Annales

corrigées et commentées

Concours
2016 / 2017 / 2018

ECE

Maths

ECRICOME
EDHEC
EML
ESSEC I
ESSEC II
HEC

Arnaud Jobin
professeur en 2e année voie ECE au lycée Carnot (Paris).

Roxane Duroux
professeur en 2e année voie ECE à l'Institution des Chartreux (Lyon).

Benoît Koechlin
professeur retraité, ancien professeur en 2e année voie ECE au lycée Carnot (Paris).

ellipses

Collection

Annales

corrigées et commentées

Retrouvez tous les livres de la collection sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-026636

32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

www.editions-ellipses.fr

Table des matières

Session 2016

ECRICOME 2016 : le sujet

EXERCICE 1

Partie A

Pour tout couple de réels (x, y), on définit la matrice $M(x, y)$ par :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}$$

On appelle E l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où x et y décrivent $\mathbb{R}$:

$$E = \{M(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

On note $A = M(1, 0)$ et $B = M(0, 1)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   En déterminer une base et donner sa dimension.

2. Montrer que 1, 2 et 3 sont valeurs propres de A et déterminer les espaces propres associés.
   A est-elle diagonalisable ?

3. Déterminer une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\end{pmatrix}$, et telle que :

$$A = PD_AP^{-1}, \quad \text{où} \quad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Déterminer P^{-1} (faire figurer le détail des calculs sur la copie).

5. En notant X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs colonnes formant la matrice P, calculer BX_1, BX_2 et BX_3. En déduire l'existence d'une matrice diagonale D_B que l'on explicitera telle que :

$$B = PD_BP^{-1}$$

6. En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x, y)$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$M(x,y) = PD(x,y)P^{-1}$$

7. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) pour que $M(x, y)$ soit inversible.

8. Montrer que B^2 est un élément de E. La matrice A^2 est-elle aussi un élément de E ?

Partie B

On souhaite dans cette partie étudier les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les conditions initiales $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 4b_n - c_n \\ b_{n+1} = -4a_n - 5b_n + c_n \\ c_{n+1} = -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

9. Que vaut X_0 ?

10. Déterminer une matrice C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$X_{n+1} = CX_n$$

Déterminer ensuite deux réels x et y tels que $C = M(x, y)$.

11. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^n X_0$.

12. À l'aide des résultats de la partie A, exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

EXERCICE 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}$$

a) Étudier les variations de la fonction g_0, définie sur $[0, +\infty[$ par : $g_0(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$.
Préciser la limite de g_0 en $+\infty$, donner l'équation de la tangente en 0, et donner l'allure de la courbe représentative de g_0.

b) Pour $n \geqslant 1$, justifier que g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et montrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ g_n'(x) \geqslant 0 \iff n \geqslant 2\ln(1+x)$$

En déduire les variations de la fonction g_n lorsque $n \geqslant 1$.
Calculer soigneusement $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$.

c) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ qui vaut :

$$M_n = \left(\frac{n}{2\mathrm{e}}\right)^n$$

et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n$.

d) Montrer enfin que pour tout $n \geqslant 1$:

$$g_n(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t)dt$$

a) Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.

b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale I_n est convergente.

c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = (n+1)I_n$$

d) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{n!}\, g_n(x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une densité de probabilité.

On considère à présent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire réelle admettant f_n pour densité. On notera F_n la fonction de répartition de X_n.

b) La variable aléatoire X_n admet-elle une espérance ?

c) Que vaut $F_n(x)$ pour $x < 0$ et $n \in \mathbb{N}$?

d) Calculer $F_0(x)$ pour $x \geqslant 0$.

e) Soit $x \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$$

f) En déduire une expression de $F_n(x)$ pour $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ faisant intervenir une somme (on ne cherchera pas à calculer cette somme).

g) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

h) La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle en loi ?

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \ln(1 + X_n)$.

a) Justifier que Y_n est bien définie. Quelles sont les valeurs prises par Y_n ?

b) Justifier que Y_n admet une espérance et la calculer.

c) Justifier que Y_n admet une variance et la calculer.

d) On note H_n la fonction de répartition de Y_n. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = F_n(\mathrm{e}^x - 1)$$

e) Montrer que Y_n est une variable aléatoire à densité et donner une densité de Y_n.

f) Reconnaître la loi de Y_0. À l'aide de ce qui précède, déterminer le moment d'ordre k de Y_0 pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 3

Dans tout l'exercice, X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que les deux variables X et Y sont **échangeables** si :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \mathbb{P}([X=j] \cap [Y=i])$$

Résultats préliminaires

1. On suppose que X et Y sont deux variables indépendantes et de même loi.
Montrer que X et Y sont échangeables.

2. On suppose que X et Y sont échangeables.
Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([X=i]) = \mathbb{P}([Y=i])$$

Étude d'un exemple

Soient n, b et c trois entiers strictement positifs.
Une urne contient initialement n boules noires et b boules blanches. On effectue l'expérience suivante, en distinguant trois variantes.

- On pioche une boule dans l'urne.
  On définit X la variable aléatoire qui vaut 1 si cette boule est noire et 2 si elle est blanche.
- On replace la boule dans l'urne et :
  - ⋆ Variante 1 : on ajoute dans l'urne c boules de la même couleur que la boule qui vient d'être piochée.
  - ⋆ Variante 2 : on ajoute dans l'urne c boules de la couleur opposée à celle de la boule qui vient d'être piochée.
  - ⋆ Variante 3 : on n'ajoute pas de boule supplémentaire dans l'urne.
- On pioche à nouveau une boule dans l'urne.
  On définit Y la variable aléatoire qui vaut 1 si cette seconde boule piochée est noire et 2 si elle est blanche.

3. *a)* Compléter la fonction **Scilab** suivante, qui simule le tirage d'une boule dans une urne contenant b boules blanches et n boules noires et qui retourne 1 si la boule tirée est noire, et 2 si la boule tirée est blanche.

```
function res = tirage(b, n)
  r = rand()
  if ........... then
    res = 2
  else
    res = 1
  end
endfunction
```

b) Compléter la fonction suivante, qui effectue l'expérience étudiée avec une urne contenant initialement b boules blanches, n boules noires et qui ajoute éventuellement c boules après le premier tirage, selon le choix de la variante dont le numéro est `variante`.
Les paramètres de sortie sont :

- `x` : une simulation de la variable aléatoire X
- `y` : une simulation de la variable aléatoire Y

```
function [x, y] = experience (b, n, c, variante)
  x = tirage (b, n)
  if variante == 1 then
    if x == 1 then
      ...........
    else
      ...........
    end
  else if variante == 2 then
    ...........
    ...........
    ...........
    ...........
    ...........
  end
  y = tirage (b, n)
endfunction
```

c) Compléter la fonction suivante, qui simule l'expérience N fois (avec $N \in \mathbb{N}^*$), et qui estime la loi de X, la loi de Y et la loi du couple (X, Y).
Les paramètres de sortie sont :

- `loiX` : un tableau unidimensionnel à deux éléments qui estime $[\ \mathbb{P}([X=1]),\ \mathbb{P}([X=2])\ ]$
- `loiY` : un tableau unidimensionnel à deux éléments qui estime $[\ \mathbb{P}([Y=1]),\ \mathbb{P}([Y=2])\ ]$
- `loiXY` : un tableau bidimensionnel à deux lignes et deux colonnes qui estime :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) & \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=2]) \\ \mathbb{P}([X=2]\cap[Y=2]) & \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=2]) \end{bmatrix}$$

```
function [loiX, loiY, loiXY] = estimation(b, n, c, variante, N)
  loiX = [0, 0]
  loiY = [0, 0]
  loiXY = [0, 0 ; 0, 0]
  for k = 1 : N
    [x , y] = experience(b, n, c, variante)
    loiX(x) = loiX(x) + 1
    ...........
    ...........
  end
  loiX = loiX / N
  loiY = loiY / N
  loiXY = loiXY / N
endfunction
```

9782340-026636_001_784.indd 9 30/07/2018 09:51

d) On exécute notre fonction précédente avec $b = 1$, $n = 2$, $c = 1$, $N = 10000$ et dans chacune des variantes. On obtient :

```
--> [loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,1,10000)
    loiXY =
        0.49837     0.16785
        0.16697     0.16681
    loiY =
        0.66534     0.33466
    loiX =
        0.66622     0.33378

--> [loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,2,10000)
    loiXY =
        0.33258     0.33286
        0.25031     0.08425
    loiY =
        0.58289     0.41711
    loiX =
        0.66544     0.33456

--> [loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,3,10000)
    loiXY =
        0.44466     0.22098
        0.22312     0.11124
    loiY =
        0.66778     0.33222
    loiX =
        0.66564     0.33436
```

En étudiant ces résultats, émettre des conjectures quant à l'indépendance et l'échangeabilité de X et Y dans chacune des variantes.
On donne les valeurs numériques approchées suivantes :

$$\begin{gathered}
0.33 \times 0.33 \simeq 0.11 \\
0.33 \times 0.41 \simeq 0.14 \\
0.33 \times 0.58 \simeq 0.19 \\
0.33 \times 0.66 \simeq 0.22 \\
0.41 \times 0.66 \simeq 0.27 \\
0.58 \times 0.66 \simeq 0.38 \\
0.66 \times 0.66 \simeq 0.44
\end{gathered}$$

4. On se place dans cette question dans le cadre de la variante 1.

a) Donner la loi de X.

b) Déterminer la loi du couple (X, Y).

c) Déterminer la loi de Y.

d) Montrer que X et Y sont échangeables mais ne sont pas indépendantes.

ECRICOME 2016 : le corrigé

EXERCICE 1

Partie A

Pour tout couple de réels (x, y), on définit la matrice $M(x, y)$ par :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}$$

On appelle E l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où x et y décrivent $\mathbb{R}$:

$$E = \{M(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

On note $A = M(1,0)$ et $B = M(0,1)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
En déterminer une base et donner sa dimension.

Démonstration.

- Par définition de E, on a :

$$\begin{array}{rcl} E & = & \{M(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\[6pt] & = & \left\{\begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} \\[6pt] & = & \left\{x \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} \\[6pt] & = & \{x \cdot M(1,0) + y \cdot M(0,1) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\[6pt] & = & \{x \cdot A + y \cdot B \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\[6pt] & = & \mathrm{Vect}\,(A,B) \end{array}$$

  De plus, $(A, B) \in (\mathscr{M}_3(\mathbb{R}))^2$.

$$\boxed{\text{Donc } E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$$

- La famille (A, B) :
  - × engendre E (d'après le point précédent),
  - × est libre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, car elle est constituée de 2 matrices non proportionnelles.

$$\boxed{\text{D'où } (A,B) \text{ est une base de } E.}$$

- Déterminons la dimension de E.

$$\boxed{\dim(E) = \mathrm{Card}((A,B)) = 2}$$

Commentaire

Deux méthodes sont à disposition pour montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E.

- Utiliser la définition d'un sous-espace vectoriel de E :
  1. Montrer que $F \subset E$.
  2. Montrer que $0_E \in F$.
  3. Montrer que :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (u_1, u_2) \in F^2, \quad \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 \in F$$

- Montrer que F s'écrit comme un sous-espace vectoriel engendré par une famille d'éléments de E (c'est la méthode employée dans cette question).

On privilégiera la seconde méthode dès que possible. En particulier, si l'énoncé demande une base de F, il est certain qu'il faut exprimer F comme un sous-espace vectoriel engendré par une famille de E. Par défaut (et par défaut seulement), on utilisera la définition d'un sous-espace vectoriel.

□

2. Montrer que 1, 2 et 3 sont valeurs propres de A et déterminer les espaces propres associés. A est-elle diagonalisable ?

Démonstration.

- Déterminons $E_1(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (A - 1 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_1(A) & \iff & (A - 1 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[1ex]
& \iff & \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[1ex]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\[1ex]
& \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3}{\overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ -x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ & & 2y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\[1ex]
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & 2y & - & z & = & 0 \\ & & 2y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\[1ex]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & 2y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\[1ex]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & -z \\ & & 2y & = & z \end{array} \right. \\[1ex]
& \overset{L_1 \leftarrow 2 L_1 + L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & & & = & -z \\ & & 2y & = & z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -\frac{1}{2}\, z \\ y & = & \frac{1}{2}\, z \end{array} \right.
\end{array}$$

Finalement, on obtient l'expression de $E_1(A)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl} E_1(A) & = & \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -\dfrac{1}{2}\, z \text{ et } y = \dfrac{1}{2}\, z\right\} \\ & = & \left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\, z \\ \frac{1}{2}\, z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\right\} \ = \ \left\{z \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\right\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

Comme $E_1(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$, 1 est bien valeur propre de A, d'espace propre associé $E_1(A)$.

$$\boxed{E_1(A) \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)}$$

- Déterminons $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (A - 2 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} X \in E_2(A) & \iff & (A - 2 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right. \\ & \overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right. \\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & -2z \\ & & 4y & = & 3z \end{array}\right. \\ & \overset{L_1 \leftarrow 2\, L_1 + L_2}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & & & = & -z \\ & & 4y & = & 3z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & -\frac{1}{2}\, z \\ y & = & \frac{3}{4}\, z \end{array}\right. \end{array}$$

Finalement, on obtient l'expression de $E_2(A)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl} E_2(A) & = & \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -\dfrac{1}{2}\, z \text{ et } y = \dfrac{3}{4}\, z\right\} \\ & = & \left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\, z \\ \frac{3}{4}\, z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\right\} \ = \ \left\{z \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\right\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

Comme $E_2(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$, 2 est bien valeur propre de A, d'espace propre associé $E_2(A)$.

$$\boxed{E_2(A) \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right) \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)}$$

- Déterminons $E_3(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (A - 3 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_3(A) & \Longleftrightarrow & (A - 3 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 4z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{4} L_3}{\overset{L_1 \leftarrow -\frac{1}{2} L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -x & + & y & = & 2z \\ & & y & = & z \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -x & & & = & z \\ & & y & = & z \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -z \\ y & = & z \end{array} \right.
\end{array}$$

  Finalement, on obtient l'expression de $E_3(A)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl}
E_3(A) & = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \text{ et } y = z\} \\
& = & \{\begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} \ = \ \{z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

  Comme $E_3(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$, 3 est bien valeur propre de A, d'espace propre associé $E_3(A)$.

$$\boxed{E_3(A) \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$$

Commentaire

Il est important de lire l'énoncé de ce type de questions en entier pour choisir une méthode de résolution. En effet :

× si l'énoncé demande simplement de montrer qu'un réel λ est valeur propre d'une matrice A, alors on vérifiera $\mathrm{rg}(A - \lambda\, I_3) < 3$ pour ce réel λ particulier.
(ou $\det(A - \lambda\, I_2) = 0_{\mathbb{R}}$ *si A est une matrice d'ordre 2)*

× si l'énoncé demande de montrer qu'un réel λ est valeur propre d'une matrice A **et** de déterminer le sous-espace propre associé, alors on détermine directement $E_\lambda(A)$ et comme $E_\lambda(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ alors $E_\lambda(A)$ est bien le sous-espace propre associé à la valeur propre λ.

- On sait que :
  - × $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$,
  - × A possède 3 valeurs propres **distinctes**.

$$\boxed{\text{Donc } A \text{ est diagonalisable.}}$$

Commentaire

- On aurait aussi pu justifier la diagonalisabilité de A d'une autre façon.
  Détaillons cette manière de procéder. On sait que :
  - × $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$
  - × $\dim(E_1(A)) + \dim(E_2(A)) + \dim(E_3(A)) = 3$

  Donc A est diagonalisable.
- Pour pouvoir rédiger ainsi, il faut déterminer au préalable les dimensions et donc une base de chacun des 3 sous-espaces propres de A.
  Par exemple, pour $E_1(A)$, on rédigerait de la manière suivante.
  La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$:
  - × engendre $E_1(A)$,
  - × est libre dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, car elle est constituée d'un unique vecteur non nul.

  C'est donc une base de E.
  D'où $\dim(E_1(A)) = \text{Card}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)\right) = 1$.

□

3. Déterminer une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et telle que :

$$A = PD_AP^{-1}, \quad \text{où} \quad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Démonstration.
D'après la question ***2.***, la matrice A est diagonalisable.
Il existe donc une matrice P inversible et une matrice D_A diagonale telles que $A = PD_AP^{-1}$.
Plus précisément, la matrice P est obtenue par concaténation de bases des sous-espaces propres de A et la matrice D_A est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A (dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres).
Comme $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ sont des bases respectives de $E_1(A)$, $E_2(A)$ et $E_3(A)$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } A = PD_AP^{-1}.}$$

□

4. Déterminer P^{-1} (faire figurer le détail des calculs sur la copie).

Démonstration.
On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_1 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. On retrouve ainsi que P est inversible.

On effectue l'opération $\left\{ \; L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ \; L_1 \leftarrow L_1 + 2\,L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{Finalement } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

5. En notant X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs colonnes formant la matrice P, calculer BX_1, BX_2 et BX_3. En déduire l'existence d'une matrice diagonale D_B que l'on explicitera telle que :

$$B = PD_BP^{-1}$$

Démonstration.

- On a : $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. D'où : $BX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot X_1$.

- On a : $X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. D'où : $BX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = -1 \cdot X_2$.

- On a : $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. D'où : $BX_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot X_3$.

$$\boxed{\text{Finalement, } BX_1 = 0 \cdot X_1,\ BX_2 = -1 \cdot X_2 \text{ et } BX_3 = -1 \cdot X_3.}$$

- D'après les calculs précédents : $X_1 \in E_0(B)$ et $(X_2, X_3) \in (E_{-1}(B))^2$. Or :
  × (X_1) est une famille libre de $E_0(B)$, car elle est constituée d'une unique vecteur non nul,
  × (X_2, X_3) est une famille libre de $E_{-1}(B)$, car elle est constituée de 2 vecteurs non colinéaires.
  La famille (X_1, X_2, X_3) est la concaténation de 2 familles libres de vecteurs propres associées à des valeurs propres **distinctes**.

  $$\boxed{\text{Ainsi, la famille } (X_1, X_2, X_3) \text{ est libre.}}$$

  On obtient alors :
  × la famille (X_1, X_2, X_3) est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
  × $\text{Card}\,((X_1, X_2, X_3)) = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$

  $$\boxed{\text{Donc } (X_1, X_2, X_3) \text{ est une base de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

- La famille (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de B.
  La matrice B est donc diagonalisable dans cette base.
  On en déduit que $B = PD_BP^{-1}$ où P est la matrice obtenue par concaténation des vecteurs X_1, X_2 et X_3 de la base et D_B est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de la matrice B (dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres).

  $$\boxed{\text{Plus précisément : } B = PD_BP^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}.}$$

□

6. En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x, y)$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$M(x, y) = PD(x, y)P^{-1}$$

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} M(x,y) &= x \cdot A + y \cdot B \\ &= x \cdot PD_AP^{-1} + y \cdot PD_BP^{-1} && \textit{(d'après les questions } \textbf{\textit{3.}} \textit{ et } \textbf{\textit{5.}}\textit{)} \\ &= P(x \cdot D_A + y \cdot D_B)P^{-1} \\ &= P\left(x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right)P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x-y & 0 \\ 0 & 0 & 3x-y \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= PD(x,y)P^{-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ M(x,y) = PD(x,y)P^{-1}, \text{ où } D(x,y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x-y & 0 \\ 0 & 0 & 3x-y \end{pmatrix}}$$

□

7. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) pour que $M(x, y)$ soit inversible.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- Commençons par démontrer que :

$$M(x, y) \text{ est inversible } \Leftrightarrow D(x, y) \text{ est inversible}$$

($\Rightarrow$) Supposons que la matrice $M(x, y)$ est inversible.
On a l'égalité suivante : $D(x, y) = P^{-1}M(x, y)P$.
Ainsi $D(x, y)$ est inversible comme produit de trois matrices inversibles.

($\Leftarrow$) De même, si $D(x, y)$ est inversible, alors $M(x, y) = PD(x, y)P^{-1}$.

$$\boxed{M(x, y) \text{ est inversible si et seulement si } D(x, y) \text{ est inversible.}}$$

- On en déduit alors :

$$\begin{aligned} M(x,y) \text{ est inversible } &\Leftrightarrow D(x,y) \text{ est inversible} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & \neq & 0 \\ 2x - y & \neq & 0 \\ 3x - y & \neq & 0 \end{array} \right. \quad \textit{(car } D(x,y) \textit{ est une matrice diagonale)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ M(x, y) \text{ est inversible si et seulement si } \left\{ \begin{array}{rcl} x & \neq & 0 \\ 2x - y & \neq & 0 \\ 3x - y & \neq & 0 \end{array} \right. .}$$

□

8. Montrer que B^2 est un élément de E. La matrice A^2 est-elle aussi un élément de E ?

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = -B$$

$$\boxed{\text{Or } B \in E. \text{ Donc } B^2 = -B \in E.}$$

- Par ailleurs :

$$A^2 = (PD_AP^{-1})^2 = PD_A\cancel{P^{-1}} \times \cancel{P}D_AP^{-1} = P(D_A)^2P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}P^{-1}$$

Pour savoir si $A^2 \in E$, on cherche à savoir s'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = D(x, y)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = D(x,y) \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x-y & 0 \\ 0 & 0 & 3x-y \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & 1 \\ 2x & - & y & = & 4 \\ 3x & - & y & = & 9 \end{array} \right. \\ &\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & 1 \\ & - & y & = & 2 \\ & - & y & = & 6 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ceci est impossible, donc } A^2 \notin E.}$$

□

Partie B

On souhaite dans cette partie étudier les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les conditions initiales $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} a_{n+1} & = & 3a_n & + & 4b_n & - & c_n \\ b_{n+1} & = & -4a_n & - & 5b_n & + & c_n \\ c_{n+1} & = & -6a_n & - & 8b_n & + & 2c_n \end{array}\right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

9. Que vaut X_0 ?

Démonstration.

$$\boxed{X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

□

10. Déterminer une matrice C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$X_{n+1} = CX_n$$

Déterminer ensuite deux réels x et y tels que $C = M(x, y)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Notons $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$. Alors :

$$CX_n = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_n + 4b_n - c_n \\ -4a_n - 5b_n + c_n \\ -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

$$\boxed{\text{On a bien trouvé } C \text{ tel que : } \forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = C\,X_n.}$$

- On cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $C = M(x, y)$.

$$C = M(x,y) \iff \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & & & = & 3 \\ -2x & + & 2y & = & 4 \\ 2x & - & y & = & -1 \\ -x & - & y & = & -4 \\ 4x & - & 3y & = & -5 \\ -2x & + & y & = & 1 \\ & - & 2y & = & -6 \\ 4x & - & 4y & = & -8 \\ -x & + & y & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Finalement : } C = M(1,3)}$$

□

11. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^n X_0$.

Démonstration.
Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n)$: $X_n = C^n X_0$.

- **Initialisation** :
  $C^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* : $X_{n+1} = C^{n+1} X_0$).

$$\begin{array}{rcll} X_{n+1} & = & C\,X_n & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{10}}\textit{)} \\ & = & C \times (C^n X_0) & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & C^{n+1} X_0 & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ X_n = C^n X_0.}$$

□

12. À l'aide des résultats de la partie A, exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $C = M(1,3)$. Donc, d'après la question ***6.*** :

$$C = P\,D(1,3)\,P^{-1}$$

Donc, par récurrence immédiate :

$$C^n = P\,(D(1,3))^n\,P^{-1}$$

- Or, comme $n \geqslant 1$: $(D(1,3))^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc :

$$\begin{array}{rcl} C^n & = & P\,(D(1,3))^n\,P^{-1} \\ & = & P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ (-1)^n & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 1-2(-1)^n & 2-2(-1)^n & -1 \\ -1+3(-1)^n & -2+3(-1)^n & 1 \\ -2+4(-1)^n & -4+4(-1)^n & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Enfin :

$$X_n = C^n X_0 = \begin{pmatrix} 1-2(-1)^n & 2-2(-1)^n & -1 \\ -1+3(-1)^n & -2+3(-1)^n & 1 \\ -2+4(-1)^n & -4+4(-1)^n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2(-1)^n \\ -1+3(-1)^n \\ -2+4(-1)^n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Par définition de } (X_n)_{n\in\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}^*, \left\{ \begin{array}{rcl} a_n & = & 1-2(-1)^n \\ b_n & = & -1+3(-1)^n \\ c_n & = & -2+4(-1)^n \end{array} \right. \text{ et pour } n = 0 : X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

□

EXERCICE 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}$$

a) Étudier les variations de la fonction g_0, définie sur $[0, +\infty[$ par : $g_0(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$.
Préciser la limite de g_0 en $+\infty$, donner l'équation de la tangente en 0, et donner l'allure de la courbe représentative de g_0.

Démonstration.

- La fonction g_0 est dérivable sur $[0, +\infty[$ car elle est l'inverse de la fonction $x \mapsto (1+x)^2$ dérivable sur $[0, +\infty[$ et qui ne s'annule pas sur cet intervalle ($\forall x \in [0, +\infty[$, $(1+x)^2 \neq 0$).
- Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$g_0'(x) = -2\,\frac{1}{(1+x)^3} < 0$$

Donc la fonction g_0 est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Commentaire

Notons que, pour dériver g_0, on utilise bien ici la formule de dérivation de l'inverse d'une fonction (et non la formule de dérivation d'un quotient).

- Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} (1+x)^2 = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(1+x)^2} = 0$. D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} g_0(x) = 0$.
- On obtient finalement le tableau de variations suivant :

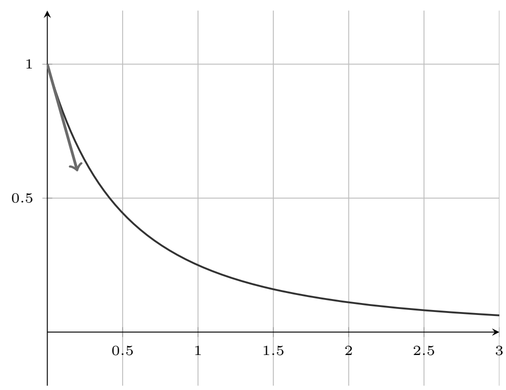
x	0 $\qquad$ $+\infty$
Signe de $g_0'(x)$	$-$
Variations de g_0	$1 \searrow 0$

- L'équation de la tangente à g_0 en 0 est :

$$y = g_0(0) + g_0'(0)(x - 0)$$

$$\boxed{\text{L'équation de la tangente à } g_0 \text{ en } 0 \text{ est : } y = -2x + 1.}$$

- On obtient la courbe représentative de g_0.



□

b) Pour $n \geqslant 1$, justifier que g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et montrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \ g_n'(x) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ n \geqslant 2\ln(1+x)$$

En déduire les variations de la fonction g_n lorsque $n \geqslant 1$.
Calculer soigneusement $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x)$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 1$.

- La fonction g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ car elle est le quotient de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas ($\forall x \in [0, +\infty[$, $(1+x)^2 \neq 0$).
- Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= \frac{n \dfrac{(\ln(1+x))^{n-1}}{\cancel{1+x}}\,(1+x)^{\cancel{2}} - 2(1+x)\,(\ln(1+x))^n}{(1+x)^4} \\ &= \frac{n\,(1+x)(\ln(1+x))^{n-1} - 2(1+x)(\ln(1+x))^n}{(1+x)^7} \\ &= \frac{(1+x)(\ln(1+x))^{n-1}\,(n - 2\ln(1+x))}{(1+x)^7} \end{aligned}$$

Comme $x \geqslant 0$, on a :

$$1 + x \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \ln(1+x) \geqslant 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{On obtient alors : } \forall x \in [0, +\infty[, \\ g_n'(x) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ n - 2\ln(1+x) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ n \geqslant 2\ln(1+x). \end{array}}$$

- Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} g_n'(x) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ n \geqslant 2\ln(1+x) \ &\Leftrightarrow \ \frac{n}{2} \geqslant \ln(1+x) \\ &\Leftrightarrow \ e^{\frac{n}{2}} \geqslant 1 + x \qquad \textit{(car } x \mapsto e^x \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \ e^{\frac{n}{2}} - 1 \geqslant x \end{aligned}$$

Or : $\dfrac{n}{2} \geqslant 0$. Donc, par croissance de $x \mapsto e^x$: $e^{\frac{n}{2}} \geqslant e^0 = 1$ et $e^{\frac{n}{2}} - 1 \geqslant 0$.

On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0		$e^{\frac{n}{2}} - 1$		$+\infty$
Signe de $g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g_n	0	$\nearrow$	$\left(\dfrac{n}{2e}\right)^n$	$\searrow$	0

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - Tout d'abord :

$$g_n\left(e^{\frac{n}{2}} - 1\right) = \frac{\left(\ln\left(\cancel{1} + e^{\frac{n}{2}} - \cancel{1}\right)\right)^n}{\left(\cancel{1} + e^{\frac{n}{2}} - \cancel{1}\right)^2} = \frac{\left(\ln\left(e^{\frac{n}{2}}\right)\right)^n}{\left(e^{\frac{n}{2}}\right)^2} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{e^{\cancel{2}\frac{n}{\cancel{2}}}} = \left(\frac{n}{2}\right)^n \frac{1}{e^n} = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$$

- Et :
$$g_n(0) = \frac{(\ln(1+0))^n}{(1+0)^2} = \frac{(\ln(1))^n}{1^2} = 0$$

- Enfin : $\lim\limits_{x \to +\infty} (1+x) = +\infty$.

Et : $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{(\ln(y))^n}{y^2} = 0$, par croissances comparées.

$$\boxed{\text{Finalement, par composition de fonctions, } \lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x) = 0.}$$

Commentaire

Le calcul de $g_n\left(e^{\frac{n}{2}} - 1\right)$ n'était pas indispensable dans cette question.

$\square$

c) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ qui vaut :
$$M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$$
et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} M_n$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 1$.

- La fonction g_n est :
  - × croissante sur l'intervalle $\left[0, e^{\frac{n}{2}} - 1\right]$,
  - × décroissante sur l'intervalle $\left[e^{\frac{n}{2}} - 1, +\infty\right[$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Sur } [0, +\infty[\text{, La fonction } g_n \text{ admet un maximum } M_n \text{ en } e^{\frac{n}{2}} - 1 \text{ et,} \\ \text{d'après la question } \textbf{\textit{1.b)}}\text{, } M_n = \left(\dfrac{n}{2e}\right)^n\end{array}}$$

Commentaire

Bien sûr, si le calcul de $g_n\left(e^{\frac{n}{2}} - 1\right)$ n'a pas été effectué à la question précédente, il est obligatoire ici.

- On remarque :
$$M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(\frac{n}{2e}\right)\right)$$

Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(\dfrac{n}{2e}\right) = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \exp\left(n \ln\left(\dfrac{n}{2e}\right)\right) = +\infty$.

$$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} M_n = +\infty}$$

$\square$

d) Montrer enfin que pour tout $n \geqslant 1$:

$$g_n(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 1$.

- Tout d'abord, pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$\frac{g_n(x)}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} \ = \ x^{\frac{3}{2}}\ g_n(x) \ = \ x^{\frac{3}{2}} \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}$$

- En posant $y = 1 + x$, on a :

$$x^{\frac{3}{2}} g_n(x) \ = \ x^{\frac{3}{2}} \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} \ = \ (y-1)^{\frac{3}{2}} \frac{(\ln(y))^n}{y^2}$$

Or :

$$(y-1)^{\frac{3}{2}} \frac{(\ln(y))^n}{y^2} \underset{y\to+\infty}{\sim} y^{\frac{3}{2}} \frac{(\ln(y))^n}{y^2} = \frac{(\ln(y))^n}{y^{\frac{1}{2}}}$$

De plus, par croissances comparées : $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{(\ln(y))^n}{y^{\frac{1}{2}}} = 0$. Donc : $\lim\limits_{y\to+\infty} (y-1)^{\frac{3}{2}} \dfrac{(\ln(y))^n}{y^2} = 0$.

- Finalement :
  × $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+x) = +\infty$,
  × $\lim\limits_{y\to+\infty} (y-1)^{\frac{3}{2}} \dfrac{(\ln(y))^n}{y^2} = 0$.

  On en déduit, par composition de fonctions : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}} g_n(x) = 0$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ g_n(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)}$$

□

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t)dt$$

a) Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.

Démonstration.

$$I_0 = \int_0^{+\infty} g_0(t)\ dt$$

- La fonction g_0 est continue sur $[0, +\infty[$.
- Soit $A \in [0, +\infty[$.

$$\int_0^A g_0(t)\ dt = \int_0^A \frac{1}{(1+t)^2}\ dt = \left[-\frac{1}{1+t} \right]_0^A = -\frac{1}{1+A} + 1$$

Or $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{1}{1+A} = 0$.

$$\boxed{\text{Donc l'intégrale } I_0 \text{ converge et vaut } 1.}$$

Commentaire

L'énoncé demande ici de démontrer la convergence de I_0 `ET` de calculer sa valeur.
Dans ce cas, on se lancera directement dans le calcul de l'intégrale.

□

b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale I_n est convergente.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 1$.

- La fonction g_n est continue sur $[0, +\infty[$.
- $\times$ $g_n(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$

  $\times$ $\forall x \in [1, +\infty[$, $g_n(x) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \geqslant 0$

  $\times$ L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$, d'exposant $\dfrac{3}{2}$, donc elle converge.

  Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_n(x)\, dx$ converge.
- De plus, g_n est continue sur le segment $[0, 1]$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\, dx$ est bien définie.

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } n \geqslant 1,\ I_n = \int_0^{+\infty} g_n(x)\, dx \text{ converge.}}$$

Commentaire

Il est encore une fois important de bien lire la question : l'énoncé demande cette fois simplement de montrer la convergence de I_n (sans la calculer).
Dans ce cas, on pensera en priorité à l'utilisation d'une critère de comparaison / équivalence / négligeabilité.

□

c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = (n+1) I_n$$

Démonstration.
Soit $A \geqslant 0$. On effectue une intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} u(x) & = & (\ln(1+x))^{n+1} & u'(x) & = & (n+1)\dfrac{(\ln(1+x))^n}{1+x} \\[2ex] v'(x) & = & \dfrac{1}{(1+x)^2} & v(x) & = & -\dfrac{1}{1+x} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^A g_{n+1}(x)\, dx &= \int_0^A \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\, dx \\ &= \left[-\frac{(\ln(1+x))^{n+1}}{1+x} \right]_0^A + (n+1) \int_0^A \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\, dx \\ &= -\frac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} + (n+1) \int_0^A \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\, dx \\ &= -\frac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} + (n+1) \int_0^A g_n(x)\, dx \end{aligned}$$

Or, par croissances comparées : $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} = 0$.

De plus l'intégrale I_n converge d'après la question ***2.b)***. D'où :

$$\int_0^{+\infty} g_{n+1}(x)\ dx = 0 + (n+1)\int_0^{+\infty} g_n(x)\ dx$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1} = (n+1)I_n.}$$ □

d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : I_n = n!$.

- **Initialisation** :
  D'après la question ***2.a)***, $I_0 = 1 = 0!$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire : $I_{n+1} = (n+1)!$).

$$\begin{array}{rcll} I_{n+1} & = & (n+1)I_n & \textit{(d'après la question 2.c)} \\ & = & (n+1)\times n! & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & (n+1)! & \end{array}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!}$$ □

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{n!}\ g_n(x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une densité de probabilité.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  × Si $x < 0$: $f_n(x) = 0$. Donc : $f_n(x) \geqslant 0$.
  × Si $x \geqslant 0$. D'après le tableau de variations dressé en question ***1.b)***, on a : $f_n(x) = \dfrac{1}{n!}g_n(x) \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{D'où : } \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) \geqslant 0.}$$

- × La fonction f_n est continue sur $]-\infty, 0[$ car elle est constante sur cet intervalle.
  × La fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$ car la fonction g_n l'est.

$$\boxed{\text{Ainsi } f_n \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

Commentaire

La continuité sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points suffit ici. Mais rien n'interdit d'utiliser l'étude de g_n pour conclure quant à la continuité de f_n en 0.

- Montrons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\ dt$ converge et vaut 1.

  Tout d'abord : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\ dt = \int_{0}^{+\infty} f_n(t)\ dt$, car f_n est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.

  De plus, comme l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g_n(t)\ dt$ converge :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f_n(t)\ dt &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{n!} g_n(t)\ dt \ = \ \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} g_n(t)\ dt \\ &= \frac{1}{n!}\, I_n \ = \ \frac{1}{\cancel{n!}}\, \cancel{n!} \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.d)}}\textit{)} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\ dt \text{ converge et vaut 1.}}$$

Finalement, on a montré :
- $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) \geqslant 0$,
- f_n est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0,
- L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\ dt$ converge et vaut 1.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est une densité de probabilité.}}$$ □

On considère à présent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire réelle admettant f_n pour densité. On notera F_n la fonction de répartition de X_n.

b) La variable aléatoire X_n admet-elle une espérance ?

Démonstration.

- La v.a.r. X_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_n(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour les calculs de moments du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m\, f_n(t)\ dt$.
- La fonction f_n est nulle en dehors de $[0, +\infty[$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_n(t)\ dt = \int_0^{+\infty} t\, f_n(t)\ dt$$

- × Démontrons : $\dfrac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\,(t\, f_n(t))$.

$$\frac{\frac{1}{t}}{t\, f_n(t)} = \frac{\frac{1}{t}}{t\, g_n(t)} = \frac{(1+t)^2}{t^2\,(\ln(1+t))^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\cancel{t^2}}{\cancel{t^2}\,(\ln(1+t))^n} = \frac{1}{(\ln(1+t))^n}$$

  Or : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{(\ln(1+t))^n} = 0$. Donc : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{t}}{t\, f_n(t)} = 0$.

  Ainsi : $\dfrac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\,(t\, f_n(t))$.

× Pour tout $t \in [1, +\infty[$: $t\, f_n(t) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t} \geqslant 0$.

× L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$, d'exposant 1, donc elle diverge.

Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\, f_n(t)\, dt$ diverge.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_n(t)\, dt$ diverge.

$$\boxed{X_n \text{ n'admet pas d'espérance.}}$$

Commentaire

Il y a plusieurs réflexes à acquérir pour ce type de questions :

1) l'énoncé demande de déterminer l'existence de $\mathbb{E}(X_n)$ `UNIQUEMENT`, donc on privilégiera l'utilisation d'un critère de comparaison / équivalence / négligeabilité.

2) l'énoncé ne demande pas « Montrer que X_n admet une espérance », mais « X_n admet-elle une espérance ? ». Il y a donc de fortes chances que la réponse attendue soit « X_n `N`'admet `PAS` d'espérance ». C'est pourquoi on cherche ici à montrer en priorité $\dfrac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\,(t\, f_n(t))$ plutôt que $t\, f_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$.

□

c) Que vaut $F_n(x)$ pour $x < 0$ et $n \in \mathbb{N}$?

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x < 0$.

$$F_n(x) = \mathbb{P}([X_n \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\, dt = 0 \quad (car : \forall t < 0,\ f_n(t) = 0)$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x < 0,\ F_n(x) = 0}$$

□

d) Calculer $F_0(x)$ pour $x \geqslant 0$.

Démonstration.
Soit $x \geqslant 0$.

$$\begin{array}{rcl} F_0(x) & = & \mathbb{P}([X_0 \leqslant x]) \ = \ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_0(t)\, dt \\ & = & \displaystyle\int_0^x \frac{1}{0!}\, g_0(t)\, dt \qquad\qquad (car\ x \geqslant 0) \\ & = & \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}\, dt \ = \ \left[-\frac{1}{1+t} \right]_0^x \\ & = & 1 - \dfrac{1}{1+x} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \geqslant 0,\ F_0(x) = 1 - \frac{1}{1+x}}$$

□

e) Soit $x \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$$

Démonstration.

$$\begin{array}{rcl} F_k(x) & = & \mathbb{P}([X_k \leqslant x]) \ = \ \displaystyle\int_0^{+\infty} f_k(t)\ dt \\ & = & \displaystyle\int_0^x \frac{1}{k!} g_k(t)\ dt \qquad\qquad (\textit{car } x \geqslant 0) \\ & = & \displaystyle\frac{1}{k!}\int_0^x \frac{(\ln(1+t))^k}{(1+t)^2}\ dt \end{array}$$

On effectue une intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & (\ln(1+t))^k & & u'(t) & = & k\dfrac{(\ln(1+t))^{k-1}}{1+t} \\ v'(t) & = & \dfrac{1}{(1+t)^2} & & v(t) & = & -\dfrac{1}{1+t} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$.

$$\begin{array}{rcl} F_k(x) & = & \displaystyle\frac{1}{k!}\left(\left[-\frac{(\ln(1+t))^k}{1+t}\right]_0^x + k\int_0^x \frac{(\ln(1+t))^{k-1}}{(1+t)^2}\ dt\right) \\ & = & \displaystyle -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + \frac{k}{k!}\int_0^x \frac{(\ln(1+t))^{k-1}}{(1+t)^2}\ dt \\ & = & \displaystyle -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x \frac{(\ln(1+t))^{k-1}}{(1+t)^2}\ dt \\ & = & \displaystyle -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + \int_0^x f_{k-1}(t)\ dt \\ & = & \displaystyle -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + F_{k-1}(x) \end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0,\ F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}}$$

□

f) En déduire une expression de $F_n(x)$ pour $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ faisant intervenir une somme (on ne cherchera pas à calculer cette somme).

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \geqslant 0$.

- D'après la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$$

- On somme alors ces égalités pour k variant de 0 à n. On obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} (F_k(x) - F_{k-1}(x)) = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}\right) = -\frac{1}{1+x}\sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!}$$

Par télescopage, on a alors :

$$F_n(x) - F_0(x) = -\frac{1}{1+x} \sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!}$$

- Or, d'après la question ***3.d)*** : $F_0(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x}$. Donc :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= F_0(x) - \frac{1}{1+x} \sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!} \\ &= 1 - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x} \sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!} \\ &= 1 - \frac{1}{1+x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!} \qquad \textit{(car : } \frac{(\ln(1+x))^0}{0!} = 1\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \geqslant 0,\ F_n(x) = 1 - \frac{1}{1+x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!}}$$

□

g) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $x < 0$, alors : $F_n(x) = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$.
- Si $x \geqslant 0$, alors : $F_n(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(\ln(1+x))^k}{k!}$.

  Or $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(\ln(1+x))^k}{k!}$ est la série exponentielle de paramètre $\ln(1+x)$.

  Elle est donc convergente et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!} = \exp(\ln(1+x)) = 1+x$$

  Ainsi la suite $(F_n(x))_{n\geqslant 1}$ converge et on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 1 - \frac{1}{\cancel{1+x}} \cancel{(1+x)} = 1 - 1 = 0$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0.}$$

□

h) La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle en loi ?

Démonstration.
Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une v.a.r. X de fonction de répartition G telle que (X_n) converge en loi vers X.
Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ où G est continue, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = G(x)$$

Or, d'après la question précédente : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = 0$.

Ceci est absurde car G est une fonction de répartition, donc, en particulier, $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = 1$.

$$\boxed{\text{La suite } (X_n) \text{ ne converge pas en loi.}}$$

Commentaire

Il convient d'insister ici sur la définition de la convergence en loi.
(X_n) converge en loi vers X si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ où F_X est continue, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

En particulier :
1) cette convergence n'a pas besoin d'être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Elle peut ne pas être vérifiée pour les points de discontinuité de F_X.
2) on s'intéresse bien ici aux points de continuité de F_X et non de F_{X_n}.

$\square$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \ln(1 + X_n)$.

a) Justifier que Y_n est bien définie. Quelles sont les valeurs prises par Y_n ?

Démonstration.

- Sans perte de généralité, on considère pour la suite que : $X_n(\Omega) = [0, +\infty[$.
Donc $\ln(1 + X_n)$ est bien définie.

$$\boxed{\text{Ainsi, } Y_n \text{ est bien définie.}}$$

- Déterminons $Y_n(\Omega)$, où $Y_n = h(X_n)$ avec $h : x \mapsto \ln(1 + x)$.
Comme précisé précédemment : $X_n(\Omega) = [0, +\infty[$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} Y_n(\Omega) & = & h(X_n)(\Omega) \ = \ h(X_n(\Omega)) & \\ & = & h([0, +\infty[) & \\ & = & [h(0), \lim\limits_{x \to +\infty} h(x)[& \textit{(car } h \textit{ est continue et strictement croissante sur } [0, +\infty[\textit{)} \\ & = & [0, +\infty[& \textit{(car } h(0) = 0 \textit{ et } \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } Y_n(\Omega) = [0, +\infty[}$$

$\square$

b) Justifier que Y_n admet une espérance et la calculer.

Démonstration.

- La fonction f_n est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.
Ainsi, d'après le théorème de transfert, la v.a.r. $Y_n = \ln(1 + X_n)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1 + t) f_n(t)\, dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence car l'intégrande est positive :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \ \ln(1 + t) \ f_n(t) \geqslant 0$$

- Soit $t \in [0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
\ln(1+t) f_n(t) &= \ln(1+t) \frac{1}{n!} \frac{(\ln(1+t))^n}{(1+t)^2} && \textit{(par définition de } f_n\textit{)} \\
&= \frac{1}{n!} \frac{(\ln(1+t))^{n+1}}{(1+t)^2} \\
&= (n+1) \frac{1}{(n+1)!} \frac{(\ln(1+t))^{n+1}}{(1+t)^2} \\
&= (n+1) f_{n+1}(t) && \textit{(par définition de } f_{n+1}\textit{)}
\end{aligned}$$

- Or la fonction f_{n+1} est une densité nulle en dehors de $[0,+\infty[$.
Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n+1}(t)\, dt$ converge et vaut 1.
On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+t) f_n(t)\, dt$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} \ln(1+t) f_n(t)\, dt = (n+1) \times 1 = (n+1)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y_n \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(Y_n) = n+1.}$$

Commentaire

On rappelle l'énoncé du théorème de transfert pour les v.a.r. à densité :
Soit X une v.a.r. de densité f nulle en dehors d'un intervalle $]a,b[$, et g une fonction **continue** sur $]a,b[$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.
Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\, f(t)\, dt$ est **absolument convergente**, alors la v.a.r. $g(X)$ admet une espérance et on a :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_a^b g(t)\, f(t)\, dt$$

On applique donc ici le théorème de transfert pour la fonction $g : t \mapsto \ln(1+t)$.

□

c) Justifier que Y_n admet une variance et la calculer.

Démonstration.

- La fonction f_n est nulle en dehors de $[0,+\infty[$.
Donc, d'après le théorème de transfert, la v.a.r. $Y_n = \ln(1+X_n)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(1+t))^2 f_n(t)\, dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence puisque l'intégrande est positive :

$$\forall t \in [0,+\infty[,\ (\ln(1+t))^2 f_n(t) \geqslant 0$$

- Soit $t \in [0, +\infty[$.

$$\begin{array}{rcll}
(\ln(1+t))^2 f_n(t) & = & (\ln(1+t))^2 \dfrac{1}{n!} \dfrac{(\ln(1+t))^n}{(1+t)^2} & \textit{(par définition de } f_n\textit{)} \\[2ex]
& = & \dfrac{1}{n!} \dfrac{(\ln(1+t))^{n+2}}{(1+t)^2} & \\[2ex]
& = & (n+2)(n+1) \dfrac{1}{(n+2)!} \dfrac{(\ln(1+t))^{n+2}}{(1+t)^2} & \\[2ex]
& = & (n+2)(n+1) f_{n+2}(t) & \textit{(par définition de } f_{n+2}\textit{)}
\end{array}$$

- Or la fonction f_{n+2} est une densité nulle en dehors de $[0, +\infty[$.
  Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n+2}(t)\, dt$ converge et vaut 1.
  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(1+t))^2 f_n(t)\, dt$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} (\ln(1+t))^2 f_n(t)\, dt = (n+1)(n+2) \times 1 = (n+1)(n+2)$$

$$\boxed{\text{Ainsi } Y_n \text{ admet un moment d'ordre 2 et } \mathbb{E}(Y_n^2) = (n+2)(n+1).}$$

- D'après la formule de Kœnig-Huyghens :

$$V(Y_n) = \mathbb{E}(Y_n^2) - (\mathbb{E}(Y_n))^2 = (n+2)(n+1) - (n+1)^2 = (n+1)(\cancel{n} + 2 - (\cancel{n} + 1)) = n+1$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y_n \text{ admet une variance et : } \mathbb{V}(Y_n) = n+1.}$$

Commentaire

On a, cette fois, appliqué le théorème de transfert avec la fonction $g : t \mapsto (\ln(1+t))^2$. □

d) On note H_n la fonction de répartition de Y_n. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = F_n(\mathrm{e}^x - 1)$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll}
H_n(x) & = & \mathbb{P}([Y_n \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([\ln(1+X_n) \leqslant x]) & \\[1ex]
& = & \mathbb{P}([1 + X_n \leqslant \mathrm{e}^x]) & \textit{(car } x \mapsto e^x \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\[1ex]
& = & \mathbb{P}([X_n \leqslant \mathrm{e}^x - 1]) \ = \ F_n(\mathrm{e}^x - 1) &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = F_n(\mathrm{e}^x - 1)}$$

□

e) Montrer que Y_n est une variable aléatoire à densité et donner une densité de Y_n.

Démonstration.

- Commençons par expliciter H_n.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  - Soit $x < 0$. Alors : $\mathrm{e}^x - 1 < 0$. Donc, d'après la question ***4.d)***, on obtient :

$$H_n(x) = F_n(\mathrm{e}^x - 1) = 0$$

- Soit $x \geqslant 0$. Alors $e^x - 1 \geqslant 0$. Donc, toujours d'après la question ***4.d)***, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} H_n(x) & = & F_n(e^x - 1) \\ & = & 1 - \dfrac{1}{\cancel{1} + e^x - \cancel{1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(\ln(\cancel{1} + e^x - \cancel{1}))^k}{k!} \\ & = & 1 - \dfrac{1}{e^x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(\ln(e^x))^k}{k!} \\ & = & 1 - e^{-x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$$

- Ainsi :
  - × H_n est continue sur $]-\infty, 0[$ car elle est constante sur cet intervalle.
  - × H_n est continue sur $]0, +\infty[$ comme somme et produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$.
  - × d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} H_n(x) = 0$. D'autre part :

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to 0^+} H_n(x) & = & H_n(0) \ = \ 1 - e^{-0} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{0^k}{k!} \\ & = & 1 - 1 \ = \ 0 \qquad \textit{(car } \forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k!}\textit{)} \end{array}$$

  Donc H_n est continue en 0.

  Ainsi la fonction H_n est continue sur $\mathbb{R}$.

- La fonction H_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, par des arguments similaires aux précédents.

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y_n \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

- Pour déterminer une densité h_n de Y_n, on dérive H_n sur les intervalles **ouverts**. Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - × Si $x \in\ ]-\infty, 0[$.

$$h_n(x) = H_n'(x) = 0$$

  - × Si $x \in\ ]0, +\infty[$.

$$\begin{array}{rcl} h_n(x) & = & e^x F_n'(e^x - 1) \ = \ e^x f_n(e^x - 1) \\ & = & e^x \dfrac{1}{n!} \dfrac{(\ln(\cancel{1} + e^x - \cancel{1}))^n}{(\cancel{1} + e^x - \cancel{1})^2} \\ & = & \dfrac{1}{n!} \dfrac{\cancel{e^x}}{(e^x)^{\cancel{2}}} (\ln(e^x))^n \ = \ \dfrac{x^n}{n!} e^{-x} \end{array}$$

  - × On choisit enfin $h_n(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ h_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x^n}{n!} e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}.}$$

Commentaire

On choisit ici $h_n(0) = 0$, mais n'importe quelle valeur positive conviendrait.

□

f) Reconnaître la loi de Y_0. À l'aide de ce qui précède, déterminer le moment d'ordre k de Y_0 pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, on a :

$$H_0 : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. de loi exponentielle de paramètre 1.

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y_0 \hookrightarrow \mathcal{E}(1).}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  - La v.a.r. Y_0 admet un moment d'ordre k si et seulement si Y_0^k admet une espérance.
  - La fonction f_0 est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.
    Donc, d'après le théorème de transfert, la v.a.r. $Y_0^k = (\ln(1 + X_n))^k$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(1+t))^k f_0(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence puisque l'intégrande est positive :

$$\forall t \in [0, +\infty[,\ (\ln(1+t))^k f_0(t) \geqslant 0$$

  - Soit $t \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} (\ln(1+t))^k f_0(t) &= (\ln(1+t))^k \frac{1}{(1+t)^2} && \textit{(par définition de } f_0\textit{)} \\ &= g_k(t) && \textit{(par définition de } g_k\textit{)} \end{aligned}$$

  - Or, d'après la question ***2.d)***, l'intégrale $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_k(t)\ dt$ converge et vaut $k!$.
    On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(1+t))^k f_0(t)\ dt$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} (\ln(1+t))^k f_0(t)\ dt = k!$$

$$\boxed{\text{On en déduit que, pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ Y_0 \text{ admet un moment d'ordre } k \text{ et : } \mathbb{E}(Y_0^k) = k!}$$

□

9782340-026636_001_784.indd 35 30/07/2018 09:51

EXERCICE 3

Dans tout l'exercice, X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que les deux variables X et Y sont **échangeables** si :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \mathbb{P}([X=j] \cap [Y=i])$$

Résultats préliminaires

1. On suppose que X et Y sont deux variables indépendantes et de même loi.
Montrer que X et Y sont échangeables.

Démonstration.
Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) & = & \mathbb{P}([X=i]) \times \mathbb{P}([Y=j]) & \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \mathbb{P}([Y=i]) \times \mathbb{P}([Y=j]) & \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ ont même loi)} \\ & = & \mathbb{P}([Y=i]) \times \mathbb{P}([X=j]) & \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ ont même loi)} \\ & = & \mathbb{P}([X=j] \cap [Y=i]) & \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \end{array}$$

Ainsi, si X et Y sont indépendantes et de même loi, alors elles sont échangeables.

□

2. On suppose que X et Y sont échangeables.
Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([X=i]) = \mathbb{P}([Y=i])$$

Démonstration.
Soit $i \in \mathbb{N}$.
La famille $([Y=j])_{j\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.
On en déduit, par application de la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X=i]) & = & \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) & \\ & = & \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=j] \cap [Y=i]) & \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ sont échangeables)} \\ & = & \mathbb{P}([Y=i]) & \end{array}$$

La dernière égalité est obtenue en appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X=j])_{j\in\mathbb{N}}$.

On en déduit : $\forall i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X=i]) = \mathbb{P}([Y=i])$.

Commentaire

On vient de montrer l'implication suivante :

$$X \text{ et } Y \text{ sont échangeables } \Rightarrow \ X \text{ et } Y \text{ ont même loi}$$

□

Étude d'un exemple

Soient n, b et c trois entiers strictement positifs.
Une urne contient initialement n boules noires et b boules blanches. On effectue l'expérience suivante, en distinguant trois variantes.

- On pioche une boule dans l'urne.
  On définit X la variable aléatoire qui vaut 1 si cette boule est noire et 2 si elle est blanche.
- On replace la boule dans l'urne et :
  - ⋆ Variante 1 : on ajoute dans l'urne c boules de la même couleur que la boule qui vient d'être piochée.
  - ⋆ Variante 2 : on ajoute dans l'urne c boules de la couleur opposée à celle de la boule qui vient d'être piochée.
  - ⋆ Variante 3 : on n'ajoute pas de boule supplémentaire dans l'urne.
- On pioche à nouveau une boule dans l'urne.
  On définit Y la variable aléatoire qui vaut 1 si cette seconde boule piochée est noire et 2 si elle est blanche.

3. a) Compléter la fonction **Scilab** suivante, qui simule le tirage d'une boule dans une urne contenant b boules blanches et n boules noires et qui retourne 1 si la boule tirée est noire, et 2 si la boule tirée est blanche.

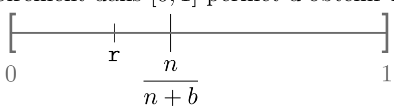
```
1 function res = tirage(b, n)
2   r = rand()
3   if ........... then
4     res = 2
5   else
6     res = 1
7   end
8 endfunction
```

Démonstration.

- D'après l'énoncé, la fonction `tirage` a pour but de simuler la v.a.r. X.
  Ainsi, le paramètre de sortie `res` de cette fonction doit :
  × prendre la valeur 1 avec probabilité $\mathbb{P}([X=1]) = \dfrac{n}{n+b}$.
  × prendre la valeur 2 avec probabilité $\mathbb{P}([X=2]) = \dfrac{b}{n+b}$.
- La fonction débute par la ligne 2 :

```
2   r = rand()
```

  L'instruction `rand()` renvoie un réel choisi aléatoirement dans $[0,1]$.
  Plus formellement, il s'agit de simuler une v.a.r. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.
- Cette valeur `r` choisie aléatoirement dans $[0,1]$ permet d'obtenir la valeur `res`.



  Deux cas se présentent.
  – Si $\mathtt{r} \leqslant \dfrac{n}{n+b}$: alors, on affecte à la variable `res` la valeur 1.
  Ce cas se produit avec la probabilité attendue :

$$\mathbb{P}\left(\left[0 \leqslant U \leqslant \frac{n}{n+b}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant \frac{n}{n+b}\right]\right) = \frac{n}{n+b} = \mathbb{P}([X=1])$$

– Si $\texttt{r} > \dfrac{n}{n+b}$: alors, on affecte à la variable `res` la valeur 2.
Ce cas se produit avec la probabilité attendue :

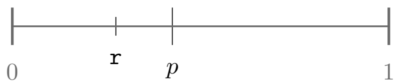
$$\mathbb{P}\left(\left[\frac{n}{n+b} < U \leqslant 1\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{n}{n+b} < U\right]\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant \frac{n}{n+b}\right]\right) = \frac{b}{n+b} = \mathbb{P}([X=2])$$

- On en déduit la ligne 3 à compléter :

```
3    if r > n / (n + b) then
```

Commentaire

- L'idée développée ici est utilisée lorsque l'on souhaite simuler une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ avec $p \in \,]0,1[$ à l'aide de la fonction `rand`.
On choisit aléatoirement un réel `r` dans $[0,1]$:



On obtient une valeur plus petite que p avec probabilité : $\mathbb{P}([U \leqslant p]) = p$.
On obtient une valeur strictement plus grande que p avec probabilité :

$$q = \mathbb{P}([U > p]) = 1 - \mathbb{P}([U \leqslant p]) = 1 - p$$

D'où le programme suivant :

```
function res = bernoulli(p)
  r = rand()
  if r < p then
    res = 1
  else
    res = 0
  end
endfunction
```

- Plus généralement, cette méthode permet d'obtenir une simulation de n'importe quelle v.a.r. X finie. Détaillons ce résultat. Soit X une v.a.r. telle que :
  × $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$,
  × $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}([X = x_i]) = p_i$.

L'idée est alors de découper le segment $[0,1]$ en n intervalles $I_1, \dots, I_n$.
La taille du premier intervalle est p_1, celle du deuxième est p_2 et ainsi de suite.
De sorte que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\mathbb{P}([U \in I_i]) = p_i = \mathbb{P}([X = x_i])$$

Il n'y a plus qu'à écrire le programme correspondant.

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.
On procédera de même dans les autres questions **Scilab**.

□

b) Compléter la fonction suivante, qui effectue l'expérience étudiée avec une urne contenant initialement b boules blanches, n boules noires et qui ajoute éventuellement c boules après le premier tirage, selon le choix de la variante dont le numéro est `variante`.
Les paramètres de sortie sont :

- `x` : une simulation de la variable aléatoire X
- `y` : une simulation de la variable aléatoire Y

```
1  function [x, y] = experience (b, n, c, variante)
2    x = tirage (b, n)
3    if variante == 1 then
4      if x == 1 then
5        ...........
6      else
7        ...........
8      end
9    else if variante == 2 then
10     ...........
11     ...........
12     ...........
13     ...........
14     ...........
15   end
16   y = tirage (b, n)
17 endfunction
```

Démonstration.

- Comme on l'a vu dans la question précédente, l'instruction `tirage(b, n)` permet de simuler la v.a.r. X. C'est ce que réalise l'instruction en ligne 2 du programme :

```
2    x = tirage (b, n)
```

- Il reste alors à simuler la v.a.r. Y.
  Le paramètre de sortie `y` doit :
  × prendre la valeur 1 avec probabilité $\mathbb{P}([Y = 1]) = \dfrac{m}{m+d}$.
  × prendre la valeur 2 avec probabilité $\mathbb{P}([Y = 2]) = \dfrac{d}{m+d}$.
  où m (resp. d) représente le nombre de boules noires (resp. blanches) de l'urne après l'ajout éventuel issu du premier tirage.
- Plus précisément m et d sont définies en fonction du résultat du premier tirage et des variantes.
  Variante 1 : deux cas se présentent.
  × Si `x` vaut 1 : c'est qu'on a tiré une boule noire lors du premier tirage.
  On remet, en plus de cette boule, c boules noires dans l'urne. Ainsi :
  $$m = n + c \quad \text{et} \quad d = b \quad \text{(pas de modification)}$$
  × Sinon (`x` vaut 2) : c'est qu'on a tiré une boule blanche lors du premier tirage.
  On remet, en plus de cette boule, c boules noires dans l'urne. Ainsi :
  $$m = n \quad \text{(pas de modification)} \quad \text{et} \quad d = b + c$$

On en déduit les lignes 3 à 8 du programme dans lesquelles on met à jour les variables `n` et `b` en fonction de leur nouvelle valeur.

```
3   if variante == 1 then
4     if x == 1 then
5       n = n + c
6     else
7       b = b + c
8     end
```

Variante 2 : l'étude est similaire mais, comme on remet des boules de couleur opposée à la première boule tirée, les rôles de `n` et `b` sont échangés par rapport à la première variante. On en déduit les lignes 9 à 14 du programme dans lesquelles on met à jour les variables `n` et `b` en fonction de leur nouvelle valeur.

```
9   else if variante == 2 then
10    if x == 1 then
11      b = b + c
12    else
13      n = n + c
14    end
```

Variante 3 : il n'y a pas de modifications des boules blanches ou noires. Il n'y a donc pas lieu de mettre à jour les variables `n` et `b`.

- On obtient alors la valeur `y` en simulant le tirage dans l'urne modifiée (c'est à dire avec les valeurs de `n` et `b` mise à jour). C'est l'objectif de la ligne 16.

```
16    y = tirage (b, n)
```

Commentaire

- L'énoncé comporte une petite coquille. En effet, en ligne 9, on devait lire :

```
9    elseif variante == 2 then
```

en lieu et place de :

```
9    else if variante == 2 then
```

- La différence est subtile.
  - Dans le programme corrigé, la structure conditionnelle englobante contient 2 branchements dont le 2ème (en ligne 9) est soumis à la condition **variante** `== 2`.
  - Dans le programme d'origine, la structure conditionnelle englobante contient 2 branchements dont le 2ème (en ligne 9) débouche sur une nouvelle structure conditionnelle `if` **variante** `== 2`. Il faut alors fermer cette 2ème structure conditionnelle à l'aide d'un `end`. Le nombre de lignes allouées n'est donc plus suffisant.
- Notons que le respect du nombre de lignes alloué n'est pas déterminant. C'est plutôt une indication que donne le concepteur sur le nombre de lignes que le programme doit normalement prendre. Mais on peut raisonnablement penser que tout programme juste (même s'il ne respecte pas le nombre de lignes restant) sera accepté. □

c) Compléter la fonction suivante, qui simule l'expérience N fois (avec $N \in \mathbb{N}^*$), et qui estime la loi de X, la loi de Y et la loi du couple (X, Y).
Les paramètres de sortie sont :

- `loiX` : un tableau unidimensionnel à deux éléments qui estime $[\ \mathbb{P}([X=1]),\ \ \mathbb{P}([X=2])\ ]$
- `loiY` : un tableau unidimensionnel à deux éléments qui estime $[\ \mathbb{P}([Y=1]),\ \ \mathbb{P}([Y=2])\ ]$
- `loiXY` : un tableau bidimensionnel à deux lignes et deux colonnes qui estime :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=1]) & \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=2]) \\ \mathbb{P}([X=2] \cap [Y=2]) & \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=2]) \end{bmatrix}$$

```
function [loiX, loiY, loiXY] = estimation(b, n, c, variante, N)
  loiX = [0, 0]
  loiY = [0, 0]
  loiXY = [0, 0 ; 0, 0]
  for k = 1 : N
    [x , y] = experience(b, n, c, variante)
    loiX(x) = loiX(x) + 1
    ...........
    ...........
  end
  loiX = loiX / N
  loiY = loiY / N
  loiXY = loiXY / N
endfunction
```

Démonstration.

Commentaire

L'énoncé de cette question comporte une erreur.
Bien évidemment, la loi du couple (X, Y) est caractérisé par la matrice :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=1]) & \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=2]) \\ \mathbb{P}([X=2] \cap [Y=1]) & \mathbb{P}([X=2] \cap [Y=2]) \end{bmatrix}$$

- Dans la question précédente, on a simulé les v.a.r. X et Y.
  Il s'agit maintenant d'obtenir une approximation des lois de ces v.a.r.
- Rappelons tout d'abord que X ne prend que deux valeurs : $X(\Omega) = \{1, 2\}$.
  Ainsi, la loi de X est entièrement déterminée par les valeurs :

$$\mathbb{P}([X=1]) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X=2])$$

L'idée naturelle pour obtenir un approximation de ces valeurs est :

× de simuler un grand nombre de fois (N est ce grand nombre) la v.a.r. X.
Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(x_1, \ldots, x_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(X_1, \ldots, X_N)$ de la v.a.r. X.

× de compter le nombre de 1 (resp. de 2) de cette observation.

Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\frac{\text{nombre de 1 de l'observation}}{\text{taille de l'observation}} \simeq \mathbb{P}([X=1])$$

- Dans le programme, les valeurs $(x_1, \dots, x_N)$ sont obtenues par des appels successifs (à l'aide d'une boucle `for`) à la fonction `experience` et stockées les unes après les autres dans la variable `x`.

```
5    for k = 1 : N
6      [x , y] = experience(b, n, c, variante)
```

(seules les valeurs de `x` *nous intéressent dans un premier temps)*
Le tableau `loiX` est alors mis à jour à chaque tour de boucle :

```
7        loiX(x) = loiX(x) + 1
```

Détaillons cette mise à jour :

× si `x` vaut 1 alors l'instruction suivante est effectuée :

```
loiX(1) = loiX(1) + 1
```

× si `x` vaut 2 alors l'instruction suivante est effectuée :

```
loiX(2) = loiX(2) + 1
```

Cela signifie que le 1^{er} élément du tableau compte le nombre de 1 de l'observation et que le $2^{\text{ème}}$ compte le nombre de 2.
Une fois cette boucle effectuée, l'approximation formulée par la LfGN est obtenue en divisant ces nombres par la taille de l'observation :

```
11       loiX = loiX / N
```

- On agit de même pour obtenir l'approximation de la loi de Y.
On génère des observations $(y_1, \dots, y_N)$ d'un N-échantillon $(Y_1, \dots, Y_N)$ de la v.a.r. Y.

```
5    for k = 1 : N
6      [x , y] = experience(b, n, c, variante)
```

(ce sont maintenant les valeurs de `y` *qui nous intéressent)*
Puis on met à jour le tableau `loiY` de sorte à compter le nombre de 1 et de 2 que contient cette observation.

```
8        loiY(y) = loiY(y) + 1
```

L'approximation formulée par la LfGN est obtenue en divisant ces nombres par la taille de l'observation :

```
12       loiY = loiY / N
```

- On agit encore de même pour obtenir l'approximation de la loi de couple. On génère des couples d'observations $((x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N))$ d'un N-échantillon $((X_1, Y_1), \dots, (X_N, Y_N))$ du couple (X, Y). C'est toujours les lignes 5 et 6 :

```
5    for k = 1 : N
6      [x , y] = experience(b, n, c, variante)
```

(ce sont à présent les couples de valeurs qui nous intéressent)
Puis on met à jour le tableau `loiXY` de sorte à compter le nombre de $(1, 1)$, de $(1, 2)$, de $(2, 1)$, de $(2, 2)$:

```
9        loiXY(x, y) = loiXY(x, y) + 1
```

L'approximation formulée par la LfGN est obtenue en divisant ces nombres par la taille de l'observation :

```
13    loiXY = loiXY / N
```

□

d) On exécute notre fonction précédente avec $b = 1$, $n = 2$, $c = 1$, $N = 10000$ et dans chacune des variantes. On obtient :

```
--> [loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,1,10000)
    loiXY =
        0.49837     0.16785
        0.16697     0.16681
    loiY =
        0.66534     0.33466
    loiX =
        0.66622     0.33378

--> [loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,2,10000)
    loiXY =
        0.33258     0.33286
        0.25031     0.08425
    loiY =
        0.58289     0.41711
    loiX =
        0.66544     0.33456

--> [loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,3,10000)
    loiXY =
        0.44466     0.22098
        0.22312     0.11124
    loiY =
        0.66778     0.33222
    loiX =
        0.66564     0.33436
```

En étudiant ces résultats, émettre des conjectures quant à l'indépendance et l'échangeabilité de X et Y dans chacune des variantes.
On donne les valeurs numériques approchées suivantes :

$$\begin{array}{c} 0.33 \times 0.33 \simeq 0.11 \\ 0.33 \times 0.41 \simeq 0.14 \\ 0.33 \times 0.58 \simeq 0.19 \\ 0.33 \times 0.66 \simeq 0.22 \\ 0.41 \times 0.66 \simeq 0.27 \\ 0.58 \times 0.66 \simeq 0.38 \\ 0.66 \times 0.66 \simeq 0.44 \end{array}$$

Démonstration.

- **Variante 1** :
  - × Indépendance. On lit $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1])$ sur la coordonnée $(1, 1)$ de `loiXY`.

    Donc : $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) \simeq 0,49$

    On lit $\mathbb{P}([X = 1])$ sur la $1^{\text{ère}}$ coordonnée de `loiX`. Donc $\mathbb{P}([X = 1]) \simeq 0,66$.

On lit $\mathbb{P}([Y=1])$ sur la $1^{\text{ère}}$ coordonnée de `loiX`. Donc $\mathbb{P}([Y=1]) \simeq 0,66$.

D'après les données de l'énoncé, on obtient donc :

$$\mathbb{P}([X=1])\mathbb{P}([Y=1]) \simeq 0,44 \neq \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=1])$$

On conjecture alors que X et Y ne sont pas indépendantes.

× Échangeabilité. On lit $\mathbb{P}([X=1] \cap [Y=2])$ sur la coordonnée $(1,2)$ de `loiXY`, et $\mathbb{P}([X=2] \cap [Y=1])$ sur la coordonnée $(2,1)$ de `loiXY`. Donc :

$$\mathbb{P}([X=1] \cap [Y=2]) \simeq 0,16 \simeq \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=2])$$

On conjecture alors que X et Y sont échangeables.

> Dans le cas de la variante 1, on conjecture que les v.a.r. X et Y sont échangeables et non indépendantes.

- **Variante 2** :

× Indépendance. Par lecture : $\mathbb{P}([X=1] \cap [Y=1]) \simeq 0,33$

De plus : $\mathbb{P}([X=1]) \simeq 0,66$ et $\mathbb{P}([Y=1]) \simeq 0,58$.

D'après les données de l'énoncé, on obtient donc :

$$\mathbb{P}([X=1])\mathbb{P}([Y=1]) \simeq 0,38 \neq \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=1])$$

On conjecture alors que X et Y ne sont pas indépendantes.

× Échangeabilité. Par lecture : $\mathbb{P}([X=1] \cap [Y=2]) \simeq 0,33$ et $\mathbb{P}([X=2] \cap [Y=1]) \simeq 0,25$.

Donc : $\mathbb{P}([X=1] \cap [Y=2]) \neq \mathbb{P}([X=2] \cap [Y=1])$.

On conjecture alors que X et Y ne sont pas échangeables.

> Dans le cas de la variante 2, on conjecture que les v.a.r. X et Y sont non échangeables et non indépendantes.

- **Variante 3** :

× Indépendance. Par lecture :

$$\mathbb{P}([X=1])\mathbb{P}([Y=1]) \simeq 0,66 \times 0,66 \simeq 0,44 \simeq \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=1])$$

$$\mathbb{P}([X=1])\mathbb{P}([Y=2]) \simeq 0,66 \times 0,33 \simeq 0,22 \simeq \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=2])$$

$$\mathbb{P}([X=2])\mathbb{P}([Y=1]) \simeq 0,33 \times 0,66 \simeq 0,22 \simeq \mathbb{P}([X=2] \cap [Y=1])$$

$$\mathbb{P}([X=2])\mathbb{P}([Y=2]) \simeq 0,33 \times 0,33 \simeq 0,11 \simeq \mathbb{P}([X=2] \cap [Y=2])$$

On conjecture alors que X et Y sont indépendantes.

× Échangeabilité. Par lecture :

$$\mathbb{P}([X=1] \cap [Y=2]) \simeq 0,22 \simeq \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=2])$$

On conjecture alors que X et Y sont échangeables.

> Dans le cas de la variante 3, on conjecture que les v.a.r. X et Y sont échangeables et indépendantes.

□

4. On se place dans cette question dans le cadre de la variante 1.

a) Donner la loi de X.

Démonstration.

- Par définition de la v.a.r. X : $X(\Omega) = \{1, 2\}$.
- L'événement $[X = 1]$ est réalisé par tous les tirages d'une boule de l'urne dont le résultat est une boule noire.
  Un tel 1-tirage est entièrement déterminé par la boule noire choisie.
  Il y a donc n tels 1-tirages possibles (autant que de boules noires).
  De plus, le nombre total de 1-tirages possibles est $n + b$ (autant que de boules dans l'urne).
  On obtient alors : $\mathbb{P}([X = 1]) = \dfrac{n}{n+b}$.
- La famille $([X = 1], [X = 2])$ est un système complet d'événements. Donc :

$$\mathbb{P}([X = 2]) = 1 - \mathbb{P}([X = 1]) = 1 - \frac{n}{n+b} = \frac{b}{n+b}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } X(\Omega) = \{1, 2\}. \text{ De plus : } \mathbb{P}([X = 1]) = \frac{n}{n+b} \text{ et } \mathbb{P}([X = 2]) = \frac{b}{n+b}.}$$

□

b) Déterminer la loi du couple (X, Y).

Démonstration.

- On sait déjà : $X(\Omega) = \{1, 2\}$. Par définition de la v.a.r. Y, on a aussi : $Y(\Omega) = \{1, 2\}$.
- Déterminons tout d'abord $\mathbb{P}_{[X=1]}([Y = 1])$.
  Si l'événement $[X = 1]$ est réalisé, c'est que la $1^{\text{ère}}$ boule tirée est noire. On se place dans le cadre de la variante 1 donc, à l'issue de ce tirage, c boules noires sont ajoutées dans l'urne.
  L'événement $[Y = 1]$ est alors réalisé par tous les tirages d'une boule de l'urne dont le résultat est une boule noire.
  Un tel 1-tirage est entièrement déterminé par la boule noire choisie.
  Il y a donc $n + c$ tels 1-tirages possibles (autant que de boules noires).
  De plus, le nombre total de 1-tirages possibles est maintenant de $n + b + c$ (autant que de boules dans l'urne).

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{P}_{[X=1]}([Y = 1]) = \frac{n+c}{n+b+c}}$$

  (on remarque que la probabilité conditionnelle est bien définie car $\mathbb{P}([X = 1]) = \dfrac{n}{n+b} \neq 0$)
- Déterminons alors $\mathbb{P}_{[X=1]}([Y = 2])$.
  La famille $([Y = 1], [Y = 2])$ est un système complet d'événements. Donc :

$$\mathbb{P}_{[X=1]}([Y = 2]) = 1 - \mathbb{P}_{[X=1]}([Y = 1]) = 1 - \frac{n+c}{n+b+c} = \frac{b}{n+b+c}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_{[X=1]}([Y = 2]) = \frac{b}{n+b+c}}$$

- Avec les mêmes raisonnements, on obtient :

$$\boxed{\mathbb{P}_{[X=2]}([Y = 1]) = \frac{n}{n+b+c} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{[X=2]}([Y = 2]) = \frac{b+c}{n+b+c}}$$

  (les probabilités conditionnelles sont bien définies car $\mathbb{P}([X = 2]) = \dfrac{b}{n+b} \neq 0$)

- On a alors les résultats suivants :

$$\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) = \mathbb{P}([X=1])\times\mathbb{P}_{[X=1]}([Y=1]) = \frac{n}{n+b}\times\frac{n+c}{n+b+c} = \frac{n(n+c)}{(n+b)(n+b+c)}$$

$$\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=2]) = \mathbb{P}([X=1])\times\mathbb{P}_{[X=1]}([Y=2]) = \frac{n}{n+b}\times\frac{b}{n+b+c} = \frac{n\,b}{(n+b)(n+b+c)}$$

$$\mathbb{P}([X=2]\cap[Y=1]) = \mathbb{P}([X=2])\times\mathbb{P}_{[X=2]}([Y=1]) = \frac{b}{n+b}\times\frac{n}{n+b+c} = \frac{n\,b}{(n+b)(n+b+c)}$$

$$\mathbb{P}([X=2]\cap[Y=2]) = \mathbb{P}([X=2])\times\mathbb{P}_{[X=2]}([Y=2]) = \frac{b}{n+b}\times\frac{b+c}{n+b+c} = \frac{b(b+c)}{(n+b)(n+b+c)}$$

- En résumé, la loi du couple (X,Y) est donnée par le tableau suivant.

$y \in Y(\Omega)$ / $x \in X(\Omega)$	1	2
1	$\frac{n(n+c)}{(n+b)(n+b+c)}$	$\frac{n\,b}{(n+b)(n+b+c)}$
2	$\frac{n\,b}{(n+b)(n+b+c)}$	$\frac{b(b+c)}{(n+b)(n+b+c)}$

Commentaire

On peut remarquer dès cette question que les v.a.r. X et Y sont échangeables.

☐

c) Déterminer la loi de Y.

Démonstration.

- On rappelle : $Y(\Omega) = \{1,2\}$.
- La famille $([X=1], [X=2])$ forme un système complet d'événements.
  On en déduit, par application de la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y=1]) &= \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) + \mathbb{P}([X=2]\cap[Y=1]) \\ &= \frac{n(n+c)}{(n+b)(n+b+c)} + \frac{n\,b}{(n+b)(n+b+c)} \\ &= \frac{n\,\cancel{(n+c+b)}}{(n+b)\cancel{(n+b+c)}} = \frac{n}{n+b}\end{aligned}$$

- La famille $([Y=1], [Y=2])$ forme un système complet d'événements. Donc :

$$\mathbb{P}([Y=2]) = 1 - \mathbb{P}([Y=1]) = 1 - \frac{n}{n+b} = \frac{b}{n+b}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } Y(\Omega) = \{1,2\}. \text{ De plus : } \mathbb{P}([Y=1]) = \frac{n}{n+b} \text{ et } \mathbb{P}([Y=2]) = \frac{b}{n+b}.}$$

Commentaire

- On constate que Y suit la même loi que X.
  Ceci est tout à fait normal puisqu'on a remarqué à la question précédente que X et Y sont échangeables. Or, d'après la question ***2.***, si X et Y sont échangeables, alors X et Y ont même loi.
- Cependant, l'énoncé attendait vraiment ici l'utilisation de la formule des probabilités totales pour déterminer la loi de la v.a.r. Y. En effet, le caractère échangeable de X et Y est demandé à la question suivante.

□

d) Montrer que X et Y sont échangeables mais ne sont pas indépendantes.

Démonstration.

- Échangeabilité.

$$\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=2]) = \frac{n\,b}{(n+b)(n+b+c)} = \mathbb{P}([X=2]\cap[Y=1])$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } X \text{ et } Y \text{ sont échangeables.}}$$

- Indépendance.

$$\mathbb{P}([X=1]) \times \mathbb{P}([Y=2]) = \frac{n}{n+b} \times \frac{b}{n+b} = \frac{n\,b}{(n+b)^2}$$

De plus : $\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=2]) = \dfrac{n\,b}{(n+b)(n+b+c)}$

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=2]) = \mathbb{P}([X=1]) \times \mathbb{P}([Y=2]) \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{n\,b}{(n+b)(n+b+c)} = \frac{n\,b}{(n+b)^2} \\ \Leftrightarrow\quad & n+b = n+b+c \\ \Leftrightarrow\quad & c = 0 \end{aligned}$$

Or, d'après l'énoncé : $c \neq 0$ (on a même : $c > 0$). Ainsi :

$$\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=2]) \neq \mathbb{P}([X=1]) \times \mathbb{P}([Y=2])$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Commentaire

Récapitulons ce que l'on a démontré dans cet exercice.

- En question ***1.***, on a montré l'implication :

$$X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes et de même loi} \;\Rightarrow\; X \text{ et } Y \text{ sont échangeables}$$

- En question ***2.***, on a montré l'implication :

$$X \text{ et } Y \text{ sont échangeables} \;\Rightarrow\; X \text{ et } Y \text{ ont même loi}$$

- Les questions ***3.*** et ***4.*** consistaient à démontrer (en exhibant un contre-exemple) :

$$X \text{ et } Y \text{ sont échangeables} \quad \not\Rightarrow \quad X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}$$

□

9782340-026636_001_784.indd 47 30/07/2018 09:52

EDHEC 2016 : le sujet

Exercice 1

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 4A$ puis déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.

2. ***a)*** En déduire la seule valeur propre de A (donc aussi de f).

b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

3. Déterminer une base (u_1, u_2) du sous-espace propre de f associé à la valeur propre de f.

4. ***a)*** On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Vérifier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 2.

c) En écrivant $T = 2I + N$, déterminer, pour tout entier naturel n, la matrice T^n comme combinaison linéaire de I et N, puis de I et T.

5. ***a)*** Expliquer pourquoi l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = n2^{n-1}\ A - (n-1)\ 2^n\ I$$

b) Utiliser le polynôme annulateur obtenu à la première question pour déterminer A^{-1} en fonction de I et de A.

c) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5a*** reste valable pour $n = -1$.

Exercice 2

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in [n, +\infty[,\ f_n(x) = \displaystyle\int_n^x \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\, dt$.

1. Étude de f_n.

a) Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n.

b) En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

c) En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel, noté u_n, élément de $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.

2. Étude de la suite (u_n).

a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.

3. a) Utiliser la question ***2.b)*** pour compléter les commandes **Scilab** suivantes afin qu'elles permettent d'afficher un entier naturel n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4}.

```
n = 0
while ------
    n = ------
end
disp(n)
```

b) Le script affiche l'une des trois valeurs $n = 55$, $n = 70$ et $n = 85$.
Préciser laquelle en prenant $2,3$ comme valeur approchée de $\ln(10)$.

4. On pose $v_n = u_n - n$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

b) Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1, on a : $\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{x}{2}$.

c) Vérifier ensuite que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} \geqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\dfrac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$.

d) Déduire de l'encadrement obtenu en ***2.b)*** que : $u_n - n \underset{n \to +\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.

Exercice 3

- Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On désigne par p un réel de $]0, 1[$.
- On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V, telles que U suit la loi uniforme sur $[-3, 1]$, et V suit la loi uniforme sur $[-1, 3]$.
- On considère également une variable aléatoire Z, indépendante de U et V, dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}([Z = 1]) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Z = -1]) = 1 - p$$

- Enfin,on note X la variable aléatoire, définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = \begin{cases} U(\omega) & \text{si } Z(\omega) = 1 \\ V(\omega) & \text{si } Z(\omega) = -1 \end{cases}$$

- On note F_X, F_U et F_V les fonctions de répartition respectives des variables X, U et V.

1. Donner les expressions de $F_U(x)$ et $F_V(x)$ selon les valeurs de x.

2. a) Établir, grâce au système complet d'évènements $([Z = 1], [Z = -1])$, que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = p\ F_U(x) + (1 - p)\ F_V(x)$$

b) Vérifier que $X(\Omega) = [-3, 3]$ puis expliciter $F_X(x)$ dans les cas :

$$x < -3, \quad -3 \leqslant x \leqslant -1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3 \quad \text{et} \quad x > 3$$

c) On admet que X est une variable à densité. Donner une densité f_X de la variable aléatoire X.

d) Établir que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et une variance $\mathbb{V}(X)$, puis les déterminer.

3. On se propose de montrer d'une autre façon que X possède une espérance et un moment d'ordre 2 puis de les déterminer.

a) Vérifier que l'on a :

$$X = U\ \frac{1+Z}{2} + V\ \frac{1-Z}{2}$$

b) Déduire de l'égalité précédente que X possède une espérance et retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

c) En déduire également que X possède un moment d'ordre 2 et retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$.

4. *a)* Soit T une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
Déterminer la loi de $2T-1$.

b) On rappelle que `grand(1,1,'unf',a,b)` et `grand(1,1,'bin',p)` sont des commandes **Scilab** permettant de simuler respectivement une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[a,b]$ et une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
Écrire des commandes **Scilab** permettant de simuler U, V, Z, puis X.

Problème

Partie I : Questions préliminaires.

Dans cette partie, x désigne un réel élément de $[0,1[$.

1. *a)* Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0,x]$, simplifier la somme $\sum\limits_{p=1}^{n} t^{p-1}$.

b) En déduire que : $\sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$.

c) Établir par encadrement que l'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0$.

d) En déduire que : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

2. Soit m un entier naturel fixé. À l'aide de la formule du triangle de Pascal, établir l'égalité :

$$\forall q \geqslant m,\ \sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$$

3. Soit n un entier naturel non nul. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre x, et on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

a) Déterminer $S_n(\Omega)$ puis établir que, pour tout entier k supérieur ou égal à $n+1$, on a :

$$\mathbb{P}([S_{n+1}=k]) \ = \ \sum_{j=n}^{k-1} \mathbb{P}([S_n=j] \cap [X_{n+1}=k-j])$$

b) En déduire, par récurrence sur n, que la loi de S_n est donnée par :

$$\forall k \in [\![n,+\infty[\![,\ \mathbb{P}([S_n=k]) = \binom{k-1}{n-1}\ x^n\ (1-x)^{k-n}$$

c) En déduire, pour tout x de $]0,1[$ et pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1}\ (1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}$$

d) On rappelle que la commande `grand(1,n,'geom',p)` permet à **Scilab** de simuler n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre p.
Compléter les commandes **Scilab** suivantes pour qu'elles simulent la variable aléatoire S_n.

```
n = input('entrez une valeur de n supérieure à 1 :')
S = ------
disp(S)
```

Partie 2 : étude d'une variable aléatoire.

Dans cette partie, on désigne par p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1 - p$.
On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = -\frac{q^k}{k\ \ln(p)}$$

1. a) Vérifier que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs.

b) Montrer, en utilisant un résultat de la partie 1, que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k = 1$.

On considère dorénavant une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X = k]) = u_k$$

2. a) Montrer que X possède une espérance et la déterminer.

b) Montrer également que X possède une variance et vérifier que : $\mathbb{V}(X) = \dfrac{-q\ (q + \ln(p))}{(p\ \ln(p))^2}$.

3. Soit k un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire Y dont la loi, conditionnellement à l'évènement $[X = k]$, est la loi binomiale de paramètres k et p.

a) Montrer que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ puis utiliser la formule des probabilités totales, ainsi que la question ***1***) de la partie 1, pour montrer que :

$$\mathbb{P}([Y = 0]) = 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)}$$

b) Après avoir montré que, pour tout couple (k,n) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{\binom{k}{n}}{k} = \dfrac{\binom{k-1}{n-1}}{n}$, établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\mathbb{P}([Y = n]) = -\frac{p^n\ q^n}{n\ \ln(p)} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1}\ \left(q^2\right)^{k-n}$$

En déduire, grâce à la question ***3)*** de la première partie, l'égalité :

$$\mathbb{P}([Y = n]) = -\frac{q^n}{n\ (1+q)^n\ \ln(p)}$$

c) Vérifier que l'on a $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left([Y = k]\right) = 1$.

d) Montrer que Y possède une espérance et donner son expression en fonction de $\ln(p)$ et q.

e) Montrer aussi que Y possède une variance et que l'on a : $\mathbb{V}(Y) = -\dfrac{q\ (q + (1+q)\ \ln(p))}{(\ln(p))^2}$.

9782340-026636_001_784.indd 52 30/07/2018 09:52

EDHEC 2016 : le corrigé

Exercice 1

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 4A$ puis déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.

Démonstration.

- Tout d'abord : $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.
- Ainsi : $A^2 - 4A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \\ 4 & -4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} - 4I$.

$$\boxed{A^2 - 4A = -4I}$$

$$\boxed{\text{Donc } P(X) = X^2 - 4X + 4 \text{ est } \textbf{un} \text{ polynôme annulateur de degré 2 de } A.}$$

Commentaire

- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul P.
  On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus) n.
- Si P est un polynôme annulateur de A alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\, P$ est toujours un polynôme annulateur puisque :

  $$(\alpha\, P)(A) = \alpha\, P(A) = 0$$

  Cela suffit à démontrer que A possède une infinité de polynômes annulateurs.
  On peut en obtenir d'autres. Par exemple $Q(X) = (X - 5)\ P(X)$ est un polynôme annulateur de A puisque :

  $$Q(A) = (A - 5\,I)\ P(A) = 0$$

- Il faut donc parler `D'UN` polynôme annulateur d'une matrice.

□

2. a) En déduire la seule valeur propre de A (donc aussi de f).

Démonstration.

- On remarque que $P(X) = X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$. Ainsi, l'unique racine de P est 2.
  Or le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur de A.

$$\boxed{\text{Autrement dit : } \mathrm{Sp}(A) \subset \{2\}.}$$

Commentaire

- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de A. Si c'était le cas, A aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus 3 !). Par exemple, comme $Q(X) = (X-5)\,P(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.
- On dit généralement que les racines d'un polynôme annulateur sont des valeurs propres **possibles** de A (comprendre qu'elles sont potentiellement des valeurs propres). Il faut alors démontrer qu'elles sont réellement des valeurs propres.

- Montrons maintenant que 2 est une valeur propre de A (*i.e.* $\{2\} \subset \mathrm{Sp}(A)$).

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(A-2I) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)\\ &= \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)\right)\\ &= \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)\right) = 1 < 3\end{aligned}$$

La matrice $A - 2I$ n'est pas inversible, ce qui signifie que 2 est valeur propre de A.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f) = \{2\}}$$

Commentaire

- On peut aussi affimer que $A-2\,I$ est non inversible en remarquant que cette matrice possède deux vecteurs colonnes (ou lignes) égaux (colinéaires suffirait).

□

b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

Démonstration.

- D'après la question précédente, A possède 2 comme unique valeur propre.
- Supposons par l'absurde que A est diagonalisable.
  Il existe alors $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$A = P\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}P^{-1} = P\,(2\,I_3)\,P^{-1} = 2\,PP^{-1} = 2\,I_3$$

  ce qui est impossible puisque $A \neq 2\,I_3$.

