EML 2018

Exercice 1

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère également l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ g(x, y, z) = (x + y - z,\ 2y,\ -x + y + z)$$

Enfin, on pose :

$$u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0) \quad \text{et} \quad v = f(e_1) + e_1$$

1. a) Calculer v.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_1)) \ = \ A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit : $f(e_1) = (0, -2, 1)$.

- Ainsi :

$$v \ = \ f(e_1) + e_1 \ = \ (0, -2, 1) + (1, 0, 0) \ = \ (1, -2, 1)$$

$$\boxed{v = (1, -2, 1)}$$

□

b) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

- Montrons que la famille $\mathcal{C}$ est libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
Supposons :

$$\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot e_1 \ = \ 0_{\mathbb{R}^3}$$

On obtient alors les équivalences suivantes :

$$\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot e_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 & - & 2\,\lambda_2 & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \quad \textit{(par remontées successives)}$$

$$\boxed{\text{Donc la famille } \mathcal{C} \text{ est une famille libre de } \mathbb{R}^3.}$$

- En résumé :
  - × la famille $\mathcal{C}$ est libre,
  - × $\text{Card}(\mathcal{C}) = \text{Card}((u, v, e_1)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{\text{Donc } \mathcal{C} = (u, v, e_1) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

□

c) On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathcal{C}$.
Expliciter la matrice P et calculer P^{-1}.

Démonstration.

- Pour déterminer la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ dans la base $\mathcal{C}$, on commence par exprimer les vecteurs de la base $\mathcal{C}$ dans la base $\mathscr{B}$.
  On obtient ici :
  $$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
  La matrice P est la concaténation de ces trois vecteurs.
  $$\boxed{\text{Donc : } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$
- La matrice P est inversible en tant que matrice de passage.
- Pour déterminer P^{-1}, on applique l'algorithme du pivot de Gauss.
  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$
  On effectue l'opération $\left\{ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \right.$. On obtient :
  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$
  On effectue l'opération $\left\{ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \right.$. On obtient :
  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$
  La réduite obtenue est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.
  On retrouve ainsi que P est inversible.
  On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} \right.$. On obtient :
  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_2 \leftarrow -L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{Finalement : } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

2. ***a)*** Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{C}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(u)) = A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(2 \cdot u)$$

On en déduit : $f(u) = 2 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot e_1$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(u)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

- Ensuite :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(v)) = A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(-v)$$

On en déduit : $f(v) = 0 \cdot u + (-1) \cdot v + 0 \cdot e_1$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(v)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

- Enfin, par définition de v : $v = f(e_1) + e_1$.
  Donc : $f(e_1) = v - e_1 = 0 \cdot u + 1 \cdot v + (-1) \cdot e_1$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

On pouvait également remarquer que la formule de changement de base donne :

$$A' \ = \ \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) \ = \ P_{\mathcal{C},\mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B},\mathcal{C}} \ = \ P^{-1} \times A \times P$$

Par multiplication matricielle, on obtient aussi : $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ce n'était cependant sans doute pas la méthode attendue dans cette question, si on se fie à l'énoncé de la question ***2.d)***.

□

b) En déduire les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Démonstration.

- La matrice A' est une matrice triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. D'où : $\mathrm{Sp}(A') = \{2, -1\}$.
  De plus, A' est la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{C}$.

  $$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Sp}(f) = \{2, -1\}.}$$

- La matrice A' est la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{C}$.
  Pour étudier la diagonalisabilité de f, on va donc étudier celle de A'.
  - Déterminons $E_2(A')$ le sous-espace propre de A' associé à la valeur propre 2.
    Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} X \in E_2(A') & \Leftrightarrow & (A' - 2\, I_3)X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -3y & + & z & = & 0 \\ & - & 3z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} y \quad = 0 \\ \quad z = 0 \\ \textit{(par remontées successives)} \end{array} \right. \end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} E_2(A') & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = 0 \text{ et } z = 0 \right\} \ = \ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \\ & = & \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$:

× engendre $E_2(A')$,

× est libre, car constituée d'un unique vecteur non nul.

Ainsi $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_2(A')$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim(E_2(A)) = \mathrm{Card}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 1.}$$

- Déterminons $E_{-1}(A')$ le sous-espace propre de A' associé à la valeur propre -1.
  Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_{-1}(A') & \Leftrightarrow & (A' + I_3)X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} 3x & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array}\right.
\end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-1}(A') & = & \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid x = 0 \text{ et } z = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\right\} \\
& = & \left\{y \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$:

× engendre $E_{-1}(A')$,

× est libre, car constituée d'un unique vecteur non nul.

Ainsi $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{-1}(A')$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim(E_{-1}(A)) = \mathrm{Card}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = 1.}$$

- On obtient alors :
$$\dim(E_2(A')) + \dim(E_{-1}(A')) = 2 \neq 3$$
Or la matrice A' est d'ordre 3.
On en déduit que la matrice A' n'est pas diagonalisable.
$$\boxed{\text{Ainsi, l'endomorphisme } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$
□

c) L'endomorphisme f est-il bijectif ?

Démonstration.

$$\boxed{\text{Le réel } 0 \text{ n'est pas valeur propre de } f\text{, donc l'endomorphisme } f \text{ est bijectif.}}$$
□

d) Expliciter, sans justification, le lien entre les matrices A, A', P et P^{-1}.

Démonstration.

$$\boxed{A' = P^{-1}\, A\, P}$$

Commentaire

Aucune justification n'est demandée ici.
Cette relation vient de la formule de changement de base, détaillée dans le commentaire de la question ***2.a)***.

□

3. a) Déterminer la matrice B de g dans la base $\mathscr{B}$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $g(e_1) \;=\; g(1,0,0) \;=\; (1+0-0,\ 0,\ -1+0+0) \;=\; (1,0,-1)$.
Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g(e_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- Ensuite : $g(e_2) \;=\; g(0,1,0) \;=\; (0+1-0,\ 2,\ -0+1+0) \;=\; (1,2,1)$.
Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g(e_2)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Enfin : $g(e_3) \;=\; g(0,0,1) \;=\; (0+0-1,\ 0,\ -0+0+1) \;=\; (-1,0,1)$.
Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g(e_3)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$
□

b) Montrer : $B^2 = 2\,B$.

Démonstration. On calcule :

$$B^2 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \;=\; 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;=\; 2\,B$$

$$\boxed{\text{On a bien : } B^2 = 2\,B.}$$
□

c) En déduire les valeurs propres de g, ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre.

Démonstration.

- D'après la question précédente, le polynôme $Q(X) = X^2 - 2X = X(X-2)$ est un polynôme annulateur de la matrice B.
  Or le spectre de B est inclus dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur de B.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}(g) = \mathrm{Sp}(B) \subset \{0, 2\}.}$$

Commentaire

- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul Q.
  On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus) n.
- Si Q est un polynôme annulateur de A alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\, Q$ est toujours un polynôme annulateur de A puisque :

$$(\alpha\, Q)(A) \; = \; \alpha\, Q(A) \; = \; 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

  Cela suffit à démontrer que A possède une infinité de polynômes annulateurs.
  On peut en obtenir d'autres. Par exemple $R(X) = (X-5)Q(X)$ est un polynôme annulateur de A puisque :

$$R(A) \; = \; (A - 5\, I)\, Q(A) \; = \; 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

  Il faut donc parler `D'UN` polynôme annulateur d'une matrice.
- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de A. Si c'était le cas, A aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus n). Par exemple, comme $R(X) = (X-5)\, Q(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.

- Déterminons $E_0(g) = \mathrm{Ker}(g - 0 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Ker}(g)$.
  Soit $w \in \mathbb{R}^3$. Il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
w \in E_0(g) & \iff & g(w) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff B\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[6pt]
& \iff & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[6pt]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & 2y & & & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\[6pt]
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\[6pt]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right. \\[6pt]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

Finalement, on obtient l'expression de $E_0(g)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl} E_0(g) & = & \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \text{ et } y = 0\} \\ & = & \{(z,\, 0,\, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{z \cdot (1,\, 0,\, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left((1,0,1)\right) \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Comme } E_0(g) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}\text{, le réel 0 est bien valeur propre de } B\text{,} \\ \text{d'espace propre associé } E_0(g).\end{array}}$$

La famille $\mathcal{F}_0 = \big((1,\, 0,\, 1)\big)$:

× engendre $E_0(g)$,

× est libre car constituée d'un unique vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{F}_0 = \big(1,\, 0,\, 1\big) \text{ est une base de } E_0(g)}$$

- Déterminons $E_2(g) = \mathrm{Ker}(g - 2 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.
  Soit $w \in \mathbb{R}^3$. Il existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} w \in E_2(g) & \Longleftrightarrow & (g - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(w) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff (B - 2\,I_3)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{}{\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & y & - & z \end{array} \right. \end{array}$$

Finalement, on obtient l'expression de $E_2(g)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl} E_2(g) & = & \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y - z\} \\ & = & \{(y - z,\, y,\, z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \{y \cdot (1,\, 1,\, 0) + z \cdot (-1,\, 0,\, 1) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left((1,1,0), (-1,0,1)\right) \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Comme } E_2(g) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}\text{, le réel 2 est bien valeur propre de } B\text{,} \\ \text{d'espace propre associé } E_2(g).\end{array}}$$

La famille $\mathcal{F}_2 = \big((1,\, 1,\, 0),\, (-1,\, 0,\, 1)\big)$:

× engendre $E_2(g)$,

× est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{F}_2 \text{ est une base de } E_2(g).}$$

Commentaire

On a bien déterminé toutes les valeurs propres de g. En effet :
- × on a montré dans un premier temps : $\text{Sp}(g) \subset \{0, 2\}$. Ainsi, les réels 0 et 2 sont **les seules valeurs propres possibles** de l'endomorphisme g.
- × on a ensuite démontré que 0 et 2 étaient effectivement des valeurs propres de g

On en déduit : $\text{Sp}(g) = \{0, 2\}$.

