ECE2
Mathématiques

Colles - Semaine 11

Exercice 1
Une urne contient n boules noires (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et deux boules blanches. On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule, sans remise. On note :

× X la v.a.r. égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

× Y la v.a.r. égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la seconde boule blanche.

× Pour tout $i \in [\![1, n+2]\!]$, N_i (resp. B_i) l'événement « le $i$ème tirage amène une boule noire (resp. blanche) ».

1. ***a)*** Préciser $X(\Omega)$. Décrire, pour tout $k \in X(\Omega)$, l'événement $[X = k]$ à l'aide des événements N_i et B_i.

b) Montrer que pour tout $k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}$.

c) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

2. ***a)*** Déterminer $Y(\Omega)$.

b) Déterminer la loi jointe du couple (X, Y).

c) En déduire la loi de Y.

d) Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

3. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Commenter son signe.

Exercice 2
On considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par P_n l'événement « Pile apparaît au $n$ème lancer » et par F_n l'événement « Face apparaît au $n$ème lancer ».
Soit Y la v.a. désignant le rang du lancer où, pour la première fois, apparaît un Face précédé d'au moins deux Pile si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si cette configuration n'apparaît jamais.
On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On pose $c_1 = c_2 = 0$ et pour tout $n \geqslant 3$, $c_n = \mathbb{P}([Y = n])$. On note également :

$$\forall n \geqslant 3,\ B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n \quad \text{et} \quad U_n = \bigcup_{i=3}^{n} B_i$$

On pose enfin $u_1 = u_2 = 0$ et pour tout $n \geqslant 3$, $u_n = \mathbb{P}(U_n)$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$ est monotone et convergente.

2. ***a)*** Pour tout $n \geqslant 3$, calculer $\mathbb{P}(B_n)$.

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, les événements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.

c) Calculer les valeurs de u_3, u_4 et u_5.

3. Dans cette question, on suppose $n \geqslant 5$.

a) Comparer les événements $U_n \cap B_{n+1}$ et $U_{n-2} \cap B_{n+1}$. Préciser leurs probabilités respectives.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

d) Calculer $\mathbb{P}([Y = 0])$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = 1 - u_n$.

a) Trouver $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \beta v_{n+2} + \gamma v_{n+3}$.

b) Montrer que la série de terme général v_n est convergente et calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Exercice 3

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$. On dispose d'un paquet de n cartes C_1, C_2, …, C_n que l'on distribue intégralement, les unes après les autres entre n joueurs J_1, J_2, …, J_n selon le protocole suivant :

× la première carte C_1 est donnée à J_1 ;

× la deuxième carte C_2 est donnée de façon équiprobable entre J_1 et J_2 ;

× la troisième carte C_3 est donnée de façon équiprobable entre J_1, J_2 et J_3 ;

× et ainsi de suite, jusqu'à la dernière carte C_n qui est donc distribuée de façon équiprobable entre les joueurs J_1, …, J_n.

On suppose l'expérience modélisée sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de joueurs qui n'ont reçu aucune carte à la fin de la distribution.

1. Déterminer $X_n(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}([X_n = 0])$ et $\mathbb{P}([X_n = n-1])$.

2. Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note B_i la v.a.r. qui vaut 1 si J_i n'a reçu aucune carte à la fin de la distribution et vaut 0 sinon.
Déterminer la loi de B_i. Exprimer la v.a.r. X_n en fonction des v.a.r. B_i et en déduire l'espérance de X_n.

3. En faisant le moins de calculs possibles, donner la loi de X_4.

4. ***a)*** Montrer que pour i et j dans $[\![1, n]\!]$ tels que $i < j$, on a :

$$\mathbb{P}([B_i = 1]) \cap [B_j = 1]) = \frac{(i-1)(j-2)}{n(n-1)}$$

En déduire la covariance des v.a.r. B_j et B_j.

b) Montrer que $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{n+1}{12}$.