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

- Montrons que A est inversible.
  On sait que $\mathrm{Sp}(A) = \{2\}$. Donc en particulier, 0 n'est pas valeur propre de A.

$$\boxed{\text{Ainsi } A \text{ est inversible.}}$$

Commentaire

- Il est aussi possible de démontrer que A n'est pas diagonalisable en déterminant la dimension de $E_2(A)$, espace propre associé à l'unique valeur propre 2.
  On démontre alors que $\dim(E_2(A)) = 2 \neq 3$ (*cf* question suivante).
- Concernant l'inversibilité de A on utilise :

$$A \text{ non inversible } \Leftrightarrow \text{ 0 est valeur propre de } A$$

  On peut aussi démontrer l'inversibilité de A en déterminant son inverse par la méthode proposée en ***5.b)***.
- Toutes les méthodes donnant le bon résultat sont acceptées. Évidemment, les méthodes les plus longues produisent une perte de temps et sont pénalisantes à terme.

□

3. Déterminer une base (u_1, u_2) du sous-espace propre de f associé à la valeur propre de f.

Démonstration.

- Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in E_2(f) & \Longleftrightarrow & f(u) = 2\ u \\
& \Longleftrightarrow & (f - 2\ Id)(u) = 0 \\
& \Longleftrightarrow & (A - 2\ I_3)\ U = 0 \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & y & - & z \end{array} \right.
\end{array}$$

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_2(f) & = & \big\{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid\ f(u) = 2u\big\} \\
& = & \big\{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid\ x = y - z\big\} \\
& = & \big\{(y - z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\big\} \\
& = & \big\{y \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (-1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \ \mid\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\big\} \\
& = & \mathrm{Vect}\left((1, 1, 0), (-1, 0, 1)\right)
\end{array}$$

- Notons $u_1 = (1, 1, 0)$ et $u_2 = (-1, 0, 1)$. La famille (u_1, u_2) est :
  × génératrice de $E_2(f)$.
  × libre car constituée de **deux** vecteurs non colinéaires.
  C'est donc une base de $E_2(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi } (u_1, u_2) \text{ est une base de } E_2(f).}$$

Commentaire

- Comme A est la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}$, alors : $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f)$.
- Par contre, comme on le voit ici : $E_2(A) \neq E_2(f)$. En effet :
  - × le sous espace-propre $E_2(A)$ est un sous-ensemble de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, espace vectoriel dont les vecteurs sont des matrices de taille 3×1.
  - × le sous-espace propre $E_2(f)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$, espace vectoriel dont les vecteurs sont des triplets de réels.

  Ce qu'on peut résumer par : $(x, y, z) \neq \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

□

4. a) On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $u_3 = e_1 + e_2 + e_3 = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1) = (1, 1, 1)$.
- Montrons que la famille $\big((1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\big)$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons :

$$\lambda_1 \cdot (1, 1, 0) + \lambda_2 \cdot (-1, 0, 1) + \lambda_3 \cdot (1, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

Ceci équivaut au système :

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \\
\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \quad & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \\
\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} \quad & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \\
\Longleftrightarrow \quad & \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right. \\
& \textit{(par remontées successives)}
\end{aligned}$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est donc libre.

- De plus, $\mathrm{Card}((u_1, u_2, u_3)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ est donc une base de } \mathbb{R}^3.}$$

Commentaire

- Le terme **cardinal** est réservé aux ensembles finis. La famille (u_1, u_2, u_3) est un ensemble qui contient 3 vecteurs. Elle est donc finie, de cardinal 3 (ce qu'on note $\mathrm{Card}((u_1, u_2, u_3)) = 3$).
- $\mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3)$ est l'espace vectoriel constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs (u_1, u_2, u_3). C'est un ensemble **infini** de vecteurs, on ne peut parler de son cardinal. Par contre, si l'on dispose d'une base (u_1, u_2, u_3) d'un espace vectoriel, tout vecteur se décompose de manière unique sur cette base. Ceci permet de donner une représentation finie de cet ensemble infini.
- Les notations : $\cancel{\mathrm{Card}(\mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3))}$ et $\cancel{\dim((u_1, u_2, u_3))}$ n'ont aucun sens !

□

b) Vérifier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 2.

Démonstration.

Notons $U_1 = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_3 = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- On a démontré précédemment que $u_1 \in E_2(f)$. Ainsi : $f(u_1) = 2 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.

  On en déduit que $\text{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f(u_1)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- On a démontré précédemment que $u_2 \in E_2(f)$. Ainsi : $f(u_2) = 0 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.

  On en déduit que $\text{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f(u_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(u_3)) = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_3) = A \times U_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

  On cherche alors à décomposer ce vecteur suivant (U_1, U_2, U_3).

  Autrement dit, on cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  Ce qui équivaut au système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 3 \\ \alpha & & & + & \gamma & = & 4 \\ & & \beta & + & \gamma & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 3 \\ & & \beta & & & = & 1 \\ & & \beta & + & \gamma & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 3 \\ & & \beta & & & = & 1 \\ & & & & \gamma & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccc} \alpha & - & \beta & = & 1 \\ & & \beta & = & 1 \\ & & \gamma & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{ccc} \alpha & = & 2 \\ \beta & = & 1 \\ \gamma & = & 2 \end{array}\right.$$

  On en déduit que $f(u_3) = 2 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 2 \cdot u_3$.

  Et ainsi : $\text{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f(u_3)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } T = \text{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

□

c) En écrivant $T = 2I + N$, déterminer, pour tout entier naturel n, la matrice T^n comme combinaison linéaire de I et N, puis de I et T.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après l'énoncé, $N = T - 2 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- De plus : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

  On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = 0$.
  (on peut aussi noter que pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = N^2 \ N^{k-2} = 0 \times N^{k-2} = 0$)
- Les matrices $2I$ et N commutent puisque I commute avec toute matrice carrée de même ordre. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton.

$$\begin{aligned}
T^n &= (2\,I + N)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2\,I)^{n-k} \ N^k \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \, I^{n-k} \ N^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \, I \ N^k \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \ N^k && \textit{(car on a : } \forall j \in \mathbb{N},\ I^j = I\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} 2^{n-k} \ N^k + \cancel{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \ N^k} && \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} 2^{n-k} \ N^k && \textit{(car on a montré : } \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0\textit{)} \\
&= \binom{n}{0} 2^n \ N^0 + \binom{n}{1} 2^{n-1} \ N^1 \ = \ 2^n \ I + n \ 2^{n-1} \ N
\end{aligned}$$

- Enfin : $2^0 \ I + 0 \ 2^{-1} \ N = I$ et $T^0 = I$.
  La formule précédente reste valable pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ T^n = 2^n \ I + n \ 2^{n-1} \ N.}$$

- De plus, comme $N = T - 2I$, on obtient :

$$T^n \ = \ 2^n \ I + n \ 2^{n-1} \ (T - 2I) \ = \ 2^n \ I + n \ 2^{n-1} \ T - n \ 2^n \ I \ = \ n \ 2^{n-1} \ T - (n-1) \ 2^n \ I$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ T^n = n \ 2^{n-1} \ T - (n-1) \ 2^n \ I.}$$

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

  (la deuxième somme est nulle si $p = n$)
  où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.
- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
  L'argument $n \geqslant 1$ est donc nécessaire pour découper la somme.
  Le cas $n = 0$ doit alors être traité à part.

□

5. a) Expliquer pourquoi l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = n2^{n-1}\ A - (n-1)\ 2^n\ I$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$

- Remarquons tout d'abord, à l'aide de la question précédente :

$$T^n \ = \ n2^{n-1}\ T - (n-1)\ 2^n\ I$$

Ainsi $\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\big)^n \ = \ n2^{n-1}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) - (n-1)\ 2^n\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathrm{id})$ *(par définition de T et I)*

$= \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(n2^{n-1}\ f - (n-1)\ 2^n\ \mathrm{id}\big)$ *(par linéarité de l'application* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(.)$*)*

Enfin, comme $\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\big)^n = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f^n)$, on obtient :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f^n) \ = \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(n2^{n-1}\ f - (n-1)\ 2^n\ \mathrm{id}\big)$$

L'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(.)$ étant bijective, on en conclut :

$$\boxed{f^n \ = \ n2^{n-1}\ f - (n-1)\ 2^n\ \mathrm{id}}$$

- En appliquant $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$ de part et d'autre de cette égalité, on obtient, à l'aide des propriétés listées au-dessus :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^n) \ = \ n2^{n-1}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) - (n-1)\ 2^n\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id})$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } A^n = n2^{n-1}\ A - (n-1)\, 2^n\ I}$$

Commentaire

- Il faut comprendre que l'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$ établit un isomorphisme entre l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ et l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
La base $\mathscr{B}$ étant fixée, cela signifie que tout endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ possède une unique représentation matricielle dans $\mathscr{B}$ et qu'inversement toute matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est la représentation matricielle dans $\mathscr{B}$ d'un unique endomorphisme.
- Le passage du monde des endomorphismes vers le monde matriciel (application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$) est parfois appelé « passerelle endomorphisme-matrice ».
Le passage du monde matriciel vers le monde des endomorphismes (la réciproque de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$) est parfois appelé « passerelle matrice-endomorphisme ».
On peut donc rédiger comme suit.

On rappelle :

$$T^n = n2^{n-1}\ T - (n-1)\, 2^n\ I$$

× Comme T est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$, on en déduit, par la passerelle matrice-endomorphisme :

$$f^n = n2^{n-1}\ f - (n-1)\, 2^n\ Id$$

× Comme A est la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3), on en déduit, par la passerelle endomorphisme-matrice :

$$A^n = n2^{n-1}\ A - (n-1)\, 2^n\ I$$

Commentaire

On pouvait procéder autrement.
Notons $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} A & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \\ & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \ = \ P \times T \times P^{-1} \end{array}$$

Par une récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P\, T^n\, P^{-1}$.
(la récurrence n'est pas explicitement demandée dans le sujet, il n'est donc pas utile de la faire)
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $T^n = n\ 2^{n-1}\ T - (n-1)\ 2^n\ I$. Donc :

$$\begin{array}{rcl} A^n & = & P\ T^n\ P^{-1} \ = \ P\ (n\ 2^{n-1}\ T - (n-1)\ 2^n\ I)\ P^{-1} \\ & = & n\ 2^{n-1}\ P\ T\ P^{-1} - (n-1)\ 2^n\ P\ P^{-1} \\ & = & n\ 2^{n-1}\ A - (n-1)\ 2^n\ I \end{array}$$

Et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = n\ 2^{n-1}\ A - (n-1)\ 2^n\ I$.

□

b) Utiliser le polynôme annulateur obtenu à la première question pour déterminer A^{-1} en fonction de I et de A.

Démonstration.
D'après la question ***1.***, $A^2 - 4A = -4I$.

On en déduit que $-\dfrac{1}{4}\ (A^2 - 4A) = I$. Et ainsi :

$$A \times \left(-\frac{1}{4}\ (A - 4I)\right) = I$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } A \text{ est inversible, d'inverse : } A^{-1} = -\frac{1}{4}\ (A - 4I).}$$

□

c) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5a*** reste valable pour $n = -1$.

Démonstration.
Si $n = -1$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} n\ 2^{n-1}\ A - (n-1)\ 2^n\ I & = & (-1)\ 2^{-1-1}\ A - (-1-1)\ 2^{-1}\ I \\ & = & (-1)\ \dfrac{1}{2^2}\ A - (-2)\ \dfrac{1}{2}\ I \ = \ -\dfrac{1}{4}\ A + I \\ & = & -\dfrac{1}{4}(A - 4I) \ = \ A^{-1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la formule trouvée à la question } \textbf{\textit{5.a)}} \text{ reste valable pour } n = -1.}$$

□

9782340-026636_001_784.indd 60 30/07/2018 09:52

Exercice 2

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in [n, +\infty[,\ f_n(x) = \displaystyle\int_n^x \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\ dt$.

1. Étude de f_n.

a) Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n.

Démonstration.
Dans la suite, notons g la fonction $g : t \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{t}}$.

- La fonction g est continue sur $[n, +\infty[$ car elle est la composée $g = g_2 \circ g_1$ où :

× $g_1 : t \mapsto \sqrt{t}$ est :
  - continue sur $[n, +\infty[$ (car $n \geqslant 0$),
  - telle que $g_1([n, +\infty[) \subset \mathbb{R}$.

× $g_2 : t \mapsto \exp(t)$, continue sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, g admet une primitive G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n, +\infty[$.

- Soit $x \in [n, +\infty[$. Par définition :

$$f_n(x) = \int_n^x \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\ dt = \left[\ G(t)\ \right]_n^x = G(x) - G(n)$$

$$\boxed{\text{La fonction } f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [n, +\infty[\text{ car } G \text{ l'est.}}$$

(f_n est la somme d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ et d'une constante)

- De plus :

$$f_n'(x) = G'(x) - 0 = g(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$$

$$\boxed{\forall x \in [n, +\infty[,\ f_n'(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}}$$

- On remarque enfin que $f_n'(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}} > 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } f_n \text{ est strictement croissante sur } [n, +\infty[.}$$

Commentaire

- On peut aussi rédiger en se servant du fait que la fonction f_n est la primitive de g sur $[n, +\infty[$ qui s'annule au point n. On en déduit immédiatement que f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ et : $\forall x \in [n, +\infty[,\ f_n'(x) = g(x)$.
- L'intérêt de la démonstration précédente est qu'elle est plus générale et peut donc être adaptée à tous les cas particuliers. Imaginons par exemple une fonction h_n définie par :

$$\forall x \in [n, +\infty[,\ h_n(x) = \int_n^{x^2} \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\ dt = \left[\ G(t)\ \right]_n^{x^2} = G(x^2) - G(n)$$

La fonction h_n `N'EST PAS` une primitive de g.
L'expression ci-dessus permet toutefois de conclure que h_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ comme composée de $x \mapsto x^2$ par G toutes les deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\forall x \in [n, +\infty[,\ h_n'(x) = 2x \times G'(x^2) = 2x \times g(x^2) = 2x\ \mathrm{e}^{\sqrt{x^2}} = 2x\ \mathrm{e}^{x}$$

- Il n'y a pas, dans le programme ECE, de théorème permettant de dériver sous le symbole d'intégration. Les tentatives de ce genre révèlent une mauvaise compréhension des objets étudiés.

□

b) En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

Démonstration.
Soit $x \in [n, +\infty[$.

- Soit $t \in [n, x]$. Remarquons tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} t \geqslant n & \Leftrightarrow & \sqrt{t} \geqslant \sqrt{n} & \textit{(car } t \mapsto \sqrt{t} \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & e^{\sqrt{t}} \geqslant e^{\sqrt{n}} & \textit{(car } t \mapsto e^t \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall t \in [n, x], \ \ g(t) \geqslant e^{\sqrt{n}}}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($x \geqslant n$) :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_n^x e^{\sqrt{t}}\, dt & \geqslant & \displaystyle\int_n^x e^{\sqrt{n}}\, dt \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ f_n(x) & \geqslant & e^{\sqrt{n}}\,(x-n) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{array}$$

En effet, $e^{\sqrt{n}} > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-n) = +\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit, par théorème de comparaison : } \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty.}$$

Commentaire

- Dans cette question, il s'agit de déterminer la limite de $f_n(x)$ quand $\boldsymbol{x} \to +\infty$ (à n fixé) et non pas la limite de $f_n(x)$ quand $\boldsymbol{n} \to +\infty$ (à x fixé).
- Une lecture précise du sujet doit permettre de ne pas faire ce type de confusions.

□

c) En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel, noté u_n, élément de $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Notons tout d'abord : $f_n(n) = \displaystyle\int_n^n e^{\sqrt{t}}\, dt = 0$.
- La fonction f_n est :
  - × continue sur l'intervalle $[n, +\infty[$,
  - × strictement croissante sur $[n, +\infty[$.

  Ainsi, f_n réalise une bijection de $[n, +\infty[$ dans $f_n\big([n, +\infty[\big)$.

$$f_n\big([n, +\infty[\big) = [f_n(n), \lim_{x\to+\infty} f_n(x)[= [0, +\infty[$$

- Comme $1 \in [0, +\infty[$, on en déduit que 1 admet un unique antécédent $u_n \in [n, +\infty[$ par la fonction f_n.

$$\boxed{\text{Ainsi, il existe un unique réel } u_n \in [n, +\infty[\text{ tel que } f_n(u_n) = 1.}$$

□

2. Étude de la suite (u_n).

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Par définition de u_n, on sait que $u_n \in [n, +\infty[$. Ainsi, $u_n \geqslant n$.
- Or : $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\boxed{\text{Par théorème de comparaison, } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

□

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.

Démonstration.

- Soit $t \in [n, u_n]$. Remarquons tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} n \leqslant t \leqslant u_n & \Leftrightarrow & \sqrt{n} \leqslant \sqrt{t} \leqslant \sqrt{u_n} & \textit{(car } t \mapsto \sqrt{t} \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{e}^{\sqrt{n}} \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{t}} \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{u_n}} & \textit{(car } t \mapsto e^t \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall t \in [n, u_n],\ \mathrm{e}^{\sqrt{n}} \leqslant g(t) \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{u_n}}}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(u_n \geqslant n)$:

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_n^{u_n} \mathrm{e}^{\sqrt{n}}\, dt & \leqslant & \displaystyle\int_n^{u_n} \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\, dt & \leqslant & \displaystyle\int_n^{u_n} \mathrm{e}^{\sqrt{u_n}}\, dt \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \mathrm{e}^{\sqrt{n}}\,(u_n - n) & \leqslant & f_n(u_n) & \leqslant & \mathrm{e}^{\sqrt{u_n}}\,(u_n - n) \\ & & \shortparallel & & \\ & & 1 & & \end{array}$$

- Ainsi : $\mathrm{e}^{\sqrt{n}}\,(u_n - n) \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Par multiplication par } \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \geqslant 0, \text{ on obtient : } u_n - n \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}}$$

- Et : $1 \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{u_n}}\,(u_n - n)$.

$$\boxed{\text{Par multiplication par } \mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} \geqslant 0, \text{ on obtient : } \mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n}$$

□

3. ***a)*** Utiliser la question ***2.b)*** pour compléter les commandes **Scilab** suivantes afin qu'elles permettent d'afficher un entier naturel n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4}.

```
n = 0
while ------
    n = ------
end
disp(n)
```

Démonstration.

- D'après ce qui précède :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - n \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$$
- Afin de trouver un entier n tel que $u_n - n \leqslant 10^{-4}$, il suffit de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\mathrm{e}^{-\sqrt{N}} \leqslant 10^{-4}$$
- On obtient alors, par transitivité :
$$u_N - N \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{N}} \leqslant 10^{-4}$$
- Il s'agit donc de trouver le premier entier N tel que $\mathrm{e}^{-\sqrt{N}} \leqslant 10^{-4}$.
Pour ce faire, on teste successivement tous les entiers naturels.
On arrête l'itération dès le premier entier qui satisfait cette relation.

```
while exp(-sqrt(n)) > 10 ^ (-4)
    n = n + 1
end
```

Commentaire

- La terminaison du programme présenté est assuré par le fait que $\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N$, $\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \leqslant \varepsilon$.
C'est notamment vrai pour $\varepsilon = 10^{-4}$.
- L'énoncé original contenait une coquille sans gravité. En effet, la quesiton posée demandait de trouver le premier n tel que v_n est inférieur ou égal à 10^{-4}.
Or, la suite (v_n) n'est introduite qu'en question *4*.

□

b) Le script affiche l'une des trois valeurs $n = 55$, $n = 70$ et $n = 85$.
Préciser laquelle en prenant $2,3$ comme valeur approchée de $\ln(10)$.

Démonstration.

- On cherche à déterminer l'entier N précédent. Or :
$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \leqslant 10^{-4} \ &\Leftrightarrow\ -\sqrt{n} \leqslant \ln(10^{-4}) = -4\ln(10) && \textit{(car } x \mapsto \ln(x) \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\ &\Leftrightarrow\ \sqrt{n} \geqslant 4\ln(10) \\ &\Leftrightarrow\ n \geqslant \big(4\ln(10)\big)^2 && \textit{(car } x \mapsto x^2 \textit{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[\textit{)} \end{aligned}$$
Ainsi, le premier entier vérifiant la relation : $\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \leqslant 10^{-4}$ est l'entier $N = \lceil (4\ln(10))^2 \rceil$.
(où $x \mapsto \lceil x \rceil$ désigne la fonction partie entière par excès)
- Cherchons maintenant une valeur approchée de $(4\ln(10))^2$.
D'après l'énoncé : $\ln(10) \simeq 2,3$, donc $4\ln(10) \simeq 9,2 \geqslant 9$.
On en déduit :
$$\big(4\ln(10)\big)^2 \geqslant 9^2 = 81$$
La seule solution possible parmi celles proposées est $n = 85$.

$$\boxed{\text{Le script affiche } n = 85.}$$

□

4. On pose $v_n = u_n - n$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question ***2.b)***, $\mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$. Autrement dit :
$$\mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} \leqslant v_n \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$$
- Or :
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} = \lim\limits_{u\to+\infty} \mathrm{e}^{-u} = 0$.
  En effet : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} = \lim\limits_{u\to+\infty} \mathrm{e}^{-u} = 0$.
  En effet, on rappelle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (question ***2.a)***) et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = +\infty$.

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement, } \lim_{n\to+\infty} v_n = 0.}$$
□

b) Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1, on a : $\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{x}{2}$.

Démonstration.

- Notons h la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par :
$$h(x) = \sqrt{1+x}$$
- La fonction h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1, +\infty[$ et, pour tout $x \in\,]-1, +\infty[$, on a :
$$h'(x) = \frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad h''(x) = -\frac{1}{4}\,(1+x)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{4}\,\frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{4}\,\frac{1}{(1+x)\,\sqrt{1+x}}$$
Or : $1 + x > 0$ et donc $\sqrt{1+x} > 0$. On en déduit :
$$\forall x \in\,]-1, +\infty[,\ h''(x) < 0$$
- La fonction h est donc concave.
Sa courbe représentative est donc située en dessous de ses tangentes.
En particulier, elle est située en dessous de sa tangente au point d'abscisse 0. Ainsi :
$$\forall x \in [-1, +\infty[,\ h(x) \ \leqslant\ h(0) + h'(0)\ (x - 0)$$
Enfin : $h(0) = \sqrt{1+0} = 1$ et $h'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+0}} = \dfrac{1}{2}$.
$$\boxed{\forall x \in [-1, +\infty[,\ \sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2}}$$

Commentaire

- On a dérivé h grâce à l'écriture : $h(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$.
Il faut savoir passer d'une écriture à l'autre dans les calculs.
- Le membre droit de l'inégalité souhaitée est un polynôme de degré 1. Sa représentation graphique est une droite. C'est ce constat qui doit faire penser à une inégalité de convexité.
- Si on ne pense pas à utiliser une propriété de convexité, on peut aussi résoudre cette question en étudiant le signe de la fonction $x \mapsto 1 + \dfrac{x}{2} - \sqrt{1+x}$.

□

c) Vérifier ensuite que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} \geqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\dfrac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} \geqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} \geqslant \exp\left(-\sqrt{n} - \frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \\
&\Leftrightarrow -\sqrt{u_n} \geqslant -\sqrt{n} - \frac{v_n}{2\sqrt{n}} && \textit{(car } x \mapsto \ln(x) \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{n} + \frac{v_n}{2\sqrt{n}} \\
&\Leftrightarrow \frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{n}} \leqslant 1 + \frac{v_n}{2n} && \textit{(car } \sqrt{n} > 0\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{\frac{u_n}{n}} \leqslant 1 + \frac{v_n}{2n} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{\frac{v_n + n}{n}} \leqslant 1 + \frac{v_n}{2n} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{1 + \frac{v_n}{n}} \leqslant 1 + \frac{\frac{v_n}{n}}{2}
\end{aligned}$$

- En appliquant le résultat de la question ***4.b)*** à $x = \dfrac{v_n}{n}$ (ce qui est licite car $\dfrac{v_n}{n} \geqslant 0 > -1$), on démontre la dernière inégalité.
  Par raisonnement par équivalence, la première inégalité l'est alors aussi.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ \mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} \geqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)}$$

Commentaire

- Le mode de raisonnement le plus habituel est celui par implication : on part d'une hypothèse et par une suite logique de propositions, on aboutit au résultat souhaité.
- Ici, on raisonne par équivalence : on démontre que le résultat souhaité a la même valeur de vérité qu'une proposition plus simple à démontrer. Le fait que l'on travaille par équivalence permet de s'assurer que l'on peut remonter de cette proposition jusqu'au résultat. Ce mode de démonstration est adapté à cette question car le résultat à démontrer ne semble pas directement impliqué par une hypothèse à disposition.
- Le programme officiel interdit l'utilisation du symbole $\Leftrightarrow$ comme abréviation.
  L'utilisation de ce symbole n'est pas neutre et doit être réservée au mode de raisonnement par équivalence.

$\square$

d) Déduire de l'encadrement obtenu en ***2.b)*** que : $u_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question ***2.b)*** :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \ \geqslant \ u_n - n \ &\geqslant \ \mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} \\ &\geqslant \ \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \quad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{4.c)}}\textit{)} \end{aligned}$$

- Comme $\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} > 0$, on obtient :

$$1 \ \geqslant \ \frac{u_n - n}{\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}} \ \geqslant \ \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$$

- Or, d'après la question ***4.a)***, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
  On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{v_n}{2\sqrt{n}} = 0$ et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(-\dfrac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) = \mathrm{e}^0 = 1$.
  Ainsi, par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n - n}{\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}} = 1$.

$$\boxed{u_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}}$$

□

Exercice 3

- Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On désigne par p un réel de $]0,1[$.
- On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V, telles que U suit la loi uniforme sur $[-3,1]$, et V suit la loi uniforme sur $[-1,3]$.
- On considère également une variable aléatoire Z, indépendante de U et V, dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}([Z=1]) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Z=-1]) = 1-p$$

- Enfin,on note X la variable aléatoire, définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = \begin{cases} U(\omega) & \text{si } Z(\omega) = 1 \\ V(\omega) & \text{si } Z(\omega) = -1 \end{cases}$$

- On note F_X, F_U et F_V les fonctions de répartition respectives des variables X, U et V.

1. Donner les expressions de $F_U(x)$ et $F_V(x)$ selon les valeurs de x.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, $U \hookrightarrow \mathcal{U}([-3,1])$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathbb{R},\ F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ \dfrac{x+3}{4} & \text{si } x \in [-3,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.}$$

- D'après l'énoncé, $V \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,3])$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathbb{R},\ F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{x+1}{4} & \text{si } x \in [-1,3] \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}.}$$

Commentaire

- Une bonne connaissance du cours est une condition *sine qua non* de réussite au concours. En effet, on trouve dans toutes les épreuves de maths (même pour les écoles les plus prestigieuses), des questions d'application directe du cours.
- Ici, il suffit de connaître la fonction de répartition d'une variable $U \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$ (avec $a < b$) :

$$F_U : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

□

2. a) Établir, grâce au système complet d'évènements $([Z=1], [Z=-1])$, que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = p\ F_U(x) + (1-p)\ F_V(x)$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
La famille $\big([Z=1], [Z=-1]\big)$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcccl} \mathbb{P}([X \leqslant x]) & = & \mathbb{P}([Z=1] \cap [X \leqslant x]) + \mathbb{P}([Z=-1] \cap [X \leqslant x]) & & \\ & = & \mathbb{P}([Z=1] \cap [U \leqslant x]) + \mathbb{P}([Z=-1] \cap [V \leqslant x]) & & \textit{(par définition de } X\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}([Z=1]) \times \mathbb{P}([U \leqslant x]) + \mathbb{P}([Z=-1]) \times \mathbb{P}([V \leqslant x]) & & \textit{(car } Z \textit{ est indépendante de } U \textit{ et de } V\textit{)} \\ & = & p \times \mathbb{P}([U \leqslant x]) + (1-p) \times \mathbb{P}([V \leqslant x]) & & \\ & = & p \times F_U(x) + (1-p) \times F_V(x) & & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = p\ F_U(x) + (1-p)\ F_V(x).}$$

□

b) Vérifier que $X(\Omega) = [-3,3]$ puis expliciter $F_X(x)$ dans les cas :

$$x < -3, \quad -3 \leqslant x \leqslant -1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3 \quad \text{et} \quad x > 3$$

Démonstration.

- Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.
  - Si $Z(\omega) = 1$ alors, par définition, $X(\omega) = U(\omega)$.
    Comme $U \hookrightarrow \mathcal{U}([-3,1])$ alors $U(\omega) \in [-3,1]$.
    Dans ce cas, $X(\omega) \in [-3,1]$.

– Si $Z(\omega) = -1$ alors, par définition, $X(\omega) = V(\omega)$.
Comme $V \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,3])$ alors $U(\omega) \in [-1,3]$.
Dans ce cas, $X(\omega) \in [-1,3]$.

Ainsi, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \in [-3,1] \cup [-1,3] = [-3,3]$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } X(\Omega) \subset [-3,3].}$$

Commentaire

- On peut supposer ici qu'une argumentation moins formelle serait acceptée par le correcteur. Comme X prend les mêmes valeurs que U ou V (selon les valeurs prises par Z), on peut écrire :
$$X(\Omega) \subset U(\Omega) \cup V(\Omega) = [-3,1] \cup [-1,3] = [-3,3]$$
- On peut aussi supposer qu'une disjonction de cas écrite sans les ω (cas $Z = 1$ et cas $Z \neq 1$) serait acceptée. Cependant, il faut bien comprendre que toute v.a.r. Z est une application $Z : \Omega \to \mathbb{R}$. Écrire « si $Z = 1$ » signifie donc que l'on considère tous les éléments $\omega \in \Omega$ tels que $Z(\omega) = 1$ c'est à dire tous les éléments ω qui réalisent l'événement $[Z = 1]$.
- Une dernière possibilité est d'écrire la rédaction (correcte) suivante :
  – si l'événement $[Z = 1]$ est réalisé alors X prend la même valeur que U, v.a.r. qui prend ses valeurs dans $[-3,1]$.
  – si l'événement $[Z = -1]$ est réalisé alors X prend la même valeur que V, v.a.r. qui prend ses valeurs dans $[-1,3]$.

  Ainsi, X prend ses valeurs dans $[-3,1] \ \cup\ [-1,3] = [-3,3]$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Plusieurs cas se présentent.
  – Si $x < -3$ alors $[X \leqslant x] = \varnothing$.
  On en déduit que $F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = 0$.
  – Si $x \in [-3,-1]$ alors, d'après la question précédente :
$$F_X(x) \ = \ p\ F_U(x) + (1-p)\ F_V(x) \ = \ p\frac{x+3}{4} + (1-p) \times 0 \ = \ p\ \frac{x+3}{4}$$
  – Si $x \in [-1,1]$ alors, d'après la question précédente :
$$F_X(x) \ = \ p\ F_U(x) + (1-p)\ F_V(x) \ = \ p\ \frac{x+3}{4} + (1-p)\frac{x+1}{4} \ = \ \frac{x+2p+1}{4}$$
  – Si $x \in [1,3]$ alors, d'après la question précédente :
$$F_X(x) \ = \ p\ F_U(x) + (1-p)\ F_V(x) \ = \ p \times 1 + (1-p)\ \frac{x+1}{4} \ = \ p + (1-p)\ \frac{x+1}{4}$$
  – Si $x > 3$ alors $[X \leqslant x] = \Omega$.
  On en déduit que $F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = 1$.

$$\boxed{\text{On en conclut que, pour tout } x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ p\ \dfrac{x+3}{4} & \text{si } x \in [-3,-1] \\ \dfrac{x+2p+1}{4} & \text{si } x \in [-1,1] \\ p + (1-p)\ \dfrac{x+1}{4} & \text{si } x \in [1,3] \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}}$$
□

c) On admet que X est une variable à densité. Donner une densité f_X de la variable aléatoire X.

Démonstration.

- La fonction F_X est :
  - × continue sur $\mathbb{R}$.
    En effet, elle est de classe $\mathcal{C}^0$ (même $\mathcal{C}^\infty$) sur $]-\infty,-3[\,\cup\,]-3,-1[\,\cup\,]-1,1[\,\cup\,]1,3[\,\cup\,]3,+\infty[$ car polynomiale sur chacun de ces intervalles.
    De plus, elle est continue en -3 car : $\lim\limits_{x\to(-3)^-} F_X(x) = F_X(-3) = \lim\limits_{x\to(-3)^+} F_X(x) = 0$.
    De la même manière, elle est aussi continue en -1, 1 et 3.
  - × de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,-3[\,\cup\,]-3,-1[\,\cup\,]-1,1[\,\cup\,]1,3[\,\cup\,]3,+\infty[\; = \mathbb{R}\setminus\{-3,-1,1,3\}$.

  Ainsi, X est une variable à densité.
- Afin d'obtenir une densité f_X, on dérive F_X sur les intervalles **ouverts**.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Plusieurs cas se présentent :
  - × si $x \in\,]-\infty,-3[$ alors $f_X(x) = F_X'(x) = 0$.
  - × si $x \in\,]-3,-1[$ alors $f_X(x) = F_X'(x) = \dfrac{p}{4}$.
  - × si $x \in\,]-1,1[$ alors $f_X(x) = F_X'(x) = \dfrac{1}{4}$.
  - × si $x \in\,]1,3[$ alors $f_X(x) = F_X'(x) = \dfrac{1-p}{4}$.
  - × si $x \in\,]3,+\infty[$ alors $f_X(x) = F_X'(x) = 0$.

  Enfin, on **choisit**, par exemple, $f_X(-3) = 0$, $f_X(-1) = \dfrac{1}{4}$, $f_X(1) = \dfrac{1}{4}$ et $f_X(3) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathbb{R},\quad f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -3 \\ \dfrac{p}{4} & \text{si } x \in\,]-3,-1[\\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x \in [-1,1] \\ \dfrac{1-p}{4} & \text{si } x \in\,]1,3[\\ 0 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}}$$

Commentaire

Il faut bien comprendre qu'on peut prendre n'importe quelle valeur positive pour f_n en -3, -1, 1 et 3. On peut ainsi construire une infinité de densités de Y_n.
C'est pourquoi on parle d'**une** densité.

□

d) Établir que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et une variance $\mathbb{V}(X)$, puis les déterminer.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f_X(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour les calculs de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\ f_X(t)\ dt$.

- Remarquons tout d'abord :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f_X(t)\ dt \ = \ \int_{-3}^{3} t\ f_X(t)\ dt$$

car f est nulle en dehors de $[-3, 3]$.

- La fonction $t \mapsto t\ f(t)$ est **continue par morceaux** sur $[-3, 3]$.
On en déduit que $\displaystyle\int_{-3}^{3} t\ f_X(t)\ dt$ est bien définie et que X admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t\ f_X(t)\ dt \\
&= \cancel{\int_{-\infty}^{-3} t\ 0\ dt} + \int_{-3}^{-1} t\ \frac{p}{4}\ dt + \int_{-1}^{1} t\ \frac{1}{4}\ dt + \int_{1}^{3} t\ \frac{1-p}{4}\ dt + \cancel{\int_{3}^{+\infty} t\ 0\ dt} \\
&= \frac{p}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-3}^{-1} + \frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1} + \frac{1-p}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{1}^{3} \\
&= \frac{p}{8}\ ((-1)^2 - (-3)^2) + \frac{1}{8}\ (1^2 - (-1)^2) + \frac{1-p}{8}\ (3^2 - 1^2) \\
&= \frac{p}{8}\ (1-9) + \frac{1}{8}\ \cancel{(1-1)} + \frac{1-p}{8}\ (9-1) \\
&= \frac{1}{8}\ (-8\ p + 8\ (1-p)) \\
&= -p + (1-p) \ = \ 1 - 2p
\end{aligned}$$

- De même, la fonction $t \mapsto t^2\ f(t)$ est **continue par morceaux** sur $[-3, 3]$. On en déduit que $\displaystyle\int_{-3}^{3} t^2\ f_X(t)\ dt$ est bien définie et que X admet un moment d'ordre 2 donné par :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)\ dt \\
&= \cancel{\int_{-\infty}^{-3} t^2\ 0\ dt} + \int_{-3}^{-1} t^2\ \frac{p}{4}\ dt + \int_{-1}^{1} t^2\ \frac{1}{4}\ dt + \int_{1}^{3} t^2\ \frac{1-p}{4}\ dt + \cancel{\int_{3}^{+\infty} t^2\ 0\ dt} \\
&= \frac{p}{4}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-3}^{-1} + \frac{1}{4}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \frac{1-p}{4}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{1}^{3} \\
&= \frac{p}{12}\ ((-1)^3 - (-3)^3) + \frac{1}{12}\ (1^3 - (-1)^3) + \frac{1-p}{12}\ (3^3 - 1^3) \\
&= \frac{p}{12}\ (-1+27) + \frac{1}{12}\ (1+1) + \frac{1-p}{12}\ (27-1) \ = \ \frac{1}{12}\ (26\ p + 2 + 26\ (1-p)) \\
&= \frac{1}{6}\ (13\ p + 1 + 13\ (1-p)) \ = \ \frac{1}{6}\ (\cancel{13\ p} + 1 + 13 - \cancel{13\ p}) \ = \ \frac{14}{6} \ = \ \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

- Enfin, d'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{7}{3} - (1-2p)^2 = \frac{7}{3} - (1 - 4p + 4p^2) = \frac{4}{3} + 4p - 4p^2$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathbb{E}(X) = 1 - 2p \ \text{ et } \ \mathbb{V}(X) = \frac{4}{3} + 4p - 4p^2.}$$

Commentaire

Revenons sur l'hypothèse de continuité par morceaux.

- Tout d'abord, il faut se rendre compte que la fonction $h : t \mapsto t\ f_X(t)$ `N'EST PAS` continue sur $[-3, 3]$. En fait, elle n'est pas continue en -3, ni en -1, ni en 1, ni en 3. Par contre h est continue sur $]-\infty, -3[$, $]-3, -1[$, $]-1, 1[$, $]1, 3[$ et $]3, +\infty[$.
- Pour autant, cela ne signifie pas que l'intégrale $\displaystyle\int_{-3}^{-1} h(t)\ dt$ est impropre.
  En effet, la fonction $h_{|]-3,-1[}$ (restriction de h sur l'ensemble $]-3, -1[$) :
  - × admet une limite finie en -3 (égale à $-3\ \frac{p}{4}$),
  - × admet une limite finie en -1 (égale à $-\frac{p}{4}$).

  Ainsi, $h_{|]-3,-1[}$ est prolongeable par continuité en une fonction continue sur $[-3, -1]$ ce qui justifie que l'intégrale $\displaystyle\int_{-3}^{-1} h(t)\ dt$ est bien définie.
  Mais c'est la fonction $h_{|]-3,-1[}$ qui est prolongée par continuité et en aucun cas h (ce qui n'aurait pas de sens : la fonction h est définie en -3 et en -1, il n'y a pas lieu de la prolonger en ces points).
- La notion de continuité par morceaux décrit complètement cette situation :
  - × h est continue sur les intervalles ouverts $]-\infty, -3[$, $]-3, -1[$, $]-1, 1[$, $]1, 3[$ et $]3, +\infty[$ *(ici, elle n'est pas continue en -3, -1, 1, 3)*.
  - × h admet une limite finie à gauche en tous ces points.
  - × h admet une limite finie à droite en tous ces points.

  (la limite à gauche est éventuellement différente de la limite à droite)
  Ainsi, h est **continue par morceaux** sur $[-3, 3]$.

□

3. On se propose de montrer d'une autre façon que X possède une espérance et un moment d'ordre 2 puis de les déterminer.

a) Vérifier que l'on a :

$$X = U\ \frac{1+Z}{2} + V\ \frac{1-Z}{2}$$

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.

- Si $Z(\omega) = 1$ alors $X(\omega) = U(\omega)$ et :

$$U(\omega)\ \frac{1+Z(\omega)}{2} + V(\omega)\ \frac{1-Z(\omega)}{2} = U(\omega)\ \frac{1+1}{2} + \cancel{V(\omega)\ \frac{1-1}{2}} = U(\omega) = X(\omega)$$

- Si $Z(\omega) \neq 1$ alors $Z(\omega) = -1$, $X(\omega) = V(\omega)$ et :

$$U(\omega)\ \frac{1+Z(\omega)}{2} + V(\omega)\ \frac{1-Z(\omega)}{2} = \cancel{U(\omega)\ \frac{1-1}{2}} + V(\omega)\ \frac{1+1}{2} = V(\omega) = X(\omega)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } \omega \in \Omega,\ \ X(\omega) = U(\omega)\ \frac{1+Z(\omega)}{2} + V(\omega)\ \frac{1-Z(\omega)}{2}.}$$

□

b) Déduire de l'égalité précédente que X possède une espérance et retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

Démonstration.

- Notons tout d'abord que U et V admettent une espérance car elles suivent des lois uniformes. De plus :
$$\mathbb{E}(U) = \frac{-3+1}{2} = -1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(V) = \frac{-1+3}{2} = 1$$
- Les v.a.r. Z, $\dfrac{1+Z}{2}$ et $\dfrac{1-Z}{2}$ sont finies donc admettent une espérance. De plus :
$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{z \in Z(\Omega)} z \, \mathbb{P}([Z=z]) = -1 \, \mathbb{P}([Z=-1]) + 1 \, \mathbb{P}([Z=1]) = -(1-p) + p = 2p-1$$
Et par linéarité de l'espérance :
$$\mathbb{E}\left(\frac{1+Z}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}(1) + \mathbb{E}(Z)\right) = \frac{1}{2}\left(\cancel{1} + 2p - \cancel{1}\right) = p$$
$$\mathbb{E}\left(\frac{1-Z}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}(1) - \mathbb{E}(Z)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - 2p + 1\right) = 1-p$$
- Les v.a.r. U et Z sont indépendantes.
Par le lemme des coalitions, on en déduit que les v.a.r. U et $\dfrac{1+Z}{2}$ sont indépendantes.
On en déduit que la v.a.r. $U \, \dfrac{1+Z}{2}$ admet une espérance comme produit de v.a.r. indépendantes admettant une espérance. De plus :
$$\mathbb{E}\left(U \, \frac{1+Z}{2}\right) = \mathbb{E}(U) \, \mathbb{E}\left(\frac{1+Z}{2}\right) = -p$$
- De même, les v.a.r. V et Z sont indépendantes.
Par le lemme des coalitions, on en déduit que les v.a.r. V et $\dfrac{1-Z}{2}$ sont indépendantes.
On en déduit que la v.a.r. $V \, \dfrac{1-Z}{2}$ admet une espérance comme produit de v.a.r. indépendantes admettant une espérance. De plus :
$$\mathbb{E}\left(V \, \frac{1-Z}{2}\right) = \mathbb{E}(V) \, \mathbb{E}\left(\frac{1-Z}{2}\right) = 1-p$$
- Enfin, d'après la question précédente, X s'écrit comme la somme de deux v.a.r. qui admettent une espérance. On en déduit que X admet une espérance. Par linéarité, on obtient :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}\left(U \, \frac{1+Z}{2} + V \, \frac{1-Z}{2}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(U \, \frac{1+Z}{2}\right) + \mathbb{E}\left(V \, \frac{1-Z}{2}\right) \\ &= -p + (1-p) = 1-2p \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On retrouve bien que } X \text{ admet une espérance et que } \mathbb{E}(X) = 1-2p.}$$ □

c) En déduire également que X possède un moment d'ordre 2 et retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$.

Démonstration.
On procède comme dans la question précédente.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} X^2 &= \left(U\ \frac{1+Z}{2} + V\ \frac{1-Z}{2}\right)^2 = \left(U\ \frac{1+Z}{2}\right)^2 + UV\ \frac{1-Z^2}{4} + \left(V\ \frac{1-Z}{2}\right)^2 \\ &= U^2\ \frac{1+2Z+Z^2}{4} + UV\ \frac{1-Z^2}{4} + V^2\ \frac{1-2Z+Z^2}{4} \end{aligned}$$

Or, comme $Z(\Omega) = \{-1, 1\}$, $Z^2(\Omega) = \{1\}$ et ainsi $Z^2 = 1$ (Z^2 est la variable constante égale à 1). On en déduit :

$$\begin{aligned} X^2 &= U^2\ \frac{1+2Z+1}{4} + \cancel{UV\ \frac{1-1}{4}} + V^2\ \frac{1-2Z+1}{4} \\ &= U^2\ \frac{1+Z}{2} + V^2\ \frac{1-Z}{2} \end{aligned}$$

- Les v.a.r. U et V, qui suivent des lois uniformes, admettent un moment d'ordre 2 puisqu'elles admmettent une variance. On peut déduire de la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{E}(U^2) = \mathbb{V}(U) + (\mathbb{E}(U))^2 = \frac{(1-(-3))^2}{12} + (-1)^2 = \frac{16}{12} + 1 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$$

$$\mathbb{E}(V^2) = \mathbb{V}(V) + (\mathbb{E}(V))^2 = \frac{(3-(-1))^2}{12} + 1^2 = \frac{16}{12} + 1 = \frac{7}{3}$$

- Les v.a.r. U^2, $\dfrac{1+Z}{2}$ admettent une espérance et sont indépendantes.
On en déduit que la v.a.r. produit $U^2\ \dfrac{1+Z}{2}$ admet une espérance, donnée par :

$$\mathbb{E}\left(U^2\ \frac{1+Z}{2}\right) = \mathbb{E}(U^2)\ \mathbb{E}\left(\frac{1+Z}{2}\right) = \frac{7}{3}\ p$$

- Les v.a.r. V^2, $\dfrac{1-Z}{2}$ admettent une espérance et sont indépendantes.
On en déduit que la v.a.r. produit $V^2\ \dfrac{1-Z}{2}$ admet une espérance, donnée par :

$$\mathbb{E}\left(V^2\ \frac{1-Z}{2}\right) = \mathbb{E}(V^2)\ \mathbb{E}\left(\frac{1-Z}{2}\right) = \frac{7}{3}\ (1-p)$$

- X^2 admet une espérance car est la somme de v.a.r. qui admettent une espérance.
Enfin, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{E}\left(U^2\ \frac{1+Z}{2} + V^2\ \frac{1-Z}{2}\right) = \mathbb{E}\left(U^2\ \frac{1+Z}{2}\right) + \mathbb{E}\left(V^2\ \frac{1-Z}{2}\right) \\ &= \frac{7}{3}\ p + \frac{7}{3}\ (1-p) = \frac{7}{3}\ (p + (1-p)) = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet un moment d'ordre 2 et } \mathbb{E}(X^2) = \frac{7}{3}.}$$

□

4. a) Soit T une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
Déterminer la loi de $2T-1$.

Démonstration.

- Comme $T \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, $T(\Omega) = \{0,1\}$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} (2T-1)(\Omega) & = & \{2u-1 \mid u \in T(\Omega)\} \\ & = & \{2 \times (-1) - 1, 2 \times -1\} \\ & = & \{-1, 1\} \end{array}$$

$$\boxed{(2T-1)(\Omega) = \{-1,1\}}$$

- De plus :

$$\begin{array}{rcccccl} \mathbb{P}([2T-1=-1]) & = & \mathbb{P}([2T=0]) & = & \mathbb{P}([T=0]) & = & 1-p \\ \mathbb{P}([2T-1=1]) & = & \mathbb{P}([2T=2]) & = & \mathbb{P}([T=1]) & = & p \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } 2T-1 \text{ et } Z \text{ suivent la même loi.}}$$

Commentaire

- Dire que deux v.a.r. discrètes Z_1 et Z_2 suivent la même loi ne signifie pas que $Z_1 = Z_2$.
Cela ne signifie pas non plus que $\mathbb{P}([Z_1 = Z_2]) = 1$.
Cela signifie simplement :
  - × $Z_1(\Omega) = Z_2(\Omega)$,
  - × $\forall z \in Z_1(\Omega)$, $\mathbb{P}([Z_1 = z]) = \mathbb{P}([Z_2 = z])$.
- Comme $Z(\Omega) = \{-1,1\} \neq \{0,1\}$, la v.a.r. Z ne suit pas une loi de Bernoulli.
De manière générale, une v.a.r. qui ne prend que deux valeurs ne suit pas pour autant une loi de Bernoulli. Pour que ce soit le cas, il faut que ces deux valeurs soient 0 et 1. □

b) On rappelle que `grand(1,1,'unf',a,b)` et `grand(1,1,'bin',p)` sont des commandes **Scilab** permettant de simuler respectivement une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[a,b]$ et une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
Écrire des commandes **Scilab** permettant de simuler U, V, Z, puis X.

Démonstration.

- Pour simuler les v.a.r. U, V et T, il suffit d'utiliser les instructions données.

```
U = grand(1,1,'unf',-3,1)
V = grand(1,1,'unf',-1,3)
T = grand(1,1,'bin',p)
```

- Pour les v.a.r. Z et X on utilise les questions ***3.a)*** et ***4.a)***.

```
Z = 2 * T - 1
X = U * (1+Z)/2 + V * (1-Z)/2
```

Commentaire

- Ces quelques lignes ne sont utilisables que si `p` est préalablement défini. Pour ce faire, on peut ajouter une ligne : `p = input('Entrer une valeur pour p : ')` en début de programme afin que l'utilisateur entre une valeur pour `p`.
  Une autre manière de régler ce problème est de transformer ce programme en une fonction de paramètre `p`.
- Dans le programme, on a écrit : `Z = 2 ⋆ T - 1`. Autrement dit, on a décidé de simuler la v.a.r. Z en lui donnant pour valeurs celles d'une v.a.r. qui suit la même loi. Au-delà de la v.a.r. , c'est ici la loi qu'on cherche à simuler. Ainsi, n'importe quelle v.a.r. qui suit cette loi fait l'affaire.
- Comme dit précédemment, la v.a.r. `Z` ne suit pas une loi de Bernoulli.
  Toutefois, on a vu en question précédente :

  $$\mathbb{P}([Z=-1]) \ = \ \mathbb{P}([T=0]) \ = \ 1-p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Z=1]) \ = \ \mathbb{P}([T=1]) \ = \ p$$

  On peut exploiter ce point pour écrire `Z` à l'aide d'une structure conditionnelle :

```
T = grand(1,1,'bin',p)
if T == 0 then
    Z = -1
else
    Z = 1
end
```

- Une fois `U`, `V` et `Z` codées, on peut aussi coder `X` en se servant de sa définition initiale.

```
if Z == 1 then
    X = U
else
    X = V
end
```

□

Problème

Partie I : Questions préliminaires.

Dans cette partie, x désigne un réel élément de $[0,1[$.

1. a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0,x]$, simplifier la somme $\sum\limits_{p=1}^{n} t^{p-1}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $t \in [0,x]$. Par conséquent, $t \leqslant x < 1$ et donc $t \neq 1$. Ainsi :

$$\sum_{p=1}^{n} t^{p-1} \ = \ \sum_{p=0}^{n-1} t^{p} \ = \ \frac{1-t^n}{1-t}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,x], \ \sum_{p=1}^{n} t^{p-1} \ = \ \frac{1-t^n}{1-t}}$$

□

9782340-026636_001_784.indd 76 30/07/2018 09:52

b) En déduire que : $\sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \displaystyle\int_0^x \dfrac{t^n}{1-t}\, dt.$

Démonstration.

- La fonction $t \mapsto \sum\limits_{p=1}^{n} t^{p-1}$ (polynôme de degré $n-1$) est continue sur $[0, x]$. Il en est donc de même de la fonction $t \mapsto \dfrac{1-t^n}{1-t}$ puisque ces deux fonctions coïncident sur $[0, x]$.
- On déduit de la question précédente :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}\right) dt &= \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\, dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt && \textit{(par linéarité de l'intégration)} \\
&= -\int_0^x \frac{-1}{1-t}\, dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt \\
&= -\left[\, \ln(|1-t|) \,\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt \\
&= -\left[\, \ln(1-t) \,\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt && \textit{(car } 1-t>0 \textit{ puisque } t<1\textit{)} \\
&= -(\ln(1-x) - \cancel{\ln(1)}) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt
\end{aligned}$$

On remarque enfin, par linéarité de l'intégration :

$$\int_0^x \left(\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}\right) dt = \sum_{p=1}^{n} \int_0^x t^{p-1}\, dt = \sum_{p=1}^{n} \left[\, \frac{t^p}{p} \,\right]_0^x = \sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p}$$

$$\boxed{\forall x \in [0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt}$$

□

c) Établir par encadrement que l'on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^x \dfrac{t^n}{1-t}\, dt = 0.$

Démonstration.
Soit $t \in [0, x]$. Ce qui signifie que $0 \leqslant t \leqslant x$.

- Tout d'abord, par croissance de la fonction élévation à la puissance n sur $\mathbb{R}_+$:

$$0 \leqslant t^n \leqslant x^n$$

- D'autre part :

$$\begin{array}{cll}
\text{comme} & 0 \leqslant t \leqslant x & \\
\text{alors} & 0 \geqslant -t \geqslant -x & \\
\text{et} & 1 \geqslant 1-t \geqslant 1-x & \\
\text{enfin} & 1 \leqslant \dfrac{1}{1-t} \leqslant \dfrac{1}{1-x} & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)}
\end{array}$$

- Toutes les quantités étant positives, on déduit des deux précédentes inégalités :

$$0 \leqslant \frac{t^n}{1-t} \leqslant \frac{x^n}{1-x}$$

9782340-026636_001_784.indd 77 30/07/2018 09:52

- La fonction $t \mapsto \dfrac{t^n}{1-t}$ est continue sur $[0,x]$.
  Ainsi, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant x)$:

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\ dt \leqslant \int_0^x \frac{x^n}{1-x}\ dt = \frac{x^n}{1-x} \int_0^x 1\ dt = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

- Or :
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$,
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{1-x} = 0$ car, comme $x \in [0,1[$, $x^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  On en déduit donc, par théorème d'encadrement, que $\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\ dt$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$, et que cette limite est nulle.

$$\boxed{\forall x \in [0,1[,\ \lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\ dt = 0}$$

Commentaire

Il n'y a pas, dans le programme ECE, de théorème permettant de passer à la limite sous le symbole d'intégration. Les tentatives de ce genre révèlent une mauvaise compréhension des objets étudiés.

□

d) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

Démonstration.
Soit $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$

- D'après la question ***1.b)***, $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p}$ admet une limite finie lorsque $n \to +\infty$ car s'écrit comme la somme de deux quantités ayant une limite finie.
- Par passage à la limite, on en déduit :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} & = & -\ln(1-x) & - & \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\ dt \\ \Big\downarrow{\scriptstyle n\to+\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle n\to+\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle n\to+\infty} \\ \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} & = & -\ln(1-x) & - & 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x).}$$

□

2. Soit m un entier naturel fixé. À l'aide de la formule du triangle de Pascal, établir l'égalité :

$$\forall q \geqslant m,\ \sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$$

Démonstration.
L'entier m étant fixé, démontrons par récurrence : $\forall q \geqslant m$, $\mathcal{P}(q)$
où $\mathcal{P}(q)$: $\sum\limits_{k=m}^{q} \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$.

1) **Initialisation** :

- D'une part : $\sum\limits_{k=m}^{m} \binom{k}{m} = \binom{m}{m} = 1$.
- D'autre part : $\binom{m+1}{m+1} = 1$.

D'où $\mathcal{P}(m)$.

2) **Hérédité** : soit $q \geqslant m$.

Supposons $\mathcal{P}(q)$ et démontrons $\mathcal{P}(q+1)$ (*i.e.* $\sum\limits_{k=m}^{q+1} \binom{k}{m} = \binom{q+2}{m+1}$).

Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{q+1} \binom{k}{m} &= \sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} + \binom{q+1}{m} \\
&= \binom{q+1}{m+1} + \binom{q+1}{m} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \binom{q+2}{m+1} && \textit{(par la formule du triangle de Pascal)}
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(q+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall q \geqslant m,\ \mathcal{P}(q).}$$

□

3. Soit n un entier naturel non nul. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre x, et on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

a) Déterminer $S_n(\Omega)$ puis établir que, pour tout entier k supérieur ou égal à $n+1$, on a :

$$\mathbb{P}([S_{n+1} = k]) = \sum_{j=n}^{k-1} \mathbb{P}([S_n = j] \cap [X_{n+1} = k-j])$$

Démonstration.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k(\Omega) = [\![1, +\infty[\![$. Ainsi, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) \geqslant \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } S_n(\Omega) \subset [\![n, +\infty[\![.}$$

Commentaire

Cette question amène une remarque sur la notation $X(\Omega)$ lorsque X est une v.a.r.

- Rappelons qu'une v.a.r. X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
  Comme la notation le suggère, $X(\Omega)$ est l'image de Ω par l'application X.
  Ainsi, $X(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X :

$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & = & \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \end{array}$$

- Il faut bien noter que, dans la définition de $X(\Omega)$, aucune application probabilité $\mathbb{P}$ n'apparaît. Même si cela ne correspond pas directement à la définition, il est d'usage courant de confondre, dans le cas des v.a.r. discrètes, l'ensemble de valeurs possibles de la v.a.r. X (*i.e.* l'ensemble $X(\Omega)$) et l'ensemble des valeurs que X prend avec probabilité non nulle (dans le cas où X est une v.a.r. discrète, cet ensemble est appelé support de X et est noté $\mathrm{Supp}(X)$).
- C'est certainement ce que le concepteur du sujet a en tête dans cette question. Les v.a.r. X_k étant indépendantes, il est aisé de démontrer que S_n peut prendre toutes les valeurs de $[\![n, +\infty[\![$ avec probabilité non nulle. Si on accepte la confusion entre $X(\Omega)$ et $\mathrm{Supp}(X)$, on peut alors rédiger comme suit.
  Rappelons que $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k(\Omega) = [\![1, +\infty[\![$.
  Les variables X_k étant mutuellement indépendantes, on en déduit :

$$S_n(\Omega) = [\![n, +\infty[\![$$

- La famille $\big([S_n = j]\big)_{j \in [\![n, +\infty[\![}$ forme un système complet d'événements.
  Soit $k \geqslant n + 1$. Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([S_{n+1} = k]) & = & \sum\limits_{j=n}^{+\infty} \mathbb{P}([S_n = j] \ \cap \ [S_{n+1} = k]) \\ & = & \sum\limits_{j=n}^{+\infty} \mathbb{P}([S_n = j] \ \cap \ [S_n + X_{n+1} = k]) \\ & = & \sum\limits_{j=n}^{+\infty} \mathbb{P}([S_n = j] \ \cap \ [X_{n+1} = k - j]) \\ & = & \sum\limits_{\substack{j = n \\ k-j \in X_{n+1}(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([S_n = j] \ \cap \ [X_{n+1} = k - j]) \\ & & + \cancel{\sum\limits_{\substack{j = n \\ k-j \notin X_{n+1}(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([S_n = j] \ \cap \ [X_{n+1} = k - j])} \quad \textit{(car } [X_{n+1} = k-j] = \varnothing\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{j=n}^{k-1} \mathbb{P}([S_n = j] \ \cap \ [X_{n+1} = k - j]) \end{array}$$

La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{\begin{array}{l} k-j \in X_{n+1}(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ j \in [\![n, +\infty[\![\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant k-j \\ n \leqslant j \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} j \leqslant k-1 \\ n \leqslant j \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\ n \leqslant j \leqslant k-1\right.$$

$$\boxed{\forall k \geqslant n+1,\ \mathbb{P}([S_{n+1} = k]) = \sum_{j=n}^{k-1} \mathbb{P}([S_n = j]\ \cap\ [X_{n+1} = k-j])}$$

Commentaire

- Il est fréquent, lors de l'étape de restriction des indices de la somme de tomber sur une contrainte s'exprimant par deux inégalités :

$$a \leqslant i \leqslant b \ \texttt{ET}\ c \leqslant i \leqslant d \quad \text{où } (a,b,c,d) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^4$$

où $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On pourra alors utiliser le résultat suivant :

$$\boxed{(a \leqslant i \leqslant b \ \texttt{ET}\ c \leqslant i \leqslant d) \quad \Leftrightarrow \quad \max(a,c) \leqslant i \leqslant \min(b,d)}$$

(à gauche c'est le plus grand élément qui contraint le plus, à droite c'est le plus petit élément qui contraint le plus)

- On peut alors rédiger comme suit :

$$\left\{\begin{array}{l} k-j \in X_{n+1}(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ j \in [\![n, +\infty[\![\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant k-j < +\infty \\ n \leqslant j < +\infty \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1-k \leqslant -j < +\infty \\ n \leqslant j < +\infty \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\infty < j \leqslant k-1 \\ n \leqslant j < +\infty \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\ n \leqslant j \leqslant k-1\right.$$

□

b) En déduire, par récurrence sur n, que la loi de S_n est donnée par :

$$\forall k \in [\![n, +\infty[\![,\ \mathbb{P}([S_n = k]) = \binom{k-1}{n-1}\ x^n\ (1-x)^{k-n}$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n)$: $\forall k \in [\![n, +\infty[\![,\ \mathbb{P}([S_n = k]) = \dbinom{k-1}{n-1}\ x^n\ (1-x)^{k-n}$.

1) **Initialisation** :
Soit $k \in [\![1, +\infty[\![$.

- D'une part : $\mathbb{P}([S_1 = k]) = \mathbb{P}([X_1 = k]) = (1-x)^{k-1}\ x$ car $S_1 = X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(x)$.
- D'autre part : $\dbinom{k-1}{1-1}\ x^1\ (1-x)^{k-1} = \dbinom{k-1}{0}\ x^1\ (1-x)^{k-1} = x\ (1-x)^{k-1}$.

D'où $\mathcal{P}(1)$.

2) **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$
(*i.e.* $\forall k \in [\![n+1, +\infty[\![,\ \mathbb{P}([S_{n+1} = k]) = \binom{k-1}{n}\ x^{n+1}\ (1-x)^{k-(n+1)}$).

Soit $k \in [\![n+1, +\infty[\![$.

$$\begin{array}{rll}
& \mathbb{P}([S_{n+1} = k]) & \\
= & \displaystyle\sum_{j=n}^{k-1} \mathbb{P}([S_n = j] \ \cap \ [X_{n+1} = k-j]) & \\
= & \displaystyle\sum_{j=n}^{k-1} \mathbb{P}([S_n = j]) \ \times \ \mathbb{P}([X_{n+1} = k-j]) & \textit{(car } S_n \textit{ et } X_{n+1} \textit{ sont indépendantes (*))} \\
= & \displaystyle\sum_{j=n}^{k-1} \left(\binom{j-1}{n-1} x^n \ (1-x)^{j-n} \right) \times \mathbb{P}([X_{n+1} = k-j]) & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
= & \displaystyle\sum_{j=n}^{k-1} \left(\binom{j-1}{n-1} x^n \ (1-x)^{j-n} \right) \ (1-x)^{k-j-1} \ x & \textit{(car } X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{G}(x)\textit{)} \\
= & \displaystyle\sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} x^{n+1} \ (1-x)^{k-n-1} & \\
= & \left(x^{n+1} \ (1-x)^{k-n-1}\right) \displaystyle\sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} & \textit{(car } x^{n+1} \ (1-x)^{k-n-1} \textit{ est indépendant de l'indice de sommation } j\textit{)} \\
= & \left(x^{n+1} \ (1-x)^{k-n-1}\right) \displaystyle\sum_{j=n-1}^{k-2} \binom{j}{n-1} & \\
= & \left(x^{n+1} \ (1-x)^{k-n-1}\right) \dbinom{k-1}{n} & \textit{(d'après la question } \textbf{2.} \textit{ avec } q = k-2,\ m = n-1\textit{)}
\end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

(*) En effet, X_{n+1} est indépendante de X_1, X_2, $\ldots$, X_n.
On en déduit, par le lemme des coalitions, que X_{n+1} est indépendante de $X_1 + \ldots + X_n$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathcal{P}(n).}$$

□

c) En déduire, pour tout x de $]0,1[$ et pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}$$

Démonstration.
Soit $x \in \,]0,1[$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La famille $\big([S_n = k]\big)_{k \in [\![n, +\infty[\![}$ forme un système complet d'événements.
On en déduit :

$$\begin{array}{ccc}
\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}([S_n = k]) & = & 1 \\
\shortparallel & & \\
\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^n \ (1-x)^{k-n} & & \textit{(d'après la question précédente)}
\end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit, en multipliant de part et d'autre par } \dfrac{1}{x^n} \text{ :} \\ \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}\end{array}}$$

□

d) On rappelle que la commande `grand(1,n,'geom',p)` permet à **Scilab** de simuler n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre p.
Compléter les commandes **Scilab** suivantes pour qu'elles simulent la variable aléatoire S_n.

```
n = input('entrez une valeur de n supérieure à 1 :')
S = ------
disp(S)
```

Démonstration.

- On rappelle que $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ où les v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et suivent toutes la même loi $\mathcal{G}(x)$. L'instruction `grand(1,n,'geom',p)` permet de générer une matrice ligne $[x_1, \ldots, x_n]$ qui simule le n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$.
- Pour simuler S_n, il suffit de faire la somme des coefficients de cette matrice ligne.

```
S = sum(grand(1,n,'geom',p))
```

Commentaire

Il est possible (mais moins élégant) de réaliser cette somme à l'aide d'une structure itérative. On obtient le programme suivant.

```
S = 0
tab = grand(1,n,'geom',p)
for i = 1:n
    S = S + tab(i)
end
```

□

Partie 2 : étude d'une variable aléatoire.

Dans cette partie, on désigne par p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1 - p$.
On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = -\frac{q^k}{k\ \ln(p)}$$

1. a) Vérifier que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Comme $p \in\ ]0,1[$, $\ln(p) < 0$.
- Comme $q = 1 - p \in\ ]0,1[$, $q^k > 0$. On en déduit :

$$\frac{q^k}{k\ \ln(p)} < 0$$

(notons que $k \times \ln(p) \neq 0$ *car* $k \geqslant 1$ *et* $\ln(p) \neq 0$*)*

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = -\frac{q^k}{k\ \ln(p)} > 0}$$

□

b) Montrer, en utilisant un résultat de la partie 1, que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k = 1$.

Démonstration.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord : $\sum\limits_{k=1}^{N} u_k \ = \ \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{-q^k}{k \ \ln(p)} \ = \ -\dfrac{1}{\ln(p)} \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{q^k}{k}$.
- Or, d'après la question ***1.d)*** de la partie 1, pour tout $x \in [0,1[$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{x^k}{k}$ est convergente, de somme $-\ln(1-x)$. En appliquant ce résultat à $x = p \in]0,1[$, on obtient que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k$ est convergente, de somme :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = -\frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{k} = -\frac{1}{\ln(p)} \ (-\ln(1-q)) = -\frac{1}{\ln(p)} \ (-\ln(p)) = 1$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 1}$$

□

On considère dorénavant une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}([X = k]) = u_k$$

2. a) Montrer que X possède une espérance et la déterminer.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} k\ u_k$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{N} k \ u_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{-q^k}{\ln(p)} = -\frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{N} q^k$$

- Or, comme $q \in]0,1[$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} q^k$ est convergente.
  On en déduit que la v.a.r. X admet une espérance, donnée par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \ u_k = -\frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} q^k = -\frac{1}{\ln(p)} \ \frac{q^1}{1-q}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet pour espérance } \mathbb{E}(X) = -\dfrac{q}{p \ \ln(p)}.}$$

Commentaire

Il est indispensable de connaître les formules donnant la valeur d'une somme géométrique.

- Dans le cas d'une somme finie. Pour tout $q \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \leqslant n$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=m}^{n} q^k = \frac{q^m - q^{n+1}}{1-q}$$

- Dans le cas d'une somme infinie. Pour tout $q \in]-1,1[$, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=m}^{+\infty} q^k = \frac{q^m}{1-q}$$

b) Montrer également que X possède une variance et vérifier que : $\mathbb{V}(X) = \dfrac{-q\ (q+\ln(p))}{(p\ \ln(p))^2}$.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une variance si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} k^2\ u_k$ est absolument convergente.
  Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{N} k^2\ u_k = \sum_{k=1}^{N} k^{\cancel{2}}\ \frac{-q^k}{\cancel{k}\ \ln(p)} = -\frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{N} k\ q^k = -\frac{q}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{N} k\ q^{k-1}$$

- Or, comme $q \in \,]0,1[$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} k\ q^{k-1}$ est convergente.
  On en déduit que la v.a.r. X admet un moment d'ordre 2, donné par :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\ u_k = -\frac{q}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} k\ q^{k-1} = -\frac{q}{\ln(p)}\ \frac{1}{(1-q)^2} = -\frac{q}{p^2\ \ln(p)}$$

- Enfin, par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\
&= -\frac{q}{p^2\ \ln(p)} - \left(-\frac{q}{p\ \ln(p)}\right)^2 \\
&= -\frac{q}{p^2\ \ln(p)} - \frac{q^2}{p^2\ (\ln(p))^2} \\
&= \frac{-q\ \ln(p) - q^2}{p^2\ (\ln(p))^2} = \frac{-q\ (q+\ln(p))}{(p\ \ln(p))^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet pour variance } \mathbb{V}(X) = \frac{-q\ (q+\ln(p))}{(p\ \ln(p))^2}.}$$

Commentaire

Il faut aussi connaître la formule pour les sommes de séries géométriques dérivées première et deuxième. Pour tout $q \in \,]-1,1[$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\ q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\ q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

□

3. Soit k un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire Y dont la loi, conditionnellement à l'évènement $[X = k]$, est la loi binomiale de paramètres k et p.

a) Montrer que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ puis utiliser la formule des probabilités totales, ainsi que la question ***1***) de la partie 1, pour montrer que :

$$\mathbb{P}([Y=0]) = 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)}$$

Démonstration.

- D'après l'énoncé, on sait que si l'événement $[X = k]$ est réalisé alors Y peut prendre toutes les valeurs de $[\![0, k]\!]$.
- Or $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Autrement dit, X peut prendre toutes les valeurs $k \in \mathbb{N}^*$.

On en déduit que Y peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.

$$\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}}$$

- La famille $\big([X = k]\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.
  Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Y = 0]) & = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 0]) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) \times \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = 0]) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{-q^k}{k\ \ln(p)} \times \dbinom{k}{0}\ p^0\ (1-p)^k & \textit{(par définition de } X \textit{ et } Y\textit{)} \\
& = & \dfrac{-1}{\ln(p)} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{q^k}{k} \times q^k & \\
& = & \dfrac{-1}{\ln(p)} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(q^2)^k}{k} & \\
& = & \dfrac{\cancel{-}1}{\ln(p)}\ (\cancel{-}\ln(1-q^2)) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.c)}} \\
& & & \textit{partie 1 avec } x = q^2 \in \,]0,1[\textit{)} \\
& = & \dfrac{1}{\ln(p)}\ (\ln((1-q)(1+q))) & \\
& = & \dfrac{1}{\ln(p)}\ (\ln(p) + \ln(1+q)) \ = \ \dfrac{\ln(p)}{\ln(p)} + \dfrac{\ln(1+q)}{\ln(p)} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathbb{P}([Y = 0]) = 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)}}$$

□

b) Après avoir montré que, pour tout couple (k, n) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{\binom{k}{n}}{k} = \dfrac{\binom{k-1}{n-1}}{n}$, établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\mathbb{P}([Y = n]) = -\frac{p^n\ q^n}{n\ \ln(p)} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1}\ \left(q^2\right)^{k-n}$$

En déduire, grâce à la question ***3)*** de la première partie, l'égalité :

$$\mathbb{P}([Y = n]) = -\frac{q^n}{n\ (1+q)^n\ \ln(p)}$$

Démonstration.

Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On doit démontrer :

$$n \binom{k}{n} = k \binom{k-1}{n-1}$$

- Remarquons tout d'abord que si $n > k$, alors $n - 1 > k - 1$ et ainsi $\dbinom{k}{n} = \dbinom{k-1}{n-1} = 0$.

- On suppose maintenant que $n \leqslant k$. Tout d'abord :

$$n \binom{k}{n} = n \ \frac{k!}{n! \ (k-n)!} = \frac{k!}{(n-1)! \ (k-n)!}$$

Par ailleurs :

$$k \binom{k-1}{n-1} = k \ \frac{(k-1)!}{(n-1)! \ ((k-\cancel{1}) - (n-\cancel{1}))!} = \frac{k!}{(n-1)! \ (k-n)!}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall (k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \ n \binom{k}{n} = k \binom{k-1}{n-1}.}$$

- La famille $\big([X=k]\big)_{k \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.
Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=n]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k] \cap [Y=n]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) \times \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=n]) \\
&= \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X=k]) \times \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=n])} \qquad \textit{(} \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=n]) = 0 \ \textit{si } k < n\textit{)} \\
&+ \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) \times \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=n]) \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{-q^k}{k \ \ln(p)} \times \binom{k}{n} \ p^n \ (1-p)^{k-n} \qquad \textit{(par définition de } X \textit{ et } Y\textit{)} \\
&= -\frac{p^n}{\ln(p)} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\binom{k}{n}}{k} \ q^k \ q^{k-n} \\
&= -\frac{p^n \ q^n}{\ln(p)} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\binom{k}{n}}{k} \ q^{k-n} \ q^{k-n} \\
&= -\frac{p^n \ q^n}{\ln(p)} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\binom{k-1}{n-1}}{n} \ (q^2)^{k-n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } \mathbb{P}([Y=n]) = -\frac{p^n \ q^n}{n \ \ln(p)} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} \ (q^2)^{k-n}.}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=n]) &= -\frac{p^n \ q^n}{n \ \ln(p)} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} \ (1-(1-q^2))^{k-n} \qquad \textit{(car } q^2 = 1-(1-q^2)\textit{)} \\
&= -\frac{p^n \ q^n}{n \ \ln(p)} \ \frac{1}{(1-q^2)^n} \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.c)}} \ \textit{avec } x = 1-q^2 \in \,]0,1[\textit{)} \\
&= -\frac{\cancel{p^n} \ q^n}{n \ \ln(p)} \ \frac{1}{\cancel{(1-q)^n} \ (1+q)^n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}([Y=n]) = -\frac{q^n}{n \ \ln(p) \ (1+q)^n}}$$

Commentaire

La relation sur les coefficients binomiaux peut aussi se faire par dénombrement.
Pour ce faire, on considère un ensemble E à k éléments.
(on peut penser à une pièce qui contient k individus)
On souhaite alors construire une partie P à n éléments de cet ensemble contenant un élément distingué *(on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de n individus dans lequel figure un représentant de ces individus)*.
Pour ce faire, on peut procéder de deux manières :

1) On choisit d'abord la partie à n éléments de E : $\binom{k}{n}$ possibilités.
On distingue ensuite un élément de cet ensemble P : $\binom{n}{1} = n$ possibilités.
(on choisit d'abord les n individus et on élit ensuite un représentant de ces individus)
Ainsi, il y a $n\ \binom{k}{n}$ manières de construire P.

2) On choisit d'abord, dans E, l'élément à distinguer : $\binom{k}{1} = k$ possibilités.
On choisit ensuite $n-1$ éléments dans E qui, pour former P, en y ajoutant l'élément précédent : $\binom{k-1}{n-1}$ possibilités.
(on choisit d'abord le représentant puis on lui adjoint un groupe de $n-1$ individus)
Ainsi, il y a $k\ \binom{k-1}{n-1}$ manières de construire P.

On retrouve ainsi le résultat. □

c) Vérifier que l'on a $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=k]) = 1$.

Démonstration.

- Notons tout d'abord :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=k]) \ = \ \mathbb{P}([Y=0]) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=k])$$

- Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=k]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-q^k}{k\ (1+q)^k\ \ln(p)} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.b)}}\textit{)} \\
&= \frac{-1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{q}{1+q}\right)^k}{k} \\
&= \frac{\cancel{-}1}{\ln(p)}\ (\cancel{-}\ln\left(1-\frac{q}{1+q}\right)) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{1.d)}} \textit{ de la partie 1 (*))} \\
&= \frac{1}{\ln(p)}\ \ln\left(\frac{1}{1+q}\right) \\
&= -\frac{\ln(1+q)}{\ln(p)}
\end{aligned}$$

(*) On peut utiliser ce résultat car $0 < q < 1+q$ et donc $0 < \dfrac{q}{1+q} < 1$.

- On en déduit, à l'aide de la question ***3.a)*** :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=k]) \ = \ \left(1 + \cancel{\frac{\ln(1+q)}{\ln(p)}}\right) - \cancel{\frac{\ln(1+q)}{\ln(p)}} \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=k]) = 1.}$$

□

d) Montrer que Y possède une espérance et donner son expression en fonction de $\ln(p)$ et q.

Démonstration.

- La v.a.r. Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum k\ \mathbb{P}([Y=k])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N} k\ \mathbb{P}([Y=k]) &= 0 \times \mathbb{P}([Y=0]) + \sum_{k=1}^{N} k\ \mathbb{P}([Y=k]) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \cancel{k}\ \frac{-q^k}{\cancel{k}\ \ln(p)\ (1+q)^k} \\ &= \frac{-1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{q}{1+q}\right)^k \end{aligned}$$

- Or, comme $\frac{q}{1+q} \in\ ]0,1[$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \left(\frac{q}{1+q}\right)^k$ est convergente.
  On en déduit que la v.a.r. X admet une espérance, donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([Y=k]) \\ &= -\frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{q}{1+q}\right)^k \\ &= -\frac{1}{\ln(p)} \frac{\left(\frac{q}{1+q}\right)^1}{1-\frac{q}{1+q}} \\ &= -\frac{1}{\ln(p)} \frac{q}{1+q} \frac{1}{1-\frac{q}{1+q}} \\ &= -\frac{1}{\ln(p)} \frac{q}{(1+\cancel{q})-\cancel{q}} = -\frac{q}{\ln(p)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Y \text{ admet pour espérance } \mathbb{E}(Y) = -\frac{q}{\ln(p)}.}$$

□

e) Montrer aussi que Y possède une variance et que l'on a : $\mathbb{V}(Y) = -\dfrac{q\ (q+(1+q)\ \ln(p))}{(\ln(p))^2}$.

Démonstration.

- La v.a.r. Y admet une variance si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} k^2\ \mathbb{P}([Y=k])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N} k^2\ \mathbb{P}([Y=k]) &= 0^2 \times \mathbb{P}([Y=0]) + \sum_{k=1}^{N} k^2\ \mathbb{P}([Y=k]) \\ &= \sum_{k=1}^{N} k^{\cancel{2}}\ \frac{-q^k}{\cancel{k}\ \ln(p)\ (1+q)^k} \\ &= \frac{-1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{N} k\ \left(\frac{q}{1+q}\right)^k \\ &= \frac{-q}{(1+q)\ \ln(p)} \sum_{k=1}^{N} k\ \left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

- Or, comme $\frac{q}{1+q} \in \,]0,1[$, la série $\sum k \ \left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1}$ est convergente.
On en déduit que la v.a.r. Y admet un moment d'ordre 2, donné par :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \ \mathbb{P}([Y=k]) \\
&= -\frac{q}{(1+q) \ \ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} k \ \left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1} \\
&= -\frac{q}{(1+q) \ \ln(p)} \ \frac{1}{\left(1-\frac{q}{1+q}\right)^2} \\
&= -\frac{q}{\cancel{(1+q)} \ \ln(p)} \ \frac{(1+q)^{\cancel{2}}}{((1+q)-q)^2} \ = \ -\frac{q \ (1+q)}{\ln(p)}
\end{aligned}$$

- Enfin, par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y) &= \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 \\
&= -\frac{q \ (1+q)}{\ln(p)} - \left(-\frac{q}{\ln(p)}\right)^2 \\
&= -\frac{q \ (1+q)}{\ln(p)} - \frac{q^2}{(\ln(p))^2} \\
&= -\frac{q \ (1+q) \ \ln(p) + q^2}{(\ln(p))^2} \\
&= -\frac{q \ \left((1+q) \ \ln(p) + q\right)}{(\ln(p))^2}
\end{aligned}$$

La v.a.r. Y admet pour variance $\mathbb{V}(Y) = -\frac{q \ \left((1+q) \ \ln(p)+q\right)}{(\ln(p))^2}$.

Commentaire

- Il ne faut pas se laisser abuser par le signe devant les expressions de $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$:

$$\mathbb{V}(X) = -\frac{q \ (q+\ln(p))}{p \ (\ln(p))^2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(Y) = -\frac{q \ \left((1+q) \ \ln(p)+q\right)}{(\ln(p))^2}$$

Ces deux quantités sont bien positives.

- Démontrons que cette première expression est positive.
Rappelons l'inégalité de convexité classique :

$$\forall x \in \,]-1,+\infty[, \ \ln(1+x) \leqslant x$$

En l'appliquant en $x = -q \in \,]-1,0[$, on obtient : $\ln(1-q) \leqslant -q$.
Ainsi : $q + \ln(p) \leqslant 0$ et $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$.

- D'autre part, en multipliant l'inégalité obtenue par $1+q$:

$$(1+q) \ \ln(p) \leqslant -q \ (1+q) = -q - q^2 \leqslant -q$$

Ainsi, $(1+q) \ \ln(p) + q \leqslant 0$ et $\mathbb{V}(Y) \geqslant 0$.

□

EML 2016 : le sujet

EXERCICE I

On note I et A les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \; ; \; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

PARTIE I : Étude de la matrice A

1. Calculer A^2.

2. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre.

3. ***a)*** Justifier, sans calcul, que A est diagonalisable.

b) Déterminer une matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible dont tous les coefficients de la première ligne sont égaux à 1 et une matrice D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant telles que : $A = PDP^{-1}$.

4. Montrer : $A^3 = 2A$.

PARTIE II : Étude d'une application définie sur $\mathcal{E}$

5. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que la famille (I, A, A^2) est une base de $\mathcal{E}$. En déduire la dimension de $\mathcal{E}$.

6. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, la matrice AM appartient à $\mathcal{E}$.

On note f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à toute matrice M de $\mathcal{E}$, associe AM.

7. Vérifier que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.

8. Former la matrice F de f dans la base (I, A, A^2) de $\mathcal{E}$.

9. ***a)*** Montrer : $f \circ f \circ f = 2f$.

b) En déduire que toute valeur propre λ de f vérifie : $\lambda^3 = 2\lambda$.

c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

10. L'endomorphisme f est-il bijectif ? diagonalisable ?

11. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

12. ***a)*** Résoudre l'équation $f(M) = I + A^2$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.

b) Résoudre l'équation $f(N) = A + A^2$, d'inconnue $N \in \mathcal{E}$.

EXERCICE II

On considère l'application $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0,+\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On admet : $0,\ 69 < \ln(2) < 0,\ 70$.

PARTIE I : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0,+\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.

3. Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.

4. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(0,\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que C admet une tangente en 0 et préciser celle-ci.

b) Montrer que C admet un point d'inflexion et un seul, noté I, et préciser les coordonnées de I.

c) Tracer l'allure de C.

5. Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in [0,+\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

PARTIE II : Étude d'une fonction F de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0,+\infty[^2\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, définie, pour tout (x,y) de $]0,+\infty[^2$, par :

$$F(x,y) = x\ln(y) - y\ln(x)$$

6. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x,y) de $]0,+\infty[^2$.

7. ***a)*** Soit $(x,y) \in \ ]0,+\infty[^2$. Montrer que (x,y) est un point critique de F si et seulement si :

$$x > 1, \quad y = \frac{x}{\ln(x)} \quad \text{et} \quad f(\ln(x)) = 1$$

b) Établir que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (e,e).

8. La fonction F admet-elle un extremum local en (e,e) ?

PARTIE III : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

9. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

10. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

11. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
(on pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto t - \ln(t)$)

12. Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche un entier naturel N tel que $1 - u_N < 10^{-4}$.

EXERCICE III

PARTIE I : Étude d'une variable aléatoire

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par : $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}$.

1. Vérifier que la fonction f est paire.

2. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

3. Déterminer la fonction de répartition de X.

4. ***a)*** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, f(t)\, dt$ converge.

b) En utilisant l'imparité de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t\, f(t)$, montrer que X admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(X) = 0$.

PARTIE II. Étude d'une autre variable aléatoire

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \ln(1+\mathrm{e}^{x})$.

5. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.

6. Exprimer, pour tout y de I, $\varphi^{-1}(y)$.

On considère la variable aléatoire réelle Y définie par : $Y = \varphi(X)$.

7. Justifier : $\mathbb{P}([Y \leqslant 0]) = 0$.

8. Déterminer la fonction de répartition de Y.

9. Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.

PARTIE III : Étude d'une convergence en loi

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, de même densité f, où f a été définie dans la partie I.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $U_n = T_n - \ln(n)$.

10. ***a)*** Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de T_n.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([U_n \leqslant x]) = \left(1 + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^{-n}$.

11. En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

EML 2016 : le corrigé

EXERCICE I

On note I et A les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \ ; \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

PARTIE I : Étude de la matrice A

1. Calculer A^2.

Démonstration.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

□

2. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre.

Démonstration.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On suppose :

$$\lambda_1 \cdot I_3 + \lambda_2 \cdot A + \lambda_3 \cdot A^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \qquad (1)$$

Or :

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot I_3 + \lambda_2 \cdot A + \lambda_3 \cdot A^2 &= \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_1 + 2\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'égalité (1) entraîne alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \ \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \quad \textit{(par remontées successives)}$$

$$\boxed{\text{La famille } (I, A, A^2) \text{ est libre.}}$$

□

3. a) Justifier, sans calcul, que A est diagonalisable.

Démonstration.

$$\boxed{A \text{ est une matrice symétrique réelle, donc elle est diagonalisable.}}$$ □

b) Déterminer une matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible dont tous les coefficients de la première ligne sont égaux à 1 et une matrice D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant telles que : $A = PDP^{-1}$.

Démonstration.

- D'après la question ***3.a)***, la matrice A est diagonalisable. Donc il existe une matrice P inversible (P est la concaténation des vecteurs des bases des sous-espaces propres de A) et une matrice D diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A telles que $A = PDP^{-1}$.
- Déterminons les valeurs propres de A.
Les valeurs propres de A sont les réels λ tels que la matrice $(A - \lambda I)$ n'est pas inversible, c'est-à-dire $\mathrm{rg}(A - \lambda I) < 3$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A-\lambda I) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda^2) L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda + \lambda(1-\lambda^2) \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

On obtient une réduite triangulaire supérieure.
Elle est donc non inversible si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul.
Ses 2 premiers coefficients diagonaux sont 1 et 1 (et $1 \neq 0$), et on a :

$$\lambda + \lambda(1+\lambda^2) = 0 \Leftrightarrow \lambda(2-\lambda^2) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\sqrt{2}-\lambda)(\sqrt{2}+\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

Ainsi : $\mathrm{rg}(A - \lambda I) < 3 \Leftrightarrow \lambda \in \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

$$\boxed{\text{Las valeurs propres de } A \text{ sont } -\sqrt{2},\ 0 \text{ et } \sqrt{2}.}$$

- Déterminons une base de $E_{\sqrt{2}}(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $\sqrt{2}$.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_{\sqrt{2}}(A) & \Longleftrightarrow & (A - \sqrt{2}\, I)X = 0 \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[4mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\sqrt{2}\, x & + & y & & & = & 0 \\ x & - & \sqrt{2}\, y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & \sqrt{2}\, z & = & 0 \end{array} \right. \\[4mm]
& \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & \sqrt{2}\, y & + & z & = & 0 \\ -\sqrt{2}\, x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & - & \sqrt{2}\, z & = & 0 \end{array} \right. \\[4mm]
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 + \sqrt{2}\, L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & \sqrt{2}\, y & + & z & = & 0 \\ & - & y & + & \sqrt{2}\, z & = & 0 \\ & & y & - & \sqrt{2}\, z & = & 0 \end{array} \right. \\[4mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & \sqrt{2}\, y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & \sqrt{2}\, z & = & 0 \end{array} \right. \\[4mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & \sqrt{2}\, y & = & -z \\ & & y & = & \sqrt{2}\, z \end{array} \right. \\[4mm]
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 + \sqrt{2}\, L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -z + 2z = z \\ y & = & \sqrt{2}\, z \end{array} \right.
\end{array}$$

Finalement on obtient l'expression de $E_{\sqrt{2}}(A)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl}
E_{\sqrt{2}}(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \sqrt{2}\, X\} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = z \text{ et } y = \sqrt{2}\, z\} \\[4mm]
& = & \{ \begin{pmatrix} z \\ \sqrt{2}\, z \\ z \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R}\} = \{ \ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R}\} \\[4mm]
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

On sait donc que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_{\sqrt{2}}(A)$,

× est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car elle est constituée d'un unique vecteur non nul.

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_{\sqrt{2}}(A).}$$

- Déterminons une base de $E_0(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} X \in E_0(A) & \Longleftrightarrow & AX = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & y & & & = & 0 \\ x & & & + & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccccc} x & & & = & -z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Finalement on obtient l'expression de $E_0(A)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl} E_0(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = -z \text{ et } y = 0\} \\ & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \ / \ x \in \mathbb{R}\} = \{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ / \ x \in \mathbb{R}\} \\ & = & \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

On sait donc que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_0(A)$,

× est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car elle est constituée d'un unique vecteur non nul.

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_0(A).}$$

- Déterminons une base de $E_{-\sqrt{2}}(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $-\sqrt{2}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_{-\sqrt{2}}(A) & \iff & (A + \sqrt{2}\, I)X = 0 \\
& \iff & \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \sqrt{2}\,x & + & y & & & = & 0 \\ x & + & \sqrt{2}\,y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & \sqrt{2}\,y & + & z & = & 0 \\ \sqrt{2}\,x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 - \sqrt{2}\,L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & \sqrt{2}\,y & + & z & = & 0 \\ & - & y & - & \sqrt{2}\,z & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & \sqrt{2}\,y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & \sqrt{2}\,y & = & -z \\ & & y & = & -\sqrt{2}\,z \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 - \sqrt{2}\,L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -z + 2z = z \\ y & = & -\sqrt{2}\,z \end{array} \right.
\end{array}$$

Finalement on obtient l'expression de $E_{-\sqrt{2}}(A)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-\sqrt{2}}(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -\sqrt{2}\,X\} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = z \text{ et } y = -\sqrt{2}\,z\} \\
& = & \{ \begin{pmatrix} z \\ -\sqrt{2}\,z \\ z \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R}\} = \{ \ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

On sait donc que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_{-\sqrt{2}}(A)$, d'après le point précédent,

× est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car elle est constituée d'un unique vecteur non nul.

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_{-\sqrt{2}}(A).}$$

- On rappelle que la matrice P est la concaténation des vecteurs des bases des sous-espaces propres de A, et la matrice D des valeurs propres de A.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On obtient donc la décomposition suivante :}\\ A = PDP^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.\end{array}}$$

□

4. Montrer : $A^3 = 2A$.

Démonstration.

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2A$$

$$\boxed{A^3 = 2A}$$

□

PARTIE II : Étude d'une application définie sur $\mathcal{E}$

5. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que la famille (I, A, A^2) est une base de $\mathcal{E}$. En déduire la dimension de $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- Montrons que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ aI + bA + cA^2 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left(I, A, A^2\right) \end{aligned}$$

  De plus, $(I, A, A^2) \in (\mathscr{M}_3(\mathbb{R}))^3$.

