HEC 2013

Exercice avec préparation 1

1. Question de cours : Le schéma binomial.

2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \sum\limits_{k=1}^{n} kX_k$ et $s_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

a) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(W_n)$ et la variance $\mathbb{V}(W_n)$ de la variable aléatoire W_n.

b) Calculer les probabilités $\mathbb{P}([W_n = 0])$ et $\mathbb{P}([W_n = s_n])$.

c) Calculer, selon les valeurs de n, la probabilité $\mathbb{P}([W_n = 3])$.

3. Montrer que pour tout $k \in [\![0, s_n]\!]$, on a : $\mathbb{P}([W_n = k]) = \mathbb{P}([W_n = s_n - k])$.

4. *a)* Déterminer pour tout $j \in [\![0, s_n]\!]$ la loi de probabilité conditionnelle de W_{n+1} sachant $(W_n = j)$.

b) En déduire les relations :

$$\mathbb{P}([W_{n+1} = k]) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ \mathbb{P}([W_n = k]) & \text{si } k \leqslant n \\ \\ \frac{1}{2}\ \mathbb{P}([W_n = k]) + \frac{1}{2}\mathbb{P}([W_n = k - n - 1]) & \text{si } n + 1 \leqslant k \leqslant s_n \\ \\ \frac{1}{2}\mathbb{P}([W_n = k - n - 1]) & \text{si } s_n + 1 \leqslant k \leqslant s_{n+1} \end{cases}$$

Exercice sans préparation 1

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \ln\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n^3}$.

2. En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\frac{1}{n^3} \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

Exercice avec préparation 2

1. Question de cours : Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On jette n fois de suite un dé pipé dont les 6 faces ne comportent que les nombres 1, 2 et 3, et on suppose que les résultats des lancers sont indépendants.

À chaque lancer, la probabilité d'obtenir 1 est p, celle d'obtenir 2 est q, et celle d'obtenir 3 est $1-p-q$, où p et q sont deux paramètres réels strictement positifs vérifiant $p+q<1$.

Soit X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de 1 (resp. 2) obtenus en n lancers consécutifs.

a) Quelles sont les lois respectives de X et Y ?

b) Déterminer la loi du couple (X, Y).

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

d) Déterminer le biais et le risque quadratique de l'estimateur $T_n = \frac{X}{n+1}$ du paramètre p.

3. On suppose dans cette question que le nombre de lancers effectués avec ce dé est une variable aléatoire N suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Soit X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de 1 (resp. 2) obtenus en N lancers consécutifs.

a) Déterminer les lois de X et Y respectivement.

b) Vérifier que X et Y sont indépendantes.

c) $T = \dfrac{X}{N+1}$ est-il un estimateur sans biais du paramètre p ?

Exercice sans préparation 2

Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si A est diagonalisable, A^3 l'est aussi.

2. On suppose dans cette question que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^3.

b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice avec préparation 3

1. Question de cours : Écrire, sous forme d'intégrale, la probabilité qu'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite appartienne à un segment $[a;b]$. Dans quelle théorème cette probabilité apparaît-elle comme une limite ?

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant la loi normale centrée réduite. On note Φ la fonction de répartition de de X. On pose $Y = |X|$ (valeur absolue de X).

2. ***a)*** Montrer que Y admet une espérance et une variance et les calculer.

b) Calculer $E(XY)$.

3. On pose $Z = X + Y$.

a) Calculer $P(Z = 0)$.

b) Exprimer la fonction de répartition de Z à l'aide de Φ et indiquer l'allure de sa représentation graphique.

c) La variable aléatoire Z admet-elle une densité ? Est-elle discrète ?

4. Soit $y \in \mathbb{R}$.

a) Exprimer à l'aide de Φ, selon les valeurs de y, la probabilité $\mathbb{P}([X \leqslant 1] \cap [Y \leqslant y])$.

b) Pour quelle valeur de y les évènements $(X \leqslant 1)$ et $(Y \leqslant y)$ sont-ils indépendants ?

Exercice sans préparation 3

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 0$.

1. Montrer que $A^2 = 0$.

2. Montrer que l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$ est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

Exercice avec préparation 4

1. Question de cours : Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

On définit la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les relations :

$$Z_0 = \frac{X_0}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ Z_n = \frac{Z_{n-1} + X_n}{2}.$$

2. ***a)*** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer Z_n en fonction des variables aléatoires $X_0, X_1, \ldots, X_n$.

b) Les variables aléatoires Z_{n-1} et X_n sont-elles indépendantes ?

