E est un projecteur si $f \circ f = f$.
On considère p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur de E si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

2. On suppose dans cette question que $p + q$ est un projecteur de E.
Montrer que

$$\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Ker}(q)$$

$$\operatorname{Im}(p) \cap \operatorname{Im}(q) = \{0\}$$

$$\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im}(p) + \operatorname{Im}(q)$$

(si A et B sont deux espaces vectoriels, on note $A + B = \{a + b \ / \ a \in A \text{ et } b \in B\}$)

Exercice 4

On note f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par : $f((x,y,z)) = (y+z, y, x+y)$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer le noyau de f. En déduire le rang de f.

3. Déterminer l'image de f.

4. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

5. Montrer que $H = \{u \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(u) = u\}$ est un espace vectoriel réel.
Déterminer une base de H.

6. On note F l'ensemble défini par $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = 0\}$.
Montrer que f stabilise F, *i.e.* $f(F) \subset F$.

Exercice 5

L'application f désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une base $(e_1, \cdots, e_n)$.

1. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \exists \lambda_x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = \lambda_x x$$

a) Écrire de deux manières différentes le vecteur $f(e_1 + \cdots + e_n)$.

b) En déduire qu'il existe un réel λ tel que $f = \lambda \cdot \mathrm{id}$.

2. Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$.
Justifier qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ de la forme $(x, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$.
On note alors p_x l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\forall (a, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n, \ p_x\left(a \cdot x + \sum_{k=2}^{n} b_k \cdot \varepsilon_k\right) = a \cdot x$$

a) Montrer que p_x est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

b) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, on a

$$p_x(z) = z \ \Leftrightarrow \ z \in \operatorname{Vect}(x)$$

3. Montrer l'équivalence suivante :

$$\forall g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n), \ f \circ g = g \circ f \ \Leftrightarrow \ \exists \lambda \in \mathbb{R}, \ f = \lambda \cdot \mathrm{id}$$