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$$

- Montrons que (I, A, A^2) est une base de $\mathcal{E}$.
  La famille (I, A, A^2) :
  × engendre $\mathcal{E}$ (d'après le point précédent),
  × est libre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ d'après la question *2.*

$$\boxed{(I, A, A^2) \text{ est une base de } \mathcal{E}.}$$

- Déterminons la dimension de $\mathcal{E}$.

$$\boxed{\dim(\mathcal{E}) = \operatorname{Card}((I, A, A^2)) = 3}$$

□

6. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, la matrice AM appartient à $\mathcal{E}$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathcal{E}$.
On sait que $\mathcal{E} = \text{Vect}\left(I, A, A^2\right)$, donc il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = a \cdot I + b \cdot A + c \cdot A^2$.

$$AM = A(a{\cdot}I{+}b{\cdot}A{+}c{\cdot}A^2) = a{\cdot}A{+}b{\cdot}A^2{+}c{\cdot}A^3 = a{\cdot}A{+}b{\cdot}A^2{+}2c{\cdot}A = (a{+}2c){\cdot}A{+}b{\cdot}A^2 \in \text{Vect}\left(I, A, A^2\right)$$

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{E},\ AM \in \mathcal{E}.}$$

□

On note f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à toute matrice M de $\mathcal{E}$, associe AM.

7. Vérifier que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- D'après la question ***6.***, $f(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}$.
- Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M, N) \in \mathcal{E}^2$.

$$f(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) = A(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) = \lambda \cdot AM + \mu \cdot AN = \lambda \cdot f(M) + \mu \cdot f(N)$$

Donc f est une application linéaire.

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{E}.}$$

□

8. Former la matrice F de f dans la base (I, A, A^2) de $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- $f(I) = A = 0 \times I + 1 \cdot A + 0 \cdot A^2$. Donc $\text{Mat}_{(I,A,A^2)}(f(I)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $f(A) = A^2 = 0 \cdot I + 0 \cdot A + 1 \cdot A^2$. Donc $\text{Mat}_{(I,A,A^2)}(f(A)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $f(A^2) = A^3 = 2A = 0 \cdot I + 2 \cdot A + 0 \cdot A^2$. Donc $\text{Mat}_{(I,A,A^2)}(f(A^2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{F = \text{Mat}_{(I,A,A^2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

9. ***a)*** Montrer : $f \circ f \circ f = 2f$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathcal{E}$.

$$\begin{aligned} (f \circ f \circ f)(M) &= f(f(f(M))) = f(f(AM)) = f(A \times AM) = f(A^2M) \\ &= A \times A^2M = A^3M = 2AM = 2f(M) \end{aligned}$$

$$\boxed{f \circ f \circ f = 2f}$$

□

b) En déduire que toute valeur propre λ de f vérifie : $\lambda^3 = 2\lambda$.

Démonstration.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f.
Notons M un vecteur propre associé à λ. Par définition : $f(M) = \lambda \cdot M$.

- D'après la question précédente :

$$(f \circ f \circ f)(M) = 2f(M) = 2\lambda \cdot M$$

- En raisonnant comme à la question précédente :

$$\begin{array}{rcll} (f \circ f \circ f)(M) & = & f(f(f(M))) & \\ & = & f(f(\lambda M)) & \textit{(par définition de } M\textit{)} \\ & = & f(\lambda f(M)) & \textit{(car } f \textit{ est linéaire)} \\ & = & f(\lambda \cdot (\lambda \cdot M)) & \textit{(par définition de } M\textit{)} \\ & = & f(\lambda^2 \cdot M) \ = \ \lambda^2 \cdot f(M) & \textit{(car } f \textit{ est linéaire)} \\ & = & \lambda^2 \cdot (\lambda \cdot M) \ = \ \lambda^3 \cdot M & \end{array}$$

- En combinant les deux résultats précédents, on obtient :

$$\lambda^3 M = 2\lambda M \quad \text{ou encore} \quad (\lambda^3 - 2\lambda)\ M = 0$$

Or M est un vecteur propre, donc $M \neq 0$. Ainsi, $\lambda^3 - 2\lambda = 0$.

$$\boxed{\text{Toute valeur propre } \lambda \text{ de } f \text{ vérifie } \lambda^3 = 2\lambda.}$$

□

c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Démonstration.

- D'après la question précédente, si λ est une valeur propre de f, alors $\lambda^3 - 2\lambda = 0$.
(c'est une implication, pas une équivalence !)
Or :

$$\lambda^3 - 2\lambda = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda(\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2}) = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda \in \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$$

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(f) \subset \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}}$$

Ceci permet d'affirmer que $-\sqrt{2}$, 0, et $\sqrt{2}$ sont les seules valeurs propres possibles de f. Il reste à déterminer lesquelles sont réellement valeurs propres.

9782340-026636_001_784.indd 102 30/07/2018 09:52

- Il reste à montrer que $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\} \subset \mathrm{Sp}(f)$.
  - Déterminons $E_{\sqrt{2}}(f) = \mathrm{Ker}(f - \sqrt{2} \cdot \mathrm{id})$.

    Soit $M \in \mathcal{E}$. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{(I,A,A^2)}(M)$.

$$\begin{aligned}
M \in E_{\sqrt{2}}(f) &\iff (f - \sqrt{2}\,\mathrm{id})(M) = 0_{\mathcal{E}} \\
&\iff (F - \sqrt{2}\,I)X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\sqrt{2}\,x & & & & & = & 0 \\ x & - & \sqrt{2}\,y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & - & \sqrt{2}\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & & & = & 0 \\ & - & \sqrt{2}\,y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & - & \sqrt{2}\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & \sqrt{2}\,z \end{array} \right.
\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
E_{\sqrt{2}}(f) &= \left\{ M \in \mathcal{E} \mid f(M) = \sqrt{2}\,M \right\} \\
&= \{ x \cdot I + y \cdot A + z \cdot A^2 \mid x = 0 \text{ et } y = \sqrt{2}\,z \} \\
&= \left\{ 0 \cdot I + \sqrt{2}\,z \cdot A + z \cdot A^2 \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ z(\sqrt{2}\,A + A^2) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\sqrt{2}\,A + A^2 \right)
\end{aligned}$$

En particulier, $E_{\sqrt{2}}(f) \neq \{0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\}$ donc $\sqrt{2}$ est valeur propre de f.

$$\boxed{\begin{array}{c} \sqrt{2} \text{ est valeur propre de } f \text{ et le sous-espace propre associé est :} \\ E_{\sqrt{2}}(f) = \mathrm{Vect}\left(\sqrt{2}\,A + A^2 \right) \end{array}}$$

Commentaire

On profite de ce premier calcul pour faire un point sur les objets étudiés :

× $\mathcal{E} = \text{Vect}\left(I, A, A^2\right)$ est un ev de dimension 3.

Ainsi, tout élément $M \in \mathcal{E}$ s'écrit sous la forme $M = x \cdot I + y \cdot A + z \cdot A^2$.

Ce qui revient à dire que M a pour coordonnées (x, y, z) dans la base (I, A, A^2).

Il ne faut pas confondre la notion de coordonnées de M avec la matrice représentative de M dans la base (I, A, A^2) : $X = \text{Mat}_{(I,A,A^2)}(M) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq (x, y, z)$.

× $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

L'espace $\mathcal{E}$ étant de dimension 3, la matrice représentative de f dans la base (I, A, A^2) est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$: $F = \text{Mat}_{(I,A,A^2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

× $E_\lambda(f) = \{M \in \mathcal{E} \mid f(M) = \lambda M\}$ est un sev de $\mathcal{E}$ donc un ensemble dont les éléments sont des sont des matrices de $\mathcal{E} \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

× $E_\lambda(F) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid FX = \lambda X\}$ est un sev de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc un ensemble dont les éléments sont des vecteurs colonnes de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Il faut donc bien comprendre que, de manière générale : $E_\lambda(f) \neq E_\lambda(F)$.
En revanche, $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(F)$: f a les mêmes valeurs propres que toute matrice qui le représente.

– Déterminons $E_0(f) = \text{Ker}(f - 0 \cdot \text{id}) = \text{Ker}(f)$.

Soit $M \in \mathcal{E}$. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \text{Mat}_{(I,A,A^2)}(M)$.

$$\begin{aligned}
M \in \text{Ker}(f) &\iff f(M) = 0_{\mathcal{E}} \\
&\iff FX = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & 2z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & -2z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{array}{rcl} E_0(f) & = & \{M \in \mathcal{E} \mid f(M) = 0\} \\ & = & \{x \cdot I + y \cdot A + z \cdot A^2 \mid x = -2z \text{ et } y = 0\} \\ & = & \big\{(-2z) \cdot I + 0 \cdot A + z \cdot A^2 \mid z \in \mathbb{R}\big\} \\ & = & \big\{z(-2I + A^2) \mid z \in \mathbb{R}\big\} \\ & = & \text{Vect}\left(-2I + A^2\right) \end{array}$$

En particulier, $E_0(f) \neq \{0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\}$ donc 0 est valeur propre de f.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{0 est valeur propre de } f \text{ et le sous-espace propre associé est :} \\ E_0(f) = \text{Vect}\left(-2I + A^2\right)\end{array}}$$

– Déterminons $E_{-\sqrt{2}}(f) = \text{Ker}(f + \sqrt{2} \cdot \text{id})$.

Soit $M \in \mathcal{E}$. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \text{Mat}_{(I,A,A^2)}(M)$.

$$\begin{array}{rcl} M \in E_{-\sqrt{2}}(f) & \Longleftrightarrow & (f + \sqrt{2}\,\text{id})(M) = 0_{\mathcal{E}} \\ & \Longleftrightarrow & (F + \sqrt{2}\,I)X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \sqrt{2}\,x & & & & & = & 0 \\ x & + & \sqrt{2}\,y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\,z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & & & = & 0 \\ & & \sqrt{2}\,y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\,z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & -\sqrt{2}\,z \end{array} \right. \end{array}$$

On obtient donc :

$$\begin{array}{rcl} E_{-\sqrt{2}}(f) & = & \big\{M \in \mathcal{E} \mid f(M) = -\sqrt{2}M\big\} \\ & = & \{x \cdot I + y \cdot A + z \cdot A^2 \mid x = 0 \text{ et } y = -\sqrt{2}\,z\} \\ & = & \big\{0 \cdot I - \sqrt{2}\,z \cdot A + z \cdot A^2 \mid z \in \mathbb{R}\big\} \\ & = & \big\{z(-\sqrt{2}\,A + A^2) \mid z \in \mathbb{R}\big\} \\ & = & \text{Vect}\left(-\sqrt{2}\,A + A^2\right) \end{array}$$

En particulier, $E_{-\sqrt{2}}(f) \neq \{0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\}$ donc $-\sqrt{2}$ est valeur propre de f.

$$\boxed{\begin{array}{c}-\sqrt{2} \text{ est valeur propre de } f \text{ et l'espace propre associé est :} \\ E_{-\sqrt{2}}(f) = \text{Vect}\left(-\sqrt{2}\,A + A^2\right)\end{array}}$$

Commentaire

- On peut vérifier que les matrices obtenues sont bien des vecteurs propres de f. Par exemple :
$$f(\sqrt{2}\,A + A^2) = A(\sqrt{2}\,A + A^2) = \sqrt{2}\,A^2 + A^3$$
D'après la question *4.*, $A^3 = 2A$. Donc :
$$f(\sqrt{2}\,A + A^2) = \sqrt{2}\,A^2 + 2A = \sqrt{2}(\sqrt{2}\,A + A^2)$$
Donc $\sqrt{2}\,A + A^2$ est bien vecteur propre
- On aurait pu déterminer $E_{\sqrt{2}}(F)$, $E_0(F)$, $E_{-\sqrt{2}}(F)$.
$$E_{\sqrt{2}}(F) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad E_0(F) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad E_{\sqrt{2}}(F) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
- Insistons une nouvelle fois sur la différence coordonnées / matrice représentative.
  × $M = 0 \cdot I + \sqrt{2} \cdot A + 1 \cdot A^2$ a pour coordonnées $(0, \sqrt{2}, 1)$ dans la base (I, A, A^2).
  × la matrice représentative de M dans cette base est :
$$X = \mathrm{Mat}_{(I,A,A^2)}(M) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

10. L'endomorphisme f est-il bijectif ? diagonalisable ?

Démonstration.

- 0 est une valeur propre de f, donc $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\}$.
On en conclut que l'application linéaire f n'est pas injective.
$$\boxed{f \text{ n'est pas bijectif.}}$$
- f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$ et on sait que :
  × $\dim(\mathcal{E}) = 3$ d'après la question ***5.***,
  × f possède 3 valeurs propres **distinctes**.
$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

Commentaire

Le premier point de cette question amène à plusieurs remarques.

- Tout d'abord, rappelons qu'une application quelconque f (pas forcément linéaire) est bijective si elle est à la fois injective et surjective. Telle que la réponse est rédigée, on utilise ici le fait que :
$$f \text{ bijective} \;\Rightarrow\; f \text{ injective}$$
et donc, par contraposée :
$$f \text{ non injective} \;\Rightarrow\; f \text{ non bijective}$$
- Dans le cas où f est une application linéaire, on sait de plus que :
$$f \text{ injective} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$$
La combinaison de ces deux points permet de conclure la première partie de la question.

Commentaire

- Dans le cas où $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une application linéaire et que $\mathcal{E}$ **est de dimension finie** :

$$f \text{ bijective} \;\Leftrightarrow\; f \text{ injective} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Ker}(f) = \{0\} \;\Leftrightarrow\; 0 \text{ n'est pas valeur propre de } f$$

L'hypothèse de dimension finie est primordiale pour la première équivalence (les autres sont toujours vraies). Autrement dit, il existe des applications linéaires injectives et non bijectives si $\mathcal{E}$ est de dimension infinie (et seulement dans ce cas).

- Cela signifie que si f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$, de dimension finie, qui n'admet pas 0 comme valeur propre, on doit rédiger comme suit :

0 n'est pas valeur propre de f, donc $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$.
On en conclut que l'application linéaire f est injective.
Ainsi, comme $\mathcal{E}$ **est de dimension finie**, f est bijective.
(l'oubli de cette hypothèse risque d'être sanctionné)

- Par contre, on peut utiliser, sans citer d'hypothèse, l'équivalence :

$$\text{La matrice } A \text{ est inversible} \;\Leftrightarrow\; 0 \text{ n'est pas valeur propre de } A$$

En effet, la notion de matrice sous-entend que l'on se trouve en dimension finie.

□

11. Déterminer une base de $\operatorname{Im}(f)$ et une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

Démonstration.

- Cas de $\operatorname{Ker}(f)$: On sait que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\left(-2I + A^2\right)$ (question ***9.***).
La famille $(-2I + A^2)$:
  - × engendre $\operatorname{Ker}(f)$ d'après la question ***9.***,
  - × est libre dans $\mathcal{E}$ car elle est constituée d'une unique matrice non nulle.

$$\boxed{(-2I + A^2) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}(f).}$$

- Cas de $\operatorname{Im}(f)$:
On sait que (I, A, A^2) est une base de $\mathcal{E}$. Donc, par caractérisation de l'image d'une application linéaire :

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(f(I), f(A), f(A^2)\right) = \operatorname{Vect}\left(A, A^2, 2A\right) = \operatorname{Vect}\left(A, A^2\right)$$

Donc la famille (A, A^2) :
  - × engendre $\operatorname{Im}(f)$,
  - × est libre car elle est constituée de 2 matrices non proportionnelles.

$$\boxed{(A, A^2) \text{ est une base de } \operatorname{Im}(f).}$$

Commentaire

On remarque que :

× comme $(-2I + A^2)$ est une base de $\text{Ker}(f)$, alors :

$$\dim(\text{Ker}(f)) = \text{Card}((-2I + A^2)) = 1$$

× comme (A, A^2) est une base de $\text{Im}(f)$, alors :

$$\text{rg}(g) = \dim(\text{Im}(f)) = \text{Card}((A, A^2)) = 2$$

On retrouve donc bien le théorème du rang :

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f) = 3 = \dim(\mathcal{E})$$

□

12. a) Résoudre l'équation $f(M) = I + A^2$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathcal{E}$.
Il existe donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = a \cdot I + b \cdot A + c \cdot A^2$. Alors :

$$\begin{array}{rl} & f(M) = I + A^2 \\ \Leftrightarrow & f(a \cdot I + b \cdot A + c \cdot A^2) = I + A^2 \\ \Leftrightarrow & a \cdot f(I) + b \cdot f(A) + c \cdot f(A^2) = I + A^2 \\ \Leftrightarrow & a \cdot A + b \cdot A^2 + 2c \cdot A = I + A^2 \\ \Leftrightarrow & I - (a+2c) \cdot A + (1-b) \cdot A^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} 1 & = & 0 \\ -(a+2c) & = & 0 \\ 1-b & = & 0 \end{array} \right. \qquad \textit{(car la famille } (I, A, A^2) \textit{ est libre)} \end{array}$$

$\boxed{\text{Ce système n'admettant pas de solution, l'équation } f(M) = I + A^2 \text{ n'admet pas de solution.}}$

Commentaire

On pouvait rédiger différemment.

- Comme $f(M) \in \text{Im}(f)$, si l'équation $f(M) = I + A^2$ est vérifiée alors : $I + A^2 \in \text{Im}(f)$.
  De plus : $A^2 \in \text{Vect}\left(A, A^2\right) = \text{Im}(f)$.
  On en déduit, par soustraction : $I = (I + A^2) - A^2 \in \text{Im}(f)$.
  Or (I, A, A^2) est une famille libre et $I \neq 0$ donc $I \in \text{Vect}\left(A, A^2\right)$ est impossible.

□

b) Résoudre l'équation $f(N) = A + A^2$, d'inconnue $N \in \mathcal{E}$.

Démonstration.
Soit $N \in \mathcal{E}$.
Il existe donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $N = a \cdot I + b \cdot A + c \cdot A^2$. Alors :

$$\begin{aligned}
& f(N) = A + A^2 \\
\Leftrightarrow \quad & f(a \cdot I + b \cdot A + c \cdot A^2) = A + A^2 \\
\Leftrightarrow \quad & a \cdot f(I) + b \cdot f(A) + c \cdot f(A^2) = A + A^2 \\
\Leftrightarrow \quad & a \cdot A + b \cdot A^2 + 2c \cdot A = A + A^2 \\
\Leftrightarrow \quad & (a + 2c - 1) \cdot A + (b - 1) \cdot A^2 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \left\{ \begin{array}{ccccc} a & & + & 2c & = 1 \\ & b & & & = 1 \end{array} \right. \qquad \textit{(car } (A, A^2) \textit{ sous-famille de } (I, A, A^2) \textit{ est libre)} \\
\Leftrightarrow \quad & \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & 1 - 2c \\ b & = & 1 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{L'ensemble des solutions de l'équation } f(N) = A + A^2 \text{ est :} \\ \{(1 - 2c) \cdot I + A + c \cdot A^2 \mid c \in \mathbb{R}\}. \end{array}}$$

□

EXERCICE II

On considère l'application $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0, +\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On admet : $0,\ 69 < \ln(2) < 0,\ 70$.

PARTIE I : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ car c'est la somme $f = f_1 + f_2$ où :
  - × $f_1 : t \mapsto t\ln(t)$ continue sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$,
  - × $f_2 : t \mapsto t^2$ continue sur $]0, +\infty[$.
- Par ailleurs : $\lim\limits_{t \to 0} t\ln(t) = 0$. De plus, $\lim\limits_{t \to 0} t^2 = 0$.
  Donc $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = 0 = f(0)$.
  Donc f est continue en 0.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } [0, +\infty[.}$$

$\square$

2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0, +\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.

Démonstration.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ car c'est la somme $f = f_1 + f_2$ où :
× $f_1 : t \mapsto t\ln(t)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$,
× $f_2 : t \mapsto t^2$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

$$\boxed{\forall t \in\ ]0, +\infty[,\ f'(t) = 2t - \left(1 \times \ln(t) + \cancel{t} \times \frac{1}{\cancel{t}}\right) = 2t - \ln(t) - 1}$$

$$\boxed{\forall t \in\ ]0, +\infty[,\ f''(t) = 2 - \frac{1}{t} = \frac{2t - 1}{t}}$$

$\square$

3. Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.

Démonstration.

- Soit $t \in\ ]0, +\infty[$. Comme $t > 0$, $f''(t) = \dfrac{2t-1}{t}$ est du signe de $2t - 1$. Or :

$$2t - 1 \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ 2t \geqslant 1 \ \Leftrightarrow\ t \geqslant \frac{1}{2}$$

- On obtient le tableau de variations suivant :

t	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $f''(t)$		$-$	0	$+$	
Variations de f'	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Détaillons les éléments de ce tableau.

– $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \cancel{2} \times \dfrac{1}{\cancel{2}} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \cancel{1} + \ln(2) - \cancel{1} = \ln(2)$

– $f'(t) = 2t - \ln(t) - 1 \underset{t \to 0}{\sim} -\ln(t)$. Donc : $\lim\limits_{t \to 0} f'(t) = +\infty$.

– $f'(t) = 2t - \ln(t) - 1 = 2t\left(1 - \dfrac{\ln(t)}{2t}\right) \underset{t \to +\infty}{\sim} 2t$, car $1 - \dfrac{\ln(t)}{2t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ par croissances comparées.
  Donc : $\lim\limits_{t \to +\infty} f'(t) = +\infty$.

- Or $\ln(2) > 0$. Donc : $\forall t \in \,]0, +\infty[$, $f'(t) > 0$.

  De plus : $f(t) = t^2 - t\ln(t) = t^2\left(1 - \dfrac{\ln(t)}{t}\right) \underset{t \to +\infty}{\sim} t^2$ par croissances comparées.

  Donc : $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$.

  On obtient donc le tableau de variations suivant pour f :

t	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(t)$	$+$
Variations de f	$0 \nearrow +\infty$

□

4. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Montrer que C admet une tangente en 0 et préciser celle-ci.

Démonstration.

- Soit $t \in \,]0, +\infty[$. Calculons le taux d'accroissement de f en 0.

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{t^2 - t\ln(t)}{t} = \frac{\cancel{t}(t - \ln(t))}{\cancel{t}} = t - \ln(t)$$

Donc : $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t) - f(0)}{t - 0} = +\infty$.

$$\boxed{\text{Donc la courbe } C \text{ admet une demi-tangente verticale en } 0.}$$

□

b) Montrer que C admet un point d'inflexion et un seul, noté I, et préciser les coordonnées de I.

Démonstration.

D'après la question précédente, f'' s'annule en changeant de signe uniquement en $\dfrac{1}{2}$.

De plus : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\ln(2)$.

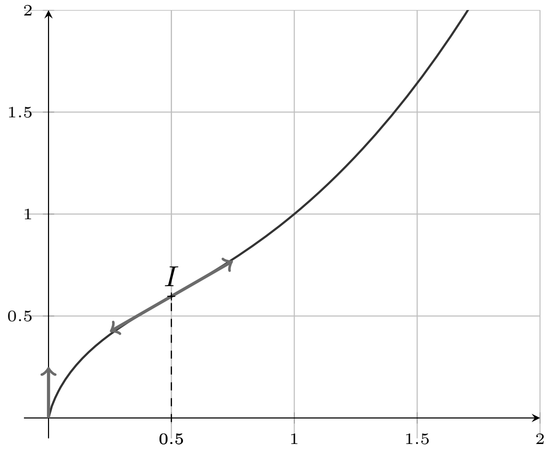
$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un unique point d'inflexion } I \text{ en } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln(2)\right).}$$

□

c) Tracer l'allure de C.

Démonstration.
La courbe C admet pour tangente au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= f\left(\tfrac{1}{2}\right) + f'\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(x - \tfrac{1}{2}\right) \\ &= \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\ \ln(2)\right) + \ln(2)\left(x - \tfrac{1}{2}\right) \\ &= \tfrac{1}{4} + \ln(2) x \end{aligned}$$



□

5. Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in [0, +\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

Démonstration.

- La fonction f est :
  - × continue sur $[0, +\infty[$,
  - × strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

  Ainsi, f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[)$. De plus :

$$f([0, +\infty[) = \left[f(0), \lim_{t \to +\infty} f(t) \right[= [0, +\infty[$$

  Or $1 \in [0, +\infty[$, donc l'équation $f(t) = 1$ admet une unique solution α sur $[0, +\infty[$.
- De plus $f(1) = 1^2 - 1 \times \ln(1) = 1$. Donc $\alpha = 1$.

$$\boxed{\text{L'équation } f(t) = 1 \text{ admet 1 comme unique solution sur } [0, +\infty[.}$$

Commentaire

- Il faut tout de suite repérer cette question comme une application du théorème de la bijection. Et s'empresser d'y répondre !
- Attention de ne pas seulement vérifier que 1 est solution de l'équation $f(t) = 1$.
  Il faut bien montrer ici que c'est **la seule** solution sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$.

□

PARTIE II : Étude d'une fonction F de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0,+\infty[^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, définie, pour tout (x,y) de $]0,+\infty[^2$, par :

$$F(x,y) = x\ln(y) - y\ln(x)$$

6. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x,y) de $]0,+\infty[^2$.

Démonstration.

- F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$, donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[^2$.
- Soit $(x,y) \in]0,+\infty[^2$.

$$\partial_1(F)(x,y) = \ln(y) - y \times \frac{1}{x} = \ln(y) - \frac{y}{x}$$

$$\partial_2(F)(x,y) = x \times \frac{1}{y} - \ln(x) = \frac{x}{y} - \ln(x)$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ \partial_1(F)(x,y) = \ln(y) - \frac{y}{x} \ \text{ et } \ \partial_2(F)(x,y) = \frac{x}{y} - \ln(x)}$$

□

7. a) Soit $(x,y) \in]0,+\infty[^2$. Montrer que (x,y) est un point critique de F si et seulement si :

$$x > 1, \quad y = \frac{x}{\ln(x)} \quad \text{et} \quad f\left(\ln(x)\right) = 1$$

Démonstration.
Le couple (x,y) est un point critique de F si et seulement si :

$$\nabla(F)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1(F)(x,y) & = & 0 \\ \partial_2(F)(x,y) & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(y) & = & \dfrac{y}{x} \\ \dfrac{x}{y} & = & \ln(x) \end{cases}$$

- On sait que $(x,y) \in]0,+\infty[^2$, c'est-à-dire $x > 0$ et $y > 0$. On en déduit : $\dfrac{x}{y} > 0$.
  Ainsi, si (x,y) est un point critique de F, $\ln(x) = \dfrac{x}{y} > 0$, et par stricte croissance de la fonction exponentielle, $x > \mathrm{e}^0 = 1$.
  On a donc déjà $x > 1$.
- On reprend alors la résolution du système.

$$\begin{cases} \ln(y) & = & \dfrac{y}{x} \\ \dfrac{x}{y} & = & \ln(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ \ln(y) & = & y \\ \dfrac{x}{\ln(x)} & = & y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ \ln\left(\dfrac{x}{\ln(x)}\right) & = & \dfrac{x}{\ln(x)} \\ \dfrac{x}{\ln(x)} & = & y \end{cases}$$

La première équation devient alors :

$$\begin{aligned} x\ \ln\left(\frac{x}{\ln(x)}\right) = \frac{x}{\ln(x)} & \Leftrightarrow \ x\ (\ln(x) - \ln(\ln(x))) = \frac{x}{\ln(x)} \\ & \Leftrightarrow \ \cancel{x}\ \ln(x)\,(\ln(x) - \ln(\ln(x))) = \cancel{x} \quad (\textit{car } x \neq 0) \\ & \Leftrightarrow \ (\ln(x))^2 - \ln(x)\ \ln(\ln(x)) = 1 \\ & \Leftrightarrow \ f(\ln(x)) = 1 \end{aligned}$$

On en déduit alors que, si (x,y) est un point critique de F, alors :

$$\begin{cases} x > 1 \\ f(\ln(x)) = 1 \\ y = \dfrac{x}{\ln(x)} \end{cases}$$

- Réciproquement, si (x,y) vérifie ces trois conditions, alors $\nabla(F)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
  D'où (x,y) est un point critique de F.

$$\boxed{\text{Finalement } (x,y) \text{ est un point critique de } F \text{ si et seulement si : } \begin{cases} x > 1 \\ f(\ln(x)) = 1 \\ y = \dfrac{x}{\ln(x)} \end{cases}}$$

□

b) Établir que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (e, e).

Démonstration.

- Soit $(x,y) \in \,]0,+\infty[^2$. D'après la question précédente, si (x,y) est un point critique de F, alors, en particulier $f(\ln(x)) = 1$.
- D'après la question ***5.***, l'équation $f(t) = 1$ admet une unique solution sur $]0,+\infty[$: $\alpha = 1$.
  Donc $\ln(x) = 1$ et $x = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
- On obtient alors : $y = \dfrac{\mathrm{e}}{\ln(\mathrm{e})} = \mathrm{e}$. D'où $(x,y) = (\mathrm{e}, \mathrm{e})$.
- Réciproquement :

$$\partial_1(F)(\mathrm{e},\mathrm{e}) = \ln(\mathrm{e}) - \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_2(F)(\mathrm{e},\mathrm{e}) = \ln(\mathrm{e}) - \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}} = 0$$

  Donc (e, e) est un point critique de F.

$$\boxed{\text{Finalement, la fonction } F \text{ admet } (\mathrm{e},\mathrm{e}) \text{ pour unique point critique.}}$$

□

8. La fonction F admet-elle un extremum local en (e, e) ?

Démonstration.
Pour savoir si (e, e) est un extremum local pour F, on détermine les valeurs propres de la matrice hessienne de F en (e, e).

- La fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$.
  Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2 sur cet ouvert.
- Soit $(x,y) \in \,]0,+\infty[^2$.

$$\nabla^2(F)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(F)(x,y) & \partial^2_{1,2}(F)(x,y) \\ \partial^2_{2,1}(F)(x,y) & \partial^2_{2,2}(F)(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} & -\dfrac{x}{y^2} \end{pmatrix}$$

Donc on obtient :

$$\nabla^2(F)(\mathrm{e},\mathrm{e}) = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^2} & \frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}} \\ \frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}} & -\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}$$

- La matrice $\nabla^2(F)(\mathrm{e},\mathrm{e})$ est diagonale, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. D'où $\mathrm{Sp}(\nabla^2(F)(\mathrm{e},\mathrm{e})) = \{\mathrm{e}^{-1}, -\mathrm{e}^{-1}\}$.

$\nabla^2(F)(\mathrm{e},\mathrm{e})$ admet deux valeurs propres de signe contraire,
donc (e,e) n'est pas un extremum local pour F (c'est un point selle).

Commentaire

On rappelle qu'on utilise ici le théorème suivant :
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un **ouvert** U et soit (x_0, y_0) un **point critique** de f.

- Si les valeurs propres de la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont strictement positives, alors f admet un minimum local en (x_0, y_0).
- Si les valeurs propres de la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont strictement négatives, alors f admet un maximum local en (x_0, y_0).
- Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont non nulles et de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0). On parle de *point col* ou *point selle*.
- Si 0 est valeur propre de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$, alors on ne peut rien conclure a priori.

□

PARTIE III : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

9. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Démonstration.
Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n)$: u_n existe et $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

- ▸ **Initialisation** :
  $u_0 = \dfrac{1}{2} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. D'où $\mathcal{P}(0)$.
- ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire u_{n+1} existe et $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$).
  - Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
    En particulier $u_n \geqslant 0$. Donc $f(u_n)$ est bien défini. Ainsi $u_{n+1} = f(u_n)$ existe.
  - On sait que : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.
    Or, d'après la question ***3.***, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc :
    $$f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1) \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$
    On a donc déjà : $u_{n+1} \leqslant 1$.
  - D'après l'énoncé, on sait que : $\ln(2) > 0,69$. Donc :
    $$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln(2) \ > \ \frac{1}{4} + \frac{1}{2}0,69 \ > \ \frac{1}{4} + 0,34 = 0,25 + 0,34 = 0,59$$
    Donc : $u_{n+1} \geqslant 0.59 > \dfrac{1}{2}$.

Finalement $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, } (u_n) \text{ est bien définie et : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right].}$$

□

10. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Démonstration.
Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \leqslant u_{n+1}$.

- **Initialisation** :
  D'après la question précédente : $u_1 \geqslant \dfrac{1}{2} = u_0$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$).
  Par hypothèse de récurrence, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
  Or la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc :

$$\begin{array}{ccc} f(u_n) & \leqslant & f(u_{n+1}) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ u_{n+1} & & u_{n+2} \end{array}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$$

□

11. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
(on pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto t - \ln(t)$)

Démonstration.

- La suite (u_n) est :
  - × croissante, d'après la question ***10.***,
  - × majorée par 1, d'après la question ***9.***,

  Elle est donc convergent vers un réel ℓ.
- De plus : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.
  Donc, par passage à la limite dans cette inégalité : $\dfrac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 1$.
- On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
  Donc, par passage à la limite et par continuité de f sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on obtient :

$$\begin{array}{rcll} \ell = f(\ell) & \Leftrightarrow & \ell = \ell^2 - \ell\,\ln(\ell) & \\ & \Leftrightarrow & \ell = \ell(\ell - \ln(\ell)) & \textit{(car } \ell \geqslant \dfrac{1}{2}\textit{, donc en particulier } \ell \neq 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 1 = \ell - \ln(\ell) & \end{array}$$

  Donc $\ell = f(\ell)$ si et seulement si $g(\ell) = 1$ où $g : t \mapsto t - \ln(t)$.

- Étudions alors la fonction g sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
  - La fonction g est dérivable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ comme somme de fonctions dérivables sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
  - Soit $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
  $$g'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$$
  Comme $t > 0$, $g'(t)$ est du signe de $t - 1$. Ainsi :
  $$g'(t) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; t - 1 \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; t \geqslant 1$$
  - On obtient alors le tableau de variations suivant :

t	$\frac{1}{2}$		1
Signe de $g'(t)$		$-$	
Variations de g	$g\left(\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	1

  - La fonction g est donc :
    × continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (car dérivable sur cet intervalle),
    × strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
  Ainsi g réalise une bijection de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ sur $g\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$. De plus :
  $$g\left(\left[\tfrac{1}{2}, 1\right]\right) = \left[g(1), g\left(\tfrac{1}{2}\right)\right] = \left[1, \tfrac{1}{2} + \ln(2)\right]$$
  Or $1 \in \left[1, \frac{1}{2} + \ln(2)\right]$, donc l'équation $g(t) = 1$ admet une unique solution sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
  De plus $g(1) = 1$. Donc l'unique solution de l'équation $g(t) = 1$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ est 1.
- Or $\ell \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et $g(\ell) = 1$. Donc $\ell = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ converge et } \lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

□

12. Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche un entier naturel N tel que $1 - u_N < 10^{-4}$.

Démonstration.

```
n = 0
u = 1/2
while 1 - u >= 10 ^ (-4)
  u = u ^ 2 - u * log(u)
  n = n + 1
end
disp(n)
```

□

EXERCICE III

PARTIE I : Étude d'une variable aléatoire

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par : $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$.

1. Vérifier que la fonction f est paire.

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$. On a bien $-t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(-t) - f(t) &= \frac{e^{-(-t)}}{(1+e^{-(-t)})^2} - \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} \\
&= \frac{e^{t}}{(1+e^{t})^2} - \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} \\
&= \frac{e^{t}(1+e^{-t})^2 - e^{-t}(1+e^{t})^2}{(1+e^{t})^2(1+e^{-t})^2} \\
&= \frac{e^{t}(1+2e^{-t}+e^{-2t}) - e^{-t}(1+2e^{t}+e^{2t})}{(1+e^{t})^2(1+e^{-t})^2} \\
&= \frac{\cancel{e^{t}+2+e^{-t}} - \cancel{(e^{-t}+2+e^{t})}}{(1+e^{t})^2(1+e^{-t})^2} \ = \ 0
\end{aligned}$$

Donc $f(-t) = f(t)$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est paire.}}$$

Commentaire

La méthode classique pour démontrer qu'une fonction f est paire est de prouver l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(-x) = f(x)$$

Lorsque ce calcul direct ne semble pas aboutir, on pensera à former $f(-x) - f(x)$.

En règle générale, pour démontrer l'égalité « $a = b$ », on peut :
– partir de a et, par une succession d'égalités, arriver à b.
– partir de b et, par une succession d'égalités, arriver à a.
– prouver $a = c$, puis $b = c$ par l'une des méthodes précédentes (méthode du « mi-chemin ».
– calculer $a - b$, pour prouver $a - b = 0$.

Pour choisir entre les deux premières méthodes, on retiendra qu'il est plus simple de transformer une expression « compliquée » en expression « simple » que l'inverse.
La dernière méthode est souvent efficace, notamment lorsque les autres ne semblent pas aboutir.

□

2. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est le quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Détaillons ce dernier point.
  Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rll} e^{-t} > 0 & \text{donc} & 1 + e^{-t} > 1 \\ & \text{et} & (1+e^{-t})^2 > 1^2 \quad \textit{(car la fonction } x \mapsto x^2 \textit{ est croissante sur } [0,+\infty[\textit{)} \\ & \text{ainsi} & (1+e^{-t})^2 > 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{-t} > 0$ donc $(1+e^{-t})^2 > 0$.

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \geqslant 0}$$

- L'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente si les intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\ dt$ le sont. On étudie tout d'abord l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\ dt$.
  - La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$.
  - Soit $A \in [0, +\infty[$.

$$\int_0^A f(t)\ dt = \int_0^A \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\ dt = \left[\frac{1}{1+e^{-t}}\right]_0^A = \frac{1}{1+e^{-A}} - \frac{1}{2} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

  Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.

  On étudie maintenant l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt$.
  - On effectue le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -t \ (\text{donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -\ dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \bullet\ t = -\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = 0 \end{array}\right.$$

  Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
  On a donc :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\ dt = \int_0^{-\infty} f(-u)(-\ du) = \int_{-\infty}^{0} f(-u)\ du = \int_{-\infty}^{0} f(u)\ du$$

  La dernière égalité est obtenue car la fonction f est paire (d'après la question ***1.***).
  On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(u)\ du$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \text{ converge et : } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)\ dt = 1.}$$

$$\boxed{\text{Finalement, la fonction } f \text{ est une densité d'une variable aléatoire réelle.}}$$

Commentaire

- Le programme officiel stipule que « les changements de variables affines pourront être utilisés directement sur des intégrales sur un intervalle quelconque ». Pour autant, ce type de changement de variable ne peut se faire qu'après avoir démontré la convergence (ce qu'on a fait dans l'exemple).
- Cela signifie aussi que, de manière générale, on ne peut effectuer de changement de variable directement sur une intégrale impropre : on doit se ramener au préalable sur une intégrale sur un segment.

□

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

3. Déterminer la fonction de répartition de X.

Démonstration.
On note F_X la fonction de répartition de X. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$$

La fonction f est continue sur $]-\infty, x]$.
Soit $B \in\ ]-\infty, x]$.

$$\int_B^x f(t)\ dt = \int_B^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}\ dt = \left[\ \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}}\ \right]_B^x = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-B}} \underset{B\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}.}$$

□

4. a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,f(t)\ dt$ converge.

Démonstration.

- La fonction $t \mapsto t\,f(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ comme produit de fonctions continues sur l'intervalle $[0,+\infty[$.
- × Tout d'abord : $t\,f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
  En effet :
  $$\frac{t\,f(t)}{\frac{1}{t^2}} = t^2\,tf(t) = \frac{t^3\,\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2} = \frac{t^3\,\mathrm{e}^{-t}}{1+2\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^3\,\mathrm{e}^{-t}}{1} = t^3\,\mathrm{e}^{-t}$$
  Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^3\mathrm{e}^{-t} = 0$. Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\,tf(t) = 0$.

  On en déduit : $t\,f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

  × $\forall t \in [1,+\infty[,\ t\,f(t) \geqslant 0 \quad$ et $\quad \dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$.

  × L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ dt$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$, d'exposant $2 > 1$. Elle est donc convergente.

  Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\,f(t)\ dt$ converge.

- La fonction $t \mapsto t\,f(t)$ est continue sur le **segment** $[0, 1]$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\,f(t)\ dt$ est bien définie.

$$\boxed{\text{Finalement, l'intégrale } \int_0^{+\infty} t\,f(t)\ dt \text{ converge.}}$$

Commentaire

L'énoncé demande simplement de déterminer la **nature** de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,f(t)\ dt$ (sans la calculer). Il faut donc privilégier pour cette question l'utilisation d'un critère de comparaison / équivalence / négligeabilité d'intégrales de fonctions continues positives.
On évitera donc le calcul direct de l'intégrale car :
1. il est sans doute difficile,
2. il est peut-être même (souvent) impossible.

□

b) En utilisant l'imparité de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t\,f(t)$, montrer que X admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(X) = 0$.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour un calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\ f(t)\ dt$.
  L'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\ dt$ est convergente si les intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\ dt$ le sont. Or, d'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\ dt$ converge.
- Déterminons la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf(t)\ dt$.
  On effectue le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -t \text{ (donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -\ dt \quad \text{ et } \quad dt = -du \\ \bullet\ t = -\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = 0 \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
On a donc :

$$\int_0^{+\infty} tf(t)\ dt = \int_0^{-\infty} (\cancel{-}u)f(-u)(\cancel{-}\ du) = \int_0^{-\infty} uf(u)\ du = -\int_{-\infty}^{0} uf(u)\ du$$

La deuxième égalité est obtenue car la fonction f est paire (d'après la question ***1.***).
On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(u)\ du$ est convergente.

- Finalement, X admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} tf(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} tf(t)\,dt = -\cancel{\int_{0}^{+\infty} tf(t)\,dt} + \cancel{\int_{0}^{+\infty} tf(t)\,dt} = 0$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(X) = 0.}$$

□

PARTIE II. Étude d'une autre variable aléatoire

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \ln(1 + e^x)$.

5. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.

Démonstration.

- La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $\varphi = h \circ g$ où :
  × $g : x \mapsto 1 + e^x$:
    – dérivable sur $\mathbb{R}$,
    – telle que $g(\mathbb{R}) \subset]0, +\infty[$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + e^x > 0$).
  × $h : y \mapsto \ln(y)$ dérivable sur $]0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\varphi'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} > 0$$

  Donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction φ est :
  × continue sur $]-\infty, +\infty[$ (car dérivable sur cet intervalle),
  × strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$.

  Ainsi, φ réalise une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $I = \varphi(]-\infty, +\infty[)$. De plus :

$$\varphi(]-\infty, +\infty[) = \left] \lim_{x \to -\infty} \varphi(x), \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) \right[=]0, +\infty[$$

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } I =]0, +\infty[.}$$

□

6. Exprimer, pour tout y de I, $\varphi^{-1}(y)$.

Démonstration.
Soit $y \in I$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(y) = x \quad & \Leftrightarrow \quad y = \varphi(x) \\
& \Leftrightarrow \quad y = \ln(1 + e^x) \\
& \Leftrightarrow \quad e^y = 1 + e^x \qquad \textit{(car la fonction } x \mapsto e^x \textit{ est bijective sur } \mathbb{R}\textit{)} \\
& \Leftrightarrow \quad e^y - 1 = e^x \\
& \Leftrightarrow \quad \ln(e^y - 1) = x \qquad \textit{(car la fonction } x \mapsto \ln(x) \textit{ est bijective sur }]0, +\infty[\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall y \in I,\ \varphi^{-1}(y) = \ln(e^y - 1)}$$

Commentaire

On remarque que la composition par ln est bien autorisée car, si $y \in I =]0, +\infty[$, alors $e^y \in]1, +\infty[$. Et donc $e^y - 1 \in]0, +\infty[$.

□

On considère la variable aléatoire réelle Y définie par : $Y = \varphi(X)$.

7. Justifier : $\mathbb{P}([Y \leqslant 0]) = 0$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$Y(\Omega) = (\varphi(X))(\Omega) = \varphi\big(X(\Omega)\big) \subset \,]0, +\infty[$$

En effet, $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ et $\varphi(\mathbb{R}) = I = \,]0, +\infty[$ (d'après la question ***5.***)

- On obtient alors : $[Y \leqslant 0] = \varnothing$. Donc :

$$\mathbb{P}([Y \leqslant 0]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Y \leqslant 0]) = 0}$$

□

8. Déterminer la fonction de répartition de Y.

Démonstration.

- Tout d'abord : $Y(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  - Si $x \leqslant 0$ alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$. Donc, on a :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  - Si $x > 0$.

$$\begin{array}{rcll}
F_Y(x) & = & \mathbb{P}([Y \leqslant x]) & \\
& = & \mathbb{P}([\varphi(X) \leqslant x]) & \\
& = & \mathbb{P}(\left[X \leqslant \varphi^{-1}(x)\right]) & \textit{(car } \varphi \textit{ est strictement croissante, donc } \varphi^{-1} \textit{ également)} \\
& = & \mathbb{P}([X \leqslant \ln(\mathrm{e}^x - 1)]) \ = \ F_X(\ln(\mathrm{e}^x - 1)) & \\
& = & \dfrac{1}{1 + \exp(-\ln(\mathrm{e}^x - 1))} & \\
& = & \dfrac{1}{1 + \exp\left(\ln\left((\mathrm{e}^x - 1)^{-1}\right)\right)} & \\
& = & \dfrac{1}{1 + \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}} \ = \ \dfrac{1}{\frac{(\mathrm{e}^x - \cancel{1}) + \cancel{1}}{\mathrm{e}^x - 1}} \ = \ \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x} & \\
& = & \dfrac{\cancel{\mathrm{e}^x} \, (1 - \mathrm{e}^{-x})}{\cancel{\mathrm{e}^x}} \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-x} &
\end{array}$$

$$\boxed{F_Y : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{array} \right.}$$

□

9. Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.

Démonstration.

$$\boxed{\text{On reconnaît une loi exponentielle : } Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1). \text{ On a alors } \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{1} = 1 \text{ et } \mathbb{V}(Y) = \frac{1}{1^2} = 1.}$$

□

PARTIE III : Étude d'une convergence en loi

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, de même densité f, où f a été définie dans la partie I.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $U_n = T_n - \ln(n)$.

10. a) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de T_n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On commence par noter que :

$$[T_n \leqslant x] = [X_1 \leqslant x] \ \cap \ \cdots \ \cap [X_n \leqslant x] = \bigcap_{i=1}^{n} \ [X_i \leqslant x]$$

- On obtient alors :

$$\begin{array}{rcll} F_{T_n}(x) & = & \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \ [X_i \leqslant x]\right) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i \leqslant x]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \textit{ ont même loi)} \\ & = & \big(\mathbb{P}([X_1 \leqslant x]\,)\big)^n & \end{array}$$

- D'après la question ***3.*** : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{X_1}(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in \mathbb{R},\ F_{T_n}(x) = \left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)^n.}$$

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([U_n \leqslant x]) = \left(1 + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^{-n}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([U_n \leqslant x]) & = & \mathbb{P}([T_n - \ln(n) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([T_n \leqslant x + \ln(n)]) & \\ & = & F_{T_n}(x + \ln(n)) & \\ & = & \left(\dfrac{1}{1+\exp(-(x+\ln(n)))}\right)^n & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{10.a)}}\textit{)} \\ & = & \Big(1 + \exp(-x - \ln(n))\Big)^{-n} & \end{array}$$

Or : $\exp(-x - \ln(n)) = \mathrm{e}^{-x-\ln(n)} = \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{e}^{-\ln(n)} = \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{e}^{\ln(n^{-1})} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([U_n \leqslant x]) = \left(1 + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^{-n}}$$

□

11. En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On cherche à déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{U_n}(x)$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$F_{U_n}(x) = \left(1 + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)\right)$$
- De plus : $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n} = 0$, donc $\ln\left(1 + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}$. D'où :
$$-n \ln\left(1 + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\cancel{n}\,\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\cancel{n}} = -\mathrm{e}^{-x}$$
- Or la fonction $x \mapsto \exp(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc, par composition de **limites** :
$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)\right) = \exp\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$$
D'où :
$$\lim_{n\to+\infty} F_{U_n}(x) = \exp(-\mathrm{e}^{-x})$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On note } G \text{ la fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ par } G : x \mapsto \exp(-\mathrm{e}^{-x}).\\ \text{On a alors } \lim\limits_{n\to+\infty} F_{U_n}(x) = G(x).\end{array}}$$

Montrons que G est une fonction de répartition.

- Tout d'abord : $\lim\limits_{x\to+\infty} -\mathrm{e}^{-x} = 0$. Donc, par continuité de exp en 0 :
$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty} \exp(-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^0 = 1$$
- De plus : $\lim\limits_{x\to-\infty} -\mathrm{e}^{-x} = -\infty$. D'où :
$$\lim_{x\to-\infty} G(x) = \lim_{x\to-\infty} \exp(-\mathrm{e}^{-x}) = 0$$
- La fonction G est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $G = h_2 \circ h_1$ où :
  × $h_1 : x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$ est :
    – continue sur $\mathbb{R}$,
    – telle que $h_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
  × $h_2 : y \mapsto \exp(y)$ continue sur $\mathbb{R}$.
- Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour la même raison et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$g(x) = G'(x) = \mathrm{e}^{-x} \exp(-\mathrm{e}^{-x}) > 0$$
Donc la fonction G est croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } G \text{ est une fonction de répartition.}}$$

Montrons que G est la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité.

- On vient de démontrer que G est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction G est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car les fonctions h_1 et h_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction G est la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité que l'on notera V.

- Pour déterminer une densité de V, on dérive la fonction G sur $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ est bien un intervalle ouvert). On en déduit que g est bien une densité de V.

La suite (U_n) converge en loi vers la v.a.r. V de fonction de répartition $G : x \mapsto \exp(-\mathrm{e}^{-x})$ dont une densité est $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \exp(-\mathrm{e}^{-x})$.

Commentaire

- Le programme officiel liste certaines propriétés d'une fonction de répartition F :
  1. F est croissante.
  2. F est continue à droite en tout point.
  3. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
  4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

  Cependant, il n'est pas précisé qu'il s'agit là d'une caractérisation d'une fonction de répartition : toute fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés ***1.***, ***2.***, ***3.*** et ***4.*** peut être considérée comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire.
- L'utilisation de la caractérisation ci-dessus ne semble apparaître que dans ce type de question traitant de la convergence en loi. Ce type de question apparaît aussi dans le sujet d'EML 2017.
  Il est donc conseillé de connaître la caractérisation ci-dessus.

□

ESSEC-I 2016 : le sujet

On s'intéresse dans ce problème à deux mesures du risque utilisées par les marchés financiers.
Pour cela, on considère des variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, qui modélisent des pertes financières subies par des acteurs économiques sur une période donnée.
Toutes les variables aléatoires définies dans ce problème sont des variables aléatoires sur cet espace probabilisé.
Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des variables aléatoires réelles à densité X vérifiant :

- X admet une espérance notée $\mathbb{E}(X)$.
- il existe un intervalle I_X (dont on admet l'unicité) sur lequel la fonction de répartition de X, notée F_X, réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de I_X sur $]0,1[$.
  On note G_X la bijection réciproque, définie de $]0,1[$ sur I_X. Les notations F_X et G_X seront utilisées dans tout le sujet.

Dans tout le problème β est un réel appartenant à $]0,1[$ et représentant un niveau de confiance.

Partie I - Définition et propriétés de la « Value at Risk »

1. Soit $X \in \mathcal{D}$. Montrer qu'il existe un unique réel v tel que $\mathbb{P}([X \leqslant v]) = \beta$, et que l'on a $v = G_X(\beta)$.

- On définit alors $r_\beta(X)$ appelé la « Value at Risk »au niveau de confiance β de X, par $r_\beta(X) = G_X(\beta)$. C'est une grandeur qui permet d'évaluer le risque pris par l'acteur qui détient l'actif dont les pertes sont modélisées par X.
- **On remarque que $r_\beta(X)$ est égal au capital minimal qu'il faut détenir pour être en mesure de couvrir les pertes de l'actif associé à X avec une probabilité égale à β.**

2. On suppose que, dans cette question, X est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda \in]0,+\infty[$.

a) Rappeler la valeur de $F_X(x)$ pour tout réel x.

b) En déduire que $X \in \mathcal{D}$ et que l'on a $r_\beta(X) = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-\beta)$.

3. On suppose dans cette question que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale de paramètres m et σ^2 pour X et de paramètres μ et s^2 pour Y.
On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et φ sa densité usuelle.

a) (i) Justifier que Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$. On note Φ^{-1} la bijection réciproque.

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $F_X(x)$ en fonction de Φ, m, σ et x.

(iii) En déduire que $X \in \mathcal{D}$ et que $r_\beta(X) = m + \sigma\Phi^{-1}(\beta)$.

b) Quelle est la loi de $X+Y$?
En déduire $r_\beta(X+Y)$ en fonction de m, μ, σ, s et β.

c) Pour quels $\beta \in]0,1[$ a-t-on $r_\beta(X+Y) \leqslant r_\beta(X) + r_\beta(Y)$?

4. Soit X une variable aléatoire appartenant à $\mathcal{D}$, c un réel et λ un réel strictement positif.
On pose $Y = X + c$ et $Z = \lambda X$ et on admet que Y et Z appartiennent à $\mathcal{D}$.

a) Montrer que $r_\beta(Y) = r_\beta(X) + c$.

b) Montrer que $r_\beta(Z) = \lambda\, r_\beta(X)$.

5. Soit X et Y deux variables aléatoires appartenant à $\mathcal{D}$ et telles que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$.

a) Comparer, pour tout réel x, $F_X(x)$ et $F_Y(x)$.

b) En déduire que $r_\beta(X) \leqslant r_\beta(Y)$.

Partie II - Estimation de la valeur de $r_\beta(X)$

Dans la pratique la loi de X n'est pas totalement connue et on a besoin d'avoir une idée assez précise de la « Value at Risk » ne connaissant qu'un certain nombre de valeurs de cette variable.
On modélise cette situation en supposant, dans cette partie, que la loi de X dépend d'un paramètre θ inconnu appartenant à un sous ensemble Θ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$, que $r_\beta(X) = g(\theta)$ où g est une fonction définie sur Θ et que pour tout $\theta \in \Theta$, $X \in \mathcal{D}$.
On utilise aussi les hypothèses et notations suivantes :

- $(X_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles appartenant à $\mathcal{D}$, mutuellement indépendantes, de même loi que X.
- pour tout $\omega \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on ordonne $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ dans l'ordre croissant et on note alors $X_{1,n}(\omega), \dots, X_{n,n}(\omega)$ les valeurs obtenues.
  En particulier, $X_{1,n}(\omega)$ est la plus petite des valeurs $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ et $X_{n,n}(\omega)$ la plus grande.
- on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$, les $X_{k,n}$ sont des variables aléatoires.
- pour tout réel x et tout entier naturel non nul n, on définit la variable aléatoire $N_{x,n}$ ainsi :
  pour tout $\omega \in \Omega$, $N_{x,n}(\omega)$ est le nombre d'indices k compris entre 1 et n tels que l'on ait $X_k(\omega) \leqslant x$.

6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $N_{x,n}$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. En déduire l'espérance et la variance de $N_{x,n}$.

7. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{N_{x,n}}{n} - F_X(x)\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) = 0$$

8. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il y a égalité entre les événements $[X_{k,n} \leqslant x]$ et $[N_{x,n} \geqslant k]$.

b) En déduire que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathbb{P}([X_{k,n} \leqslant x]) = \sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} (F_X(x))^r (1 - F_X(x))^{n-r}$$

et que $X_{k,n}$ est une variable aléatoire à densité.

9. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires et c un réel. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([|U_n - c| \geqslant \varepsilon]) = 0$$

On considère $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite convergente de réels et on pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

a) Établir que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant t]) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > c \\ 1 & \text{si } t < c \end{cases}$.

b) On suppose $\ell > c$ et on pose $\varepsilon = \dfrac{\ell - c}{2}$.
En remarquant que $\ell - \varepsilon = c + \varepsilon$, montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant c + \varepsilon$.
En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant u_n]) = 0$.

c) Montrer de même que si $\ell < c$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant u_n]) = 1$.

10. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\beta \geqslant 1$, la variable aléatoire Y_n sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ par $Y_n = X_{\lfloor n\beta \rfloor, n}$ où $\lfloor n\beta \rfloor$ désigne la partie entière de $n\beta$ et on pose $\theta' = r_\beta(X)$.
Soit $\varepsilon > 0$.

a) Montrer que : $\mathbb{P}([|Y_n - \theta'| \leqslant \varepsilon]) = \mathbb{P}([Y_n \leqslant \theta' + \varepsilon]) - \mathbb{P}([Y_n \leqslant \theta' - \varepsilon])$.

b) En déduire que :

$$\mathbb{P}(\big[|Y_n - \theta'| \leqslant \varepsilon\big]) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{N_{\theta'+\varepsilon,n}}{n} \geqslant \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right]\right) - \mathbb{P}\left(\left[\frac{N_{\theta'-\varepsilon,n}}{n} \geqslant \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right]\right)$$

c) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([|Y_n - \theta'| \leqslant \varepsilon]) = 1$.
Que peut-on en déduire concernant l'estimateur Y_n de $r_\beta(X)$?

11. On suppose que l'on a défini un fonction d'en-tête `function R = triCroissant(T)` qui renvoie le tableau des valeurs se trouvant dans `T` rangées dans l'ordre croissant.
Par exemple, si `T=[0 -1 0 2 4 2 3]` alors `disp(triCroissant(T))` affiche :

```
ans  =
    -1.   0.   0.   2.   2.   3.   4.
```

Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function r = VaR(X,beta)` qui renvoie la valeur de l'estimation obtenue avec l'estimateur Y_n pour $r_\beta(X)$ si le tableau `X` contient la réalisation de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ et `beta` la valeur de β.

Partie III - L'« Expected Shortfall »(ES)

On conserve les notations de la partie I.
Pour qu'une mesure de risque soit acceptable, on souhaite qu'elle vérifie un certaines propriétés.
On dit qu'une fonction ρ définie sur $\mathcal{D}$ à valeurs réelles est une **mesure de risque cohérente** sur $\mathcal{D}$ si elle vérifie les quatre propriétés :

(R_1) $\forall X \in \mathcal{D}, \forall c \in \mathbb{R},\ \rho(X + c) = \rho(X) + c$;

(R_2) $\forall X \in \mathcal{D}, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$;

(R_3) $\forall (X, Y) \in \mathcal{D}^2$, si pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$ alors $\rho(X) \leqslant \rho(Y)$;

(R_4) $\forall (X, Y) \in \mathcal{D}^2$, telles que $X + Y \in \mathcal{D}$, $\rho(X + Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y)$.

12. Montrer que l'espérance est une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{D}$.

13. La « Value at Risk » r_β est-elle une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{D}$ pour toute valeur de $\beta \in]0, 1[$? On détaillera si chacune des propriétés de (R_1) à (R_4) est satisfaite ou non.

Soit X une variable aléatoire appartenant à $\mathcal{D}$, admettant une densité f_X. On définit l' « Expected Shortfall » de X de niveau de confiance β par :

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x f_X(x)\, dx \quad (1)$$

Le but de cette partie est de démontrer que, pour tout $\beta \in]0, 1[$, ES_β est une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{D}$, assez « proche » de r_β.

14. Soit X une variable aléatoire appartenant à $\mathcal{D}$.

a) Montrer que $ES_\beta(X)$ est bien définie, et que $ES_\beta(X) \geqslant r_\beta(X)$.

b) À l'aide du changement de variable $t = F_X(x)$, établir :

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta}\int_\beta^1 G_X(t)\ dt \quad (2)$$

On pourra utiliser (1) ou (2) au choix dans la suite pour définir $ES_\beta(X)$.

15. ***a)*** Montrer que ES_β vérifie la propriété (R_1).

b) Montrer que ES_β vérifie la propriété (R_2).

16. On suppose dans cette question que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a) Montrer que $ES_\beta(X) = r_\beta(X) + \dfrac{1}{\lambda}$.

b) En déduire que $ES_\beta(X) \underset{\beta\to 1}{\sim} r_\beta(X)$.

17. On suppose dans cette question que X suit la loi normale centrée réduite.

a) Montrer $ES_\beta(X) = \dfrac{\varphi(r_\beta(X))}{1-\Phi(r_\beta(X))}$.

b) Pour tout $x > 0$, établir l'égalité : $1 - \Phi(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x} - \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\ dt$.

c) Montrer que, pour tout $x > 0$: $0 \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\ dt \leqslant \frac{1}{x^2}(1-\Phi(x))$.

En déduire que : $1 - \Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

d) En conclure que l'on a aussi dans ce cas : $ES_\beta(X) \underset{\beta\to 1}{\sim} r_\beta(X)$.

Dans les questions qui suivent, X est une variable aléatoire appartenant à $\mathcal{D}$.

- On note h la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \max(x, 0)$.
- On admet que si U et V sont deux variables aléatoires telles que, $0 \leqslant U \leqslant V$ et $\mathbb{E}(V)$ existe alors $\mathbb{E}(U)$ existe et $0 \leqslant \mathbb{E}(U) \leqslant \mathbb{E}(V)$.
- On note pour tout événement A, $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire indicatrice de l'événement A. Rappelons qu'il s'agit de la variable aléatoire prenant la valeur 1 si A est réalisé, et la valeur 0 sinon.

18. ***a)*** Montrer que $h(X - r_\beta(X))$ admet une espérance, et que l'on a :

$$\mathbb{E}\left(h(X - r_\beta(X))\right) = \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} t f_X(t)\ dt - (1-\beta) r_\beta(X)$$

où f_X désigne une densité de X.

b) En déduire :

$$ES_\beta(X) = r_\beta(X) + \frac{1}{1-\beta}\mathbb{E}\left(h(X - r_\beta(X))\right)$$

19. En utilisant la méthode de Monte-Carlo, dont on supposera la validité, et la fonction `VaR` définie dans la question ***11.***, écrire une fonction **Scilab** qui calcule une valeur approchée de $ES_\beta(X)$ à partir de la réalisation d'un échantillon de taille n de la loi de X dont les valeurs se trouvent dans le tableau **Scilab** `X` et de la valeur de β se trouvant dans la variable **Scilab** `beta`.

20. Soit Z une variable aléatoire telle que : $\mathbb{E}(Z) = 1$ et $0 \leqslant Z \leqslant \dfrac{1}{1-\beta}$.

a) Justifier l'égalité entre variables aléatoires : $h(X - r_\beta(X)) = (X - r_\beta(X)) \times \mathbb{1}_{[X > r_\beta(X)]}$.

b) Montrer que $\mathbb{E}(XZ)$ existe et établir l'égalité :

$$ES_\beta(X) - \mathbb{E}(XZ) = \frac{1}{1-\beta}\mathbb{E}\left[(X - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X > r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z)\right]$$

c) En déduire que $ES_\beta(X) - \mathbb{E}(XZ) \geqslant 0$.
Comment choisir Z pour que $ES_\beta(X) = \mathbb{E}(XZ)$?

21. On note $\mathcal{K}$ l'ensemble des variables aléatoires Z sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{E}(Z) = 1$ et $0 \leqslant Z \leqslant \dfrac{1}{1-\beta}$.
Justifier l'égalité : $ES_\beta(X) = \max\limits_{Z \in \mathcal{K}} \mathbb{E}(XZ)$.

22. Démontrer que, pour tout $\beta \in]0,1[$, la fonction ES_β est une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{D}$.

ESSEC-I 2016 : le corrigé

On s'intéresse dans ce problème à deux mesures du risque utilisées par les marchés financiers.
Pour cela, on considère des variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, qui modélisent des pertes financières subies par des acteurs économiques sur une période donnée.
Toutes les variables aléatoires définies dans ce problème sont des variables aléatoires sur cet espace probabilisé.
Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des variables aléatoires réelles à densité X vérifiant :

- X admet une espérance notée $\mathbb{E}(X)$.
- il existe un intervalle I_X (dont on admet l'unicité) sur lequel la fonction de répartition de X, notée F_X, réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de I_X sur $]0,1[$.
  On note G_X la bijection réciproque, définie de $]0,1[$ sur I_X. Les notations F_X et G_X seront utilisées dans tout le sujet.

Dans tout le problème β est un réel appartenant à $]0,1[$ et représentant un niveau de confiance.

Partie I - Définition et propriétés de la « Value at Risk »

1. Soit $X \in \mathcal{D}$. Montrer qu'il existe un unique réel v tel que $\mathbb{P}([X \leqslant v]) = \beta$, et que l'on a $v = G_X(\beta)$.

Démonstration.

- La v.a.r. X appartient à $\mathcal{D}$.
  Donc F_X réalise une bijection de I_X dans $]0,1[$.
  Or $\beta \in]0,1[$.

  $$\boxed{\text{Donc il existe un unique } v \in I_X \subset \mathbb{R} \text{ tel que } \mathbb{P}([X \leqslant v]) = F_X(v) = \beta.}$$

- D'après l'énoncé, la fonction G_X est la bijection réciproque de F_X sur I_X.

  $$\boxed{\text{Donc : } v = G_X(F_X(v)) = G_X(\beta).}$$

□

- On définit alors $r_\beta(X)$ appelé la « Value at Risk »au niveau de confiance β de X, par $r_\beta(X) = G_X(\beta)$. C'est une grandeur qui permet d'évaluer le risque pris par l'acteur qui détient l'actif dont les pertes sont modélisées par X.
- **On remarque que $r_\beta(X)$ est égal au capital minimal qu'il faut détenir pour être en mesure de couvrir les pertes de l'actif associé à X avec une probabilité égale à β.**

2. On suppose que, dans cette question, X est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda \in]0,+\infty[$.

a) Rappeler la valeur de $F_X(x)$ pour tout réel x.

Démonstration.

$$\boxed{F_X : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{array} \right.}$$

□

b) En déduire que $X \in \mathcal{D}$ et que l'on a $r_\beta(X) = -\dfrac{1}{\lambda} \ln(1-\beta)$.

Démonstration.

- La v.a.r. X est à densité.
- Elle admet une espérance ($\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$).

- La fonction F_X est :
  - $\times$ continue sur $]0,+\infty[$,
  - $\times$ strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
    En effet, la fonction F_X est dérivable sur $]0+\infty[$ et :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ F_X'(x) = -(-\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda\, x} = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x} > 0$$

  Ainsi, F_X réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $F_X(]0,+\infty[)$.
  Comme F_X est une fonction de répartition, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
  D'où :

$$F_X(]0,+\infty[) = \left]\lim_{x\to 0^+} F_X(x), \lim_{x\to+\infty} F_X(x)\right[=]0,1[$$

  Ainsi, la fonction F_X réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,1[$.

$$\boxed{\text{Finalement : } X \in \mathcal{D}.}$$

- Déterminons G_X.
  Soit $x \in]0,+\infty[$. Soit $\beta \in]0,1[$.

$$\begin{array}{rclcl} G_X(\beta) = x & \Leftrightarrow & \beta = F_X(x) & \Leftrightarrow & \beta = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, x} \\ & \Leftrightarrow & 1-\beta = \mathrm{e}^{-\lambda\, x} & \Leftrightarrow & \ln(1-\beta) = -\lambda\, x \\ & \Leftrightarrow & -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-\beta) = x & & \end{array}$$

  Ainsi : $\forall \beta \in]0,1[,\ G_X(\beta) = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-\beta)$.

$$\boxed{r_\beta(X) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\beta)}$$

□

3. On suppose dans cette question que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale de paramètres m et σ^2 pour X et de paramètres μ et s^2 pour Y.
On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et φ sa densité usuelle.

a) (i) Justifier que Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$. On note Φ^{-1} la bijection réciproque.

Démonstration.
La fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Donc Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de φ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi'(x) = \varphi(x) > 0$$

$$\boxed{\text{Donc la fonction } \Phi \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

En résumé, la fonction Φ est :
- $\times$ continue sur $\mathbb{R}$ (car de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$),
- $\times$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi Φ réalise une bijection de $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$ sur $\Phi(]-\infty,+\infty[)$.
Or Φ est une fonction de répartition, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$.
On en déduit :

$$\Phi(]-\infty,+\infty[) = \left]\lim_{x\to-\infty} \Phi(x), \lim_{x\to+\infty} \Phi(x)\right[=]0,1[$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } \Phi \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]0,1[.}$$

□

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $F_X(x)$ en fonction de Φ, m, σ et x.

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$.
  On note Z la v.a.r. centrée réduite associée à X. Alors :
  $$Z = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}} = \frac{X-m}{\sigma}$$
  La v.a.r. Z est une transformée affine de X qui suit une loi normale. Donc Z suit également une loi normale.
  De plus : $\mathbb{E}(Z) = 0$ et $\mathbb{V}(Z) = 1$.
  $$\boxed{\text{Donc : } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).}$$

Commentaire

On rappelle le résultat de cours suivant : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$,
$$X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right) \;\Leftrightarrow\; aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}\left(am+b, \sigma^2\right)$$
En particulier : $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right) \;\Leftrightarrow\; X^* = \dfrac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  $$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}([X \leqslant x]) \;=\; \mathbb{P}([X - m \leqslant x - m]) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{X-m}{\sigma} \leqslant \frac{x-m}{\sigma}\right]\right) \;=\; \mathbb{P}\left(\left[Z \leqslant \frac{x-m}{\sigma}\right]\right) \\ &= \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \end{aligned}$$
  $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)}$$

Commentaire

La démonstration de ce résultat pouvait également s'effectuer par calcul direct.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ dt$$
Or $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$. Donc :
$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma}\, \varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$
D'où :
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma}\, \varphi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)\ dt$$

Commentaire

Deux méthodes de résolution sont alors possibles :

- Méthode 1. On remarque :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \Phi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\,\varphi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)$$

Soit $A \in \,]-\infty, x]$.

$$\int_A^x \frac{1}{\sigma}\,\varphi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)\,dt \;=\; \left[\,\Phi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)\right]_A^x \;=\; \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{A-m}{\sigma}\right)$$

Or, comme Φ est une fonction de répartition : $\lim\limits_{A\to-\infty} \Phi\left(\frac{A-m}{\sigma}\right) = 0$.

D'où : $F_X(x) \;=\; \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$.

- Méthode 2. On effectue le changement de variable $\boxed{u = \frac{t-m}{\sigma}}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = \dfrac{t-m}{\sigma}\ \text{(et donc } t = \sigma\,u + m) \\ \hookrightarrow du = \dfrac{1}{\sigma}\,dt \quad \text{et} \quad dt = \sigma\,du \\ \bullet\ t = -\infty \ \Rightarrow\ u = -\infty \\ \bullet\ t = x \ \Rightarrow\ u = \dfrac{x-m}{\sigma} \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto \sigma\,u + m$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, x]$.
On obtient alors :

$$F_X(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} \varphi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)\,\frac{1}{\sigma}\,dt \;=\; \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} \varphi(u)\,du \;=\; \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

□

(iii) En déduire que $X \in \mathcal{D}$ et que $r_\beta(X) = m + \sigma\Phi^{-1}(\beta)$.

Démonstration.

- La v.a.r. X est à densité.
- Elle admet une espérance ($\mathbb{E}(X) = m$).
- On note f la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \frac{x-m}{\sigma}$$

Alors : $F_X = \Phi \circ f$.
D'après la question ***3.a)(i)***, on sait que Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.
Montrons alors que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $y \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$y = f(x) \ \Leftrightarrow\ y = \frac{x-m}{\sigma} \ \Leftrightarrow\ \sigma\,y = x - m \ \Leftrightarrow\ \sigma\,y + m = x$$

Ainsi, la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de réciproque $f^{-1} : x \mapsto \sigma\,x + m$.
Finalement, la fonction F_X réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } X \in \mathcal{D}.}$$

- Déterminons G_X.
  Tout d'abord : $F_X = \Phi \circ f$. Donc : $G_X = F_X^{-1} = f^{-1} \circ \Phi^{-1}$.
  Soit $\beta \in]0,1[$. On obtient alors :

$$G_X(\beta) = f^{-1}(\Phi^{-1}(\beta)) = \sigma\,\Phi^{-1}(\beta) + m$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } r_\beta(X) = m + \sigma\,\Phi^{-1}(\beta).}$$

□

b) Quelle est la loi de $X + Y$?
En déduire $r_\beta(X+Y)$ en fonction de m, μ, σ, s et β.

Démonstration.

- Les v.a.r. X et Y :
  × sont indépendantes,
  × suivent des lois normales ($X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, s^2)$).
  Donc par stabilité des lois normales, $X + Y$ suit une loi normale.
  De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = m + \mu$$

  Par indépendance de X et Y :

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) = \sigma^2 + s^2$$

$$\boxed{\text{D'où : } X + Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m+\mu, \sigma^2 + s^2)}$$

- On applique le résultat de la question ***3.a)*** pour $m = m + \mu$ et $\sigma^2 = \sigma^2 + s^2$.

$$\boxed{\text{On obtient : } r_\beta(X+Y) = (m+\mu) + \sqrt{\sigma^2+s^2}\ \Phi^{-1}(\beta).}$$

□

c) Pour quels $\beta \in]0,1[$ a-t-on $r_\beta(X+Y) \leqslant r_\beta(X) + r_\beta(Y)$?

Démonstration.
Soit $\beta \in]0,1[$.

$$r_\beta(X) + r_\beta(Y) = (m + \sigma\,\Phi^{-1}(\beta)) + (\mu + s\,\Phi^{-1}(\beta)) = (m+\mu) + (\sigma + s)\Phi^{-1}(\beta)$$

Donc :

$$\begin{aligned} r_\beta(X+Y) \leqslant r_\beta(X) + r_\beta(Y) &\Leftrightarrow \cancel{(m+\mu)} + \sqrt{\sigma^2+s^2}\ \Phi^{-1}(\beta) \leqslant \cancel{(m+\mu)} + (\sigma+s)\Phi^{-1}(\beta) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\sigma^2+s^2}\ \Phi^{-1}(\beta) \leqslant (\sigma+s)\Phi^{-1}(\beta) \end{aligned}$$

Trois cas se présentent alors.

- Si $\Phi^{-1}(\beta) > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} r_\beta(X+Y) \leqslant r_\beta(X) + r_\beta(Y) &\Leftrightarrow \sqrt{\sigma^2+s^2} \leqslant \sigma + s \\ &\Leftrightarrow \sigma^2 + s^2 \leqslant (\sigma+s)^2 && \textit{(car } \sigma > 0,\ s > 0 \textit{ et } x \mapsto x^2 \textit{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[) \\ &\Leftrightarrow \cancel{\sigma^2} + \cancel{s^2} \leqslant \cancel{\sigma^2} + 2\,\sigma\,s + \cancel{s^2} \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant \sigma\,s \end{aligned}$$

  Or $\sigma > 0$ et $s > 0$, donc la dernière assertion est vraie.
  D'où, par équivalence, la première aussi, c'est-à-dire :

$$r_\beta(X+Y) \leqslant r_\beta(X) + r_\beta(Y)$$

- Si $\Phi^{-1}(\beta) < 0$. Alors, avec le même raisonnement que précédemment :

$$r_\beta(X+Y) \leqslant r_\beta(X) + r_\beta(Y) \ \Leftrightarrow\ \sqrt{\sigma^2+s^2} \geqslant \sigma + s \ \Leftrightarrow\ 0 \geqslant \sigma\, s$$

Cette dernière assertion est fausse. Donc, par équivalence, la première aussi.

- Si $\Phi^{-1}(\beta) = 0$. Alors l'inégalité : $\sqrt{\sigma^2+s^2}\ \Phi^{-1}(\beta) \leqslant (\sigma+s)\Phi^{-1}(\beta)$, est trivialement vérifiée. On a donc encore par équivalence :

$$r_\beta(X+Y) \leqslant r_\beta(X) + r_\beta(Y)$$

De plus :

$$\Phi^{-1}(\beta) = 0 \ \Leftrightarrow\ \beta = \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } r_\beta(X+Y) \leqslant r_\beta(X) + r_\beta(Y) \ \Leftrightarrow\ \beta \geqslant \frac{1}{2}.}$$

□

4. Soit X une variable aléatoire appartenant à $\mathcal{D}$, c un réel et λ un réel strictement positif. On pose $Y = X + c$ et $Z = \lambda X$ et on admet que Y et Z appartiennent à $\mathcal{D}$.

a) Montrer que $r_\beta(Y) = r_\beta(X) + c$.

Démonstration.

- Déterminons le lien entre F_Y et F_X.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_Y(x) \ = \ \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([X + c \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([X \leqslant x - c]) \ = \ F_X(x-c)$$

- De plus, par définition de r_β :
  × $\beta = F_X(r_\beta(X))$
  × $\beta = F_Y(r_\beta(Y)) = F_X(r_\beta(Y) - c)$, d'après la relation précédente.

  D'où :

$$F_X(r_\beta(X)) = F_X(r_\beta(Y) - c)$$

Or, comme $X \in \mathcal{D}$, la fonction F_X réalise une bijection de I_X sur $]0,1[$. Donc :

$$r_\beta(X) = r_\beta(Y) - c$$

$$\boxed{r_\beta(Y) = r_\beta(X) + c}$$

□

b) Montrer que $r_\beta(Z) = \lambda\, r_\beta(X)$.

Démonstration.

- Déterminons le lien entre F_Z et F_X.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_Z(x) \ = \ \mathbb{P}([Z \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([\lambda\, X \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant \frac{x}{\lambda}\right]\right) \ = \ F_X\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

- De plus, par définition de r_β :
  × $\beta = F_X(r_\beta(X))$
  × $\beta = F_Z(r_\beta(Z)) = F_X\left(\dfrac{r_\beta(Z)}{\lambda}\right)$, d'après la relation précédente.

D'où :

$$F_X(r_\beta(X)) = F_X\left(\frac{r_\beta(Z)}{\lambda}\right)$$

Or, comme $X \in \mathcal{D}$, la fonction F_X réalise une bijection de I_X sur $]0,1[$. Donc :

$$r_\beta(X) = \frac{r_\beta(Z)}{\lambda}$$

$$\boxed{r_\beta(Z) = \lambda\, r_\beta(X)}$$

□

5. Soit X et Y deux variables aléatoires appartenant à $\mathcal{D}$ et telles que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$.

a) Comparer, pour tout réel x, $F_X(x)$ et $F_Y(x)$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $\omega \in \Omega$.
Supposons $\omega \in [Y \leqslant x]$, autrement dit : $Y(\omega) \leqslant x$.
Comme $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$, on obtient : $X(\omega) \leqslant x$, c'est-à-dire $\omega \in [X \leqslant x]$.
On en déduit :

$$[Y \leqslant x] \subset [X \leqslant x]$$

Donc, par croissance de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}([Y \leqslant x]) \leqslant \mathbb{P}([X \leqslant x])$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) \leqslant F_X(x).}$$

Commentaire

En général, pour comparer des probabilités, on s'efforcera de raisonner dans un premier temps sur les événements.

□

b) En déduire que $r_\beta(X) \leqslant r_\beta(Y)$.

Démonstration.
Par définition de r_β :

$$F_X(r_\beta(X)) \;=\; \beta \;=\; F_Y(r_\beta(Y))$$

Or, d'après la question précédente : $F_Y(r_\beta(Y)) \;\leqslant\; F_X(r_\beta(Y))$. Donc :

$$F_X(r_\beta(X)) \;\leqslant\; F_X(r_\beta(Y))$$

Or, comme $X \in \mathcal{D}$, la fonction F_X réalise une bijection strictement croissante de I_X sur $]0,1[$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } r_\beta(X) \leqslant r_\beta(Y).}$$

□

Partie II - Estimation de la valeur de $r_\beta(X)$

Dans la pratique la loi de X n'est pas totalement connue et on a besoin d'avoir une idée assez précise de la « Value at Risk » ne connaissant qu'un certain nombre de valeurs de cette variable.
On modélise cette situation en supposant, dans cette partie, que la loi de X dépend d'un paramètre θ inconnu appartenant à un sous ensemble Θ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$, que $r_\beta(X) = g(\theta)$ où g est une fonction définie sur Θ et que pour tout $\theta \in \Theta$, $X \in \mathcal{D}$.
On utilise aussi les hypothèses et notations suivantes :

- $(X_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles appartenant à $\mathcal{D}$, mutuellement indépendantes, de même loi que X.
- pour tout $\omega \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on ordonne $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ dans l'ordre croissant et on note alors $X_{1,n}(\omega), \dots, X_{n,n}(\omega)$ les valeurs obtenues.
  En particulier, $X_{1,n}(\omega)$ est la plus petite des valeurs $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ et $X_{n,n}(\omega)$ la plus grande.
- on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$, les $X_{k,n}$ sont des variables aléatoires.
- pour tout réel x et tout entier naturel non nul n, on définit la variable aléatoire $N_{x,n}$ ainsi :
  pour tout $\omega \in \Omega$, $N_{x,n}(\omega)$ est le nombre d'indices k compris entre 1 et n tels que l'on ait $X_k(\omega) \leqslant x$.

6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $N_{x,n}$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. En déduire l'espérance et la variance de $N_{x,n}$.

Démonstration.

- Soit $\omega \in \Omega$. Pour déterminer le nombre d'indices $k \in [\![1, n]\!]$ tels que $X_k(\omega) \leqslant x$, on teste successivement pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$ si $X_k(\omega)$ est inférieur à x.
  On considère alors le test à deux issues suivant :
  × soit X est inférieur à x,
  × soit X est strictement supérieur à x.
  Il définit donc une épreuve de Bernoulli.
- On considère alors l'expérience consistant en la succession de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. En effet :
  × il y a autant d'épreuves que de v.a.r. X_1, …, X_n,
  × ces épreuves sont identiques car X_1, …, X_n ont même loi,
  × elles sont indépendantes car X_1, …, X_n sont indépendantes.
  Le succès de celles-ci est d'obtenir X inférieure à x, ce qui se produit avec probabilité :
  $$\mathbb{P}([X \leqslant x]) = F_X(x)$$
- La v.a.r. $N_{x,n}$ est la v.a.r. associée au nombre de succès de cette expérience.
  Donc $N_{x,n}$ suit la loi binomiale de paramètres n et $F_X(x)$
  $$\boxed{N_{x,n} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, F_X(x))}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{E}(N_{x,n}) = n\,F_X(x) \text{ et } \mathbb{V}(N_{x,n}) = n\,F_X(x)(1 - F_X(x)).}$$

□

7. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{N_{x,n}}{n} - F_X(x)\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) = 0$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$.

- La v.a.r. $\dfrac{N_{x,n}}{n}$ admet une variance car $N_{x,n}$ en admet une.
  On peut donc appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. On obtient :

$$\mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{N_{x,n}}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{N_{x,n}}{n}\right)\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}\left(\frac{N_{x,n}}{n}\right)}{\varepsilon^2} \qquad (*)$$

- De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}\left(\frac{N_{x,n}}{n}\right) = \frac{\mathbb{E}(N_{x,n})}{n} = \frac{\cancel{n}\, F_X(x)}{\cancel{n}} = F_X(x)$$

  Par propriété de la variance :

$$\mathbb{V}\left(\frac{N_{x,n}}{n}\right) = \frac{\mathbb{V}(N_{x,n})}{n^2} = \frac{\cancel{n}\, F_X(x)(1-F_X(x))}{n^{\cancel{2}}} = \frac{F_X(x)(1-F_X(x))}{n}$$

- L'inégalité $(*)$ devient donc :

$$\mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{N_{x,n}}{n} - F_X(x)\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{F_X(x)(1-F_X(x))}{n\,\varepsilon^2}$$

- Par propriété d'une probabilité :

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{N_{x,n}}{n} - F_X(x)\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{F_X(x)(1-F_X(x))}{n\,\varepsilon^2}$$

- Or : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{F_X(x)(1-F_X(x))}{n\,\varepsilon^2} = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Donc, par théorème d'encadrement :}\\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{N_{x,n}}{n} - F_X(x)\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) = 0.\end{array}}$$

□

8. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il y a égalité entre les événements $[X_{k,n} \leqslant x]$ et $[N_{x,n} \geqslant k]$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

- Les v.a.r. $X_{1,n}$, …, $X_{n,n}$ sont ordonnées dans l'ordre croissant, c'est-à-dire :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X_{1,n}(\omega) \leqslant X_{2,n}(\omega) \leqslant \cdots \leqslant X_{k,n}(\omega) \leqslant X_{k+1,n}(\omega) \leqslant \cdots \leqslant X_{n,n}(\omega)$$

- Or, par définition de $N_{x,n}$, l'événement $[N_{x,n} \geqslant k]$ est réalisé si et seulement s'il existe au moins k v.a.r. parmi X_1, …, X_n telles que les événements $[X_i \leqslant x]$ soient réalisés.
  Donc, comme : $\forall \omega \in \Omega,\ X_{1,n}(\omega) \leqslant \cdots \leqslant X_{k,n}(\omega) \leqslant X_{k+1,n}(\omega) \leqslant \cdots \leqslant X_{n,n}(\omega)$:

$$[N_{x,n} \geqslant k] = [X_{1,n} \leqslant x] \cap \cdots \cap [X_{k,n} \leqslant x]$$

- Or : pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $[X_{k,n} \leqslant x] \subset [X_{i,n} \leqslant x]$ (car : $\forall \omega \in \Omega,\ X_{i,n}(\omega) \leqslant X_{k,n}(\omega)$).

$$\boxed{\text{Donc, finalement : } \forall k \in [\![1, n]\!],\ [N_{x,n} \geqslant k] = [X_{k,n} \leqslant x].}$$

□

b) En déduire que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathbb{P}([X_{k,n} \leqslant x]) = \sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} (F_X(x))^r (1 - F_X(x))^{n-r}$$

et que $X_{k,n}$ est une variable aléatoire à densité.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

- D'après la question précédente et comme $N_{x,n}(\Omega) = [\![0, n]\!]$:

$$\mathbb{P}([X_{k,n} \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([N_{x,n} \geqslant k]) \ = \ \mathbb{P}\left(\bigcup_{r=k}^{n} [N_{x,n} = r]\right)$$

  Or les événements $[N_{x,n} = k]$, ..., $[N_{x,n} = n]$ sont incompatibles. Donc :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{r=k}^{n} [N_{x,n} = r]\right) \ = \ \sum_{r=k}^{n} \mathbb{P}([N_{x,n} = r])$$

  Or, d'après la question ***6.*** : $N_{x,n} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, F_X(x))$. Donc : $\forall r \in [\![k, n]\!]$,

$$\mathbb{P}([N_{x,n} = r]) = \binom{n}{r} (F_X(x))^r (1 - F_X(x))^{n-r}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{P}([X_{k,n} \leqslant x]) = \sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} (F_X(x))^r (1 - F_X(x))^{n-r}}$$

- Comme $X \in \mathcal{D}$, la v.a.r. X est une v.a.r. à densité.
  En particulier, sa fonction de répartition F_X est :
  × continue sur $\mathbb{R}$,
  × de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

  Or, d'après ce qui précède :

$$F_{X_{k,n}}(x) = \mathbb{P}([X_{k,n} \leqslant x]) = \sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} (F_X(x))^r (1 - F_X(x))^{n-r}$$

  Donc la fonction de répartition $F_{X_{k,n}}$ est :
  × continue sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$,
  × de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, pour la même raison.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X_{k,n} \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

Commentaire

Il n'est pas nécessaire, dans cette question, de détailler la continuité et le caractère $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de la fonction $F_{X_{k,n}}$: ce qui est testé ici, c'est la connaissance de la définition d'une v.a.r. à densité.

□

9. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires et c un réel. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([|U_n - c| \geqslant \varepsilon]\right) = 0$$

On considère $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite convergente de réels et on pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

a) Établir que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant t]) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } t > c \\ 1 & \text{si } t < c \end{array}\right.$.

Démonstration.

- Étudions tout d'abord l'hypothèse de l'énoncé.
  Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}([|U_n - c| \geqslant \varepsilon]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([|U_n - c| < \varepsilon])$$

  L'hypothèse de l'énoncé apporte donc deux informations.
  × Tout d'abord : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([|U_n - c| \geqslant \varepsilon]) = 0$ (évidemment)
  × Ensuite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([|U_n - c| < \varepsilon]) = 1$

- Soit $t > c$. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que : $t = c + \varepsilon_0$. Donc :

$$[U_n \geqslant t] \ = \ [U_n \geqslant c + \varepsilon_0] \ = \ [U_n - c \geqslant \varepsilon_0]$$

  Montrons : $[U_n - c \geqslant \varepsilon_0] \ \subset \ [|U_n - c| \geqslant \varepsilon_0]$.
  Soit $\omega \in \Omega$.
  Supposons $\omega \in [U_n - c \geqslant \varepsilon_0]$, autrement dit $U_n(\omega) - c \geqslant \varepsilon_0$.
  Donc, par croissance de la fonction $x \mapsto |x|$ sur $[0, +\infty[$ (on a bien $\varepsilon_0 > 0$) : $|U_n(\omega) - c| \geqslant \varepsilon_0$, c'est-à-dire $\omega \in [|U_n - c| \geqslant \varepsilon_0]$.
  D'où : $[U_n - c \geqslant \varepsilon_0] \ \subset \ [|U_n - c| \geqslant \varepsilon_0]$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } [U_n \geqslant t] \ \subset \ [|U_n - c| \geqslant \varepsilon_0].}$$

  On en déduit, par propriétés d'une probabilité :

$$0 \ \leqslant \ \mathbb{P}([U_n \geqslant t]) \ \leqslant \ \mathbb{P}([|U_n - c| \geqslant \varepsilon_0])$$

  Or, d'après l'énoncé :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([|U_n - c| \geqslant \varepsilon_0]) \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{Donc, par théorème d'encadrement : } \forall t > c,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant t]) = 0.}$$

- Soit $t < c$. Alors il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que : $t = c - \varepsilon_1$. Donc :

$$[U_n \geqslant t] = [U_n \geqslant c - \varepsilon_1]$$

  Montrons : $[|U_n - c| < \varepsilon_1] \ \subset \ [U_n \geqslant c - \varepsilon_1]$.
  Soit $\omega \in \Omega$.
  Supposons $\omega \in [|U_n - c| < \varepsilon_1]$, autrement dit $|U_n(\omega) - c| < \varepsilon_1$. Or :

$$|U_n(\omega) - c| < \varepsilon_1 \ \Leftrightarrow \ -\varepsilon_1 < U_n(\omega) - c < \varepsilon_1 \ \Leftrightarrow \ c - \varepsilon_1 < U_n < c + \varepsilon_1$$

  En particulier : $U_n(\omega) \geqslant c - \varepsilon_1$, c'est-à-dire $\omega \in [U_n \geqslant c - \varepsilon_1]$.
  D'où : $[|U_n - c| < \varepsilon_1] \ \subset \ [U_n \geqslant c - \varepsilon_1]$

$$\boxed{\text{Ainsi : } [|U_n - c| < \varepsilon_1] \ \subset \ [U_n \geqslant t].}$$

D'où, par propriétés d'une probabilité :

$$\mathbb{P}([|U_n - c| < \varepsilon_1]) \leqslant \mathbb{P}([U_n \geqslant t]) \leqslant 1$$

Or, d'après l'énoncé :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([|U_n - c| < \varepsilon_1]) = 1$$

Donc, par théorème d'encadrement : $\forall t < c,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant t]) = 1.$

Finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant t]) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > c \\ 1 & \text{si } t < c \end{cases}.$

□

b) On suppose $\ell > c$ et on pose $\varepsilon = \dfrac{\ell - c}{2}$.
En remarquant que $\ell - \varepsilon = c + \varepsilon$, montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant c + \varepsilon$.
En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant u_n]) = 0$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$: $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Or, pour tout $n \geqslant N$:

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leqslant u_n - \ell \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

En particulier, pour tout $n \geqslant N$:

$$u_n \geqslant \ell - \varepsilon = c + \varepsilon$$

D'où, à partir du rang N : $u_n \geqslant c + \varepsilon$.