☐

d) L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

Démonstration.
- La famille $\mathcal{F}_0$ est une base de $E_0(g)$ donc : $\dim(E_0(g)) = \text{Card}(\mathcal{F}_0) = 1$.
- La famille $\mathcal{F}_2$ est une base de $E_2(g)$ donc : $\dim(E_2(g)) = \text{Card}(\mathcal{F}_2) = 2$.
- On en déduit :

$$\dim(E_0(g)) + \dim(E_2(g)) \ = \ 3 \ = \ \dim(\mathbb{R}^3)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'endomorphisme } g \text{ est diagonalisable.}}$$

☐

On pose : $\mathcal{E} = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MA\}$.

4. a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.

Démonstration.
- Tout d'abord : $\mathcal{E} \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
- Ensuite : $0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \in \mathcal{E}$. En effet : $B \times 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \times A$.
- Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(M_1, M_2) \in \mathcal{E}^2$.

$$\begin{aligned} B(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2) &= \lambda_1 \cdot B\,M_1 + \lambda_2 \cdot B\,M_2 \\ &= \lambda_1 \cdot M_1\,A + \lambda_2 \cdot M_2\,A \qquad \textit{(car } (M_1, M_2) \in \mathcal{E}^2\textit{)} \\ &= (\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2)\ A \end{aligned}$$

Donc : $(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2) \in \mathcal{E}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathcal{E} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R})\text{, donc } \mathcal{E} \text{ est un espace vectoriel.}}$$

☐

b) Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{E}$.
Montrer que M n'est pas inversible. *(On pourra raisonner par l'absurde).*

Démonstration.
Raisonnons par l'absurde. Autrement dit, supposons que la matrice M est inversible.
- Comme $M \in \mathcal{E}$, on a : $B\,M = M\,A$.
- De plus, M est inversible, donc, en multipliant à gauche par M^{-1}, on obtient :

$$M^{-1}\,B\,M \ = \ M^{-1}\,M\,A \ = \ A$$

Ainsi, les matrices A et B sont semblables.

- De plus, d'après la question ***3.d)***, la matrice B est diagonalisable, donc elle est semblable à une matrice diagonale.
  Autrement dit, il existe $Q \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que $B = QDQ^{-1}$.
- On en déduit : $A = M^{-1}\, B\, M \;=\; M^{-1} Q\, D\, Q^{-1} M \;=\; (Q^{-1} M)^{-1}\, D\, Q^{-1} M$.
  Ainsi la matrice A est semblable à une matrice diagonale, elle est donc diagonalisable.
  Ceci est absurde d'après la question ***2.b)***.

$$\boxed{\text{Donc la matrice } M \text{ n'est pas inversible.}}$$

Commentaire

- On redémontre en fait ici la transitivité de la transposition, c'est-à-dire :

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ semblable à } B \\ B \text{ semblable à } C \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ semblable à } C$$

- Après avoir conclut que les matrices A et B sont semblables, on pouvait aussi raisonner de la manière suivante.
  - × Les matrices A et B sont semblables, donc elles représentent un même endomorphisme f dans deux bases différentes.
  - × Or, d'après la question ***3.d)***, la matrice B représente un endomorphisme diagonalisable. Donc f est diagonalisable.
  - × De plus, d'après ***2.b)***, la matrice A représente un endomorphisme non diagonalisable. Donc f n'est pas diagonalisable.

  Ceci est absurde.

□

5. On cherche à montrer que $\mathcal{E}$ n'est pas réduit à l'ensemble $\{0\}$.

a) Justifier que, pour tout réel λ, les matrices $A - \lambda\, I_3$ et $({}^t A) - \lambda\, I_3$ ont même rang, la matrice I_3 désignant la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Démonstration.
La transposition est une application linéaire, donc :

$${}^t(A - \lambda\, I_3) \;=\; {}^t A - \lambda\, {}^t I_3 \;=\; {}^t A - \lambda\, I_3$$

Or, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$: $\mathrm{rg}({}^t M) = \mathrm{rg}(M)$.
Donc, en appliquant cette égalité à $M = A - \lambda\, I_3$, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{rg}({}^t(A - \lambda\, I_3)) & = & \mathrm{rg}(A - \lambda\, I_3) \\ \shortparallel & & \\ \mathrm{rg}({}^t A - \lambda\, I_3) & & \end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{rg}({}^t A - \lambda\, I_3) = \mathrm{rg}(A - \lambda\, I_3)}$$

Commentaire

On rappelle la linéarité de la transposition :

$$\forall (A,B) \in \big(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})\big)^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad {}^t(\lambda \cdot A + \mu \cdot B) = \lambda \cdot {}^t A + \mu \cdot {}^t B$$

□

b) En déduire que la matrices B et ${}^tA$ admettent une valeur propre en commun, notée α.

Démonstration.

- D'après les questions ***2.b)*** et ***3.c)***, les matrices A et B ont la valeur propre 2 en commun.
- De plus, d'après la question précédente :

$$\text{rg}({}^tA - 2\,I_3) \;=\; \text{rg}(A - 2\,I_3) < 3$$

Donc 2 est une valeur propre de ${}^tA$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } B \text{ et } {}^tA \text{ ont une valeur propre en commun (la valeur propre 2).}}$$

□

c) Soient X un vecteur propre de B associé à la valeur propre α, et Y un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre α. On note : $N = X\,{}^tY$.
Montrer que la matrice N est non nulle et que N appartient à $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

  Les vecteurs X et Y sont des vecteurs propres. Ils sont donc non nuls. Ainsi :
  × au moins l'un des x_i n'est pas nul. Notons le x_{i_0}. Donc $x_{i_0} \neq 0$.
  × au moins l'un des y_i n'est pas nul. Notons le y_{i_0}. Donc $y_{i_0} \neq 0$.
  De plus :

$$N \;=\; X\,{}^tY \;=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} x_1\,y_1 & x_1\,y_2 & x_1\,y_3 \\ x_2\,y_1 & x_2\,y_2 & x_2\,y_3 \\ x_3\,y_1 & x_3\,y_2 & x_3\,y_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Comme } x_{i_0}\,y_{i_0} \neq 0_{\mathbb{R}}, \text{ on en déduit : } N \neq 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.}$$

- Tout d'abord, comme X est un vecteur propre de B associé à la valeur propre α :

$$B\,N \;=\; B\,X\,{}^tY \;=\; (BX)\,{}^tY \;=\; \alpha \cdot X\,{}^tY \;=\; \alpha \cdot N$$

  De plus :

$$\begin{aligned} N\,A &= X\,{}^tY\,A \;=\; X\,{}^tY\,{}^t({}^tA) \;=\; X\,{}^t({}^tA\,Y) \\ &= X\,{}^t(\alpha \cdot Y) && \textit{(car Y est un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre α)} \\ &= X\,(\alpha \cdot {}^tY) \;=\; \alpha \cdot X\,{}^tY \;=\; \alpha \cdot N \end{aligned}$$

  Finalement : $B\,N \;=\; \alpha \cdot N \;=\; N\,A$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } N \in \mathcal{E}.}$$

Commentaire

On utilise ici deux propriétés de la transposée :
- $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^t({}^tA) = A$,
- $\forall (A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, ${}^t(A\,B) = {}^tB\,{}^tA$.

□

d) En déduire : $\dim(\mathcal{E}) \geqslant 2$.

Démonstration.

- D'après la question ***3.c)***, les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de B associés à la valeur propre 2.
- On note Y un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre 2.
- D'après la question précédente, les matrices :

$$N_1 = X_1\, {}^tY \quad \text{et} \quad N_2 = X_2\, {}^tY$$

appartiennent à $\mathcal{E}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Vect}\,(N_1, N_2) \subset \mathcal{E}.}$$

- Montrons maintenant que la famille (N_1, N_2) est libre dans $\mathcal{E}$.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
Supposons : $\lambda_1 \cdot N_1 + \lambda_2 \cdot N_2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
De plus :

$$\lambda_1 \cdot N_1 + \lambda_2 \cdot N_2 \;=\; \lambda_1 \cdot X_1\, {}^tY + \lambda_2 \cdot X_2\, {}^tY \;=\; (\lambda_1 \cdot X_1 + \lambda_2 \cdot X_2)\, {}^tY$$

× Le vecteur Y est un vecteur propre de ${}^tA$ donc : $Y \neq 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

× Donc, d'après la question ***3.c)*** :

$$\lambda_1 \cdot N_1 + \lambda_2 \cdot N_2 \neq 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \;\Leftrightarrow\; \lambda_1 \cdot X_1 + \lambda_2 \cdot X_2 \neq 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

Autrement dit :

$$\lambda_1 \cdot N_1 + \lambda_2 \cdot N_2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \;\Leftrightarrow\; \lambda_1 \cdot X_1 + \lambda_2 \cdot X_2 = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

D'où : $\lambda_1 \cdot X_1 + \lambda_2 \cdot X_2 = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

× Or, les vecteurs X_1 et X_2 ne sont pas colinéaires. Ils forment donc une famille libre.
Ainsi : $\lambda_1 = \lambda_2 = 0_{\mathbb{R}}$.

On en déduit que la famille (N_1, N_2) est libre.
Ainsi : $\dim(\mathrm{Vect}\,(N_1, N_2)) = 2$.

- De plus : $\dim(\mathrm{Vect}\,(N_1, N_2)) \leqslant \dim(\mathcal{E})$, car $\mathrm{Vect}\,(N_1, N_2) \subset \mathcal{E}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } 2 \leqslant \dim(\mathcal{E}).}$$

□

Exercice 2

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in\ ]0,+\infty[,\ f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.
- Soit $x \in\ ]0,+\infty[$.

$$f'(x) \ = \ 1 - \frac{1}{x} \ = \ \frac{x-1}{x}$$

Alors, comme $x > 0$:

$$f'(x) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ x - 1 \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ x \geqslant 1$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - Tout d'abord : $f(1) = 1 - \ln(1) = 1$.
  - Ensuite : $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.

$$\boxed{\text{Donc : } \lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty.}$$

  - Enfin, soit $x \in\ ]0,+\infty[$:

$$f(x) \ = \ x - \ln(x) \ = \ x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

De plus, par croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

□

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in\ ]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

Démonstration.

- La fonction f est :
  - × continue sur $]0,1[$ (car dérivable sur $]0,1[$),
  - × strictement décroissante sur $]0,1[$.