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $E(Z_n)$ et $V(Z_n)$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la variable aléatoire $2^{n+1}Z_n$ suit la loi uniforme discrète sur $[\![0; 2^{n+1} - 1]\!]$.

4. Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable à densité dont on précisera la loi.

Exercice sans préparation 4

1. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n \ln x}{x^n - 1}\, dx$.

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n \ln x}{x^n - 1}\, dx$.
Étudier la nature (convergence ou divergence) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice avec préparation 5

1. Question de cours : Écrire une formule de Taylor à l'ordre p avec reste intégral, applicable à une fonction définie sur $[0;1]$, de classe C^{p+1} sur cet intervalle ($p \in \mathbb{N}$).

2. Soit x un réel de l'intervalle $[0;1[$.

a) Justifier pour tout $t \in [0;x]$, l'encadrement : $0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant x$.

b) Démontrer l'égalité : $\ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

3. Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}$.

a) Montrer que $\mathbb{P}(X \in \mathbb{N}^*) = 1$.

b) Étudier l'existence des moments de X.

c) Montrer que pour tout $s \in [0;1]$, la variable aléatoire s^X admet une espérance, que l'on note $E(s^X)$, et vérifier que si $s \in]0;1[$, on a :

$$E(s^X) = \frac{s + (1-s)\ln(1-s)}{s}.$$

d) Pour tout $s \in [0;1]$, on pose $\phi(s) = E(s^X)$. Montrer que la fonction ϕ est continue sur le segment $[0;1]$. Est-elle dérivable sur cet intervalle ?

e) Calculer, lorsqu'elles existent, l'espérance et la variance de Xs^X.

Exercice sans préparation 5

1. Montrer que l'application $f : x \mapsto x^3 + x^2 + x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bijective.

2. Quelles sont les fonctions polynômes surjectives ?

3. Quelles sont les fonctions polynômes injectives ?

Exercice avec préparation 6

1. Question de cours : Formule des probabilités totales.
Soit p et q deux réels vérifiant $0 < p < 1$ et $p + 2q = 1$. On note Δ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$\Delta = \begin{pmatrix} p & q & q \\ q & p & q \\ q & q & p \end{pmatrix}$$

2. Justifier que Δ est une matrice diagonalisable.

3. Soit D la matrice diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à Δ dont les éléments diagonaux sont écrits dans l'ordre croissant. Que peut-on dire de la limite des coefficients de D^n lorsque n tend vers $+\infty$.

Un village possède trois restaurants R_1, R_2 et R_3. Un couple se rend dans un de ces trois restaurants chaque dimanche. A l'instant $n = 1$ (c'est-à-dire le premier dimanche) il choisit le restaurant R_1, puis tous les dimanches suivants (instants $n = 2$, $n = 3$, etc.) il choisit le même restaurant que le dimanche précédent avec la probabilité p ou change de restaurant avec la probabilité $2q$, chacun des deux autres restaurants étant choisis avec la même probabilité.

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

4. Calculer la probabilité que le couple déjeune dans le restaurant R_1, respectivement R_2, respectivement R_3, le n-ième dimanche ($n \geqslant 2$).

5. Soit T la variable aléatoire égale au rang du premier dimanche où le couple retourne au restaurant R_1, s'il y retourne, et 0 sinon.

a) Déterminer la loi de T.

b) Établir l'existence de l'espérance et de la variance de T et les calculer.

6. Écrire une procédure scilab permettant de calculer la fréquence de visite du restaurant R_1 par le couple en 52 dimanches.

Exercice sans préparation 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction réelle f_n par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x + 1 - \frac{e^x}{n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique nombre réel négatif x_n tel que $f_n(x_n) = 0$.

2. *a)* Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente.

b) Calculer la limite ℓ de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

3. On pose $y_n = x_n - \ell$. Déterminer un équivalent de y_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice avec préparation 7

1. Question de cours : Condition suffisante de diagonalisabilité d'une matrice.

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. *a)* Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que le système $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ possède des solutions non nulles si et seulement si $(\lambda^2 - 1)(\lambda - 2) = 0$. Donner alors les solutions de ce système.

b) En déduire une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+3} = 2x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}$ et $Y_n = P^{-1}X_n$.

a) Quelle relation a-t-on entre X_{n+1}, X_n et A ?

b) En déduire l'expression de Y_n en fonction de n, D et Y_0.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur x_0, x_1 et x_2 pour que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente (respectivement, pour que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_n$ soit convergente).