- Soit $n \geqslant N$. Alors : $u_n \geqslant c + \varepsilon$.
Donc :

$$[U_n \geqslant u_n] \subset [U_n \geqslant c + \varepsilon]$$

D'où, d'après les propriétés d'une probabilité :

$$0 \leqslant \mathbb{P}([U_n \geqslant u_n]) \leqslant \mathbb{P}([U_n \geqslant c + \varepsilon])$$

Or, d'après la question ***9.a)*** : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant c + \varepsilon]) = 0$.

Donc, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant u_n]) = 0$.

Commentaire

- On utilise ici la définition de la convergence d'une suite (u_n) vers ℓ :

$$((u_n) \text{ converge vers } \ell \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N) \Rightarrow (|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon))$$

- Démontrons : $\ell - \varepsilon = c + \varepsilon$.
D'une part :

$$\ell - \varepsilon = \ell - \frac{\ell - c}{2} = \frac{2\ell - (\ell - c)}{2} = \frac{\ell + c}{2}$$

D'autre part :

$$c + \varepsilon = c + \frac{\ell - c}{2} = \frac{2c + (\ell - c)}{2} = \frac{\ell + c}{2}$$

On a donc bien : $\ell - \varepsilon = c + \varepsilon$.

□

c) Montrer de même que si $\ell < c$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant u_n]) = 1$.

Démonstration.
On pose $\varepsilon' = \dfrac{c-\ell}{2}$.

- D'après l'énoncé $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
  Donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N'$:
  $$u_n \leqslant \ell + \varepsilon'$$
  $$\boxed{\text{D'où, puisque } \ell + \varepsilon' = c - \varepsilon', \text{ à partir du rang } N' : u_n \leqslant c - \varepsilon'.}$$
- Soit $n \geqslant N'$. Alors : $u_n \leqslant c - \varepsilon'$. Donc :
  $$\left[U_n \geqslant c - \varepsilon'\right] \subset [U_n \geqslant u_n]$$
  D'où, d'après les propriétés d'une probabilité :
  $$\mathbb{P}(\left[U_n \geqslant c - \varepsilon'\right]) \ \leqslant \ \mathbb{P}([U_n \geqslant u_n]) \ \leqslant \ 1$$
  Or, d'après la question ***9.a)*** : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant c - \varepsilon']) = 1$.
  $$\boxed{\text{Donc, par théorème d'encadrement, si } \ell < c : \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant u_n]) = 1.}$$

Commentaire

Détaillons l'égalité $\ell + \varepsilon' = c - \varepsilon'$.
D'une part :
$$\ell + \varepsilon' \ = \ \ell + \frac{c-\ell}{2} \ = \ \frac{2\ell + (c-\ell)}{2} \ = \ \frac{\ell + c}{2}$$
D'autre part :
$$c - \varepsilon' \ = \ c - \frac{c-\ell}{2} \ = \ \frac{2c - (c-\ell)}{2} \ = \ \frac{\ell + c}{2}$$
On a donc bien : $\ell + \varepsilon' = c - \varepsilon'$.

□

10. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\beta \geqslant 1$, la variable aléatoire Y_n sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ par $Y_n = X_{\lfloor n\beta \rfloor, n}$ où $\lfloor n\beta \rfloor$ désigne la partie entière de $n\beta$ et on pose $\theta' = r_\beta(X)$.
Soit $\varepsilon > 0$.

a) Montrer que : $\mathbb{P}([|Y_n - \theta'| \leqslant \varepsilon]) = \mathbb{P}([Y_n \leqslant \theta' + \varepsilon]) - \mathbb{P}([Y_n \leqslant \theta' - \varepsilon])$.

Démonstration.
On a les égalités suivantes :
$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([|Y_n - \theta'| \leqslant \varepsilon]) \\
= \ & \mathbb{P}([-\varepsilon \leqslant Y_n - \theta' \leqslant \varepsilon]) \\
= \ & \mathbb{P}([\theta' - \varepsilon \leqslant Y_n \leqslant \theta' + \varepsilon]) \\
= \ & \mathbb{P}([Y_n \leqslant \theta' + \varepsilon] \setminus [Y_n < \theta' - \varepsilon]) \\
= \ & \mathbb{P}([Y_n \leqslant \theta' + \varepsilon]) - \mathbb{P}([Y_n \leqslant \theta' + \varepsilon] \cap [Y_n < \theta' - \varepsilon]) \\
= \ & \mathbb{P}([Y_n \leqslant \theta' + \varepsilon]) - \mathbb{P}([Y_n < \theta' - \varepsilon]) && \textit{(car } [Y_n < \theta' - \varepsilon] \subset [Y_n \leqslant \theta' + \varepsilon]\textit{)} \\
= \ & \mathbb{P}([Y_n \leqslant \theta' + \varepsilon]) - \mathbb{P}([Y_n \leqslant \theta' - \varepsilon]) && \textit{(car, d'après } \textbf{8.b)}\textit{, } X_{\lfloor n\beta \rfloor, n} \textit{ est une v.a.r. à densité)}
\end{aligned}$$
$$\boxed{\mathbb{P}([|Y_n - \theta'| \leqslant \varepsilon]) = \mathbb{P}([Y_n \leqslant \theta' + \varepsilon]) - \mathbb{P}([Y_n \leqslant \theta' - \varepsilon])}$$

□

b) En déduire que :

$$\mathbb{P}(\big[|Y_n - \theta'| \leqslant \varepsilon\big]) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{N_{\theta'+\varepsilon,n}}{n} \geqslant \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right]\right) - \mathbb{P}\left(\left[\frac{N_{\theta'-\varepsilon,n}}{n} \geqslant \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right]\right)$$

Démonstration.

- Par définition de la v.a.r. Y_n :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y_n \leqslant \theta' + \varepsilon]) &= \mathbb{P}(\big[X_{\lfloor n\,\beta \rfloor, n} \leqslant \theta' + \varepsilon\big]) \\ &= \mathbb{P}(\big[N_{\theta'+\varepsilon,n} \geqslant \lfloor n\,\beta \rfloor\big]) \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{8.a)}}\textit{)} \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{N_{\theta'+\varepsilon,n}}{n} \geqslant \frac{\lfloor n\,\beta \rfloor}{n}\right]\right) \qquad \textit{(car } n > 0\textit{)}\end{aligned}$$

- De même :

$$\mathbb{P}(\big[Y_n \leqslant \theta' - \varepsilon\big]) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{N_{\theta'-\varepsilon,n}}{n} \geqslant \frac{\lfloor n\,\beta \rfloor}{n}\right]\right)$$

- Or, d'après la question précédente :

$$\mathbb{P}(\big[|Y_n - \theta'| \leqslant \varepsilon\big]) = \mathbb{P}(\big[Y_n \leqslant \theta' + \varepsilon\big]) - \mathbb{P}(\big[Y_n \leqslant \theta' - \varepsilon\big])$$

$$\boxed{\text{Donc : } \mathbb{P}([|Y_n - \theta'| \leqslant \varepsilon]) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{N_{\theta'+\varepsilon,n}}{n} \geqslant \frac{\lfloor n\,\beta \rfloor}{n}\right]\right) - \mathbb{P}\left(\left[\frac{N_{\theta'-\varepsilon,n}}{n} \geqslant \frac{\lfloor n\,\beta \rfloor}{n}\right]\right).}$$

□

c) En déduire : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}([|Y_n - \theta'| \leqslant \varepsilon]) = 1$.
Que peut-on en déduire concernant l'estimateur Y_n de $r_\beta(X)$?

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après le résultat obtenu à la question précédente, on souhaite appliquer les résultats des questions ***9.b)*** et ***9.c)*** à :
  1) $U_n = \dfrac{N_{\theta'+\varepsilon,n}}{n}$ et $u_n = \dfrac{\lfloor n\,\beta \rfloor}{n}$
  2) $U_n = \dfrac{N_{\theta'-\varepsilon,n}}{n}$ et $u_n = \dfrac{\lfloor n\,\beta \rfloor}{n}$
  Commençons par le premier cas.
  On démontre que toutes les hypothèses d'application des questions ***9.b)*** ou ***9.c)*** sont vérifiées.
  × D'après la question ***7.*** :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{N_{\theta'+\varepsilon,n}}{n} - F_X(\theta' + \varepsilon)\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{En choisissant } c = F_X(\theta' + \varepsilon) \text{ et } U_n = \dfrac{N_{\theta'+\varepsilon,n}}{n}, \text{ on a bien :} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}([|U_n - c| \geqslant \varepsilon]) = 0.\end{array}}$$

× Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \dfrac{\lfloor n\,\beta \rfloor}{n}$.
Montrons maintenant que (u_n) converge et déterminons sa limite.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de la partie entière :

$$\lfloor n\,\beta \rfloor \;\leqslant\; n\,\beta \;<\; \lfloor n\,\beta \rfloor + 1$$

Donc :

$$n\,\beta - 1 \;<\; \lfloor n\,\beta \rfloor \leqslant n\,\beta$$

Comme $n > 0$, on obtient :

$$\beta - \frac{1}{n} \;<\; \frac{\lfloor n\,\beta \rfloor}{n} \;\leqslant\; \beta$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\beta + \dfrac{1}{n}\right) = \beta$.

Donc, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \beta$.
On choisit alors : $\ell = \beta$.

× Pour savoir si l'on applique la question ***9.b)*** ou la question ***9.c)***, il faut maintenant comparer les réels c et ℓ.
Par définition de $r_\beta(X)$:

$$\ell < c \;\Leftrightarrow\; \beta < F_X(\theta' + \varepsilon) \;\Leftrightarrow\; F_X(r_\beta(X)) < F_X(\theta' + \varepsilon)$$

Or, comme $X \in \mathcal{D}$, la fonction F_X est une bijection strictement croissante de I_X sur $]0,1[$.
Donc :

$$\ell < c \;\Leftrightarrow r_\beta(X) < \theta' + \varepsilon$$

Or $\theta' = r_\beta(X)$ et $\varepsilon > 0$, donc la dernière assertion est vraie.

Par équivalence, on obtient donc : $\ell < c$.

× On est donc ici dans le cadre d'application de la question ***9.c)***. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant u_n]) = 1$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{N_{\theta'+\varepsilon,n}}{n} \geqslant \dfrac{\lfloor n\,\beta \rfloor}{n}\right]\right) = 1.$

× On démontrerait de même, avec la question ***9.b)***, en choisissant :

$$U_n = \frac{N_{\theta'-\varepsilon,n}}{n}, \quad u_n = \frac{\lfloor n\,\beta \rfloor}{n}, \quad c = F_X(\theta' - \varepsilon) \quad \text{et} \quad \ell = \beta$$

la convergence suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant u_n]) = 0$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{N_{\theta'-\varepsilon,n}}{n} \geqslant \dfrac{\lfloor n\,\beta \rfloor}{n}\right]\right) = 0.$

D'après la question précédente, on obtient donc :
$\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([|Y_n - \theta'| \leqslant \varepsilon]) = 1 - 0 = 1.$

- On sait :
$$\mathbb{P}(\left[|Y_n - \theta'| > \varepsilon\right]) = 1 - \mathbb{P}(\left[|Y_n - \theta'| \leqslant \varepsilon\right])$$
Donc, d'après ce qui précède :
$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\left[|Y_n - \theta'| > \varepsilon\right]) = 0$$
D'où (Y_n) converge en probabilité vers θ'.

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y_n \text{ est un estimateur convergent de } \theta' = r_\beta(X).}$$

Commentaire

Il peut être intéressant de garder en tête le résultat suivant : $\lfloor x \rfloor \underset{x \to +\infty}{\sim} x$.
Ce résultat est à savoir redémontrer. Détaillons cette démonstration.
Soit $x \in \left]0, +\infty\right[$.
Par définition de la partie entière : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. Donc :
$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$$
D'où, comme $x > 0$:
$$1 - \frac{1}{x} < \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leqslant 1$$
Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = 1$.
Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$. C'est-à-dire : $\lfloor x \rfloor \underset{x \to +\infty}{\sim} x$.

□

11. On suppose que l'on a défini un fonction d'en-tête `function R = triCroissant(T)` qui renvoie le tableau des valeurs se trouvant dans `T` rangées dans l'ordre croissant.
Par exemple, si `T=[0 -1 0 2 4 2 3]` alors `disp(triCroissant(T))` affiche :

```
ans  =
    -1.   0.   0.   2.   2.   3.   4.
```

Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function r = VaR(X,beta)` qui renvoie la valeur de l'estimation obtenue avec l'estimateur Y_n pour $r_\beta(X)$ si le tableau `X` contient la réalisation de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ et `beta` la valeur de β.

Démonstration.

```
function r = VaR(X,beta)
  n = length(X)
  Z = triCroissant(X)
  r = Z(floor(n * beta))
endfunction
```

Détaillons l'obtention de cette fonction.
D'après la question précédente, on sait que $Y_n = X_{\lfloor n\,\beta \rfloor, n}$ est un estimateur convergent de $r_\beta(X)$.
Pour déterminer Y_n à partir de $X_1, \ldots, X_n$, on souhaite donc :

1) définir n. Il s'agit de la taille de l'échantillon $X_1, \ldots, X_n$.
Donc on stocke cette valeur dans la variable `n` avec la commande suivante :

```
n = length(X)
```

2) obtenir une réalisation de $X_{1,n}, \ldots, X_{n,n}$, c'est-à-dire ordonner une réalisation de $X_1, \ldots, X_n$ dans l'ordre croissant.
On stocke ce nouveau vecteur dans la variable `Z` avec la commande suivante :

```
Z = triCroissant(x)
```

3) sélectionner dans ce vecteur la réalisation de $X_{\lfloor n\,\beta \rfloor, n}$, ce qui correspond à la $\lfloor n\,\beta \rfloor^{\text{ème}}$ coordonnée du vecteur `Z`.
On stocke ce résultat dans la variable de sortie `r`, ce qui donne :

```
r = Z(floor(n * beta))
```

où la commande `floor` correspond à la fonction partie entière. □

Partie III - L'« Expected Shortfall » (ES)

On conserve les notations de la partie I.
Pour qu'une mesure de risque soit acceptable, on souhaite qu'elle vérifie un certaines propriétés.
On dit qu'une fonction ρ définie sur $\mathcal{D}$ à valeurs réelles est une **mesure de risque cohérente** sur $\mathcal{D}$ si elle vérifie les quatre propriétés :

(R_1) $\forall X \in \mathcal{D}, \forall c \in \mathbb{R},\ \rho(X + c) = \rho(X) + c$;

(R_2) $\forall X \in \mathcal{D}, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$;

(R_3) $\forall (X, Y) \in \mathcal{D}^2$, si pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$ alors $\rho(X) \leqslant \rho(Y)$;

(R_4) $\forall (X, Y) \in \mathcal{D}^2$, telles que $X + Y \in \mathcal{D}$, $\rho(X + Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y)$.

12. Montrer que l'espérance est une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{D}$.

Démonstration.
Montrons que l'espérance vérifie les propriétés (R_1) à (R_4).
Soit $(X, Y) \in \mathcal{D}^2$. Soit $(c, \lambda) \in \mathbb{R}^2$.

- Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X + c) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(c) = \mathbb{E}(X) + c \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\lambda\, X) = \lambda\, \mathbb{E}(X)$$

Donc (R_1) et (R_2) sont vérifiées.

- Par croissance de l'espérance :

$$\text{si pour tout } \omega \in \Omega,\ X(\omega) \leqslant Y(\omega),\ \text{alors } \mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$$

Donc (R_3) est vérifiée.

- Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

Donc, en particulier : $\mathbb{E}(X + Y) \leqslant \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.
Ainsi, (R_4) est vérifiée.

$\boxed{\text{On en déduit que l'espérance est une mesure de risque sur } \mathcal{D}.}$ □

13. La « Value at Risk » r_β est-elle une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{D}$ pour toute valeur de $\beta \in]0,1[$? On détaillera si chacune des propriétés de (R_1) à (R_4) est satisfaite ou non.

Démonstration.

- D'après la question ***4.a)***, r_β vérifie (R_1).
- D'après la question ***4.b)***, r_β vérifie (R_2).
- D'après la question ***5.***, r_β vérifie (R_3).
- D'après la question ***3.***, si on considère :

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, s^2\right)$$

Alors $r_{\frac{1}{4}}$ ne vérifie pas (R_4).
(en fait, pour tout $\beta < \dfrac{1}{2}$, r_β ne satisfait pas (R_4))

$$\boxed{\text{On en déduit que } r_\beta \text{ n'est pas une mesure de risque cohérente pour tout } \beta \in]0,1[.}$$

Commentaire

Attention : la question ***3.*** démontre :

$$\beta < \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; (R_4) \text{ n'est pas vérifié.}$$

Elle utilise pour cela un contre-exemple.
Cependant, ce résultat n'est pas une équivalence !
En particulier, rien ne dit :

$$\beta \geqslant \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; (R_4) \text{ est vérifiée.}$$

Pour démontrer un tel résultat, il faudrait considérer deux v.a.r. X et Y dans $\mathcal{D}$ quelconque (et non des v.a.r. gaussiennes).

□

Soit X une variable aléatoire appartenant à $\mathcal{D}$, admettant une densité f_X. On définit l' « Expected Shortfall » de X de niveau de confiance β par :

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x f_X(x)\, dx \quad (1)$$

Le but de cette partie est de démontrer que, pour tout $\beta \in]0,1[$, ES_β est une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{D}$, assez « proche » de r_β.

14. Soit X une variable aléatoire appartenant à $\mathcal{D}$.

a) Montrer que $ES_\beta(X)$ est bien définie, et que $ES_\beta(X) \geqslant r_\beta(X)$.

Démonstration.

- Comme $X \in \mathcal{D}$, en particulier la v.a.r. X admet une espérance.
  Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx$ converge absolument.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx$ converge aussi absolument.

$$\boxed{\text{On en déduit que } ES_\beta(X) \text{ est bien définie.}}$$

- Soit $x \geqslant r_\beta(X)$.
Alors, comme $f_X(x) \geqslant 0$ (car f_X est une densité), on obtient :
$$r_\beta(X)\, f_X(x) \ \leqslant\ x\, f_X(x)$$
Par croissance de l'intégrale (les bornes sont bien ordonnées) et comme les intégrales en présence convergent :
$$\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} r_\beta(X)\, f_X(X)\ dx \leqslant \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x\, f_X(x)\ dx$$
Or :
$$\begin{aligned} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} r_\beta(X)\, f_X(x)\ dx &= r_\beta(X) \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} f_X(x)\ dx = r_\beta(X)\, \mathbb{P}([X \geqslant r_\beta(X)]) \\ &= r_\beta(X)(1 - F_X(r_\beta(X))) \end{aligned}$$
De plus, par définition de $r_\beta(X)$: $F_X(r_\beta(X)) = \beta$. Donc :
$$\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} r_\beta(X)\, f_X(x)\ dx \ =\ r_\beta(X)(1-\beta)$$
D'où :
$$r_\beta(X)(1-\beta) \ \leqslant\ \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x\, f_X(x)\ dx$$
Comme $1 - \beta > 0$:
$$\frac{1}{\cancel{1-\beta}} r_\beta(X)\cancel{(1-\beta)} \ \leqslant\ \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x\, f_X(x)\ dx$$
$$\boxed{\text{On en déduit, par définition de } ES_\beta(X) : r_\beta(X) \leqslant ES_\beta(X).}$$
□

b) À l'aide du changement de variable $t = F_X(x)$, établir :
$$ES_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta} \int_\beta^1 G_X(t)\ dt \quad (2)$$

Démonstration.
Soit $A \geqslant r_\beta(X)$.
On effectue le changement de variable $\boxed{t = F_X(x)}$.

$t = F_X(x)$ (et donc $x = G_X(t)$)
$\hookrightarrow dt = f_X(x)\ dx$
- $x = r_\beta(X) \ \Rightarrow\ t = F_X(r_\beta(X)) = \beta$
- $x = A \ \Rightarrow\ t = F_X(A)$

Ce changement de variable est valide car $\psi : t \mapsto G_X(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I_X (car $X \in \mathcal{D}$).
On obtient finalement :
$$\int_{r_\beta(X)}^{A} x\, f_X(x)\ dx = \int_\beta^{F_X(A)} G_X(t)\ dt$$
Or, comme F_X est une fonction de répartition : $\lim\limits_{A \to +\infty} F_X(A) = 1$.
$$\boxed{\text{On en déduit : } ES_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta} \int_\beta^1 G_X(t)\ dt.}$$
□

On pourra utiliser (1) ou (2) au choix dans la suite pour définir $ES_\beta(X)$.

15. a) Montrer que ES_β vérifie la propriété (R_1).

Démonstration.
Soit $X \in \mathcal{D}$. Soit $c \in \mathbb{R}$.

- D'après la question ***4.a)*** : $r_\beta(X+c) = r_\beta(X) + c$.
- De plus, d'après la démonstration de la question ***4.a)*** :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{X+c}(x) = F_X(x-c)$$

On a admis en question ***4.a)*** que $X + c \in \mathcal{D}$. En particulier, $(X+c)$ est une v.a.r. à densité.
On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{X+c}(x) = f_X(x-c)$$

- On obtient alors avec (1) :

$$ES_\beta(X+c) \ = \ \frac{1}{1-\beta}\int_{r_\beta(X+c)}^{+\infty} x\, f_{X+c}(x)\ dx \ = \ \frac{1}{1-\beta}\int_{r_\beta(X)+c}^{+\infty} x\, f_X(x-c)\ dx$$

On effectue le changement de variable $\boxed{t = x - c}$.

$t = x - c$ (et donc $x = t + c$)
$\hookrightarrow dt = \ dx$
- $x = r_\beta(X) + c \ \Rightarrow \ t = r_\beta(X)$
- $x = +\infty \ \Rightarrow \ t = +\infty$

Ce changement de variable est valide car $\psi : t \mapsto t + c$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[r_\beta(X), +\infty[$.
On obtient finalement :

$$\begin{aligned} ES_\beta(X+c) &= \frac{1}{1-\beta}\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} (t+c) f_X(t)\ dt \\ &= \frac{1}{1-\beta}\left(\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} t\, f_X(t)\ dt + c\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} f_X(t)\ dt\right) \\ &= ES_\beta(X) + \frac{c}{1-\beta}(1 - F_X(r_\beta(X))) \\ &= ES_\beta(X) + \frac{c}{\cancel{1-\beta}}\cancel{(1-\beta)} && \textit{(par définition de } r_\beta(X)\textit{)} \\ &= ES_\beta(X) + c \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } ES_\beta \text{ vérifie } (R_1).}$$

□

b) Montrer que ES_β vérifie la propriété (R_2).

Démonstration.
Soit $X \in \mathcal{D}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- D'après la question ***4.b)*** : $r_\beta(\lambda\, X) = \lambda\, r_\beta(X)$.
- De plus, d'après la démonstration de la question ***4.b)*** :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{\lambda\, X}(x) = F_X\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

On a admis en question ***4.b)*** que $\lambda X \in \mathcal{D}$. En particulier, λX est une v.a.r. à densité. On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{\lambda X}(x) = \frac{1}{\lambda} f_X\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

- On obtient alors avec (1) :

$$ES_\beta(\lambda X) \ = \ \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(\lambda X)}^{+\infty} x\, f_{\lambda X}(x)\ dx \ = \ \frac{1}{1-\beta} \int_{\lambda r_\beta(X)}^{+\infty} x\, \frac{1}{\lambda} f_X\left(\frac{x}{\lambda}\right)\ dx$$

On effectue le changement de variable $\boxed{t = \frac{x}{\lambda}}$.

$t = \frac{x}{\lambda}$ (et donc $x = \lambda t$)
$\hookrightarrow dt = \frac{1}{\lambda}\ dx$ et $dx = \lambda\ dt$
- $x = \lambda r_\beta(X) \ \Rightarrow\ t = r_\beta(X)$
- $x = +\infty \ \Rightarrow\ t = +\infty$ (car $\lambda > 0$)

Ce changement de variable est valide car $\psi : t \mapsto \lambda t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[r_\beta(X), +\infty[$. On obtient finalement :

$$\begin{aligned} ES_\beta(\lambda X) &= \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} \lambda t\, f_X(t)\ dt \\ &= \lambda \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} t\, f_X(t)\ dt \\ &= \lambda\, ES_\beta(X) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } ES_\beta \text{ vérifie } (R_2).}$$

□

16. On suppose dans cette question que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a) Montrer que $ES_\beta(X) = r_\beta(X) + \frac{1}{\lambda}$.

Démonstration.

- D'après la question ***2.b)*** : $r_\beta(X) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-\beta)$.
  Donc, en particulier : $r_\beta(X) \geqslant 0$. D'où :

$$ES_\beta(X) \ = \ \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x\, f_X(x)\ dx \ = \ \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} \lambda\, x\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\ dx$$

- Soit $A \geqslant r_\beta(X)$. On effectue l'intégration par parties (IPP) suivante.

$$\begin{array}{|lcl lcl} u(x) &=& x & u'(x) &=& 1 \\ v'(x) &=& \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} & v(x) &=& -\mathrm{e}^{-\lambda x} \end{array}$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[r_\beta(X), A]$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{r_\beta(X)}^{A} \lambda\, x\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\, dx &= \Big[-x\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x} \Big]_{r_\beta(X)}^{A} + \int_{r_\beta(X)}^{A} \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\, dx \\
&= -A\mathrm{e}^{-\lambda\, A} + r_\beta(X)\, \mathrm{e}^{-\lambda\, r_\beta(X)} + \left[-\frac{1}{\lambda}\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x} \right]_{r_\beta(X)}^{A} \\
&= -A\mathrm{e}^{-\lambda\, A} + r_\beta(X)\, \mathrm{e}^{-\lambda\, r_\beta(X)} - \frac{1}{\lambda}\, \mathrm{e}^{-\lambda\, A} + \frac{1}{\lambda} \mathrm{e}^{-\lambda\, r_\beta(X)} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda\, r_\beta(X)} \left(r_\beta(X) + \frac{1}{\lambda} \right) - A\mathrm{e}^{-\lambda\, A} - \frac{1}{\lambda}\, \mathrm{e}^{-\lambda\, A}
\end{aligned}$$

- Or : $\lim\limits_{A \to +\infty} \mathrm{e}^{-\lambda\, A} = 0$.

  De plus, par croissances comparées : $\lim\limits_{A \to +\infty} A\mathrm{e}^{-\lambda\, A} = 0$.

  Donc :

  $$\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} \lambda\, x\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\, dx = \mathrm{e}^{-\lambda\, r_\beta(X)} \left(r_\beta(X) + \frac{1}{\lambda} \right)$$

- Or, d'après la question ***2.b)*** : $r_\beta(X) = -\dfrac{1}{\lambda} \ln(1-\beta)$. Donc :

  $$\mathrm{e}^{-\lambda\, r_\beta(X)} = \mathrm{e}^{-\cancel{\lambda} \times \left(-\frac{1}{\cancel{\lambda}} \ln(1-\beta)\right)} = \mathrm{e}^{\ln(1-\beta)} = 1-\beta$$

  D'où :

  $$\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} \lambda\, x\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\, dx = (1-\beta) \left(r_\beta(X) + \frac{1}{\lambda} \right)$$

- On en déduit :

  $$ES_\beta(X) = \frac{1}{\cancel{1-\beta}} \times \cancel{(1-\beta)} \left(r_\beta(X) + \frac{1}{\lambda} \right) = r_\beta(X) + \frac{1}{\lambda}$$

  $$\boxed{ES_\beta(X) = r_\beta(X) + \frac{1}{\lambda}}$$

□

b) En déduire que $ES_\beta(X) \underset{\beta \to 1}{\sim} r_\beta(X)$.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\frac{ES_\beta(X)}{r_\beta(X)} = \frac{r_\beta(X) + \frac{1}{\lambda}}{r_\beta(X)} = 1 + \frac{1}{\lambda\, r_\beta(X)}$$

Or, d'après la question ***2.b)*** : $r_\beta(X) = -\dfrac{1}{\lambda} \ln(1-\beta)$. Donc :

$$\frac{ES_\beta(X)}{r_\beta(X)} = 1 + \frac{1}{\cancel{\lambda} \left(-\frac{1}{\cancel{\lambda}} \ln(1-\beta)\right)} = 1 - \frac{1}{\ln(1-\beta)}$$

De plus : $\lim\limits_{\beta \to 1} \ln(1-\beta) = -\infty$. D'où :

$$\lim_{\beta \to 1} \frac{ES_\beta(X)}{r_\beta(X)} = 1 - 0 = 1$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } ES_\beta(X) \underset{\beta \to 1}{\sim} r_\beta(X)}$$

□

17. On suppose dans cette question que X suit la loi normale centrée réduite.

a) Montrer $ES_\beta(X) = \dfrac{\varphi(r_\beta(X))}{1-\Phi(r_\beta(X))}$.

Démonstration.
Par définition de φ :

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \, dx \;=\; \frac{1}{1-\beta} \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \, dx$$

Soit $A \in [r_\beta(X), +\infty[$.

$$\int_{r_\beta(X)}^{A} x \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \, dx \;=\; \left[-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{r_\beta(X)}^{A} \;=\; -\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{(r_\beta(X))^2}{2}}$$

Or : $\lim\limits_{A \to +\infty} \mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} = 0$.
Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \, dx$ converge et : $\displaystyle\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = \mathrm{e}^{-\frac{(r_\beta(X))^2}{2}}$.
De plus, par définition de $r_\beta(X)$: $\beta = \Phi(r_\beta(X))$. Donc :

$$ES_\beta(X) \;=\; \frac{1}{1-\Phi(r_\beta(X))} \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-\frac{(r_\beta(X))^2}{2}} \;=\; \frac{\varphi(r_\beta(X))}{1-\Phi(r_\beta(X))}$$

$$\boxed{ES_\beta(X) = \frac{\varphi(r_\beta(X))}{1-\Phi(r_\beta(X))}}$$

□

b) Pour tout $x > 0$, établir l'égalité : $1 - \Phi(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x} - \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} \, dt$.

Démonstration.
Soit $x > 0$.

- Par définition de Φ :

$$1 - \Phi(x) \;=\; 1 - \int_{-\infty}^{x} \varphi(t) \, dt \;=\; \int_x^{+\infty} \varphi(t) \, dt \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, dt \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \frac{1}{t} \times t \, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$

- Soit $A \geqslant x$. On effectue l'intégration par parties (IPP) suivante.

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & \dfrac{1}{t} & \quad & u'(t) & = & -\dfrac{1}{t^2} \\[2ex] v'(t) & = & t \, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} & \quad & v(t) & = & -\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, A]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_x^A \frac{1}{t} \, t \, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, dt &= \left[-\frac{1}{t} \, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \right]_x^A - \int_x^A \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2} \, dt \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{-\frac{-A^2}{2}}}{A} + \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x} - \int_x^A \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2} \, dt \end{aligned}$$

- Or : $\lim\limits_{A \to +\infty} \dfrac{e^{-\frac{A^2}{2}}}{A} = 0$.

  De plus :

$$\int_x^A \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}\, dt \;=\; -\frac{e^{-\frac{-A^2}{2}}}{A} + \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} - \int_x^A \frac{1}{t}\, t\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \;=\; -\frac{e^{-\frac{-A^2}{2}}}{A} + \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} - \sqrt{2\pi} \int_x^A \varphi(t)\, dt$$

  Donc l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}\, dt$ converge, car l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\, dt$ converge.

- On en déduit :

$$\begin{aligned} 1 - \Phi(x) \;&=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}\, dt \right) \;=\; \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}\, dt \\ &=\; \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ 1 - \Phi(x) \;=\; \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt}$$

□

c) Montrer que, pour tout $x > 0$: $0 \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt \leqslant \frac{1}{x^2}\,(1 - \Phi(x))$.

En déduire que : $1 - \Phi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

Démonstration.
Soit $x > 0$.

- Soit $t \geqslant x$. Alors, par décroissance de $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sur $]0, +\infty[$: $\dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$.

  De plus : $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$. Donc :

$$0 \;\leqslant\; \frac{1}{t^2} \;\leqslant\; \frac{1}{x^2}$$

  Or, comme φ est une densité, en particulier : $\varphi(t) \geqslant 0$. D'où :

$$0 \;\leqslant\; \frac{\varphi(t)}{t^2} \;\leqslant\; \frac{\varphi(t)}{x^2}$$

- Par croissance de l'intégrale (les bornes sont bien ordonnées) et comme les intégrales en présence sont convergentes :

$$0 \;\leqslant\; \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt \;\leqslant\; \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{x^2}\, dt$$

- Or :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{x^2}\, dt \;=\; \frac{1}{x^2} \int_x^{+\infty} \varphi(t)\, dt \;=\; \frac{1}{x^2}\, \mathbb{P}([X \geqslant x]) \;=\; \frac{1}{x^2}(1 - \Phi(x))$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x > 0,\ 0 \;\leqslant\; \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt \;\leqslant\; \frac{1}{x^2}(1 - \Phi(x)).}$$

Commentaire

Le schéma de résolution de cette question est plutôt classique.
Afin de comparer deux intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$:

1) on cherche d'abord à comparer leurs intégrandes, c'est-à-dire montrer :

$$\forall t \in [a,b],\ f(t) \leqslant g(t) \quad \text{ou} \quad \forall t \in [a,b],\ f(t) \geqslant g(t)$$

2) on utilise ensuite la croissance de l'intégrale (si les bornes a et b sont bien ordonnées, c'est-à-dire $a \leqslant b$) pour conclure :

$$\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(t)\,dt \geqslant \int_a^b g(t)\,dt$$

Soit $x > 0$.

- D'après la question précédente :

$$-\frac{1}{x^2}(1-\Phi(x)) \ \leqslant\ -\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt \ \leqslant\ 0$$

Donc, d'après la question ***17.b)***, en ajoutant $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ à chaque membre de cet encadrement :

$$\frac{\varphi(x)}{x} - \frac{1}{x^2}(1-\Phi(x)) \ \leqslant\ 1-\Phi(x) \ \leqslant\ \frac{\varphi(x)}{x}$$

- On en déduit :

$$1-\Phi(x) \ \leqslant\ \frac{\varphi(x)}{x} \ \leqslant\ 1-\Phi(x) + \frac{1}{x^2}(1-\Phi(x)) = (1-\Phi(x))\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

D'où, comme $1-\Phi(x) > 0$:

$$1 \ \leqslant\ \frac{\frac{\varphi(x)}{x}}{1-\Phi(x)} \ \leqslant\ 1+\frac{1}{x^2}$$

- Or : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 1$.

Donc, par théorème d'encadrement : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\varphi(x)}{x}}{1-\Phi(x)} = 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } 1-\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}.}$$

□

d) En conclure que l'on a aussi dans ce cas : $ES_\beta(X) \underset{\beta\to1}{\sim} r_\beta(X)$.

Démonstration.

- D'après la question ***3.a)(iii)*** : $r_\beta(X) = \Phi^{-1}(\beta)$.
Or, d'après la question ***3.a)(i)***, la fonction Φ réalise une bijection strictement croissante de $]-\infty,+\infty[$ sur $]0,1[$.
On en déduit : $\displaystyle\lim_{\beta\to1} \Phi^{-1}(\beta) = +\infty$. D'où : $\displaystyle\lim_{\beta\to1} r_\beta(X) = +\infty$.

- De plus, d'après la question précédente : $1 - \Phi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{\varphi(x)}{x}$.
  D'où : $1 - \Phi(r_\beta(X)) \underset{\beta \to 1}{\sim} \dfrac{\varphi(r_\beta(X))}{r_\beta(X)}$.
  Ainsi, d'après la question ***17.a)*** :

$$ES_\beta(X) = \frac{\varphi(r_\beta(X))}{1 - \Phi(r_\beta(X))} \underset{\beta \to 1}{\sim} \frac{\varphi(r_\beta(X))}{\frac{\varphi(r_\beta(X))}{r_\beta(X)}} = \cancel{\varphi(r_\beta(X))} \, \frac{r_\beta(X)}{\cancel{\varphi(r_\beta(X))}} = r_\beta(X)$$

$$\boxed{ES_\beta(X) \underset{\beta \to 1}{\sim} r_\beta(X)}$$

□

Dans les questions qui suivent, X est une variable aléatoire appartenant à $\mathcal{D}$.

- On note h la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \max(x, 0)$.
- On admet que si U et V sont deux variables aléatoires telles que, $0 \leqslant U \leqslant V$ et $\mathbb{E}(V)$ existe alors $\mathbb{E}(U)$ existe et $0 \leqslant \mathbb{E}(U) \leqslant \mathbb{E}(V)$.
- On note pour tout événement A, $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire indicatrice de l'événement A. Rappelons qu'il s'agit de la variable aléatoire prenant la valeur 1 si A est réalisé, et la valeur 0 sinon.

18. a) Montrer que $h(X - r_\beta(X))$ admet une espérance, et que l'on a :

$$\mathbb{E}\left(h(X - r_\beta(X))\right) = \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} t f_X(t) \, dt - (1 - \beta) r_\beta(X)$$

où f_X désigne une densité de X.

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}$.
  Par définition de la fonction h :

$$h(t - r_\beta(X)) \; = \; \max(t - r_\beta(X), 0) \; = \; \begin{cases} t - r_\beta(X) & \text{si } t - r_\beta(X) \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \forall t \in \mathbb{R}, \; h(t - r_\beta(X)) \; = \; \begin{cases} t - r_\beta(X) & \text{si } t \geqslant r_\beta(X) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.}$$

- D'après le théorème de transfert, la v.a.r. $h(X - r_\beta(X))$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t - r_\beta(X)) f_X(t) \, dt$ converge absolument. Or :
  × comme f_X est une densité : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_X(t) \geqslant 0$;
  × d'après ce qui précède : $\forall t \in \mathbb{R}$, $h(t - r_\beta(X)) \geqslant 0$.

  Donc cela revient à montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t - r_\beta(X)) f_X(t) \, dt$ converge.
- Toujours d'après ce qui précède, la fonction $t \mapsto h(t - r_\beta(X))$ est nulle en dehors de $[r_\beta(X), +\infty[$.
  Donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t - r_\beta(X)) f_X(t) \, dt \; = \; \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} h(t - r_\beta(X)) f_X(t) \, dt$$

- Soit $A \geqslant r_\beta(X)$.
Par définition de la fonction $t \mapsto h(t - r_\beta(X))$ sur $[r_\beta(X), +\infty[$:

$$\begin{aligned}\int_{r_\beta(X)}^{A} h(t - r_\beta(X)) f_X(t)\ dt &= \int_{r_\beta(X)}^{A} (t - r_\beta(X)) f_X(t)\ dt \\ &= \int_{r_\beta(X)}^{A} t\, f_X(t)\ dt - r_\beta(X) \int_{r_\beta(X)}^{A} f_X(t)\ dt\end{aligned}$$

- Or, $X \in \mathcal{D}$, donc la v.a.r. X admet une espérance.
Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\ dt$ converge absolument.
Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} t\, f_X(t)\ dt$ converge absolument.
- De plus, par définition de $r_\beta(X)$:

$$\int_{r_\beta(X)}^{A} f_X(t)\ dt = F_X(A) - F_X(r_\beta(X)) = F_X(A) - \beta \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 1 - \beta$$

- On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} h(t - r_\beta(X)) f_X(t)\ dt$ converge.

$$\boxed{\text{Donc la v.a.r. } h(X - r_\beta(X)) \text{ admet une espérance.}}$$

De plus :

$$\mathbb{E}(h(X - r_\beta(X))) = \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} h(t - r_\beta(X)) f_X(t)\ dt = \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} t\, f_X(t)\ dt - r_\beta(X)(1 - \beta)$$

$$\boxed{\mathbb{E}(h(X - r_\beta(X)) = \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} t\, f_X(t)\ dt - (1 - \beta) r_\beta(X)}$$

□

b) En déduire :

$$ES_\beta(X) = r_\beta(X) + \frac{1}{1 - \beta} \mathbb{E}\left(h(X - r_\beta(X))\right)$$

Démonstration.
D'après l'équation (1) :

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{1 - \beta} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} t\, f_X(t)\ dt$$

Or, d'après la question précédente :

$$\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} t\, f_X(t)\ dt = \mathbb{E}(h(X - r_\beta(X))) + (1 - \beta) r_\beta(X)$$

Donc :

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{1 - \beta} \Big(\mathbb{E}(h(X - r_\beta(X))) + (1 - \beta) r_\beta(X) \Big) = \frac{1}{1 - \beta} \mathbb{E}(h(X - r_\beta(X))) + r_\beta(X)$$

$$\boxed{ES_\beta(X) = r_\beta(X) + \frac{1}{1 - \beta} \mathbb{E}(h(X - r_\beta(X)))}$$

□

9782340-026636_001_784.indd 159 30/07/2018 09:52

19. En utilisant la méthode de Monte-Carlo, dont on supposera la validité, et la fonction `VaR` définie dans la question ***11.***, écrire une fonction **Scilab** qui calcule une valeur approchée de $ES_\beta(X)$ à partir de la réalisation d'un échantillon de taille n de la loi de X dont les valeurs se trouvent dans le tableau **Scilab** `X` et de la valeur de β se trouvant dans la variable **Scilab** `beta`.

Démonstration.
On souhaite obtenir une valeur approchée de $ES_\beta(X)$. Pour ce faire, on doit tout d'abord obtenir une valeur approchée de l'espérance de la v.a.r. $V = h(X - r_\beta(X))$.

- L'idée naturelle pour obtenir une approximation de cette espérance est :
  - × de simuler un grand nombre de fois ($N = 10000$ par exemple) la v.a.r. V.
    Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(v_1, \dots, v_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(V_1, \dots, V_N)$ de la v.a.r. V.
  - × de réaliser la moyenne des résultats de cette observation.

  Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\text{moyenne de l'observation} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} v_i \;\simeq\; \mathbb{E}(V)$$

- Il reste à obtenir le N-uplet $(v_1, \dots, v_N)$. Pour ce faire, on dispose d'un N-uplet $(x_1, \dots, x_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(X_1, \dots, X_N)$ de la v.a.r. X.
  Cette observation permet d'obtenir $(v_1, \dots, v_N)$ en écrivant :

$$v_i \;=\; h\big(x_i - r_\beta(X)\big)$$

  Il est à noter que, comme le suggère l'énoncé, la valeur de $r_\beta(X)$ sera obtenue par l'appel à la fonction `VaR`.

- La valeur approchée de $ES_\beta(X)$ est alors obtenue par le calcul : $r_\beta(X) + \dfrac{1}{1-\beta}\, \dfrac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{N} v_i$.

- Ce qui aboutit à la fonction suivante :

```
1 function ES = ExpectedShortfall(X, beta)
2     N = length(X)
3     V = zeros(1, N)
4     r = VaR(X, beta)
5     for i=1:N
6         V(i) = max(X(i)-r, 0)
7     end
8     ES = r + 1/(1-beta) * 1/N * sum(V)
9 endfunction
```

  Détaillons les différents éléments de ce code :
  - × le paramètre **X** correspond à l'observation $(x_1, \dots, x_N)$.
  - × en ligne 2, on récupère la taille de l'échantillon fourni en paramètre.
  - × en ligne 3, on crée une matrice ligne de taille N permettant à terme de stocker l'observation $(v_1, \dots, v_N)$.
  - × en lignes 5 à 7, on effectue une boucle permettant d'obtenir successivement chaque v_i à l'aide de la valeur x_i fournit en paramètre.
  - × en ligne 8, on obtient la valeur approchée de $ES_\beta(X)$ en effectuant le calcul annoncé.

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, écrire correctement la fonction **Scilab** démontre la bonne compréhension et permet certainement d'obtenir tous les points alloués.
- On s'est servi en ligne 6 de la fonction `max` prédéfinie en **Scilab**.
  Il était aussi possible d'utiliser une structure conditionnelle :

```
6          if X(i)-r > 0 then
7              V(i) = X(i)-r
8          else
9              V(i) = 0
10         end
```

- Enfin, il est possible de calculer la somme $\sum\limits_{i=1}^{N} v_i$ sans créer une matrice de taille N. Pour ce faire, on crée une variable `S` qu'on initialise à 0 et qu'on met à jour dans la boucle. On obtient le programme suivant :

```
function ES = ExpectedShortfall(X, beta)
    N = length(X)
    S = 0
    r = VaR(X, beta)
    for i=1:N
        S = S + max(X(i)-r, 0)
    end
    ES = r + 1/(1-beta) * 1/N * S
endfunction
```

$\square$

20. Soit Z une variable aléatoire telle que : $\mathbb{E}(Z) = 1$ et $0 \leqslant Z \leqslant \dfrac{1}{1-\beta}$.

a) Justifier l'égalité entre variables aléatoires : $h(X - r_\beta(X)) = (X - r_\beta(X)) \times \mathbb{1}_{[X > r_\beta(X)]}$.

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$.
Deux cas se présentent.

- Si $X(\omega) > r_\beta(X)$, alors :
  - × par définition de la v.a.r. indicatrice $\mathbb{1}_{[X > r_\beta(X)]}$: $\mathbb{1}_{[X > r_\beta(X)]}(\omega) = 1$.
    Donc :
    $$(X(\omega) - r_\beta(X)) \times \mathbb{1}_{[X > r_\beta(X)]}(\omega) \;=\; X(\omega) - r_\beta(X)$$
  - × par définition de $t \mapsto h(t - r_\beta(X))$: $h(X(\omega) - r_\beta(X)) = X(\omega) - r_\beta(X)$.

  D'où :
  $$h(X(\omega) - r_\beta(X)) \;=\; (X(\omega) - r_\beta(X)) \times \mathbb{1}_{[X > r_\beta(X)]}(\omega)$$

- Si $X(\omega) \leqslant r_\beta(X)$, alors :
  - × par définition de la v.a.r. indicatrice $\mathbb{1}_{[X > r_\beta(X)]}$: $\mathbb{1}_{[X > r_\beta(X)]}(\omega) = 0$.
    Donc :
    $$(X(\omega) - r_\beta(X)) \times \mathbb{1}_{[X > r_\beta(X)]}(\omega) \;=\; 0$$
  - × par définition de $t \mapsto h(t - r_\beta(X))$: $h(X(\omega) - r_\beta(X)) = 0$.

D'où :
$$h(X(\omega) - r_\beta(X)) \;=\; (X(\omega) - r_\beta(X)) \times \mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}(\omega)$$

Finalement : $\forall \omega \in \Omega$, $h(X(\omega) - r_\beta(X)) = (X(\omega) - r_\beta(X)) \times \mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}(\omega)$.

$$\boxed{h(X - r_\beta(X)) = (X - r_\beta(X)) \times \mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}}$$ □

b) Montrer que $\mathbb{E}(XZ)$ existe et établir l'égalité :

$$ES_\beta(X) - \mathbb{E}(XZ) = \frac{1}{1-\beta}\mathbb{E}\left[(X - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z)\right]$$

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $0 \leqslant Z \leqslant \dfrac{1}{1-\beta}$.
  Donc, comme $|X|$ est à valeurs positives : $0 \;\leqslant\; |X|\,Z \;\leqslant\; \dfrac{1}{1-\beta}\,|X|$.
  D'où, comme Z est aussi à valeurs positives :
  $$0 \;\leqslant\; |XZ| \;\leqslant\; \frac{1}{1-\beta}\,|X| \quad (\star)$$
- Démontrons alors que $|X|$ admet une espérance.
  D'après le théorème de transfert, $|X|$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\ f_X(t)\ dt$ est absolument convergente.
  Or, comme $X \in \mathcal{D}$, alors X admet une espérance. Cela signifie que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f_X(t)\ dt$ est absolument convergente. Enfin, comme f est à valeurs positives :
  $$\forall t \in \mathbb{R},\ |t\ f_X(t)| \;=\; |t|\ |f_X(t)| \;=\; |t|\ f_X(t)$$
  On en conclut que $|X|$ admet une espérance si et seulement si X admet une espérance.
  $$\boxed{\text{Et comme } X \text{ admet une espérance, il en est de même de } |X|.}$$
- Or, il est précisé dans l'énoncé la propriété suivante :
  $$\left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant U \leqslant V \\ \mathbb{E}(V) \text{ existe} \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} \mathbb{E}(U) \text{ existe} \\ 0 \leqslant \mathbb{E}(U) \leqslant \mathbb{E}(V) \end{array}\right. \qquad (\star\star)$$
  La propriété $(\star)$ étant vérifiée, et comme $|X|$ admet une espérance, on peut appliquer la propriété rappelée ci-dessus à $U = |XZ|$ et $V = \dfrac{1}{1-\beta}|X|$.
  On en déduit que la v.a.r. $|XZ|$ admet une espérance.
  $$\boxed{\text{Ainsi, } XZ \text{ admet une espérance.}}$$
- Il s'agit maintenant d'établir l'égalité énoncée.
  Tout d'abord, d'après la question ***20.a)*** :
  $$\begin{aligned} (X - r_\beta(X))\Big(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z\Big) &= (X - r_\beta(X))\,\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} - (X - r_\beta(X))(1-\beta)Z \\ &= h(X - r_\beta(X)) - (1-\beta)XZ + (1-\beta)r_\beta(X)Z \end{aligned}$$

- De plus les v.a.r. $h(X - r_\beta(X))$, XZ et Z admettent une espérance.
  Ainsi, la v.a.r. $(X - r_\beta(X))\Big(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z\Big)$ admet une espérance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
  Enfin, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\Big((X - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z)\Big) \\
= \ & \mathbb{E}(h(X - r_\beta(X))) - (1-\beta)\mathbb{E}(XZ) + (1-\beta)r_\beta(X)\mathbb{E}(Z) \\
= \ & (1-\beta)(ES_\beta(X) - \cancel{r_\beta(X)}) - (1-\beta)\mathbb{E}(XZ) + \cancel{(1-\beta)r_\beta(X)} && \textit{(d'après } \textbf{18.b)} \textit{ et car } \mathbb{E}(Z) = 1 \textit{ d'après l'énoncé)} \\
= \ & (1-\beta)\Big(ES_\beta(X) - \mathbb{E}(XZ)\Big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{ES_\beta(X) - \mathbb{E}(XZ) \ = \ \frac{1}{1-\beta}\,\mathbb{E}\Big((X - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z)\Big)}$$

Commentaire

- Pour les v.a.r. à densité ou discrètes, la propriété :

$$X \text{ admet une espérance} \ \Leftrightarrow \ |X| \text{ admet une espérance}$$

  est immédiate par définition de l'espérance (comme démontré plus haut).
- Elle est cependant bien moins triviale pour des v.a.r. quelconques puisque l'on n'a pas accès à une expression explicite de l'espérance.
  On peut cependant démontrer l'implication :

$$|X| \text{ admet une espérance} \ \Rightarrow \ X \text{ admet une espérance}$$

- Détaillons cette démonstration.
  On suppose que $|X|$ admet une espérance.
  × On commence par définir les v.a.r. suivantes :

$$X^+ \ = \ \frac{|X| + X}{2} \quad \text{et} \quad X^- \ = \ \frac{|X| - X}{2}$$

  La v.a.r. $X^+ = \max(X, 0)$ est la partie positive de X.
  La v.a.r. $X^- = -\min(X, 0)$ est la partie négative de X.
  × Par définition de X^+ et X^-, on a :

$$0 \leqslant X^+ \leqslant |X| \quad \text{et} \quad 0 \leqslant X^- \leqslant |X|$$

  Or $|X|$ admet une espérance.
  Donc, d'après la propriété $(\star\star)$ de l'énoncé, les v.a.r. X^+ et X^- admettent des espérances.
  × Enfin, on remarque :

$$X = X^+ - X^-$$

  Donc X admet une espérance en tant que différence de v.a.r. en admettant une. □

c) En déduire que $ES_\beta(X) - \mathbb{E}(XZ) \geqslant 0$.
Comment choisir Z pour que $ES_\beta(X) = \mathbb{E}(XZ)$?

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$ES_\beta(X) - \mathbb{E}(XZ) \ = \ \frac{1}{1-\beta}\,\mathbb{E}\Big((X - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z)\Big)$$

Montrons donc :

$$(X - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z) \geqslant 0$$

Soit $\omega \in \Omega$. D'après l'énoncé : $0 \leqslant Z(\omega) \leqslant \dfrac{1}{1-\beta}$. Or :

$$0 \leqslant Z(\omega) \leqslant \frac{1}{1-\beta} \ \Leftrightarrow \ 0 \leqslant (1-\beta)Z(\omega) \leqslant 1 \ \Leftrightarrow \ -1 \leqslant -(1-\beta)Z(\omega) \leqslant 0$$

Deux cas se présentent alors.

- Si $X(\omega) > r_\beta(X)$, alors :
  - × $X(\omega) - r_\beta(X) > 0$;
  - × $\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}(\omega) = 1$. Donc : $0 \ \leqslant \ \mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}(\omega) - (1-\beta)Z(\omega) \ \leqslant \ 1$.

  D'où : $(X(\omega) - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}(\omega) - (1-\beta)Z(\omega)) \ \geqslant \ 0$.
- Si $X(\omega) \leqslant r_\beta(X)$, alors :
  - × $X(\omega) - r_\beta(X) \leqslant 0$;
  - × $\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}(\omega) = 0$. Donc : $-1 \ \leqslant \ \mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}(\omega) - (1-\beta)Z(\omega) \ \leqslant \ 0$.

  D'où : $(X(\omega) - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}(\omega) - (1-\beta)Z(\omega)) \ \geqslant \ 0$.

Finalement : $\forall \omega \in \Omega, \ (X(\omega) - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}(\omega) - (1-\beta)Z(\omega)) \ \geqslant \ 0$.

$$\boxed{(X - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z) \ \geqslant \ 0}$$

Par positivité de l'espérance :

$$\mathbb{E}\Big((X - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z)\Big) \ \geqslant \ 0$$

De plus : $\beta \in \,]0,1[$. Donc $\dfrac{1}{1-\beta} > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } ES_\beta(X) - \mathbb{E}(XZ) \geqslant 0.}$$

Tout d'abord :

$$\begin{array}{ll}
& ES_\beta(X) - \mathbb{E}(XZ) = 0 \\
\Leftrightarrow & \dfrac{1}{1-\beta}\,\mathbb{E}\Big((X - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z)\Big) = 0 \\
\Leftrightarrow & \mathbb{E}\Big((X - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z)\Big) = 0 \qquad \textit{(car } \dfrac{1}{1-\beta} \neq 0\textit{)} \\
\Leftrightarrow & (X - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z) = 0 \qquad \textit{(par positivité de l'espérance, car } (X - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z) \textit{ est une v.a.r. positive)} \\
\Leftrightarrow & \mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z = 0 \qquad \textit{(car } X \textit{ est une v.a.r. à densité, donc n'est pas la v.a.r. constante égale à } r_\beta(X)\textit{)} \\
\Leftrightarrow & Z = \dfrac{1}{1-\beta}\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}
\end{array}$$

Vérifions que $Z_0 = \dfrac{1}{1-\beta}$ vérifie les deux propriétés énoncées en début de question.

- Par définition d'une v.a.r. indicatrice : $0 \leqslant \mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} \leqslant 1$.
  Donc $0 \leqslant \dfrac{1}{1-\beta}\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} \leqslant \dfrac{1}{1-\beta}$.

$$\boxed{\text{D'où : } 0 \leqslant Z_0 \leqslant \dfrac{1}{1-\beta}.}$$

- Montrons que $\mathbb{E}(Z_0) = 1$.
  Pour cela, on note : $Y = \mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}$.
  - × Par définition d'une v.a.r. indicatrice : $Y(\Omega) = \{0, 1\}$.
  - × Donc la v.a.r. Y suit une loi de Bernoulli de paramètre :

$$p = \mathbb{P}([Y=1]) \;=\; \mathbb{P}\Big(\big[\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} = 1\big]\Big) \;=\; \mathbb{P}([X > r_\beta(X)]) \;=\; 1 - F_X(r_\beta(X)) \;=\; 1-\beta$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } Y \hookrightarrow \mathcal{B}(1-\beta)}$$

  On en déduit :

$$\mathbb{E}(Z_0) \;=\; \mathbb{E}\left(\frac{1}{1-\beta}Y\right) \;=\; \frac{1}{1-\beta}\,\mathbb{E}(Y) \;=\; \frac{1}{\cancel{1-\beta}}\cancel{(1-\beta)} \;=\; 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(Z_0) = 1}$$

$$\boxed{\text{Finalement, en choisissant } Z_0 = \dfrac{1}{1-\beta}\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}\text{, on obtient : } ES_\beta(X) \;=\; \mathbb{E}(XZ_0).}$$ □

9782340-026636_001_784.indd 165 30/07/2018 09:52

21. On note $\mathcal{K}$ l'ensemble des variables aléatoires Z sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{E}(Z) = 1$ et $0 \leqslant Z \leqslant \dfrac{1}{1-\beta}$.
Justifier l'égalité : $ES_\beta(X) = \max\limits_{Z \in \mathcal{K}} \mathbb{E}(XZ)$.

Démonstration.

- D'après la question ***20.c)*** :
$$\forall T \in \mathcal{K},\ ES_\beta(X) \geqslant \mathbb{E}(XT)$$
Cette inégalité est vérifiée pour tout $T \in \mathcal{K}$.
Donc : $ES_\beta(X) \geqslant \max\limits_{Z \in \mathcal{K}} (\mathbb{E}(XZ))$.
- De plus : $ES_\beta(X) = \mathbb{E}(XZ_0)$ et $Z_0 \in \mathcal{K}$. Donc : $\max\limits_{Z \in \mathcal{K}} (\mathbb{E}(XZ)) = \mathbb{E}(XZ_0)$.

$$\boxed{\text{D'où : } ES_\beta(X) \ = \ \max_{Z \in \mathcal{K}} (\mathbb{E}(XZ))}$$

□

22. Démontrer que, pour tout $\beta \in \,]0,1[$, la fonction ES_β est une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{D}$.

Démonstration.
Soit $\beta \in \,]0,1[$.

- On sait déjà, d'après les questions ***15.a)*** et ***15.b)*** que ES_β vérifie (R_1) et (R_2).
- Soit $(X,Y) \in \mathcal{D}^2$ tel que $X \leqslant Y$.
Soit $T \in \mathcal{K}$. Alors, comme $T \geqslant 0$: $XT \leqslant YT$.
Donc, par croissance de l'espérance :
$$\mathbb{E}(XT) \ \leqslant \ \mathbb{E}(YT) \ \leqslant \ \max_{Z \in \mathcal{K}} (\mathbb{E}(YZ))$$
Cette inégalité est réalisée pour tout $T \in \mathcal{K}$.
D'où : $\max\limits_{Z \in \mathcal{K}} (\mathbb{E}(XZ)) \leqslant \max\limits_{Z \in \mathcal{K}} (\mathbb{E}(YZ))$.
D'après la question précédente, on en déduit :
$$ES_\beta(X) \leqslant ES_\beta(Y)$$
$$\boxed{\text{Ainsi, } ES_\beta \text{ vérifie } (R_3).}$$
- Soit $(X,Y) \in \mathcal{D}^2$ tel que $X + Y \in \mathcal{D}$.
Soit $T \in \mathcal{D}$. Alors, par linéarité de l'espérance :
$$\mathbb{E}((X+Y)T) \ = \ \mathbb{E}(XT) + \mathbb{E}(YT) \ \leqslant \ \max_{Z \in \mathcal{K}} (\mathbb{E}(XZ)) + \max_{Z \in \mathcal{K}} (\mathbb{E}(YZ))$$
Cette inégalité est réalisée pour tout $T \in \mathcal{K}$. D'où :
$$\max_{Z \in \mathcal{K}} (\mathbb{E}((X+Y)Z)) \ \leqslant \ \max_{Z \in \mathcal{K}} (\mathbb{E}(XZ)) + \max_{Z \in \mathcal{K}} (\mathbb{E}(YZ))$$
D'après la question précédente, on en déduit :
$$ES_\beta(X+Y) \ \leqslant \ ES_\beta(X) + ES_\beta(Y)$$
$$\boxed{\text{Ainsi, } ES_\beta \text{ vérifie } (R_4).}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } ES_\beta \text{ est une mesure de risque cohérente sur } \mathcal{D}.}$$

□

ESSEC-II 2016 : le sujet

Le but du problème est d'étudier le renouvellement d'un des composants d'un système complexe (une machine, un réseau de distribution d'énergie etc...) formé d'un assemblage de différentes pièces susceptibles de tomber en panne. On s'intéresse donc à une de ces pièces susceptibles de se casser ou de tomber en panne et on se place dans la situation idéale où dès que la pièce est défectueuse, elle est immédiatement remplacée. Dans une première partie, on étudie quelques propriétés fondamentales des variables aléatoires discrètes. Puis, dans une deuxième partie, on étudie la probabilité de devoir changer la pièce un certain jour donné. Enfin, dans une troisième partie on cherche à estimer le temps de fonctionnement du système avec un certain nombre de pièces de rechange à disposition.
Dans tout le problème, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Pour toute variable aléatoire réelle X définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, on note, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(X)$ l'espérance de X et $\mathbb{V}(X)$ sa variance.
La deuxième partie peut être traitée en admettant si besoin les résultats de la première partie.

Première partie

Dans cette première partie, on étudie les propriétés asymptotiques d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. a) Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X = j]) = \mathbb{P}([X > j - 1]) - \mathbb{P}([X > j])$$

b) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que :

$$\sum_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}([X = j]) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) - p\,\mathbb{P}([X > p])$$

2. a) On suppose que X admet une espérance $\mathbb{E}(X) = \mu$.

i. Justifier la convergence de la série de terme général $k\,\mathbb{P}([X = k])$.

ii. Montrer que :

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}([X = k]) = 0$$

iii. En déduire que :

$$\lim_{p\to+\infty} p\ \mathbb{P}([X > p]) = 0$$

iv. Montrer que la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ converge.

v. Montrer que : $\mu = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$.

b) On suppose que $\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$ converge.

i. Déterminer le sens de variation de la suite $(v_p)_{p\geqslant 1}$ définie par :

$$v_p = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j])$$

ii. Comparer $\sum_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}([X = j])$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$.

iii. En déduire que X admet une espérance.

c) Conclure des questions précédentes que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ converge.

3. On suppose dans cette question qu'il existe un réel α strictement positif tel que pour tout entier naturel j on ait :

$$\mathbb{P}([X > j]) = \frac{1}{(j+1)^\alpha} \qquad (*)$$

a) Légitimer que $(*)$ définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

b) Montrer que X admet une espérance si et seulement si α est strictement supérieur à 1.

c) Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X = j]) = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}\right)$$

d) i. Étudier les variations de $f : x \mapsto 1 - (1+x)^{-\alpha} - \alpha x$ sur $[0, 1]$.

ii. Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X = j]) \leqslant \frac{\alpha}{j^{1+\alpha}}$$

e) Montrer, en utilisant le résultat de ***3.c)***, que :

$$\lim_{j \to +\infty} j^{\alpha+1}\, \mathbb{P}([X = j]) = \alpha$$

f) Montrer que X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$.

Deuxième partie : Étude de la probabilité de panne un jour donné.

Dans cette deuxième partie, on suppose donnée une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\geqslant 1}$ mutuellement indépendantes et de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Pour tout entier i non nul, X_i représente la durée de vie en jours du $i^{\text{ème}}$ composant en fonctionnement. Soit k un entier naturel non nul. On note $T_k = X_1 + ... + X_k$. T_k représente donc le jour où le $k^{\text{ème}}$ composant tombe en panne. On fixe un entier naturel n non nul représentant un jour donné et on considère l'événement A_n : « le composant en place le jour n tombe en panne » c'est-à-dire A_n : « il existe k entier naturel non nul tel que $T_k = n$ », et on se propose d'étudier $\mathbb{P}(A_n)$.

4. Pour tout entier naturel non nul j, on note $p_j = \mathbb{P}([X_1 = j])$ et $u_j = \mathbb{P}(A_j)$. On suppose que pour tout entier naturel non nul j, on a $p_j \neq 0$. On pose de plus par convention $u_0 = 1$.

a) Montrer que : $u_1 = p_1$.

b) i. Montrer que : $A_2 \;=\; [X_1 = 2] \;\cup\; ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$.

ii. En déduire u_2 en fonction de p_1 et p_2.

c) Pour tout entier naturel i, on pose $\tilde{X}_i = X_{i+1}$.

i. Montrer que les variables $\tilde{X}_i$ sont mutuellement indépendantes, indépendantes de X_1 et de même loi que X_1.

ii. Soit k un entier naturel non nul strictement inférieur à n. Montrer que :

$$A_n \cap [X_1 = k] = [X_1 = k] \;\cap\; \bigcup_{j\geqslant 1} \left[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n - k\right]$$

iii. En déduire que pour tout entier naturel k non nul strictement inférieur à n :

$$\mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n-k})$$

d) Montrer que :

$$u_n = u_{n-1}\, p_1 + \ldots + u_0\, p_n$$

e) En **Scilab**, soit $P = [p_1, p_2, ..., p_n]$ le vecteur ligne tel que $P(j) = p_j$ pour j dans $[\![1, n]\!]$.
Écrire un programme en **Scilab** qui calcule u_n à partir de P.

5. Soit λ un réel appartenant à $]0, 1[$.

Dans cette question, on suppose que X_1 suit la loi géométrique de paramètre λ.
Pour tout entier naturel j non nul, on a donc $\mathbb{P}([X_1 = j]) = \lambda(1-\lambda)^{j-1}$.

a) Calculer $\mathbb{P}([X_1 > k])$ pour tout entier naturel k non nul.

b) Calculer $\mathbb{P}_{[X_1>k]}([X_1 = k+1])$.

c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $\mathbb{P}(A_n) = \lambda$.

6. On suppose dans cette question que p_1 vérifie $0 < p_1 < 1$ et que $p_2 = 1 - p_1$.
Pour simplifier, on posera $p = p_1 = 1 - p_2$.

a) Que vaut p_i pour i supérieur ou égal à 3 ?

b) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$.

c) i. Diagonaliser la matrice M.

ii. Montrer que :

$$M^{n-1} = \frac{1}{2-p}\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p}\begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d) i. Exprimer u_n en fonction de p et de n.

ii. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Troisième partie : Étude de la durée de fonctionnement.

Comme dans la partie précédente, on suppose donnée une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\geqslant 1}$ indépendantes et de même loi, telle que pour tout entier i non nul, X_i représente la durée de vie en jours du i-ème composant en fonctionnement.
Soit k un entier naturel non nul. On étudie dans cette partie la durée de fonctionnement prévisible du système si on a k composants à disposition (y compris celui installé au départ).
On notera toujours $T_k = X_1 + ... + X_k$.
On suppose dans cette partie qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que pour tout entier naturel j on ait :

$$\mathbb{P}([X_1 > j]) = \frac{1}{(j+1)^\alpha}$$

En particulier, dans toute cette partie, X_1 admet une espérance, on l'on notera $\mu = \mathbb{E}(X_1)$.

7. Que vaut $\mathbb{E}(T_k)$?

8. On suppose, **dans cette question**, que α est strictement supérieur à 2. La variable aléatoire X_1 admet donc une variance σ^2.

a) Calculer $\mathbb{V}(T_k)$.

b) Montrer que pour tout réel ε strictement positif,

$$\mathbb{P}([|T_k - k\mu| \geqslant k\varepsilon]) \leqslant \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2}$$

c) Déduire que, pour tout réel strictement positif ε, on a :

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{T_k}{k} \in \,]\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon[\right]\right) = 1$$

9. On suppose maintenant uniquement que $\alpha > 1$ et donc que X_1 n'a pas nécessairement de variance d'où l'impossibilité d'appliquer la méthode précédente. On va mettre en œuvre ce qu'on appelle une méthode de troncation.
On fixe un entier naturel m strictement positif. Pour tout entier naturel non nul i, on définit deux variables aléatoires $Y_i^{(m)}$ et $Z_i^{(m)}$ de la façon suivante

$$Y_i^{(m)} = \begin{cases} X_i & \text{si } X_i \leqslant m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad Z_i^{(m)} = \begin{cases} X_i & \text{si } X_i > m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Montrer que $X_i = Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)}$.

b) i. En utilisant la question ***3.d)ii.***, montrer que :

$$\mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) \leqslant \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{i^\alpha}$$

ii. Montrer que :

$$\mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) \leqslant \int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx$$

iii. Calculer :

$$\int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx$$

iv. En déduire que :

$$\lim_{m\to+\infty} \mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) = 0$$

v. Montrer que

$$\lim_{m\to+\infty} \mathbb{E}\big(Y_1^{(m)}\big) = \mu$$

c) i. Montrer que

$$\big(Y_1^{(m)}\big)^2 \leqslant mX_1$$

ii. En déduire que

$$\mathbb{V}\big(Y_1^{(m)}\big) \leqslant m\mu$$

d) Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un entier naturel m_0 non nul tel que pour tout entier naturel m supérieur ou égal à m_0,

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha} \leqslant \varepsilon$$

Jusqu'à la fin du problème, m désignera un entier supérieur ou égal à m_0.

e) On note, pour tout entier naturel k non nul

$$U_k^{(m)} = \sum_{i=1}^{k} Y_i^{(m)} \quad \text{et} \quad V_k^{(m)} = \sum_{i=1}^{k} Z_i^{(m)}$$

Vérifier que :

$$T_k = U_k^{(m)} + V_k^{(m)}$$

f) i. Montrer que :

$$\mathbb{E}\big(V_k^{(m)}\big) \leqslant k\, \frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha}$$

ii. En déduire que :

$$\mathbb{P}\Big(\Big[V_k^{(m)} \geqslant k\varepsilon\Big]\Big) \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}$$

g) i. Montrer que :

$$\mathbb{E}\big(U_k^{(m)}\big) \ \geqslant \ k\mu - k\frac{\alpha}{\alpha-1}m^{1-\alpha}$$

ii. En déduire que :

$$\Big|\ \mathbb{E}(U_k^{(m)}) - k\mu\ \Big| \ \leqslant \ k\varepsilon$$

iii. Montrer que :

$$\mathbb{P}\left(\left[|U_k^{(m)} - k\mu| \ \geqslant \ 2k\varepsilon\right]\right) \ \leqslant \ \mathbb{P}\left(\left[|U_k^{(m)} - \mathbb{E}(U_k^{(m)})| \ \geqslant \ k\varepsilon\right]\right)$$

iv. Montrer que :

$$\mathbb{V}\big(U_k^{(m)}\big) \ \leqslant \ km\mu$$

v. En déduire que :

$$\mathbb{P}\left(\left[|U_k^{(m)} - k\mu| \ \geqslant \ 2k\varepsilon\right]\right) \ \leqslant \ \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$$

h) i. Montrer que pour tout couple d'événements A et B dans $\mathcal{A}$, on a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) \ \geqslant \ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$

ii. En appliquant l'inégalité précédente aux événements :

$$A = \left[V_k^{(m)} < k\varepsilon\right] \qquad \text{et} \qquad B = \left[U_k^{(m)} \in \left]k(\mu-2\varepsilon), k(\mu+2\varepsilon)\right[\right]$$

montrer que :

$$\mathbb{P}\left(\left[T_k \in \left]k(\mu-3\varepsilon), k(\mu+3\varepsilon)\right[\ \right]\right) \ \geqslant \ \mathbb{P}\left(\left[V_k^{(m)} < k\varepsilon\right]\right) + \mathbb{P}\left(\left[U_k^{(m)} \in \left]k(\mu-2\varepsilon), k(\mu+2\varepsilon)\right[\right]\ \right) - 1$$

iii. Déduire des questions précédentes que pour tout réel ε strictement positif, et pour tout entier m supérieur ou égal à m_0, on a pour tout entier naturel k non nul :

$$\mathbb{P}\left(\left[\ T_k \in \left]k(\mu-3\varepsilon), k(\mu+3\varepsilon)\right[\ \right]\right) \ \geqslant \ 1 - \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon} - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$$

iv. Pour k assez grand, appliquer l'inégalité précédente à un entier $m_k \in [\sqrt{k}, 2\sqrt{k}]$ et conclure que :

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{T_k}{k} \in \left]\mu-3\varepsilon, \mu+3\varepsilon\right[\right]\ \right) = 1$$

ESSEC-II 2016 : le corrigé

Le but du problème est d'étudier le renouvellement d'un des composants d'un système complexe (une machine, un réseau de distribution d'énergie etc...) formé d'un assemblage de différentes pièces susceptibles de tomber en panne. On s'intéresse donc à une de ces pièces susceptibles de se casser ou de tomber en panne et on se place dans la situation idéale où dès que la pièce est défectueuse, elle est immédiatement remplacée. Dans une première partie, on étudie quelques propriétés fondamentales des variables aléatoires discrètes. Puis, dans une deuxième partie, on étudie la probabilité de devoir changer la pièce un certain jour donné. Enfin, dans une troisième partie on cherche à estimer le temps de fonctionnement du système avec un certain nombre de pièces de rechange à disposition.
Dans tout le problème, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Pour toute variable aléatoire réelle X définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, on note, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(X)$ l'espérance de X et $\mathbb{V}(X)$ sa variance.
La deuxième partie peut être traitée en admettant si besoin les résultats de la première partie.

Première partie

Dans cette première partie, on étudie les propriétés asymptotiques d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. a) Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X = j]) = \mathbb{P}([X > j-1]) - \mathbb{P}([X > j])$$

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

- Remarquons tout d'abord : $[X > j] \ \cup \ [X = j] \ = \ [X \geqslant j]$.
  Or, comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$: $[X > j-1] = [X \geqslant j]$.
- On obtient alors :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X > j-1]) & = & \mathbb{P}([X > j] \ \cup \ [X = j]) & \\ & = & \mathbb{P}([X > j]) + \mathbb{P}([X = j]) & \textit{(car } [X > j] \textit{ et } [X = j] \\ & & & \textit{sont incompatibles)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{En réordonnant, on obtient : } \forall j \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}([X = j]) = \mathbb{P}([X > j-1]) - \mathbb{P}([X > j]).}$$

Commentaire

- Dans cette démonstration, on met en place une méthode classique de raisonnement :
  (i) on commence par une étape de décomposition de l'événement,
  (ii) puis on applique la fonction $\mathbb{P}$ de part et d'autre.
  Il faut prendre le réflexe de raisonner sur les événements avant d'appliquer la fonction $\mathbb{P}$.
- La formule énonce une différence entre des probabilités d'événements. Après réordonnement, on obtient une somme. Il faut donc penser à une décomposition d'événement à l'aide d'une union. Si on ne réordonne pas les différents membres de l'égalité, on peut aussi penser à une décomposition à l'aide d'une différence ensembliste. Pour cela on remarque que, comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$:

$$[X > j-1] \setminus [X > j] = [X = j]$$

Ainsi :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X = j]) & = & \mathbb{P}([X > j-1] \ \setminus \ [X > j]) & \\ & = & \mathbb{P}([X > j-1]) \ - \ \mathbb{P}([X > j-1] \ \cap \ [X > j]) & \\ & = & \mathbb{P}([X > j-1]) \ - \ \mathbb{P}([X > j]) & \textit{(car } [X > j] \subset [X > j-1]\textit{)} \end{array}$$

$\square$

b) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que :

$$\sum_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}([X=j]) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) - p\,\mathbb{P}([X>p])$$

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question précédente :

$$j\ \mathbb{P}([X=j]) = j\ \mathbb{P}([X>j-1]) - j\ \mathbb{P}([X>j])$$

- Ainsi, on obtient en sommant :

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X=j]) \\
= \ & \sum_{j=1}^{p} \left(j\ \mathbb{P}([X>j-1]) - j\ \mathbb{P}([X>j])\right) \\
= \ & \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X>j-1]) - \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X>j]) && \textit{(par linéarité)} \\
= \ & \sum_{j=0}^{p-1} (j+1)\ \mathbb{P}([X>j]) - \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X>j]) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \sum_{j=0}^{p-1} j\ \mathbb{P}([X>j]) + \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) - \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X>j]) && \textit{(par linéarité)} \\
= \ & 0 \times \mathbb{P}([X>j]) + \cancel{\sum_{j=1}^{p-1} j\ \mathbb{P}([X>j])} + \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) - \left(\cancel{\sum_{j=1}^{p-1} j\ \mathbb{P}([X>j]} + p\ \mathbb{P}([X>p])\right) \\
= \ & \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) - p\ \mathbb{P}([X>p])
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X=j]) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) - p\ \mathbb{P}([X>p])}$$

Commentaire

La démonstration consiste à démontrer un résultat de type somme télescopique.
On pouvait faire apparaître directement une telle somme en remarquant :

$$j\ \mathbb{P}([X=j]) = (j-1)\ \mathbb{P}([X>j-1]) - j\ \mathbb{P}([X>j]) + \mathbb{P}([X>j-1])$$

Ainsi, par sommation et linéarité :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X=j]) &= \sum_{j=1}^{p} \Big((j-1)\ \mathbb{P}([X>j-1]) - j\ \mathbb{P}([X>j])\Big) + \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}([X>j-1]) \\
&= \cancel{(1-1)\ \mathbb{P}([X>1-1])} - p\ \mathbb{P}([X>p]) + \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}([X>j-1]) \\
&= -p\ \mathbb{P}([X>p]) + \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) \qquad \textit{(par décalage d'indice)}
\end{aligned}$$

□

2. a) On suppose que X admet une espérance $\mathbb{E}(X) = \mu$.

i. Justifier la convergence de la série de terme général $k\,\mathbb{P}([X = k])$.

Démonstration.
La variable aléatoire X est à valeur dans $\mathbb{N}^*$.
Ainsi, elle admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\ \mathbb{P}([X = n])$ est absolument convergente. Or, d'après l'énoncé, X admet une espérance.

On en déduit que la série de terme général $k\,\mathbb{P}([X = k])$ est absolument convergente et donc convergente.

□

ii. Montrer que :

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}([X = k]) = 0$$

Démonstration.

- La série de terme général $k\,\mathbb{P}([X = k])$ étant convergente, on obtient, par relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=1}^{p} k\ \mathbb{P}([X = k]) + \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k])$$

  Ainsi, en réordonnant :

$$\sum_{k=p+1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) - \sum_{k=1}^{p} k\ \mathbb{P}([X = k])$$

- Par passage à la limite dans cette égalité :

$$\begin{aligned}\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) &= \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) - \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} k\ \mathbb{P}([X = k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) - \sum_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) \ = \ 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}([X = k]) = 0}$$

Commentaire

Cette question est l'illustration d'un résultat classique du chapitre sur les séries.
Considérons une série $\sum u_n$ convergente et notons S sa somme.
On définit alors son reste d'ordre n par : $R_n = S - S_n$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n \ = \ \lim_{n\to+\infty} S - \lim_{n\to+\infty} S_n \ = \ S - S \ = \ 0$$

On retrouve le résultat précédent en remarquant : $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

□

iii. En déduire que :

$$\lim_{p\to+\infty} p\,\mathbb{P}([X>p]) = 0$$

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

- Comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$:

$$[X>p] \;=\; \bigcup_{k=p+1}^{+\infty} [X=k]$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X>p]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=p+1}^{+\infty} [X=k]\right) \\ &= \sum_{k=p+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) \qquad \textit{(car les événements } [X=k] \textit{ sont deux à deux incompatibles)}\end{aligned}$$

- On en déduit :

$$0 \;\leqslant\; p\,\mathbb{P}([X>p]) \;=\; \sum_{k=p+1}^{+\infty} p\,\mathbb{P}([X=k]) \;\leqslant\; \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}([X=k])$$

- Comme $\lim\limits_{p\to+\infty} 0 = 0 = \lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{k=p+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}([X=k])$, on en déduit, par le théorème d'encadrement que la suite $\left(\sum\limits_{k=p+1}^{+\infty} p\,\mathbb{P}([X=k])\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite nulle.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{p\to+\infty} p\,\mathbb{P}([X>p]) = 0.}$$

Commentaire

Cette question illustre de nouveau la méthode évoquée en question ***1.a)***. Le résultat porte sur la quantité $p\mathbb{P}([X>p])$. Pour l'obtenir, on commence par décomposer l'événement $[X>p]$ puis on applique la fonction $\mathbb{P}$.

□

iv. Montrer que la série de terme général $\mathbb{P}([X>j])$ converge.

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. D'après la question ***1.b)*** :

$$\sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) = \sum_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}([X=j]) - p\,\mathbb{P}([X>p])$$

La suite $\left(\sum\limits_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}([X=j])\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie d'après la question ***2.a)i.*** et il en est de même de la suite $\left(p\,\mathbb{P}([X>p])\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ d'après la question précédente.
Ainsi, la suite $\left(\sum\limits_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j])\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie.

$$\boxed{\text{La série de terme général } \mathbb{P}([X>j]) \text{ converge.}}$$

□

v. Montrer que : $\mu = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$.

Démonstration.
Par passage à la limite dans l'égalité précédente :

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X = j]) - \lim_{p\to+\infty} p\ \mathbb{P}([X > p]) \ = \ \mu - 0 \ = \ \mu$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mu = \lim_{p\to+\infty} \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j]).}$$

□

b) On suppose que $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$ converge.

i. Déterminer le sens de variation de la suite $(v_p)_{p\geqslant 1}$ définie par :

$$v_p = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j])$$

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$v_{p+1} - v_p \ = \ \sum_{j=0}^{p} \mathbb{P}([X > j]) - \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) \ = \ \mathbb{P}([X > p]) \ \geqslant \ 0$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_p)_{p\geqslant 1} \text{ est croissante.}}$$

Commentaire

Dans l'énoncé, on fait l'hypothèse : « $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$ converge ».
Cette formulation est malheureuse pour deux raisons :

- on ne peut écrire le symbole $\sum\limits_{j=0}^{+\infty}$ qu'après avoir démontré la convergence.
- il faut éviter la confusion entre la série $\sum \mathbb{P}([X > j])$ et la somme $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$.
  On rappelle que la somme est bien définie si la série converge.
  La somme étant un réel, il n'y a pas lieu de supposer sa convergence.

Il faut donc lire cette hypothèse comme elle est formulée ailleurs dans l'énoncé, à savoir : « On suppose que la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ converge ».

□

ii. Comparer $\sum\limits_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}([X = j])$ et $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$.

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question ***1.b)*** :

$$\sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X = j]) \ = \ \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) - p\ \mathbb{P}([X > p]) \ \leqslant \ \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) = v_p$$

- La série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ étant convergente, on obtient, par relation de Chasles :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j]) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) + \sum_{j=p}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$$

En réordonnant, on obtient :

$$\sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j]) - \sum_{j=p}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j]) \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X = j]) \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])}$$

Commentaire

- On a vu dans la question précédente que la suite $(v_p)_{p \geqslant 1}$ est croissante. On sait de plus qu'elle est convergente (c'est l'hypothèse faite en début de question ***2.a)***). L'esprit de l'énoncé semble donc être d'utiliser le résultat suivant :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} (v_n) \text{ croissante} \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \ \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant \ell}$$

- Le résultat encadré ci-dessus est lié à la notion de borne supérieure d'une suite, qui par définition, et sous réserve d'existence, est le plus petit des majorants de la suite. Si on connaît ce vocabulaire, on a accès à un énoncé plus précis du théorème de convergence monotone : toute suite croissante et majorée converge **vers sa borne supérieure**. On peut alors démontrer le résultat précédent :
  - × la suite (v_n) converge (vers ℓ) donc elle est majorée,
  - × la suite (v_n) est croissante.

  Ainsi, d'après le théorème ci-dessus, $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ et donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant \ell$.
- Cependant, la notion de borne supérieure n'apparaît pas explicitement dans le programme officiel. Il est toutefois possible de démontrer le résultat encadré sans utiliser la notion de borne supérieure. Détaillons cette approche.

  On suppose par l'absurde que :
  - × la suite (u_n) est croissante,
  - × la suite (u_n) converge vers ℓ,
  - × et que $\texttt{NON}(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell)$ est vérifiée.
    Autrement dit, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > \ell$.

  La suite (u_n) étant croissante : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant u_{n_0}$.

  Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $\ell \geqslant u_{n_0}$.
  En combinant avec l'inégalité de l'hypothèse, on a alors : $\ell \geqslant u_{n_0} > \ell$.
  Ce qui est absurde !

□

iii. En déduire que X admet une espérance.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum j\ \mathbb{P}([X = j])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

- La suite $\left(\sum\limits_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X=j])\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. En effet, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{j=1}^{p+1} j\ \mathbb{P}([X=j]) - \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X=j]) = (p+1)\ \mathbb{P}([X=p+1]) \ \geqslant\ 0$$

- Elle est de plus majorée par $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X>j])$ d'après la question précédente.

Ainsi, la suite $\left(\sum\limits_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X=j])\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

$$\boxed{\text{Ainsi, } X \text{ admet une espérance.}}$$

□

c) Conclure des questions précédentes que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}([X>j])$ converge.

Démonstration.

- En question ***2.a)***, on a démontré que si X admet une espérance, alors la série de terme général $\mathbb{P}([X>j])$ est convergente (résultat de la question ***2.a)iv.***).
  (on obtient de plus : $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X>j])$*)*
- En question ***2.b)***, on a démontré que si la série de terme général $\mathbb{P}([X>j])$ est convergente alors X admet une espérance (résultat de la question ***2.a)iii.***).
  (et dans ce cas, on peut à nouveau conclure par la question ***2.a)*** *:* $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X>j])$*)*

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet une espérance si et seulement si la série de terme général } \mathbb{P}([X>j]) \text{ converge.}}$$

□

3. On suppose dans cette question qu'il existe un réel α strictement positif tel que pour tout entier naturel j on ait :

$$\mathbb{P}([X>j]) = \frac{1}{(j+1)^\alpha} \qquad (*)$$

a) Légitimer que $(*)$ définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer que la suite $\Big(\mathbb{P}([X=j])\Big)_{j\in\mathbb{N}^*}$ définie par $(*)$ vérifie :

(i) $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X=j]) \geqslant 0$,

(ii) $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=j]) = 1$.

- Soit $j \in \mathbb{N}^*$. D'après la question ***1.a)*** :

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}([X=j]) & = & \mathbb{P}([X>j-1]) - \mathbb{P}([X>j]) \\ & = & \dfrac{1}{j^\alpha} - \dfrac{1}{(j+1)^\alpha} \ \geqslant\ 0\end{array}$$

  En effet, $j+1 \ \geqslant\ j$ et il suffit alors d'appliquer de part et d'autre la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$, décroissante sur $]0,+\infty[$ (car $\alpha > 0$).

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On reconnaît une somme télescopique :

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{j=1}^{p} \mathbb{P}([X=j]) & = & \sum\limits_{j=1}^{p} \left(\mathbb{P}([X>j-1]) - \mathbb{P}([X>j])\right) \\ & = & \mathbb{P}([X>0]) - \mathbb{P}([X>p]) \ = \ \dfrac{1}{1^\alpha} - \dfrac{1}{(p+1)^\alpha} \\ & = & 1 - \dfrac{1}{(p+1)^\alpha} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \end{array}$$

En effet, $(p+1)^\alpha \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $\alpha > 0$.

$$\boxed{\text{La relation } (*) \text{ définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans } \mathbb{N}^*.}$$

□

b) Montrer que X admet une espérance si et seulement si α est strictement supérieur à 1.

Démonstration.

- D'après la question ***2.c)***, la v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}([X>j])$ converge.
- $\times$ $\mathbb{P}([X>j]) = \dfrac{1}{(j+1)^\alpha} \underset{j\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{j^\alpha}$ $(\geqslant 0)$

  $\times$ La série $\sum\limits_{j\geqslant 1} \dfrac{1}{j^\alpha}$ est une série de Riemann d'exposant α.
  Elle est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

  Ainsi, d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série de terme général $\mathbb{P}([X>j])$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet une espérance si et seulement si } \alpha > 1.}$$

□

c) Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X=j]) = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}\right)$$

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Comme on l'a vu en question ***3.a)*** :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X=j]) & = & \mathbb{P}([X>j-1]) - \mathbb{P}([X>j]) \\ & = & \dfrac{1}{j^\alpha} - \dfrac{1}{(j+1)^\alpha} \\ & = & \dfrac{1}{j^\alpha}\left(1 - \dfrac{j^\alpha}{(j+1)^\alpha}\right) \end{array}$$

Il suffit alors de remarquer :

$$\frac{j^\alpha}{(j+1)^\alpha} = \left(\frac{j}{j+1}\right)^\alpha = \left(\frac{\cancel{j}}{\cancel{j}}\ \frac{1}{1+\frac{1}{j}}\right)^\alpha = \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}$$

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X=j]) = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}\right)}$$

□

d) i. Étudier les variations de $f : x \mapsto 1 - (1+x)^{-\alpha} - \alpha x$ sur $[0,1]$.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto (1+x)^{-\alpha}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ car c'est l'inverse de la fonction $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et qui ne s'annule pas sur $[0,1]$.
  Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
- Soit $x \in [0,1]$.
  $$f'(x) = \alpha\,(1+x)^{-\alpha-1} - \alpha = \alpha\left(\frac{1}{(1+x)^{\alpha+1}} - 1\right) = \alpha\,\frac{1-(1+x)^{\alpha+1}}{(1+x)^{\alpha+1}}$$
  Comme $x \geqslant 0$:
  $$1+x \geqslant 1$$
  $$\text{donc} \quad (1+x)^{\alpha+1} \geqslant 1 \qquad \textit{(par croissance de la fonction } x \mapsto x^{\alpha} \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)}$$
  Ainsi $(1+x)^{\alpha+1} > 0$ et $1-(1+x)^{\alpha+1} \leqslant 0$.
  On en déduit : $f'(x) \leqslant 0$ avec égalité seulement si $x = 0$.
- On en déduit le tableau de variation suivant.

x	0	1
Signe de $f'(x)$	$-$	
Variations de f	0 $\searrow$	$1-\alpha-\frac{1}{2^{\alpha}}$

□

ii. Montrer que pour tout entier naturel j non nul :
$$\mathbb{P}([X=j]) \leqslant \frac{\alpha}{j^{1+\alpha}}$$

Démonstration.

- D'après la question qui précède, la fonction f est décroissante sur $[0,1]$. Ainsi :
  $$\forall x \in [0,1],\ f(x) \leqslant f(0) = 0$$
- On en déduit :
  $$\forall x \in [0,1], \quad \underbrace{1-(1+x)^{-\alpha}}_{= 1 - \frac{1}{(1+x)^{\alpha}}} \leqslant \alpha\,x$$
- Soit $j \in \mathbb{N}^*$. En appliquant la formule à $x = \dfrac{1}{j} \in [0,1]$, on obtient :
  $$1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^{\alpha}} \leqslant \alpha\,\frac{1}{j}$$
  $$\text{donc} \quad \frac{1}{j^{\alpha}}\left(1-\frac{1}{(1+\frac{1}{j})^{\alpha}}\right) \leqslant \frac{\alpha}{j^{\alpha+1}} \qquad \textit{(car } \tfrac{1}{j^{\alpha}} \geqslant 0\textit{)}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall j \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X=j]) \leqslant \frac{\alpha}{j^{1+\alpha}}.}$$

□

e) Montrer, en utilisant le résultat de ***3.c)***, que :

$$\lim_{j\to+\infty} j^{\alpha+1}\,\mathbb{P}([X=j]) = \alpha$$

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto (1+x)^{-\alpha}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
  Elle admet donc un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0.
  Ainsi, il existe une fonction ε définie dans un voisinage de 0, telle que, au voisinage de 0 :

$$(1+x)^{-\alpha} \;=\; 1-\alpha\,x + x\,\varepsilon(x)$$

  où $\lim\limits_{x\to0} \varepsilon(x) = 0$.