Ainsi f réalise une bijection de $]0,1[$ dans $f(]0,1[)$.

$$f(]0,1[) \ = \left] \lim\limits_{x \to 1^-} f(x), \lim\limits_{x \to 0} f(x) \right[= \ ]1,+\infty[$$

Or $2 \in\ ]1,+\infty[$.
Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]0,1[$, notée a.

- La fonction f est :
  - × continue sur $]1,+\infty[$ (car dérivable sur $]1,+\infty[$),
  - × strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

  Ainsi f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ dans $f(]1,+\infty[)$.

$$f(]1,+\infty[) \ = \left] \lim_{x\to 1^-} f(x), \ \lim_{x\to+\infty} f(x) \right[=]1,+\infty[$$

  Or $2 \in]1,+\infty[$.
  Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]1,+\infty[$, notée b.

Finalement, l'équation $f(x) = 2$ admet exactement 2 solutions sur $]0,+\infty[$ notées a et b telles que $0 < a < 1 < b$.

Commentaire

- Il est important dans cette question d'avoir parfaitement en tête toutes les hypothèses du théorème de la bijection. En particulier, la fonction f doit être **strictement monotone** sur l'intervalle considéré.
- On ne pouvait donc pas appliquer le théorème de la bijection directement sur l'intervalle $]0,+\infty[$, mais il fallait découper cet intervalle en plusieurs sous-intervalles sur lesquels f est strictement monotone (ici $]0,1[$ et $]1,+\infty[$).

□

3. Montrer : $b \in [2,4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,\ 7$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $f(2) = 2 - \ln(2) \leqslant 2$.
- Ensuite : $f(4) = 4 - \ln(4) = 4 - \ln(2^2) = 4 - 2\ln(2) = 2(2 - \ln(2))$.
  De plus, $\ln(2) \simeq 0,7$, donc : $2 - \ln(2) \simeq 1,3$ et $2(2 - \ln(2)) \simeq 2,6$.
  D'où : $f(4) \geqslant 2$.
- On rappelle : $f(b) = 2$.
  Ainsi : $f(2) \leqslant f(b) \leqslant f(4)$.
  On note g la réciproque de f sur $]1,+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, g est strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

On en déduit : $2 \leqslant b \leqslant 4$.

Commentaire

L'indication de l'énoncé $\ln(2) \simeq 0,7$ ne permet pas de savoir s'il s'agit d'une sur ou d'une sous-approximation.
Un encadrement, tel que $0,6 \leqslant \ln(2) \leqslant 0,8$, permettrait de résoudre ce problème.

□

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b, +\infty[$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \left\{\begin{array}{l} u_n \text{ est bien défini} \\ u_n \in [b, +\infty[\end{array}\right.$

- **Initialisation** :
  $u_0 = 4$. Or, d'après la question ***3.***, $b \leqslant 4$. Donc : $u_0 \in [b, +\infty[$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} \text{ est bien défini} \\ u_{n+1} \in [b, +\infty[\end{array}\right.$)

  Par hypothèse de récurrence, u_n est bien défini et $u_n \in [b, +\infty[$.
  - Comme $u_n \geqslant b \geqslant 2$, on a en particulier $u_n > 0$.
    Donc $\ln(u_n)$ est bien définie. D'où u_{n+1} est bien défini.
  - Par stricte croissance de $\ln$ sur $]0, +\infty[$:

  $$u_n \geqslant b \ \Leftrightarrow\ \ln(u_n) \geqslant \ln(b) \ \Leftrightarrow\ \ln(u_n) + 2 \geqslant \ln(b) + 2 \ \Leftrightarrow\ u_{n+1} \geqslant \ln(b) + 2$$

  Or, par définition de b : $f(b) = 2$, c'est-à-dire $b - \ln(b) = 2$. Donc : $\ln(b) = b - 2$.
  On en déduit : $u_{n+1} \geqslant b - \cancel{2} + \cancel{2} = b$. Ainsi : $u_{n+1} \in [b, +\infty[$.

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on obtient que } (u_n) \text{ est bien définie et : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b, +\infty[.}$$

Commentaire

- Cette question est un classique des suites récurrentes. Elle se traite presque toujours par récurrence.
- Il faut ici faire attention à bien énoncer l'hypothèse de récurrence.
  Pour montrer que « **la suite** (u_n) est bien définie », on démontre : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: **le réel** u_n est bien défini.

□

5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n \ = \ \ln(u_n) + 2 - u_n \ = \ 2 - (u_n - \ln(u_n)) \ = \ f(b) - f(u_n)$$

Or, d'après la question précédente : $u_n \geqslant b$.
De plus, par croissance de la fonction f sur $[b, +\infty[$: $f(u_n) \geqslant f(b)$.
D'où : $u_{n+1} - u_n = f(b) - f(u_n) \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$$

Commentaire

On pouvait aussi démontrer la décroissance de la suite (u_n) par récurrence.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation** :
  $u_1 = \ln(u_0) + 2 = \ln(4) + 2 = 2\ \ln(2) + 2 \simeq 2 \times 0,7 + 2 \simeq 3,4$.
  Donc $u_1 \leqslant u_0$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$).
  Par hypothèse de récurrence : $u_{n+1} \geqslant u_n$.
  On obtient donc, par stricte croissance de ln sur $]0, +\infty[$:
  $$u_{n+1} \leqslant u_n \ \Leftrightarrow\ \ln(u_{n+1}) \leqslant \ln(u_n) \ \Leftrightarrow\ \ln(u_{n+1}) + 2 \leqslant \ln(u_n) + 2 \ \Leftrightarrow\ u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

- La suite (u_n) est donc :
  - × décroissante,
  - × minorée par b (car : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [b, +\infty[$).

On en déduit que la suite (u_n) converge. On note ℓ sa limite.

- - Tout d'abord : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant b$.
    Par passage à limite, on en déduit : $\ell \geqslant b$.
  - Ensuite : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.
    Donc, par continuité de ln sur $]0, +\infty[$:
    $$\ell = \ln(\ell) + 2 \ \Leftrightarrow\ \ell - \ln(\ell) = 2 \ \Leftrightarrow\ f(\ell) = 2$$
    Or, d'après la question ***2.***, b est l'unique solution de l'équation $f(x) = 2$ sur $]1, +\infty[$.

Donc $\ell = b$.

□

6. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.

Démonstration.
On note g la fonction définie par $g : x \mapsto \ln(x) + 2$.

- La fonction g est dérivable sur $[b, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[b, +\infty[$.
  De plus : $\forall x \in [b, +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{1}{x}$.
  Or, d'après la question ***3.***, $b \geqslant 2$. Donc, pour tout $x \in [b, +\infty[$: $x \geqslant b \geqslant 2$.
  Par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$, on en déduit : $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
  Ainsi :
  $$\forall x \in [b, +\infty[,\ g'(x) \leqslant \frac{1}{2}$$

- On sait alors :
  - × g est dérivable sur $[b, +\infty[$,
  - × $\forall x \in [b, +\infty[,\ g'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

  On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis que :

$$\forall (x, y) \in [b, +\infty[^2 \text{ tel que } x \leqslant y,\ g(y) - g(x) \leqslant \frac{1}{2}(y - x)$$

  Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in [b, +\infty[$ et $x = b \in [b, +\infty[$, on obtient :

$$g(u_n) - g(b) \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b)$$

  Or :
  - × $g(u_n) = \ln(u_n) + 2 = u_{n+1}$
  - × $g(b) = \ln(b) + 2 = (b - \cancel{2}) + \cancel{2} = b$, car b est solution de l'équation $f(x) = 2$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b).}$$

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question ***4.*** : $u_n \geqslant b$.

$$\boxed{\text{Donc : } u_n - b \geqslant 0.}$$

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
  - ▶ **Initialisation** :
    D'une part : $u_0 - b = 4 - b$.
    D'autre part : $\dfrac{1}{2^{0-1}} = \dfrac{1}{2^{-1}} = 2$.
    On en déduit :

$$u_0 - b \leqslant \frac{1}{2^{0-1}} \ \Leftrightarrow\ 4 - b \leqslant 2 \ \Leftrightarrow\ 2 \leqslant b$$

    Or la dernière assertion est vraie d'après la question ***3***. Donc, par équivalence, la première assertion aussi.
    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - ▶ **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2^n}$).
    D'après la question précédente : $u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.
    Or, par hypothèse de récurrence : $u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
    En combinant ces deux résultats, on obtient :

$$u_{n+1} - b \ \leqslant\ \frac{1}{2}(u_n - b) \ \leqslant\ \frac{1}{2}\,\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$$

    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

□

7. a) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

Démonstration.

```
1 function u = suite(n)
2     u = 4
3     for k = 1:n
4         u = log(u) + 2
5     end
6 endfunction
```

Expliquons un peu ce programme.
La variable `u` est créée pour contenir successivement les valeurs u_0, u_1, ..., u_n.