4. On pose $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & -4 \\ 8 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ et pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $M(a, b) = \begin{pmatrix} 5b & a & -2b \\ 4b & 3b & a - 4b \\ -2a + 8b & a & 2a - 5b \end{pmatrix}$.

a) Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B. La réciproque est-elle vraie ?

b) En déduire que $M(a, b)$ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

c) Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquelles la suite $(M(a, b)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle, c'est-à-dire que chacun de ses neuf coefficients est le terme général d'une suite convergeant vers 0.

Exercice sans préparation 7

Soit $p \in]0; 1[$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ indépendantes et de même loi donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; P(X_n = -1) = p \quad \text{et} \quad P(X_n = 1) = 1 - p$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$.

1. Calculer l'espérance $E(Z_n)$ de Z_n et $\lim\limits_{n\to+\infty} E(Z_n)$.

2. Quelle est la loi de Z_n ?

3. Pour quelles valeurs de p les variables aléatoires Z_1 et Z_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice avec préparation 8

1. Question de cours : Soit f une fonction de classe C^2 définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles. Rappeler la définition d'un point critique et la condition suffisante d'extremum local en un point.

Soit X une variable aléatoire discrète finie définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ et on suppose que $\forall i \in [\![1; n]\!]$, $P(X = x_i) \neq 0$.

On définit l'entropie de X par : $H(X) = -\frac{1}{\ln 2} \sum\limits_{i=1}^{n} P(X = x_i) \ln\big(\mathbb{P}(X = x_i)\big)$.

2. Soient x_1, x_2, x_3, x_4 quatre réels distincts. On considère un jeu de 32 cartes dont on tire une carte au hasard. Soit X la variable aléatoire prenant les valeurs suivantes :

- × x_1 si la carte tirée est rouge (coeur ou carreau),
- × x_2 si la carte tirée est un pique,
- × x_3 si la carte tirée est le valet, la dame, le roi ou l'as de trèfle,
- × x_4 dans les autres cas.

On tire une carte notée C et un enfant décide de déterminer la valeur $X(C)$ en posant dans l'ordre les questions suivantes auxquelles il lui est répondu par "oui" ou par "non". LA carte C est-elle rouge ? La carte C est-elle un pique ? La carte C est-elle le valet, la dame, le roi ou l'as de trèfle ?
Soit N la variable aléatoire égale au nombre de questions posées (l'enfant cesse de poser des questions dès qu'il a obtenu une réponse "oui").

a) Calculer l'entropie $H(X)$ de X.

b) Déterminer la loi et l'espérance $E(N)$ de N. Comparer $\mathbb{E}(N)$ et $H(X)$.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles telle que : $f(x, y) = x \ln x + y \ln y + (1 - x - y) \ln(1 - x - y)$.

a) Préciser le domaine de définition de f. Dessiner ce domaine dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

b) Montrer que f ne possède qu'un seul point critique et qu'en ce point, f admet un extremum local.

c) Soit X une variable aléatoire réelle prenant les valeurs x_1, x_2 et x_3 avec les probabilités non nulles p_1, p_2 et p_3 respectivement.

Calculer $H(X)$ et montrer que $H(X)$ est maximale lorsque $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$.

Exercice sans préparation 8

On rappelle l'identité remarquable $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = 0$, $AB = BA$ et B inversible.
Montrer que $A + B$ est inversible.

Exercice avec préparation 9

1. Question de cours : Critères de convergence d'une intégrale sur un intervalle du type $[a;+\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$).

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\, dt$. On pose alors $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\, dt$.

b) Montrer que f est monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soit g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telles que :

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{x+t}\, dt \quad \text{et} \quad h(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\, dt.$$

a) Soit φ la fonction définie sur $[0;1]$ par : $\varphi(t) = \begin{cases} \frac{e^{-t}-1}{t} & \text{si } t \in]0;1] \\ -1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

Montrer que φ est continue sur le segment $[0;1]$.

b) En déduire que la fonction g est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Montrer de même que la fonction h est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $f(x) = \ln(x+1) - \ln x + g(x) + h(x)$. En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

4. À l'aide de l'encadrement $0 \leqslant \frac{1}{x} - \frac{1}{x+t} \leqslant \frac{t}{x^2}$ valable pour tout $x > 0$ et pour tout $t \geqslant 0$, montrer que $f(x)$ est équivalent à $\frac{1}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice sans préparation 9

Les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que : $Y(\Omega) = \{1;2\}, P(Y=1) = P(Y=2) = \frac{1}{2}$. On pose $Z = XY$.

1. Déterminer la loi de Z.

2. On admet que : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}$. Quelle est la probabilité que Z prenne une valeur paire ?