- Comme $\frac{1}{j} \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut appliquer l'égalité précédente à $x = \frac{1}{j}$ pour j dans un voisinage de $+\infty$. On obtient :

$$\begin{array}{rrcl} & \left(1+\dfrac{1}{j}\right)^{-\alpha} & = & 1-\alpha\,\dfrac{1}{j}+\dfrac{1}{j}\,\varepsilon\left(\dfrac{1}{j}\right) \\ \text{ainsi} & 1-\left(1+\dfrac{1}{j}\right)^{-\alpha} & = & \alpha\,\dfrac{1}{j}-\dfrac{1}{j}\,\varepsilon\left(\dfrac{1}{j}\right) \\ \text{puis} & \dfrac{1}{j^\alpha}\left(1-\left(1+\dfrac{1}{j}\right)^{-\alpha}\right) & = & \dfrac{1}{j^\alpha}\left(\alpha\,\dfrac{1}{j}-\dfrac{1}{j}\,\varepsilon\left(\dfrac{1}{j}\right)\right) \\ \text{enfin} & j^{\alpha+1}\,\mathbb{P}([X=j]) & = & \alpha-\varepsilon\left(\dfrac{1}{j}\right) \end{array}$$

  (par multiplication de part et d'autre par $j^{\alpha+1}$)

- Enfin, par théorème de composition de limites :

$$\lim_{j\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{j}\right) \;=\; \lim_{x\to0} \varepsilon\,(x) = 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } \lim_{j\to+\infty} j^{\alpha+1}\,\mathbb{P}([X=j]) = \alpha.}$$

Commentaire

- À l'aide de l'inégalité de la question précédente, on obtient :

$$\forall j\in\mathbb{N}^*,\ j^{\alpha+1}\,\mathbb{P}([X=j]) \;\leqslant\; \alpha$$

  Il est donc assez naturel d'envisager un raisonnement par encadrement. Il faudrait pour cela tenter d'obtenir le même type d'inégalité à gauche. L'énoncé écarte cette possibilité : le concepteur renvoie à la question ***3.c)*** et non pas à la question ***3.d)***.

- Rappelons l'extrait du programme officiel concernant les développements limités : « Les seuls développements exigibles concernent les fonctions $x\mapsto \mathrm{e}^x$, $x\mapsto \ln(1+x)$, $x\mapsto(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0, et à l'ordre 1 ou 2 uniquement. Aucune connaissance (somme, produit, composition …) concernant les techniques de calcul des développements limités n'est exigible. »
  On préfère donc, dans la démonstration ci-dessus, revenir à la définition de base de la notion de développement limité à l'aide d'une fonction ε. Ceci permet de s'affranchir des manipulations des $\underset{x\to0}{o}(\dots)$ et $\underset{j\to+\infty}{o}(\dots)$ et de s'assurer que la démonstration est bien conforme aux attendus du programme.

□

f) Montrer que X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une variance si et seulement si la série $\sum j^2\ \mathbb{P}([X=j])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- D'après la question précédente : $\lim\limits_{j\to+\infty} j^{\alpha+1}\ \mathbb{P}([X=j]) = \alpha \neq 0$. On en déduit :

$$j^{\alpha+1}\ \mathbb{P}([X=j]) \underset{j\to+\infty}{\sim} \alpha$$

$$\text{donc} \quad j^2\ \mathbb{P}([X=j]) \underset{j\to+\infty}{\sim} \alpha\ j^{1-\alpha} = \alpha\ \frac{1}{j^{\alpha-1}} \quad \textit{(par multiplication par } j^{1-\alpha} \neq 0\textit{)}$$

- × $j^2\ \mathbb{P}([X=j]) = \alpha\ \dfrac{1}{j^{\alpha-1}}\ (\geqslant 0)$

  × La série $\sum\limits_{j\geqslant 1} \dfrac{1}{j^{\alpha-1}}$ est une série de Riemann d'exposant $\alpha - 1$.
  Elle est donc convergente si et seulement si $\alpha - 1 > 1$ *i.e.* si $\alpha > 2$.

  Ainsi, par le théorème d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum j^2\ \mathbb{P}([X=j])$ est convergente si et seulement si $\alpha > 2$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } X \text{ admet une variance si et seulement si } \alpha > 2.}$$ □

Deuxième partie : Étude de la probabilité de panne un jour donné.

Dans cette deuxième partie, on suppose donnée une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\geqslant 1}$ mutuellement indépendantes et de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Pour tout entier i non nul, X_i représente la durée de vie en jours du $i^{\text{ème}}$ composant en fonctionnement. Soit k un entier naturel non nul. On note $T_k = X_1 + ... + X_k$. T_k représente donc le jour où le $k^{\text{ème}}$ composant tombe en panne. On fixe un entier naturel n non nul représentant un jour donné et on considère l'événement A_n : « le composant en place le jour n tombe en panne » c'est-à-dire A_n : « il existe k entier naturel non nul tel que $T_k = n$ », et on se propose d'étudier $\mathbb{P}(A_n)$.

4. Pour tout entier naturel non nul j, on note $p_j = \mathbb{P}([X_1 = j])$ et $u_j = \mathbb{P}(A_j)$. On suppose que pour tout entier naturel non nul j, on a $p_j \neq 0$. On pose de plus par convention $u_0 = 1$.

a) Montrer que : $u_1 = p_1$.

Démonstration.

- L'événement $[X_1 = 1]$ est réalisé si le premier composant en place tombe en panne le jour 1.
  L'événement A_1 est réalisé si le composant en place le jour 1 tombe en panne lors de ce jour.
- Les variables X_i sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Ceci signifie en particulier que chaque composant à une durée de vie d'au moins un jour. Ainsi, le seul composant en place le jour 1 est le premier composant. On en déduit : $[X_1 = 1] \ = \ A_1$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } p_1 = \mathbb{P}([X_1 = 1]) = \mathbb{P}(A_1) = u_1.}$$

Commentaire

- Encore une fois, le raisonnement a lieu initialement sur les événements.
  On n'applique la fonction $\mathbb{P}$ que dans un deuxième temps.
- Il est fortement conseillé de prendre le temps de lire scrupuleusement l'énoncé. La méthode de remplacement des composants est énoncée seulement en début de problème. Il faut donc se reporter au paragraphe introductif lors de la résolution de cette deuxième partie. Par ailleurs, l'information concernant la durée de vie de chaque composant n'est pas explicitement mentionnée : c'est un résultat à extraire de la définition des v.a.r. X_i. □

b) i. Montrer que : $A_2 = [X_1 = 2] \cup ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$.

Démonstration.
Raisonnons par double inclusion.

($\subset$) Supposons que l'événement A_2 est réalisé. Cela signifie que le composant en place le jour 2 tombe en panne lors de ce jour. Il reste alors à déterminer quel composant est en place lors du deuxième jour. Deux cas se présentent :

- × soit le premier composant est tombé en panne après un jour.
Dans ce cas, c'est le deuxième composant qui était en place lors du deuxième jour.
S'il tombe en panne en jour 2 c'est qu'il est resté opérationnel un jour.
Dans ce cas, l'événement $[X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]$ est réalisé.
- × soit le premier composant est resté en vie strictement plus d'un jour.
Dans ce cas, c'est ce composant qui est en place lors du deuxième jour.
S'il tombe en panne en jour 2 c'est qu'il est resté opérationnel deux jours.
Dans ce cas, l'événement $[X_1 = 2]$ est réalisé.

Ainsi, l'événement $[X_1 = 2] \cup ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$ est réalisé.

($\supset$) Supposons que l'événement $[X_1 = 2] \cup ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$ est réalisé.
Ainsi, soit $[X_1 = 2]$ est réalisé et alors le premier composant a une durée de vie de 2 jours ; soit $[X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]$ est réalisé et alors les deux premiers composants ont duré chacun un jour. Dans les deux cas, le composant en place le jour 2 tombe en panne : A_2 est réalisé.

$$\boxed{\text{On en conclut : } A_2 = [X_1 = 2] \cup ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]).}$$

Commentaire

- Par définition, un événement est un ensemble. Démontrer l'égalité de deux ensembles c'est démontrer que tout élément du premier ensemble est dans le second et inversement. Ou encore qu'un élément est dans le premier ensemble si et seulement si il est aussi dans le second.
- En terme d'événement, cela signifie que le premier événement est réalisé (il existe ω réalisant cet événement *i.e.* il existe ω appartenant à cet événement) si et seulement si le second événement est réalisé (l'élément ω précédent est aussi élément de cet événement).

□

ii. En déduire u_2 en fonction de p_1 et p_2.

Démonstration.

- Les événements $[X_1 = 2]$ et $[X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]$ sont incompatibles. En effet :
$$[X_1 = 2] \cap ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = ([X_1 = 2] \cap [X_1 = 1]) \cap [X_2 = 1] = \varnothing \cap [X_2 = 1] = \varnothing$$
- Ainsi :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_2) &= \mathbb{P}([X_1 = 2] \cup ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])) \\
&= \mathbb{P}([X_1 = 2]) + \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) && \textit{(par incompatibilité des événements considérés)} \\
&= \mathbb{P}([X_1 = 2]) + \mathbb{P}([X_1 = 1]) \times \mathbb{P}([X_2 = 1]) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \mathbb{P}([X_1 = 2]) + \mathbb{P}([X_1 = 1]) \times \mathbb{P}([X_1 = 1]) = p_2 + p_1^2 && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ ont même loi)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } u_2 = p_2 + p_1^2.}$$

□

c) Pour tout entier naturel i, on pose $\tilde{X}_i = X_{i+1}$.

i. Montrer que les variables $\tilde{X}_i$ sont mutuellement indépendantes, indépendantes de X_1 et de même loi que X_1.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, la suite $(X_i)_{i\geqslant 1}$ est une suite de variables mutuellement indépendantes. Il en est donc de même de la suite $(X_i)_{i\geqslant 2}$, qui n'est autre que la suite $(\tilde{X}_i)_{i\geqslant 1}$.

Les variables $\tilde{X}_i$ sont mutuellement indépendantes.

- Par ailleurs, par le lemme des coalitions, toute variable $\tilde{X}_i$ (pour $i \geqslant 1$) est indépendante de la variable X_1.

- Enfin, la suite $(X_i)_{i\geqslant 1}$ est une suite de variables possédant toutes la même loi, celle de X_1. Il en est donc de même de la suite $(X_i)_{i\geqslant 2}$, qui n'est autre que la suite $(\tilde{X}_i)_{i\geqslant 1}$.

Les variables $\tilde{X}_i$ ont même loi que X_1.

Commentaire

Il semble que l'énoncé comporte une petite coquille. Il aurait fallu écrire « tout entier naturel **non nul** i ». Cela pose un problème pour cette question : en effet, la variable $\tilde{X}_0 = X_1$ n'est pas indépendante de X_1.

□

ii. Soit k un entier naturel non nul strictement inférieur à n. Montrer que :

$$A_n \cap [X_1 = k] = [X_1 = k] \ \cap \ \bigcup_{j\geqslant 1} \left[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\right]$$

Démonstration.

- D'après l'énoncé, A_n est l'événement « il existe k entier naturel non nul tel que $T_k = n$ ». Ainsi :

$$\begin{aligned} A_n &= \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} [T_j = n] \\ &= \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} [X_1 + \ldots + X_j = n] \\ &= [X_1 = n] \ \cup \ \bigcup_{j\geqslant 2} [X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n] \end{aligned}$$

- On en déduit, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\begin{aligned} & [X_1 = k] \ \cap \ A_n \\ = \ & [X_1 = k] \ \cap \ \left([X_1 = n] \ \cup \ \bigcup_{j\geqslant 2} [X_1 + \ldots + X_j = n]\right) \\ = \ & [X_1 = k] \cap [X_1 = n] \ \cup \ \bigcup_{j\geqslant 2} \Big([X_1 = k] \ \cap \ [X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n]\Big) \quad \textit{(par distributivité de } \cap \textit{ par rapport à } \cup\textit{)} \\ = \ & \varnothing \ \cup \ \bigcup_{j\geqslant 2} \Big([X_1 = k] \ \cap \ [k + X_2 + \ldots + X_j = n]\Big) \end{aligned}$$

En effet, comme $k < n$, la v.a.r. X_1 ne peut prendre à la fois les valeurs distinctes k et à n.

9782340-026636_001_784.indd 185 30/07/2018 09:52

- Enfin :

$$\begin{aligned}
& \bigcup_{j\geqslant 2} \Big([X_1 = k] \ \cap \ [k + X_2 + \ldots + X_j = n] \Big) \\
= \ & [X_1 = k] \ \cap \ \bigcup_{j\geqslant 2} \Big([X_2 + \ldots + X_j = n-k] \Big) && \textit{(par distributivité de } \cap \textit{ par rapport à } \cup\textit{)} \\
= \ & [X_1 = k] \ \cap \ \bigcup_{j\geqslant 1} \Big([X_2 + \ldots + X_{j+1} = n-k] \Big) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & [X_1 = k] \ \cap \ \bigcup_{j\geqslant 1} \Big(\Big[\tilde{X}_1 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big] \Big) && \textit{(par définition des } \tilde{X}_i\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in [\![1, n-1]\!], \ \ A_n \cap [X_1 = k] = [X_1 = k] \ \cap \ \bigcup_{j\geqslant 1} \Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big]}$$

Commentaire

- Dans la démonstration, on a fait apparaître l'événement A_n sous la forme :

$$A_n = \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} [T_j = n]$$

  En réalité, on aurait pu écrire : $A_n = \bigcup\limits_{j=1}^{n} [T_j = n]$.
  On constate en effet que T_j prend ses valeurs dans $[\![j, +\infty[\![$ (le jour où $j^{\text{ème}}$ composant tombe en panne est forcément plus grand que le nombre j de composants) puisque chacune des variables X_i vaut 1 au minimum. Ainsi, pour tout $j \geqslant n+1$, $[T_j = n] = \varnothing$.
- On travaille donc en réalité sur une réunion finie. Ce point de détail est signalé ici pour la bonne compréhension des objets sur lesquels on travaille. Toutefois, il n'a pas à être mentionné dans une copie : ne pas préciser la borne haute de la réunion permet de simplifier les écritures suivantes.

$\square$

iii. En déduire que pour tout entier naturel k non nul strictement inférieur à n :

$$\mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n-k})$$

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

- D'après l'énoncé, $p_k = \mathbb{P}([X_1 = k]) \neq 0$. Ainsi, $\mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n)$ est bien défini et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) &= \frac{\mathbb{P}([X_1 = k] \ \cap \ A_n)}{\mathbb{P}([X_1 = k])} \\
&= \frac{\mathbb{P}\Big([X_1 = k] \ \cap \ \bigcup_{j\geqslant 1} \Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big] \Big)}{\mathbb{P}([X_1 = k])} \\
&= \frac{\mathbb{P}\Big(\bigcup_{j\geqslant 1} [X_1 = k] \ \cap \ \Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big] \Big)}{\mathbb{P}([X_1 = k])}
\end{aligned}$$

  La dernière égalité est obtenue par distributivité de $\cap$ sur $\cup$.

9782340-026636_001_784.indd 186 30/07/2018 09:52

- On s'intéresse tout d'abord au numérateur.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\bigcup_{j\geqslant 1} [X_1 = k] \ \cap \ \Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big]\Big) \\
= \ & \sum_{j\geqslant 1} \mathbb{P}\Big([X_1 = k] \ \cap \ \Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big]\Big) && \textit{(par réunion d'événements 2 à 2 incompatibles)} \\
= \ & \sum_{j\geqslant 1} \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}\Big(\Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big]\Big) && \textit{(par indépendance)}
\end{aligned}$$

En effet, par le lemme des coalitions, pour tout $j \geqslant 1$, les v.a.r. X_1 et $\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j$ sont indépendantes. On en déduit que les événements $[X_1 = k]$ et $\Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big]$ sont indépendants.

- Puis :

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\geqslant 1} \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}\Big(\Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big]\Big) \\
= \ & \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \sum_{j\geqslant 1} \mathbb{P}\Big(\Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big]\Big) \\
= \ & \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \sum_{j\geqslant 1} \mathbb{P}\Big([X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n-k]\Big)
\end{aligned}$$

En effet, les v.a.r. $\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j$ et $X_1 + X_2 + \ldots + X_j$ ont même loi puisque ce sont des sommes d'un même nombre de v.a.r. indépendantes ayant toutes la même loi.

- Enfin :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) \ &= \ \frac{\cancel{\mathbb{P}([X_1 = k])} \ \times \ \sum_{j\geqslant 1} \mathbb{P}\Big([X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n-k]\Big)}{\cancel{\mathbb{P}([X_1 = k])}} \\
&= \ \sum_{j\geqslant 1} \mathbb{P}\Big([X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n-k]\Big) \\
&= \ \mathbb{P}\Big(\bigcup_{j\geqslant 1} [X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n-k]\Big) && \textit{(par réunion d'événements 2 à 2 incompatibles)} \\
&= \ \mathbb{P}(A_{n-k})
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n-k}).}$$

□

d) Montrer que :

$$u_n = u_{n-1}\ p_1 + \ldots + u_0\ p_n$$

Démonstration.

- La famille $\big([X_1 = k]\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) \ &= \ \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap A_n) \\
&= \ \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap A_n) + \mathbb{P}([X_1 = n] \cap A_n) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap A_n)
\end{aligned}$$

- Or, pour tout $k \geqslant n+1$, on a : $[X_1 = k] \cap A_n = \varnothing$.
  En effet si les événements $[X_1 = k]$ et A_n sont réalisés alors le premier composant :
  × tombe en panne le jour $k \geqslant n+1$ (car $[X_1 = k]$ est réalisé).
  × est le composant en place le jour n. Et il tombe donc en panne le jour n (car A_n est réalisé).
  Ces deux événements sont donc bien incompatibles.

  $$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \geqslant n+1 : \mathbb{P}([X_1 = k] \cap A_n) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0.}$$

- D'autre part : $[X_1 = n] \subset A_n$.
  En effet, si $[X_1 = n]$ est réalisé alors le premier composant a une durée de vie de n jours. Il est donc en place le jour n et tombe alors en panne ce jour. Ce qui signifie que A_n est réalisé.

  $$\boxed{\text{Comme } [X_1 = n] \subset A_n \text{ alors } [X_1 = n] \cap A_n = [X_1 = n].}$$

- On déduit de ce qui précède :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}(A_n) & = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap A_n) + \mathbb{P}([X_1 = n]) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) + \mathbb{P}([X_1 = n]) & \textit{(valide car pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}([X_1 = k]) \neq 0) \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}(A_{n-k}) + \mathbb{P}([X_1 = n]) & \textit{(d'après la question précédente)} \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \ u_{n-k} + p_n \ = \ u_{n-1} \ p_1 + \ldots + u_1 \ p_{n-1} + p_n &
\end{array}$$

  On rappelle que $u_0 = 1$ par convention.

  $$\boxed{\text{On en conclut : } u_n = u_{n-1} \ p_1 + \ldots + u_1 \ p_{n-1} + u_0 \ p_n.}$$

Commentaire

La propriété de la question précédente (***4.c)iii***) a été démontrée pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$. On ne peut donc l'utiliser que pour un entier $k \in [\![1, n-1]\!]$. C'est une évidence qu'il convient toutefois de rappeler car elle est trop régulièrement ignorée par les candidats. Lorsque l'on souhaite utiliser un résultat précédemment démontré ou admis, il faut scrupuleusement vérifier que l'on est dans les conditions d'application de ce résultat.

□

e) En **Scilab**, soit $P = [p_1, p_2, ..., p_n]$ le vecteur ligne tel que $P(j) = p_j$ pour j dans $[\![1, n]\!]$.
Écrire un programme en **Scilab** qui calcule u_n à partir de P.

Démonstration.

- La suite (u_n) est une suite récurrente dont le $n^{\text{ème}}$ terme dépend de tous les précédents. Pour calculer le terme d'indice n, il faut avoir accès aux termes d'indice $0, \ldots, n-1$ de la suite.
  Il est donc nécessaire de créer un vecteur `U` permettant de stocker, au fur et à mesure du calcul, toutes ces valeurs.
- Pour calculer chaque coefficient de `U`, on se sert de la formule démontrée dans la question précédente :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \ u_k \ = \ \sum\limits_{j=1}^{k} u_{k-j} \ p_j \end{array} \right.$$

  On commence par stocker dans `U` l'élément u_0. L'élément u_k (stocké en $k+1^{\text{ème}}$ case de `U`) est déterminé par un calcul de somme (on met à jour une variable auxiliaire `S`).

- Il faut faire attention aux indices : l'élément u_0 d'indice 0 est stocké en position 1 du vecteur `U` et ce décalage est présent pour toutes les valeurs stockées dans `U`.
- Enfin, il faut noter que le programme prend en paramètre le vecteur `P` et que c'est ce vecteur qui doit fournir l'entier n, indice de l'élément u_n recherché. Cet entier n n'est autre que la longueur du vecteur `P`.
- On obtient le programme suivant.

```
function res = calcSuiteU(P)
    [m, n] = size(P) // ou n = length(P)
    U = zeros(1, n+1) // on crée un vecteur contenant n+1 zéros
    U(1) = 1 // la première case contient la valeur de u-0
    for k = 1:n
        S = 0 // variable auxiliaire
        for j = 1:k
            S = S + U(k+1-j) * P(j)
        end
        U(k+1) = S
    end
    res = U(n+1) // on renvoie u-n
endfunction
```

Commentaire

- Afin de répondre à cette question, on peut aussi observer :

$$u_{k-1}\,p_1 + \ldots + u_0\,p_k = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \ldots & u_{k-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_k \\ p_{k-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix}$$

- On se sert alors des fonctionnalités **Scilab** sur les matrices afin de répondre à cette question.
  La matrice $\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \ldots & u_{k-1} \end{pmatrix}$ est obtenue à l'aide de l'appel : `U(1:i)`.
  La matrice $\begin{pmatrix} p_k \\ p_{k-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix}$ est obtenue par l'instruction : `(P(i:-1:1))'`.

  (on rappelle que l'apostrophe permet d'obtenir la transposée d'une matrice)
- On obtient le programme suivant.

```
function res = calcSuiteU(P)
    [m, n] = size(P) // ou n = length(P)
    U = zeros(1, n+1) // on crée un vecteur contenant n+1 zéros
    U(1) = 1 // la première case contient la valeur de u-0
    for i = 1:n
        U(i+1) = U(1:i) * (P(i:-1:1))'
    end
    res = U(n+1)
endfunction
```

5. Soit λ un réel appartenant à $]0,1[$.

Dans cette question, on suppose que X_1 suit la loi géométrique de paramètre λ.
Pour tout entier naturel j non nul, on a donc $\mathbb{P}([X_1 = j]) = \lambda(1-\lambda)^{j-1}$.

a) Calculer $\mathbb{P}([X_1 > k])$ pour tout entier naturel k non nul.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- On remarque tout d'abord : $\mathbb{P}([X_1 > k]) \ = \ 1 - \mathbb{P}\Big(\overline{[X_1 > k]}\Big) \ = \ 1 - \mathbb{P}([X_1 \leqslant k])$.
- Par ailleurs, comme $X_1(\Omega) = [\![0, +\infty[\![$, alors : $[X_1 \leqslant k] \ = \ \bigcup\limits_{i=1}^{k} [X_1 = i]$.
- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_1 \leqslant k]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} [X_1 = i]\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}([X_1 = i]) && \textit{(par incompatibilité)} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \lambda\,(1-\lambda)^{i-1} \\
&= \lambda \sum_{i=0}^{k-1} (1-\lambda)^{i} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \lambda\,\frac{1-(1-\lambda)^k}{1-(1-\lambda)} && \textit{(avec } 1-\lambda \neq 1\textit{)} \\
&= 1-(1-\lambda)^k
\end{aligned}$$

Enfin : $\mathbb{P}([X_1 > k]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([X_1 \leqslant k]) \ = \ 1 - (1-(1-\lambda)^k) \ = \ (1-\lambda)^k$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X_1 > k]) \ = \ (1-\lambda)^k}$$

Commentaire

On peut aussi raisonner en partant de l'égalité : $[X_1 > k] = \bigcup\limits_{i=k+1}^{+\infty} [X_1 = i]$.
Et, avec les arguments précédents :
$\mathbb{P}([X_1 > k]) = \sum\limits_{i=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i]) = \sum\limits_{i=k+1}^{+\infty} \lambda(1-\lambda)^{i-1} = \lambda \sum\limits_{i=k}^{+\infty} \lambda(1-\lambda)^{i} = \lambda\,\dfrac{(1-\lambda)^k}{1-(1-\lambda)} = (1-\lambda)^k$

□

b) Calculer $\mathbb{P}_{[X_1 > k]}([X_1 = k+1])$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[X_1 > k]}([X_1 = k+1]) &= \frac{\mathbb{P}([X_1 > k] \ \cap \ [X_1 = k+1])}{\mathbb{P}([X_1 > k])} && \textit{(par définition avec } \mathbb{P}([X_1 > k]) \neq 0\textit{)} \\
&= \frac{\mathbb{P}([X_1 = k+1])}{\mathbb{P}([X_1 > k])} && \textit{(car comme } X_1 = k+1 \ \Rightarrow \ X_1 > k \textit{ alors } [X_1 = k+1] \subseteq [X_1 > k]\textit{)} \\
&= \frac{\lambda\,(1-\lambda)^k}{(1-\lambda)^k} = \lambda && \textit{(d'après la question précédente)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in \mathbb{N}^* : \mathbb{P}_{[X_1 > k]}([X_1 = k+1]) = \lambda = \mathbb{P}([X_1 = 1]).}$$

Commentaire

- Cette question est à rapprocher de la propriété classique qui énonce :

$$\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}_{[X_1 > k]}([X_1 > k + \ell]) = \mathbb{P}([X_1 > \ell])$$

On dit alors que la loi géométrique est à perte de mémoire (la propriété $X_1 > k$ est oubliée, seul le délai est retenu) ou encore que la loi géométrique est **sans mémoire**.
- Dans cet exercice, X_1 compte la durée de fonctionnement d'un composant avant une panne. Cette propriété signifie que la durée de vie restante du composant est indépendante de la durée de vie écoulée de ce composant (période durant laquelle il a fonctionné sans tomber en panne). Autrement dit, il n'y a pas de vieillissement ou encore d'usure du composant électronique considéré. C'est un cas assez fréquent en réalité : on peut considérer que les diodes, transistors, résistances, condensateurs sont sans usure puisque leur usure ne débute que bien après la fin de vie de l'objet dans lequel ils sont installés.
- C'est pourquoi la durée de vie d'un composant est souvent modélisée par une v.a.r. qui suit loi géométrique (seule loi discrète à perte de mémoire) ou par une v.a.r. qui suit une loi exponentielle (seule loi de v.a.r. à densité à perte de mémoire).

□

c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $\mathbb{P}(A_n) = \lambda$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence forte : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \mathbb{P}(A_n) = \lambda$.

- **Initialisation** :
D'après la question ***4.a)*** : $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}([X_1 = 1]) = \lambda\ (1-\lambda)^0 = \lambda$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(1), \ldots, \mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\mathbb{P}(A_{n+1}) = \lambda$). Alors :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n\ p_1 + \ldots + u_0\ p_{n+1} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{4.d)}}\textit{)} \\
&= u_n\ p_1 + \ldots + u_1\ p_n + u_0\ p_{n+1} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} u_{n+1-k}\ p_k\right) + p_{n+1} && \textit{(car } u_0 = 1 \textit{ par convention)} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_{n+1-k})\ \mathbb{P}([X_1 = k])\right) + \mathbb{P}([X_1 = n+1]) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda \times \lambda\ (1-\lambda)^{k-1}\right) + \lambda\ (1-\lambda)^n && \textit{(par hypothèses de récurrence et définition de la loi géométrique)}
\end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda \times \lambda\ (1-\lambda)^{k-1} = \lambda^2 \sum_{k=0}^{n-1} (1-\lambda)^k = \lambda^{\cancel{2}}\ \frac{1-(1-\lambda)^n}{\cancel{1-(1-\lambda)}} = \lambda\ \left(1-(1-\lambda)^n\right)$$

On en déduit :

$$u_{n+1} = \lambda\ \left(1-(1-\lambda)^n\right) + \lambda\ (1-\lambda)^n = \lambda - \cancel{\lambda\ (1-\lambda)^n} + \cancel{\lambda\ (1-\lambda)^n} = \lambda$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n).}$$

Commentaire

Il était aussi possible d'opérer de manière directe. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{rcll} u_n & = & u_{n-1}\, p_1 + \ldots + u_0\, p_n & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{4.d)}}\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} u_{n-k}\, p_k & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} u_{n-k}\, \mathbb{P}([X_1 = k]) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} u_{n-k}\, \lambda\, (1-\lambda)^{k-1} & \\ & = & u_{n-1}\, \lambda + \sum\limits_{k=2}^{n} u_{n-k}\, \lambda\, (1-\lambda)^{k-1} & \\ & = & u_{n-1}\, \lambda + \sum\limits_{k=1}^{n-1} u_{n-1-k}\, \lambda\, (1-\lambda)^{k} & \textit{(par décalage d'indice)} \\ & = & \lambda\, u_{n-1} + (1-\lambda) \sum\limits_{k=1}^{n-1} u_{n-1-k}\, \lambda\, (1-\lambda)^{k-1} & \\ & = & \lambda\, u_{n-1} + (1-\lambda) \sum\limits_{k=1}^{n-1} u_{n-1-k}\, p_k & \\ & = & \lambda\, u_{n-1} + (1-\lambda)\, u_{n-1} \ = \ u_{n-1} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{4.d)}}\textit{)} \end{array}$$

Ainsi, la suite (u_n) est constante.
Comme de plus $\mathbb{P}(A_1) = \lambda$, on en conclut : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n) = \lambda$.

□

6. On suppose dans cette question que p_1 vérifie $0 < p_1 < 1$ et que $p_2 = 1 - p_1$.
Pour simplifier, on posera $p = p_1 = 1 - p_2$.

a) Que vaut p_i pour i supérieur ou égal à 3 ?

Démonstration.

- La famille $\big([X_1 = k]\big)_{k \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements. On en déduit :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k]) = 1$$

Or :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k = p_1 + p_2 + \sum_{k=3}^{+\infty} p_k = 1 + \sum_{k=3}^{+\infty} p_k$$

- On en déduit : $\sum\limits_{k=3}^{+\infty} p_k = 0$. Or, pour tout $k \geqslant 3$, $p_k \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{On en conclut que, pour tout } k \geqslant 3,\ p_k = 0.}$$

□

9782340-026636_001_784.indd 192 30/07/2018 09:52

b) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- D'après la question ***4.d)*** :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n} u_{n-k}\ p_k \\ &= u_{n-1}\ p_1 + u_{n-2}\ p_2 + \sum_{k=3}^{n} u_{n-k}\ p_k && \textit{(découpage valide car } n \geqslant 2\textit{)} \\ &= u_{n-1}\ p_1 + u_{n-2}\ p_2 && \textit{(car : } \forall k \geqslant 3,\ p_k = 0\textit{)} \\ &= u_{n-1}\ p + u_{n-2}\ (1-p) \end{aligned}$$

- Il suffit alors de remarquer :

$$M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p\ u_{n-1} + (1-p)\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}}$$

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

(la deuxième somme est nulle si $p = n$)
où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.

- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 1$ et $p = 2$.
L'argument $n \geqslant 2$ est donc nécessaire pour découper la somme.

□

c) i. Diagonaliser la matrice M.

Démonstration.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Rappelons :

$$\lambda \text{ est valeur propre de } M \ \Leftrightarrow\ M - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible}$$

- Or :

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda\ I_2) &= \det\left(\begin{pmatrix} p-\lambda & 1-p \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= -\lambda\ (p-\lambda) - (1-p) \\ &= \lambda^2 - p\ \lambda - (1-p) \\ &= (\lambda - 1)\ (\lambda + (1-p)) && \textit{(car 1 est racine évidente)} \end{aligned}$$

Ainsi : $\det(M - \lambda\ I_2) = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda = 1$ `OU` $\lambda = -(1-p) = p - 1$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{p-1, 1\}}$$

- La matrice M est carrée d'ordre 2 et admet deux valeurs propres distinctes 1 et $p-1$ ($p-1 \neq 1$ car $p \neq 2$). Elle est donc diagonalisable.

- Déterminons alors $E_1(M)$. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} U \in E_1(M) & \Longleftrightarrow & (M - I_2)\ U = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} (p-1)\ x & + & (1-p)\ y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{p-1} L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_1(M) & = & \{U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid (M - I_2)\ U = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid x = y\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

$$\boxed{E_1(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

- Déterminons alors $E_{-(1-p)}(M)$. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} U \in E_{-(1-p)}(M) & \Longleftrightarrow & (M + (1-p)\ I_2)\ U = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & (1-p)\ y & = & 0 \\ x & + & (1-p)\ y & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_{-(1-p)}(M) & = & \{U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid (M + (1-p)\ I_2)\ U = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid x = -(1-p)\ y\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} -(1-p)\ y \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{y \cdot \begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

$$\boxed{E_{-(1-p)}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

- En conclusion, la matrice M est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-1 \end{pmatrix}$.
Autrement dit, il existe $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$M = PDP^{-1}$$

- La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est obtenue comme concaténation d'une base de vecteurs propres de $E_1(M)$ et d'une base de vecteurs propres de $E_{-(1-p)}(M)$.
  Enfin, d'après la formule d'inversion des matrices carrées d'ordre 2 :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

□

ii. Montrer que :

$$M^{n-1} = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration.
Avec les notations de la question précédente : $M = PDP^{-1}$.
Ainsi, par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1}$. D'où :

$$\begin{aligned}
M^{n-1} &= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (p-1)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & (p-1)^n \\ 1 & (p-1)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1-(p-1)^n & 1-p+(p-1)^n \\ 1-(p-1)^{n-1} & 1-p+(p-1)^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2-p} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(p-1)^n & (p-1)^n \\ -(p-1)^{n-1} & (p-1)^{n-1} \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2-p} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + (p-1)^{n-1} \begin{pmatrix} -(p-1) & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } M^{n-1} = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

d) i. Exprimer u_n en fonction de p et de n.

Démonstration.

- D'après la question ***6.b)***, pour tout $n \geqslant 2$: $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$.
- On obtient ainsi, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = M^2 \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ u_{n-3} \end{pmatrix} = \ldots = M^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$$

  (on le démontre rigoureusement par une récurrence immédiate)
- D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} -p^2+2p-1 \\ -p+1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- Et ainsi :

$$u_n \;=\; \frac{1}{2-p}\;\left(1-(p-1)^{n-1}(p-1)^2\right) \;=\; \frac{1}{2-p}\;\left(1-(p-1)^{n+1}\right)$$

$$\boxed{u_n \;=\; \frac{1}{2-p}\;\left(1-(p-1)^{n+1}\right)}$$

□

ii. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $0 < p < 1$. On en déduit : $-1 < p-1 < 0$. Ainsi : $|p-1| < 1$.
- On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (p-1)^{n+1} = 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente, de limite } \frac{1}{2-p}.}$$

□

Troisième partie : Étude de la durée de fonctionnement.

Comme dans la partie précédente, on suppose donnée une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\geqslant 1}$ indépendantes et de même loi, telle que pour tout entier i non nul, X_i représente la durée de vie en jours du i-ème composant en fonctionnement.
Soit k un entier naturel non nul. On étudie dans cette partie la durée de fonctionnement prévisible du système si on a k composants à disposition (y compris celui installé au départ).
On notera toujours $T_k = X_1 + ... + X_k$.
On suppose dans cette partie qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que pour tout entier naturel j on ait :

$$\mathbb{P}\left([X_1 > j]\right) = \frac{1}{(j+1)^\alpha}$$

En particulier, dans toute cette partie, X_1 admet une espérance, on l'on notera $\mu = \mathbb{E}(X_1)$.

7. Que vaut $\mathbb{E}(T_k)$?

Démonstration.

- La v.a.r. T_k admet une espérance comme somme de v.a.r. qui admettent une espérance.
- De plus :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(T_K) & = & \mathbb{E}\left(\sum\limits_{i=1}^{k} X_i\right) & \\
 & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{E}(X_i) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
 & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{E}(X_1) & \textit{(car les v.a.r. } X_i \textit{ ont même loi)} \\
 & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mu \;=\; k\mu &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T_k) = k\mu}$$

□

8. On suppose, **dans cette question**, que α est strictement supérieur à 2. La variable aléatoire X_1 admet donc une variance σ^2.

a) Calculer $\mathbb{V}(T_k)$.

Démonstration.

- La v.a.r. T_k admet une variance comme somme de v.a.r. indépendantes qui admettent une variance.
- De plus :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(T_K) & = & \mathbb{V}\big(\sum\limits_{i=1}^{k} X_i\big) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{V}(X_i) & \textit{(car les v.a.r. } X_i \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{V}(X_1) & \textit{(car les v.a.r. } X_i \textit{ ont même loi)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \sigma^2 \ = \ k\sigma^2 & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(T_k) = k\sigma^2}$$

□

b) Montrer que pour tout réel ε strictement positif,

$$\mathbb{P}\left([|T_k - k\mu| \geqslant k\varepsilon]\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2}$$

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$.

- Commençons par rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
  Pour toute v.a.r. Y qui admet une variance, on a :

$$\forall a > 0,\ \mathbb{P}\big([|Y - \mathbb{E}(Y)| \geqslant a] \big) \ \leqslant \ \frac{\mathbb{V}(Y)}{a^2}$$

- Il suffit d'appliquer cette inégalité à la v.a.r. $Y = T_k$ qui admet une variance (d'après la question précédente) et à $a = k\varepsilon > 0$. On obtient :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}\big([|T_k - \mathbb{E}(T_k)| \geqslant k\varepsilon] \big) & \leqslant & \dfrac{\mathbb{V}(T_k)}{k^2\varepsilon^2} & & \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \\ \mathbb{P}\big([|T_k - k\mu| \geqslant k\varepsilon] \big) & & \dfrac{\cancel{k}\sigma^2}{k^{\cancel{2}}\varepsilon^2} & = & \dfrac{\sigma^2}{k\varepsilon^2} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([|T_k - k\mu| \geqslant k\varepsilon] \big) \ \leqslant \ \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2}}$$

□

c) Déduire que, pour tout réel strictement positif ε, on a :

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{T_k}{k} \in \left]\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon\right[\right]\right) = 1$$

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question précédente :

$$0 \leqslant \mathbb{P}\big([|T_k - k\mu| \geqslant k\varepsilon]\big) \leqslant \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2}$$

Or : $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\sigma^2}{k\varepsilon^2} = 0$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} 0 = 0$.
On en déduit, par le théorème d'encadrement, que : $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{P}\big([|T_k - k\mu| \geqslant k\varepsilon]\big) = 0$.

- Par ailleurs, en considérant l'événement contraire :

$$\mathbb{P}\big([|T_k - k\mu| < k\varepsilon]\big) = 1 - \mathbb{P}\big([|T_k - k\mu| \geqslant k\varepsilon]\big)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\big([|T_k - k\mu| < k\varepsilon]\big) = 1 - 0 = 1}$$

- Enfin, on remarque :

$$\begin{aligned} |T_k - k\mu| < k\varepsilon &\Leftrightarrow -k\varepsilon < T_k - k\mu < k\varepsilon \\ &\Leftrightarrow k\mu - k\varepsilon < T_k < k\mu + k\varepsilon \\ &\Leftrightarrow \mu - \varepsilon < \frac{T_k}{k} < \mu + \varepsilon \qquad \textit{(en divisant par } k > 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \frac{T_k}{k} \in \left]\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon\right[\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En combinant ces deux résultats, on obtient : } \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\tfrac{T_k}{k} \in \left]\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon\right[\right]\right) = 1.}$$ □

9. On suppose maintenant uniquement que $\alpha > 1$ et donc que X_1 n'a pas nécessairement de variance d'où l'impossibilité d'appliquer la méthode précédente. On va mettre en œuvre ce qu'on appelle une méthode de troncation.
On fixe un entier naturel m strictement positif. Pour tout entier naturel non nul i, on définit deux variables aléatoires $Y_i^{(m)}$ et $Z_i^{(m)}$ de la façon suivante

$$Y_i^{(m)} = \begin{cases} X_i & \text{si } X_i \leqslant m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad Z_i^{(m)} = \begin{cases} X_i & \text{si } X_i > m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Montrer que $X_i = Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)}$.

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.

- Si $X_i(\omega) \leqslant m$ alors, par définition :

$$Y_i^{(m)}(\omega) = X_i(\omega) \quad \text{et} \quad Z_i^{(m)}(\omega) = 0$$

Ainsi : $Y_i^{(m)}(\omega) + Z_i^{(m)}(\omega) = X_i(\omega)$.

- Si $X_i(\omega) > m$ alors, par définition :

$$Y_i^{(m)}(\omega) = 0 \quad \text{et} \quad Z_i^{(m)}(\omega) = X_i(\omega)$$

Ainsi : $Y_i^{(m)}(\omega) + Z_i^{(m)}(\omega) \ = \ X_i(\omega)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } \omega \in \Omega,\ X_i(\omega) \ = \ Y_i^{(m)}(\omega) + Z_i^{(m)}(\omega).}$$

Commentaire

- Au vu des formulations de l'énoncé, on peut supposer ici qu'une disjonction de cas écrite sans les ω (cas $X \leqslant m$ et cas $X > m$) serait acceptée. Cependant, il faut bien comprendre que toute v.a.r. X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Écrire « si $X \leqslant m$ » signifie donc que l'on considère tous les éléments $\omega \in \Omega$ tels que $X(\omega) \leqslant m$ c'est à dire tous les éléments ω qui réalisent l'événement $[X \leqslant m]$.
- La présentation des v.a.r. $Y_i^{(m)}$ et $Z_i^{(m)}$ aurait d'ailleurs pu se faire comme suit :

$$Y_i^{(m)} : \omega \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} X_i(\omega) & \text{si } X_i(\omega) \leqslant m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right. \qquad Z_i^{(m)} : \omega \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} X_i(\omega) & \text{si } X_i(\omega) > m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

□

b) i. En utilisant la question ***3.d)ii.***, montrer que :

$$\mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) \ \leqslant \ \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{i^\alpha}$$

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord : $Z_1^{(m)} = \left\{ \begin{array}{ll} X_1 & \text{si } X_1 > m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$.

  Ainsi, la v.a.r. $Z_1^{(m)}$ prend la valeur 0 et toutes les valeurs strictement plus grandes que m prises par la v.a.r. X_1.

$$\boxed{\text{Comme } X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*, \text{ on en déduit : } Z_1^{(m)}(\Omega) = \{0\} \ \cup \ [\![m+1, +\infty [\![.}$$

- La v.a.r. $Z_1^{(m)}$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{i \geqslant m+1} i \ \mathbb{P}\Big(\Big[Z_1^{(m)} = i \Big] \Big)$ est absolument convergente (on laisse de côté la quantité $0 \times \mathbb{P}\big([Z_1^{(m)} = 0]\big)$ qui ne modifie pas la somme). Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Or, pour tout $i \geqslant m+1$: $[Z_1^{(m)} = i] = [X_1 = i]$.
  Ainsi, la v.a.r. $Z_1^{(m)}$ admet une espérance car X_1 en admet une.
- La v.a.r. X_1 vérifie les propriétés de la question ***3***.
  On peut donc utiliser le résultat de la question ***3.d).ii.*** :

$$\mathbb{P}([X_1 = i]) \ \leqslant \ \frac{\alpha}{i^{1+\alpha}} \qquad \text{et ainsi} \qquad i \ \mathbb{P}([X_1 = i]) \ \leqslant \ \frac{\alpha}{i^\alpha}$$

  En sommant de part et d'autre ces inégalités, on obtient :

$$\mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) = \sum_{i=m+1}^{+\infty} i \ \mathbb{P}([X_1 = i]) \ \leqslant \ \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{i^\alpha}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) \ \leqslant \ \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{i^\alpha}}$$

□

ii. Montrer que :

$$\mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) \leqslant \int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha}\,dx$$

Démonstration.

- Soit $i \in [\![m, +\infty[\![$. Soit $x \in [i, i+1]$.

$$\begin{array}{lccl}
\text{Alors} & i \leqslant x \leqslant i+1 & & \\
\text{donc} & i^\alpha \leqslant x^\alpha \leqslant (i+1)^\alpha & & \textit{(par croissance de } x \mapsto x^\alpha \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \\
\text{et} & \dfrac{1}{i^\alpha} \geqslant \dfrac{1}{x^\alpha} \geqslant \dfrac{1}{(i+1)^\alpha} & & \textit{(par décroissance de } x \mapsto \dfrac{1}{x} \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
\text{ainsi} & \dfrac{\alpha}{i^\alpha} \geqslant \dfrac{\alpha}{x^\alpha} \geqslant \dfrac{\alpha}{(i+1)^\alpha} & & \textit{(en multipliant par } \alpha > 0\textit{)} \\
\text{enfin} & \displaystyle\int_i^{i+1} \frac{\alpha}{i^\alpha}\,dx \geqslant \int_i^{i+1} \frac{\alpha}{x^\alpha}\,dx \geqslant \int_i^{i+1} \frac{\alpha}{(i+1)^\alpha}\,dx & & \textit{(par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant } (i \leqslant i+1)\textit{)}
\end{array}$$

On remarque alors : $\displaystyle\int_i^{i+1} \frac{\alpha}{(i+1)^\alpha}\,dx = \frac{\alpha}{(i+1)^\alpha}$.

- Soit $N \in [\![m, +\infty[\![$. En sommant les inégalités de droite membre à membre, on obtient :

$$\begin{array}{ccc}
\displaystyle\sum_{i=m}^{N} \int_i^{i+1} \frac{\alpha}{x^\alpha}\,dx & \geqslant & \displaystyle\sum_{i=m}^{N} \frac{\alpha}{(i+1)^\alpha} \\
\shortparallel & & \shortparallel \\
\displaystyle\int_m^{N+1} \frac{\alpha}{x^\alpha}\,dx & \geqslant & \displaystyle\sum_{i=m+1}^{N+1} \frac{\alpha}{i^\alpha}
\end{array}
\qquad \textit{(par relation de Chasles et décalage d'indice)}$$

- L'intégrale impropre $\displaystyle\int_m^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $\alpha > 1$. De même, la série $\sum \frac{1}{i^\alpha}$ est convergente en tant que série de Riemann, d'exposant $\alpha > 1$. On peut donc passer à la limite dans l'inégalité précédente :

$$\int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha}\,dx \geqslant \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{i^\alpha}$$

$$\boxed{\text{On obtient ainsi l'inégalité souhaitée : } \mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) \leqslant \int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha}\,dx}$$

□

iii. Calculer :

$$\int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha}\,dx$$

Démonstration.

- Soit $N \in [\![m, +\infty[\![$.

$$\int_m^N \frac{\alpha}{x^\alpha}\,dx = \alpha \int_m^N x^{-\alpha}\,dx = \alpha \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_m^N = \frac{\alpha}{1-\alpha} \left[\frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_m^N = \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{1}{N^{\alpha-1}} - \frac{1}{m^{\alpha-1}} \right)$$

- Or, comme $\alpha - 1 > 0$: $\lim\limits_{N \to +\infty} N^{\alpha-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{N \to +\infty} \dfrac{1}{N^{\alpha-1}} = 0$. Ainsi :

$$\int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha} \, dx \ = \ \lim_{N \to +\infty} \int_m^N \frac{\alpha}{x^\alpha} \, dx \ = \ \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(0 - \frac{1}{m^{\alpha-1}} \right)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha} \, dx \ = \ \frac{\alpha}{\alpha-1} \, \frac{1}{m^{\alpha-1}}.}$$

□

iv. En déduire que :

$$\lim_{m \to +\infty} \mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) = 0$$

Démonstration.

- Comme $Z_1^{(m)}$ est à valeurs entières : $Z_1^{(m)} \geqslant 0$. Ainsi, par croissance de l'espérance :

$$\mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) \ \geqslant \ 0$$

- À l'aide des questions ***9.b).ii.*** et ***9.b).iii.***, on en déduit :

$$0 \ \leqslant \ \mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) \ \leqslant \ \int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha} \, dx \ = \ \frac{\alpha}{\alpha-1} \, \frac{1}{m^{\alpha-1}}$$

Or, comme $\alpha - 1 > 0$: $\lim\limits_{m \to +\infty} \dfrac{\alpha}{\alpha-1} \, \dfrac{1}{m^{\alpha-1}} = 0$.

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement, on en déduit : } \lim_{m \to +\infty} \mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) \ = \ 0.}$$

□

v. Montrer que

$$\lim_{m \to +\infty} \mathbb{E}\big(Y_1^{(m)}\big) = \mu$$

Démonstration.

- D'après la question ***9.a)*** : $X_1 = Y_1^{(m)} + Z_1^{(m)}$. Ainsi :

$$Y_1^{(m)} = X_1 - Z_1^{(m)}$$

- La v.a.r. $Y_1^{(m)}$ admet une espérance comme somme de v.a.r. qui admettent une espérance. De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}\big(Y_1^{(m)}\big) \ = \ \mathbb{E}\big(X_1\big) - \mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big)$$

Comme $\mathbb{E}\big(X_1\big)$ et $\mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big)$ admettent une limite lorsque $m \to +\infty$, il en est de même de $\mathbb{E}\big(Y_1^{(m)}\big)$ et :

$$\begin{aligned} \lim_{m \to +\infty} \mathbb{E}\big(Y_1^{(m)}\big) \ &= \ \lim_{m \to +\infty} \mathbb{E}\big(X_1\big) - \lim_{m \to +\infty} \mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) \\ &= \ \lim_{m \to +\infty} \mu - 0 && \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= \ \mu \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{m \to +\infty} \mathbb{E}\big(Y_1^{(m)}\big) = \mu}$$

□

c) i. Montrer que

$$\big(Y_1^{(m)}\big)^2 \leqslant mX_1$$

Démonstration. Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.

- Si $X_1(\omega) \leqslant m$ alors, par définition :

$$Y_1^{(m)}(\omega) \ = \ X_1(\omega) \quad \text{et} \quad \big(Y_1^{(m)}(\omega)\big)^2 \ = \ \big(X_1(\omega)\big)^2$$

  Enfin, comme $X_1(\omega) \leqslant m$ et $X_1(\omega) \geqslant 0$ alors $X_1(\omega)\ X_1(\omega) \leqslant mX_1(\omega)$.

- Si $X_1(\omega) > m$ alors, par définition :

$$Y_i^{(m)}(\omega) = 0 \quad \text{et} \quad \big(Y_1^{(m)}(\omega)\big)^2 \ = \ 0$$

  Enfin, comme $X_1(\omega) \geqslant 0$ et $m \geqslant 0$ alors $\big(Y_1^{(m)}(\omega)\big)^2 = 0 \leqslant mX_1(\omega)$.

$$\boxed{\big(Y_1^{(m)}\big)^2 \leqslant mX_1}$$

□

ii. En déduire que

$$\mathbb{V}\big(Y_1^{(m)}\big) \leqslant m\mu$$

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord : $Y_1^{(m)} = \begin{cases} X_1 & \text{si } X_1 \leqslant m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.

  Ainsi, outre 0, $Y_1^{(m)}$ prend les valeurs de X_1 plus petites que m.
  On en déduit : $Y_1^{(m)}(\Omega) = [\![0, m]\!]$.

- La v.a.r. $Y_1^{(m)}$ est finie. Elle admet donc une variance.
  D'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}\big(Y_1^{(m)}\big) \ = \ \mathbb{E}\Big(\big(Y_1^{(m)}\big)^2\Big) - \Big(\mathbb{E}\big(Y_1^{(m)}\big)\Big)^2 \ \leqslant \ \mathbb{E}\Big(\big(Y_1^{(m)}\big)^2\Big)$$

- Or, d'après la question précédente et par croissance de l'espérance :

$$\mathbb{E}\Big(\big(Y_1^{(m)}\big)^2\Big) \ \leqslant \ \mathbb{E}\big(mX_1\big) \ = \ m\ \mathbb{E}\big(X_1\big) \ = \ m\mu$$

$$\boxed{\text{En combinant ces résultats, on obtient : } \mathbb{V}\big(Y_1^{(m)}\big) \ \leqslant \ m\mu.}$$

□

d) Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un entier naturel m_0 non nul tel que pour tout entier naturel m supérieur ou égal à m_0,

$$\frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha} \leqslant \varepsilon$$

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$.

- Comme on l'a vu en question ***9.b)iv.*** : $\lim\limits_{m \to +\infty} \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}\ \dfrac{1}{m^{\alpha-1}} = 0$.
- Par définition de la notion de limite, il existe un rang $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall m \geqslant m_0, \ \left| \frac{\alpha}{\alpha - 1}\ \frac{1}{m^{\alpha-1}} \right| \ \leqslant \ \varepsilon$$

$$\boxed{\text{Comme } \alpha - 1 > 0, \text{ on obtient : } \forall m \geqslant m_0, \ \frac{\alpha}{\alpha - 1}\ \frac{1}{m^{\alpha-1}} \ = \ \left| \frac{\alpha}{\alpha - 1}\ \frac{1}{m^{\alpha-1}} \right| \ \leqslant \ \varepsilon.}$$

□

Jusqu'à la fin du problème, m désignera un entier supérieur ou égal à m_0.

e) On note, pour tout entier naturel k non nul

$$U_k^{(m)} = \sum_{i=1}^{k} Y_i^{(m)} \quad \text{et} \quad V_k^{(m)} = \sum_{i=1}^{k} Z_i^{(m)}$$

Vérifier que :

$$T_k = U_k^{(m)} + V_k^{(m)}$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Remarquons :

$$\begin{array}{rcll} U_k^{(m)} + V_k^{(m)} & = & \sum\limits_{i=1}^{k} Y_i^{(m)} + \sum\limits_{i=1}^{k} Z_i^{(m)} & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \left(Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)} \right) & \textit{(par linéarité de la somme)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} X_i & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{9.a)}}\textit{)} \\ & = & T_k & \end{array}$$

$$\boxed{T_k = U_k^{(m)} + V_k^{(m)}}$$

□

f) i. Montrer que :

$$\mathbb{E}\big(V_k^{(m)}\big) \ \leqslant \ k \ \frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha}$$

Démonstration.

- La v.a.r. $V_k^{(m)}$ admet une espérance comme somme de v.a.r. admettant une espérance.
- De plus par linéarité de l'espérance :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}\big(V_k^{(m)}\big) & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{E}\big(Z_i^{(m)}\big) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) & \textit{(car les v.a.r. } X_i \textit{ et donc les v.a.r. } Z_i^{(m)} \textit{ ont même loi)} \\ & = & k \ \mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) & \\ & \leqslant & k \ \dfrac{\alpha}{\alpha - 1} \ \dfrac{1}{m^{\alpha-1}} & \textit{(d'après les questions } \textbf{\textit{9.b)ii.}} \textit{ et } \textbf{\textit{9.b)iii.}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } \mathbb{E}\big(V_k^{(m)}\big) \ \leqslant \ k \ \frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha}.}$$

□

ii. En déduire que :

$$\mathbb{P}\left(\left[V_k^{(m)} \geqslant k\varepsilon\right]\right) \ \leqslant \ \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}$$

Démonstration.

- Commençons par rappeler l'inégalité de Markov.
Pour toute v.a.r. Y à valeurs positives et qui admet une espérance, on a :

$$\forall a > 0, \ \mathbb{P}([Y \geqslant a]) \ \leqslant \ \frac{\mathbb{E}(Y)}{a}$$

- Il suffit d'appliquer cette inégalité à la v.a.r. $Y = V_k^{(m)}$ à valeurs positives (comme somme de v.a.r. à valeurs positives) et qui admet une espérance et à $a = k\varepsilon$. On obtient :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\left(\left[V_k^{(m)} \geqslant k\varepsilon\right]\right) & \leqslant & \dfrac{\mathbb{E}(V_k^{(m)})}{k\varepsilon} & \\ & \leqslant & \dfrac{\cancel{k}\ \frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha}}{\cancel{k}\varepsilon} & \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \mathbb{P}\left(\left[V_k^{(m)} \geqslant k\varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1}\ \frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}.}$$

□

g) i. Montrer que :

$$\mathbb{E}(U_k^{(m)}) \geqslant k\mu - k\frac{\alpha}{\alpha-1}m^{1-\alpha}$$

Démonstration.

- D'après la question ***9.e)*** : $U_k^{(m)} = T_k - V_k^{(m)}$.
  La v.a.r. $U_k^{(m)}$ admet une espérance comme somme de v.a.r. qui admettent une espérance.
- De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(U_k^{(m)}) & = & \mathbb{E}(T_k) - \mathbb{E}(V_k^{(m)}) & \\ & = & k\mu - \mathbb{E}(V_k^{(m)}) & \textit{(d'après la question } \boldsymbol{7.}\textit{)} \\ & \geqslant & k\mu - k\ \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\ m^{1-\alpha} & \textit{(d'après la question } \boldsymbol{9.f)i.}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(U_k^{(m)}) \geqslant k\mu - k\frac{\alpha}{\alpha-1}m^{1-\alpha}}$$

□

ii. En déduire que :

$$\left|\ \mathbb{E}(U_k^{(m)}) - k\mu\ \right| \leqslant k\varepsilon$$

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\mathbb{E}(U_k^{(m)}) - k\mu \geqslant -k\ \frac{\alpha}{\alpha-1}\ m^{1-\alpha}$$

- Toujours d'après la question précédente :

$$\mathbb{E}(U_k^{(m)}) = k\mu - \mathbb{E}(V_k^{(m)}) \quad \text{et donc} \quad \mathbb{E}(U_k^{(m)}) - k\mu = -\mathbb{E}(V_k^{(m)})$$

  Or $\mathbb{E}(V_k^{(m)}) \geqslant 0$ par croissance de l'espérance et car $V_k^{(m)}$ est à valeurs positives (comme somme de v.a.r. à valeurs positives).
- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \left|\ \mathbb{E}(U_k^{(m)}) - k\mu\ \right| & = & -\Big(\mathbb{E}(U_k^{(m)}) - k\mu\Big) & \\ & \leqslant & k\ \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\ m^{1-\alpha} & \textit{(d'après le point développé en début de démonstration)} \\ & \leqslant & k\varepsilon & \textit{(d'après la question } \boldsymbol{9.d)}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\left|\ \mathbb{E}(U_k^{(m)}) - k\mu\ \right| \leqslant k\varepsilon}$$

□

iii. Montrer que :

$$\mathbb{P}\Big(\Big[|U_k^{(m)} - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon\Big]\Big) \leqslant \mathbb{P}\Big(\Big[|U_k^{(m)} - \mathbb{E}(U_k^{(m)})| \geqslant k\varepsilon\Big]\Big)$$

Démonstration.

- Si on parvient à démontrer :

$$\Big[|U_k^{(m)} - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon\Big] \subset \Big[|U_k^{(m)} - \mathbb{E}(U_k^{(m)})| \geqslant k\varepsilon\Big]$$

  alors, par croissance de l'application $\mathbb{P}$, on pourra conclure :

$$\mathbb{P}\Big(\Big[|U_k^{(m)} - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon\Big]\Big) \leqslant \mathbb{P}\Big(\Big[|U_k^{(m)} - \mathbb{E}\big(U_k^{(m)}\big)| \geqslant k\varepsilon\Big]\Big)$$

- Démontrons donc cette inclusion.
  Soit $\omega \in \Omega$. Supposons $\omega \in \Big[|U_k^{(m)} - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon\Big]$ *i.e.* $|U_k^{(m)}(\omega) - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon$.

  D'après l'inégalité triangulaire :

$$|U_k^{(m)}(\omega) - k\mu| \leqslant |\ U_k^{(m)}(\omega) - \mathbb{E}\big(U_k^{(m)}\big)\ | + |\ \mathbb{E}\big(U_k^{(m)}\big) - k\mu\ |$$

  On en déduit :

$$\begin{aligned} |\ U_k^{(m)}(\omega) - \mathbb{E}\big(U_k^{(m)}\big)\ | &\geqslant |\ U_k^{(m)}(\omega) - k\mu\ | - |\ \mathbb{E}\big(U_k^{(m)}\big) - k\mu\ | \\ &\geqslant 2k\varepsilon - |\ \mathbb{E}\big(U_k^{(m)}\big) - k\mu\ | && \textit{(par hypothèse)} \\ &\geqslant 2k\varepsilon - k\varepsilon = k\varepsilon && \textit{(d'après la question précédente)} \end{aligned}$$

  On en conclut : $\omega \in \Big[|\ U_k^{(m)}(\omega) - \mathbb{E}\big(U_k^{(m)}\big)\ | \geqslant k\varepsilon\Big]$.
  Ce qui démontre l'inclusion.

$$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } \mathbb{P}\Big(\Big[|U_k^{(m)} - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon\Big]\Big) \leqslant \mathbb{P}\Big(\Big[|U_k^{(m)} - \mathbb{E}\big(U_k^{(m)}\big)| \geqslant k\varepsilon\Big]\Big).}$$

Commentaire

Une nouvelle fois dans cet énoncé, nous avons affaire à un raisonnement sur les événements. L'utilisation de la fonction $\mathbb{P}$ n'arrive que dans un deuxième temps.

□

iv. Montrer que :

$$\mathbb{V}\big(U_k^{(m)}\big) \leqslant km\mu$$

Démonstration.

- Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $Y_i^{(m)}$ admet une variance d'après la question ***9.c).ii***.
- Par ailleurs, les v.a.r. X_i sont indépendantes. Il en est donc de même des v.a.r. $Y_i^{(m)}$ d'après le lemme des coalitions.
- La v.a.r. $U_k^{(m)}$ admet une variance comme somme de v.a.r. indépendantes qui admettent une variance. De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\big(U_k^{(m)}\big) &= \mathbb{V}\Big(\sum_{i=1}^{k} Y_i^{(m)}\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{V}\big(Y_i^{(m)}\big) && \textit{(par indépendance des v.a.r. } Y_i^{(m)}\textit{)} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{V}\big(Y_1^{(m)}\big) = k\,\mathbb{V}\big(Y_1^{(m)}\big) && \textit{(car les v.a.r. } X_i \textit{ et donc les v.a.r. } Y_i^{(m)} \textit{ ont même loi)} \end{aligned}$$

- On en déduit, d'après la question ***9.c).ii*** :

$$\mathbb{V}\big(U_k^{(m)}\big) = k\ \mathbb{V}\big(Y_1^{(m)}\big) \ \leqslant\ km\mu$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{V}\big(U_k^{(m)}\big) \ \leqslant\ km\mu.}$$

□

v. En déduire que :

$$\mathbb{P}\left(\left[|U_k^{(m)} - k\mu| \ \geqslant\ 2k\varepsilon\right]\right) \ \leqslant\ \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$$

Démonstration.

- En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la v.a.r. $Y = U_k^{(m)}$ qui admet une variance (d'après la question précédente) et à $a = k\varepsilon > 0$. On obtient :

$$\mathbb{P}\big(\left[|U_k^{(m)} - \mathbb{E}(U_k^{(m)})| \geqslant k\varepsilon\right]\big) \ \leqslant\ \frac{\mathbb{V}\big(U_k^{(m)}\big)}{k^2\varepsilon^2}$$

- Or, d'après la question ***9.g)iii*** :

$$\mathbb{P}\big(\left[|U_k^{(m)} - k\mu)| \geqslant 2k\varepsilon\right]\big) \ \leqslant\ \mathbb{P}\big(\left[|U_k^{(m)} - \mathbb{E}(U_k^{(m)})| \geqslant k\varepsilon\right]\big)$$

- De plus, d'après la question précédente :

$$\frac{\mathbb{V}\big(U_k^{(m)}\big)}{k^2\varepsilon^2} \ \leqslant\ \frac{\cancel{k}m\mu}{k^{\cancel{2}}\varepsilon^2} \ =\ \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$$

$$\boxed{\text{En combinant ces trois résultats, on obtient : } \mathbb{P}\left(\left[|U_k^{(m)} - k\mu| \ \geqslant\ 2k\varepsilon\right]\right) \ \leqslant\ \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}}$$

□

h) i. Montrer que pour tout couple d'événements A et B dans $\mathcal{A}$, on a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) \ \geqslant\ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$

Démonstration.

Remarquons tout d'abord : $\mathbb{P}(A \cup B) \ =\ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(A \cap B) \ =\ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$$

De plus, $\mathbb{P}(A \cup B) \leqslant 1$ et donc $-\mathbb{P}(A \cup B) \geqslant -1$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{P}(A \cap B) \ =\ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) \ \geqslant\ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1}$$

Commentaire

- On est confronté ici à une question qui n'a pas de lien direct avec les questions précédentes. Le concepteur a estimé (à raison) que la question suivante est trop compliquée pour être traitée directement. Il a donc préféré la découper en 2 questions distinctes. C'est une bonne opportunité de marquer des points :
  × cette question ***9.h)i.*** est simple puisque ne demande que des connaissances de première année sur l'application $\mathbb{P}$.
  × la question suivante ***9.h)ii.*** est plus complexe dans sa présentation mais l'énoncé la simplifie car donne la marche à suivre pour la traiter. Il faut savoir repérer ce type de questions où l'énoncé fournit la méthode de résolution.
- Il n'y a pas forcément dans les sujets une croissance linéaire de la difficulté. Au contraire, chaque nouvelle partie commence généralement par une question plus simple de mise en route. Il n'est donc pas judicieux de laisser de côté certaines parties.

□

ii. En appliquant l'inégalité précédente aux événements :

$$A = \left[V_k^{(m)} < k\varepsilon\right] \quad \text{et} \quad B = \left[U_k^{(m)} \in \left]k(\mu - 2\varepsilon), k(\mu + 2\varepsilon)\right[\right]$$

montrer que :

$$\mathbb{P}\left(\left[T_k \in \left]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)\right[\,\right]\right) \geqslant \mathbb{P}\left(\left[V_k^{(m)} < k\varepsilon\right]\right) + \mathbb{P}\left(\left[U_k^{(m)} \in \left]k(\mu - 2\varepsilon), k(\mu + 2\varepsilon)\right[\right]\right) - 1$$

Démonstration.

- On reconnaît à droite de l'inégalité souhaitée : $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$.
  Il s'agit ici de démontrer :

  $$\left[T_k \in \left]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)\right[\,\right] \supset A \cap B$$

  On pourra alors en déduire, par croissance de l'application $\mathbb{P}$:

  $$\mathbb{P}\left(\left[T_k \in \left]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)\right[\,\right]\right) \geqslant \mathbb{P}(A \cap B)$$

  ce qui permet de conclure car $\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$ d'après la question précédente.
- Démontrons donc cette inclusion.
  Soit $\omega \in A \cap B$. Ainsi :
  × $\omega \in A = \left[V_k^{(m)}(\omega) < k\varepsilon\right]$ *i.e.* $V_k^{(m)}(\omega) < k\varepsilon$.
  Comme la v.a.r. $V_k^{(m)}$ est à valeurs positives, on a alors :

  $$-k\varepsilon < 0 \leqslant V_k^{(m)}(\omega) < k\varepsilon$$

  × $\omega \in B$ *i.e.* $U_k^{(m)}(\omega) \in \left]k(\mu - 2\varepsilon), k(\mu + 2\varepsilon)\right[$. Autrement dit :

  $$k(\mu - 2\varepsilon) < U_k^{(m)}(\omega) < k(\mu + 2\varepsilon)$$

  En sommant membre à membre ces inégalités, on obtient :

  $$\begin{array}{ccccc} -k\varepsilon + k(\mu - 2\varepsilon) & < & U_k^{(m)}(\omega) + V_k^{(m)}(\omega) & < & k(\mu + 2\varepsilon) + k\varepsilon \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ k(\mu - 3\varepsilon) & & T_k(\omega) & & k(\mu + 3\varepsilon) \end{array}$$

  Ainsi : $\omega \in \left[T_k \in \left]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)\right[\,\right]$.
  Ce qui démontre l'inclusion.

$$\boxed{\text{On a donc bien : } \mathbb{P}\left(\left[T_k \in \left]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)\right[\,\right]\right) \geqslant \mathbb{P}(A \cap B) \geqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1.}$$

Commentaire

Encore et toujours, on commence par raisonner sur les événements et on conclut par application de $\mathbb{P}$. Il est important d'agir avec méthode si l'on souhaite résoudre ce type de questions.

□

iii. Déduire des questions précédentes que pour tout réel ε strictement positif, et pour tout entier m supérieur ou égal à m_0, on a pour tout entier naturel k non nul :

$$\mathbb{P}\left(\left[\ T_k \in \left]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)\right[\ \right]\right) \ \geqslant\ 1 - \frac{\alpha}{\alpha - 1}\,\frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon} - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$$

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$, soit $m \geqslant m_0$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question ***9.f)ii.*** :

$$\mathbb{P}\left(\left[V_k^{(m)} < k\varepsilon\right]\right) \ =\ 1 - \mathbb{P}\left(\left[V_k^{(m)} \geqslant k\varepsilon\right]\right) \ \geqslant\ 1 - \frac{\alpha}{\alpha - 1}\ \frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}$$

- D'après la question ***9.g)v.***, comme $m \geqslant m_0$:

$$\mathbb{P}\left(\left[\ |U_k^m - k\mu|\ <\ 2k\varepsilon\right]\right) \ =\ 1 - \mathbb{P}\left(\left[\ |U_k^m - k|\ \geqslant\ 2k\varepsilon\right]\right) \ \geqslant\ 1 - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$$

  Par ailleurs :

$$\left[\ |U_k^m - k\mu|\ <\ 2k\varepsilon\right] \ =\ \left[\ U_k^m \in \left]k(\mu - 2\varepsilon), k(\mu + 2\varepsilon)\right[\ \right]$$

  En effet, si $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} \omega \in \left[\ |U_k^m - k\mu|\ <\ 2k\varepsilon\right] \ &\Leftrightarrow\ |U_k^m(\omega) - k\mu|\ <\ 2k\varepsilon \\ &\Leftrightarrow\ -2k\varepsilon\ <\ U_k^m(\omega) - k\mu\ <\ 2k\varepsilon \\ &\Leftrightarrow\ k\mu - 2k\varepsilon\ <\ U_k^m(\omega)\ <\ k\mu 2k\varepsilon \\ &\Leftrightarrow\ \omega \in \left[\ U_k^m \in \left]k(\mu - 2\varepsilon), k(\mu + 2\varepsilon)\right[\ \right] \end{aligned}$$

- Ainsi, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\left[\ T_k \in \left]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)\right[\ \right]\right) \\ \geqslant\ & \mathbb{P}\left(\left[V_k^{(m)} < k\varepsilon\right]\right) + \mathbb{P}\left(\left[U_k^{(m)} \in \left]k(\mu - 2\varepsilon), k(\mu + 2\varepsilon)\right[\right]\ \right) - 1 \\ \geqslant\ & \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha - 1}\ \frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}\right) + \left(\cancel{1} - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}\right) - \cancel{1} \\ \geqslant\ & 1 - \frac{\alpha}{\alpha - 1}\ \frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon} - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, pour } \varepsilon,\ m \text{ et } k \text{ choisis convenablement :} \\ \mathbb{P}\left(\left[\ T_k \in \left]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)\right[\ \right]\right) \ \geqslant\ 1 - \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}\,\dfrac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon} - \dfrac{m\mu}{k\varepsilon^2}.\end{array}}$$

□

iv. Pour k assez grand, appliquer l'inégalité précédente à un entier $m_k \in [\sqrt{k}, 2\sqrt{k}]$ et conclure que :

$$\lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{T_k}{k} \in \left]\mu - 3\varepsilon, \mu + 3\varepsilon\right[\right]\ \right) = 1$$

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$. On sait, d'après la question ***9.d)*** qu'il existe un entier $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall m \geqslant m_0,\ \frac{\alpha}{\alpha - 1}\ m^{1-\alpha}\ \leqslant\ \varepsilon$$

Cette inégalité est essentielle pour démontrer la question ***9.g)ii***, qui permet de démontrer la ***9.g)v***, qui permet à son tour de démontrer la question précédente.

- Le résultat de la question précédente est vérifié pour tout entier $m \geqslant m_0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Choisissons alors $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{k} \geqslant m_0$ et considérons $m_k \in [\sqrt{k}, \sqrt{2k}]$. Alors :

$$m_k \ \geqslant \ \sqrt{k} \ \geqslant \ m_0$$

et on peut appliquer l'inégalité de la question précédente en $m = m_k$.
On obtient :

$$\mathbb{P}\left([\ T_k \in]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)[\ ]\ \right) \ \geqslant \ 1 - \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{m_k^{1-\alpha}}{\varepsilon} - \frac{m_k\ \mu}{k\varepsilon^2}$$

- Comme $m_k \ \geqslant \ \sqrt{k}$ et $\alpha - 1 > 0$ alors :

$$m_k^{\alpha-1} \ \geqslant \ \left(\sqrt{k}\right)^{\alpha-1}$$

donc $$\frac{1}{m_k^{\alpha-1}} \ \leqslant \ \frac{1}{(\sqrt{k})^{\alpha-1}}$$ *(par décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$)*

ainsi $$-\frac{\alpha}{(\alpha-1)\ \varepsilon}\ \frac{1}{m_k^{\alpha-1}} \ \geqslant \ -\frac{\alpha}{(\alpha-1)\ \varepsilon}\ \frac{1}{(\sqrt{k})^{\alpha-1}}$$ *(car $-\dfrac{\alpha}{\alpha-1} < 0$)*

- Comme $m_k \leqslant 2\sqrt{k}$ alors $-m_k \geqslant -2\sqrt{k}$. Et ainsi, en multipliant par $\dfrac{\mu}{k\ \varepsilon^2} > 0$:

$$-\frac{m_k\ \mu}{k\ \varepsilon^2} \ \geqslant \ -2\frac{\sqrt{k}\ \mu}{k\ \varepsilon^2} \ = \ -2\frac{\mu}{\sqrt{k}\ \varepsilon^2}$$

- On en déduit :

$$1 \ \geqslant \ \underbrace{\mathbb{P}\left([\ T_k \in]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)[\ ]\ \right)}_{= \ \mathbb{P}\left(\left[\ \frac{T_k}{k} \in]\mu - 3\varepsilon, \mu + 3\varepsilon[\ \right]\right)} \ \geqslant \ 1 - \frac{\alpha}{(\alpha-1)\ \varepsilon}\ \frac{1}{(\sqrt{k})^{\alpha-1}} - 2\frac{\mu}{\sqrt{k}\ \varepsilon^2}$$

- Enfin, comme $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{1}{(\sqrt{k})^{\alpha-1}} = 0$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} -2\dfrac{\mu}{\sqrt{k}\ \varepsilon^2} = 0$, on obtient :

$$\lim_{k \to +\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{(\alpha-1)\ \varepsilon}\ \frac{1}{(\sqrt{k})^{\alpha-1}} - 2\frac{\mu}{\sqrt{k}\ \varepsilon^2}\right) \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{On en conclut, par théorème d'encadrement : } \lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[\ \frac{T_k}{k} \in]\mu - 3\varepsilon, \mu + 3\varepsilon[\ \right]\right) \ = \ 1}$$

□

HEC 2016 : le sujet

EXERCICE

Soit n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Si M est une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice ${}^tM$ de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ désigne la transposée de M.
On identifie les ensembles $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ en assimilant une matrice de $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ à son unique coefficient.
On note $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{B}_p$ la base canonique de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Si $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ ($q \in \mathbb{N}^*$), *on admet* que ${}^t(MN) = {}^tN\,{}^tM$.

1. Soit X une matrice colonne non nulle de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de composantes $x_1, x_2, ..., x_n$ dans la base $\mathscr{B}_n$.
On pose : $A = X\,{}^tX$ et $\alpha = {}^tXX$.

a) Exprimer A et α en fonction de $x_1, x_2, ..., x_n$. Justifier que la matrice A est diagonalisable.

b) Soit f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice A dans la base $\mathscr{B}_n$.
Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$; donner une base de $\mathrm{Im}(f)$ et préciser la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.

c) Calculer la matrice AX.
Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associés.

2. On suppose que n et p vérifient $1 \leqslant p \leqslant n$.
Soit $(V_1, V_2, ..., V_p)$ une famille libre de p vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On note V la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont, dans cet ordre, $V_1, V_2, ..., V_p$.
Soit g l'application linéaire de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice V dans les bases $\mathscr{B}_p$ et $\mathscr{B}_n$.

a) Justifier que le rang de V est égal à p. Déterminer $\mathrm{Ker}(g)$.

b) Soit Y une matrice colonne de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Montrer que l'on a $VY = 0$ si et seulement si l'on a ${}^tVVY = 0$.

c) En déduire que la matrice ${}^tVV$ est inversible.

PROBLÈME

On s'intéresse dans ce problème à quelques aspects mathématiques de la fonction de production d'une entreprise qui produit un certain bien à une époque donnée, à partir de deux facteurs de production travail et capital.

Dans tout le problème :

- *On note respectivement x et y les quantités de travail et de capital requises pour produire une certaine quantité de ce bien.*
- *On suppose que $x > 0$ et $y > 0$. On pose $\mathcal{D} = (\mathbb{R}_+^*)^2$ et pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$, $z = \dfrac{x}{y}$.*

La partie III est indépendante des parties I et II.

Partie I : Fonction de production CES (Constant Elasticity of Substitution).

Dans toute cette partie, on note c un réel vérifiant $0 < c < 1$ et θ un réel vérifiant $\theta < 1$ avec $\theta \neq 0$.
Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}, \quad f(x,y) = \Big(c\,x^\theta + (1-c)\,y^\theta\Big)^{\frac{1}{\theta}} \quad (\textit{fonction de production CES})$$

1. *Exemple.* Dans cette question **uniquement,** on prend $\theta = -1$ et $c = \dfrac{1}{2}$.

a) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$, on a : $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x+y}$. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ et calculer pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$, les dérivées partielles $\partial_1(f)(x,y)$ et $\partial_2(f)(x,y)$.

b) Soit w et U les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t>0,\ w(t)=\dfrac{2t}{1+t}$ et $U(t)=w(t)-t\,w'(t)$.
Dresser le tableau de variation de la fonction U sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier la convexité de U sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) On rappelle que $z=\dfrac{x}{y}$. Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathcal{D}$, on a $f(x,y)=y\,w(z)$.

d) Vérifier pour tout $(x,y)\in\mathcal{D}$, les relations : $\partial_1(f)(x,y)=w'(z)$ et $\partial_2(f)(x,y)=U(z)$.

2. a) Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathcal{D}$ et pour tout réel $\lambda>0$, on a : $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda\,f(x,y)$.

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ et, pour tout $(x,y)\in\mathcal{D}$, calculer $\partial_1(f)(x,y)$ et $\partial_2(f)(x,y)$.

c) Déterminer pour tout $y>0$ fixé, le signe et la monotonie de la fonction $x\mapsto\partial_1(f)(x,y)$.
Déterminer pour tout $x>0$ fixé, le signe et la monotonie de la fonction $y\mapsto\partial_2(f)(x,y)$.

3. Soit G la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par $G(x,y)=\dfrac{\partial_1(f)(x,y)}{\partial_2(f)(x,y)}$ (*taux marginal de substitution technique*) et g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t>0,\ g(t)=\dfrac{c}{1-c}t^{-1+\theta}$.

a) Pour tout $(x,y)\in\mathcal{D}$, exprimer $G(x,y)$ en fonction de $g(z)$.

b) Pour tout $t>0$, on pose $s(t)=-\dfrac{g(t)}{t\,g'(t)}$. Calculer $s(z)$ (*élasticité de substitution*). Conclusion.

4. Soit w et U les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t>0,\ w(t)=f(t,1)$ et $U(t)=w(t)-t\,w'(t)$.

a) Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathcal{D}$, on a : $f(x,y)=y\,w(z)$.

b) En distinguant les deux cas $0<\theta<1$ et $\theta<0$, dresser le tableau de variation de U sur $\mathbb{R}_+^*$.
Préciser $\lim\limits_{t\to 0^+}U(t)$, $\lim\limits_{t\to+\infty}U(t)$ ainsi que la convexité de U sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie II : Caractérisation des fonctions de production à élasticité de substitution constante.

Dans toute cette partie, on note Ψ une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant la condition $\Psi(1,1)=1$ et pour tout réel $\lambda>0$, la relation : $\Psi(\lambda x,\lambda y)=\lambda\,\Psi(x,y)$.
De plus, on suppose que pour tout $y>0$ fixé, la fonction $x\mapsto\partial_1(\Psi)(x,y)$ est strictement positive et strictement décroissante et que pour tout $x>0$ fixé, la fonction $y\mapsto\partial_2(\Psi)(x,y)$ est également strictement positive et strictement décroissante.

5. Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t>0,\ v(t)=\Psi(t,1)$.

a) Justifier que la fonction v est de classe $\mathcal{C}^2$, strictement croissante et concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t>0,\ \varphi(t)=v(t)-t\,v'(t)$. On suppose l'existence de la limite de $\varphi(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures et que $\lim\limits_{t\to 0^+}\varphi(t)=\mu$, avec $\mu\geqslant 0$.
Déterminer pour tout $t>0$, le signe de $\varphi(t)$ et montrer que $\mu\leqslant 1$.

c) Montrer que : $\forall(x,y)\in\mathcal{D},\ \Psi(x,y)=y\,v(z)$.

6. a) Pour tout $t>0$, on pose : $h(t)=\dfrac{v'(t)}{\varphi(t)}$.
Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathcal{D}$, on a : $\dfrac{\partial_1(\Psi)(x,y)}{\partial_2(\Psi)(x,y)}=h(z)$.

b) Pour tout $t>0$, on pose : $\sigma(t)=-\dfrac{h(t)}{t\,h'(t)}$. Déterminer pour tout $t>0$, le signe de $\sigma(t)$.

7. Les fonctions σ et h sont celles qui ont été définies dans la question ***6***. On suppose que la fonction σ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$; on note σ_0 cette constante et on suppose $\sigma_0 \neq 1$. On pose : $r = 1 - \dfrac{1}{\sigma_0}$.

a) Pour tout $t > 0$, on pose $\ell(t) = t^{1-r}h(t)$. Calculer $\ell'(t)$ et en déduire que : $\forall t > 0$, $h(t) = h(1)t^{r-1}$.

b) Par une méthode analogue à celle de la question ***7a***, établir la relation :

$$\forall t > 0,\ v(t) = \left(\frac{1 + h(1)t^r}{1 + h(1)}\right)^{\frac{1}{r}}$$

c) En déduire l'existence d'une constante $a \in]0,1[$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathcal{D}$, $\Psi(x,y) = (ax^r + (1-a)y^r)^{\frac{1}{r}}$.

d) Quelle conclusion peut-on tirer des résultats des questions ***3.b)*** et ***7.c)*** ?

8. Soit $a \in]0,1[$. Pour tout $t > 0$, soit S_t la fonction définie sur $]-\infty, 1[\setminus\{0\}$ par : $S_t(r) = (at^r + 1 - a)^{\frac{1}{r}}$.

a) On pose $H_t(r) = \ln S_t(r)$. Calculer la limite de $S_t(r)$ lorsque r tend vers 0.

b) Pour tout couple $(x,y) \in \mathcal{D}$ fixé, on pose : $N_{(x,y)}(r) = y\, S_z(r)$ et $F(x,y) = \lim\limits_{r \to 0} N_{(x,y)}(r)$.
Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$, on a $F(x,y) = x^a\, y^{1-a}$ (*fonction de production de Cobb-Douglas*).

Partie III : Estimation des paramètres d'une fonction de production de Cobb-Douglas.

Soit a un réel vérifiant $0 < a < 1$ et B un réel strictement positif.
On suppose que la production totale Q présente une composante déterministe et une composante aléatoire.

- La *composante déterministe* est une fonction de production de type Cobb-Douglas, c'est-à-dire telle que :
$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}, \quad f(x,y) = Bx^a y^{1-a}$$
- La *composante aléatoire* est une variable aléatoire de la forme $\exp(R)$ où R est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée, de variance $\sigma^2 > 0$.
- La *production totale* Q est une variable aléatoire à valeurs strictement positives telle que :
$$Q = Bx^a y^{1-a} \exp(R)$$

On suppose que les variables aléatoires Q et R sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On pose : $b = \ln(B)$, $u = \ln(x) - \ln(y)$ et $T = \ln(Q) - \ln(y)$. On a donc : $T = au + b + R$.
On sélectionne n entreprises ($n \geqslant 1$) qui produisent le bien considéré à l'époque donnée.
On mesure pour chaque entreprise i ($i \in [\![1,n]\!]$) la quantité de travail x_i et la quantité de capital y_i utilisées ainsi que la quantité produite Q_i^*.
On suppose que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $x_i > 0$, $y_i > 0$ et $Q_i^* > 0$.
Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la production totale de l'entreprise i est alors une variable aléatoire Q_i telle que $Q_i = B\, x_i^a\, y_i^{1-a} \exp(R_i)$, où R_1, R_2, …, R_n sont des variables aléatoires supposées indépendantes et de même loi que R et le réel strictement positif Q_i^* est une réalisation de la variable aléatoire Q_i.
On pose pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $u_i = \ln(x_i) - \ln(y_i)$, $T_i = \ln(Q_i) - \ln(y_i)$ et $t_i = \ln(Q_i^*) - \ln(y_i)$.
Ainsi, pour chaque entreprise $i \in [\![1,n]\!]$, on a $T_i = au_i + b + R_i$ et le réel t_i est une réalisation de la variable aléatoire T_i.
On rappelle les définitions et résultats suivants :

- Si $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une série statistique, la moyenne et la variance empiriques, notées respectivement $\overline{v}$ et s_v^2, sont données par : $\overline{v} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} v_i$ et $s_v^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} (v_i - \overline{v})^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} v_i^2 - \overline{v}^2$.

- Si $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(w_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont deux séries statistiques, la covariance empirique de la série double $(v_i, w_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, notée $\operatorname{cov}(v, w)$, est donnée par :

$$\operatorname{cov}(v,w) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(v_i - \overline{v})(w_i - \overline{w}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i\, w_i - \overline{v}\,\overline{w} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(v_i - \overline{v})w_i$$

9. a) Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la variable aléatoire T_i suit la loi normale $\mathcal{N}\left(au_i + b, \sigma^2\right)$.

b) Les variables aléatoires $T_1, T_2, ..., T_n$ sont-elles indépendantes ?

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, soit φ_i la densité continue sur $\mathbb{R}$ de T_i :

$$\forall d \in \mathbb{R},\ \varphi_i(d) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(d - (au_i + b))^2\right)$$

Soit $\mathcal{F}$ l'ouvert défini par $\mathcal{F} =]0,1[\times\mathbb{R}$ et M la fonction de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$M(a,b) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n}\varphi_i(t_i)\right)$$

On suppose que : $0 < \operatorname{cov}(u,t) < s_u^2$.

10. a) Calculer le gradient $\nabla(M)(a,b)$ de M en tout point $(a,b) \in \mathcal{F}$.

b) En déduire que M admet sur $\mathcal{F}$ un unique point critique, noté $(\hat{a}, \hat{b})$.

c) Exprimer $\hat{a}$ et $\hat{b}$ en fonction de $\operatorname{cov}(u,t)$, s_u^2, $\overline{t}$ et $\overline{u}$.
($\hat{a}$ *et* $\hat{b}$ *sont les estimations de* a *et* b *par la méthode dite du maximum de vraisemblance*)

11. a) Soit $\nabla^2(M)(a,b)$ la matrice hessienne de M en $(a,b) \in \mathcal{F}$.
Montrer que $\nabla^2(M)(a,b) = -\dfrac{n}{\sigma^2}\begin{pmatrix} s_u^2 + \overline{u}^2 & \overline{u} \\ \overline{u} & 1 \end{pmatrix}$

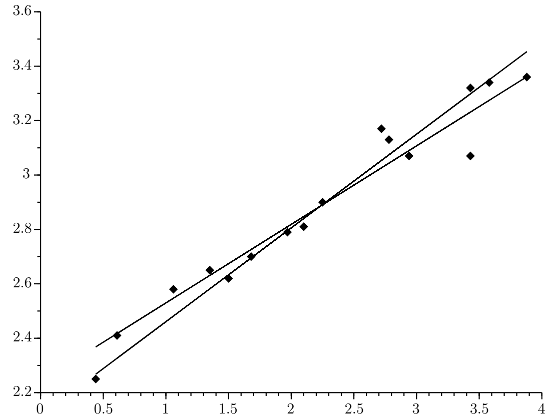
b) En déduire que M admet en $(\hat{a}, \hat{b})$ un maximum local.

12. Soit (h,k) un couple de réels non nuls. Calculer $M(\hat{a}+h, \hat{b}+k) - M(\hat{a}, \hat{b})$.
En déduire que M admet en $(\hat{a}, \hat{b})$ un maximum global.

13. On rappelle qu'en **Scilab**, les commandes `variance` et `corr` permettent de calculer respectivement la variance d'une série statistique et la covariance d'une série statistique double.
Si $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(w_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont deux séries statistiques, alors la variance de $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est calculable par `variance(v)` et la covariance de $(v_i, w_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est calculable par `corr(v,w,1)`.
On a relevé pour $n = 16$ entreprises qui produisent le bien considéré à l'époque donnée, les deux séries statistiques $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(t_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ reproduites dans les lignes 1 à 4 du code **Scilab** suivant dont la ligne 9 est incomplète :

```
1  u = [1.06, 0.44, 2.25, 3.88, 0.61, 1.97, 3.43, 2.10,
2       1.50, 1.68, 2.72, 1.35, 2.94, 2.78, 3.43, 3.58]
3  t = [2.58, 2.25, 2.90, 3.36, 2.41, 2.79, 3.32, 2.81,
4       2.62, 2.70, 3.17, 2.65, 3.07, 3.13, 3.07, 3.34]
5  plot2d(u, t, -4)
6  // -4 signifie que les points sont représentés par des losanges.
7  plot2d(u, corr(u,t,1)/variance(u)*u + mean(t) - corr(u,t,1)/variance(u)*mean(u))
8  // équation de la droite de régression de t en u.
9  plot2d(u,..............................................)
10 // équation de la droite de régression de u en t.
```

Le code précédent complété par la ligne 9 donne alors la figure suivante :



a) Compléter la ligne 9 du code permettant d'obtenir la figure précédente (*on reportera sur sa copie, uniquement la ligne 9 complétée*).

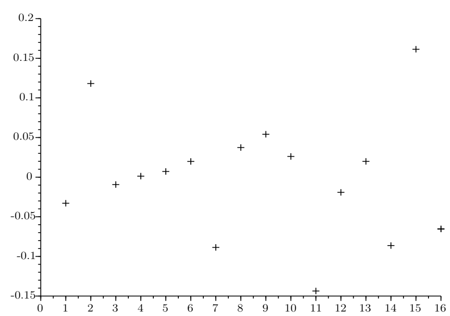
b) Interpréter le point d'intersection des deux droites de régression.

c) Estimer graphiquement les moyennes empiriques $\overline{u}$ et $\overline{t}$.

d) Le coefficient de corrélation empirique de la série statistique double $(u_i, t_i)_{1\leqslant i\leqslant 16}$ est-il plus proche de -1, de 1 ou de 0 ?

e) On reprend les lignes 1 à 4 du code précédent que l'on complète par les instructions 11 à 17 qui suivent et on obtient le graphique ci-dessous :

```
11  a0 = corr(u,t,1)/variance(u)
12  b0 = mean(t) - corr(u,t,1)/variance(u)*mean(u)
13  t0 = a0 * u + b0
14  e = t0 - t
15  p = 1:16
16  plot2d(p,e,-1)
17  // -1 signifie que les points sont représentés par des symboles d'addition.
```



Que représente ce graphique ? Quelle valeur peut-on conjecturer pour la moyenne des ordonnées des 16 points obtenus sur le graphique ?
Déterminer mathématiquement la valeur de cette moyenne.

14. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $A_n = \dfrac{1}{n\, s_u^2} \sum\limits_{i=1}^{n} (u_i - \overline{u})T_i$. On suppose que le paramètre σ^2 est connu.

a) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(A_n)$ et la variance $\mathbb{V}(A_n)$ de la variable aléatoire A_n.
Préciser la loi de A_n.

b) On suppose que a est un paramètre inconnu. Soit α un réel donné vérifiant $0 < \alpha < 1$.
On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et d_α le réel tel que $\Phi(d_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.
Déterminer un intervalle de confiance du paramètre a au niveau de confiance $1 - \alpha$.

HEC 2016 : le corrigé

EXERCICE

Soit n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Si M est une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice ${}^tM$ de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ désigne la transposée de M.
On identifie les ensembles $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ en assimilant une matrice de $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ à son unique coefficient.
On note $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{B}_p$ la base canonique de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Si $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ ($q \in \mathbb{N}^*$), *on admet* que ${}^t(MN) = {}^tN\,{}^tM$.

1. Soit X une matrice colonne non nulle de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de composantes $x_1, x_2, ..., x_n$ dans la base $\mathscr{B}_n$.
On pose : $A = X\,{}^tX$ et $\alpha = {}^tX X$.

a) Exprimer A et α en fonction de $x_1, x_2, ..., x_n$. Justifier que la matrice A est diagonalisable.

Démonstration.

- D'une part :

$$A = X\,{}^tX = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_1x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1x_n & x_2x_n & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix}}$$

- D'autre part :

$$\alpha = {}^tX\,X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

$$\boxed{\alpha = \sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est une matrice symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable.}}$$

□

b) Soit f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice A dans la base $\mathscr{B}_n$.
Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$; donner une base de $\mathrm{Im}(f)$ et préciser la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé :

$$\forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ f(Y) = AY$$

- On note $\mathscr{B}_n = (e_1, \dots, e_n)$. Donc :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ i^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

- Par caractérisation de l'image d'une application linéaire :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\right)$$

Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$f(e_i) = A \times e_i = \begin{pmatrix} x_1 x_i \\ x_2 x_i \\ \vdots \\ x_n x_i \end{pmatrix} = x_i \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_i \cdot X$$

Donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(x_1 \cdot X, x_2 \cdot X, \dots, x_n \cdot X\right)$$

Deux cas se présentent alors :

× si : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 0$, alors : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\right) = \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

× si : $\exists i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \neq 0$, alors : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(X)$.

Or X est un vecteur non nul de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Donc il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que : $x_i \neq 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(X).}$$

- Donc la famille (X) :

× engendre $\mathrm{Im}(f)$;

× est une famille libre, car elle est constituée d'un unique vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi, } (X) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f).}$$

- D'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) \ + \ \dim(\mathrm{Im}(f)) \ = \ \dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})) \ = \ n$$

Or la famille (X) est une base de $\mathrm{Im}(f)$, donc :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) \ = \ \mathrm{Card}((X)) \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n - 1.}$$

- Soit $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors il existe $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} Y \in \mathrm{Ker}(f) \quad &\Leftrightarrow \quad f(Y) = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \ \Leftrightarrow \ AY = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcccrcl} x_1^2 \, y_1 & + & x_1 x_2 \, y_2 & + & x_1 x_3 \, y_3 & + & \cdots & + & x_1 x_n \, y_n & = & 0 \\ x_1 x_2 \, y_1 & + & x_2^2 \, y_2 & + & x_2 x_3 \, y_3 & + & \cdots & + & x_2 x_n \, y_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ x_1 x_n \, y_1 & + & x_2 x_n \, y_2 & + & x_3 x_n \, y_3 & + & \cdots & + & x_n^2 \, y_n & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

On observe alors :

$$Y \in \mathrm{Ker}(f) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcccrcl} x_1(x_1\, y_1 & + & x_2\, y_2 & + & x_3\, y_3 & + & \cdots & + & x_n\, y_n) & = & 0 \\ x_2(x_1\, y_1 & + & x_2\, y_2 & + & x_3\, y_3 & + & \cdots & + & x_n\, y_n) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ x_n(x_1\, y_1 & + & x_2\, y_2 & + & x_3\, y_3 & + & \cdots & + & x_n\, y_n) & = & 0 \end{array}\right.$$

Or, comme X est un vecteur non nul, il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que : $x_{i_0} \neq 0$.
On effectue alors l'opération suivante :

$$L_{i_0} \leftarrow \frac{1}{x_{i_0}}\, L_{i_0}$$

La ligne L_{i_0} devient donc :

$$x_1\, y_1 \ + \ x_2\, y_2 \ + \ x_3\, y_3 \ + \ \cdots \ + \ x_n\, y_n \ = \ 0$$

On effectue ensuite les opérations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1 - x_1\, L_{i_0} \\ L_2 & \leftarrow & L_2 - x_2\, L_{i_0} \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - x_3\, L_{i_0} \\ & \vdots & \\ L_n & \leftarrow & L_n - x_n\, L_{i_0} \end{array}\right.$$

On obtient alors :

$$Y \in \mathrm{Ker}(f) \ \Leftrightarrow \ \{x_1\, y_1 \ + \ x_2\, y_2 \ + \ x_3\, y_3 \ + \ \cdots \ + \ x_n\, y_n \ = \ 0$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid x_1\, y_1 \ + \ x_2\, y_2 \ + \ x_3\, y_3 \ + \ \cdots \ + \ x_n\, y_n \ = \ 0\}}$$

□

c) Calculer la matrice AX.
Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associés.

Démonstration.

- On calcule :

$$AX = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_1x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1x_n & x_2x_n & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^3 + x_1x_2^2 + \cdots + x_1x_n^2 \\ x_2x_1^2 + x_2^3 + \cdots + x_2x_n^2 \\ \vdots \\ x_nx_1^2 + x_nx_2^2 + \cdots + x_n^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} = \alpha \cdot X$$

$$\boxed{AX = \alpha \cdot X}$$

- En résumé :
  × $f(X) = AX = \alpha \cdot X$,
  × $X \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

  Donc X est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\alpha \neq 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi le sous-espace propre associé à } \alpha \text{ vérifie :} \\ E_\alpha \supset \mathrm{Vect}\,(X).\end{array}}$$

- En notant $E_0 = \mathrm{Ker}(f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 0, on sait que :
  - × 0 et α sont valeurs propres de f,
  - × $\dim(E_0) = n-1$ et $\dim(E_\alpha) \geqslant 1$.

  Donc :
  $$\dim(E_0) \ + \ \dim(E_\alpha) \ \geqslant \ n$$
  De plus, f est diagonalisable, donc : $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(E_\lambda) \ = \ \dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})) \ = \ n$.
  On en déduit que :
  - × l'endomorphisme f n'admet pas d'autres valeurs propres que 0 et α (sinon : $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(E_\lambda) > n$)
  - × $\dim(E_0) + \dim(E_\alpha) = n$.

  $$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ admet exactement deux valeurs propres : 0 et } \alpha.}$$

- D'après ce qui précède :
  $$\underbrace{\dim(E_0)}_{= n-1} \quad + \quad \dim(E_\alpha) \quad = \quad n$$
  Donc $\dim(E_\alpha) = 1$. On obtient alors :
  - × la famille (X) est une famille libre de E_α,
  - × $\mathrm{Card}((X)) = 1 = \dim(E_\alpha)$.

  Donc (X) est une base de E_α.
  $$\boxed{\text{Finalement : } E_0 = \mathrm{Ker}(f) \text{ et } E_\alpha = \mathrm{Vect}\,(X).}$$

Commentaire

- Comme $\mathcal{F}$ est une base de vecteurs propres de f, on retrouve que f est diagonalisable. On a même :
  $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$
- On pouvait également montrer que 0 et α sont les seules valeurs propres de f en utilisant un polynôme annulateur de cet endomorphisme.
  Détaillons cette méthode.
  - × On remarque :
    $$A^2 \ = \ A \times A \ = \ X^tX \times X^tX \ = \ X \times {}^tX\,X \times {}^tX \ = \ X\,\alpha\,{}^tX \ = \ \alpha \cdot X^tX \ = \ \alpha \cdot A$$
    Donc : $A^2 - \alpha \cdot A = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.
    D'où : $Q(X) = X^2 - \alpha\,X = X(X-\alpha)$ est un polynôme annulateur de A.
    Ces racines sont 0 et α. Donc : $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A) \subset \{0, \alpha\}$.
  - × Comme on sait par ailleurs que 0 et α sont bien valeurs propres de f, on obtient :
    $$\mathrm{Sp}(f) = \{0, \alpha\}$$

2. On suppose que n et p vérifient $1 \leqslant p \leqslant n$.
Soit $(V_1, V_2, ..., V_p)$ une famille libre de p vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On note V la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont, dans cet ordre, $V_1, V_2, ..., V_p$.
Soit g l'application linéaire de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice V dans les bases $\mathscr{B}_p$ et $\mathscr{B}_n$.

a) Justifier que le rang de V est égal à p. Déterminer $\text{Ker}(g)$.

Démonstration.

- On note $\mathcal{G} = \text{Vect}\,(V_1, \dots, V_p)$.
  - × La famille $(V_1, \dots, V_p)$ engendre $\mathcal{G}$.
  - × La famille $(V_1, \dots, V_p)$ est libre.

  Donc $(V_1, \dots, V_p)$ est une base de $\mathcal{G}$.
  Ainsi :
  $$\text{rg}(V) = \dim(\text{Vect}\,(V_1, \dots, V_p)) = \dim(\mathcal{G}) = \text{Card}((V_1, \dots, V_p)) = p$$
  $$\boxed{\text{Donc : rg}(V) = p}$$

Commentaire

On pouvait aussi rédiger de la manière suivante.
Le rang d'une matrice est la dimension du sous-espace engendré par ses vecteurs colonnes, ici $V_1, \dots, V_p$.
Or la famille $(V_1, \dots, V_p)$ est libre. Donc : $\text{rg}(V) = p$.

- D'après le théorème du rang :
  $$\begin{array}{ccccccc} \dim(\text{Ker}(g)) & + & \dim(\text{Im}(g)) & = & \dim(\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})) & = & p \\ & & \shortparallel & & & & \\ p \ = \ \text{rg}(V) & = & \text{rg}(g) & & & & \end{array}$$
  Donc : $\dim(\text{Ker}(g)) = 0$.
  $$\boxed{\text{Ainsi : Ker}(g) = \{0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})}\}.}$$

□

b) Soit Y une matrice colonne de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Montrer que l'on a $VY = 0$ si et seulement si l'on a ${}^tVVY = 0$.

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons : $VY = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors :
$${}^tVVY = {}^tV \times VY = {}^tV \times 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$$

($\Leftarrow$) Supposons ${}^tVVY = 0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$. Alors : ${}^tY{}^tVVY = 0_{\mathbb{R}}$.
Donc, en notant $Z = VY$, on obtient :
$${}^tZZ = {}^t(VY)VY = {}^tY{}^tVVY = 0_{\mathbb{R}}$$
Or $Z \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc il existe $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$. D'où :
$$\sum_{i=1}^{n} z_i^2 = {}^tZZ = 0_{\mathbb{R}}$$
Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $z_i^2 \geqslant 0$. Donc :
$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ z_i^2 = 0 \quad \text{donc} \quad z_i = 0$$
Ainsi : $Z = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, c'est-à-dire : $VY = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{VY = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \ \Leftrightarrow\ {}^tVVY = 0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})}}$$

□

c) En déduire que la matrice ${}^tVV$ est inversible.

Démonstration.
On note h l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_p}(h) = {}^tVV$.

- D'après la question précédente, pour toute matrice colonne $Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$:

$$g(Y) = VY = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \quad \Leftrightarrow \quad h(Y) = {}^tVVY = 0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$$

  Donc $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(h)$.

- De plus, d'après la question ***2.a)***, $\mathrm{Ker}(g) = \{0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})}\}$. Donc $\mathrm{Ker}(h) = \{0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})}\}$.
  D'où h est injective.
  L'application h est un endomorphisme injectif en dimension finie. Donc h est bijectif.

$$\boxed{\text{Ainsi } {}^tVV \text{ est inversible.}}$$

□

PROBLÈME

On s'intéresse dans ce problème à quelques aspects mathématiques de la fonction de production d'une entreprise qui produit un certain bien à une époque donnée, à partir de deux facteurs de production travail et capital.

Dans tout le problème :

- *On note respectivement x et y les quantités de travail et de capital requises pour produire une certaine quantité de ce bien.*
- *On suppose que $x > 0$ et $y > 0$. On pose $\mathcal{D} = (\mathbb{R}_+^*)^2$ et pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, $z = \dfrac{x}{y}$.*

La partie III est indépendante des parties I et II.

Partie I : Fonction de production CES (Constant Elasticity of Substitution).

Dans toute cette partie, on note c un réel vérifiant $0 < c < 1$ et θ un réel vérifiant $\theta < 1$ avec $\theta \neq 0$. Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}, \quad f(x, y) = \Big(c\, x^\theta + (1 - c)\, y^\theta\Big)^{\frac{1}{\theta}} \quad \textit{(fonction de production CES)}$$

1. *Exemple.* Dans cette question **uniquement,** on prend $\theta = -1$ et $c = \dfrac{1}{2}$.

a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a : $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x + y}$. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ et calculer pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, les dérivées partielles $\partial_1(f)(x, y)$ et $\partial_2(f)(x, y)$.

Démonstration.

- Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \left(\frac{1}{2}x^{-1} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) y^{-1}\right)^{\frac{1}{-1}} \\ &= \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y}\right)^{-1} = \left(\frac{y+x}{2xy}\right)^{-1} \\ &= \frac{2xy}{y+x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathcal{D},\ f(x, y) = \frac{2xy}{x + y}}$$

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ en tant que quotient de fonctions polynomiales (donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$) dont le dénominateur ne s'annule pas ($\forall (x, y) \in \mathcal{D}$, $x + y > 0$).

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathcal{D}.}$$

- Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$.

$$\partial_1(f)(x, y) = \frac{2y(\cancel{x} + y) - \cancel{2xy}}{(x+y)^2} = \frac{2y^2}{(x+y)^2}$$

De même :

$$\partial_2(f)(x, y) = \frac{2x^2}{(x+y)^2}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\forall (x, y) \in \mathcal{D}, \\ \partial_1(f)(x, y) = \frac{2y^2}{(x+y)^2} \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x, y) = \frac{2x^2}{(x+y)^2}\end{gathered}}$$

$\square$

b) Soit w et U les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t > 0,\ w(t) = \dfrac{2t}{1+t}$ et $U(t) = w(t) - t\,w'(t)$.
Dresser le tableau de variation de la fonction U sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier la convexité de U sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- La fonction w est bien dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas ($\forall t \in]0, +\infty[,\ 1 + t > 0$).
Soit $t > 0$.
$$w'(t) \;=\; \frac{2(1+\cancel{t}) - \cancel{2t}}{(1+t)^2} \;=\; \frac{2}{(1+t)^2}$$

- On en déduit :
$$U(t) \;=\; w(t) - t\,w'(t) \;=\; \frac{2t}{1+t} - \frac{2t}{(1+t)^2} \;=\; \frac{2t(\cancel{1}+t) - \cancel{2t}}{(1+t)^2} \;=\; \frac{2t^2}{(1+t)^2}$$

- La fonction U est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas ($\forall t \in]0, +\infty[,\ (1+t)^2 > 0$).
Soit $t > 0$.
$$U'(t) \;=\; \frac{4t(1+t)^2 - 4t^2(1+t)}{(1+t)^4} \;=\; \frac{(1+t)(4t(1+\cancel{t}) - \cancel{4t^2})}{(1+t)^4} \;=\; \frac{4t}{(1+t)^3}$$
On en déduit :
$$\forall t > 0,\ U'(t) = \frac{4t}{(1+t)^3} > 0$$
On obtient le tableau de variations suivant :

t	0 $\qquad$ $+\infty$
Signe de $U'(t)$	$+$
Variations de U	$0 \nearrow 2$

Détaillons les éléments de ce tableau :

× Calculons $\lim\limits_{t \to 0^+} U(t)$.
$$\lim_{t \to 0^+} U(t) = \frac{2 \times 0^2}{(1+0)^2} = 0$$

× Calculons $\lim\limits_{t \to +\infty} U(t)$.
$$U(t) = \frac{2t^2}{(1+t)^2} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{2\cancel{t^2}}{\cancel{t^2}} = 2$$
Donc : $\lim\limits_{t \to +\infty} U(t) = 2$.

- Soit $t > 0$.

$$U''(t) = \frac{4(1+t)^3 - 12t(1+t)^2}{(1+t)^6} = \frac{(1+t)^2\,(4(1+t) - 12t)}{(1+t)^6} = \frac{4(1-2t)}{(1+t)^4}$$

Donc :

$$U''(t) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - 2t \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2} \geqslant t$$

Donc la fonction U'' s'annule et change de signe en $\frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{La fonction } U \text{ n'est ni convexe, ni concave.}}$$

Commentaire

Sa courbe représentative admet un point d'inflexion au point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$.

□

c) On rappelle que $z = \frac{x}{y}$. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a $f(x, y) = y\,w(z)$.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$. On a bien $z = \frac{x}{y} > 0$.

$$y\,w(z) = y\,\frac{2z}{1+z} = \cancel{y}\,\frac{2\frac{x}{\cancel{y}}}{1+\frac{x}{y}} = \frac{2x}{\frac{y+x}{y}} = \frac{2xy}{y+x} = f(x, y)$$

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathcal{D},\ f(x, y) = yw(z)}$$

□

d) Vérifier pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, les relations : $\partial_1(f)(x, y) = w'(z)$ et $\partial_2(f)(x, y) = U(z)$.

Démonstration.

- Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$.

$$w'(z) = \frac{2}{(1+z)^2} = \frac{2}{\left(1+\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{2}{\left(\frac{y+x}{y}\right)^2} = \frac{2}{\frac{(x+y)^2}{y^2}} = \frac{2y^2}{(x+y)^2} = \partial_1(f)(x, y)$$

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathcal{D},\ \partial_1(f)(x, y) = w'(z)}$$

- Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$.

$$U(z) = \frac{2z^2}{(1+z)^2} = \frac{2\left(\frac{x}{y}\right)^2}{\left(1+\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{2\frac{x^2}{\cancel{y^2}}}{\frac{(x+y)^2}{\cancel{y^2}}} = \frac{2x^2}{(x+y)^2} = \partial_2(f)(x, y)$$

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathcal{D},\ \partial_2(f)(x, y) = U(z)}$$

□

2. a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$ et pour tout réel $\lambda > 0$, on a : $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda\, f(x, y)$.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$. Soit $\lambda > 0$.

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \big(c(\lambda x)^\theta + (1-c)(\lambda y)^\theta\big)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= \big(c\lambda^\theta x^\theta + (1-c)\lambda^\theta y^\theta\big)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= \big(\lambda^\theta(cx^\theta + (1-c)y^\theta)\big)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= \lambda^{\cancel{\theta} \times \frac{1}{\cancel{\theta}}}(cx^\theta + (1-c)y^\theta))^{\frac{1}{\theta}} \\ &= \lambda\, f(x, y) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathcal{D},\ \forall \lambda > 0,\ f(\lambda x, \lambda y) = \lambda\, f(x, y).}$$

□

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ et, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, calculer $\partial_1(f)(x, y)$ et $\partial_2(f)(x, y)$.

Démonstration.

- La fonction $(x, y) \mapsto x^\theta$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ car elle est la composée $\psi_1 \circ g_1$ où :
  - × $g_1 : (x, y) \mapsto x$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ en tant que fonction polynomiale,
    - telle que $g_1(\mathcal{D}) \subset\,]0, +\infty[$.
  - × $\psi_1 : u \mapsto u^\theta$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

  De même, la fonction $(x, y) \mapsto y^\theta$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$.
  Donc la fonction $(x, y) \mapsto cx^\theta + (1-c)y^\theta$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ en tant que combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$.
  D'où la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ car elle est la composée $\psi_2 \circ g_2$ où :
  - × $h_1 : (x, y) \mapsto cx^\theta + (1-c)y^\theta$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$,
    - telle que : $h_1(\mathcal{D}) \subset\,]0, +\infty[$, car $c > 0$ et $1 - c > 0$.
  - × $h_2 : u \mapsto u^{\frac{1}{\theta}}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathcal{D}.}$$

Commentaire

On détaille ici assez précisément l'obtention du caractère $\mathcal{C}^2$ de f.
Le détail d'une seule composée sur les deux aurait sans doute permis d'obtenir tous les points.

- Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$.

$$\partial_1(f)(x, y) \;=\; \frac{1}{\cancel{\theta}} \times c\cancel{\theta} x^{\theta-1} \times (cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}-1} \;=\; cx^{\theta-1}(cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}-1}$$

De même :

$$\partial_2(f)(x, y) \;=\; \frac{1}{\cancel{\theta}} \times (1-c)\cancel{\theta} y^{\theta-1} \times (cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}-1} \;=\; (1-c)y^{\theta-1}(cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}-1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\forall (x, y) \in \mathcal{D},\ \partial_1(f)(x, y) = cx^{\theta-1}(cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}-1} \\ &\qquad \text{et } \partial_2(f)(x, y) = (1-c)y^{\theta-1}(cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}-1} \end{aligned}}$$

□

c) Déterminer pour tout $y > 0$ fixé, le signe et la monotonie de la fonction $x \mapsto \partial_1(f)(x, y)$.
Déterminer pour tout $x > 0$ fixé, le signe et la monotonie de la fonction $y \mapsto \partial_2(f)(x, y)$.

Démonstration.

- Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$. On a :
  - × $c > 0$ et $1 - c > 0$ (car $0 < c < 1$),
  - × $x^{\theta-1} > 0$ et $y^{\theta-1} > 0$,
  - × $cx^\theta + (1-c)y^\theta > 0$. Donc : $(cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}-1} > 0$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall (x,y) \in \mathcal{D},\ \partial_1(f)(x,y) > 0 \text{ et } \partial_2(f)(x,y) > 0.}$$

- Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned}
\partial_1(f)(x,y) &= cx^{\theta-1}(cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}-1} = c\frac{1}{x^{1-\theta}}\left((cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}}\right)^{1-\theta} \\
&= c\left(\frac{(cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}}}{x}\right)^{1-\theta} = c\left(\left(\frac{cx^\theta + (1-c)y^\theta)}{x^\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)^{1-\theta} \\
&= c\left(c + (1-c)\left(\frac{y}{x}\right)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}-1}
\end{aligned}$$

Deux cas se présentent alors :

× si $\theta > 0$, alors $\dfrac{1}{\theta} - 1 > 0$, car $\theta < 1$. Soit $(x_1, x_2) \in]0, +\infty[^2$.

$$\begin{aligned}
& x_1 < x_2 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} && \textit{(car } x \mapsto \frac{1}{x} \textit{ est strictement décroissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{y}{x_1} > \frac{y}{x_2} && \textit{(car } y > 0\textit{)} \\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{y}{x_1}\right)^\theta > \left(\frac{y}{x_2}\right)^\theta && \textit{(car, comme } \theta > 0, x \mapsto x^\theta \textit{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
\Leftrightarrow\ & (1-c)\left(\frac{y}{x_1}\right)^\theta > (1-c)\left(\frac{y}{x_2}\right)^\theta && \textit{(car } c < 1\textit{)} \\
\Leftrightarrow\ & c + (1-c)\left(\frac{y}{x_1}\right)^\theta > c + (1-c)\left(\frac{y}{x_2}\right)^\theta \\
\Leftrightarrow\ & \left(c + (1-c)\left(\frac{y}{x_1}\right)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}-1} > \left(c + (1-c)\left(\frac{y}{x_2}\right)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}-1} && \textit{(car, comme } \frac{1}{\theta} - 1 > 0, x \mapsto x^{\frac{1}{\theta}-1} \textit{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
\Leftrightarrow\ & c\left(c + (1-c)\left(\frac{y}{x_1}\right)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}-1} > c\left(c + (1-c)\left(\frac{y}{x_2}\right)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}-1} && \textit{(car } c > 0\textit{)} \\
\Leftrightarrow\ & \partial_1(f)(x_1, y) > \partial_1(f)(x_2, y)
\end{aligned}$$

Donc $x \mapsto \partial_1(f)(x, y)$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

× si $\theta < 0$, alors on a : $\dfrac{1}{\theta} - 1 < 0$.
Avec un raisonnement analogue au précédent, on obtient que la fonction $x \mapsto \partial_1(f)(x,y)$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

On prouverait de même que $y \mapsto \partial_2(f)(x,y)$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{Les fonctions } x \mapsto \partial_1(f)(x,y) \text{ et } y \mapsto \partial_2(f)(x,y) \text{ sont strictement décroissantes sur }]0,+\infty[.}$$

□

3. Soit G la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par $G(x,y) = \dfrac{\partial_1(f)(x,y)}{\partial_2(f)(x,y)}$ (*taux marginal de substitution technique*) et g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t > 0$, $g(t) = \dfrac{c}{1-c} t^{-1+\theta}$.

a) Pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$, exprimer $G(x,y)$ en fonction de $g(z)$.

Démonstration.
Soit $(x,y) \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \frac{\partial_1(f)(x,y)}{\partial_2(f)(x,y)} \\ &= \frac{c x^{\theta-1} \cancel{(cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}-1}}}{(1-c) y^{\theta-1} \cancel{(cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}-1}}} \\ &= \frac{c}{1-c} \frac{x^{\theta-1}}{y^{\theta-1}} = \frac{c}{1-c} \left(\frac{x}{y}\right)^{\theta-1} \\ &= \frac{c}{1-c} z^{\theta-1} = \frac{c}{1-c} z^{-1+\theta} = g(z) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathcal{D},\ G(x,y) = g(z)}$$

□

b) Pour tout $t > 0$, on pose $s(t) = -\dfrac{g(t)}{t\, g'(t)}$. Calculer $s(z)$ (*élasticité de substitution*). Conclusion.

Démonstration.

- La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ qui ne s'annule pas ($\forall t > 0$, $t^{1-\theta} > 0$).
Soit $t > 0$.
$$g'(t) = \frac{c}{1-c}(-1+\theta) t^{-2+\theta}$$
- Soit $(x,y) \in \mathcal{D}$. Alors $z = \dfrac{x}{y} > 0$.

$$s(z) = -\frac{g(z)}{z g'(z)} = -\frac{\cancel{\frac{c}{1-c}} z^{-1+\theta}}{z \cancel{\frac{c}{1-c}} (-1+\theta) z^{-2+\theta}} = -\frac{\cancel{z^{-1+\theta}}}{\cancel{z^{-1+\theta}}(-1+\theta)} = \frac{1}{1-\theta}$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathcal{D},\ s(z) = \frac{1}{1-\theta}}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que l'élasticité de substitution est constante, égale à } \frac{1}{1-\theta}. \text{ En particulier, elle ne dépend pas de } z.}$$

□

4. Soit w et U les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t > 0$, $w(t) = f(t,1)$ et $U(t) = w(t) - t\,w'(t)$.

a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a : $f(x, y) = y\,w(z)$.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$.

$$\begin{array}{rcl} y\,w(z) & = & y\,f(z,1) \;=\; y(cz^\theta + (1-c)1^\theta)^{\frac{1}{\theta}} \\ & = & y\left(c\left(\dfrac{x}{y}\right)^\theta + 1 - c\right)^{\frac{1}{\theta}} \;=\; y\left(c\,\dfrac{x^\theta}{y^\theta} + 1 - c\right)^{\frac{1}{\theta}} \\ & = & (y^\theta)^{\frac{1}{\theta}}\left(c\,\dfrac{x^\theta}{y^\theta} + 1 - c\right)^{\frac{1}{\theta}} \;=\; \left(y^\theta\left(c\,\dfrac{x^\theta}{y^\theta} + 1 - c\right)\right)^{\frac{1}{\theta}} \\ & = & \left(c\,\cancel{y^\theta}\,\dfrac{x^\theta}{\cancel{y^\theta}} + (1-c)y^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \;=\; (cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}} \\ & = & f(x,y) \end{array}$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathcal{D},\ f(x,y) = y\,w(z)}$$

□

b) En distinguant les deux cas $0 < \theta < 1$ et $\theta < 0$, dresser le tableau de variation de U sur $\mathbb{R}_+^*$. Préciser $\lim\limits_{t \to 0^+} U(t)$, $\lim\limits_{t \to +\infty} U(t)$ ainsi que la convexité de U sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- La fonction w est dérivable sur $]0, +\infty[$.
  Soit $t > 0$.

$$w'(t) \;=\; \frac{1}{\cancel{\theta}} \times c\cancel{\theta} t^{\theta-1} \times (ct^\theta + 1 - c)^{\frac{1}{\theta}-1} \;=\; ct^{\theta-1}(ct^\theta + 1 - c)^{\frac{1}{\theta}-1}$$

- On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} U(t) & = & w(t) - t\,w'(t) \\ & = & (ct^\theta + 1 - c)^{\frac{1}{\theta}} - t \times ct^{\theta-1}(ct^\theta + 1 - c)^{\frac{1}{\theta}-1} \\ & = & (ct^\theta + 1 - c)^{\frac{1}{\theta}} - ct^\theta(ct^\theta + 1 - c)^{\frac{1}{\theta}-1} \\ & = & (ct^\theta + 1 - c)^{\frac{1}{\theta}-1}\left((\cancel{ct^\theta} + 1 - c) - \cancel{ct^\theta}\right) \\ & = & (1-c)(ct^\theta + 1 - c)^{\frac{1}{\theta}-1} \end{array}$$

- La fonction U est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.
  Soit $t > 0$.

$$\begin{array}{rcl} U'(t) & = & (1-c)\left(\dfrac{1}{\theta} - 1\right) \times c\theta t^{\theta-1} \times (ct^\theta + 1 - c)^{\frac{1}{\theta}-2} \\ & = & (1-c) \times \dfrac{1-\theta}{\cancel{\theta}} \times c\cancel{\theta} t^{\theta-1} \times (ct^\theta + 1 - c)^{\frac{1}{\theta}-2} \\ & = & c(1-c)(1-\theta)t^{\theta-1}(ct^\theta + 1 - c)^{\frac{1}{\theta}-2} \end{array}$$

  Or, on a :
  × $c > 0$ et $1 - c > 0$ (car $0 < c < 1$),
  × $1 - \theta > 0$ (car $\theta < 1$),
  × $t^{\theta-1} > 0$ (car $t > 0$),
  × $ct^\theta + 1 - c) > 0$. Donc : $(ct^\theta + 1 - c)^{\frac{1}{\theta}-2} > 0$
  D'où : $U'(t) > 0$.
  Ainsi, la fonction U est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

- Pour les calculs de limites, deux cas se présentent.
  - × Si $0 < \theta < 1$, alors : $\lim\limits_{t \to 0^+} t^\theta = 0$.
    De plus, par stricte croissance de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$: $\dfrac{1}{\theta} > 1$.
    D'où :
    $$\lim_{t \to 0^+} U(t) \ = \ (1-c)(1-c)^{\frac{1}{\theta}-1} \ = \ (1-c)^{\frac{1}{\theta}}$$
    Par ailleurs : $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\theta = +\infty$. Donc, comme $c > 0$:
    $$\lim_{t \to +\infty} (ct^\theta + 1 - c) \ = \ +\infty$$
    D'où, comme $\dfrac{1}{\theta} - 1 > 0$:
    $$\lim_{t \to +\infty} U(t) \ = \ +\infty$$
    On obtient alors le tableau de variations suivant :

t	0		$+\infty$
Signe de $U'(t)$		$+$	
Variations de U	$(1-c)^{\frac{1}{\theta}}$	$\nearrow$	$+\infty$

  - × Si $\theta < 0$, alors : $\lim\limits_{t \to 0^+} t^\theta = +\infty$.
    Donc, comme $c > 0$:
    $$\lim_{t \to 0^+} (ct^\theta + 1 - c) \ = \ +\infty$$
    De plus : $\dfrac{1}{\theta} < 0$. D'où, comme $\dfrac{1}{\theta} - 1 < 0$:
    $$\lim_{t \to +\infty} U(t) \ = \ 0$$
    Par ailleurs : $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\theta = 0$. Donc, comme $\dfrac{1}{\theta} - 1 < 0$:
    $$\lim_{t \to +\infty} U(t) \ = \ (1-c)(1-c)^{\frac{1}{\theta}-1} \ = \ (1-c)^{\frac{1}{\theta}}$$
    On obtient alors le tableau de variations suivant :

t	0		$+\infty$
Signe de $U'(t)$		$+$	
Variations de U	0	$\nearrow$	$(1-c)^{\frac{1}{\theta}}$

Commentaire

On retrouve bien le cas $\theta = -1$ développé en question ***1.b)***.

- Étudions l'éventuelle convexité de U.
  Soit $t > 0$.

$$\begin{aligned} U''(t) &= c(1-c)(1-\theta)(\theta-1)t^{\theta-2}(ct^\theta+1-c)^{\frac{1}{\theta}-2} \\ &\quad + c(1-c)(1-\theta)t^{\theta-1}\left(\frac{1}{\theta}-2\right) \times c\theta t^{\theta-1} \times (ct^\theta+1-c)^{\frac{1}{\theta}-3} \\ &= c(1-c)(1-\theta)t^{\theta-2}(ct^\theta+1-c)^{\frac{1}{\theta}-3}\left((\theta-1)(ct^\theta+1-c)+t^\theta\,\frac{1-2\theta}{\cancel{\theta}}\,c\cancel{\theta}\right) \\ &= c(1-c)(1-\theta)t^{\theta-2}(ct^\theta+1-c)^{\frac{1}{\theta}-3}(c\theta t^\theta - \cancel{ct^\theta} + (\theta-1)(1-c) + \cancel{ct^\theta} - 2c\theta t^\theta) \\ &= c(1-c)(1-\theta)t^{\theta-2}(ct^\theta+1-c)^{\frac{1}{\theta}-3}\left((\theta-1)(1-c)-c\theta t^\theta\right) \end{aligned}$$

On a : $0 < c < 1$, $\theta < 1$ et $t > 0$. Donc :

$$c(1-c)(1-\theta)t^{\theta-2}(ct^\theta+1-c)^{\frac{1}{\theta}-3} > 0$$

D'où :

$$\begin{aligned} U''(t) \leqslant 0 &\Leftrightarrow (\theta-1)(1-c) - c\,\theta\,t^\theta \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow (\theta-1)(1-c) \leqslant c\,\theta\,t^\theta \\ &\Leftrightarrow \frac{(\theta-1)(1-c)}{c\theta} \leqslant t^\theta \quad (*) \end{aligned}$$

Deux cas se présentent alors :

× si $0 < \theta < 1$, alors : $\theta - 1 < 0$. Donc :

$$\frac{(\theta-1)(1-c)}{c\,\theta} < 0$$

Or : $t > 0$. Donc $t^\theta > 0$.
L'inégalité $(*)$ est donc vérifiée pour tout $t \in]0,+\infty[$.
Donc : $\forall t \in]0,+\infty[$, $U''(t) \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{Si } 0 < \theta < 1, \text{ alors la fonction } U \text{ est concave sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

× si $\theta < 0$, alors :

$$\frac{(\theta-1)(1-c)}{c\,\theta} > 0$$

De plus : $\dfrac{1}{\theta} < 0$. Donc, par stricte décroissance de la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{\theta}}$ sur $]0,+\infty[$:

$$U''(t) \leqslant 0 \Leftrightarrow \left(\frac{(\theta-1)(1-c)}{c\,\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \geqslant t$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } \theta < 0, \text{ la fonction } U \text{ n'est ni convexe, ni concave.} \\ \text{Elle admet un point d'inflexion d'abscisse } \left(\dfrac{(\theta-1)(1-c)}{c\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}.\end{array}}$$

$\square$

Partie II : Caractérisation des fonctions de production à élasticité de substitution constante.

Dans toute cette partie, on note Ψ une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant la condition $\Psi(1,1) = 1$ et pour tout réel $\lambda > 0$, la relation : $\Psi(\lambda x, \lambda y) = \lambda\, \Psi(x,y)$.
De plus, on suppose que pour tout $y > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto \partial_1(\Psi)(x,y)$ est strictement positive et strictement décroissante et que pour tout $x > 0$ fixé, la fonction $y \mapsto \partial_2(\Psi)(x,y)$ est également strictement positive et strictement décroissante.

5. Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t > 0,\ v(t) = \Psi(t,1)$.

a) Justifier que la fonction v est de classe $\mathcal{C}^2$, strictement croissante et concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- La fonction Ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$.

$$\boxed{\text{Donc la fonction } v \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

- Soit $y > 0$.
Par définition de la dérivée partielle première $\partial_1(\Psi)$ de Ψ, la fonction $x \mapsto \Psi(x,y)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ (car Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$) de dérivée $x \mapsto \partial_1(\Psi)(x,y)$.
Donc, en prenant $y = 1$, on obtient :

$$\forall t > 0,\ v'(t) = \partial_1(\Psi)(t,1)$$

Or, d'après l'énoncé, la fonction $x \mapsto \partial_1(\Psi)(t,1)$ vérifie : $\forall x > 0,\ \partial_1(\Psi)(t,1) > 0$.
Donc : $\forall t > 0,\ v'(t) > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } v \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[.}$$

Toujours d'après l'énoncé, la fonction $x \mapsto \partial_1(\Psi)(x,1)$ est strictement décroissante.
Donc la fonction v' est strictement décroissante.

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } v \text{ est concave sur }]0,+\infty[.}$$

Commentaire

Pour déterminer v', on aurait pu utiliser la définition de la dérivée d'une fonction (à l'aide du taux d'accroissement).
Soit $t > 0$.

$$\begin{array}{rcll} v'(t) & = & \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{v(t+h)-v(t)}{h} & \\ & = & \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\Psi(t+h,1)-\Psi(t,1)}{h} & \textit{(par définition de } v\textit{)} \\ & = & \partial_1(\Psi)(t,1) & \textit{(par définition de la dérivée partielle première } \partial_1(\Psi)\textit{)} \end{array}$$

Commentaire

La preuve faite ici du caractère $\mathcal{C}^2$ de v rapportait sans doute la totalité des points de barème. Mais elle n'est en fait pas si évidente.
Plus précisément, v est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ car elle est la composée $\Psi \circ h_1$ où :

× $h_1 : t \mapsto (t, 1)$ est :
  - de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$,
  - telle que : $h_1(]0, +\infty[) =]0, +\infty[\times \{1\} \subset \mathcal{D}$.

× Ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$.

Cependant, les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, telles que :

$$h_1 : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t, 1) \end{array}$$

ne sont pas étudiées en ECE.
Pour rédiger une preuve complète du caractère $\mathcal{C}^2$ de v en restant dans le cadre du programme ECE, on aurait pu rédiger de la manière suivante :

- la fonction Ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$, donc, par définition de la dérivée partielle première $\partial_1(\Psi)$, la fonction v est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée v' définie par :

$$\forall t > 0, \ v'(t) = \partial_1(\Psi)(t, 1)$$

- De même, par définition de la dérivée partielle seconde $\partial^2_{1,1}(\Psi)$, la fonction v' est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée v'' définie par :

$$\forall t > 0, \ v''(t) = \partial^2_{1,1}(\Psi)(t, 1)$$

- Il reste à montrer que la fonction v'' est continue sur $]0, +\infty[$. Pour cela, on utilise la définition de la continuité. On note d la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.
  La fonction $\partial^2_{1,1}(\Psi)$ est continue sur $\mathcal{D}$.
  Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$. On a alors : $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ \forall (x, y) \in \mathcal{D}$,

$$d((x_0, y_0), (x, y)) < \eta \quad \Rightarrow \quad |\partial^2_{1,1}(\Psi)(x, y) - \partial^2_{1,1}(\Psi)(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

  Soit $t_0 > 0$.
  En choisissant $x_0 = t_0$ et $y_0 = 1$, on obtient alors : $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ \forall t \in]0, +\infty[$,

$$d((t_0, 1), (t, 1)) < \eta \quad \Rightarrow \quad |\partial^2_{1,1}(\Psi)(t, 1) - \partial^2_{1,1}(\Psi)(t_0, 1)| < \varepsilon$$

  Or, par définition de la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$:

$$d((t_0, 1), (t, 1)) \ = \ \sqrt{(t - t_0)^2 + (1 - 1)^2} \ = \ \sqrt{(t - t_0)^2} \ = \ |t - t_0|$$

  Donc : $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ \forall t \in]0, +\infty[$,

$$|t - t_0| < \eta \ \Rightarrow \ |v''(t) - v''(t_0)| < \varepsilon$$

  C'est la définition de la continuité de v'' en t_0.
  La fonction v'' est continue en tout point t_0 de $]0, +\infty[$. Donc la fonction v'' est continue sur $]0, +\infty[$.
  On en déduit que v est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

□

b) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t > 0,\ \varphi(t) = v(t) - t\,v'(t)$. On suppose l'existence de la limite de $\varphi(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures et que $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi(t) = \mu$, avec $\mu \geqslant 0$.
Déterminer pour tout $t > 0$, le signe de $\varphi(t)$ et montrer que $\mu \leqslant 1$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
  Soit $t > 0$.
  $$\varphi'(t) = \cancel{v'(t)} - (\cancel{1 \times v'(t)} + t\,v''(t)) = -tv''(t)$$
- Or la fonction v' est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, donc : $v''(t) < 0$.
  D'où : $\varphi'(t) > 0$.
  On obtient le tableau de variations suivant :

t	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $\varphi'(t)$	$+$
Variations de φ	μ $\nearrow$

- Par stricte croissance de φ sur $]0, +\infty[$:
  $$\forall t > 0,\ \varphi(t) > \mu \geqslant 0$$
  $$\boxed{\text{Ainsi : } \forall t > 0,\ \varphi(t) > 0.}$$
- Par ailleurs :
  $$\begin{aligned} \varphi(1) &= v(1) - 1 \times v'(1) \ = \ \Psi(1,1) - v'(1) \\ &= 1 - v'(1) && \textit{(d'après l'énoncé)} \\ &< 1 && \textit{(car, d'après } \textbf{\textit{5.a)}} \textit{ :} \\ & && \forall t > 0,\ v'(t) > 0\textit{)} \end{aligned}$$
  Donc, par croissance de φ sur $]0, +\infty[$:
  $$\mu \leqslant \varphi(1) < 1$$
  $$\boxed{\text{Ainsi : } \mu \leqslant 1.}$$

□

c) Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathcal{D},\ \Psi(x, y) = y\,v(z)$.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned} y\,v(z) &= y\,\Psi(z, 1) \ = \ y\,\Psi\left(\frac{x}{y}, 1\right) \\ &= \Psi\left(\cancel{y} \times \frac{x}{\cancel{y}}, y \times 1\right) && \textit{(car, d'après l'énoncé :} \\ & && \forall \lambda > 0,\ \lambda \Psi(x, y) = \Psi(\lambda x, \lambda y)\textit{)} \\ &= \Psi(x, y) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathcal{D},\ \Psi(x, y) = y\,v(z)}$$

□

6. a) Pour tout $t > 0$, on pose : $h(t) = \dfrac{v'(t)}{\varphi(t)}$.

Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a : $\dfrac{\partial_1(\Psi)(x,y)}{\partial_2(\Psi)(x,y)} = h(z)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D},\ \Psi(x,y) = y\, v(z) = y\, v\Big(\frac{x}{y}\Big)$$

- En dérivant cette égalité par rapport à x, on obtient : $\forall (x,y) \in \mathcal{D}$,

$$\partial_1(\Psi)(x,y) \ = \ \cancel{y} \times \frac{1}{\cancel{y}} v'(\frac{x}{y}) \ = \ v'(z)$$

- En dérivant par rapport à y, on obtient : $\forall (x,y) \in \mathcal{D}$,

$$\partial_2(\Psi)(x,y) \ = \ v\Big(\frac{x}{y}\Big) + \cancel{y} \times \Big(-\frac{x}{y^{\cancel{2}}}\Big) \times v'(\frac{x}{y}) \ = \ v(z) - \frac{x}{y} v'(z) \ = \ v(z) - z\, v'(z)$$

- Soit $(x,y) \in \mathcal{D}$. On obtient alors :

$$h(z) \ = \ \frac{v'(z)}{\varphi(z)} \ = \ \frac{v'(z)}{v(z) - z\, v'(z)} \ = \ \frac{\partial_1(\Psi)(x,y)}{\partial_2(\Psi)(x,y)}$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathcal{D},\ h(z) = \frac{\partial_1(\Psi)(x,y)}{\partial_2(\Psi)(x,y)}}$$

□

b) Pour tout $t > 0$, on pose : $\sigma(t) = -\dfrac{h(t)}{t\, h'(t)}$. Déterminer pour tout $t > 0$, le signe de $\sigma(t)$.

Démonstration.

- La fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, dont le dénominateur ne s'annule pas ($\forall t > 0$, $\varphi(t) > 0$, d'après la question ***5.b)***).
  Soit $t > 0$.

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{v''(t)\varphi(t) - v'(t)\varphi'(t)}{(\varphi(t))^2} \\ &= \frac{v''(t)(v(t) - t\, v'(t)) - v'(t)(-t\, v''(t))}{(\varphi(t))^2} \\ &= \frac{v(t)\, v''(t) - \cancel{t\, v'(t)\, v''(t)} + \cancel{t\, v'(t)\, v''(t)}}{(\varphi(t))^2} \\ &= \frac{v(t)\, v''(t)}{(\varphi(t))^2} \end{aligned}$$

- On obtient alors :

$$\sigma(t) = -\frac{h(t)}{t\, h'(t)} = -\frac{\frac{v'(t)}{\cancel{\varphi(t)}}}{t\, \frac{v(t)\, v''(t)}{(\varphi(t))^{\cancel{2}}}} = -\frac{v'(t)\, \varphi(t)}{t\, v(t)\, v''(t)}$$

- D'après l'énoncé : $v(t) > 0$.
  D'après la question ***5.a)*** : $v'(t) > 0$.
  D'après la question ***5.b)*** : $v''(t) < 0$ et $\varphi(t) > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall t > 0,\ \sigma(t) > 0.}$$

□

7. Les fonctions σ et h sont celles qui ont été définies dans la question ***6***. On suppose que la fonction σ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$; on note σ_0 cette constante et on suppose $\sigma_0 \neq 1$. On pose : $r = 1 - \dfrac{1}{\sigma_0}$.

a) Pour tout $t > 0$, on pose $\ell(t) = t^{1-r}h(t)$. Calculer $\ell'(t)$ et en déduire que : $\forall t > 0$, $h(t) = h(1)t^{r-1}$.

Démonstration.

- La fonction ℓ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
  Soit $t > 0$.
  $$\ell'(t) \ = \ (1-r)t^{-r}h(t) + t^{1-r}h'(t)$$
- Or : $\sigma_0 \ = \ \sigma(t) \ = \ -\dfrac{h(t)}{t\,h'(t)}$.
  Donc : $h'(t) \ = \ -\dfrac{h(t)}{\sigma_0\,t}$
- De plus : $1 - r \ = \ \cancel{1} - \left(\cancel{1} - \dfrac{1}{\sigma_0}\right) \ = \ \dfrac{1}{\sigma_0}$.
  Donc :
  $$\ell'(t) \ = \ \frac{1}{\sigma_0}\,t^{-r}\,h(t) + t^{1-r} \times \left(-\frac{h(t)}{\sigma_0\,t}\right) \ = \ \frac{t^{-r}}{\sigma_0}\,h(t) - \frac{t^{-r}}{\sigma_0}\,h(t) \ = \ 0$$
  $$\boxed{\text{Ainsi : } \forall t > 0,\ \ell'(t) = 0.}$$
- Donc ℓ est une fonction constante. Ainsi, pour tout $t > 0$:
  $$\begin{array}{ccccccc} \ell(t) & = & \ell(1) & = & 1^{1-r}h(1) & = & h(1) \\ \shortparallel & & & & & & \\ t^{1-r}\,h(t) & & & & & & \end{array}$$
  $$\boxed{\text{D'où : } \forall t > 0,\ h(t) = h(1)\,t^{r-1}.}$$

□

b) Par une méthode analogue à celle de la question ***7a***, établir la relation :

$$\forall t > 0,\ v(t) = \left(\frac{1 + h(1)t^r}{1 + h(1)}\right)^{\frac{1}{r}}$$

Démonstration.

- Soit $t > 0$.
  $$\begin{aligned} v(t) = \left(\frac{1 + h(1)t^r}{1 + h(1)}\right)^{\frac{1}{r}} \quad &\Leftrightarrow \quad (v(t))^r = \frac{1 + h(1)t^r}{1 + h(1)} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{(v(t))^r}{1 + h(1)t^r} = \frac{1}{1 + h(1)} \end{aligned}$$
  Prouver l'égalité demandée revient donc à montrer que la fonction $w : t \mapsto \dfrac{(v(t))^r}{1 + h(1)t^r}$ est constante sur $]0, +\infty[$.
- La fonction w est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas ($\forall t > 0$, $1 + h(1)t^r > 0$).

Soit $t > 0$.

$$\begin{array}{rcl} w'(t) & = & \dfrac{rv'(t)(v(t))^{r-1}(1+h(1)t^r) - (v(t))^r \left(rh(1)t^{r-1}\right)}{(1+h(1)t^r)^2} \\[2ex] & = & r(v(t))^{r-1}\dfrac{v'(t)(1+h(1)t^r) - v(t)h(1)t^{r-1}}{(1+h(1)t^r)^2} \\[2ex] & = & r(v(t))^{r-1}\dfrac{v'(t) + h(1)t^{r-1}(t\,v'(t) - v(t))}{(1+h(1)t^r)^2} \\[2ex] & = & r(v(t))^{r-1}\dfrac{v'(t) - h(1)t^{r-1}\varphi(t)}{(1+h(1)t^r)^2} \end{array}$$

Or : $\dfrac{v'(t)}{\varphi(t)} \;=\; h(t) \;=\; h(1)t^{r-1}$. Donc : $v'(t) \;=\; h(1)t^{r-1}\varphi(t)$. D'où :

$$w'(t) \;=\; 0$$

On en déduit que la fonction w est constante. Donc, pour tout $t > 0$:

$$\underset{\dfrac{(v(t))^r}{1+h(1)t^r}}{\underset{\shortparallel}{w(t)}} \;=\; w(1) \;=\; \frac{(v(1))^r}{1+h(1)} \;=\; \frac{1}{1+h(1)}$$

En effet, d'après l'énoncé :

$$v(1) \;=\; \Psi(1,1) \;=\; 1$$

$$\boxed{\forall t > 0,\ v(t) = \left(\frac{1+h(1)t^r}{1+h(1)}\right)^{\frac{1}{r}}}$$

□

c) En déduire l'existence d'une constante $a \in]0,1[$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathcal{D},\ \Psi(x,y) = (ax^r + (1-a)y^r)^{\frac{1}{r}}$.

Démonstration.
Soit $(x,y) \in \mathcal{D}$.

$$\begin{array}{rcll} \Psi(x,y) & = & y\,v(z) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{5.c)}}\textit{)} \\[2ex] & = & y\left(\dfrac{1+h(1)z^r}{1+h(1)}\right)^{\frac{1}{r}} & \\[2ex] & = & (y^r)^{\frac{1}{r}}\left(\dfrac{1+h(1)\left(\frac{x}{y}\right)^r}{1+h(1)}\right)^{\frac{1}{r}} & \\[2ex] & = & \left(y^r\,\dfrac{1+h(1)\frac{x^r}{y^r}}{1+h(1)}\right)^{\frac{1}{r}} & \\[2ex] & = & \left(\dfrac{1}{1+h(1)}\,y^r + \dfrac{h(1)}{1+h(1)}\,x^r\right)^{\frac{1}{r}} & \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Donc, en posant } a = \dfrac{h(1)}{1+h(1)} : \\ \forall (x,y) \in \mathcal{D},\ \Psi(x,y) = (ax^r + (1-a)y^r)^{\frac{1}{r}}.\end{array}}$$

□

d) Quelle conclusion peut-on tirer des résultats des questions ***3.b)*** et ***7.c)*** ?

Démonstration.

- D'après la question ***3.b)***, toute fonction de production CES possède une élasticité de substitution constante.
- Réciproquement, d'après la question ***7.c)***, toute fonction de production possédant une élasticité de substitution constante est une fonction de production CES.

Une fonction de production est à élasticité constante si et seulement si c'est une fonction de production CES.

Commentaire

Ce résultat justifie l'appellation des fonctions de production CES : Constant Elasticity of Substitution.

□

8. Soit $a \in]0,1[$. Pour tout $t > 0$, soit S_t la fonction définie sur $]-\infty, 1[\setminus\{0\}$ par : $S_t(r) = (at^r + 1 - a)^{\frac{1}{r}}$.

a) On pose $H_t(r) = \ln S_t(r)$. Calculer la limite de $S_t(r)$ lorsque r tend vers 0.

Démonstration.

- Soit $r \in]-\infty, 1[\setminus\{0\}$.

$$H_t(r) \ = \ \ln(S_t(r)) \ = \ \frac{1}{r}\ln(at^r + 1 - a) \ = \ \frac{1}{r}\ln(1 + a(t^r - 1))$$

- Or : $\lim\limits_{r\to 0} t^r = 1$. Donc : $\lim\limits_{r\to 0} a(t^r - 1) = 0$. D'où :

$$\ln(1 + a(t^r - 1)) \underset{r\to 0}{\sim} a(t^r - 1)$$

Ainsi :

$$H_t(r) \underset{r\to 0}{\sim} a\,\frac{t^r - 1}{r} = a\,\frac{e^{r\ln(t)} - 1}{r}$$

- Or : $\lim\limits_{r\to 0} r\,\ln(t) = 0$. Donc :

$$e^{r\ln(t)} - 1 \underset{r\to 0}{\sim} r\,\ln(t)$$

D'où :

$$H_t(r) \underset{r\to 0}{\sim} a\,\frac{\cancel{r}\ln(t)}{\cancel{r}} = a\,\ln(t)$$

Ainsi : $\lim\limits_{r\to 0} H_t(r) = a\,\ln(t)$.

De plus : $\forall r \in]-\infty, 1[\setminus\{0\}$, $S_t(r) = \exp(H_t(r))$.

$$\boxed{\text{D'où : } \lim_{r\to 0} S_t(r) = \exp(a\,\ln(t)) = t^a.}$$

□

b) Pour tout couple $(x, y) \in \mathcal{D}$ fixé, on pose : $N_{(x,y)}(r) = y\, S_z(r)$ et $F(x, y) = \lim\limits_{r \to 0} N_{(x,y)}(r)$.
Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a $F(x, y) = x^a\, y^{1-a}$ (*fonction de production de Cobb-Douglas*).

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$.
D'après la question précédente :

$$F(x, y) \;=\; \lim_{r \to 0} y\, S_z(r) \;=\; y\, z^a \;=\; y \left(\frac{x}{y}\right)^a \;=\; y\, \frac{x^a}{y^a} \;=\; x^a\, y^{1-a}$$

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathcal{D},\ F(x, y) = x^a\, y^{1-a}.}$$

□

Partie III : Estimation des paramètres d'une fonction de production de Cobb-Douglas.

Soit a un réel vérifiant $0 < a < 1$ et B un réel strictement positif.
On suppose que la production totale Q présente une composante déterministe et une composante aléatoire.

- La *composante déterministe* est une fonction de production de type Cobb-Douglas, c'est-à-dire telle que :
$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}, \quad f(x, y) = Bx^a y^{1-a}$$
- La *composante aléatoire* est une variable aléatoire de la forme $\exp(R)$ où R est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée, de variance $\sigma^2 > 0$.
- La *production totale* Q est une variable aléatoire à valeurs strictement positives telle que :
$$Q = Bx^a y^{1-a} \exp(R)$$

On suppose que les variables aléatoires Q et R sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Commentaire

En général, la fonction de production de Cobb-Douglas est exprimée à l'aide de v.a.r. :

$$Q = B\, X^a\, Y^{1-a}$$

où :
× la v.a.r. X exprime la quantité de travail nécessaire à la production d'un volume physique de ce bien (par exemple pour 1 tonne, ou 1 litre, ou encore un nombre fixé de produits),
× la v.a.r. Y exprime la quantité de capital nécessaire à la production de la même quantité de ce bien de consommation.

Le sujet définit la fonction de production de Cobb-Douglas de manière un peu différente en mêlant réalisations et variables aléatoires.
On sera d'autant plus attentif à la nature des objets manipulés.

On pose : $b = \ln(B)$, $u = \ln(x) - \ln(y)$ et $T = \ln(Q) - \ln(y)$. On a donc : $T = au + b + R$.
On sélectionne n entreprises ($n \geqslant 1$) qui produisent le bien considéré à l'époque donnée.
On mesure pour chaque entreprise i ($i \in [\![1, n]\!]$) la quantité de travail x_i et la quantité de capital y_i utilisées ainsi que la quantité produite Q_i^*.
On suppose que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $x_i > 0$, $y_i > 0$ et $Q_i^* > 0$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la production totale de l'entreprise i est alors une variable aléatoire Q_i telle que $Q_i = B\, x_i^a\, y_i^{1-a} \exp(R_i)$, où R_1, R_2, ..., R_n sont des variables aléatoires supposées indépendantes et de même loi que R et le réel strictement positif Q_i^* est une réalisation de la variable aléatoire Q_i.
On pose pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $u_i = \ln(x_i) - \ln(y_i)$, $T_i = \ln(Q_i) - \ln(y_i)$ et $t_i = \ln(Q_i^*) - \ln(y_i)$.
Ainsi, pour chaque entreprise $i \in [\![1, n]\!]$, on a $T_i = au_i + b + R_i$ et le réel t_i est une réalisation de la variable aléatoire T_i.
On rappelle les définitions et résultats suivants :

- Si $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une série statistique, la moyenne et la variance empiriques, notées respectivement $\overline{v}$ et s_v^2, sont données par : $\overline{v} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} v_i$ et $s_v^2 = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (v_i - \overline{v})^2 = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} v_i^2 - \overline{v}^2$.
- Si $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(w_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont deux séries statistiques, la covariance empirique de la série double $(v_i, w_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, notée $\text{cov}(v, w)$, est donnée par :

$$\text{cov}(v, w) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (v_i - \overline{v})(w_i - \overline{w}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} v_i\, w_i - \overline{v}\overline{w} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (v_i - \overline{v}) w_i$$

9. a) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire T_i suit la loi normale $\mathcal{N}\left(au_i + b, \sigma^2\right)$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

- La v.a.r. $T_i = a\, u_i + b + R_i$ est une transformée affine de la v.a.r. R_i qui suit la loi $\mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$. Donc T_i suit une loi normale. Déterminons les paramètres de cette loi.
- Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(T_i) = \mathbb{E}(a\, u_i + b + R_i) = a\, u_i + b + \mathbb{E}(R_i)$$

  Or : $R_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$. Donc : $\mathbb{E}(R_i) = 0$.
  Ainsi : $\mathbb{E}(T_i) = a\, u_i + b$
- Par propriété de la variance :

$$\mathbb{V}(T_i) = \mathbb{V}(a\, u_i + b + R_i) = \mathbb{V}(R_i)$$

  Or : $R_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$. Donc : $\mathbb{V}(R_i) = \sigma^2$.
  Ainsi : $\mathbb{V}(T_i) = \sigma^2$

$$\boxed{\text{Finalement : } T_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(a\, u_i + b, \sigma^2\right).}$$

Commentaire

On rappelle le résultat de cours suivant : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$,

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right) \ \Leftrightarrow\ aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}\left(am + b, \sigma^2\right)$$

En particulier : $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right) \ \Leftrightarrow\ X^* = \dfrac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

□

b) Les variables aléatoires $T_1, T_2, ..., T_n$ sont-elles indépendantes ?

Démonstration.
D'après l'énoncé, les v.a.r. R_1, ..., R_n sont indépendantes.

$$\boxed{\text{Donc, d'après le lemme des coalitions, les v.a.r. } T_1, \ldots, T_n \text{ sont indépendantes.}}$$

□

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit φ_i la densité continue sur $\mathbb{R}$ de T_i :

$$\forall d \in \mathbb{R},\ \varphi_i(d) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(d - (au_i + b))^2\right)$$

Soit $\mathcal{F}$ l'ouvert défini par $\mathcal{F} =]0, 1[\times\mathbb{R}$ et M la fonction de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$M(a, b) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \varphi_i(t_i)\right)$$

On suppose que : $0 < \text{cov}(u, t) < s_u^2$.

10. a) Calculer le gradient $\nabla(M)(a, b)$ de M en tout point $(a, b) \in \mathcal{F}$.

Démonstration.

- Soit $(a, b) \in \mathcal{F}$.

$$\begin{aligned}
M(a,b) &= \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(t_i - (au_i + b))^2\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(t_i - (au_i + b))^2\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(-\ln((2\pi)^{\frac{1}{2}}) + \ln\left(\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(t_i - (au_i + b))^2\right)\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}(t_i - (au_i + b))^2\right) \\
&= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} (t_i - (au_i + b))^2 \\
&= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} (t_i^2 + a^2u_i^2 + b^2 - 2au_it_i - 2bt_i + 2abu_i) \\
&= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^2 + a^2\sum_{i=1}^{n} u_i^2 + n\,b^2 - 2a\sum_{i=1}^{n} u_it_i - 2b\sum_{i=1}^{n} t_i + 2ab\sum_{i=1}^{n} u_i\right)
\end{aligned}$$

- La fonction M est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{F}$ en tant que fonction polynomiale.
  Soit $(a, b) \in \mathcal{F}$. On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} u_i^2 &= n(s_u^2 + \bar{u}^2) & \qquad \sum_{i=1}^{n} u_it_i &= n(\text{cov}(u, t) + \bar{u}\bar{t}) \\
\sum_{i=1}^{n} u_i &= n\bar{u} & \sum_{i=1}^{n} t_i &= n\bar{t}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\partial_1(M)(a, b) = -\frac{1}{\sigma^2}\left(a\sum_{i=1}^{n} u_i^2 - \sum_{i=1}^{n} u_it_i + b\sum_{i=1}^{n} u_i\right) = -\frac{n}{\sigma^2}(a(s_u^2 + \overline{u}^2) - (\text{cov}(u, t) + \overline{u}\overline{t}) + b\overline{u})$$

De même :

$$\partial_2(M)(a, b) = -\frac{1}{\sigma^2}\left(nb - \sum_{i=1}^{n} t_i + a\sum_{i=1}^{n} u_i\right) = -\frac{n}{\sigma^2}(b - \bar{t} + a\overline{u})$$

$$\boxed{\forall (a, b) \in \mathcal{F},\ \nabla(M)(a, b) = \begin{pmatrix} \dfrac{n}{\sigma^2}(\text{cov}(u, t) + \overline{u}\overline{t} - a(s_u^2 + \overline{u}^2) - b\overline{u}) \\ \dfrac{n}{\sigma^2}(\bar{t} - a\overline{u} - b) \end{pmatrix}}$$

□

b) En déduire que M admet sur $\mathcal{F}$ un unique point critique, noté $(\hat{a}, \hat{b})$.

Démonstration.
Soit $(a,b) \in \mathcal{F}$.
Le couple (a,b) est un point critique de M si et seulement si $\nabla(M)(a,b) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.
On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\nabla(M)(a,b) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \quad & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_1(M)(a,b) & = & 0 \\ \partial_2(M)(a,b) & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \cancel{\frac{n}{\sigma^2}}(\mathrm{cov}(u,t) + \overline{u}\overline{t} - a(s_u^2 + \overline{u}^2) - b\overline{u}) \ = \ 0 \\ \cancel{\frac{n}{\sigma^2}}(\overline{t} - a\overline{u} - b) \ = \ 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{cov}(u,t) + \overline{u}\overline{t} - a(s_u^2 + \overline{u}^2) - b\overline{u} \ = \ 0 \\ b \ = \ \overline{t} - a\overline{u} \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{cov}(u,t) + \overline{u}\overline{t} - a(s_u^2 + \overline{u}^2) - (\overline{t} - a\overline{u})\overline{u} \ = \ 0 \\ b \ = \ \overline{t} - a\overline{u} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\nabla(M)(a,b) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \quad & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{cov}(u,t) + \cancel{\overline{u}\overline{t}} - as_u^2 - \cancel{a\overline{u}^2} - \cancel{\overline{t}\overline{u}} + \cancel{a\overline{u}^2} \ = \ 0 \\ b \ = \ \overline{t} - a\overline{u} \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} as_u^2 & = & \mathrm{cov}(u,t) \\ b & = & \overline{t} - a\overline{u} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & \dfrac{\mathrm{cov}(u,t)}{s_u^2} \\ b & = & \overline{t} - a\overline{u} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } M \text{ admet un unique point critique sur } \mathcal{F}.}$$ □

c) Exprimer $\hat{a}$ et $\hat{b}$ en fonction de $\mathrm{cov}(u,t)$, s_u^2, $\overline{t}$ et $\overline{u}$.
(*$\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont les estimations de a et b par la méthode dite du maximum de vraisemblance*)

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après les calculs de la question précédente : } (\hat{a}, \hat{b}) = \left(\frac{\mathrm{cov}(u,t)}{s_u^2}, \ \overline{t} - \frac{\mathrm{cov}(u,t)}{s_u^2}\overline{u} \right).}$$ □

11. a) Soit $\nabla^2(M)(a,b)$ la matrice hessienne de M en $(a,b) \in \mathcal{F}$.
Montrer que $\nabla^2(M)(a,b) = -\dfrac{n}{\sigma^2}\begin{pmatrix} s_u^2 + \overline{u}^2 & \overline{u} \\ \overline{u} & 1 \end{pmatrix}$

Démonstration.
Soit $(a,b) \in \mathcal{F}$.

- D'après la question ***10.a)*** :

$$\partial_1(M)(a,b) = \frac{n}{\sigma^2}(\mathrm{cov}(u,t) + \overline{u}\overline{t} - a(s_u^2 + \overline{u}^2) - b\overline{u})$$

et

$$\partial_2(M)(a,b) = \frac{n}{\sigma^2}(\overline{t} - a\overline{u} - b)$$

- On obtient alors :
$$\partial^2_{1,1}(M) = \frac{n}{\sigma^2}(-(s_u^2+\bar{u}^2)) = -\frac{n}{\sigma^2}(s_u^2+\bar{u}^2)$$
De plus :
$$\partial^2_{1,2}(M)(a,b) = \frac{n}{\sigma^2}(-\bar{u}) = -\frac{n}{\sigma^2}\bar{u}$$
De même :
$$\partial^2_{2,1}(M)(a,b) = -\frac{n}{\sigma^2}\bar{u}$$
Enfin :
$$\partial^2_{2,2}(M)(a,b) = \frac{n}{\sigma^2}(-1) = -\frac{n}{\sigma^2}$$

$$\boxed{\forall (a,b)\in\mathcal{F},\ \nabla^2(M)(a,b) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(M)(a,b) & \partial^2_{1,2}(M)(a,b) \\ \partial^2_{2,1}(M)(a,b) & \partial^2_{2,2}(M)(a,b)\end{pmatrix} = -\frac{n}{\sigma^2}\begin{pmatrix} s_u^2+\overline{u}^2 & \overline{u} \\ \overline{u} & 1\end{pmatrix}}$$ □

b) En déduire que M admet en $(\hat{a},\hat{b})$ un maximum local.

Démonstration.

- La matrice $\nabla^2(M)(\hat{a},\hat{b})$ est une matrice réelle symétrique. Donc elle est diagonalisable. On note λ_1 et λ_2 ses valeurs propres (éventuellement égales).
- On souhaite déterminer le signe de λ_1 et λ_2.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}\det\Big(\nabla^2(M)(\hat{a},\hat{b}) - \lambda\cdot I_2\Big) &= \det\begin{pmatrix} -\frac{n}{\sigma^2}(s_u^2+\bar{u}^2)-\lambda & -\frac{n}{\sigma^2}\bar{u} \\ -\frac{n}{\sigma^2}\bar{u} & -\frac{n}{\sigma^2}-\lambda\end{pmatrix} \\ &= \Big(-\frac{n}{\sigma^2}(s_u^2+\bar{u}^2)-\lambda\Big)\Big(-\frac{n}{\sigma^2}-\lambda\Big) - \Big(-\frac{n}{\sigma^2}\bar{u}\Big)^2 \\ &= \lambda^2 + \frac{n}{\sigma^2}(s_u^2+\bar{u}^2+1)\lambda + \Big(\frac{n}{\sigma^2}\Big)^2 s_u^2\end{aligned}$$
On en déduit que la matrice $\nabla^2(M)(\hat{a},\hat{b}) - \lambda\cdot I_2$ n'est pas inversible si et seulement si :
$$\lambda^2 + \frac{n}{\sigma^2}(s_u^2+\bar{u}^2+1)\lambda + \Big(\frac{n}{\sigma^2}\Big)^2 s_u^2 = 0 \quad (*)$$
- Or λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de $\nabla^2(M)(\hat{a},\hat{b})$, donc $\nabla^2(M)(\hat{a},\hat{b}) - \lambda\cdot I_2$ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda\in\{\lambda_1,\lambda_2\}$.
Ainsi, les réels λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation $(*)$. D'où :
$$\lambda^2 + \frac{n}{\sigma^2}(s_u^2+\bar{u}^2+1)\lambda + \Big(\frac{n}{\sigma^2}\Big)^2 s_u^2 = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$$
Par identification des coefficients de ces polynômes de degré 2, on en déduit le système d'équations suivant :
$$\begin{cases} \lambda_1\,\lambda_2 = \Big(\frac{n}{\sigma^2}\Big)^2 s_u^2 & (\star) \\ \lambda_1+\lambda_2 = -\frac{n}{\sigma^2}(s_u^2+\bar{u}^2+1) & (\star\star)\end{cases}$$
  - × L'équation $(\star)$ implique : $\lambda_1\,\lambda_2 > 0$.
  Donc λ_1 et λ_2 ont même signe.
  - × L'équation $(\star\star)$ implique : $\lambda_1+\lambda_2 < 0$.
  Or λ_1 et λ_2 ont même signe. Donc : $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } M \text{ admet un maximum local en } (\hat{a},\hat{b}).}$$ □

12. Soit (h, k) un couple de réels non nuls. Calculer $M(\hat{a}+h, \hat{b}+k) - M(\hat{a}, \hat{b})$.
En déduire que M admet en $(\hat{a}, \hat{b})$ un maximum global.

Démonstration.

- Soit $(a, b) \in \mathcal{F}$. D'après la question ***10.a)*** :

$$\begin{aligned} M(a+h, b+k) &= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{\sigma^2}\Big((a+h)^2\sum_{i=1}^n u_i^2 - 2(a+h)\sum_{i=1}^n u_i t_i + 2(a+h)(b+k)\sum_{i=1}^n u_i \\ &\qquad - 2(b+k)\sum_{i=1}^n t_i + n(b+k)^2 + \sum_{i=1}^n t_i^2\Big) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} (a+h)^2\sum_{i=1}^n u_i^2 &= a^2\sum_{i=1}^n u_i^2 + 2ah\sum_{i=1}^n u_i^2 + h^2\sum_{i=1}^n u_i^2 \\ 2(a+h)\sum_{i=1}^n u_i t_i &= 2a\sum_{i=1}^n u_i t_i + 2h\sum_{i=1}^n u_i t_i \\ 2(a+h)(b+k)\sum_{i=1}^n u_i &= 2ab\sum_{i=1}^n u_i + 2ak\sum_{i=1}^n u_i + 2bh\sum_{i=1}^n u_i + 2hk\sum_{i=1}^n u_i \\ 2(b+k)\sum_{i=1}^n t_i &= 2b\sum_{i=1}^n t_i + 2k\sum_{i=1}^n t_i \\ n(b+k)^2 + \sum_{i=1}^n t_i^2 &= nb^2 + 2nbk + nk^2 + \sum_{i=1}^n t_i^2 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} M(a+h, b+k) - M(a, b) &= -\frac{1}{2\sigma^2}\Big(2ah\sum_{i=1}^n u_i^2 + h^2\sum_{i=1}^n u_i^2 - 2h\sum_{i=1}^n u_i t_i + 2ak\sum_{i=1}^n u_i + 2bh\sum_{i=1}^n u_i \\ &\qquad + 2hk\sum_{i=1}^n u_i - 2k\sum_{i=1}^n t_i + 2nbk + nk^2\Big) \end{aligned}$$

On a de plus les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u_i^2 &= n(s_u^2 + \bar{u}^2) & \qquad \sum_{i=1}^n u_i t_i &= n(\text{cov}(u,t) + \bar{u}\bar{t}) \\ \sum_{i=1}^n u_i &= n\bar{u} & \sum_{i=1}^n t_i &= n\bar{t} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} M(a+h, b+k) - M(a, b) &= -\frac{n}{2\sigma^2}\big(2ah(s_u^2+\bar{u}^2) + h^2(s_u^2+\bar{u}^2) - 2h(\text{cov}(u,t)+\bar{u}\bar{t}) \\ &\qquad + 2ak\bar{u} + 2bh\bar{u} + 2hk\bar{u} - 2k\bar{t} + 2bk + k^2\big) \end{aligned}$$

- Or, d'après la question ***10.c)*** :

$$\hat{a} = \frac{\text{cov}(u,t)}{s_u^2} \quad \text{et} \quad \hat{b} = \bar{t} - \hat{a}\bar{u} = \bar{t} - \frac{\text{cov}(u,t)}{s_u^2}\bar{u}$$

Donc, en particulier :

$$\begin{aligned}
2\hat{a}h(s_u^2+\bar{u}^2) &= 2\,\frac{\operatorname{cov}(u,t)}{s_u^2}h(s_u^2+\bar{u}^2) \;=\; 2\operatorname{cov}(u,t)h + 2\,\frac{\operatorname{cov}(u,t)}{s_u^2}\bar{u}^2 h \\
2\hat{a}k\bar{u} &= 2\,\frac{\operatorname{cov}(u,t)}{s_u^2}\bar{u}k \\
2\hat{b}h\bar{u} &= 2\left(\bar{t}-\frac{\operatorname{cov}(u,t)}{s_u^2}\bar{u}\right)\bar{u}h \;=\; 2\bar{u}\bar{t}h - 2\,\frac{\operatorname{cov}(u,t)}{s_u^2}\bar{u}^2 h \\
2\hat{b}k &= 2\left(\bar{t}-\frac{\operatorname{cov}(u,t)}{s_u^2}\bar{u}\right)k \;=\; 2\bar{t}k - 2\,\frac{\operatorname{cov}(u,t)}{s_u^2}\bar{u}k
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
M(\hat{a}+h,\hat{b}+k)-M(\hat{a},\hat{b}) = -\frac{n}{2\sigma^2}\Bigg(& \cancel{2\operatorname{cov}(u,t)h} + \cancel{2\,\frac{\operatorname{cov}(u,t)}{s_u^2}\bar{u}^2 h} + s_u^2h^2 + \bar{u}^2h^2 - \cancel{2\operatorname{cov}(u,t)h} \\
& - \cancel{2\bar{u}\bar{t}h} + \cancel{2\,\frac{\operatorname{cov}(u,t)}{s_u^2}\bar{u}k} + \cancel{2\bar{u}\bar{t}h} - \cancel{2\,\frac{\operatorname{cov}(u,t)}{s_u^2}\bar{u}^2 h} \\
& + 2\bar{u}hk - \cancel{2\bar{t}k} + \cancel{2\bar{t}k} - \cancel{2\,\frac{\operatorname{cov}(u,t)}{s_u^2}\bar{u}k} + k^2\Bigg)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$M(\hat{a}+h,\hat{b}+k)-M(\hat{a},\hat{b}) = -\frac{n}{2\sigma^2}(s_u^2h^2+\bar{u}^2h^2+2\bar{u}hk+k^2) = -\frac{n}{2\sigma^2}(s_u^2h^2+(\bar{u}h+k)^2)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } M(\hat{a}+h,\hat{b}+k)-M(\hat{a},\hat{b}) = -\frac{n}{2\sigma^2}(s_u^2h^2+(\bar{u}h+k)^2).}$$

- On remarque alors :

$$\forall (h,k)\in(\mathbb{R}^*)^2,\ M(\hat{a}+h,\hat{b}+k)-M(\hat{a},\hat{b}) \leqslant 0$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, on en déduit :

$$\forall (a,b)\in\mathcal{F},\ M(a,b)-M(\hat{a},\hat{b}) \leqslant 0$$

Donc :

$$\forall (a,b)\in\mathcal{F},\ M(a,b) \leqslant M(\hat{a},\hat{b})$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } M \text{ admet en } (\hat{a},\hat{b}) \text{ un maximum global.}}$$

Commentaire

Dans cette question, on dispose initialement d'un n-uplet d'observations $(t_1,\ldots,t_n)$.
Plus précisément, $(t_1,\ldots,t_n)$ est une réalisation d'un n-uplet de v.a.r. indépendantes $(T_1,\ldots,T_n)$.
Les lois des (T_i) dépendent de deux paramètres a et b, a priori inconnus et qu'on cherche à déterminer. Pour ce faire, une idée naturelle consiste à considérer que la valeur du couple (a,b) qui a permis de générer les observations est celle qui avait la plus grande probabilité de les générer. C'est cette idée qui guide la méthode dite du maximum de vraisemblance, dont les questions ci-dessus sont une illustration.
Le couple $(\hat{a},\hat{b})$ est précisément la valeur du paramètre (a,b) maximisant la réalisation des observations initiales.

La méthode du maximum de vraisemblance conduit à considérer la variable aléatoire construite à l'aide de ce maximum.

Commentaire

Plaçons-nous dans le cas où T est une v.a.r. discrète (la méthode est plus simple à appréhender dans ce cas). L'idée est de choisir comme estimation de (a, b) le couple de réels $(\hat{a}, \hat{b})$ tel que la **vraisemblance** d'avoir obtenu l'échantillon utilisé soit maximisée.
Autrement dit, le couple $(\hat{a}, \hat{b})$ tel que la probabilité :

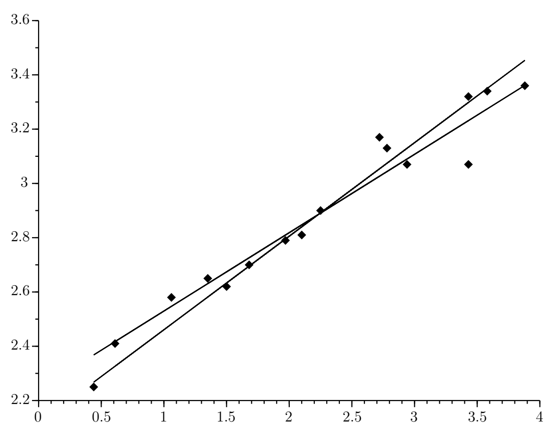
$$\begin{array}{rcll} \mathcal{L}(a,b) & = & \mathbb{P}_{(a,b)}([T_1 = t_1] \cap \ldots \cap [T_n = t_n]) & \\ & = & \mathbb{P}_{(a,b)}([T_1 = t_1]) \times \ldots \times \mathbb{P}([T_n = t_n]) & \textit{(par indépendance)} \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{(a,b)}([T_i = t_i]) & \end{array}$$

soit maximale. L'énoncé portait sur le cas de v.a.r. à densité, que l'on comprend aisément par analogie avec le cas des v.a.r. discrètes. □

13. On rappelle qu'en **Scilab**, les commandes `variance` et `corr` permettent de calculer respectivement la variance d'une série statistique et la covariance d'une série statistique double.
Si $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(w_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont deux séries statistiques, alors la variance de $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est calculable par `variance(v)` et la covariance de $(v_i, w_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est calculable par `corr(v,w,1)`.
On a relevé pour $n = 16$ entreprises qui produisent le bien considéré à l'époque donnée, les deux séries statistiques $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(t_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ reproduites dans les lignes 1 à 4 du code **Scilab** suivant dont la ligne 9 est incomplète :

```
1  u = [1.06, 0.44, 2.25, 3.88, 0.61, 1.97, 3.43, 2.10,
2      1.50, 1.68, 2.72, 1.35, 2.94, 2.78, 3.43, 3.58]
3  t = [2.58, 2.25, 2.90, 3.36, 2.41, 2.79, 3.32, 2.81,
4      2.62, 2.70, 3.17, 2.65, 3.07, 3.13, 3.07, 3.34]
5  plot2d(u, t, -4)
6  // -4 signifie que les points sont représentés par des losanges.
7  plot2d(u, corr(u,t,1)/variance(u)*u + mean(t) - corr(u,t,1)/variance(u)*mean(u))
8  // équation de la droite de régression de t en u.
9  plot2d(u,................................................)
10 // équation de la droite de régression de u en t.
```

Le code précédent complété par la ligne 9 donne alors la figure suivante :



a) Compléter la ligne 9 du code permettant d'obtenir la figure précédente (*on reportera sur sa copie, uniquement la ligne 9 complétée*).

Démonstration.
D'après les calculs des questions précédentes, la droite de régression de t en u est :

$$t = \hat{a}\, u + \hat{b}$$

Donc, la droite de régression de u en t est :

$$u = \frac{1}{\hat{a}}(t - \hat{b})$$

On obtient la ligne **Scilab** suivante :

```
9  plot2d(u, variance(u)/corr(u,t,1)*(t-mean(t)+corr(u,t,1)/variance(u)* mean(u))
```

Commentaire

- Chercher un **modèle de régression** entre deux variables aléatoires T et U consiste à savoir si T est une fonction de U à un bruit près. Plus formellement, on cherche à déterminer une fonction f telle que :

$$T = f(U) + \varepsilon,$$

  où la fonction f est appelée **fonction de régression** et ε est une <u>variable aléatoire</u> appelée **erreur d'ajustement** (ou résidu). Dans ce sujet, on s'intéresse à un modèle de régression particulier : le modèle de régression linéaire ; c'est-à-dire le cas où f est une fonction affine : $f(U) = aU + b$. Il existe cependant bien d'autres choix pour la fonction f. Par exemple :
  - × d'autres modèles paramétriques, c'est-à-dire déterminés par un nombre fini de paramètres : $f(U) = \exp(aU) + b$, etc.
  - × des modèles non paramétriques, c'est-à-dire déterminés par un nombre infini de paramètres : forêts aléatoires (on approche f par des fonctions constantes par morceaux), estimation par noyaux ($f(U) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k K(U - x_k)$, où K est une fonction positive d'intégrale 1 appelée noyau), etc.
- Dans le cas de la régression linéaire, le problème consiste donc à identifier une droite $t = au + b$ qui ajuste bien le nuage de points.
  L'erreur que l'on commet en utilisant la droite de régression pour prédire t_i à partir de u_i est : $t_i - (au_i + b)$.
  Une idée naturelle pour déterminer la valeur des coefficients a et b est donc de chercher la droite (donc le couple (a, b)) qui minimise la somme des carrés de ces erreurs :

$$\sum_{i=1}^{n} (t_i - (au_i + b))^2$$

  On en déduit, après calculs, que l'unique droite rendant minimale l'erreur $\sum\limits_{i=1}^{n} (t_i - (au_i + b))^2$ est la droite d'équation :

$$t = \frac{\operatorname{cov}(u,t)}{s_u^2}(u - \bar{u}) + \bar{t} = \hat{a}u + \hat{b}$$

□

b) Interpréter le point d'intersection des deux droites de régression.

Démonstration.
Toutes les droites de régression reliant deux variables passent par le point moyen du nuage.

Donc, ici, le point d'intersection des deux droites de régression est ce point moyen : $(\bar{u}, \bar{t})$. □

c) Estimer graphiquement les moyennes empiriques $\overline{u}$ et $\bar{t}$.

Démonstration.
D'après la question précédente, le point $(\bar{u}, \bar{t})$ est le point d'intersection des deux droites de régression. Donc :

× $\bar{u}$ est l'abscisse du point d'intersection,

× $\bar{t}$ est l'ordonnée du point d'intersection.

Par lecture : $\bar{u} \simeq 2,3$ et $\bar{t} \simeq 2,9$.

□

d) Le coefficient de corrélation empirique de la série statistique double $(u_i, t_i)_{1 \leqslant i \leqslant 16}$ est-il plus proche de -1, de 1 ou de 0 ?

Démonstration.

- Par définition du coefficient de corrélation empirique :

$$\rho(u,t) = \frac{\operatorname{cov}(u,t)}{\sqrt{s_u^2}\,\sqrt{s_v^2}}$$

Donc :

$$\hat{a} = \frac{\operatorname{cov}(u,t)}{s_u^2} = \frac{\rho(u,t)\,\sqrt{s_u^2}\,\sqrt{s_v^2}}{s_u^2} = \frac{\rho(u,t)\,\sqrt{s_v^2}}{\sqrt{s_u^2}}$$

- De plus :

$$t = \hat{a}u + \hat{b}$$

Trois cas se présentent alors.

× Si $\rho(u,t)$ est plus proche de 0, alors $\hat{a}$ est proche de 0.
Donc le coefficient directeur de la droite de régression de t en u est proche de 0.
Ainsi, cette droite de régression est presque parallèle à l'axe des abscisses.
Ce n'est pas le cas sur le graphique. Donc $\rho(u,t)$ n'est pas proche de 0.

× Si $\rho(u,t)$ est plus proche de -1, alors $\hat{a}$ est négatif (car les écart-types empiriques $\sqrt{s_u^2}$ et $\sqrt{s_v^2}$ sont strictement positifs).
Donc le coefficient directeur de la droite de régression de t en u est négatif.
Ainsi, cette droite de régression admet une pente négative.
Ce n'est pas le cas sur le graphique. Donc $\rho(u,t)$ n'est pas proche de -1.

× Le cas $\rho(u,t)$ proche de 1 est le seul cas restant.

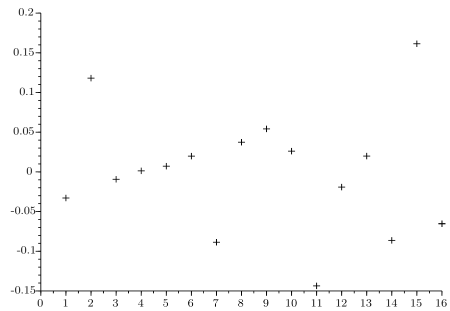
Finalement, $\rho(u,t)$ est plus proche de 1.

Commentaire

Le graphique nous confirme ce résultat : les droites de régression ont des pentes positives. □

e) On reprend les lignes 1 à 4 du code précédent que l'on complète par les instructions 11 à 17 qui suivent et on obtient le graphique ci-dessous :

```
11  a0 = corr(u,t,1)/variance(u)
12  b0 = mean(t) - corr(u,t,1)/variance(u)*mean(u)
13  t0 = a0 * u + b0
14  e = t0 - t
15  p = 1:16
16  plot2d(p,e,-1)
17  // -1 signifie que les points sont représentés par des symboles d'addition.
```

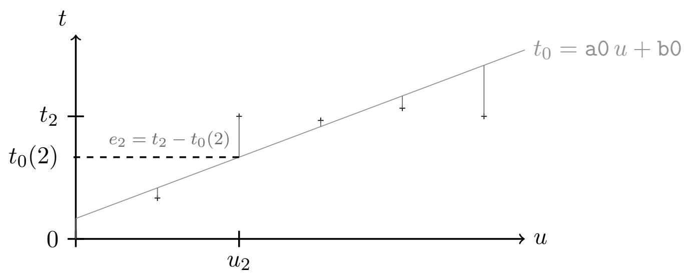


Que représente ce graphique ? Quelle valeur peut-on conjecturer pour la moyenne des ordonnées des 16 points obtenus sur le graphique ?
Déterminer mathématiquement la valeur de cette moyenne.

Démonstration.
On commence par remarquer :

$$\texttt{a0} = \hat{a} \quad \text{et} \quad \texttt{b0} = \hat{b}$$

On rappelle que l'erreur commise en utilisant la droite de régression pour prédire t_i à partir de u_i est : $e_i = t_i - (\hat{a}u_i + \hat{b}) = t_i - t_0(i)$.
On peut schématiser la situtation avec le graphique suivant :



Donc, en reprenant le code **Scilab** :
- × `t0` est le vecteur obtenu en approchant `t` par régression linéaire,
- × `e` est le vecteur des erreurs d'ajustement entre `t` et son approximation linéaire `t0`.

$\boxed{\text{Le graphique renvoyé représente les erreurs d'ajustement de chaque observation.}}$

$\boxed{\text{Par lecture, on peut conjecturer une moyenne des ordonnées de ces 16 points égale à 0.}}$

On rappelle : $T = au + b + R$. Donc $T - (au + b) = R$.
Ainsi, comme $R \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$:

$$\mathbb{E}(T - (au + b)) = \mathbb{E}(R) = 0$$

$$\boxed{\text{On retrouve bien mathématiquement que la moyenne des erreurs est nulle.}}$$ □

14. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $A_n = \dfrac{1}{n\, s_u^2} \sum\limits_{i=1}^{n} (u_i - \overline{u}) T_i$. On suppose que le paramètre σ^2 est connu.

a) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(A_n)$ et la variance $\mathbb{V}(A_n)$ de la variable aléatoire A_n.
Préciser la loi de A_n.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 1$.