- On initialise donc cette variable à $u_0 = 4$ avec la ligne 2

```
2     u = 4
```

- On met ensuite à jour `u` de manière itérative avec la ligne 4

```
4         u = log(u) + 2
```

Commentaire

- On décrit ici de manière précise les instructions afin d'aider le lecteur un peu moins habile en **Scilab**.
  Cependant, l'écriture du script démontre la compréhension de toutes les commandes en question et permet sans doute d'obtenir la totalité des points alloués à cette question.
- Si on avait souhaité afficher tous les n premiers termes de la suite (u_n), on aurait modifié le script précédent de la façon suivante :

```
function u = suite(n)
    u = zeros(1, n)
    u(1) = 4
    for k = 2:n
        u(k) = log(u(k-1)) + 2
    end
endfunction
```

□

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1 function b = valeur_approchee(epsilon)
2     n = 0
3     while ..........
4         n = n + 1
5     end
6     b = suite(n)
7 endfunction
```

Démonstration.

- D'après la question ***6.b)*** :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$
S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2^{n-1}} \leqslant \varepsilon$, on obtiendra par transitivité :
$$0 \leqslant u_N - b \leqslant \varepsilon$$
Donc u_N est une valeur approchée de b à ε près.
- On complète alors le programme **Scilab** de la façon suivante :