- La v.a.r. A_n admet une espérance en tant que somme de v.a.r. qui en admettent une.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(A_n) & = & \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{n\, s_u^2} \sum\limits_{i=1}^{n} (u_i - \bar{u}) T_i\right) & \\ & = & \dfrac{1}{n\, s_u^2} \sum\limits_{i=1}^{n} (u_i - \bar{u}) \mathbb{E}(T_i) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \end{array}$$

Or, d'après la question ***9.a)*** : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $T_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(a\, u_i + b, \sigma^2\right)$. Donc :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(A_n) & = & \dfrac{1}{n\, s_u^2} \sum\limits_{i=1}^{n} (u_i - \bar{u})(a\, u_i + b) \\ & = & \dfrac{1}{n\, s_u^2} \sum\limits_{i=1}^{n} (a\, u_i^2 - a\, u_i\, \bar{u} + b\, u_i - b\, \bar{u}) \\ & = & \dfrac{1}{n\, s_u^2} \left(a \sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2 - a\bar{u} \sum\limits_{i=1}^{n} u_i + b \sum\limits_{i=1}^{n} u_i - nb\bar{u}\right) \\ & = & \dfrac{1}{n\, s_u^2} \left(a \sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2 - a\bar{u} \times n\bar{u} + \cancel{b \times n\bar{u}} - \cancel{nb\bar{u}}\right) \\ & = & \dfrac{a}{n\, s_u^2} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2 - n\bar{u}^2\right) \\ & = & \dfrac{a}{\cancel{n\, s_u^2}} \times \cancel{n\, s_u^2} \\ & = & a \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(A_n) = a}$$

- La v.a.r. A_n admet une variance en tant que somme de v.a.r. **indépendantes** qui admettent une variance.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(A_n) &= \mathbb{V}\left(\frac{1}{n\,s_u^2}\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})T_i\right) \\
&= \frac{1}{(n\,s_u^2)^2}\,\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})T_i\right) && \textit{(par propriété de la variance)} \\
&= \frac{1}{(n\,s_u^2)^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}((u_i-\bar{u})T_i) && \begin{array}{l}\textit{(car, d'après la question \textbf{9.b)},} \\ T_1,\,\dots,\,T_n \textit{ sont indépendantes)}\end{array} \\
&= \frac{1}{(n\,s_u^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2\mathbb{V}(T_i) \\
&= \frac{1}{(n\,s_u^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2\sigma^2 && \begin{array}{l}\textit{(car : } \forall i\in[\![1,n]\!], \\ T_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(a\,u_i+b,\sigma^2\right)\textit{)}\end{array} \\
&= \frac{\sigma^2}{(n\,s_u^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{(n\,s_u^2)^{\cancel{2}}}\,\cancel{n\,s_u^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{n\,s_u^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(A_n) = \frac{\sigma^2}{n\,s_u^2}}$$

- La v.a.r. A_n est une combinaison linéaire des (T_i) qui suivent toutes une loi normale. Donc A_n suit une loi normale.
  On a déjà déterminé ses paramètres : $\mathbb{E}(A_n)$ et $\mathbb{V}(A_n)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } A_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(a, \frac{\sigma^2}{n\,s_u^2}\right).}$$

Commentaire

On peut remarquer que :
× $\mathbb{E}(A_n) = a$. Donc la v.a.r. A_n est un estimateur sans biais du paramètre a.
× $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{V}(A_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sigma^2}{n\,s_u^2} = 0$. Donc A_n est un estimateur convergent de a.

□

b) On suppose que a est un paramètre inconnu. Soit α un réel donné vérifiant $0 < \alpha < 1$.
On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et d_α le réel tel que $\Phi(d_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.
Déterminer un intervalle de confiance du paramètre a au niveau de confiance $1-\alpha$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $A_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(a, \dfrac{\sigma^2}{n\,s_u^2}\right)$.
  On cherche alors à se ramener à la loi $\mathcal{N}(0,1)$ pour utiliser les données de l'énoncé.

Pour cela, on note A_n^* la v.a.r. centrée réduite associée à A_n. Alors :

$$A_n^* = \frac{A_n - \mathbb{E}(A_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(A_n)}} = \frac{A_n - a}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n\,s_u^2}}} = \sqrt{n\,s_u^2}\,\frac{A_n - a}{\sigma}$$

- Comme A_n^* est une transformée affine de A_n qui suit une loi normale, alors A_n^* suit également une loi normale.
  De plus, par construction de A_n^* :

$$\mathbb{E}(A_n^*) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(A_n^*) = 1$$

$$\boxed{\text{Donc : } A_n^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).}$$

- Ainsi, la fonction Φ est la fonction de répartition de A_n^*. Donc, par propriétés de Φ :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([d_\alpha \leqslant A_n^* \leqslant d_\alpha]) & = & \Phi(d_\alpha) - \Phi(-d_\alpha) \\ & = & \Phi(d_\alpha) - (1 - \Phi(d_\alpha)) \ = \ 2\Phi(d_\alpha) - 1 \\ & = & 2\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right) - 1 \ = \ 2 - \cancel{2}\,\dfrac{\alpha}{\cancel{2}} - 1 \\ & = & 1 - \alpha \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} 1 - \alpha & = & \mathbb{P}([-d_\alpha \leqslant A_n^* \leqslant d_\alpha]) \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[-d_\alpha \leqslant \sqrt{n\,s_u^2}\,\dfrac{A_n - a}{\sigma} \leqslant d_\alpha\right]\right) \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[-d_\alpha\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n\,s_u^2}} \leqslant A_n - a \leqslant d_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n\,s_u^2}}\right]\right) \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[d_\alpha\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n\,s_u^2}} \geqslant a - A_n \geqslant -d_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n\,s_u^2}}\right]\right) \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[A_n + d_\alpha\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n\,s_u^2}} \geqslant a \geqslant A_n - d_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n\,s_u^2}}\right]\right) \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, l'intervalle } \left[A_n - d_\alpha\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n\,s_u^2}}\ ;\ A_n + d_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n\,s_u^2}}\right] \text{ est un intervalle de confiance} \\ \text{du paramètre } a \text{ au niveau de confiance } 1 - \alpha.\end{array}}$$ □

Session 2017

ECRICOME 2017 : le sujet

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on notera $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice a définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie A : Étude de la matrice A

1. Calculer les matrices $(A-I)^2$ et $(A-I)^3$.

2. En déduire l'ensemble des valeurs propres de A.

3. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note pour tout $x \in]-1,1[$, $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

4. Justifier que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$, et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.

5. En utilisant la formule de Taylor-Young pour φ en 0 à l'ordre 2, déterminer un réel α non nul tel que :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

6. On note $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2$ la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue. Développer $(P(x))^2$.

7. Soit $C = A - I$. En utilisant les résultats de la question ***1.***, vérifier que $\big(P(C)\big)^2 = A$. Expliciter alors une matrice M telle que $M^2 = A$.

Partie C : Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice A.

Dans cette partie, on pose : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Soient u, v et w les vecteurs définis par : $\begin{cases} w = (1,0,1), \\ v = f(w) - w, \\ u = f(v) - v. \end{cases}$

a) Calculer les vecteurs v et u.

b) Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$.

d) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $T = P^{-1}AP$.

9. Soit $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$. En déduire que N est de la forme :

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

où a, b et c sont trois réels.

b) Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement 2 solutions N_1 et N_2.

10. Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2.

11. L'ensemble E des matrices M appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel ?

Exercice 2

Dans tout l'exercice, a est un réel strictement positif.

Partie A

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0$, $\varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

2. Étudier les variations de la fonction φ et dresser son tableau de variations.
On fera apparaître dans ce tableau le réel $x_0 = \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$.

3. Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2, vérifiant : $z_1 < x_0 < z_2$.
Que se passe-t-il si $a = \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$? Si $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$?

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'ouvert $U = \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ par :

$$\forall (x,y) \in U, \quad f(x,y) = \ln(x)\ln(y) - (xy)^a.$$

4. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

5. Calculer les dérivées partielles premières de f.

6. Démontrer que pour tout $(x,y) \in U$:

$$(x,y) \text{ est un point critique de } f \iff \begin{cases} x = y, \\ \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

7. Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie **A**.
Déterminer aussi les éventuels points critiques de f dans les cas où $a = \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$ et $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$.

Partie C

Dans cette partie, on suppose que $a < \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$. On rappelle alors que la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie **A**.

8. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f.

9. Calculer la matrice hessienne de f au point (z_1, z_1).
Vérifier que cette matrice peut s'écrire sous la forme :

$$\nabla^2(f)(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} -a^2 {z_1}^{2a-2} & \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 {z_1}^{2a-2} \\ \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} & -a^2 {z_1}^{2a-2} \end{pmatrix}.$$

10. On pose $M = \nabla^2(f)(z_1, z_1)$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Calculer MX_1 et MX_2, et en déduire les valeurs propres de M.

11. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_1, z_1) ?
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

12. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_2, z_2) ?
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.
On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage.
Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre 2, 4, 1, 5 et 9, alors on obtient : $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 7$, $S_4 = 12$, $S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.

2. ***a)*** Déterminer $T_n(\Omega)$.

b) Calculer $\mathbb{P}([T_n = 1])$.

c) Montrer que :

$$\mathbb{P}([T_n = n]) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.

4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3. Vérifier que $\mathbb{E}(T_3) = \dfrac{16}{9}$.

Partie B

5. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

6. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et X_{k+1}.

b) En utilisant un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k, démontrer alors que :

$$\forall i \in [\![k+1, n]\!],\ \mathbb{P}([S_{k+1} = i]) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}([S_k = j]).$$

7. ***a)*** Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres : $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.

b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$:

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

c) Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :

$$\text{« } \forall i \in [\![k, n]\!], \quad \mathbb{P}([S_k = i]) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} \text{ ».}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.

8. ***a)*** Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comparer les événements $[T_n > k]$ et $[S_k \leqslant n-1]$.

b) En déduire que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathbb{P}([T_n > k]) = \dfrac{1}{n^k} \dbinom{n-1}{k}$.

9. Démontrer que $\mathbb{E}(T_n) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k])$, puis que $\mathbb{E}(T_n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$.

10. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

Partie C

Dans cette partie, on fait varier l'entier n et on étudie la convergence en loi de la suite de variables $(T_n)_{n \geqslant 1}$.

11. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Y = k]) = \dfrac{k-1}{k!}$.

a) Vérifier par le calcul que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = k]) = 1$.

b) Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.

12. Pour tout entier naturel k non nul, démontrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}([T_n > k]) = \frac{1}{k!}$$

13. Démontrer alors que $(T_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire Y.

14. On rappelle qu'en langage **Scilab**, l'instruction `grand(1, 1, 'uin', 1, n)` renvoie un entier aléatoire de $[\![1, n]\!]$. Compléter la fonction ci-dessous, qui prend en argument le nombre n de boules contenues dans l'urne, afin qu'elle simule la variable aléatoire T_n :

```
function y = T(n)
    S = .................
    y = .................
    while .............
        tirage = grand(1, 1, 'uin', 1, n)
        S = S + tirage
        y = ..................
    end
endfunction
```

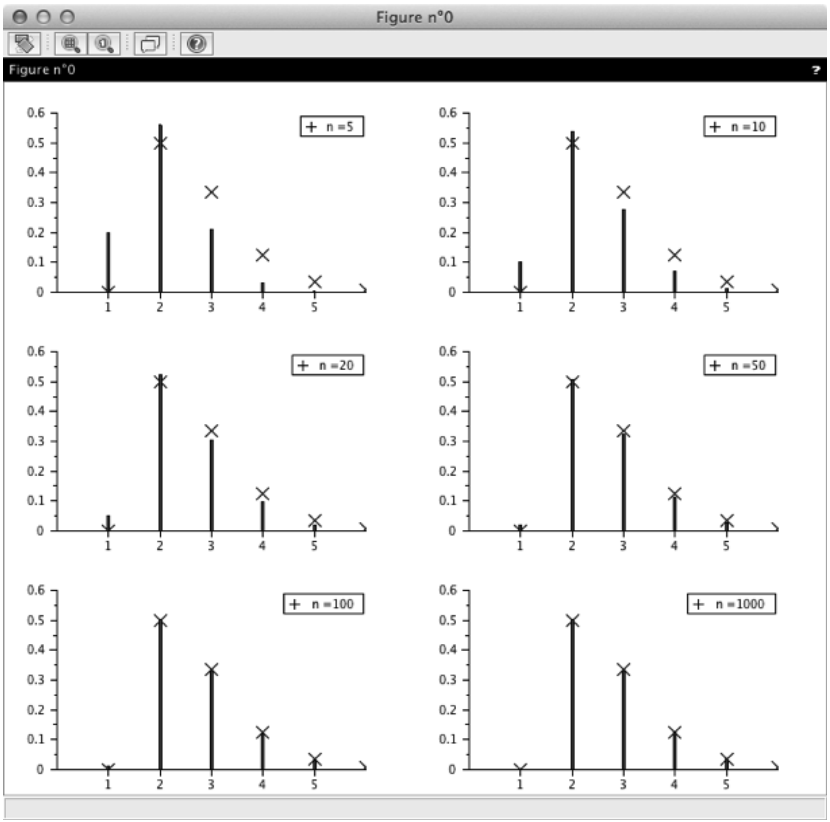
15. On suppose déclarée la fonction précédente et on écrit le script ci-dessous :

```
function y = freqT(n)
    y = zeros(1,n)
    for i = 1:100000
        k = T(n)
        y(k) = y(k) + 1
    end
    y = y/100000
endfunction
```

```
function y = loitheoY(n)
    y = zeros(1,n)
    for k = 1:n
        y(k) = (k-1)/prod(1:k)
    end
endfunction

clf
n = input('n=?')
plot2d(loitheoY(6), style=-2)
x = freqT(n)
bar(x(1:5))
```

L'exécution de ce script pour les valeurs de n indiquées a permis d'obtenir les graphes page suivante.



a) Expliquer ce que représentent les vecteurs renvoyés par les fonctions `freqT` et `loitheoY`. Comment ces vecteurs sont-ils représentés graphiquement dans chaque graphique obtenu ?

b) Expliquer en quoi cette succession de graphiques permet d'illustrer le résultat de la question ***13***.

ECRICOME 2017 : le corrigé

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on notera $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice a définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie A : Étude de la matrice A

1. Calculer les matrices $(A-I)^2$ et $(A-I)^3$.

Démonstration.

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-I)^3 = (A-I)(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } (A-I)^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.}$$

□

2. En déduire l'ensemble des valeurs propres de A.

Démonstration.

- $(A-I)^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ donc $P(X) = (X-1)^3$ est un polynôme annulateur de A.
  Or le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de ce polynôme annulateur.
  De plus, l'unique racine de P est 1.

  $$\boxed{\text{Donc : } \mathrm{Sp}(A) \subset \{1\}.}$$

- Vérifions que 1 est bien une valeur propre de A.

  $$\mathrm{rg}(A-I) \quad = \quad \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

  On remarque : $C_1 = -C_2$. Donc : $\mathrm{rg}(A-I) < 3$.
  Donc $A-I$ n'est pas inversible. Ainsi 1 est bien valeur propre de A.

  $$\boxed{\text{On en déduit : } \{1\} \subset \mathrm{Sp}(A).}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Sp}(A) = \{1\}\text{, c'est-à-dire que 1 est l'unique valeur propre de } A.}$$

Commentaire

Ne pas conclure trop vite sur ce type de question !

- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de la matrice A.
- Si c'était le cas, A aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus 3 !). Par exemple, comme $Q(X) = (X - 5)\ P(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.
- On dit parfois que les racines d'un polynôme annulateur sont des valeurs propres **possibles** de A (comprendre qu'elles sont potentiellement des valeurs propres). Il faut alors démontrer qu'elles sont réellement des valeurs propres.
- Cette question s'effectue donc toujours en 2 parties.
  - Déterminer les valeurs propres possibles de A : ce sont les racines d'un polynôme annulateur (ici le polynôme P).
  - Vérifier que ces racines sont bien valeurs propres de A par un calcul de rang.

□

3. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

Démonstration.

- Le réel 0 n'est pas valeur propre de A.

  $\boxed{\text{Donc } A \text{ est inversible.}}$

- Montrons par l'absurde que A n'est pas diagonalisable.
  Supposons que A est diagonalisable. Il existe alors une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A telles que $A = PDP^{-1}$.
  Or 1 est la seule valeur propre de A. Ainsi $D = I$ et :

$$A = PDP^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$$

  Absurde !

  $\boxed{\text{On en déduit que } A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

Commentaire

- Pour l'inversibilité, on pouvait aussi déterminer $\mathrm{rg}(A)$ et vérifier que $\mathrm{rg}(A) < 3$, ce qui prouve que A n'est pas inversible.
- Il faut prendre le réflexe de penser à un raisonnement par l'absurde lorsque le résultat à démontrer est formulé sous forme de négation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général). À titre d'illustration, il faut penser à ce type de raisonnement pour :
  × montrer qu'une suite `N`'est `PAS` majorée,
  × montrer qu'une matrice admettant une seule valeur propre `N`'est `PAS` diagonalisable.

□

Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note pour tout $x \in]-1,1[$, $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

4. Justifier que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$, et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.

Démonstration.

- La fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt{1+x}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$ car elle est la composée $\varphi = h \circ g$ où :
  - × $g : x \mapsto 1+x$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$ car polynomiale sur cet intervalle,
    - telle que $g(]-1,1[) \subset]0,+\infty[$ (pour tout $x \in]-1,1[$, $1+x>0$).
  - × $h : y \mapsto \sqrt{y}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]-1,1[.}$$

- Soit $x \in]-1,1[$.

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \qquad \text{et} \qquad \varphi''(x) = -\frac{1}{4(1+x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\boxed{\text{On obtient alors : } \varphi'(0) = \frac{1}{2} \text{ et } \varphi''(0) = -\frac{1}{4}.}$$

□

5. En utilisant la formule de Taylor-Young pour φ en 0 à l'ordre 2, déterminer un réel α non nul tel que :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Démonstration.
La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$.
Comme $0 \in]-1,1[$, φ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.
D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 appliquée à φ en 0 :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{D'après les calculs de la question précédente et en vérifiant que } \varphi(0) = 1 : \\ \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0 \ \text{ et } \ \alpha = -\frac{1}{8}.\end{array}}$$

□

6. On note $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2$ la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue. Développer $(P(x))^2$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(P(x))^2 &= \left(1 + \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{8}\,x^2\right)^2 \\ &= 1 + \frac{1}{4}\,x^2 + \left(-\frac{1}{8}\right)^2 x^4 + \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}}\,x + 2 \times \left(-\frac{1}{8}\right) x^2 + \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}}\,x \times \left(-\frac{1}{8}\right) x^2 \\ &= 1 + x - \frac{1}{8}\,x^3 + \frac{1}{64}\,x^4\end{aligned}$$

$$\boxed{(P(x))^2 = 1 + x - \frac{1}{8}\,x^3 + \frac{1}{64}\,x^4}$$

□

7. Soit $C = A - I$. En utilisant les résultats de la question ***1.***, vérifier que $\big(P(C)\big)^2 = A$.
Expliciter alors une matrice M telle que $M^2 = A$.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\big(P(C)\big)^2 \quad = \quad I + C - \frac{1}{8}\, C^3 + \frac{1}{64}\, C^4$$

Or, d'après la question ***1.*** : $C^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Donc :

$$C^4 = C \times C^3 = C \times 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

D'où :

$$\big(P(C)\big)^2 = I + C = I + (A - I) = A.$$

$$\boxed{\big(P(C)\big)^2 = A}$$

- On en déduit que la matrice $M = P(C)$ vérifie : $M^2 = A$.
Déterminons donc la matrice $P(C)$, où $C = A - I$.

$$\begin{aligned} P(C) &= I + \frac{1}{2}\, C - \frac{1}{8}\, C^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La matrice } M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ vérifie : } M^2 = A.}$$

□

Partie C : Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice A.
Dans cette partie, on pose : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Soient u, v et w les vecteurs définis par : $\left\{ \begin{array}{l} w = (1, 0, 1), \\ v = f(w) - w, \\ u = f(v) - v. \end{array} \right.$

a) Calculer les vecteurs v et u.

Démonstration.

- Déterminons le vecteur v.
On note :

$$V = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) \quad \text{et} \quad W = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'après l'énoncé : $v = f(w) - w$.
Or A est la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}$.
En passant à l'écriture matricielle, on obtient :

$$\begin{aligned} V = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(w) - w) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(w)) - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w) \\ &= AW - W \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $v = 1 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,1,0) - 3 \cdot (0,0,1)$.

$$\boxed{v = (1,1,-3)}$$

- Déterminons le vecteur u.
  D'après l'énoncé : $u = f(v) - v$.
  En passant à l'écriture matricielle comme précédemment, et en notant $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, on obtient :

$$\begin{aligned} U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(v) - v) \\ &= AV - V \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $u = -6 \cdot (1,0,0) - 6 \cdot (0,1,0) + 0 \cdot (0,0,1)$.

$$\boxed{u = (-6,-6,0)}$$

Commentaire

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F. On utilise dans cette question les 2 propriétés suivantes.

- Pour tout $(u,v) \in E^2$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(u+v) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(u) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(v)$$

- Pour tout $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et tout $u \in E$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(f(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(u)$$

□

b) Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

- Montrons que la famille (u, v, w) est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
  Supposons que :
$$\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot w = 0_{\mathbb{R}^3}$$
  On obtient alors les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl}
\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot w = 0_{\mathbb{R}^3} & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -6\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ -6\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & -3\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -6\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & -3\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\
& \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -6\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & -3\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\
& \Longleftrightarrow & \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \\
& & \textit{(par remontées successives)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Donc la famille } (u, v, w) \text{ est une famille libre de } \mathbb{R}^3.}$$

- On obtient alors :
  × la famille (u, v, w) est une famille libre,
  × $\text{Card}((u, v, w)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{\text{Donc } \mathscr{B}' = (u, v, w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

□

c) Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$.

Démonstration.
Pour déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$, il faut exprimer les vecteurs $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$ dans la base (u, v, w).

- $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(u)) = AU = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = U$. Donc $f(u) = 1 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w$.

  Ainsi : $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(u)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(v)) = AV = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = U + V$. Donc $f(v) = 1 \cdot u + 1 \cdot v + 0 \cdot w$.

  Ainsi : $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(v)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(w)) = AW = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = V + W$. Donc $f(w) = 0 \cdot u + 1 \cdot v + 1 \cdot w$.

  Ainsi : $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(w)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Finalement :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$$

$$\boxed{\text{La matrice représentative de } f \text{ dans la base } \mathscr{B}' \text{ est } T.}$$

□

d) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $T = P^{-1}AP$.

Démonstration.
Les matrices A et T sont deux matrices représentatives du même endomorphisme f.
Elles sont donc semblables.

$$\boxed{\text{Ainsi, il existe une matrice } P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \text{ inversible telle que } T = P^{-1}AP.}$$

□

9. Soit $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$. En déduire que N est de la forme :

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

où a, b et c sont trois réels.

Démonstration.

- Supposons : $N^2 = T$. Alors :

$$NT = N \times N^2 = N^3 = N^2 \times N = TN$$

$$\boxed{\text{Donc, si } N^2 = T, \text{ alors } NT = TN.}$$

- Soit $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Alors il existe $(a, b, c, d, e, f, g, h, i) \in \mathbb{R}^9$ tels que $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
NT = TN \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & a+b & b+c \\ d & d+e & e+f \\ g & g+h & h+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & a+d \\ a+b & = & b+e \\ b+c & = & c+f \\ d & = & d+g \\ d+e & = & e+h \\ e+f & = & f+i \\ g & = & g \\ g+h & = & h \\ h+i & = & i \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} d = 0 \\ a = e \\ b = f \\ g = 0 \\ d = h \\ e = i \\ g = 0 \\ h = 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$NT = TN \;\Leftrightarrow\; N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Donc, la matrice } N \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.}$$

□

b) Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement 2 solutions N_1 et N_2.

Démonstration.

Tout d'abord : $N^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2+2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$. On obtient donc :

$$N^2 = T \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{ccc} a^2 & = & 1 \\ 2ab & = & 1 \\ b^2+2ac & = & 0 \end{array} \right.$$

La première équation admet deux solutions (1 et -1). On obtient alors :

$$N^2 = T \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ 2ab & = & 1 \\ b^2+2ac & = & 0 \end{array} \right. \quad \texttt{OU} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & -1 \\ 2ab & = & 1 \\ b^2+2ac & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ b & = & \dfrac{1}{2} \\ c & = & -\dfrac{1}{8} \end{array} \right. \quad \texttt{OU} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & -1 \\ b & = & -\dfrac{1}{2} \\ c & = & \dfrac{1}{8} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow\; N = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = N_1 \quad \texttt{OU} \quad N = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = N_2$$

$$\boxed{\text{L'équation } N^2 = T \text{ admet exactement 2 solutions } N_1 \text{ et } N_2.}$$

□

10. Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2.

Démonstration.

- Montrons que l'équation $M^2 = A$ est équivalente à l'équation $N^2 = T$.

$$\begin{array}{rcll} M^2 = A & \Leftrightarrow & P^{-1}M^2 = P^{-1}A & \textit{(multiplication à gauche par } P^{-1}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}M^2P = P^{-1}AP & \textit{(multiplication à droite par } P\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}M^2P = T & \textit{(car } P^{-1}AP = T \textit{ d'après } \textbf{\textit{8.b)}}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}MPP^{-1}MP = T & \\ & \Leftrightarrow & (P^{-1}MP)^2 = T & \\ & \Leftrightarrow & N^2 = T & \textit{(car } N = P^{-1}MP\textit{)} \end{array}$$

- Or, d'après la question précédente, l'équation $N^2 = T$ admet exactement 2 solutions N_1 et N_2.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Donc l'équation } M^2 = A \text{ admet exactement 2 solutions :}\\ M_1 = PN_1P^{-1} \text{ et } M_2 = PN_2P^{-1}.\end{array}}$$

□

11. L'ensemble E des matrices M appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel ?

Démonstration.
On remarque que $0^2_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \neq A$. Donc $0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \notin E$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } E \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$$

Commentaire

- Remarquons bien ici la tournure de la question : on ne demande pas « Montrer que cet ensemble est un espace vectoriel », mais « Cet ensemble est-il un espace vectoriel ? ».
  L'attitude à adopter ici n'est donc pas d'essayer de montrer que cet ensemble est un espace vectoriel mais plutôt de montrer que **ce n'en est pas un**.
- Pour montrer qu'un ensemble F n'est pas un espace vectoriel, il faut trouver un contre-exemple à la définition d'espace vectoriel. Pour cela, on pourra, dans cet ordre :
  × tester si $0 \in F$. Si ce n'est pas le cas, alors F n'est pas un espace vectoriel.
  × trouver un vecteur $u \in F$, tel que $-u \notin F$ (ou tout autre vecteur v de la forme $\lambda \cdot u$).
  × trouver deux vecteurs $(u, v) \in F^2$, tels que $u + v \notin F$.

□

Exercice 2

Dans tout l'exercice, a est un réel strictement positif.

Partie A

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0$, $\varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

Démonstration.

- Déterminons $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x)$.

  Tout d'abord, comme $a > 0$: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{2a} = 0$. De plus : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

$$\boxed{\text{Donc : } \lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = -\infty.}$$

- Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

  Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\varphi(x) = x^{2a}\left(\frac{\ln(x)}{x^{2a}} - a\right) = x^{2a}\left(\frac{1}{2a}\frac{2a\ln(x)}{x^{2a}} - a\right) = x^{2a}\left(\frac{1}{2a}\frac{\ln(x^{2a})}{x^{2a}} - a\right)$$

  Tout d'abord, comme $a > 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2a} = +\infty$.

  Donc, par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^{2a})}{x^{2a}} = 0$.

$$\boxed{\text{D'où, comme } -a < 0 : \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty.}$$

□

2. Étudier les variations de la fonction φ et dresser son tableau de variations.

On fera apparaître dans ce tableau le réel $x_0 = \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$.

Démonstration.

- La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.
  Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 2a^2 x^{2a-1} = \frac{1}{x} - 2a^2\frac{x^{2a}}{x} = \frac{1 - 2a^2x^{2a}}{x}$$

- On a : $x > 0$. Donc :

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - 2a^2x^{2a} \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 1 \geqslant 2a^2x^{2a} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2a^2} \geqslant x^{2a} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}} \geqslant x \qquad \textit{(car, comme } a > 0,\ x \mapsto x^{\frac{1}{2a}} \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)}
\end{aligned}$$

- On note $x_0 = \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$. On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0		x_0		$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de φ	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi(x_0)$	$\searrow$	$-\infty$

Commentaire

On rappelle que la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\alpha > 0$.
Ici, $a > 0$, donc : $\dfrac{1}{2a} > 0$. D'où la stricte croissance de $x \mapsto x^{\frac{1}{2a}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\square$

3. Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2, vérifiant : $z_1 < x_0 < z_2$.

Que se passe-t-il si $a = \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$? Si $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$?

Démonstration.

- Déterminons le signe de $\varphi(x_0)$ lorsque $a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$.

$$\begin{aligned}
\varphi(x_0) &= \ln(x_0) - a\ {x_0}^{2a} \\
&= \ln\left(\left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}\right) - a\ \left(\left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}\right)^{2a} \\
&= -\frac{1}{2a}\ \ln(2a^2) - a\ \frac{1}{2a^2} \\
&= -\frac{1}{2a}\ \ln(2a^2) - \frac{1}{2a} \\
&= -\frac{1}{2a}\ (\ln(2a^2) + 1)
\end{aligned}$$

Or : $0 < a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$. Donc : $a^2 < \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$. D'où : $2a^2 < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Ainsi : $\ln(2a^2) < \ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = -\ln(\mathrm{e}) = -1$ car la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Donc : $\ln(2a^2) + 1 < 0$.

Comme $-\dfrac{1}{2a} < 0$, on en déduit : $-\dfrac{1}{2a}(\ln(2a^2) + 1) > 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \varphi(x_0) > 0.}$$

– Étude sur $]0, x_0]$. La fonction φ est :
  × continue sur $]0, x_0]$,
  × strictement croissante $]0, x_0]$.

  Ainsi φ réalise une bijection de $]0, x_0]$ dans $\varphi(]0, x_0])$.

$$\varphi(]0, x_0]) = \left] \lim_{x \to 0} \varphi(x), \varphi(x_0) \right] =]-\infty, \varphi(x_0)]$$

  Or : $0 \in]-\infty, \varphi(x_0)]$, car $\varphi(x_0) > 0$.

  Donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement une solution sur $]0, x_0]$ que l'on notera z_1.

– Étude sur $]x_0, +\infty[$. La fonction φ est :
  × continue sur $]x_0, +\infty[$,
  × strictement décroissante sur $]x_0, +\infty[$.

  Ainsi φ réalise une bijection de $]x_0, +\infty[$ dans $\varphi(]x_0, +\infty[)$.

$$\varphi(]x_0, +\infty[) = \left] \lim_{x \to +\infty} \varphi(x), \varphi(x_0) \right[=]-\infty, \varphi(x_0)[$$

  Or : $0 \in]-\infty, \varphi(x_0)[$, car $\varphi(x_0) > 0$.

  Donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement une solution sur $]x_0, +\infty[$ que l'on notera z_2.

L'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2 vérifiant $0 < z_1 < x_0 < z_2$.

- Si $a = \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, alors : $\varphi(x_0) = 0$.

  Or, d'après l'étude effectuée en question précédente, pour tout $x \in]0, x_0[\cup]x_0, +\infty[$:

$$\varphi(x) < \varphi(x_0) = 0$$

  Ainsi, si $a = \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution : x_0.

- Si $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, alors $\varphi(x_0) < 0$.

  Or, d'après l'étude effectuée en question précédente, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\varphi(x) \leqslant \varphi(x_0) < 0$$

  Ainsi, si $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

Commentaire

- Il est important dans cette question d'avoir parfaitement en tête toutes les hypothèses du théorème de la bijection. En particulier, la fonction φ doit être **strictement monotone** sur l'intervalle considéré.
- Pour le cas « $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$ », on ne pouvait donc pas appliquer le théorème de la bijection directement sur l'intervalle $]0, +\infty[$, mais il fallait découper cet intervalle en plusieurs sous-intervalles sur lesquels φ est strictement monotone (ici $]0, x_0]$ et $]x_0, +\infty[$).

□

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'ouvert $U = \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ par :

$$\forall (x,y) \in U, \quad f(x,y) = \ln(x)\ln(y) - (xy)^a.$$

4. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

Démonstration.

- La fonction $(x,y) \mapsto \ln(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car est la composée $\psi_1 \circ g_1$ où :
  - × $g_1 : (x,y) \mapsto x$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car polynomiale sur U,
    - telle que $g_1(U) \subset \mathbb{R}_+^*$.
  - × $\psi_1 : z \mapsto \ln(z)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- De même la fonction $(x,y) \mapsto \ln(y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.
- La fonction $(x,y) \mapsto (xy)^a$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car elle est la composée $\psi_2 \circ g_2$ où :
  - × $g_2 : (x,y) \mapsto xy$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car polynomiale sur U,
    - telle que $g_2(U) \subset \mathbb{R}_+^*$.
  - × $\psi_2 : z \mapsto z^a$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } U \text{ comme somme de fonctions de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } U.}$

Commentaire

Attention à ne pas confondre les fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $(x,y) \mapsto \ln(x)$!
La première est fonction d'une variable réelle :

$$\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$$

La seconde est une fonction de **deux** variables réelles :

$$\begin{array}{ccccc}]0,+\infty[& \times &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x & , & y) & \mapsto & \ln(x) \end{array}$$

□

5. Calculer les dérivées partielles premières de f.

Démonstration.

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U donc, en particulier, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Elle admet donc des dérivées partielles premières en tout point de U.
- Soit $(x,y) \in U$.

$$\partial_1(f)(x,y) = \frac{\ln(y)}{x} - a x^{a-1} y^a = \frac{\ln(y) - a(xy)^a}{x}$$

(en utilisant l'écriture : $f(x,y) = \ln(y)\ \ln(x) - y^a\ x^a$)

$$\partial_2(f)(x,y) = \frac{\ln(x)}{y} - a y^{a-1} x^a = \frac{\ln(x) - a(xy)^a}{y}$$

(en utilisant l'écriture : $f(x,y) = \ln(x)\ \ln(y) - x^a\ y^a$)

$\boxed{\text{Pour tout } (x,y) \in U,\ \partial_1(f)(x,y) = \dfrac{\ln(y) - a(xy)^a}{x} \text{ et } \partial_2(f)(x,y) = \dfrac{\ln(x) - a(xy)^a}{y}.}$

□

6. Démontrer que pour tout $(x, y) \in U$:

$$(x, y) \text{ est un point critique de } f \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

Démonstration.
Soit $(x, y) \in U$.

$$(x, y) \text{ est un point critique de } f \Leftrightarrow \nabla(f)(x, y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1(f)(x, y) & = & 0 \\ \partial_2(f)(x, y) & = & 0 \end{cases}$$

D'après la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
& (x, y) \text{ est un point critique de } f \\
\Longleftrightarrow \quad & \begin{cases} \dfrac{\ln(y) - a(xy)^a}{x} & = & 0 \\ \dfrac{\ln(x) - a(xy)^a}{y} & = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ln(y) - a(xy)^a & = & 0 \\ \ln(x) - a(xy)^a & = & 0 \end{cases} \quad \textit{(car } x \neq 0 \textit{ et } y \neq 0\textit{)} \\
\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \quad & \begin{cases} \ln(y) - \ln(x) & = & 0 \\ \ln(x) - a(xy)^a & = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ln(x) = \ln(y) \\ \ln(x) - a(xy)^a = 0 \end{cases} \\
\Longleftrightarrow \quad & \begin{cases} x = y \\ \ln(x) - a(xy)^a = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \ln(x) - a(xx)^a = 0 \end{cases} \\
\Longleftrightarrow \quad & \begin{cases} x = y \\ \ln(x) - ax^{2a} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\boxed{(x, y) \text{ est un point critique de } f \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}.}$$

□

7. Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie **A**.

Déterminer aussi les éventuels points critiques de f dans les cas où $a = \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$ et $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$.

Démonstration.

- On suppose : $a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$.

  D'après ***3.***, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $]0, +\infty[$: z_1 et z_2.
  En reprenant la suite d'équivalences précédente, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
(x, y) \text{ est un point critique de } f \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x & = & y \\ \varphi(x) & = & 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x & = & y \\ x & = & z_1 \end{cases} \quad \texttt{OU} \quad \begin{cases} x & = & y \\ x & = & z_2 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y & = & z_1 \\ x & = & z_1 \end{cases} \quad \texttt{OU} \quad \begin{cases} y & = & z_2 \\ x & = & z_2 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad (x, y) \in \{(z_1, z_1), (z_2, z_2)\}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}, f \text{ admet exactement deux points critiques : } (z_1, z_1) \text{ et } (z_2, z_2).}$$

- On suppose : $a = \sqrt{\frac{1}{2\text{e}}}$.

  D'après la question ***3.***, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement une solution dans $]0, +\infty[$: x_0.
  En reprenant la suite d'équivalences de la question précédente, on a donc :

$$(x,y) \text{ est un point critique de } f \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y \\ \varphi(x) & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y \\ x & = & x_0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & x_0 \\ x & = & x_0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \ (x,y) \in \{(x_0, x_0)\}$$

$$\boxed{\text{Si } a = \sqrt{\frac{1}{2\text{e}}},\ f \text{ admet exactement un point critique : } (x_0, x_0).}$$

- On suppose : $a > \sqrt{\frac{1}{2\text{e}}}$.

  D'après la question ***3.***, l'équation $\varphi(x) = 0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{\text{Si } a > \sqrt{\frac{1}{2\text{e}}},\ f \text{ n'admet aucun point critique.}}$$

□

Partie C

Dans cette partie, on suppose que $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$. On rappelle alors que la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie **A**.

8. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f.

Démonstration.

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U d'après la question *4*.
  Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2.
- Soit $(x, y) \in U$.

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = \ln(y)\ \frac{-1}{x^2} - ay^a\ (a-1)x^{a-2} = -\frac{\ln(y) + a(a-1)(xy)^a}{x^2}$$

$$\textit{(en utilisant l'écriture : } \partial_1(f)(x,y) = \ln(y)\ \frac{1}{x} - ay^a\ x^{a-1}\textit{)}$$

$$\partial^2_{2,2}(f)(x,y) = \ln(x)\ \frac{-1}{y^2} - ax^a\ (a-1)y^{a-2} = -\frac{\ln(x) + a(a-1)(xy)^a}{y^2}$$

$$\textit{(en utilisant l'écriture : } \partial_2(f)(x,y) = \ln(x)\ \frac{1}{y} - ax^a\ y^{a-1}\textit{)}$$

$$\partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \frac{1}{y}\ \frac{1}{x} - ay^{a-1}\ ax^{a-1} = \frac{1 - a^2(xy)^a}{xy} = \partial^2_{2,1}(f)(x,y)$$

$$\textit{(en utilisant l'écriture : } \partial_2(f)(x,y) = \frac{1}{y}\ \ln(x) - ay^{a-1}\ x^a\textit{)}$$

La dernière égalité est obtenue d'après le théorème de Schwarz, car f est $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U.

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall (x,y) \in U,\ \partial^2_{1,1}(f)(x,y) = -\dfrac{\ln(y) + a(a-1)(xy)^a}{x^2},\ \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = -\dfrac{\ln(x) + a(a-1)(xy)^a}{y^2}, \\ \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial_{2,1}((f))(x,y) = \dfrac{1 - a^2(xy)^a}{xy} \end{array}}$$

□

9. Calculer la matrice hessienne de f au point (z_1, z_1).
Vérifier que cette matrice peut s'écrire sous la forme :

$$\nabla^2(f)(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} -a^2 {z_1}^{2a-2} & \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 {z_1}^{2a-2} \\ \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} & -a^2 {z_1}^{2a-2} \end{pmatrix}.$$

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\partial^2_{1,1}(f)(z_1, z_1) = -\frac{\ln(z_1) + a(a-1)(z_1 z_1)^a}{z_1^2} = -\frac{\ln(z_1) + a(a-1){z_1}^{2a}}{z_1^2}$$

Or, par définition de z_1 : $\varphi(z_1) = 0$. Donc : $\ln(z_1) = a{z_1}^{2a}$. D'où :

$$\partial^2_{1,1}(f)(z_1, z_1) = -\frac{\cancel{a{z_1}^{2a}} + a^2 {z_1}^{2a} - \cancel{a{z_1}^{2a}}}{z_1^2} = -a^2 {z_1}^{2a-2}$$

- Avec exactement le même calcul, on obtient : $\partial^2_{2,2}(f) = -a^2 {z_1}^{2a-2}$.
- Toujours d'après la question précédente :

$$\partial^2_{1,2}(f)(z_1, z_1) = \frac{1 - a^2(z_1 z_1)^a}{z_1 z_1} = \frac{1 - a^2 {z_1}^{2a}}{z_1^2} = \frac{1}{z_1^2} - a^2 {z_1}^{2a-2}$$

- Par définition de la matrice hessienne :

$$\nabla^2(f)(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(f)(z_1, z_1) & \partial^2_{1,2}(f)(z_1, z_1) \\ \partial^2_{2,1}(f)(z_1, z_1) & \partial^2_{2,2}(f)(z_1, z_1) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \nabla^2(f)(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} -a^2 {z_1}^{2a-2} & \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 {z_1}^{2a-2} \\ \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 {z_1}^{2a-2} & -a^2 {z_1}^{2a-2} \end{pmatrix}.}$$

□

10. On pose $M = \nabla^2(f)(z_1, z_1)$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Calculer MX_1 et MX_2, et en déduire les valeurs propres de M.

Démonstration.

- On calcule :

$$MX_1 = \begin{pmatrix} -a^2 {z_1}^{2a-2} & \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 {z_1}^{2a-2} \\ \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 {z_1}^{2a-2} & -a^2 {z_1}^{2a-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{z_1^2} - 2a^2 {z_1}^{2a-2} \\ \dfrac{1}{z_1^2} - 2a^2 {z_1}^{2a-2} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{z_1^2} - 2a^2 {z_1}^{2a-2} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot X_1$$

où $\lambda_1 = \dfrac{1}{z_1^2} - 2a^2 {z_1}^{2a-2}$.

$$\boxed{\text{Comme } MX_1 = \lambda_1 \cdot X_1 \text{ avec } X_1 \neq 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}, \text{ alors } \lambda_1 = \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 {z_1}^{2a-2} \text{ est valeur propre de } M.}$$

- De même :

$$MX_2 = \begin{pmatrix} -a^2{z_1}^{2a-2} & \dfrac{1}{z_1^2} - a^2{z_1}^{2a-2} \\ \dfrac{1}{z_1^2} - a^2{z_1}^{2a-2} & -a^2{z_1}^{2a-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{z_1^2} \\ -\dfrac{1}{z_1^2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{z_1^2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \cdot X_2$$

où $\lambda_2 = -\dfrac{1}{z_1^2}$.

> Comme $MX_2 = \lambda_2 \cdot X_2$ avec $X_2 \neq 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$, alors $\lambda_2 = -\dfrac{1}{z_1^2}$ est valeur propre de M.

- Démontrons que M n'admet pas d'autre valeur propre.
Pour ce faire, raisonnons par l'absurde.
On suppose que M admet une valeur propre λ_3 différente de λ_1 et différente de λ_2.
Il existe alors un vecteur propre $X_3 \neq 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$ associé à λ_3.

  La famille (X_1, X_2, X_3) est alors une famille libre de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. En effet :
  × la famille (X_1, X_2) est une famille libre (car constituée de deux vecteurs non colinéaires) de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes de λ_3.
  × la famille (X_3) est une famille libre (car constituée d'un vecteur non nul) de vecteurs propres associé à la valeur propre λ_3.

  Ainsi, la famille (X_1, X_2, X_3) obtenue par concaténation de ces deux familles libres de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est une famille libre.
On a donc exhibé une famille libre telle que :

$$\text{Card}\big((X_1, X_2, X_3)\big) = 3 \ > \ 2 = \dim\big(\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})\big)$$

  Absurde !

> On en conclut que M admet pour uniques valeurs propres :
> $\lambda_1 = \dfrac{1}{z_1^2} - 2a^2{z_1}^{2a-2}$ et $\lambda_2 = -\dfrac{1}{z_1^2}$.

Commentaire

- Le sujet demande ici **les** valeurs propres de M. Il faut donc toutes les préciser.
La matrice M étant une matrice carrée d'ordre 2, elle admet donc au plus deux valeurs propres distinctes. Si on parvient à démontrer : $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors on a bien obtenu toutes les valeurs propres de M. On peut donc, pour conclure cette question, démontrer : $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
Pour ce faire, on peut procéder par équivalence :

$$\lambda_1 = \lambda_2 \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{z_1^2} - 2a^2{z_1}^{2a-2} = -\frac{1}{z_1^2} \ \Leftrightarrow \ 1 - 2a^2{z_1}^{2a} = -1 \ \Leftrightarrow \ \big(a{z_1}^a\big)^2 = 1^2 \ \Leftrightarrow \ a{z_1}^a = 1$$

  (on ne détaille pas ici tous les arguments)
Et comme : ${z_1}^a < {x_0}^a = \sqrt{\frac{1}{2a^2}} \ < \ \sqrt{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{a}$ alors ${z_1}^a \neq \frac{1}{a}$. D'où $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
- On a opté pour une démonstration différente en procédant par l'absurde. L'intérêt de cette démonstration est qu'elle ne dépend pas directement de la valeur de z_1 mais simplement des vecteurs propres X_1 et X_2. C'est en réalité un résultat très général : si une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet une base de vecteurs propres $(X_1, \dots, X_n)$ associés à des valeurs propres (pas forcément distinctes) $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ alors M n'admet pas d'autre valeur propre.
On adopte un point de vue différent du précédent point de la remarque : on ne démontre pas que λ_1 et λ_2 sont distinctes mais simplement qu'il ne peut exister d'autre valeur propre. □

11. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_1, z_1) ?
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

Démonstration.
Pour étudier la présence d'un extremum en (z_1, z_1), il faut étudier le signe des valeurs propres de la matrice $\nabla^2(f)(z_1, z_1)$ (ces valeurs propres ont été déterminées à la question précédente).

- Tout d'abord : $\lambda_2 = -\dfrac{1}{z_1^2} < 0$.
- Montrons ensuite : $\lambda_1 = \dfrac{1}{z_1^2} - 2a^2 {z_1}^{2a-2} > 0$. On raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{z_1^2} > 2a^2 {z_1}^{2a-2} \\
&\Leftrightarrow \quad 1 > 2a^2 {z_1}^{2a} && \textit{(par multiplication par } z_1^2 > 0\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2a^2} > {z_1}^{2a} && \textit{(car } 2a^2 > 0\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}} > z_1 \\
&\Leftrightarrow \quad x_0 > z_1
\end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie, donc, par équivalence, la première aussi. Ainsi : $\lambda_1 > 0$.

La matrice $\nabla^2(f)(z_1, z_1)$ admet deux valeurs propres non nulles de signes opposés.
On en conclut que la fonction f ne présente pas d'extremum local en (z_1, z_1).

Commentaire

- On peut ici préciser la nature de ce point critique : les valeurs propres de la hessienne étant non nulles et de signes opposés, la fonction f admet un point selle en (z_1, z_1).
- Comme : $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$, on retrouve : $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

□

12. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_2, z_2) ?
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

Démonstration.

- Comme $\varphi(z_2) = 0$, on démontre comme en question ***9.*** que la matrice hessienne au point (z_2, z_2) peut s'écrire sous la forme :

$$N = \nabla^2(f)(z_2, z_2) = \begin{pmatrix} -a^2 {z_2}^{2a-2} & \dfrac{1}{z_2^2} - a^2 {z_2}^{2a-2} \\ \dfrac{1}{z_2^2} - a^2 {z_2}^{2a-2} & -a^2 {z_2}^{2a-2} \end{pmatrix}$$

En menant les mêmes calculs matriciels qu'en question ***10.*** (z_1 et z_2 jouent des rôles symétriques), on démontre alors : $MX_1 = \left(\dfrac{1}{{z_2}^2} - 2a^2 {z_2}^{2a-2}\right) \cdot X_1$ et $MX_2 = -\dfrac{1}{{z_2}^2} \cdot X_2$.

Ainsi, $\lambda_1 = \dfrac{1}{{z_2}^2} - 2a^2 {z_2}^{2a-2}$ et $\lambda_2 = -\dfrac{1}{{z_2}^2}$ sont valeurs propres de N.

- De plus, en utilisant une nouvelle fois la démonstration de la question ***10.***, la matrice N n'admet pas d'autre valeur propre.

- Il reste alors à déterminer le signe de ces valeurs propres pour pouvoir conclure quant à la nature du point critique (z_2, z_2).
  - Tout d'abord : $\lambda_2 = -\dfrac{1}{{z_2}^2} < 0$.
  - Montrons ensuite : $\lambda_1 < 0$. Pour ce faire, on raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{{z_2}^2} - 2a^2 {z_2}^{2a-2} < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 1 < 2a^2 {z_2}^{2a} \qquad\qquad \textit{(car } z_2 > 0\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}} < z_2 \\
&\Leftrightarrow \quad x_0 < z_2
\end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie, donc, par équivalence, la première aussi. Ainsi : $\lambda_1 < 0$.

La matrice $\nabla^2(f)(z_2, z_2)$ admet donc deux valeurs propres strictement négatives. On en conclut que la fonction f présente donc un maximum local en (z_2, z_2).

□

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.
On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage.
Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre 2, 4, 1, 5 et 9, alors on obtient : $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 7$, $S_4 = 12$, $S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.

Démonstration.

- Déterminons $X_k(\Omega)$:
  L'urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire parmi celles-ci avec remise.
  Donc X_k peut prendre toutes les valeurs entre 1 et n.

$$\boxed{X_k(\Omega) = [\![1, n]\!]}$$

- Le tirage parmi les n boules est équiprobable, ainsi :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}([X_k = i]) = \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\text{On reconnaît la loi uniforme sur discrète sur } [\![1, n]\!] : X_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!]).}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } X_k \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(X_k) = \frac{n+1}{2}.}$$

Commentaire

- On pouvait directement décrire l'expérience et conclure quant à la loi de X_k :
lors du $k^{\text{ème}}$ tirage, on effectue une expérience à n **issues équiprobables**, numérotées de 1 à n. Donc $X_k \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.
- Lorsqu'on demande de déterminer la loi d'une v.a.r. X, on procède toujours de la manière suivante :
  × si X est une v.a.r. discrète,
  1) on détermine $X(\Omega)$,
  2) on détermine les probabilités $\mathbb{P}([X = k])$ pour $k \in X(\Omega)$.
  × si X est une v.a.r. à densité,
  1) on détermine $X(\Omega)$,
  2) on détermine la fonction de répartition de X, $F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x])$ pour $x \in \mathbb{R}$.

□

2. a) Déterminer $T_n(\Omega)$.

Démonstration.
L'expérience consiste en une infinité de tirages avec remise.
Donc l'univers Ω est ici l'ensemble des ∞-tirages constitués d'éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$.
Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'événement $[T_n = i]$ est réalisé si et seulement si la somme des boules dépasse n au $i^{\text{ème}}$ tirage mais pas au $(i-1)^{\text{ème}}$ tirage.
En particulier :
× l'événement $[T_n = 1]$ est réalisé par l'∞-tirage $\omega = (n, 1, 1, 1, \ldots)$.
× l'événement $[T_n = 2]$ est réalisé par l'∞-tirage $\omega = (1, n, 1, 1, 1, \ldots)$.
× $\cdots$
× l'événement $[T_n = n]$ est réalisé par l'∞-tirage $\omega = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1 \text{ fois}}, n, 1, 1, 1, \ldots)$.

Plus généralement, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'événement $[T_n = i]$ est réalisé par l'∞-tirage qui comporte que des 1 sauf en position i où l'on trouve n(ce qui correspond à l'obtention de la boule n lors du $i^{\text{ème}}$ tirage).

$$\boxed{\text{Donc } T_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket.}$$

Commentaire

- Pour chaque événement, nous avons donné **un exemple** d'∞-tirage le réalisant.
Bien évidemment, bien d'autres ∞-tirages étaient possibles. Par exemple :
  × l'événement $[T_n = 2]$ est réalisé par l'∞-tirage $\omega = (1, n-1, 1, 1, 1, \ldots)$.
  × l'événement $[T_n = 3]$ est réalisé par l'∞-tirage $\omega = (1, 1, n-2, 1, 1, 1, \ldots)$.
  × $\vdots$
  × l'événement $[T_n = n]$ est réalisé par l'∞-tirage $\omega = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1 \text{ fois}}, 1, 1, 1, 1, \ldots)$.
- Comme l'énoncé demandait de déterminer $T_n(\Omega)$ mais ne fournissait pas sa valeur, on peut penser que la simple réponse « $T_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ » (sans justification) permettait d'obtenir une grande partie des points alloués à cette question.
Évidemment, si la question s'exprime sous la forme « Montrer que $X(\Omega) = \cdots$ », il faut détailler la réponse.

b) Calculer $\mathbb{P}([T_n = 1])$.

Démonstration.
On remarque qu'on a l'égalité entre événements suivantes : $[T_n = 1] \ = \ [X_1 = n]$.
Comme la v.a.r. X_1 suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ (question ***1.***) :

$$\mathbb{P}([T_n = 1]) = \mathbb{P}([X_1 = n]) = \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([T_n = 1]) = \frac{1}{n}}$$

□

c) Montrer que :

$$\mathbb{P}([T_n = n]) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

Démonstration.

- L'événement $[T_n = n]$ est réalisé si la somme des numéros des boules obtenues est supérieur à n pour la première fois lors du $n^{\text{ème}}$ tirage. Ceci ne se produit que si on a obtenu la boule 1 lors des $n-1$ premiers tirages (si ce n'est pas le cas, la somme dépasse n strictement avant le $n^{\text{ème}}$ tirage. En termes d'événements, cela signifie :

$$[T_n = n] \ = \ \bigcap_{k=1}^{n-1} \ [X_k = 1]$$

- On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([T_n = n]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} \ [X_k = 1]\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_k = 1]) && \textit{(car les v.a.r. } X_1, \dots, X_n \\
& && \textit{sont indépendantes)} \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} && \textit{(car } X_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])\textit{)} \\
&= \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([T_n = n]) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}}$$

Commentaire

- Dans cette démonstration, on met en place une méthode classique de raisonnement :
  (i) on commence par une étape de décomposition de l'événement,
  (ii) puis on applique la fonction $\mathbb{P}$ de part et d'autre.
  Il faut prendre le réflexe de raisonner sur les événements avant d'appliquer la fonction $\mathbb{P}$.
- La formule est présentée ici sous forme de produit. Il faut donc penser à une décomposition d'événement à l'aide d'une intersection.

□

3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après la question } \textbf{\textit{2.a)}},\ T_2(\Omega) = [\![1,2]\!] = \{1,2\}.}$$

D'après la question ***2.b)*** : $\mathbb{P}([T_2 = 1]) = \dfrac{1}{2}$.
Comme $([T_2 = 1], [T_2 = 2])$ est un système complet d'événements, on obtient :

$$\mathbb{P}([T_2 = 2]) = 1 - \mathbb{P}([T_2 = 1]) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{T_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,2]\!])}$$

□

4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3. Vérifier que $\mathbb{E}(T_3) = \dfrac{16}{9}$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après la question } \textbf{\textit{2.a)}},\ T_3(\Omega) = [\![1,3]\!].}$$

- D'après la question ***2.b)*** : $\mathbb{P}([T_3 = 1]) = \dfrac{1}{3}$.
- D'après la question ***2.c)*** :

$$\mathbb{P}([T_3 = 3]) = \left(\frac{1}{3}\right)^{3-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

- Comme $([T_3 = 1], [T_3 = 2], [T_3 = 3])$ est un système complet d'événements, on obtient :

$$\mathbb{P}([T_3 = 2]) = 1 - \mathbb{P}([T_3 = 1]) - \mathbb{P}([T_3 = 3]) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([T_3 = 1]) = \frac{1}{3},\ \ \mathbb{P}([T_3 = 2]) = \frac{5}{9}\ \text{ et }\ \mathbb{P}([T_3 = 3]) = \frac{1}{9}}$$

- La v.a.r. T_3 est finie donc elle admet une espérance. De plus :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(T_3) & = & \sum\limits_{k=1}^{3} k\ \mathbb{P}\big([T_3 = k]\big) \\
& = & 1 \times \mathbb{P}\big([T_3 = 1]\big) + 2 \times \mathbb{P}\big([T_3 = 2]\big) + 3 \times \mathbb{P}\big([T_3 = 3]\big) \\
& = & \dfrac{1}{3} + 2\ \dfrac{5}{9} + 3\ \dfrac{1}{9}\ \ = \ \dfrac{3 + 10 + 3}{9} \\
& = & \dfrac{16}{9}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On retrouve bien : } \mathbb{E}(T_3) = \frac{16}{9}.}$$

□

Partie B

5. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration.

- À chaque tirage, le plus petit numéro de boule que l'on peut obtenir est 1. Ainsi, la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages vaut au minimum k.

  Donc S_k vaut au minimum k.
- À chaque tirage, le plus grand numéro de boule que l'on peut obtenir est n. Ainsi, la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages vaut au maximum nk.

  Donc S_k vaut au maximum nk.
- De plus S_k peut prendre toutes les valeurs intermédiaires entre k et nk.

$$\boxed{\text{On en conclut : } S_k(\Omega) = [\![k, nk]\!].}$$

Commentaire

- Comme pour la question ***2.a)***, la valeur $S_k(\Omega)$ n'est pas donnée dans l'énoncé. Une brève justification suffit donc ici.
- Cependant, pour être parfaitement rigoureux, on peut déterminer $S_k(\Omega)$ en procédant par récurrence. Détaillons ce raisonnement.

  Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k) : S_k(\Omega) \subset [\![k, nk]\!]$.

  ▸ **Initialisation** :
  Tout d'abord : $S_1 = X_1$.
  Cela permet de conclure, d'après la question ***1.*** : $S_1(\Omega) = X_1(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
  D'où $\mathcal{P}(1)$.

  ▸ **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* : $S_{k+1}(\Omega) = [\![k+1, n(k+1)]\!]$).

  – Par définition : $S_{k+1} = \sum\limits_{i=1}^{k+1} X_i = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} X_i\right) + X_{k+1} = S_k + X_{k+1}$.

    Ainsi, pour tout ∞-tirage $\omega = (a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots)$:

    $$\begin{array}{rcl} S_{k+1}(\omega) & = & S_k(\omega) + X_{k+1}(\omega) \\ & = & \left(\sum\limits_{i=1}^{k} a_i\right) + a_{k+1} \end{array}$$

  – Par hypothèse de récurrence : $S_k(\Omega) = [\![k, nk]\!]$.
    Ainsi, $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i$ peut prendre toutes les valeurs de $[\![k, nk]\!]$.
    Par ailleurs, a_{k+1} est le résultat du $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage.
    Ainsi, a_{k+1} peut prendre toutes les valeurs de $X_{k+1}(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

    On en déduit que $\left(\sum\limits_{i=1}^{k} a_i\right) + a_{k+1}$ peut prendre toutes les valeurs entières possibles entre $k+1$ et $nk + n = n\ (k+1)$. Et ainsi : $S_{k+1}(\Omega) = [\![k+1, n(k+1)]\!]$.

  D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

  On en conclut, par principe de récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(k)$.

□

6. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et X_{k+1}.

Démonstration.
On remarque :

$$S_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} X_i = \sum_{i=1}^{k} X_i + X_{k+1} = S_k + X_{k+1}$$

$$\boxed{S_{k+1} = S_k + X_{k+1}}$$

□

b) En utilisant un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k, démontrer alors que :

$$\forall i \in [\![k+1, n]\!],\ \mathbb{P}([S_{k+1} = i]) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}([S_k = j]).$$

Démonstration.
Soit $i \in [\![k+1, n]\!]$.

- La famille $([S_k = j])_{j \in [\![k, kn]\!]}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([S_{k+1} = i]) &= \sum_{j=k}^{nk} \mathbb{P}([S_k = j] \cap [S_{k+1} = i]) \\
&= \sum_{j=k}^{nk} \mathbb{P}([S_k = j] \cap [S_k + X_{k+1} = i]) \\
&= \sum_{j=k}^{nk} \mathbb{P}([S_k = j] \cap [X_{k+1} = i-j]) \\
&= \sum_{\substack{j = k \\ i-j \in X_{k+1}(\Omega)}}^{nk} \mathbb{P}([S_k = j] \cap [X_{k+1} = i-j]) \\
&\quad + \cancel{\sum_{\substack{j = k \\ i-j \notin X_{k+1}(\Omega)}}^{nk} \mathbb{P}([S_k = j] \cap [X_{k+1} = i-j])} \quad \textit{(car } [X_{k+1} = i-j] = \varnothing\textit{)} \\
&= \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}([S_k = j] \cap [X_{k+1} = i-j])
\end{aligned}$$

- La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{\begin{array}{l} i-j \in [\![1, n]\!] \\ j \in [\![k, nk[\![\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant i-j \leqslant n \\ k \leqslant j \leqslant nk \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1-i \leqslant -j \leqslant n-i \\ k \leqslant j \leqslant nk \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} i-n \leqslant j \leqslant i-1 \\ k \leqslant j \leqslant nk \end{array}\right.$$

  (on rappelle : $X_{k+1}(\Omega) = [\![1, n]\!]$)

  Or : $i - n \leqslant 0 \leqslant k$ et $i - 1 \leqslant n - 1 \leqslant nk$. On en déduit :

$$[\![k, nk]\!] \ \cap\ [\![i-n, i-1]\!] \ =\ [\![k, i-1]\!]$$

- Ainsi, en reprenant les égalités précédentes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([S_{k+1}=i]) &= \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}([S_k=j]\cap[X_{k+1}=i-j]) \\
&= \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}([S_k=j])\ \mathbb{P}_{[S_k=j]}([X_{k+1}=i-j]) \\
&= \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}([S_k=j])\ \frac{1}{n} && \textit{(car } X_{k+1}\hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall i\in[\![k+1,n]\!],\quad \mathbb{P}(S_{k+1}=i)=\frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1}\mathbb{P}(S_k=j)}$$

Commentaire

Il est fréquent, lors de l'étape de restriction des indices de la somme de tomber sur une contrainte s'exprimant par deux inégalités :

$$a\leqslant i\leqslant b \texttt{ ET } c\leqslant i\leqslant d \quad \text{où } (a,b,c,d)\in\left(\overline{\mathbb{R}}\right)^4$$

où $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. On pourra alors utiliser le résultat suivant :

$$\boxed{(a\leqslant i\leqslant b \texttt{ ET } c\leqslant i\leqslant d) \quad\Leftrightarrow\quad \max(a,c)\leqslant i\leqslant \min(b,d)}$$

(à gauche c'est le plus grand élément qui contraint le plus, à droite c'est le plus petit élément qui contraint le plus)

□

7. a) Pour $k\in\mathbb{N}^*$ et $j\in\mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres : $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.

Démonstration.

$$\boxed{\binom{j}{k}=\binom{j-1}{k}+\binom{j-1}{k-1}}$$

Commentaire

La formule du triangle de Pascal peut se démontrer en revenant à la définition calculatoire des coefficients binomiaux. Détaillons cette démonstration.
Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Soit $j>k$.

$$\begin{aligned}
\binom{j-1}{k}+\binom{j-1}{k-1} &= \frac{(j-1)!}{k!\ (j-1-k)!}+\frac{(j-1)!}{(k-1)!\ (j-\cancel{1}-(k-\cancel{1}))!} \\
&= \frac{(j-1)!}{k!\ (j-1-k)!}+\frac{(j-1)!}{(k-1)!\ (j-k)!} \\
&= \frac{(j-1)!}{(k-1)!\ (j-k-1)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{j-k}\right) \\
&= \frac{(j-1)!}{(k-1)!\ (j-k-1)!}\left(\frac{j-\cancel{k}+\cancel{k}}{k(j-k)}\right) = \frac{j!}{k!\ (j-k)!} = \binom{j}{k}
\end{aligned}$$

Commentaire

On peut aussi démontrer ce type de relations en revenant à la définition des coefficients binomiaux, à savoir : $\binom{j}{k}$ est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à j éléments. Illustrons cette méthode sur la formule du triangle de Pascal.

Considérons une pièce contenant j personnes. On s'intéresse au nombre de groupes différents de k personnes que l'on peut former à partir de ces j personnes.
Il y a $\binom{j}{k}$ tels groupes.
Pour former un tel groupe de k personnes, on remarque que :

- × soit ce groupe contient la personne numéro j. Il est donc composé de la personne numéro j et de $k-1$ personnes choisies parmi les $j-1$ personnes restantes.
  Il y a $\binom{j-1}{k-1}$ tels groupes.
- × soit ce groupe ne contient pas la personne numéro j. Il est donc composée de k personnes choisies parmi les $j-1$ personnes restantes.
  Il y a $\binom{j-1}{k}$ tels groupes.

Finalement on a bien : $\binom{j}{k} = \binom{j-1}{k} + \binom{j-1}{k-1}$.

□

b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$:

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \geqslant k+1$.

$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} & = & \displaystyle\binom{k-1}{k-1} + \sum_{j=k+1}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} & \\
& = & \displaystyle 1 + \sum_{j=k+1}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} & \\
& = & \displaystyle 1 + \sum_{j=k+1}^{i-1} \left(\binom{j}{k} - \binom{j-1}{k} \right) & \textit{(d'après la question précédente)} \\
& = & \displaystyle 1 + \sum_{j=k+1}^{i-1} \binom{j}{k} - \sum_{j=k+1}^{i-1} \binom{j-1}{k} & \\
& = & \displaystyle 1 + \sum_{j=k+1}^{i-1} \binom{j}{k} - \sum_{j=k}^{i-2} \binom{j}{k} & \\
& = & \displaystyle 1 + \left(\cancel{\sum_{j=k+1}^{i-2} \binom{j}{k}} + \binom{i-1}{k} \right) - \left(\binom{k}{k} + \cancel{\sum_{j=k+1}^{i-2} \binom{j}{k}} \right) & \\
& = & \displaystyle\binom{i-1}{k} & \textit{(car } \binom{k}{k} = 1\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall i \geqslant k+1,\ \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}}$$

□

c) Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :

$$« \forall i \in [\![k, n]\!], \quad \mathbb{P}([S_k = i]) = \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1} ».$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall k \in [\![1, n]\!], \mathcal{H}_k$, où $\mathcal{H}_k : \forall i \in [\![k, n]\!], \ \mathbb{P}([S_k = i]) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{i-1}{k-1}$.

- **Initialisation** :
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([S_1 = i]) & = & \mathbb{P}([X_1 = i]) & \textit{(car } S_1 = X_1\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{n} & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{n^1}\dbinom{i-1}{1-1} & \textit{(car } \dbinom{i-1}{0} = 1\textit{)} \end{array}$$

D'où $\mathcal{H}_1$.

- **Hérédité** : soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Supposons $\mathcal{H}_k$ et démontrons $\mathcal{H}_{k+1}$ (*i.e.* : $\forall i \in [\![k+1, n]\!], \quad \mathbb{P}([S_{k+1} = i]) = \dfrac{1}{n^{k+1}}\dbinom{i-1}{(k+1)-1}$).
Soit $i \in [\![k+1, n]\!]$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([S_{k+1} = i]) & = & \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}([S_k = j]) & \textit{(question \textbf{6.b)})} \\ & = & \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=k}^{i-1} \dfrac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1} & \textit{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\ & = & \dfrac{1}{n^{k+1}}\displaystyle\sum_{j=k}^{i-1} \binom{i-1}{k-1} & \\ & = & \dfrac{1}{n^{k+1}}\dbinom{i-1}{k} & \textit{(question \textbf{7.b)})} \\ & = & \dfrac{1}{n^{k+1}}\dbinom{i-1}{(k+1)-1} & \end{array}$$

D'où $\mathcal{H}_{k+1}$.

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!], \forall i \in [\![k, n]\!], \mathbb{P}([S_k = i]) = \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1}}$$

Commentaire

La rédaction de cette récurrence est particulièrement difficile.

- La quantification en i est **dans** l'hypothèse de récurrence.
Donc il ne faut pas oublier de l'introduire pour la démonstration de $\mathcal{H}_1$ (dans l'étape d'initialisation) et de $\mathcal{H}_{k+1}$ (dans l'étape d'hérédité).
- Il s'agit ici d'une récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$ (et non sur $\mathbb{N}$).
Pour qu'on puisse parler de $\mathcal{H}_k$, il faut que que $k \in [\![1, n]\!]$ et pour parler de $\mathcal{H}_{k+1}$ (ce qui est nécessaire dans l'étape d'hérédité), il faut que $k + 1 \in [\![1, n]\!]$.
Donc il faut, dans l'hérédité, que $k \in [\![1, n]\!] \cap [\![0, n-1]\!] = [\![1, n-1]\!]$.

□

8. ***a)*** Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comparer les événements $[T_n > k]$ et $[S_k \leqslant n-1]$.

Démonstration.

- Si l'événement $[T_n > k]$ est réalisé, alors il a fallu strictement plus de k tirages pour que la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale, pour la première fois, à n. Il a donc fallu au moins $k+1$ tirages.
  Ainsi, la somme des numéros obtenus jusqu'au $k^{\text{ème}}$ tirage est strictement inférieure à n, c'est-à-dire inférieure ou égale à $n-1$. L'événement $[S_k \leqslant n-1]$ est donc réalisé.
  On en déduit : $[T_n > k] \ \subset \ [S_k \leqslant n-1]$.
- Si l'événement $[S_k \leqslant n-1]$ est réalisé, alors la somme des numéros obtenus jusqu'au $k^{\text{ème}}$ tirage est inférieure ou égale à $n-1$ donc strictement inférieure à n.
  Ainsi, la somme des numéros de boules dépasse n pour la première fois au plus tôt au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage. L'événement $[T_n \geqslant k+1]$ est donc réalisé.
  Or, comme T_n est une v.a.r. à valeurs entières : $[T_n \geqslant k+1] = [T_n > k]$.
  Donc $[T_n > k]$ est réalisé.
  On en déduit : $[S_k \leqslant n-1] \ \subset \ [T_n > k]$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ [T_n > k] = [S_k \leqslant n-1].}$$

□

b) En déduire que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathbb{P}([T_n > k]) = \dfrac{1}{n^k} \dbinom{n-1}{k}$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([T_n > k]) &= \mathbb{P}([S_k \leqslant n-1]) && \textit{(question } \textbf{\textit{8.a)}}\textit{)} \\
&= \sum_{i=k}^{n-1} \mathbb{P}([S_k = i]) && \textit{(car } S_k(\Omega) = [\![k, nk]\!]\textit{)} \\
&= \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} && \textit{(question } \textbf{\textit{7.c)}}\textit{)} \\
&= \frac{1}{n^k} \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i-1}{k-1} \\
&= \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k} && \textit{(question } \textbf{\textit{7.b)}}\textit{)}
\end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([T_n > 0]) &= 1 && \textit{(car } T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]\textit{)} \\
&= \frac{1}{n^0} \binom{n-1}{0}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathbb{P}([T_n > k]) = \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}}$$

Commentaire

La propriété de la question précédente (***8.a)***) a été démontrée pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$. On ne peut donc l'utiliser que pour un entier $k \in [\![1, n-1]\!]$. C'est une évidence qu'il convient toutefois de rappeler car elle est trop régulièrement ignorée par les candidats. Lorsque l'on souhaite utiliser un résultat précédemment démontré ou admis, il faut scrupuleusement vérifier que l'on est dans les conditions d'application de ce résultat.

□

9. Démontrer que $\mathbb{E}(T_n) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k])$, puis que $\mathbb{E}(T_n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.

- La v.a.r. T_n est finie. Elle admet donc une espérance.
- Tout d'abord, comme T_n est à valeurs entières :

$$[T_n > k-1] \;=\; [T_n \geqslant k] \;=\; [T_n > k] \cup [T_n = k]$$

Or les événements $[T_n > k]$ et $[T_n = k]$ sont incompatibles, donc :

$$\mathbb{P}([T_n > k-1]) \;=\; \mathbb{P}([T_n > k]) + \mathbb{P}([T_n = k])$$

- On obtient alors :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(T_n) & = & \sum\limits_{k=1}^{n} k\ \mathbb{P}([T_n = k]) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} k\ \big(\mathbb{P}([T_n > k-1]) - \mathbb{P}([T_n > k])\big) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} k\ \mathbb{P}([T_n > k-1]) - \sum\limits_{k=1}^{n} k\ \mathbb{P}([T_n > k]) & \textit{(par linéarité de la somme)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} (k+1)\ \mathbb{P}([T_n > k]) - \sum\limits_{k=1}^{n} k\ \mathbb{P}([T_n > k]) & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & \mathbb{P}([T_n > 0]) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} (k+1)\ \mathbb{P}([T_n > k]) - \sum\limits_{k=1}^{n-1} k\ \mathbb{P}([T_n > k]) - n\ \mathbb{P}([T_n > n]) &
\end{array}$$

Comme $T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$ alors $[T_n > n] = \varnothing$. Ainsi : $\mathbb{P}([T_n > n]) = 0$. On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(T_n) & = & \mathbb{P}([T_n > 0]) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} (k+1)\ \mathbb{P}([T_n > k]) - \sum\limits_{k=1}^{n-1} k\ \mathbb{P}([T_n > k]) \\
& = & \mathbb{P}([T_n > 0]) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} ((\cancel{k}+1) - \cancel{k})\ \mathbb{P}([T_n > k]) \\
& = & \mathbb{P}([T_n > 0]) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k]) \;=\; \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k])
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k])}$$

Calculons maintenant $\mathbb{E}(T_n)$ avec le résultat de la question ***8.b)***.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(T_n) & = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k]) \;=\; \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{n^k} \dbinom{n-1}{k} & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dbinom{n-1}{k} \left(\dfrac{1}{n}\right)^k 1^{(n-1)-k} \;=\; \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n-1} & \textit{(d'après la formule du binôme de Newton)}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}}$$

Commentaire

- L'égalité $[T_n > k-1] = [T_n > k] \cup [T_n = k]$ peut sembler « sortie du chapeau » mais elle est relativement classique dès qu'on étudie une v.a.r. à valeurs entières.
  Il en est de même de la formule :
  $$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k])$$
  qu'il convient de savoir démontrer.
- Pour démontrer cette dernière formule, on peut aussi utiliser l'égalité entre événements suivante :
  $$[T_n > k] = \bigcup_{i=k+1}^{n} [T_n = i]$$
  Cette égalité est plus naturelle mais entraîne une démonstration plus complexe faisant intervenir des sommes doubles. Détaillons celle-ci.
  En appliquant $\mathbb{P}$ de part et d'autre de l'égalité précédente, par incompatibilité des événements de la réunion :
  $$\mathbb{P}([T_n > k]) = \sum_{i=k+1}^{n} \mathbb{P}([T_n = i])$$
  On obtient donc :
  $$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k]) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=k+1}^{n} \mathbb{P}([T_n = i]) \right) \\ &= \sum_{0 \leqslant k < i \leqslant n} \mathbb{P}([T_n = i]) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{i-1} \mathbb{P}([T_n = i]) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} i \, \mathbb{P}([T_n = i]) \ = \ \mathbb{E}(T_n) \end{aligned}$$

□

10. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{E}(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \exp\left(\ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}\right)\right) = \exp\left((n-1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

Par ailleurs, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a : $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. D'où :

$$(n-1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} (n-1)\frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \cancel{n}\frac{1}{\cancel{n}} = 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

Or la fonction exp est continue en 1, donc, par composition de **limites**, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T_n) = e^1 = e$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T_n) = e}$$

Commentaire

- On rappelle que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on a :

$$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$$

Ce résultat est obtenu par composition des limites à partir du résultat : $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

- Lorsqu'on étudie une suite de la forme $\left({u_n}^{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, il est classique d'utiliser l'écriture :

$${u_n}^{a_n} \;=\; \exp\left(a_n \;\ln(u_n)\right)$$

(il faut évidemment vérifier au préalable : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$)

Cette écriture n'est autre que la définition de ${u_n}^{a_n}$ si a_n n'est pas un entier. Il faut donc systématiquement penser à cette écriture dans ce cas. Comme le démontre la question précédente, cette écriture peut aussi être utile dans le cas où a_n est entier.

□

Partie C

Dans cette partie, on fait varier l'entier n et on étudie la convergence en loi de la suite de variables $(T_n)_{n\geqslant 1}$.

11. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Y=k]) = \dfrac{k-1}{k!}$.

a) Vérifier par le calcul que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=k]) = 1$.

Démonstration.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}([Y=k]) &= \sum_{k=1}^{N} \frac{k-1}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{k!} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{(k-1)!} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \frac{1}{(1-1)!} - \frac{1}{((N+1)-1)!} \\
&= 1 - \frac{1}{N!}
\end{aligned}$$

Or : $\lim\limits_{N\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{N!}\right) = 1$.

$$\boxed{\text{Donc la série } \sum_{k\geqslant 1} \mathbb{P}([Y=k]) \text{ converge et } \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=k]) = 1.}$$

□

b) Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.

Démonstration.

- La v.a.r. Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\ \mathbb{P}([Y=n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} \sum\limits_{k=1}^{N} k\ \mathbb{P}([Y=k]) & = & \sum\limits_{k=1}^{N} k\ \dfrac{k-1}{k!} & \\ & = & \sum\limits_{k=2}^{N} \dfrac{k(k-1)}{k!} & \left(\textit{car } \dfrac{1(1-1)}{1!}=0\right) \\ & = & \sum\limits_{k=2}^{N} \dfrac{1}{(k-2)!} \ = \ \sum\limits_{k=0}^{N-2} \dfrac{1}{k!} & \end{array}$$

On reconnaît la somme partielle d'ordre $N-2$ de la série exponentielle $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{x^k}{k!}$ en $x=1$. Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{k!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$$

- On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\ \mathbb{P}([Y=n])$ converge. Ainsi, Y admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([Y=k]) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} k\ \mathbb{P}([Y=k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Y \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(Y) = \mathrm{e}.}$$

□

12. Pour tout entier naturel k non nul, démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([T_n > k]) = \frac{1}{k!}$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([T_n > k]) & = & \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n-1}{k} \ = \ \dfrac{1}{n^k}\dfrac{(n-1)!}{(n-1-k)!\ k!} \\ & = & \dfrac{1}{n^k}\dfrac{(n-1)\cdots(n-k)}{k!} \ = \ \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-2}{n}\cdots\dfrac{n-k}{n}\dfrac{1}{k!} \end{array}$$

Or, quand n tend vers $+\infty$:

$$\begin{array}{ccccccc} \dfrac{n-1}{n} & \times & \dfrac{n-2}{n} & \times & \cdots & \times & \dfrac{n-k}{n} \\ \Big\downarrow {\scriptstyle n\to+\infty} & & \Big\downarrow {\scriptstyle n\to+\infty} & & & & \Big\downarrow {\scriptstyle n\to+\infty} \\ 1 & \times & 1 & \times & \cdots & \times & 1 \end{array}$$

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{k!} = \dfrac{1}{k!}$.

$$\boxed{\text{Donc, par produit de limites, } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([T_n > k]) = \frac{1}{k!}}$$

□

13. Démontrer alors que $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire Y.

Démonstration.

- Comme les v.a.r. de la suite (T_n) et Y sont **à valeurs entières**, la convergence en loi de (T_n) vers Y équivaut à :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([T_n = k]) = \mathbb{P}([Y = k])$$
- Montrons donc que la suite $\big(\mathbb{P}([T_n = k])\big)_{n\geqslant 1}$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et déterminons sa limite.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord :
$$[T_n > k-1] = [T_n \geqslant k] = [T_n > k] \cup [T_n = k]$$
Or les événements $[T_n > k]$ et $[T_n = k]$ sont incompatibles, donc :
$$\mathbb{P}([T_n > k-1]) = \mathbb{P}([T_n > k]) + \mathbb{P}([T_n = k])$$
et en réordonnant : $\mathbb{P}([T_n = k]) = \mathbb{P}([T_n > k-1]) - \mathbb{P}([T_n > k])$.
Or, d'après la question précédente, les suites $\big(\mathbb{P}([T_n > k-1])\big)_{n\geqslant 1}$ et $\big(\mathbb{P}([T_n > k])\big)_{n\geqslant 1}$ convergent.
Donc la suite $\big(\mathbb{P}([T_n = k])\big)_{n\geqslant 1}$ converge et :
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([T_n = k]) &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([T_n > k-1]) - \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([T_n > k]) \\ &= \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{12.}}\textit{)} \\ &= \frac{k-1}{k!} \\ &= \mathbb{P}([Y = k])\end{aligned}$$

On en déduit que (T_n) converge en loi vers la variable aléatoire Y.

Commentaire

- En toute généralité, la convergence en loi d'une suite de v.a.r. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers une v.a.r. X est définie de la manière suivante.
Pour tout t **en lequel F_X est continue** :
$$F_{X_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F_X(t)$$
où on note F_{X_n} la fonction de répartition de X_n et F_X celle de X.
- Dans le cas où les v.a.r. de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et la v.a.r. X sont à valeurs entières (de manière la plus générale, à valeurs dans $\mathbb{Z}$), on utilise la caractérisation plus adaptée :
$$(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge en loi vers } X \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{Z},\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) = \mathbb{P}([X = k])$$
(c'est ce qu'on utilise dans la question)

□

14. On rappelle qu'en langage **Scilab**, l'instruction `grand(1, 1, 'uin', 1, n)` renvoie un entier aléatoire de $[\![1, n]\!]$. Compléter la fonction ci-dessous, qui prend en argument le nombre n de boules contenues dans l'urne, afin qu'elle simule la variable aléatoire T_n :

```
function y = T(n)
    S = ................
    y = ................
    while .............
        tirage = grand(1, 1, 'uin', 1, n)
        S = S + tirage
        y = .................
    end
endfunction
```

Démonstration.

- On rappelle que la v.a.r. T_n est égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenue soit supérieure ou égale à n.
- C'est le paramètre de sortie `y` de la fonction `T` qui doit contenir le nombre de tirages obtenus par simulation. On procède comme suit :
  - × la variable `y` est initialisée à 0 (au début de l'expérience aucun tirage n'a été réalisé).
    On crée par ailleurs la variable `S` qui va permettre de sommer successivement les résultats obtenus par simulation d'un tirage d'une boule dans l'urne.
    La variable `S` est, elle aussi, initialisée à 0.

    ```
    S = 0
    y = 0
    ```

  - × on simule alors des tirages successifs dans l'urne. La simulation d'un tel tirage est fournie par l'instruction donnée dans l'énoncé :

    ```
    tirage = grand(1, 1, 'uin', 1, n)
    ```

    À chaque nouveau tirage, on doit mettre à jour en conséquence les variables `y` et `S` : on ajoute 1 à `y` pour signaler qu'un nouveau tirage a eu lieu et on ajoute la valeur de ce tirage à `S`.

    ```
    S = S + tirage
    y = y + 1
    ```

    On s'intéresse ici au nombre de tirages nécessaires pour que la somme des résultats des tirages simulés dépasse n. On doit effectuer cette succession de tirages tant que cette somme n'a pas dépassé n.

    ```
    while S < n
    ```

- En résumé, on obtient le programme suivant :

```
function y = T(n)
    S = 0
    y = 0
    while S < n
        tirage = grand(1, 1, 'uin', 1, n)
        S = S + tirage
        y = y + 1
    end
endfunction
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.
On procédera de même dans les autres questions **Scilab**.

□

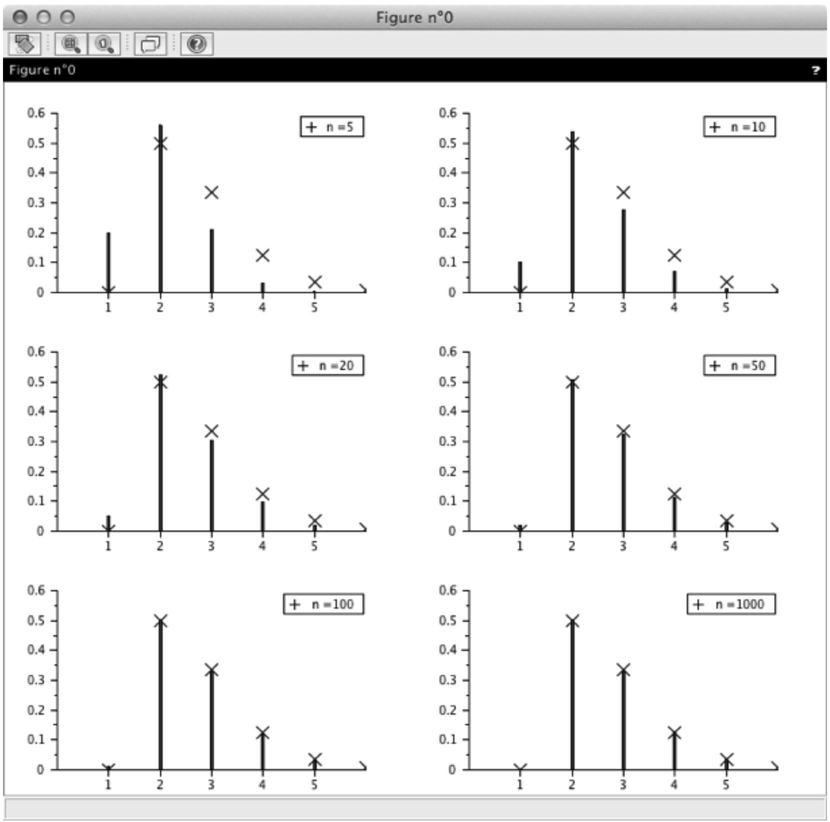
15. On suppose déclarée la fonction précédente et on écrit le script ci-dessous :

```
function y = freqT(n)
    y = zeros(1,n)
    for i = 1:100000
        k = T(n)
        y(k) = y(k) + 1
    end
    y = y/100000
endfunction
```

```
function y = loitheoY(n)
    y = zeros(1,n)
    for k = 1:n
        y(k) = (k-1)/prod(1:k)
    end
endfunction

clf
n = input('n=?')
plot2d(loitheoY(6), style=-2)
x = freqT(n)
bar(x(1:5))
```

L'exécution de ce script pour les valeurs de n indiquées a permis d'obtenir les graphes page suivante.



a) Expliquer ce que représentent les vecteurs renvoyés par les fonctions `freqT` et `loitheoY`. Comment ces vecteurs sont-ils représentés graphiquement dans chaque graphique obtenu ?

Démonstration.
Commençons par la description de la fonction `loitheoY`.

- La fonction `loitheoY` renvoie un paramètre nommé `y` qui est initialement affecté à un vecteur ligne de taille n rempli de 0 :

```
y = zeros(1,n)
```

- Le $k^{\text{ème}}$ coefficient de ce vecteur est ensuite affecté à la valeur $\dfrac{k-1}{k!}$.

```
y(k) = (k-1)/prod(1:k)
```

- On construit ainsi le vecteur : $\big(\mathbb{P}([Y=1]), \mathbb{P}([Y=2]), \dots, \mathbb{P}([Y=\mathtt{n}])\big)$.

$\boxed{\text{L'instruction } \mathtt{loitheoY(n)} \text{ renvoie un vecteur contenant la loi théorique de la v.a.r. } Y.}$

Traitons maintenant le cas de la fonction `freqT`.

- Cette fonction renvoie un paramètre nommé `y` qui est initialement affecté à un vecteur ligne de taille n remplie de 0 :

```
y = zeros(1,n)
```

- La fonction a pour but de produire une approximation de la loi théorique de la v.a.r. T_n.
  On rappelle que $T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$. La loi de T_n est donc entièrement déterminée par les valeurs :

$$\big(\mathbb{P}([T_n = 1]), \mathbb{P}([T_n = 2]), \dots, \mathbb{P}([T_n = n])\big)$$

- Pour ce faire, l'idée est :
  × de simuler un grand nombre de fois ($N = 100000$ est ce grand nombre) la v.a.r. T_n.
  Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(z_1, \dots, z_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(Z_1, \dots, Z_N)$ de la v.a.r. T_n.
  (cela signifie que les v.a.r. Z_1, …, Z_N sont indépendantes et sont de même loi que T_n)
  × de compter le nombre de 1, de 2, …, de n contenus dans cette observation.

  Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \frac{\text{nombre de } k \text{ de l'observation}}{\text{taille } (N) \text{ de l'observation}} \simeq \mathbb{P}([T_n = k])$$

- Dans le programme, les valeurs $(z_1, \dots, z_N)$ sont obtenues par des appels successifs (à l'aide d'une structure itérative, ici une boucle `for`) à la fonction `T` et stockées les unes après les autres dans la variable `k`.

```
for i = 1 : 100000
  k = T(n)
```

  Le tableau `y` est alors mis à jour à chaque tour de boucle :

```
y(k) = y(k) + 1
```

9782340-026636_001_784.indd 296 30/07/2018 09:52

Détaillons cette mise à jour :

× si `k` vaut 1 alors l'instruction suivante est effectuée :

```
y(1) = y(1) + 1
```

× ...

× si `k` vaut n alors l'instruction suivante est effectuée :

```
y(n) = y(n) + 1
```

Cela signifie que le $k^{\text{ème}}$ coefficient du tableau compte le nombre de k de l'observation.
Une fois cette boucle effectuée, l'approximation formulée par la LfGN est obtenue en divisant ces nombres par la taille de l'observation :

```
7    y = y / 100000
```

- En résumé, l'instruction `freqT(n)` renvoie un vecteur qui donne la fréquence d'apparition de chaque entier $k \in [\![1, \mathtt{n}]\!]$ dans une observation de taille 100000 de la v.a.r. T_n.

$$\boxed{\text{D'après la LfGN, } \texttt{freqT(n)} \text{ renvoie un vecteur qui est une approximation du vecteur } \big(\mathbb{P}([T_n = 1]), \mathbb{P}([T_n = 2]), \dots, \mathbb{P}([T_n = n])\big).}$$

Commentons enfin la représentation graphique.

- La ligne 10 du script permet de générer la représentation graphique du vecteur issu de la fonction `loitheoY` :

```
10  plot2d(loitheoY(6), style=-2)
```

Rappelons que `style=-2` est l'argument de la commande `plot2d` permettant d'afficher les points dans le plan avec des croix.

$$\boxed{\text{Le vecteur } \texttt{loitheoY(6)} \text{ est représenté graphiquement par des croix.}}$$

- La ligne 10 du script permet de générer la représentation graphique du vecteur issu de la fonction `freqT` :

```
11  x = freqT(n)
12  bar(x(1:5))
```

Rappelons que `bar` est une commande générant un diagramme en bâtons.

$$\boxed{\text{Le vecteur } \texttt{x} \text{ issu de l'instruction } \texttt{x = freqT(n)} \text{ est représenté par un diagramme en bâtons.}}$$

Commentaire

- Il faut noter qu'on ne représente pas la loi de Y en intégralité puisque l'appel `loitheoY(6)` produit le vecteur :

$$\big(\mathbb{P}([Y = 1]), \mathbb{P}([Y = 2]), \dots, \mathbb{P}([Y = 6])\big)$$

De même, l'instruction `x(1:5)` sélectionne les 5 premiers coefficients du vecteur généré par `x = freqT(n)`. On obtient ainsi une approximation du vecteur :

$$\big(\mathbb{P}([T_n = 1]), \mathbb{P}([Y = 2]), \dots, \mathbb{P}([T_n = 5])\big)$$

- Les croix sont placées exactement au même endroit sur les 6 graphiques. C'est logique puisque le vecteur `loitheoY(6)` est indépendant de la valeur prise par n.

□

b) Expliquer en quoi cette succession de graphiques permet d'illustrer le résultat de la question ***13***.

Démonstration.

- D'après la question précédente :
  - × le vecteur `freqT(n)` est une approximation de la loi de $T_{\mathtt{n}}$.
  - × le vecteur `loitheoY(n)` représente la loi de Y.
- La succession de graphiques démontre que, lorsque la valeur de `n` grandit, les coefficients de `freqT(n)` se rapprochent de ceux de `loitheoY(n)`. Dès la valeur $\mathtt{n} = 50$, les deux graphiques semblent très proches. Pour $\mathtt{n} = 1000$ les deux graphiques coïncident même à l'œil nu.
- Cette succession de graphiques illustre donc la propriété :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([T_n = k]) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}([Y = k])$$

(le $k^{\text{ème}}$ coefficient de `freqT(n)` se rapproche du $k^{\text{ème}}$ coefficient de `loitheoY(n)` lorsque l'entier `n` grandit)

Cette succession de graphiques permet d'illustrer la convergence en loi de (T_n) vers Y.

Commentaire

- Cette succession de graphiques permet aussi de parler de vitesse de convergence. On s'aperçoit que l'approximation de `loitheoY(n)` par `freqT(n)` est déjà correcte pour $\mathtt{n} = 10$; satisfaisante pour $\mathtt{n} = 20$; bonne pour $\mathtt{n} = 50$ et encore meilleure pour les valeurs suivantes. Ceci suggère que la v.a.r. T_n converge en loi vers la v.a.r. Y de manière très rapide.
- On a évoqué en question ***15.*** la loi faible des grands nombres (LfGN). L'idée est de simuler un grand nombre de fois (N fois) la v.a.r. T_n (à n fixé) afin d'obtenir une répartition des valeurs possibles de T_n et ainsi une approximation de la loi de T_n. Dans l'énoncé, on fait le choix $N = 100000$. Cela suggère que le résultat de convergence fournit par la LfGN a une vitesse de convergence faible : N doit être un nombre réellement **grand** pour que l'approximation obtenue soit bonne.

□

9782340-026636_001_784.indd 298 30/07/2018 09:52

EDHEC 2017 : le sujet

Exercice 1

On considère la fonction f qui à tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2\,(x - y)^2$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. ***a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

b) Montrer que le gradient de f est nul si, et seulement si, on a : $\left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array}\right.$.

c) En déduire que f possède trois points critiques : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

3. ***a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

b) Écrire la matrice hessienne de f en chaque point critique.

c) Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que f admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.

d) Déterminer les signes de $f(x, x)$ et $f(x, -x)$ au voisinage de $x = 0$.
Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de f.

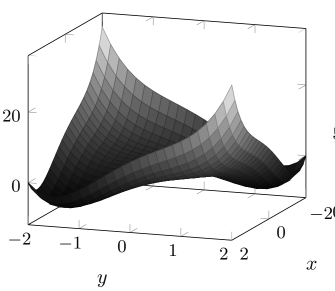
4. ***a)*** Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, calculer $f(x, y) - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2)^2 - 2(x + y)^2$.

b) Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de f ?

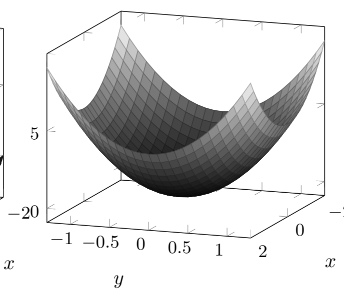
5. ***a)*** Compléter la deuxième ligne du script suivant afin de définir la fonction f.