```
while 1 / 2 ^ (n-1) > epsilon
```

□

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :
$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt$$

8. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, et que l'on a :
$$\forall x \in \,]0, +\infty[,\ \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

Démonstration.

- La fonction $\dfrac{1}{f}$ est continue sur $]0, +\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $]0, +\infty[$ qui ne s'annule pas sur cet intervalle.
En effet, d'après le tableau de variations de f en question ***1.*** : $\forall x \in \,]0, +\infty[,\ f(x) \geqslant 1$.
Donc la fonction $\dfrac{1}{f}$ admet une primitive G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
- On obtient alors :
$$\forall x \in \,]0, +\infty[,\ \Phi(x) = G(2x) - G(x)$$
Or la fonction $x \mapsto G(2x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ car elle est la composée $G \circ h$ où :
  × $h : x \mapsto 2x$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$,
    - telle que $h(]0, +\infty[) \subset \,]0, +\infty[$.
  × G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \Phi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ (donc dérivable sur }]0, +\infty[) \text{ en tant que différence de fonctions de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

- Soit $x \in \,]0, +\infty[$.
$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= 2\,G'(2x) - G'(x) \ = \ 2\,\frac{1}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)} \\ &= \frac{2}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln(x)} \ = \ \frac{2(\cancel{x} - \ln(x)) - (\cancel{2x} - \ln(2x))}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))} \\ &= \frac{-2\ln(x) + \ln(2) + \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} \ = \ \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \,]0, +\infty[,\ \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}}$$

□

9. En déduire les variations de Φ sur $]0,+\infty[$.

Démonstration.
Soit $x \in\ ]0,+\infty[$. D'après la question précédente, on a :

$$\Phi'(x) \ = \ \frac{\ln(2)-\ln(x)}{(x-\ln(x))(2x-\ln(2x))} \ = \ \frac{\ln(2)-\ln(x)}{f(x)\, f(2x)}$$

Or, d'après la question ***1.*** : $f(x) \geqslant 0$ et $f(2x) \geqslant 0$.
On obtient alors :

$$\Phi'(x) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ \ln(2)-\ln(x) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ \ln(2) \geqslant \ln(x)$$

$$\Leftrightarrow\ 2 \geqslant x$$

(car la fonction ln *est strictement croissante sur* $]0,+\infty[$*)*

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		2		$+\infty$
Signe de $\Phi'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de Φ		$\nearrow$	$\Phi(2)$	$\searrow$	

$\square$

10. Montrer : $\forall x \in\ ]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.

Démonstration.
Soit $x \in\ ]0,+\infty[$.

- Tout d'abord, d'après la question ***1.*** : $\forall t \in\ ]0,+\infty[,\ f(t) \geqslant 1 > 0$.
  On en déduit : $\forall t \in\ ]0,+\infty[,\ \dfrac{1}{f(t)} > 0$.
  Ainsi, par positivité de l'intégration :

$$0 \ \leqslant\ \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt \ = \ \Phi(x)$$

- Ensuite, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$, pour tout $t \in\ ]0,+\infty[$:

$$f(t) \geqslant 1 \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{f(t)} \leqslant 1$$

  Par croissance de l'intégration (les bornes sont bien ordonnées : $x \leqslant 2x$ car $x > 0$), on obtient :

$$\underbrace{\int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt}_{=\ \Phi(x)} \ \leqslant\ \int_x^{2x} 1\, dt \ = \ [\ t\ ]_x^{2x} \ = \ 2x - x \ = \ x$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in\ ]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x.}$$

Commentaire

Le schéma de résolution de cette question est plutôt classique.
Afin d'encadrer une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$,

1) on cherche d'abord à encadrer l'intégrande, c'est-à-dire montrer :

$$\forall t \in [a,b],\ m \leqslant f(t) \leqslant M$$

où m et M sont deux réels à déterminer grâce à l'étude de la fonction f,

2) on utilise en suite la croissance de l'intégration (si les bornes a et b sont bien ordonnées, c'est-à-dire $a \leqslant b$) pour conclure :

$$m(b-a) = \int_a^b m\ dt \ \leqslant \ \int_a^b f(t)\ dt \ \leqslant \ \int_a^b M\ dt = M(b-a)$$

□

11. a) Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

Démonstration.
D'après la question précédente : $\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.
Or $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.
Donc, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi(x) = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } \Phi \text{ est prolongeable par continuité et que ce prolongement, toujours noté } \Phi\text{, vérifie } \Phi(0) = 0.}$$

□

b) Montrer : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$.
On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

Démonstration.
D'après la question ***8.*** :

$$\forall x \in\ ]0,+\infty[,\ \Phi'(x) = \frac{2}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)}$$

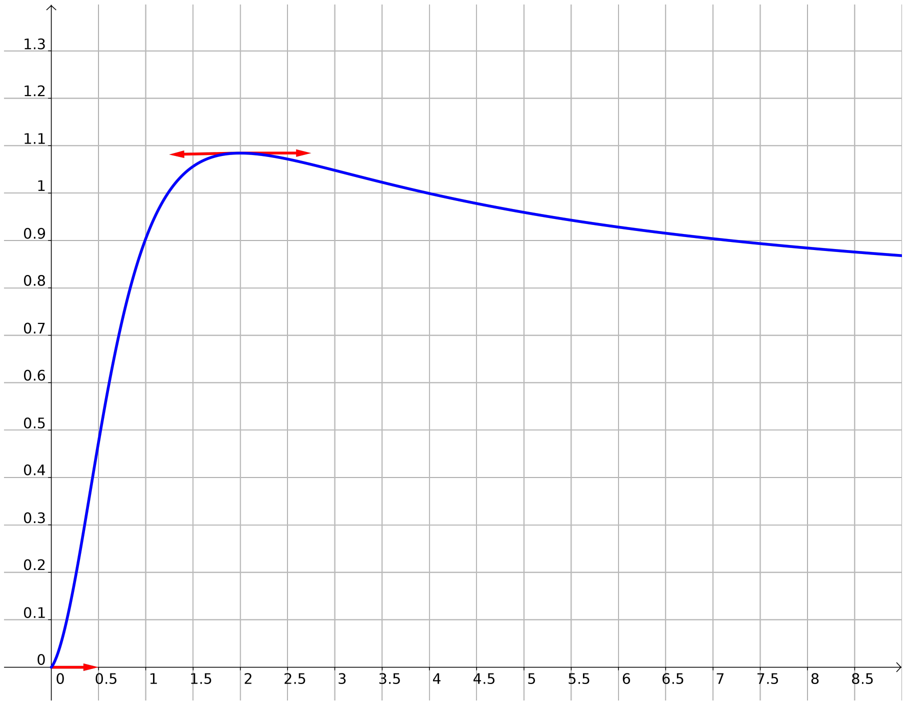
Or, d'après la question ***1.*** : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$, par composition, on a aussi : $\lim\limits_{x\to 0} f(2x) = +\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{x\to 0} \Phi'(x) = 0.}$$

□

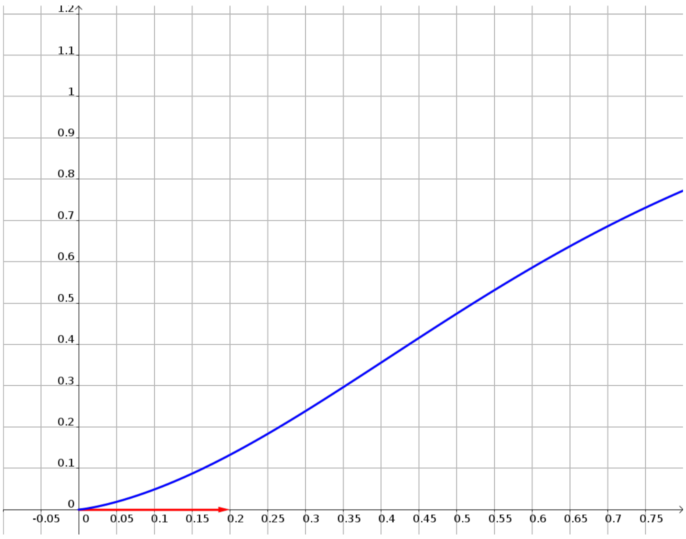
12. On donne $\Phi(2) \simeq 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0,7$.
Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Démonstration.



Commentaire

Sur le graphe précédent, la tangente à l'origine ne semble pas être correcte.
En effet, comme son étymologie (le verbe latin « tangere ») l'indique, une tangente doit **toucher** la courbe, ce qui ne paraît pas être le cas ici.
Cela est simplement dû à l'échelle de la figure. Si on zoome sur l'origine du repère, on obtient le graphe suivant :



Sur une copie, il faut bien évidemment accentuer les tangentes à la courbe. $\square$

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction H de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U =]0, +\infty[^2$ définie par :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ H(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy - 2x + e^y$$

Commentaire

On peut remarquer que cette fonction H est en fait définie sur $\mathbb{R}^2$. Cela sera d'ailleurs utile plus tard dans l'énoncé.
Elle est même de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Démontrons le.

- La fonction $(x,y) \mapsto \dfrac{x^2}{2} - xy - 2x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynomiale.
- La fonction $(x,y) \mapsto e^y$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car elle est la composée $h_2 \circ h_1$ où :
  - × $h_1 : (x,y) \mapsto y$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynomiale,
    - telle que $h_1(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}$.
  - × $h_2 : u \mapsto e^u$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction H est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

13. a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de H en tout (x,y) de U.

Démonstration.

- La fonction H est de classe $\mathcal{C}^2$, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
  Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 1 sur U.
- Soit $(x,y) \in U$.

$$\partial_1(H)(x,y) \ = \ \frac{\cancel{2}\,x}{\cancel{2}} - y - 2 \ = \ x - y - 2$$

$$\partial_2(H)(x,y) \ = \ -x + e^y$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in U,\ \partial_1(H)(x,y) = x - y - 2, \quad \partial_2(H)(x,y) = e^y - x}$$

Commentaire

On trouve bien sûr les mêmes dérivées premières sur $\mathbb{R}^2$.

□

b) Montrer que la fonction H admet exactement deux points critiques : $(a, \ln(a))$ et $(b, \ln(b))$, où les réels a et b sont ceux introduits dans la question ***2.***

Démonstration.
Soit $(x, y) \in U$.
Le couple (x, y) est un point critique de H si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\nabla(H)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \partial_1(H)(x,y) &=& 0 \\ \partial_2(H)(x,y) &=& 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y - 2 = 0 \\ \mathrm{e}^y - x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ \mathrm{e}^y = x \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ \mathrm{e}^{x-2} = x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ x - 2 = \ln(x) \end{array}\right. \qquad \textit{(car } x > 0\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ x - \ln(x) = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ f(x) = 2 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Or, d'après la question ***2.***, l'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions sur $]0, +\infty[$: les réels a et b.
On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\nabla(H)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ x = a \end{array}\right. \quad \texttt{OU} \quad \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ x = b \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = a - 2 \\ x = a \end{array}\right. \quad \texttt{OU} \quad \left\{\begin{array}{l} y = b - 2 \\ x = b \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Or, comme a et b sont solutions de l'équation $f(x) = 2$, on a :

$$f(b) = 2 \Leftrightarrow b - \ln(b) = 2 \Leftrightarrow \ln(b) = b - 2$$

De même : $\ln(a) = a - 2$. D'où :

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ est un point critique de } H &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \ln(a) \\ x = a \end{array}\right. \quad \texttt{OU} \quad \left\{\begin{array}{l} y = \ln(b) \\ x = b \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow (x,y) = (a, \ln(a)) \quad \texttt{OU} \quad (x,y) = (b, \ln(b))
\end{aligned}$$

Or, comme $a \in]0, 1[$, alors $\ln(a) < 0$. Donc $(a, \ln(a)) \notin U$.
On en déduit que le couple $(a, \ln(a))$ n'est pas un point critique de H sur U.

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } H \text{ admet un unique point critique } \underline{\text{sur } U} : (b, \ln(b)).}$$

Commentaire

- La réponse à cette question semble contredire l'énoncé.
  En fait, le couple $(a, \ln(a))$ est bien un point critique de H. Seulement, c'est un point critique de H <u>sur $\mathbb{R}^2$</u> et non <u>sur U</u>.
  Montrer que $(a, \ln(a))$ est bien un point critique de H sur $\mathbb{R}^2$ demande peu d'adaptations dans la preuve précédente.
  Le seul point problématique est la composition par la fonction ln dans la première série d'équivalences :
  $$\left\{\begin{array}{l} y = x-2 \\ \mathrm{e}^{x-2} = x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x-2 \\ x-2 = \ln(x) \end{array}\right.$$
  En effet, il faut démontrer auparavant que $x > 0$ (a priori : $x \in \mathbb{R}$).
  Cependant, d'après le système $\left\{\begin{array}{l} y = x-2 \\ \mathrm{e}^{y} = x \end{array}\right.$, on en déduit en particulier que $x > 0$, et on peut donc continuer la preuve comme précédemment.
- Dans la suite, lorsque l'on étudiera le point critique $(a, \ln(a))$, on se placera donc sur $\mathbb{R}^2$ et non sur U.

□

14. a) Écrire la matrice hessienne, notée M_a, de H au point $(a, \ln(a))$.

Démonstration.

- La fonction H est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^2$.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\nabla^2(H)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(H)(x,y) & \partial^2_{1,2}(H)(x,y) \\ \partial^2_{2,1}(H)(x,y) & \partial^2_{2,2}(H)(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \mathrm{e}^y \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Donc : } M_a = \nabla^2(H)(a, \ln(a)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \mathrm{e}^{\ln(a)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}}$$

Commentaire

On rappelle que $(a, \ln(a)) \notin U$.
Il est donc indispensable de déterminer $\nabla^2(H)$ sur $\mathbb{R}^2$ et non sur U.

□

b) Montrer que M_a admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2, vérifiant

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & a+1 \\ \lambda_1 \, \lambda_2 & = & a-1 \end{array}\right.$$

Démonstration.

- La matrice M_a est une matrice réelle symétrique. Donc elle est diagonalisable.
  On note λ_1 et λ_2 ses valeurs propres (éventuellement égales).
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \det(M_a - \lambda \cdot I_2) & = & \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & a-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(a-\lambda) - 1 \\ & = & \lambda^2 - (a+1)\lambda + (a-1) \end{array}$$

On en déduit que la matrice $M_a - \lambda \cdot I_2$ n'est pas inversible si et seulement si :

$$\lambda^2 - (a+1)\lambda + (a-1) = 0 \quad (*)$$

- Or λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de M_a, donc :

$$(M_a - \lambda \cdot I_2) \text{ n'est pas inversible } \Leftrightarrow \lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$$

Ainsi les réels λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation $(*)$. D'où :

$$\lambda^2 - (a+1)\lambda + (a-1) \;=\; (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \;=\; \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1 \, \lambda_2$$

Par identification des coefficients de ces polynômes de degré 2 en λ, on obtient le système suivant : $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = a+1 \\ \lambda_1 \, \lambda_2 = a-1 \end{array} \right.$

- Montrons maintenant que λ_1 et λ_2 sont distincts.
Raisonnons par l'absurde. Supposons alors que $\lambda_1 = \lambda_2$.
D'après le système précédent, on obtient en particulier :

$$\lambda_1^2 \;=\; \lambda_1 \, \lambda_2 \;=\; a-1$$

Or, d'après la question ***2.***, on a : $a < 1$. Donc $a - 1 < 0$.
On en déduit : $\lambda_1^2 < 0$, ce qui est absurde.

Ainsi, λ_1 et λ_2 sont distincts.

□

c) La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(a, \ln(a))$?

Démonstration.
On a montré dans la question précédente : $a - 1 < 0$. On en déduit : $\lambda_1 \, \lambda_2 < 0$.
Les valeurs propres de M_a sont donc de signes opposés.

Ainsi, la fonction H n'admet pas d'extremum local au point $(a, \ln(a))$.

Commentaire

Le point $(a, \ln(a))$ est un point selle pour la fonction H.

□

15. La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(b, \ln(b))$?

Démonstration.
On reprend la démarche des questions précédentes.

- On note M_b la matrice hessienne de H au point $(b, \ln(b))$. Alors :

$$M_b \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \mathrm{e}^{\ln(b)} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & b \end{pmatrix}$$

- La matrice M_b est une matrice réelle symétrique. Donc elle est diagonalisable.
On note μ_1 et μ_2 ses valeurs propres éventuellement égales).
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\det(M_b - \lambda \cdot I_2) \;=\; \lambda^2 - (b+1)\lambda + (b-1)$$

On en déduit que la matrice $M_b - \lambda \cdot I_2$ n'est pas inversible si et seulement si :

$$\lambda^2 - (b+1)\lambda + (b-1) = 0 \quad (\star)$$

- Or μ_1 et μ_2 sont les valeurs propres de M_b, donc μ_1 et μ_2 sont les racines de l'équation ($\star$). D'où :

$$\lambda^2 - (b+1)\lambda + (b-1) \;=\; (\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2) \;=\; \lambda^2 - (\mu_1 + \mu_2)\lambda + \mu_1\,\mu_2$$

$$\boxed{\text{Par identification : } \left\{ \begin{array}{rcl} \mu_1 + \mu_2 & = & b+1 \\ \mu_1\,\mu_2 & = & b-1 \end{array} \right. .}$$

- D'après la question ***3.*** : $b \geqslant 2$. Donc : $b-1 > 0$ et $b+1 > 0$.
  On obtient alors :
  - × $\mu_1\,\mu_2 > 0$.
    Donc μ_1 et μ_2 sont non nuls et de même signe.
  - × $\mu_1 + \mu_2 > 0$.
    Or μ_1 et μ_2 ont même signe. Donc : $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } H \text{ admet un minimum local en } (b, \ln(b)).}$$

□

Exercice 3

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. a) Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ puis calculer leurs probabilités.

Démonstration.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit les événements suivants :

$$\begin{array}{rcl} P_k & : & \text{« obtenir Pile au } k^{\text{ème}} \text{ lancer »} \\[2mm] F_k & : & \text{« obtenir Face au } k^{\text{ème}} \text{ lancer »} \end{array}$$

- L'événement $[X = 0]$ est réalisé si et seulement si on n'a obtenu aucun Face avant l'obtention du $2^{\text{ème}}$ Pile.
  On a donc obtenu successivement deux Pile.

  $$\boxed{\text{Ainsi : } [X = 0] = P_1 \cap P_2.}$$

  Les lancers de pièce sont indépendants, donc :

  $$\mathbb{P}([X = 0]) \;=\; \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) \;=\; \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2) \;=\; \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \;=\; \frac{4}{9}$$

  $$\boxed{\mathbb{P}([X = 0]) = \frac{4}{9}}$$

Commentaire

L'énoncé ne précise pas explicitement que les lancers sont indépendants. Cette hypothèse est cependant raisonnable puisque l'expérience de lancer est répétée dans des conditions identiques.

- L'événement $[X = 1]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu un unique Face avant l'apparition du $2^{\text{ème}}$ Pile.
  Deux cas se présentent alors :
  × soit on a obtenu ce Face avant deux Pile successifs,
  × soit on a obtenu ce Face entre les deux premiers Pile.

  $$\boxed{\text{Ainsi : } [X = 1] \ = \ (F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3).}$$

  On obtient alors :

  $$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = 1]) &= \mathbb{P}(F_1 \cap P_2 \cap P_3) \ + \ \mathbb{P}(P_1 \cap F_2 \cap P_3) && \textit{(par incompatibilité de } F_1 \cap P_2 \cap P_3 \textit{ et } P_1 \cap F_2 \cap P_3\textit{)} \\ &= \mathbb{P}(F_1)\,\mathbb{P}(P_2)\,\mathbb{P}(P_3) \ + \ \mathbb{P}(P_1)\,\mathbb{P}(F_2)\,\mathbb{P}(P_3) && \textit{(par indépendance des lancers)} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \ + \ \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \\ &= 2\ \frac{4}{3^3} \end{aligned}$$

  $$\boxed{\mathbb{P}([X = 1]) = 2\ \frac{4}{3^3}}$$

- On raisonne de la même manière pour l'événement $[X = 2]$.

  $$\boxed{[X = 2] \ = \ (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4)}$$

  On obtient alors :

  $$\begin{aligned} & \mathbb{P}([X = 2]) \\ = \ & \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) + \mathbb{P}(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) + \mathbb{P}(P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) && \textit{(par incompatibilité)} \\ = \ & \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \ + \ \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \ + \ \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} && \textit{(par indépendance)} \\ = \ & 3\ \frac{4}{3^4} \end{aligned}$$

  $$\boxed{\mathbb{P}([X = 2]) = 3\ \frac{4}{3^4}}$$

□

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X = n]) = (n+1)\ \dfrac{4}{3^{n+2}}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- L'événement $[X = n]$ est réalisé par les tirages qui contiennent n Face et 2 Pile.
  De tels $(n+2)$-tirages sont entièrement caractérisés par :
  × la place du 2^{nd} Pile : 1 choix (le $(n+2)^{\text{ème}}$ lancer),
  × la place du 1^{er} Pile : $(n+1)$ choix (du 1^{er} lancer au $(n+1)^{\text{ème}}$ lancer).
  Il y a donc $1 \times (n+1) = n+1$ tels $(n+2)$-tirages.
- Il s'agit alors de savoir qu'elle est la probabilité d'apparition de ces $(n+2)$-tirage.
  - Tout d'abord, tous ces $(n+2)$-tirages ont la même probabilité d'apparition, car ils comportent tous le même nombre de Face (n) et le même nombre de Pile (2).
    Donc en particulier, ils ont la même probabilité d'apparition que le tirage suivant qui réalise l'événement :
    $$F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2}$$

- Or, comme les lancers sont indépendants :

$$\begin{array}{cl} & \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2}) \\ = & \mathbb{P}(F_1)\,\mathbb{P}(F_2)\,\cdots\,\mathbb{P}(F_n)\,\mathbb{P}(P_{n+1})\,\mathbb{P}(P_{n+2}) \\ = & \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \cdots \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \\ = & \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \ = \ \dfrac{1}{3^n} \times \dfrac{4}{3^2} \\ = & \dfrac{4}{3^{n+2}} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a donc : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X = n]) = (n+1)\ \dfrac{4}{3^{n+2}}.}$$

Commentaire

On peut exprimer l'événement $[X = n]$ à partir des (P_k) et (F_k) :

$$\begin{array}{rcl} [X = n] & = & (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap F_n \cap F_{n+1} \cap P_{n+2}) \\ & \cup & (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap F_n \cap F_{n+1} \cap P_{n+2}) \\ & \cup & (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap \cdots \cap F_n \cap F_{n+1} \cap P_{n+2}) \\ & \vdots & \\ & \cup & (F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2}) \end{array}$$

On voit apparaître le fait que $[X = n]$ est la réunion de $(n+1)$ événements incompatibles (on voit bien également que c'est le choix de la place du 1er Pile qui importe).
Les probabilités de chacun de ces événements sont identiques (égales à $\dfrac{4}{3^{n+2}}$ avec le même calcul que précédemment).
On retrouve bien évidemment le résultat démontré plus haut. Seule la présentation de la démonstration diffère.

□

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n+1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule de cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose : $V = X - U$.

2. a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable U.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Si l'événement $[X = n]$ est réalisé, alors l'expérience consiste à piocher parmi les boules numérotées de 0 à n.
Donc la v.a.r. U peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 et n.
Ceci est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } U(\Omega) = \mathbb{N}}$$

□

b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Comme expliqué précédemment, si l'événement $[X = n]$ est réalisé, alors l'expérience consiste à piocher parmi les boules numérotées de 0 à n. On en déduit :

× soit $k \in [\![n+1, +\infty[\![$.
Comme il est impossible de piocher une boule de numéro supérieur à $(n + 1)$, on a :
$$\mathbb{P}_{[X=n]}([U = k]) = 0$$

× soit $k \in [\![0, n]\!]$.
Comme la probabilité de choisir parmi ces $(n + 1)$ boules est uniforme, on a :
$$\mathbb{P}_{[X=n]}([U = k]) = \frac{1}{n+1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Finalement : } \forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}_{[X=n]}([U = k]) = \dfrac{1}{n+1} \quad \text{et} \\ \forall k \in [\![n+1, +\infty[\![,\ \mathbb{P}_{[X=n]}([U = k]) = 0.\end{array}}$$

Commentaire

Le caractère uniforme du choix d'une boule est justifiée par :
× le fait que les boules sont indiscernables au toucher,
× on pioche au hasard dans une urne.

□

c) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:
$$\mathbb{P}([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\, \mathbb{P}([X = n]) \quad \text{puis} \quad \mathbb{P}([U = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}$$

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}$.
La famille $([X = n])_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([U = k]) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n] \cap [U = k]) & \\ & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\, \mathbb{P}_{[X=n]}([U = k]) & \\ & = & \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\, \mathbb{P}_{[X=n]}([U = k]) & \textit{(car : } \forall n < k,\ \mathbb{P}_{[X=n]}([U = k]) = 0 \\ & & & \textit{d'après la question } \textbf{\textit{2.b)}}) \\ & = & \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\, \frac{1}{n+1} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.b)}}) \end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\, \mathbb{P}([X = n])}$$

- D'après la question ***1.b)*** :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X = n]) = (n + 1)\, \frac{4}{3^{n+2}}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([U=k]) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{\cancel{n+1}} \cancel{(n+1)} \frac{4}{3^{n+2}} = \frac{4}{3^2} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \\
&= \frac{4}{3^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+k}} = \frac{4}{3^{k+2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{4}{3^{k+2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= \frac{4}{3^{k+2}} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{4}{3^{k+2}} \frac{3}{2} \\
&= \frac{2}{3^{k+1}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([U=k]) = \frac{2}{3^{k+1}}}$$

□

d) Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.

Démonstration.

- La v.a.r. U admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} k\, \mathbb{P}([U=k])$ converge absolument, ce qui équivaut à démontrer sa convergence car la série est à termes positifs.
- Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{N} k\, \mathbb{P}([U=k]) = \sum_{k=1}^{N} k\, \mathbb{P}([U=k]) = \sum_{k=1}^{N} k \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{3^2} \sum_{k=1}^{N} k \frac{1}{3^{k-1}} = \frac{2}{3^2} \sum_{k=1}^{N} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

On reconnaît la somme partielle d'ordre N de la série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{3}$ (avec $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$), donc elle converge.

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } U \text{ admet une espérance.}}$$

De plus :

$$\mathbb{E}(U) = \frac{2}{3^2} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{2}{3^2} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{3^2} \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{3^2}} \frac{\cancel{3^2}}{2^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(U) = \frac{1}{2}}$$

- La v.a.r. U admet une variance si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} k^2\, \mathbb{P}([U=k])$ converge absolument, ce qui équivaut à démontrer sa convergence car la série est à termes positifs.
- Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} k^2\, \mathbb{P}([U=k]) &= \sum_{k=1}^{N} \big(k(k-1)+k\big)\, \mathbb{P}([U=k]) \\
&= \sum_{k=1}^{N} k(k-1)\, \mathbb{P}([U=k]) + \sum_{k=1}^{N} k\, \mathbb{P}([U=k]) \\
&= \sum_{k=2}^{N} k(k-1)\, \mathbb{P}([U=k]) + \sum_{k=1}^{N} k\, \mathbb{P}([U=k])
\end{aligned}$$

On sait déjà que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}^{k} \mathbb{P}([U=k])$ converge et est de somme $\frac{1}{2}$, car l'espérance $\mathbb{E}(U)$ existe et vaut $\frac{1}{2}$.

De plus :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{N} k(k-1)\,\mathbb{P}([U=k]) &= \sum_{k=2}^{N} k(k-1)\,\frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{3^3}\sum_{k=2}^{N} k(k-1)\,\frac{1}{3^{k-2}} \\ &= \frac{2}{3^3}\sum_{k=2}^{N} k(k-1)\,\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}\end{aligned}$$

On reconnaît la somme partielle d'ordre N de la série géométrique dérivée seconde de raison $\frac{1}{3}$ (avec $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$), donc elle converge.

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } U \text{ admet une variance.}}$$

De plus :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U^2) &= \frac{2}{3^3}\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\,\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3^3}\,\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2^2}{3^3}\,\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} + \frac{1}{2} = \frac{\cancel{2^2}}{\cancel{3^3}}\,\frac{\cancel{3^3}}{2^{\cancel{3}}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\end{aligned}$$

Enfin, d'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(U) = \mathbb{E}(U^2) - \big(\mathbb{E}(U)\big)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(U) = \frac{3}{4}}$$

Commentaire

On pouvait résoudre cette question plu rapidement en remarquant que la v.a.r. $U+1$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$.

- En effet :
  - × $U(\Omega) = \mathbb{N}$. Donc $(U+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
  - × soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}([U+1=k]) = \mathbb{P}([U=k-1]) = \frac{2}{3^k} = \frac{1}{3^{k-1}} \times \frac{2}{3} = \left(1-\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{2}{3}$$

  On reconnaît une loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$. D'où : $U+1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{2}{3}\right)$.

- On en déduit l'espérance et la variance de U.
  - × Tout d'abord : $\mathbb{E}(U+1) = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$.
    Or, par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(U+1) = \mathbb{E}(U)+1$.
    D'où : $\mathbb{E}(U) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.
  - × Ensuite : $V(U+1) = \frac{1-\frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{1}{\cancel{3}}}{\frac{4}{3^{\cancel{2}}}} = \frac{3}{4}$.
    Par propriété de la variance : $V(U+1) = \mathbb{V}(U)$. D'où : $V(U) = \frac{3}{4}$.

□

3. a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V.

Démonstration.
Rappelons que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. On procède alors par disjonction de cas.
Soit $n \in X(\Omega) = \mathbb{N}$. Supposons que l'événement $[X = n]$ est réalisé.

- On a donc obtenu n Face avant le $2^{\text{ème}}$ Pile.
- On doit donc ensuite piocher parmi les boules numérotées de 0 à n. Dans ce cas, la v.a.r. U peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 et n.
- On en déduit que $V = X - U$ peut prendre toutes les valeurs entières entre $n - 0$ et $n - n$, c'est-à-dire toutes les valeurs entières entre 0 et n.

$\boxed{\text{Ceci étant valable pour tout } n \in X(\Omega) = \mathbb{N}, \text{ on en déduit : } V(\Omega) = \mathbb{N}.}$

Commentaire

On pouvait aussi démontrer que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ par double inclusion.

- Par définition des v.a.r. U et X : $\forall \omega \in \Omega$, $U(\omega) \leqslant X(\omega)$.
  Donc : $\forall \omega \in \Omega$, $V(\omega) = X(\omega) - U(\omega) \geqslant 0$.
  De plus, les v.a.r. X et U prennent des valeurs entières.
  On en déduit : $V(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  L'événement $[V = n]$ est réalisé par exemple si on obtient d'abord n Face, puis on pioche la boule numérotée 0.
  On a ainsi trouvé une réalisation de l'événement $[V = n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  On en déduit : $\mathbb{N} \subset V(\Omega)$.

Finalement : $V(\Omega) = \mathbb{N}$.

□

b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$.
Deux cas se présentent.

- Si $k \in [\![n+1, +\infty[\![$, alors : $\mathbb{P}_{[X=n]}([V = k]) = 0$.
  En effet, si l'événement $[X = n]$ est réalisé, alors la v.a.r. U peut prendre des valeurs entre 0 et n, et donc V ne peut prendre une valeur strictement supérieure à n.
- Si $k \in [\![0, n]\!]$, alors, d'après la question ***2.b)*** :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[X=n]}([V = k]) &= \frac{\mathbb{P}([X = n] \cap [V = k])}{\mathbb{P}([X = n])} = \frac{\mathbb{P}([X = n] \cap [X - U = k])}{\mathbb{P}([X = n])} \\
&= \frac{\mathbb{P}([X = n] \cap [U = n - k])}{\mathbb{P}([X = n])} = \frac{\cancel{\mathbb{P}([X = n])}\, \mathbb{P}_{[X=n]}([U = n - k])}{\cancel{\mathbb{P}([X = n])}} \\
&= \mathbb{P}_{[X=n]}([U = n - k]) = \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Finalement : } \forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}_{[X=n]}([V = k]) = \dfrac{1}{n+1} \quad \text{et} \\ \qquad \forall k \in [\![n+1, +\infty[\![,\ \mathbb{P}_{[X=n]}([V = k]) = 0. \end{array}}$$

□

c) En déduire la loi de V.

Démonstration.
On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V par rapport à $[X = n]$ est la même que la loi conditionnelle de U par rapport à $[X = n]$.

$$\boxed{\text{Donc, avec les mêmes calculs qu'à la question } \textbf{\textit{2.c)}}\text{, on obtient : } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([V = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}.}$$

☐

4. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

Démonstration.
On souhaite montrer dans cette question :

$$\forall (k, j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}([U = k] \cap [V = j]) = \mathbb{P}([U = k])\, \mathbb{P}([V = j])$$

Soit $(k, j) \in \mathbb{N}^2$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([U = k] \cap [V = j]) & = & \mathbb{P}([U = k] \cap [X - U = j]) & \\ & = & \mathbb{P}([U = k] \cap [X = k + j]) & \\ & = & \mathbb{P}([X = k + j])\, \mathbb{P}_{[X=k+j]}([U = k]) & \\ & = & \cancel{(k + j + 1)}\ \dfrac{4}{3^{k+j+2}} \times \dfrac{1}{\cancel{k + j + 1}} & \textit{(d'après les questions } \textbf{\textit{1.b)}} \textit{ et } \textbf{\textit{2.b)}}\textit{, car } k + j \geqslant k\textit{)} \\ & = & \dfrac{4}{3^{k+j+2}} & \end{array}$$

- Ensuite, d'après les questions ***2.c)*** et ***3.c)*** :

$$\mathbb{P}([U = k])\ \mathbb{P}([V = j]) \ = \ \frac{2}{3^{k+1}} \times \frac{2}{3^{j+1}} \ = \ \frac{4}{3^{k+j+2}}$$

On a donc bien : $\forall (k, j) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}([U = k] \cap [V = j]) \ = \ \mathbb{P}([U = k])\ \mathbb{P}([V = j])$.

$$\boxed{\text{On en déduit que les v.a.r. } U \text{ et } V \text{ sont indépendantes.}}$$

☐

5. Que vaut $\mathrm{Cov}(U, V)$? En déduire $\mathrm{Cov}(X, U)$?

Démonstration.

- Les v.a.r. U et V sont indépendantes d'après la question précédente.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Cov}(U, V) = 0}$$

Commentaire

Attention ! L'implication suivante n'est pas une équivalence :

$$X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Cov}(X, Y) = 0$$

- On calcule :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,U) &= \mathrm{Cov}(U+V,U) && \textit{(par définition de } V\textit{)} \\
&= \mathrm{Cov}(U,U)+\mathrm{Cov}(V,U) && \textit{(par linéarité à gauche de la covariance)} \\
&= \mathrm{Cov}(U,U)+\mathrm{Cov}(U,V) && \textit{(par symétrie de la covariance)} \\
&= \mathbb{V}(U)+0 && \textit{(par propriété de la covariance et d'après la question précédente)} \\
&= \frac{3}{4} && \textit{(d'après la question } \textbf{2.d)}\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,U)=\frac{3}{4}}$$

□

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0,1[$.

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose de la pièce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note X la v.a.r. prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la v.a.r. prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

6. Simulation informatique

a) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function x = simule_X()` qui simule la v.a.r. X.

Démonstration.

```
function x = simule_X()
    nbFace = 0
    nbPile = 0
    while nbPile < 2
        lancer = grand(1, 1, 'bin', 2/3)
        if lancer == 1 then
            nbPile = nbPile + 1
        else
            nbFace = nbFace + 1
        end
    end
    x = nbFace
endfunction
```

Détaillons ce programme.

- On s'intéresse au nombre de Pile et au nombre de Face obtenus dans l'expérience.
  On initialise donc ces deux variables.

```
    nbFace = 0
    nbPile = 0
```

- On veut ensuite simuler l'expérience décrite par l'énoncé.
  On veut donc simuler des lancers de pièces où la probabilité d'obtenir Pile est $\frac{2}{3}$ tant qu'on n'a pas obtenu le $2^{\text{ème}}$ Pile. On traduit cette condition avec une boucle `while` :

```
    while nbPile < 2
```

- Un lancer de pièce est une épreuve de Bernoulli de succès Pile.
  Ainsi on simule un lancer avec une v.a.r. , notée Y, de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{3}$.
  La v.a.r. Y prend la valeur 1 si et seulement si on obtient un Pile, et la valeur 0 sinon.
  On simule la v.a.r. Y dans la variable `lancer`.

```
        lancer = grand(1, 1, 'bin', 2/3)
```

- À chaque lancer, si la variable `lancer` vaut 1 (c'est-à-dire si on a obtenu Pile), alors on veut augmenter de 1 le nombre de Pile. Si la variable `lancer` vaut 0 (c'est-à-dire si on a obtenu Face), alors on veut augmenter de 1 le nombre de Face.

```
        if lancer == 1 then
            nbPile = nbPile + 1
        else
            nbFace = nbFace + 1
        end
```

- La boucle `while` s'arrête dès que `nbPile` vaut 2.
  La réalisation de X obtenue est alors stockée dans la variable `nbFace`.

```
    x = nbFace
```

Commentaire

De manière plus élégante, on aurait pu éviter la structure conditionnelle avec ce script :

```
function x = simule_X()
    nbFace = 0
    nbPile = 0
    while nbPile < 2
        lancer = grand(1, 1, 'bin', 2/3)
        nbPile = nbPile + lancer
        nbFace = nbFace + (1-lancer)
    end
    x = nbFace
endfunction
```

En effet, comme précisé précédemment :

× si `lancer` vaut 1, alors `nbPile` augmente de 1,

× si `lancer` vaut 0, alors `nbPile` n'augmente pas.

De même :

× si `lancer` vaut 1, alors `nbFace` n'augmente pas,

× si `lancer` vaut 0, alors `nbFace` augmente de 1.

On obtient bien :

```
        nbPile = nbPile + lancer
        nbFace = nbFace + (1-lancer)
```

Commentaire

Encore plus élégamment, on aurait pu aussi proposer le script suivant qui n'utilise pas de structure itérative :

```
function x = simule_X()
    PremierPile = grand(1, 1, 'geom', 2/3)
    DeuxiemePile = grand(1, 1, 'geom', 2/3)
    x = PremierPile + DeuxiemePile - 2
endfunction
```

On utilise ici :

× le fait que lors d'une succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, la loi de la v.a.r. associée au premier Pile est une loi géométrique (ici de paramètre $\frac{2}{3}$)

```
    PremierPile = grand(1, 1, 'geom', 2/3)
```

× le fait que les lancers sont indépendants. Donc la v.a.r. associée au deuxième Pile est indépendante de la v.a.r. associée au premier Pile.
Elle suit la même loi géométrique (de paramètre $\frac{2}{3}$).

```
    DeuxiemePile = grand(1, 1, 'geom', 2/3)
```

× le fait que le nombre de Face obtenus avant de deuxième Pile correspond au nombre total de lancers jusqu'au deuxième Pile (`PremierPile + DeuxiemePile`) auquel on retranche les deux lancers pour lesquels on a obtenu Pile.
On obtient :

```
    x = PremierPile + DeuxiemePile - 2
```

b) On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel p de $]0, 1[$, simule la variable aléatoire Y. Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```
function r = mystere(p)
    r = 0
    N = 10^4
    for k = 1:N
        x = simule_X()
        y = simule_Y(p)
        if x <= y then
            r = r + 1/N
        end
    end
endfunction
```

Démonstration.

- Cette fonction permet d'obtenir une approximation de la probabilité $\mathbb{P}([X \leqslant Y])$ en fonction du paramètre p.

- L'idée naturelle pour obtenir cette approximation est :
  × de simuler un grand nombre de fois ($N = 10^4$ est ce grand nombre) les v.a.r. X et Y.
  Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(x_1, \dots, x_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(X_1, \dots, X_N)$ de la v.a.r. X, et un N-uplet $(y_1, \dots, y_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(Y_1, \dots, Y_N)$ de la v.a.r. Y.
  × de compter le nombre de fois où $x_i \leqslant y_i$, pour $i \in [\![1, N]\!]$.
  Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :
  $$\frac{\text{nombre de fois où } x_i \leqslant y_i}{\text{taille de l'observation}} \simeq \mathbb{P}([X \leqslant Y])$$
- Dans la fonction, les valeurs $(x_1, \dots, x_N)$ et $(y_1, \dots, y_N)$ sont obtenues par des appels successifs (à l'aide d'une boucle `for`) aux fonctions `simule_X` et `simule_Y` et stockées les unes après les autres dans les variables `x` et `y`.

```
    for k = 1:N
        x = simule_X()
        y = simule_Y(p)
```

La variable `r` est alors mise à jour à chaque tour de boucle :

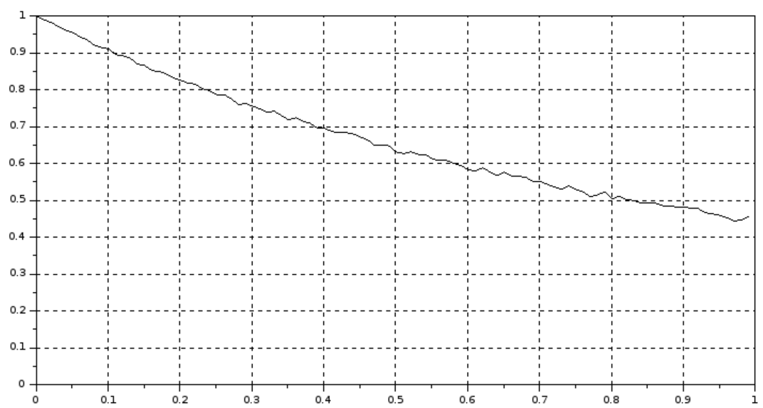
```
        if x <= y then
            r = r + 1/N
        end
```

Détaillons cette mise à jour :
× si `x` $\leqslant$ `y`, alors on effectue l'instruction `r = r + 1/N`.
Ainsi, à chaque fois que `x` $\leqslant$ `y`, la variable `r` vaut successivement : $\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{j}{N}$, où j est le nombre de fois, parmi les N observations, où `x` $\leqslant$ `y`.
× si `x` $>$ `y`, alors la variable `r` n'est pas mise à jour.
Cela signifie que la variable `r` compte le nombre de fois où `x` $\leqslant$ `y` et divise ce nombre par `N`.
Une fois cette boucle effectuée, la variable `r` contient donc l'approximation de $\mathbb{P}([X \leqslant Y])$ formulée par la LfGN.

> La fonction `mystere` renvoie une approximation de la probabilité $\mathbb{P}([X \leqslant Y])$ pour différentes valeurs de p.

☐

c) On trace, en fonction de p, une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour laquelle le jeu serait équilibré.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, le jeu est équilibré si les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner, autrement dit si la probabilité que le joueur A gagne vaut $\frac{1}{2}$.
- La probabilité que le joueur A gagne se lit sur l'axe des ordonnées du graphe.
  On constate qu'elle vaut $\frac{1}{2}$ pour une valeur de p à peu près égale à $0,82$.

$$\boxed{\text{On conjecture que la valeur de } p \text{ pour laquelle le jeu est équilibré est } 0,83.}$$

□

7. Étude de la variable aléatoire Y

On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B.

a) Reconnaître la loi de Z et préciser son (ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.

Démonstration.

- Pour le joueur B, l'expérience consiste en la succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de succès Pile, de probabilité p.
- La v.a.r. Z est la v.a.r. associée au rang d'obtention du premier Pile, donc du premier succès.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit : } Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p). \\ \mathbb{E}(Z) = \dfrac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Z) = \dfrac{1-p}{p^2}\end{array}}$$

□

b) Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.

Démonstration.

- Le joueur B arrête de jouer lorsqu'il obtient son premier Pile.
  Il a donc obtenu un nombre de Face égal à son nombre de lancers moins 1 (le dernier lancer pour lequel il a obtenu Pile).

$$\boxed{Y = Z - 1}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La v.a.r. } Y \text{ admet donc une espérance et une variance en tant que} \\ \text{transformée affine d'une v.a.r. qui en admet.}\end{array}}$$

- Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Y) \; = \; \mathbb{E}(Z-1) \; = \; \mathbb{E}(Z) - 1 \; = \; \frac{1}{p} - 1 \; = \; \frac{1-p}{p}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{1-p}{p}}$$

- Par propriété de la variance :

$$\mathbb{V}(Y) \; = \; \mathbb{V}(Z-1) \; = \; \mathbb{V}(Z) \; = \; \frac{1-p}{p^2}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(Y) = \frac{1-p}{p^2}}$$

□

c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y \geqslant n]) = (1-p)^n$.

Démonstration.

- On rappelle que $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Donc $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\text{Comme } Y = Z - 1, \text{ on a : } Y(\Omega) = \mathbb{N}.}$$

- Si $n = 0$, alors $[Y \geqslant 0] = \Omega$ car $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Donc :

$$\mathbb{P}([Y \geqslant 0]) \ = \ \mathbb{P}(\Omega) \ = \ 1 \ = \ (1-p)^0$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y \geqslant n]) &= \mathbb{P}([Z-1 \geqslant n]) \ = \ \mathbb{P}([Z \geqslant n+1]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([Z < n+1]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([Z \leqslant n]) \quad \textit{(car Z est à valeurs entières)} \end{aligned}$$

Or : $[Z \leqslant n] \ = \ \bigcup\limits_{k=1}^{n} [Z = k]$.
Les événements $[Z = 1]$, ..., $[Z = n]$ sont incompatibles. Donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z \leqslant n]) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([Z = k]) \ = \ \sum_{k=1}^{n} p\,(1-p)^{k-1} \\ &= p \sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} \ = \ p \sum_{k=0}^{n-1} (1-p)^k \\ &= p\, \frac{1-(1-p)^n}{\cancel{1} - (\cancel{1} - p)} \ = \ \cancel{p}\, \frac{1-(1-p)^n}{\cancel{p}} \\ &= 1 - (1-p)^n \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}([Y \geqslant n]) \ = \ \cancel{1} - \left(\cancel{1} - (1-p)^n\right) \ = \ (1-p)^n$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y \geqslant n]) = (1-p)^n.}$$

Commentaire

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On aurait aussi pu résoudre cette question en exprimant l'événement $[Y \geqslant n]$ en fonction des événements :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ F_i \ = \ \text{« obtenir Face au } i^{\text{ème}} \text{ lancer}$$

En effet, comme la v.a.r. Y est le nombre de Face obtenus avant l'obtention du premier Pile, on a :

$$[Y \geqslant n] \ = \ F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n \ = \ \bigcap_{i=1}^{n} F_i$$

Comme les lancers sont indépendants, on en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y \geqslant n]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) \ = \ \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(F_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} (1-p) \ = \ (1-p)^n \end{aligned}$$

□

8. a) Montrer : $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\, \mathbb{P}([Y \geqslant n])$.

Démonstration.
La famille $([X = n])_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X \leqslant Y]) & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n] \cap [X \leqslant Y]) & \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n] \cap [n \leqslant Y]) & \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\ \mathbb{P}([n \leqslant Y]) & \textit{(car les v.a.r. } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \end{array}$$

Les v.a.r. X et Y sont indépendantes, car les lancers du joueur A et ceux du joueur B sont indépendants.

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\ \mathbb{P}([Y \geqslant n]).}$$

□

b) Déduire des résultats précédents : $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \dfrac{4}{(2+p)^2}$.

Démonstration.
D'après les questions ***1.b)*** et ***7.b)*** et la question précédente :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X \leqslant Y]) & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\ \mathbb{P}([Y \geqslant n]) \ = \ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left((n+1)\ \dfrac{4}{3^{n+2}}\ (1-p)^n \right) \\ & = & \dfrac{4}{3^2} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left((n+1)\ \dfrac{1}{3^n}\ (1-p)^n \right) \ = \ \dfrac{4}{3^2} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\dfrac{1-p}{3} \right)^n \\ & = & \dfrac{4}{3^2} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n \left(\dfrac{1-p}{3} \right)^{n-1} \end{array}$$

On reconnaît la somme d'une série géométrique dérivée de raison $\dfrac{1-p}{3}$ (avec $\left|\dfrac{1-p}{3}\right| < 1$), donc elle converge bien.
On obtient :

$$\mathbb{P}([X \leqslant Y]) \ = \ \dfrac{4}{3^2}\ \dfrac{1}{\left(1 - \frac{1-p}{3}\right)^2} \ = \ \dfrac{4}{3^2}\ \dfrac{1}{\left(\frac{2+p}{3}\right)^2} \ = \ \dfrac{4}{\cancel{3^2}}\ \dfrac{\cancel{3^2}}{(2+p)^2} \ = \ \dfrac{4}{(2+p)^2}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \dfrac{4}{(2+p)^2}}$$

□

c) Déterminer la valeur de p pour lequel le jeu est équilibré.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, le jeu est équilibré si les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.
- Or le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui du joueur B, c'est-à-dire si l'événement $[X \leqslant Y]$ est réalisé.
  Sinon le joueur A perd.

- Donc le jeu est équilibré si $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \dfrac{1}{2}$. Or, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \frac{1}{2} \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2} \\
& \Leftrightarrow \quad 8 = (2+p)^2 \\
& \Leftrightarrow \quad \sqrt{8} = 2+p \qquad \textit{(car la fonction } x \mapsto x^2 \textit{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[\textit{ et } 2+p \geqslant 0\textit{)} \\
& \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{2} = 2+p \\
& \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{2} - 2 = p \\
& \Leftrightarrow \quad 2(\sqrt{2}-1) = p
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le jeu est équilibré si } p = 2(\sqrt{2}-1).}$$

Commentaire

On peut noter que $2(\sqrt{2}-1) \simeq 0,83$ (à 10^{-2} près).
On confirme donc bien la conjecture de la question ***6.c)***.

□