```
1  function z = f(x,y)
2      z = ---
3  endfunction
4  x = linspace(-2,2,101)
5  y = x
6  fplotd3d(x,y,f)
```

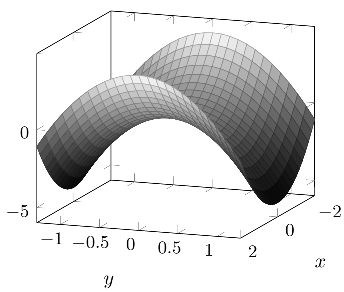
b) Le script précédent, une fois complété, renvoie l'une des trois nappes suivantes. Laquelle ? Justifier la réponse.



Nappe 1



Nappe 2



Nappe 3

Exercice 2

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E, les fonctions e_0, e_1 e_2 étant définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e_0(t) = 1, \quad e_1(t) = t, \quad e_2(t) = t^2$$

On considère l'application φ qui, à toute fonction P de E, associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\varphi(P))\,(x) = \int_0^1 P(x+t)\ dt$$

1. ***a)*** Montrer que φ est linéaire.

b) Déterminer $(\varphi(e_0))\,(x)$, $(\varphi(e_1))\,(x)$ et $(\varphi(e_2))\,(x)$ en fonction de x, puis écrire $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ comme combinaison linéaire de e_0, e_1 et e_2.

c) Déduire des questions précédentes que φ est un endomorphisme de E.

2. ***a)*** Écrire la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2). On vérifiera que la première ligne de A est :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b) Justifier que φ est un automorphisme de E.

c) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

3. Compléter les commandes **Scilab** suivantes pour que soit affichée la matrice A^n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :

```
n = input('entrez une valeur pour n : ')
A = [---]
disp(---)
```

4. ***a)*** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que l'on ait :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner u_0 et établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{6}\,(3n+2)$.

b) En déduire, par sommation, l'expression de u_n pour tout entier n.

c) Écrire A^n sous forme de tableau matriciel.

9782340-026636_001_784.indd 300 30/07/2018 09:52

Exercice 3

Soit V une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, dont la fonction de répartition est la fonction F_V définie par : $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

On pose $W = -\ln(V)$ et on admet que W est aussi une variable aléatoire dont le fonction de répartition est notée F_W. On dit que W suit une loi de Gumbel.

1. a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_W(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$.

b) En déduire que W est une variable à densité.

- On désigne par n un entier naturel non nul et par $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi que V, c'est à dire la loi $\mathcal{E}(1)$.
- On considère la variable aléatoire Y_n définie par $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, c'est à dire que pour tout ω de Ω, on a : $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$.
  On admet que Y_n est une variable aléatoire à densité.

2. a) Montrer que la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n est définie par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

b) En déduire une densité f_{Y_n} de Y_n.

3. a) Donner un équivalent de $1 - F_{Y_n}(t)$ lorsque t est au voisinage de $+\infty$, puis montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$ est convergente.

b) Établir l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\ dt = x\,(1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\ dt$$

c) Montrer que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\,(1 - F_{Y_n}(x)) = 0$.

d) En déduire que Y_n possède une espérance et prouver l'égalité :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$$

4. a) Montrer, grâce au changement de variable $u = 1 - \mathrm{e}^{-t}$, que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\ dt = \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \frac{1 - u^n}{1 - u}\ du$$

b) En déduire que : $\displaystyle\int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\ dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1 - \mathrm{e}^{-x})^k}{k}$ puis donner $\mathbb{E}(Y_n)$ sous forme de somme.

5. On pose $Z_n = Y_n - \ln(n)$.

a) On rappelle que `grand(1,n,'exp',1)` simule n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1. Compléter la déclaration de fonction **Scilab** suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire Z_n.

```
function Z = f(n)
    x = grand(1,n,'exp',1)
    Z = ---
endfunction
```

b) Voici deux scripts :

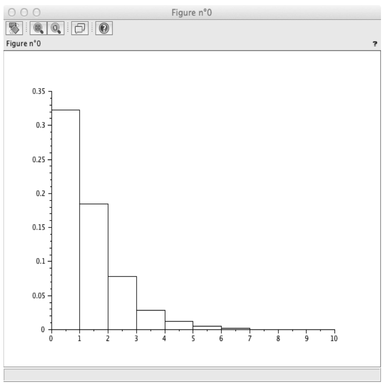
```
V = grand(1,10000,'exp',1)
W = -log(V)
s = linspace(0,10,11)
histplot(s,W)
```

Script (1)

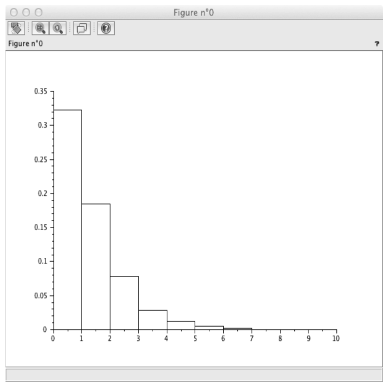
```
n = input('entrez la valeur de n : ')
Z = [] // la matrice-ligne Z est vide
for k = 1 :10000
    Z = [Z,f(n)]
end
s = linspace(0,10,11)
histplot(s,Z)
```

Script (2)

Chacun des scripts simule 10000 variables indépendantes, regroupe les valeurs renvoyées en 10 classes qui sont les intervalles $[0,1]$, $]1,2]$, $]2,3]$, $\ldots$, $]9,10]$ et trace l'histogramme correspondant (la largeur de chaque rectangle est égale à 1 et leur hauteur est proportionnelle à l'effectif de chaque classe).
Le script (1) dans lequel les variables aléatoires suivent la loi de Gumbel (loi suivie par W), renvoie l'histogramme (1) ci-dessous, alors que le script (2) dans lequel les variables aléatoires suivent la même loi que Z_n, renvoie l'histogramme (2) ci-dessous, pour lequel on a choisi $n = 1000$.



Histogramme (1)



Histogramme (2) pour $n = 1000$

Quelle conjecture peut-on émettre quant au comportement de la suite des v.a.r. (Z_n) ?

6. On note F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n.

a) Justifier que, pour tout réel x, on a : $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))$.

b) Déterminer explicitement $F_{Z_n}(x)$.

c) Montrer que, pour tout réel x, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln\left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) = -\mathrm{e}^{-x}$.

d) Démontrer le résultat conjecturé à la question ***5.b)***.

Problème

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3, et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.
Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est à dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
- Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant n. D'après le premier des deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$.

1. Donner la loi de X_1, ainsi que l'espérance $\mathbb{E}(X_1)$ de la variable X_1.
On admet pour la suite que la loi de X_2 est donnée par :

$$\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}([X_2 = 2]) = \mathbb{P}([X_2 = 3]) = \mathbb{P}([X_2 = 4]) = \frac{2}{9}$$

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, donner, en justifiant, l'ensemble des valeurs prises par X_n.

3. ***a)*** Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{3}\left(\mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4])\right)$$

b) Vérifier que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

c) Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4]) = 1$ et en déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = -\frac{1}{3}\,\mathbb{P}([X_n = 1]) + \frac{1}{3}$$

d) Établir alors que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_n = 1]) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

4. ***a)*** En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_{n+1} = 2]) = \frac{1}{3}\ \left(\mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4])\right)$$

b) En déduire une relation entre $\mathbb{P}([X_{n+1} = 2])$ et $\mathbb{P}([X_n = 2])$.

c) Montrer enfin que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X_n = 2]) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\ \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

5. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 3]) = -\frac{1}{3}\,\mathbb{P}([X_n = 3]) + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X_{n+1} = 4]) = -\frac{1}{3}\,\mathbb{P}([X_n = 4]) + \frac{1}{3}$$

En déduire sans calcul que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_n = 3]) = \mathbb{P}([X_n = 4]) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

6. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de la variable aléatoire X_n.

Partie 2 : calcul des puissances d'une matrice A

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la matrice-ligne de $\mathscr{M}_{1,4}(\mathbb{R})$:

$$U_n = \big(\mathbb{P}([X_n = 1]) \quad \mathbb{P}([X_n = 2]) \quad \mathbb{P}([X_n = 3]) \quad \mathbb{P}([X_n = 4])\big)$$

7. a) Montrer (grâce à certains résultats de la partie 1) que, si l'on pose $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n\ A$$

b) Établir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = U_0\ A^n$.

c) En déduire la première ligne de A^n.

8. Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres lignes de la matrice A^n, puis écrire ces trois lignes.

Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A

On considère les matrices I et J suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Déterminer les réels a et b tels que $A = aI + bJ$.

10. a) Calculer J^2 puis établir que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $J^k = 4^{k-1}J$.

b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire, pour tout entier n non nul, l'expression de A^n comme combinaison linéaire de I et J.

c) Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $n = 0$.

Partie 4 : informatique

11. a) Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il affiche les 100 premières positions autres que celle d'origine, du mobile dont le voyage est étudié dans ce problème, ainsi que le nombre n de fois où il est revenu sur le sommet numéroté 1 au cours de ses 100 premiers déplacements (on pourra utiliser la commande `sum`).

```
A = [---] / 3
x = grand(100,'markov',A,1)
n = ---
disp(x)
disp(n)
```

b) Après avoir exécuté cinq fois ce script, les réponses concernant le nombre de fois où le mobile est revenu sur le sommet 1 sont : $n = 23$, $n = 28$, $n = 23$, $n = 25$, $n = 26$.
En quoi est-ce normal ?

EDHEC 2017 : le corrigé

Exercice 1

On considère la fonction f qui à tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2\ (x - y)^2$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{La fonction } f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2 \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ car c'est une fonction polynomiale.}}$$

□

2. a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

Démonstration.
La fonction f étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, elle admet des dérivées partielles en tout point de l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- Tout d'abord :

$$\partial_1(f)(x, y) = 4x^3 - 4\ (x - y) = 4x^3 - 4x + 4y$$

- D'autre part :

$$\partial_2(f)(x, y) = 4y^3 - 4\ (x - y)\ (-1) = 4y^3 + 4x - 4y$$

$$\boxed{\text{Pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1(f)(x, y) = 4\ (x^3 - x + y) \ \text{ et } \ \partial_2(f)(x, y) = 4\ (y^3 + x - y).}$$

□

b) Montrer que le gradient de f est nul si, et seulement si, on a : $\left\{ \begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array} \right.$.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \nabla(f)(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} \quad & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_1(f)(x, y) & = & 0 \\ \partial_2(f)(x, y) & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 4\ (x^3 - x + y) & = & 0 \\ 4\ (y^3 + x - y) & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla(f)(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} \ \Leftrightarrow \ \left\{ \begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array} \right.}$$

□

c) En déduire que f possède trois points critiques : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- Par définition d'un point critique :

$$\begin{array}{c} (x, y) \text{ est un point} \\ \text{critique de } f \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla(f)(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2}$$

- On en déduit :

$$
\begin{array}{rcl}
\begin{array}{c}(x,y) \text{ est un point} \\ \text{critique de } f\end{array} & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array}\right. \\[2ex]
& \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 & = & -x^3 \end{array}\right. \\[2ex]
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 & = & (-x)^3 \end{array}\right. \\[2ex]
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y & = & -x \end{array}\right. \qquad \textit{(car la fonction } t \mapsto t^3 \textit{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\[2ex]
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - 2x & = & 0 \\ y & = & -x \end{array}\right. \\[2ex]
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x\ (x^2 - 2) & = & 0 \\ y & = & -x \end{array}\right. \\[2ex]
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x\ (x - \sqrt{2})\ (x + \sqrt{2}) & = & 0 \\ y & = & -x \end{array}\right. \\[2ex]
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} x = 0 \ \texttt{OU} \ x = \sqrt{2} \ \texttt{OU} \ x = -\sqrt{2} \\ y = -x \end{array}\right. \\[2ex]
& \Longleftrightarrow & (x,y) \in \big\{(0,0),\ (\sqrt{2}, -\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\big\}
\end{array}
$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ possède trois points critiques : } (0,0),\ (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ et } (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).}$$

Commentaire

- La difficulté de cette question réside dans le fait qu'il n'existe pas de méthode générale pour résoudre l'équation $\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2}$.
  On est donc confronté à une question bien plus complexe qu'une résolution de système d'équations linéaires (que l'on résout aisément à l'aide de la méthode du pivot de Gauss).
- Lors de la recherche de points critiques, on doit faire appel à des méthodes ad hoc. Il est par exemple assez fréquent de faire apparaître une équation du type :

  $$\varphi(x) = \varphi(y)$$

  où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction bijective. En réalité, c'est le caractère injectif (φ est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ par exemple) qui nous intéresse ici puisqu'il permet de conclure :

  $$x = y$$

  En injectant cette égalité dans la seconde équation, on obtient une nouvelle équation qui ne dépend plus que d'une variable et qu'il est donc plus simple de résoudre.
- Enfin, vérifier que $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sont des points critiques ne démontre pas que ce sont les seuls et ne constitue donc pas une réponse à la question.

□

3. a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

Démonstration.

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une fonction polynomiale.
  Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tout d'abord :
$$\partial^2_{11}(f)(x, y) = 4\ (3x^2 - 1)$$
- Ensuite :
$$\partial^2_{12}(f)(x, y) = 4 = \partial^2_{21}(f)(x, y)$$
  La dernière égalité est obtenue en vertu du théorème de Schwarz puisque la fonction f est $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Enfin :
$$\partial^2_{22}(f)(x, y) = 4\ (3y^2 - 1)$$

$$\boxed{\begin{gathered}\text{Pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ \partial^2_{11}(f)(x,y) = 4\ (3x^2-1),\ \ \partial^2_{12}(f)(x,y) = 4 = \partial^2_{21}(f)(x,y) \\ \text{et } \partial^2_{22}(f)(x,y) = 4\ (3y^2-1)\end{gathered}}$$

Commentaire

- Il faut penser à utiliser le théorème de Schwarz dès que la fonction à deux variables considérée est $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$.
- Ici, le calcul de $\partial^2_{12}(f)(x, y)$ et $\partial^2_{21}(f)(x, y)$ est aisé. Il faut alors concevoir le résultat du théorème de Schwarz comme une mesure de vérification : en dérivant par rapport à la 1ère variable puis par rapport à la 2ème, on doit obtenir le même résultat que dans l'ordre inverse.

□

b) Écrire la matrice hessienne de f en chaque point critique.

Démonstration.
On rappelle que la matrice hessienne de f en un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est :

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{11}(f)(x,y) & \partial^2_{12}(f)(x,y) \\ \partial^2_{21}(f)(x,y) & \partial^2_{22}(f)(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\ (3x^2-1) & 4 \\ 4 & 4\ (3y^2-1) \end{pmatrix}$$

- On en déduit :
$$\nabla^2(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 4\ (3\ (0)^2-1) & 4 \\ 4 & 4\ (3\ (0)^2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$
- Ensuite :
$$\nabla^2(f)\big(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\big) = \begin{pmatrix} 4\ (3\ (\sqrt{2})^2-1) & 4 \\ 4 & 4\ (3\ (-\sqrt{2})^2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$
- Enfin :
$$\nabla^2(f)\big(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\big) = \begin{pmatrix} 4\ (3\ (\sqrt{2})^2-1) & 4 \\ 4 & 4\ (3\ (-\sqrt{2})^2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\nabla^2(f)(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } \nabla^2(f)\big(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\big) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} = \nabla^2(f)\big(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\big)}$$

□

c) Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que f admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.

Démonstration.
Rappelons tout d'abord que, pour toute matrice $H \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ est une valeur propre de } H & \Leftrightarrow & H - \lambda\ I \text{ n'est pas inversible} \\ & \Leftrightarrow & \det(H - \lambda\ I) = 0 \end{array}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcl} \det\left(\nabla^2(f)(0,0) - \lambda\ I\right) & = & \det\left(\begin{pmatrix} -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & = & (-4-\lambda)^2 - 4^2 \\ & = & (4+\lambda)^2 - 4^2 \\ & = & (4+\lambda-4)\ (4+\lambda+4) \ = \ \lambda\ (\lambda+8) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \nabla^2(f)(0,0) \text{ admet pour valeurs propres } 0 \text{ et } -8.}$$

- Et :

$$\begin{array}{rcl} \det\left(\nabla^2(f)(\sqrt{2},-\sqrt{2}) - \lambda\ I\right) & = & \det\left(\begin{pmatrix} 20-\lambda & 4 \\ 4 & 20-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & = & (20-\lambda)^2 - 4^2 \\ & = & (20-\lambda-4)\ (20-\lambda+4) \ = \ (16-\lambda)\ (24-\lambda) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \nabla^2(f)(\sqrt{2},-\sqrt{2}) \text{ et } \nabla^2(f)(-\sqrt{2},\sqrt{2}) \text{ admettent pour valeurs propres } 16 \text{ et } 24.}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ces deux matrices admettent deux valeurs propres strictement positives.} \\ \text{On en déduit que } f \text{ admet un minimum local en } (\sqrt{2},-\sqrt{2}) \text{ et en } (-\sqrt{2},\sqrt{2}).\end{array}}$$

Enfin :

$$\begin{array}{rcl} f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) & = & (\sqrt{2})^4 + (-\sqrt{2})^4 - 2\ (\sqrt{2} - (-\sqrt{2}))^2 \\ & = & 4 + 4 - 2\ (2\ \sqrt{2})^2 \\ & = & 8 - 2 \times 4 \times 2 \\ & = & 8 - 16 \ = \ -8 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ce minimum local a pour valeur } f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -8 = f(-\sqrt{2},\sqrt{2}).}$$

□

d) Déterminer les signes de $f(x,x)$ et $f(x,-x)$ au voisinage de $x = 0$.
Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de f.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord :

$$f(x,x) = x^4 + x^4 - 2\ (x-x)^2 = 2\ x^4 \geqslant 0$$

- Par ailleurs :
$$\begin{array}{rcl} f(x,-x) & = & x^4+(-x)^4-2\ (x-(-x))^2 \\ & = & 2x^4-2\ (2\ x)^2 \\ & = & 2x^4-8x^2 \\ & = & 2x^2\ (x^2-4)=2x^2\ (x-2)\ (x+2) \end{array}$$
Comme $x^2 \geqslant 0$, la quantité $f(x,-x)$ est du signe de de $(x-2)\ (x+2)$.
Ainsi, $f(x,-x)<0$ si $x \in]-2,2[\setminus\{0\}$, et $f(x,-x) \geqslant 0$ sinon.
- Enfin, $f(0,0)=0$.
On déduit de ce qui précède que pour tout x au voisinage de 0 (exclu), on a :
$$f(x,-x)<f(0,0)<f(x,x)$$

On en conclut qu'au point $(0,0)$, la fonction f n'admet ni un minimum local, ni un maximum local. Il n'y a pas d'extremum au point $(0,0)$. □

4. a) Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, calculer $f(x,y)-(x^2-2)^2-(y^2-2)^2-2(x+y)^2$.

Démonstration.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
$$\begin{array}{rl} & f(x,y)-(x^2-2)^2-(y^2-2)^2-2(x+y)^2 \\ = & f(x,y)-(x^4-4x^2+4)-(y^4-4y^2+4)-2\ (x^2+2xy+y^2) \\ = & (\cancel{x^4}+\cancel{y^4}-2\ (x-y)^2)-\cancel{x^4}-\cancel{y^4}+2x^2+2y^2-4xy-8 \\ = & -2x^2+4xy-2y^2+2x^2+2y^2-4xy-8 \\ = & -8 \end{array}$$

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y)-(x^2-2)^2-(y^2-2)^2-2(x+y)^2=-8$.

Commentaire

- Il y avait une erreur dans le sujet initial. Il était en effet demandé de calculer :
$$f(x,y)-(x^2-2)^2-(y^2-2)-2(x+y)^2$$
Le carré du terme $(y^2-2)^2$ n'était donc pas présent dans les énoncés distribués.
- Il est globalement rare que les sujets contiennent des erreurs. Malheureusement, malgré la relecture soignée des concepteurs, il peut arriver que certaines coquilles subsistent. Un candidat repérant une coquille peut le signaler sur sa copie. Attention cependant au faux positif : signaler qu'on a repéré une coquille alors qu'il n'y en a pas fait plutôt mauvais effet.
- Quand la coquille est avérée, la question sort généralement du barème.
- Ici, on pouvait se douter qu'il y avait un problème car, dans l'expression de f, x et y jouent des rôles symétriques ($\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y)=f(y,x)$). La coquille introduisait une dissymétrie des rôles de x et y, ce qui pouvait mettre la puce à l'oreille.

□

b) Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de f ?

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & -8 + \Big((x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + 2(x+y)^2\Big) \\ & \geqslant & -8 \end{array}$$

  car on ajoute à -8 une somme de carrés.
- On rappelle que $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8$. Ainsi :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \leqslant f(x,y)$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet aux points } (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ et } (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ un minimum global.}}$$

□

5. a) Compléter la deuxième ligne du script suivant afin de définir la fonction f.

```
1 function z = f(x,y)
2     z = ---
3 endfunction
4 x = linspace(-2,2,101)
5 y = x
6 fplotd3d(x,y,f)
```

Démonstration.
Il suffit de recopier la définition de la fonction f.

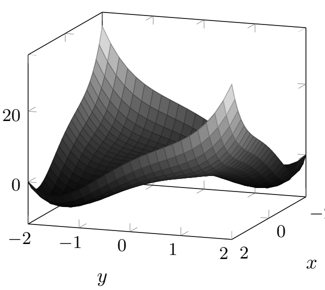
```
2     z = x ^ 4 + y ^ 4 - 2 ⋆ (x - y) ^ 2
```

Commentaire

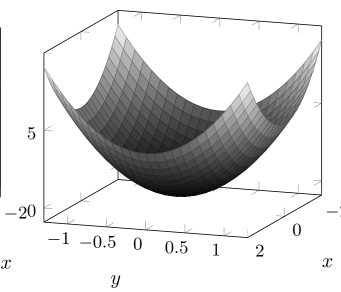
On rappelle qu'il n'est pas obligatoire de recopier tout le programme lorsqu'il est demandé de compléter un programme à trou.

□

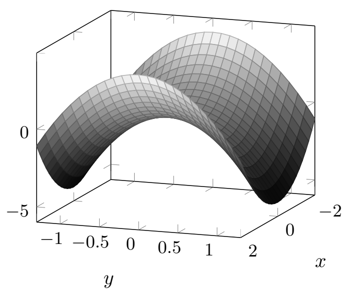
b) Le script précédent, une fois complété, renvoie l'une des trois nappes suivantes. Laquelle ? Justifier la réponse.



Nappe 1



Nappe 2



Nappe 3

Démonstration.

- D'après l'étude précédente, la fonction f possède un minimum global réalisé en les deux points $((\sqrt{2}, -\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2}, \sqrt{2}))$.
- On peut écarter la deuxième nappe qui représente une fonction n'admettant un minimum global qu'en un point.
- On peut écarter la troisième nappe qui représente une fonction n'admettant pas de minimum global (elle admet par contre un point selle).
- Seule la première nappe représente une fonction admettant un minimum global réalisé en deux points. C'est donc la représentation de la fonction f considéré.

$$\boxed{\text{Le script précédent renvoie la première nappe.}}$$

Commentaire

Il était difficile de lire les coordonnées des deux points atteignant le minimum sur l'énoncé original. Pour être certain d'avoir des points (même si la photocopie en noir et blanc rend le graphique peut lisible), il est conseillé de lister les propriétés que doit avoir la nappe représentant f.

□

Exercice 2

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E, les fonctions e_0, e_1 e_2 étant définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e_0(t) = 1, \quad e_1(t) = t, \quad e_2(t) = t^2$$

On considère l'application φ qui, à toute fonction P de E, associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\varphi(P))\,(x) = \int_0^1 P(x+t)\ dt$$

1. a) Montrer que φ est linéaire.

Démonstration.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(P_1, P_2) \in E^2$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\Big(\varphi(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)\Big)(x) &= \int_0^1 (\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)(x+t)\ dt \\
&= \int_0^1 (\lambda_1 \cdot P_1(x+t) + \lambda_2 \cdot P_2(x+t))\ dt \\
&= \lambda_1 \int_0^1 P_1(x+t)\ dt + \lambda_2 \int_0^1 P_2(x+t)\ dt \quad \textit{(par linéarité de l'intégration)} \\
&= \lambda_1\ (\varphi(P_1))(x) + \lambda_2\ (\varphi(P_2))(x) \\
&= \Big(\lambda_1 \cdot \varphi(P_1) + \lambda_2 \cdot \varphi(P_2)\Big)(x)
\end{aligned}$$

L'égalité précédente étant vérifiée pour tout réel x, on en déduit :

$$\varphi(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2) = \lambda_1 \cdot \varphi(P_1) + \lambda_2 \cdot \varphi(P_2)$$

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est linéaire.}}$$

Commentaire

- Cet exercice est de facture classique.
  La principale difficulté provient de la manipulation d'objets. Il faut donc bien prendre le temps de comprendre la définition de l'application $\varphi : E \to E$.
- Détaillons les objets considérés.
  - En accord avec le programme, les polynômes sont confondus avec leur application polynomiale associée. C'est ainsi que e_0, e_1 et e_2, éléments de E, sont définies en tant qu'application $(\forall t \in \mathbb{R},\ e_0(t) = 1,\ e_1(t) = t,\ e_2(t) = t^2)$.
    La variable t utilisée ici est muette (on pourrait aussi bien définir ces applications par : $\forall u \in \mathbb{R}$, $e_0(u) = 1$, $e_1(u) = u$, $e_2(u) = u^2$) et n'a pas de lien avec la variable d'intégration (muette) nommée elle aussi t. Ces applications polynomiales sont parfois notées P_0, P_1 et P_2, la lettre P étant traditionnellement utilisée pour désigner un polynôme (ce que fait l'énoncé).
  - L'application φ associe à toute application polynomiale P une application polynomiale notée $\varphi(P)$. Une telle application est définie par sa valeur en tout point $x \in \mathbb{R}$ (nouvelle variable muette). C'est ce qui est fait dans l'énoncé qui fournit la valeur de $(\varphi(P))(x)$.
  - Enfin, $\displaystyle\int_0^1 P(x+t)\ dt$ est une quantité qui dépend de x mais qui est indépendante de t, variable (muette) d'intégration.

$\square$

b) Déterminer $(\varphi(e_0))\,(x)$, $(\varphi(e_1))\,(x)$ et $(\varphi(e_2))\,(x)$ en fonction de x, puis écrire $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ comme combinaison linéaire de e_0, e_1 et e_2.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord :

$$(\varphi(e_0))(x) = \int_0^1 e_0(x+t)\ dt = \int_0^1 1\ dt = 1\ (1-0) = 1 = e_0(x)$$

$$\boxed{\text{L'égalité précédente étant vérifiée pour tout réel } x \text{, on en déduit : } \varphi(e_0) = e_0.}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned}
(\varphi(e_1))(x) &= \int_0^1 e_1(x+t)\ dt \ = \int_0^1 (x+t)\ dt \\
&= \int_0^1 x\ dt + \int_0^1 t\ dt & \textit{(par linéarité de l'intégration)} \\
&= x\ (1-0) + \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 \\
&= x + \frac{1}{2} \\
&= e_1(x) + \frac{1}{2}\ e_0(x) \ = \left(e_1 + \frac{1}{2}\ e_0\right)(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'égalité précédente étant vérifiée pour tout réel } x \text{, on en déduit : } \varphi(e_1) = e_1 + \frac{1}{2}\ e_0.}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned}
(\varphi(e_2))(x) &= \int_0^1 e_2(x+t)\ dt \ = \ \int_0^1 (x+t)^2\ dt \\
&= \int_0^1 x^2\ dt + 2x \int_0^1 t\ dt + \int_0^1 t^2\ dt && \textit{(par linéarité de l'intégration)} \\
&= x^2\ (1-0) + 2\ x \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 \\
&= x^2 + x + \frac{1}{3} \\
&= e_2(x) + e_1(x) + \frac{1}{3}\ e_0(x) \ = \ \left(e_2 + e_1 + \frac{1}{3}\ e_0\right)(x)
\end{aligned}$$

L'égalité précédente étant vérifiée pour tout réel x, on en déduit : $\varphi(e_2) = e_2 + e_1 + \dfrac{1}{3}\ e_0$. □

c) Déduire des questions précédentes que φ est un endomorphisme de E.

Démonstration.

- D'après la question ***1.a)***, l'application φ est linéaire.
- Il reste à démontrer que cette application est à valeurs dans E.
  Soit $P \in E$. Comme (e_0, e_1, e_2) est une base de E, il existe un unique triplet $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$P = a_0\ e_0 + a_1\ e_1 + a_2\ e_2$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\varphi(P) &= \varphi(a_0\ e_0 + a_1\ e_1 + a_2\ e_2) \\
&= a_0\ \varphi(e_0) + a_1\ \varphi(e_1) + a_2\ \varphi(e_2) && \textit{(par linéarité de } \varphi\textit{)} \\
&= a_0\ e_0 + a_1 \left(\frac{1}{2}\ e_0 + e_1\right) + a_2 \left(\frac{1}{3}\ e_0 + e_1 + e_2\right) && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \left(a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2\right)\ e_0 + (a_1 + a_2)\ e_1 + a_2\ e_2
\end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi(P) \in \mathrm{Vect}\,(e_0, e_1, e_2) = E$.

On en déduit que φ est un endomorphisme de E.

Commentaire

On aurait aussi pu calculer directement $\varphi(P)$:

$$\begin{aligned}
(\varphi(P))(x) &= \int_0^1 P(x+t)\ dt = \int_0^1 \left(a_0 + a_1\ (x+t) + a_2\ (x+t)^2\right)\ dt \\
&= \ \dots \ = \left(a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2\right) + (a_1 + a_2)\ x + a_2\ x^2
\end{aligned}$$

Mais ce n'était pas l'esprit du sujet et cela obligeait à refaire des calculs déjà effectués précédemment.

□

2. a) Écrire la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2). On vérifiera que la première ligne de A est :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Démonstration.
D'après la question ***1.b)*** :

- $\varphi(e_0) = 1 \cdot e_0 + 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$.
  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(e_0,e_1,e_2)}(\varphi(e_0)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $\varphi(e_1) = \dfrac{1}{2} \cdot e_0 + 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$.
  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(e_0,e_1,e_2)}(\varphi(e_1)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $\varphi(e_2) = \dfrac{1}{3} \cdot e_0 + 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$.
  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(e_0,e_1,e_2)}(\varphi(e_2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } A = \mathrm{Mat}_{(e_0,e_1,e_2)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

b) Justifier que φ est un automorphisme de E.

Démonstration.
La matrice A est inversible car elle est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. La matrice A étant la représentation matricielle dans la base (e_0, e_1, e_2) de φ, on en déduit que φ est bijective.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \varphi \text{ est un automorphisme de } E.}$$

□

c) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Démonstration.

- La matrice A est triangulaire supérieure.
  Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux.

  $$\boxed{\text{On en conclut : } \mathrm{Sp}(\varphi) = \mathrm{Sp}(A) = \{1\}.}$$

- Montrons par l'absurde que φ n'est pas diagonalisable.
  Supposons que φ est diagonalisable, alors $A = \mathrm{Mat}_{(e_0,e_1,e_2)}(\varphi)$ l'est aussi.
  Il existe donc une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A telles que $A = PDP^{-1}$.
  Or 1 est la seule valeur propre de A. Ainsi $D = I$ et :

  $$A = PDP^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$$

  Absurde !

  $$\boxed{\text{L'endomorphisme } \varphi \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Commentaire

- Il était possible de déterminer $E_1(\varphi)$ l'espace propre associé à 1.
- Détaillons la rédaction associée.

  Soit $P = a_0\ e_0 + a_1\ e_1 + a_2\ e_2 \in E$. On a alors $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} P \in E_1(\varphi) & \Longleftrightarrow & (\varphi - \mathrm{id}_E)(P) = 0_E \\ & \Longleftrightarrow & (A - I_3)\ U = 0_{\mathscr{M}_{31}(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} \frac{1}{2}\, a_1 & + & \frac{1}{3}\, a_2 & = & 0 \\ & & a_2 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \{\ a_1 = a_2 = 0 \\ & & \textit{(par remontées successives)} \end{array}$$

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_1(\varphi) & = & \{P = a_0\ e_0 + a_1\ e_1 + a_2\ e_2 \mid (\varphi - \mathrm{id}_E)(P) = 0_E\} \\ & = & \{a_0\ e_0 + a_1\ e_1 + a_2\ e_2 \mid a_1 = a_2 = 0\} \\ & = & \{a_0\ e_0 \mid a_0 \in \mathbb{R}\} \\ & = & \mathrm{Vect}\,(e_0) \end{array}$$

  La famille $\mathcal{F} = (e_0)$ est génératrice de $E_1(\varphi)$.
  De plus, elle est libre car constituée d'un vecteur non nul.
  C'est donc une base de $E_1(\varphi)$ et $\dim(E_1(\varphi)) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 1$.

  Comme : $\dim(E_1(\varphi)) = 1 \neq 3 = \dim(E)$, alors φ n'est pas diagonalisable.

□

3. Compléter les commandes **Scilab** suivantes pour que soit affichée la matrice A^n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :

```
n = input('entrez une valeur pour n : ')
A = [---]
disp(---)
```

Démonstration.

- On stocke la matrice A dans la variable `A`.

```
A = [1, 1/2, 1/3; 0, 1, 1; 0, 0, 1]
```

- Puis on demande l'affichage de A^n.

```
disp(A ^ n)
```

□

4. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que l'on ait :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner u_0 et établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{6}\,(3n+2)$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: il existe un réel u_n tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

► **Initialisation** :

- Tout d'abord : $A^0 = I_3$.
- Par ailleurs : $\begin{pmatrix} 1 & \frac{0}{2} & u_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Notons alors $u_0 = 0$. On a bien démontré l'existence d'un réel u_0 tel que : $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{0}{2} & u_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (il existe $u_{n+1} \in \mathbb{R}$ tel que $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n+1}{2} & u_{n+1} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$).

- Par hypothèse de récurrence, il existe $u_n \in \mathbb{R}$ tel que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A\ A^n \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2}+\frac{1}{2} & u_n+\frac{n}{2}+\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notons alors $u_{n+1} = u_n + \frac{n}{2} + \frac{1}{3}$.
On a bien démontré l'existence d'un réel u_{n+1} tel que : $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n+1}{2} & u_{n+1} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$.

En particulier : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{3} = u_n + \dfrac{1}{6}\,(3n+2)$. □

b) En déduire, par sommation, l'expression de u_n pour tout entier n.

Démonstration.

- D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$u_{k+1} - u_k = \frac{1}{6}\ (3k+2)$$

- On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{6}\ (3k+2) \\
&= \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{n-1} (3k+2) \\
&= \frac{1}{6} \left(3 \sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} 2\right) \\
&= \frac{1}{6} \big(3\ \frac{n(n-1)}{2} + 2n\big) \\
&= \frac{1}{12} \big(3\ n(n-1) + 4n\big) \\
&= \frac{1}{12} \Big(n\big(3\ (n-1) + 4\big)\Big) \\
&= \frac{n\ (3n+1)}{12}
\end{aligned}$$

- Par ailleurs :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0 = u_n$$

- On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{n\ (3n+1)}{12}$$

  Cette relation est aussi vraie pour $n = 0$. En effet :

  × d'une part : $u_0 = 0$,

  × d'autre part : $\dfrac{0\ (3 \times 0 + 1)}{12} = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{n\ (3n+1)}{12}.}$$

□

c) Écrire A^n sous forme de tableau matriciel.

Démonstration.

D'après les questions précédentes : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & \frac{n\,(3n+1)}{12} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Commentaire

Cette question peut dérouter puisque le terme « tableau matriciel » n'est pas habituel. C'est simplement l'occasion, pour les candidats ayant réussi la question précédente, de prendre des points supplémentaires.

□

Exercice 3

Soit V une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, dont la fonction de répartition est la fonction F_V définie par : $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.
On pose $W = -\ln(V)$ et on admet que W est aussi une variable aléatoire dont le fonction de répartition est notée F_W. On dit que W suit une loi de Gumbel.

1. a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_W(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$.

Démonstration.

- Notons $h : x \mapsto -\ln(x)$, de sorte que $W = h(V)$.
  Comme $V \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, alors $V(\Omega) =]0, +\infty[$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} W(\Omega) & = & h(V)(\Omega) \ = \ h\big(V(\Omega)\big) & \\ & = & h\big(]0,+\infty[\big) & \\ & = &]\lim\limits_{x\to+\infty} h(x), \lim\limits_{x\to 0} h(x)[& \textit{(car } h \textit{ est continue et strictement décroissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & = &]-\infty, +\infty[& \textit{(car } \lim\limits_{x\to+\infty} -\ln(x) = -\infty \textit{ et } \lim\limits_{x\to 0} -\ln(x) = +\infty\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } W(\Omega) = \mathbb{R}.}$$

- Déterminons la fonction de répartition de W. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} F_W(x) & = & \mathbb{P}([W \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([-\ln(V) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([\ln(V) \geqslant -x]) & \\ & = & \mathbb{P}([V \geqslant \mathrm{e}^{-x}]) & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & = & 1 - \mathbb{P}([V < \mathrm{e}^{-x}]) & \\ & = & 1 - F_V(\mathrm{e}^{-x}) & \textit{(car } V \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\ & = & \cancel{1} - \left(\cancel{1} - \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}\right) & \textit{(car } e^{-x} > 0\textit{)} \\ & = & \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}} & \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_W(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}}$$

Commentaire

- Commencer par déterminer l'ensemble image $V(\Omega)$ est un bon réflexe : cela peut guider l'étude de la fonction de répartition F_V. Plus précisément, cela fournit la disjonction de cas à effectuer. Typiquement, si l'on démontre que $V(\Omega)$ est de la forme $[a, b]$ (où a et b sont deux réels tels que $a < b$), on peut rédiger comme suit :
  - × si $x < a$ alors $[V \leqslant x] = \varnothing$.
    Ainsi, $F_V(x) = \mathbb{P}([V \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
  - × si $x \in [a, b]$ alors [... `démo à produire` ...]
  - × si $x > b$ alors $[X \leqslant x] = \Omega$.
    Ainsi, $F_V(x) = \mathbb{P}([V \leqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- Les ensembles images $V(\Omega)$ de types différents (essentiellement $]-\infty, b]$ et $[a, +\infty[$) amènent des disjonctions de cas analogues.

□

b) En déduire que W est une variable à densité.

Démonstration.
La fonction de répartition F_W est :
× continue sur $\mathbb{R}$ (car elle est la composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$).
× de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (car elle est la composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$).

$$\boxed{\text{Ainsi, } W \text{ est une variable à densité.}}$$

□

- On désigne par n un entier naturel non nul et par $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi que V, c'est à dire la loi $\mathcal{E}(1)$.
- On considère la variable aléatoire Y_n définie par $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, c'est à dire que pour tout ω de Ω, on a : $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$.
On admet que Y_n est une variable aléatoire à densité.

2. a) Montrer que la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n est définie par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Démonstration.

- Déterminons tout d'abord $Y_n(\Omega)$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la v.a.r. X_i suit la loi $\mathcal{E}(1)$, et donc $X_i(\Omega) = [0, +\infty[$.
On rappelle que $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } Y_n(\Omega) \ \subset \ [0, +\infty[.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  – Si $x < 0$: alors $[Y_n \leqslant x] = \varnothing$. Ainsi :

$$F_{Y_n}(x) \ = \ \mathbb{P}([Y_n \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  – Si $x \geqslant 0$:

$$\begin{array}{rcll} F_{Y_n}(x) & = & \mathbb{P}([Y_n \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([\max(X_1, \ldots, X_n) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([X_1 \leqslant x] \ \cap \ \cdots \ \cap [X_n \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) \times \cdots \times \mathbb{P}([X_n \leqslant x]) & \textit{(car les v.a.r. } X_i \\ & & & \textit{sont indépendantes)} \\ & = & (\mathbb{P}([X_1 \leqslant x])^n & \textit{(car les v.a.r. } X_i \\ & & & \textit{ont même loi)} \\ & = & (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)) \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

Commentaire

- Cette question permet d'illustrer l'intérêt de la détermination de $Y_n(\Omega)$: cela nous fournit la disjonction de cas servant à déterminer la fonction de répartition F_{Y_n}.
- On notera au passage que démontrer l'inclusion $Y_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$ est suffisant pour mettre en place cette disjonction de cas.

□

b) En déduire une densité f_{Y_n} de Y_n.

Démonstration.

- Y_n est une variable à densité car :
  × F_{Y_n} est continue sur $\mathbb{R}$.
  × F_{Y_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0.

  En effet, sur $]-\infty, 0[$, F_{Y_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ car elle est constante sur cet intervalle.
  Sur $]0, +\infty[$, F_{Y_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ car elle est la composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Pour déterminer une densité de Y_n, on dérive F_{Y_n} sur les **intervalles ouverts**.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  – Si $x \in]-\infty, 0[$:
  $$f_{Y_n}(x) = F'_{Y_n}(x) = 0$$
  – Si $x \in]0, +\infty[$:
  $$f_{Y_n}(x) = F'_{Y_n}(x) = ne^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1}$$
  – Si $x = 0$: on pose $f_{Y_n}(0) = 0$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ ne^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

Commentaire

Il faut bien comprendre qu'on peut prendre n'importe quelle valeur positive pour f_n en 0. On peut ainsi construire une infinité de densités de Y_n.
C'est pourquoi on parle d'**une** densité.

□

3. a) Donner un équivalent de $1-F_{Y_n}(t)$ lorsque t est au voisinage de $+\infty$, puis montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$ est convergente.

Démonstration.
On commence par déterminer un équivalent de $1 - F_{Y_n}(t)$ quand $t \to +\infty$.

- Soit $t \geqslant 0$.
$$F_{Y_n}(t) \quad = \quad \left(1 - e^{-t}\right)^n$$
- On reconnaît une expression de la forme $(1 + x)^\alpha$ dont on connaît un développement limité en 0. Plus précisément, il existe une fonction ε définie dans un voisinage de 0 et qui vérifie $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, telle que, au voisinage de 0 :
$$(1 + x)^n \;=\; 1 + n\ x + x\ \varepsilon(x)$$
- Comme $-e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut appliquer l'égalité précédente à $x = -e^{-t}$ pour t dans un voisinage de $+\infty$. On obtient :
$$\left(1 - e^{-t}\right)^n \;=\; 1 - n\ e^{-t} - e^{-t}\ \varepsilon\left(-e^{-t}\right)$$
$$\text{ainsi} \quad 1 - \left(1 - e^{-t}\right)^n \;=\; n\ e^{-t} + e^{-t}\ \varepsilon\left(-e^{-t}\right)$$
- On constate alors : $e^{-t}\ \varepsilon\left(-e^{-t}\right) = \underset{t\to+\infty}{o}(e^{-t})$. En effet :
$$\frac{e^{-t}\ \varepsilon\left(-e^{-t}\right)}{e^{-t}} \;=\; \varepsilon\left(-e^{-t}\right) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
  par théorème de composition des limites.

- On en conclut : $1 - F_{Y_n}(t) = n\ \mathrm{e}^{-t} + \underset{t\to+\infty}{o}(\mathrm{e}^{-t})$.

$$\boxed{\text{Et ainsi : } 1 - F_{Y_n}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} n\mathrm{e}^{-t}.}$$

Démontrons alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$ est convergente.

- La fonction $t \mapsto 1 - F_{Y_n}(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- D'autre part :

$$1 - F_{Y_n}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} n\ \mathrm{e}^{-t}\ (\geqslant 0)$$

- Or, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ dt$ est convergente (de la forme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\ dt$ avec $\alpha > 0$).
  (on ne change pas la nature d'une intégrale impropre en multipliant son intégrande par un réel non nul : ceci nous permet de ne pas prendre en compte le réel $n \neq 0$)

Ainsi, par critère d'équivalence des intégrales impropres de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$ converge.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt \text{ est convergente.}}$$

Commentaire

- Les intégrales de type $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\ dt$ sont considérées dans le programme comme des intégrales de référence au même titre que les intégrales de Riemann ce qui explique la rédaction ci-dessus.
- On aurait pu justifier autrement la convergence de cette intégrale.
  1) Soit par calcul.
  Soit $A \geqslant 0$.

$$\int_0^A n\mathrm{e}^{-t}\ dt = n\left[\ -\mathrm{e}^{-t}\ \right]_0^A = n(1 - \mathrm{e}^{-A}) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} n$$

  Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} n\mathrm{e}^{-t}\ dt$ converge.

  2) Soit par un argument provenant du chapitre des v.a.r. à densité.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ dt$ converge et vaut 1 en tant qu'intégrale d'une densité d'une v.a.r. X suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

□

b) Établir l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\ dt = x\,(1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\ dt$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} u(t) & = & 1 - F_{Y_n}(t) & u'(t) & = & -f_{Y_n}(t) \\[1em] v'(t) & = & 1 & v(t) & = & t \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}\int_0^x 1 \times (1 - F_{Y_n}(t))\ dt &= [\ t\ (1 - F_{Y_n}(t))\ ]_0^x - \int_0^x (-f_{Y_n}(t)) \times t\ dt \\ &= x\ (1 - F_{Y_n}(x)) - \cancel{0\ (1 - F_{Y_n}(0))} + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\ dt \\ &= x\ (1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\ dt\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\ dt = x(1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\ dt}$$ □

c) Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,(1 - F_{Y_n}(x)) = 0$.

Démonstration.

- D'après la question ***3.a)***, $1 - F_{Y_n}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} n\mathrm{e}^{-x}$. On obtient alors :

$$x(1 - F_{Y_n}(x)) \underset{x \to +\infty}{\sim} nx\mathrm{e}^{-x}$$

- Or : $nx\mathrm{e}^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
  En effet, $x\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Ainsi : $nx\mathrm{e}^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} x(1 - F_{Y_n}(x)) = 0}$$ □

d) En déduire que Y_n possède une espérance et prouver l'égalité :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$$

Démonstration.

- La v.a.r. Y_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{Y_n}(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour les calculs de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m f_{Y_n}(t)\ dt$.
  Or : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{Y_n}(t)\ dt = \int_0^{+\infty} t f_{Y_n}(t)\ dt$ car f_{Y_n} est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.
- Or, d'après la question ***3.b)***, pour tout $x \geqslant 0$:

$$\int_0^x t f_{Y_n}(t)\ dt = \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\ dt - x(1 - F_{Y_n}(x))$$

  La partie droite de l'égalité admet une limite finie quand $x \to +\infty$ car :
  × l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$ converge, d'après la question ***3.a)***
  × $\lim\limits_{x \to +\infty} x(1 - F_{Y_n}(x)) = 0$, d'après la question ***3.b)***

  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f_{Y_n}(t)\ dt$ est convergente. De plus :

$$\int_0^{+\infty} t f_{Y_n}(t)\ dt = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt - 0$$

$$\boxed{\text{En conclusion, la v.a.r. } Y_n \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt.}$$ □

4. ***a)*** Montrer, grâce au changement de variable $u = 1 - \mathrm{e}^{-t}$, que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ \int_0^x \ (1 - F_{Y_n}(t)) \ dt = \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \ \frac{1-u^n}{1-u} \ du$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\int_0^x \ (1 - F_{Y_n}(t)) \ dt = \int_0^x \ \left(1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)^n\right) \ dt$$

On effectue le changement de variable $\boxed{u = 1 - \mathrm{e}^{-t}}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = 1 - \mathrm{e}^{-t} \text{ (et donc } \mathrm{e}^{-t} = 1 - u \text{ puis } t = -\ln(1-u)) \\ \hookrightarrow du = \mathrm{e}^{-t} \ dt \quad \text{ et } \quad dt = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-t}} \ du = \dfrac{1}{1-u} \ du \\ \bullet \ t = 0 \ \Rightarrow \ u = 0 \\ \bullet \ t = x \ \Rightarrow \ u = 1 - \mathrm{e}^{-x} \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car la fonction $\varphi : u \mapsto -\ln(1-u)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1 - \mathrm{e}^{-x}]$.
On remarque de plus que $u \in [0, 1 - \mathrm{e}^{-x}]$, en particulier $u \neq 1$ (car $1 - \mathrm{e}^{-x} < 1$ pour tout $x \geqslant 0$) ce qui permet de justifier la validité de l'écriture $\dfrac{1}{1-u}$.
On obtient finalement :

$$\int_0^x \ \left(1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)^n\right) \ dt \ = \ \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \ (1-u^n) \, \frac{1}{1-u} \ du \ = \ \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \ \frac{1-u^n}{1-u} \ du$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \int_0^x \ (1 - F_{Y_n}(t)) \ dt = \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \ \frac{1-u^n}{1-u} \ du}$$

□

b) En déduire que : $\displaystyle\int_0^x \ (1 - F_{Y_n}(t)) \ dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^k}{k}$ puis donner $\mathbb{E}(Y_n)$ sous forme de somme.

Démonstration.

- On remarque tout d'abord : $u \in [0, 1 - \mathrm{e}^{-x}]$. On a donc, en particulier : $u \neq 1$.
  On peut donc écrire : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k \ = \ \frac{1-u^n}{1-u}$.
- On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \ \frac{1-u^n}{1-u} \ du \ &= \ \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \ \sum_{k=0}^{n-1} u^k \ du \\ &= \ \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \ u^k \ du && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \ \sum_{k=0}^{n-1} \left[\ \frac{u^{k+1}}{k+1} \ \right]_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \\ &= \ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^{k+1}}{k+1} \ = \ \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^k}{k} && \textit{(par décalage d'indice)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^x \ (1 - F_{Y_n}(t)) \ dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^k}{k}}$$

- On sait de plus que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^k}{k} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{n} \frac{1^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

□

5. On pose $Z_n = Y_n - \ln(n)$.

a) On rappelle que `grand(1,n,'exp',1)` simule n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1. Compléter la déclaration de fonction **Scilab** suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire Z_n.

```
function Z = f(n)
    x = grand(1,n,'exp',1)
    Z = ---
endfunction
```

Démonstration.

```
    Z = max(x) - log(n)
```

Commentaire

- On rappelle qu'il est inutile de recopier le programme en entier.
  Écrire la ligne contenant l'information manquante suffit.
- Il est tout à fait possible (et donc non sanctionné) aux concours d'utiliser plusieurs lignes, même si le concepteur a pensé à une réponse sur une seule ligne. Ici, on pouvait dans un premier temps simuler la v.a.r. Y_n puis la v.a.r. Z_n.

```
    Y = max(x)
    Z = Y - log(n)
```

□

b) Voici deux scripts :

```
V = grand(1,10000,'exp',1)
W = -log(V)
s = linspace(0,10,11)
histplot(s,W)
```

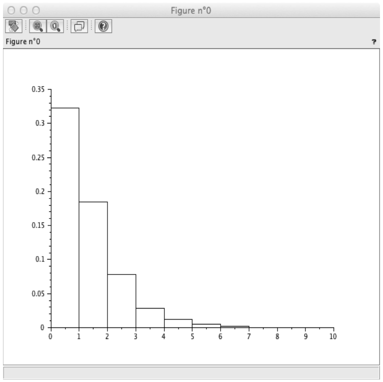
Script (1)

```
n = input('entrez la valeur de n : ')
Z = [] // la matrice-ligne Z est vide
for k = 1 :10000
    Z = [Z,f(n)]
end
s = linspace(0,10,11)
histplot(s,Z)
```

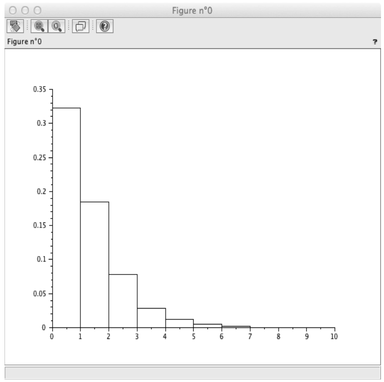
Script (2)

Chacun des scripts simule 10000 variables indépendantes, regroupe les valeurs renvoyées en 10 classes qui sont les intervalles $[0,1]$, $]1,2]$, $]2,3]$, ..., $]9,10]$ et trace l'histogramme correspondant (la largeur de chaque rectangle est égale à 1 et leur hauteur est proportionnelle à l'effectif de chaque classe).

Le script (1) dans lequel les variables aléatoires suivent la loi de Gumbel (loi suivie par W), renvoie l'histogramme (1) ci-dessous, alors que le script (2) dans lequel les variables aléatoires suivent la même loi que Z_n, renvoie l'histogramme (2) ci-dessous, pour lequel on a choisi $n = 1000$.



Histogramme (1)



Histogramme (2) pour $n = 1000$

Quelle conjecture peut-on émettre quant au comportement de la suite des v.a.r. (Z_n) ?

Démonstration.
Commentons tout d'abord le script et l'histogramme (1).

- Les lignes 1 et 2 permettent d'obtenir des valeurs $(w_1, \dots, w_{10000})$ qui correspondent à l'observation d'un 10000-échantillon $(W_1, \dots, W_{10000})$ de la v.a.r. W qui suit la loi de Gumbel. (les v.a.r. W_i sont indépendantes et ont même loi que W)
- Les lignes 3 et 4 ont pour but de permettre de visualiser la répartition des 10000 valeurs $(w_1, \dots, w_{10000})$ à l'aide d'un histogramme des fréquences :
  - × l'instruction `linspace(0, 10, 11)` crée la matrice `[0, 1, 2, ..., 10]`.
  - × l'instruction `histplot` crée les classes : $[0, 1]$, $]1, 2]$, …, $]9, 10]$.
    Elle permet aussi de récupérer l'effectif de chaque classe (*i.e.* le nombre de w_i dans chaque classe) et trace l'histogramme (1).
- Considérons par exemple la classe définie par l'intervalle $]2, 3]$.
  La loi faible des grands nombres (LfGN) permet d'affirmer :

$$\text{fréquence de la classe }]2,3] = \frac{\text{effectif de la classe }]2,3]}{\text{taille de l'observation}} \ \simeq \ \mathbb{P}([2 < W \leqslant 3])$$

  Ici, on réalise bien un grand nombre d'observations ($N = 10000$) ce qui justifie cette formule. Ainsi, l'aire de la barre qui s'appuie sur l'intervalle $]2, 3]$ est donc une approximation de $\mathbb{P}([2 < W \leqslant 3]) = F_W(3) - F_W(2)$.

Commentons maintenant l'histogramme (2).

- Les lignes 3, 4, et 5 permettent d'obtenir les valeurs $(u_1, \dots, u_{10000})$ qui correspondent à l'observation d'un 10000-échantillon $(U_1, \dots, U_{10000})$ de la variable Z_n (pour $n = 1000$). (les U_i sont indépendantes et ont même loi que Z_n)
- On trace alors l'histogramme de répartition de ces valeurs. Pour les raisons évoquées ci-dessus, l'aire de la barre du graphique (2) est une valeur approchée de :

$$\mathbb{P}([2 < Z_n \leqslant 3]) = F_{Z_n}(3) - F_{Z_n}(2)$$

Or, on constate que l'histogramme (2) est similaire à l'histogramme (1).
Cela signifie que les aires des barres de chacun de ces deux graphiques sont très proches. Ainsi :

$$F_{Z_n}(3) - F_{Z_n}(2) \ \simeq \ F_W(3) - F_W(2)$$

En considérant la première classe, on observe que : $F_{Z_n}(1) \ \simeq \ F_W(1)$.
On obtient alors, en considérant successivement toutes les classes :

$$\forall i \in [\![1, 10]\!], \ F_{Z_n}(i) \ \simeq \ F_W(i)$$

Les fonctions de répartition F_{Z_n} et F_W coïncident en ces 10 points. En considérant des classes définies par d'autres points, on observerait que les fonctions coïncident en ces nouveaux points. Ainsi, lorsque $n = 1000$, les fonctions de répartition des v.a.r. W et Z_n sont très proches.

$$\boxed{\text{On conjecture que la suite de v.a.r. } (Z_n) \text{ converge en loi vers la v.a.r. } W.}$$

Commentaire

- Ces deux histogrammes sont normalisés. De ce fait, ce n'est pas l'effectif de la classe qui est affiché en ordonnée mais un nombre qui, une fois multiplié par la largeur de la barre, fournit la fréquence de la classe. Autrement dit, dans un tel histogramme, la fréquence d'une classe c'est l'aire de la barre correspondante.
  Ici, chaque barre est de largeur 1. Ce sont donc les fréquences de chaque classe que l'on peut lire en ordonnée. Il ne faut pas oublier de prendre en compte ce coefficient multiplicatif lorsque l'on considère un nombre de barres plus grand (et donc des largeurs de barres différentes).
- Dans la démonstration, on a utilisé la loi faible des grands nombres (LfGN) afin de faire le lien entre fréquence de la classe $]2, 3]$ et probabilité $\mathbb{P}([2 < W \leqslant 3])$. Établissons ce lien de manière plus précise.
  Pour ce faire, on introduit la v.a.r. T suivante.

$$\begin{array}{rccl} T & : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & & \omega & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } W(\omega) \in \,]2, 3] \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array}$$

  Le N-échantillon d'observations $(w_1, \dots, w_N)$ (où N est un grand nombre) de la v.a.r. W fournit un N-échantillon d'observations $(t_1, \dots, t_N)$ de la v.a.r. T.
  La LfGN stipule :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} t_i \ \simeq \ \mathbb{E}(T)$$

  Or T est une v.a.r. finie qui admet pour espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &= 1 \times \mathbb{P}([2 < W \leqslant 3]) + \cancel{0 \times \mathbb{P}([2 < W \leqslant 3])} \\ &= \mathbb{P}([2 < W \leqslant 3]) \ = \ F_W(3) - F_W(2) \end{aligned}$$

  Par ailleurs, $\sum\limits_{i=1}^{N} t_i$ permet de compter le nombre d'observations qui appartiennent à la classe $]2, 3]$ (*i.e.* l'effectif de la classe $]2, 3]$).
  Ainsi, $\frac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{N} t_i$ est la fréquence de cette classe. Celle-ci est représentée graphiquement par la troisième barre de l'histogramme (1). D'après ce qui précède, l'aire de cette barre est une valeur approchée de $\mathbb{P}([2 < W \leqslant 3])$.

□

6. On note F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n.

a) Justifier que, pour tout réel x, on a : $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} F_{Z_n}(x) & = & \mathbb{P}([Z_n \leqslant x]) \\ & = & \mathbb{P}([Y_n - \ln(n) \leqslant x]) \\ & = & \mathbb{P}([Y_n \leqslant x + \ln(n)]) \\ & = & F_{Y_n}(x + \ln(n)) \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))}$$

□

b) Déterminer explicitement $F_{Z_n}(x)$.

Démonstration.

- Déterminons tout d'abord $Z_n(\Omega)$.
  On a vu précédemment : $Y_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Comme } Z_n = Y_n - \ln(n), \text{ on en déduit que } Z_n(\Omega) \subset [-\ln(n), +\infty[}$$

Déterminons F_{Z_n}.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $x < -\ln(n)$: alors $[Z_n \leqslant x] = \varnothing$. Ainsi :

$$F_{Z_n}(x) = \mathbb{P}([Z_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

- Si $x \geqslant -\ln(n)$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_{Z_n}(x) & = & F_{Y_n}(x + \ln(n)) & \\ & = & \left(1 - \mathrm{e}^{-(x+\ln(n))}\right)^n & \textit{(car } x + \ln(n) \geqslant 0 \textit{ et par définition de } F_{Y_n}\textit{)} \\ & = & \left(1 - \mathrm{e}^{-x-\ln(n)}\right)^n & \\ & = & \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{e}^{-\ln(n)}\right)^n & \\ & = & \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\ \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln(n)}}\right)^n & \\ & = & \left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n & \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln(n) \\ \left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n & \text{si } x \geqslant -\ln(n) \end{cases}}$$

□

c) Montrer que, pour tout réel x, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) = -\mathrm{e}^{-x}$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n} = 0$, on a l'équivalent suivant :

$$\ln\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}$$

On obtient alors :

$$n\ln\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\cancel{n}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\cancel{n}} = -\mathrm{e}^{-x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\mathrm{e}^{-x}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) = -\mathrm{e}^{-x}.}$$

□

d) Démontrer le résultat conjecturé à la question ***5.b)***.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer que la suite (Z_n) converge en loi vers la v.a.r. W. Autrement dit, il faut démontrer qu'en tout point de continuité de F_W, *i.e.* pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = F_W(x)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- D'après la question ***6.c)***, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) = -\mathrm{e}^{-x}$.
  La fonction $u \mapsto \exp(u)$ étant continue sur $\mathbb{R}$, on a, par composition de limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\ln\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)\right) = \exp\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}}$$

- De plus, comme le réel x est fixé et que $-\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ x \geqslant -\ln(n)$$

  Considérons maintenant $n \geqslant n_0$ (ce qui est autorisé car on cherche une limite quand n tend vers $+\infty$). On a alors :

$$F_{Z_n}(x) = \left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$$

  On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = F_W(x)$$

$$\boxed{\text{La suite de v.a.r. } (Z_n) \text{ converge en loi vers la v.a.r. } W.}$$

□

Problème

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3, et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.
Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est à dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
- Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant n. D'après le premier des deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$.

1. Donner la loi de X_1, ainsi que l'espérance $\mathbb{E}(X_1)$ de la variable X_1.

Démonstration.

- À l'instant 0, le mobile se trouve sur le sommet 1.
  Il peut alors se déplacer sur les sommets 2, 3 et 4.

$$\boxed{X_1(\Omega) = \{2, 3, 4\}}$$

- De plus, ce choix se fait de manière équiprobable.
  Ainsi : $\mathbb{P}([X = 2]) = \mathbb{P}([X = 3]) = \mathbb{P}([X = 4]) = \dfrac{1}{3}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![2, 4]\!]).}$$

- La v.a.r. X_1 est finie donc admet une espérance. De plus :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X_1) & = & \sum\limits_{k \in X_1(\Omega)} k \ \mathbb{P}([X_1 = k]) \\ & = & 2 \ \mathbb{P}([X_1 = 2]) + 3 \ \mathbb{P}([X_1 = 3]) + 4 \ \mathbb{P}([X_1 = 4]) \\ & = & \dfrac{1}{3} \ (2 + 3 + 4) \ = \ \dfrac{9}{3} \ = \ 3 \end{array}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X_1 \text{ admet une espérance donnée par : } \mathbb{E}(X_1) = 3.}$$

Commentaire

- Rappelons que si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et $a < b$, la v.a.r. X suit **la loi uniforme** sur $[\![a, b]\!]$ si :

a) $X(\Omega) = [\![a, b]\!]$ ***b)*** $\forall k \in [\![a, b]\!], \ \mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{1}{b - a + 1}$

- La v.a.r. X admet alors une espérance et une variance données par :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{a + b}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{(b - a)(b - a + 2)}{12}}$$

- Ici, $a = 2$ et $b = 4$. On retrouve bien : $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{2 + 4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$.

□

On admet pour la suite que la loi de X_2 est donnée par :

$$\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}([X_2 = 2]) = \mathbb{P}([X_2 = 3]) = \mathbb{P}([X_2 = 4]) = \frac{2}{9}$$

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, donner, en justifiant, l'ensemble des valeurs prises par X_n.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \geqslant 2,\ \mathcal{P}(n) \quad$ où $\quad \mathcal{P}(n) : X_n(\Omega) = [\![1, 4]\!]$.

- **Initialisation** :
D'après la question précédente, $X_1(\Omega) = [\![2, 4]\!]$.
Trois cas se présentent alors pour le mobile à l'instant 1 :
– s'il est en position 2 : il peut se retrouver en position 1, 3 ou 4 à l'instant 2.
– s'il est en position 3 : il peut se retrouver en position 1, 2 ou 4 à l'instant 2.
– s'il est en position 4 : il peut se retrouver en position 1, 2 ou 3 à l'instant 2.
Toutes ces positions étant possibles, on obtient :
$$X_2(\Omega) = \{1, 3, 4\} \cup \{1, 2, 4\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$$
D'où $\mathcal{P}(2)$.
- **Hérédité** : soit $n \geqslant 2$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $X_{n+1}(\Omega) = [\![1, 4]\!]$).
D'après l'hypothèse de récurrence, $X_n(\Omega) = [\![1, 4]\!]$.
En procédant, comme dans l'étape d'initialisation, par disjonction de cas, on obtient :
$$X_{n+1}(\Omega) = \{2, 3, 4\} \cup \{1, 3, 4\} \cup \{1, 2, 4\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$$
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \geqslant 2,\ \mathcal{P}(n)}$$

Commentaire

- Afin de déterminer formellement l'ensemble image $X_n(\Omega)$ d'une v.a.r. indicée par un entier n, il est classique de procéder à une récurrence. C'est une manière rigoureuse de présenter les choses et il faut y penser lorsque le résultat est donné dans l'énoncé.
- Ici, la question n'est pas : « Démontrer que $X_n(\Omega) = [\![1, 4]\!]$ » mais de « donner, en justifiant », $X_n(\Omega)$. La réponse n'existant pas dans l'énoncé, donner la réponse démontre déjà un premier niveau de compréhension. Dans ce cas, une démonstration moins formelle que la récurrence est acceptable. Ici, il s'agit essentiellement de dire que les 4 sommets sont atteignables à l'instant 2 et qu'il en est donc de même aux instants suivants.

□

3. a) Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :
$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{3}\left(\mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4])\right)$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- D'après la question précédente, $X_n(\Omega) = [\![1, 4]\!]$.
On en déduit que $\Big([X_n = k]\Big)_{k \in [\![1,4]\!]}$ est un système complet d'événements.
- Ainsi, d'après la formule de probabilités totales :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) & = & \sum\limits_{k=1}^{4} \mathbb{P}([X_n = k] \cap [X_{n+1} = 1]) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{4} \mathbb{P}([X_n = k]) \times \mathbb{P}_{[X_n = k]}([X_{n+1} = 1]) & \textit{(si, pour tout } k \in [\![1,4]\!], \\ & & & \mathbb{P}([X_n = k]) \neq 0\textit{)} \end{array}$$

- Or, d'après l'énoncé, pour tout $k \in [\![1,4]\!]$:

$$\mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1}=1]) = \frac{1}{3} \text{ si } k \neq 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1}=1]) = 0$$

En effet, si l'événement $[X_n = k]$ est réalisé, c'est que le mobile se trouve en position k à l'instant n.

– Si $k \neq 1$, le mobile a alors une probabilité $\frac{1}{3}$ d'atteindre le sommet 1 à l'instant suivant.

– Si $k = 1$, le mobile se déplace et ne peut se retrouver en position 1 à l'instant suivant.

- On en déduit :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([X_{n+1}=1]) \\ = \; & \cancel{\mathbb{P}([X_n=1]) \times \mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1}=1])} + \sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}([X_n=k]) \times \mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1}=1]) \\ = \; & \sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}([X_n=k]) \times \frac{1}{3} \; = \; \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}([X_n=k]) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{P}([X_{n+1}=1]) = \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}([X_n=k])}$$

Commentaire

- Afin de pouvoir écrire $\mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1}=1])$, il faut normalement s'assurer que $\mathbb{P}([X_n=k]) \neq 0$. Ici, l'existence de $\mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1}=1])$ est justifiée par le paragraphe initial du sujet où l'on décrit la probabilité que le mobile se trouve en une certaine position à un instant connaissant sa position à l'instant précédent.
- La réponse est ici donnée dans l'énoncé. Il est donc tentant de faire de la rétro-ingénierie (partir du résultat pour essayer de trouver la démonstration). Ce n'est évidemment pas interdit mais parfois dangereux. En l'occurrence, on constate ici que $\mathbb{P}([X_n=1])$ est absent de la somme. La conclusion hâtive (et fausse si $n \geqslant 2$!) est alors de déclarer que $\Big([X_n=k] \Big)_{k \in [\![2,4]\!]}$ est un système complet d'événements.

□

b) Vérifier que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

Démonstration.

- Si $n = 0$: d'après l'énoncé, le mobile se trouve en position 1 à l'instant 0. Ainsi :

$$\mathbb{P}([X_0=1]) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X_0=2]) = \mathbb{P}([X_0=3]) = \mathbb{P}([X_0=4]) = 0$$

Ainsi : $\sum\limits_{k=2}^{4} \mathbb{P}([X_n=k]) = 0$.

Comme le mobile se déplace, il ne peut se trouver en position 1 à l'instant 1 : $\mathbb{P}([X_1=1]) = 0$.

$$\boxed{\text{La relation est vérifiée pour } n = 0.}$$

- Si $n = 1$: dans ce cas, on peut refaire la démonstration précédente avec le système complet d'événements $\Big([X_1 = k] \Big)_{k \in [\![1,4]\!]}$. La seule différence est que cette famille contient l'événement impossible $\varnothing$. D'après la formule de probabilités totales :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([X_2 = 1]) \\
= \ & \sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap [X_2 = 1]) \\
= \ & \cancel{\mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])} + \sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap [X_2 = 1]) \quad \textit{(car } [X_1 = 1] \cap [X_2 = 1] = \varnothing \textit{)} \\
= \ & \sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}_{[X_1 = k]}([X_2 = 1]) \\
= \ & \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}([X_1 = k])
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La relation est vérifiée pour } n = 1.}$$

> **Commentaire**
>
> Par définition, le système complet d'événements associé à X_1 est $\Big([X_1 = k] \Big)_{k \in [\![2,4]\!]}$. En lui adjoignant $[X_1 = 1] = \varnothing$, la famille obtenue $\Big([X_1 = k] \Big)_{k \in [\![1,4]\!]}$ est toujours un système complet d'événements. Un système complet d'événements n'est donc pas forcément une partition de l'univers Ω (les ensembles formant une partition sont tous non vides).

$\square$

c) Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4]) = 1$ et en déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}\left([X_{n+1} = 1]\right) = -\frac{1}{3} \, \mathbb{P}\left([X_n = 1]\right) + \frac{1}{3}$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La famille $\Big([X_n = k] \Big)_{k \in [\![1,4]\!]}$ est un système complet d'événements (qui contient éventuellement $\varnothing$ pour les cas $n = 0$ et $n = 1$). On en déduit :

$$\mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4]) = 1$$

- Ainsi :

$$\mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4]) = 1 - \mathbb{P}([X_n = 1])$$

  et d'après la question précédente :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}([X_1 = k]) = \frac{1}{3} \left(1 - \mathbb{P}([X_n = 1])\right)$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = -\frac{1}{3} \, \mathbb{P}([X_n = 1]) + \frac{1}{3}}$$

$\square$

d) Établir alors que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_n = 1]) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $u_n = \mathbb{P}([X_n = 1])$.
D'après la question précédente, la suite (u_n) vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -\frac{1}{3}\ u_n + \frac{1}{3}$$

Ainsi, (u_n) est arithmético-géométrique. On lui applique la méthode d'étude associée.

- L'équation de point fixe associé à la suite (u_n) est :

$$x = -\frac{1}{3}\ x + \frac{1}{3}$$

Or : $x = -\frac{1}{3}\ x + \frac{1}{3} \ \Leftrightarrow\ \frac{4}{3}\ x = \frac{1}{3} \ \Leftrightarrow\ x = \frac{\cancel{3}}{4}\ \frac{1}{\cancel{3}}$.
Ainsi, l'équation de point fixe admet pour unique solution : $\lambda = \frac{1}{4}$.

- On écrit :

$$\begin{array}{rcrcrcrl} u_{n+1} & = & -\frac{1}{3} & \times & u_n & + & \frac{1}{3} & (L_1) \\ \lambda & = & -\frac{1}{3} & \times & \lambda & + & \frac{1}{3} & (L_2) \end{array}$$

$$\text{et donc} \quad u_{n+1} - \lambda \ = \ -\frac{1}{3} \ \times \ (u_n - \lambda) \qquad (L_1)-(L_2)$$

Notons alors (v_n) la suite de terme général $v_n = u_n - \lambda$.

- La suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} v_n & = & \left(-\frac{1}{3}\right)^n \times v_0 \ = \ \left(-\frac{1}{3}\right)^n \times (u_0 - \lambda) \\ & = & \left(-\frac{1}{3}\right)^n \times \left(\mathbb{P}([X_0 = 1]) - \frac{1}{4}\right) \\ & = & \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(1 - \frac{1}{4}\right) \ = \ \frac{3}{4}\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{array}$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \ = \ v_n + \lambda \ = \ \frac{3}{4}\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\, \mathbb{P}([X_n = 1]) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n.}$$

Commentaire

La relation $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = -\frac{1}{3}\ \mathbb{P}([X_n = 1]) + \frac{1}{3}$ (question précédente) doit faire penser à une suite arithmético-géométrique. Cet aspect est mis en évidence par l'introduction de la notation $u_n = \mathbb{P}([X_n = 1])$.

□

4. a) En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_{n+1}=2]) = \frac{1}{3}\ (\mathbb{P}([X_n=1]) + \mathbb{P}([X_n=3]) + \mathbb{P}([X_n=4]))$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si $n \geqslant 1$, la famille $\Big([X_n = k]\Big)_{k\in[\![1,4]\!]}$ est un système complet d'événements (qui contient $\varnothing$ si $n = 1$). D'après la formule de probabilités totales :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([X_{n+1}=2]) \\
= \ & \sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}([X_n=k]\cap[X_{n+1}=2]) \\
= \ & \cancel{\mathbb{P}([X_n=2]\cap[X_{n+1}=2])} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{4} \mathbb{P}([X_n=k]\cap[X_{n+1}=2]) \quad \textit{(car } [X_n=2]\cap[X_{n+1}=2]=\varnothing\textit{)} \\
= \ & \sum_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{4} \mathbb{P}([X_n=k]\cap[X_{n+1}=2]) \\
= \ & \sum_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{4} \mathbb{P}([X_n=k])\times\mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1}=2]) \ = \ \frac{1}{3}\sum_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{4} \mathbb{P}([X_n=k])
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X_{n+1}=2]) = \frac{1}{3}\ (\mathbb{P}([X_n=1]) + \mathbb{P}([X_n=3]) + \mathbb{P}([X_n=4]))}$$

- Si $n = 0$, comme déjà vu :

$$\mathbb{P}([X_0=1]) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X_0=2]) = \mathbb{P}([X_0=3]) = \mathbb{P}([X_0=4]) = 0$$

et $\mathbb{P}([X_1=2]) = \mathbb{P}([X_0=1]\cap[X_1=2]) = \mathbb{P}([X_0=1])\times\mathbb{P}_{[X_0=1]}([X_1=2]) = 1\times\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

$$\boxed{\text{La relation est aussi vérifiée pour } n=0.}$$

□

b) En déduire une relation entre $\mathbb{P}([X_{n+1}=2])$ et $\mathbb{P}([X_n=2])$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Comme vu précédemment :

$$\mathbb{P}([X_n=1]) + \mathbb{P}([X_n=2]) + \mathbb{P}([X_n=3]) + \mathbb{P}([X_n=4]) = 1$$

- Ainsi :

$$\mathbb{P}([X_n=1]) + \mathbb{P}([X_n=3]) + \mathbb{P}([X_n=4]) = 1 - \mathbb{P}([X_n=2])$$

et d'après la question précédente :

$$\mathbb{P}([X_{n+1}=2]) = \frac{1}{3}\sum_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{4} \mathbb{P}([X_n=k]) = \frac{1}{3}\ (1-\mathbb{P}([X_n=2])) = -\frac{1}{3}\ \mathbb{P}([X_n=2]) + \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_{n+1}=2]) = -\frac{1}{3}\ \mathbb{P}([X_n=2]) + \frac{1}{3}}$$

□

c) Montrer enfin que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X_n = 2]) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $r_n = \mathbb{P}([X_n = 2])$.
D'après la question précédente, la suite (r_n) vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ r_{n+1} = -\frac{1}{3}\, r_n + \frac{1}{3}$$

Ainsi, (r_n) est arithmético-géométrique.
De plus, la relation vérifiée est la même que celle vérifiée pour (u_n).

- En appliquant la même méthode d'étude qu'en ***3.d)***, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \times (r_0 - \lambda) = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \times \left(\mathbb{P}([X_0 = 2]) - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

  où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a posé $w_n = r_n - \lambda$.
- On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$r_n = w_n + \lambda = -\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_n = 2]) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

Commentaire

- Les suites (u_n) et (r_n) vérifiant la même relation de récurrence, il n'y a pas lieu de réécrire exactement la même démonstration.
- De manière générale, si un sujet demande de réaliser, à détails près, deux fois la même démonstration, il faut détailler précisément la méthode la première fois puis expliquer brièvement ce qui change dans la deuxième démonstration.

□

5. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 3]) = -\frac{1}{3}\, \mathbb{P}([X_n = 3]) + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X_{n+1} = 4]) = -\frac{1}{3}\, \mathbb{P}([X_n = 4]) + \frac{1}{3}$$

En déduire sans calcul que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_n = 3]) = \mathbb{P}([X_n = 4]) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

Démonstration.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $s_n = \mathbb{P}([X_n = 3])$ et $t_n = \mathbb{P}([X_n = 4])$.
  Les suites (s_n) et (t_n) vérifient la même relation de récurrence que la suite (r_n).
  De plus, on a : $r_0 = s_0 = t_0 = 0$.
- On en déduit que ces suites sont égales.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X_n = 2]) = \mathbb{P}([X_n = 3]) = \mathbb{P}([X_n = 4]) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

□

6. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de la variable aléatoire X_n.

Démonstration.

- La v.a.r. X_n est finie. Elle admet donc une espérance.
- De plus, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(X_n) \\
= \ & \sum_{k \in X_n(\Omega)} k \times \mathbb{P}([X_n = k]) \\
= \ & \sum_{k=1}^{4} k \times \mathbb{P}([X_n = k]) \\
= \ & 1 \times \mathbb{P}([X_n = 1]) + 2 \times \mathbb{P}([X_n = 2]) + 3 \times \mathbb{P}([X_n = 3]) + 4 \times \mathbb{P}([X_n = 4]) \qquad (\star) \\
= \ & \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) + 2 \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) + 3 \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) + 4 \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) \\
= \ & \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) + (2+3+4) \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) \\
= \ & \left(\frac{1}{4} + \frac{9}{4}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{9}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{10}{4} - \frac{6}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

- Revenons au point $(\star)$. Rigoureusement, le passage de la deuxième égalité à la troisième n'est valide que lorsque $X_n(\Omega) = [\![1, 4]\!]$, autrement dit pour $n \geqslant 2$.
  - Pour $n = 0$, $X_0(\Omega) = \{1\}$.
    Cependant, ajouter $k \times \mathbb{P}([X_n = k])$ pour tout $k \in [\![2, 4]\!]$ n'a pas d'impact car toutes ces probabilités sont nulles.
  - Pour $n = 1$, $X_1(\Omega) = \{2, 3, 4\}$.
    Cependant, ajouter $1 \times \mathbb{P}([X_n = 1])$ n'a pas d'impact car cette probabilité est nulle. □

Partie 2 : calcul des puissances d'une matrice A

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la matrice-ligne de $\mathscr{M}_{1,4}(\mathbb{R})$:

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 1]) & \mathbb{P}([X_n = 2]) & \mathbb{P}([X_n = 3]) & \mathbb{P}([X_n = 4]) \end{pmatrix}$$

7. a) Montrer (grâce à certains résultats de la partie 1) que, si l'on pose $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n\ A$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Le calcul $U_n\ A$ produit une matrice ligne à 4 colonnes.

- Le coefficient de la première colonne est :

$$\frac{1}{3}\left(\mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4])\right)$$

  D'après la question ***3.a)***, ce coefficient est : $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1])$.

- Le coefficient de la deuxième colonne est :
$$\frac{1}{3}\ (\mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4]))$$
D'après la question ***4.a)***, ce coefficient est : $\mathbb{P}([X_{n+1} = 2])$.
- Les coefficients des troisième et quatrième colonnes sont respectivement :
$$\frac{1}{3}\ (\mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 4]))$$
$$\frac{1}{3}\ (\mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]))$$
En procédant de la même manière qu'aux questions ***3.a)*** et ***4.a)*** (on applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\Big([X_n = k]\Big)_{k\in[\![1,4]\!]}$ pour $n \geqslant 1$ et on vérifie la formule pour $n = 0$), on reconnaît les formules pour :
$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 3]) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X_{n+1} = 4])$$

$$\boxed{\text{Finalement, on obtient bien : } \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n\ A.}$$
□

b) Établir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = U_0\ A^n$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : U_n = U_0\ A^n$.

▸ **Initialisation** :
Il suffit de remarquer : $U_0\ A^0 = U_0\ I = U_0$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $U_{n+1} = U_0\ A^{n+1}$).
$$\begin{array}{rcll} U_{n+1} & = & U_n\ A & \textit{(par définition)} \\ & = & U_0\ A^n\ A & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & U_0\ A^{n+1} & \end{array}$$
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n).}$$
□

c) En déduire la première ligne de A^n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
- On récupère la première ligne de la matrice A^n en la multipliant, à gauche, par $(1\quad 0\quad 0\quad 0)$.
- Or : $U_0 = (\mathbb{P}([X_0 = 1])\quad \mathbb{P}([X_0 = 2])\quad \mathbb{P}([X_0 = 3])\quad \mathbb{P}([X_0 = 4])) = (1\quad 0\quad 0\quad 0)$.
- D'après la question précédente, $U_n = U_0\ A^n$.
Ainsi, la première ligne de A^n n'est autre que U_n.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La première ligne de } A^n \text{ est} \\ U_n = (\mathbb{P}([X_n = 1])\quad \mathbb{P}([X_n = 2])\quad \mathbb{P}([X_n = 3])\quad \mathbb{P}([X_n = 4])), \text{ à savoir :} \\ \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right).\end{array}}$$
□

8. Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres lignes de la matrice A^n, puis écrire ces trois lignes.

Démonstration.

- On récupère la deuxième ligne de la matrice A^n en la multipliant, à gauche, par $(0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$. Il faut donc considérer :

$$U_0 = (\mathbb{P}([X_0 = 1]) \quad \mathbb{P}([X_0 = 2]) \quad \mathbb{P}([X_0 = 3]) \quad \mathbb{P}([X_0 = 4])) = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$$

ce qui signifie que $\mathbb{P}([X_0 = 2]) = 1$.

En plaçant le mobile initialement en position 2, la multiplication $U_0\ A^n$ permet de récupérer la deuxième ligne de A^n.

De même, on récupère la troisième ligne de A^n en considérant $(0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$, ce qui correspond à placer initialement le mobile en position 3.

Enfin, on récupère la quatrième ligne de A^n en considérant $(0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$, ce qui correspond à placer initialement le mobile en position 4.

- Ces choix modifient les calculs faits en question ***3.d)***, ***4.c)*** et ***5***.
Plus précisément, cela modifie les valeurs initiales des suites (u_n), (r_n), (s_n) et (t_n).
Par exemple, pour le choix $U_0 = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$, on obtient :

$$u_0 = 0 \qquad r_0 = 1 \qquad s_0 = 0 \qquad t_0 = 0$$

Chacune de ces suites vérifie la même relation de récurrence.
Seule la condition initiale (premier terme nul ou égal à 1) les différencie.

  - La question ***3.d)*** nous fournit le terme général pour une valeur initiale nulle.
  - La question ***4.c)*** nous fournit le terme général pour une condition initiale égale à 1.

La deuxième ligne de A^n est : $$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

La troisième ligne de A^n est : $$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

La quatrième ligne de A^n est : $$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

□

Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A

On considère les matrices I et J suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Déterminer les réels a et b tels que $A = aI + bJ$.

Démonstration.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
On a alors :

$$a\ I + b\ J = A \iff \begin{pmatrix} a+b & b & b & b \\ b & a+b & b & b \\ b & b & a+b & b \\ b & b & b & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} a & + & b & = & 0 \\ & & b & = & \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcl} a & & & = & -\frac{1}{3} \\ & & b & = & \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$\boxed{A = -\frac{1}{3}\ I + \frac{1}{3}\ J}$$

Commentaire

- Il est assez classique (c'est le cas ici) que les premières questions d'une nouvelle partie soient très abordables. Il est conseillé de repérer ces questions au début de l'épreuve en passant quelques minutes à cocher les questions qui semblent les plus simples.
  On peut citer parmi celles-ci (liste non exhaustive) :
  – l'étude du problème pour des petites valeurs d'un paramètre considéré (question ***1.***),
  – du calcul (questions ***7.a)***, ***9.*** et ***10.a)***), des applications numériques, vérifier qu'une relation est vraie pour certaines valeurs d'un paramètre (question ***3.b)***),
  – les questions dont l'énoncé souffle la méthode à utiliser (questions ***3.a)*** et ***10.b)***),
  – les méthodes / questions classiques (questions ***3.d)*** et ***7.b)***).

  L'objectif est de ne pas sortir de la salle sans avoir traité ces questions. Il faut donc gérer son temps en conséquence.
- On retiendra que les questions d'un énoncé ne sont pas rangées dans un ordre croissant de difficulté. Il ne faut donc pas se décourager si on ne sait pas traiter une ou plusieurs questions d'affilée. Il faut au contraire s'accrocher : des questions plus simples apparaîtront.

□

10. a) Calculer J^2 puis établir que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $J^k = 4^{k-1} J$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\boxed{J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot J}$$

- Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k)$: $J^k = 4^{k-1}\ J$.
  - ▸ **Initialisation** :
    D'une part : $J^1 = J$.
    D'autre part : $4^{1-1}\ J = 4^0\ J = J$.
    D'où $\mathcal{P}(1)$.
  - ▸ **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}^*$.
    Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* $J^{k+1} = 4^k\ J$).

$$\begin{aligned} J^{k+1} &= J^k\ J \\ &= 4^{k-1}\ J\ J && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= 4^{k-1}\ J^2 \\ &= 4^{k-1}\ (4\ J) \ = \ 4^k\ J \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(k).}$$

□

b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire, pour tout entier n non nul, l'expression de A^n comme combinaison linéaire de I et J.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Les matrices $-\frac{1}{3}\ I$ et $\frac{1}{3}\ J$ commutent puisque I commute avec toute matrice carrée de même ordre.
- Par la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{3}\ I + \frac{1}{3}\ J\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{3}\ I\right)^{n-k} \left(\frac{1}{3}\ J\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-k} I^{n-k} \left(\frac{1}{3}\right)^k J^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{3}\right)^k I^{n-k}\ J^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \left(\frac{1}{3}\right)^{n} J^k && \textit{(}I^{n-k}\ J^k = I\ J^k = J^k\textit{)} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\ J^k \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\binom{n}{0}(-1)^n J^0 \ + \ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\ J^k\right) && \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 0\textit{)} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left((-1)^n\ I \ + \ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\ 4^{k-1}\ J\right) && \textit{(car } J^k = 4^{k-1}\ J \textit{ pour } k \geqslant 1\textit{)} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left((-1)^n\ I \ + \ \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\ 4^k\right)\ J\right) \end{aligned}$$

- Or :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\ 4^k &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\ 4^k\right) - \binom{n}{0} (-1)^n\ 4^0 \\ &= (-1+4)^n - (-1)^n \ = \ 3^n - (-1)^n \end{aligned}$$

- En réinjectant, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{3}\ I + \frac{1}{3}\ J\right)^n &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left((-1)^n\ I \ + \ \frac{1}{4}\ (3^n - (-1)^n)\ J\right) \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right)^n\ I + \frac{1}{4}\ \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)\ J \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n\ I + \frac{1}{4}\ \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)\ J}$$

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

(la deuxième somme est nulle si $p = n$)
où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices.

- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 0$.
L'argument $n \geqslant 0$ est donc suffisant pour découper la somme. On traite le cas $n \geqslant 1$ dans cette question pour s'assurer que la deuxième somme ne se fait pas sur un ensemble d'indices vide. Ceci permet d'assurer que k est et donc d'utiliser l'égalité : $J^k = 4^{k-1}\ J$.

□

c) Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $n = 0$.

Démonstration.

- D'une part : $A^0 = I$.
- D'autre part : $\left(-\frac{1}{3}\right)^0\ I + \frac{1}{4}\ \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^0\right)\ J \ = \ I + \frac{1}{4}(1-1)\ J \ = \ I$.

$$\boxed{\text{La relation précédente est valable pour } n = 0.}$$

□

Partie 4 : informatique

11. a) Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il affiche les 100 premières positions autres que celle d'origine, du mobile dont le voyage est étudié dans ce problème, ainsi que le nombre n de fois où il est revenu sur le sommet numéroté 1 au cours de ses 100 premiers déplacements (on pourra utiliser la commande `sum`).

```
A = [---] / 3
x = grand(100,'markov',A,1)
n = ---
disp(x)
disp(n)
```

Démonstration.

- On commence par écrire la matrice A.

```
1  A = [0, 1, 1, 1; 1, 0, 1, 1; 1, 1, 0, 1; 1, 1, 1, 0] / 3
```

- La commande `grand(100,'markov',A,1)` renvoie une trajectoire possible du mobile de taille 100. C'est une matrice ligne $[x_1, \ldots, x_{100}]$ où les éléments $x_1 \in X_1(\Omega)$, …, $x_{100} \in X_{100}(\Omega)$ sont des sommets visités par le mobile dans un parcours de taille 100.
  Cette matrice est stockée dans la variable `x`.
- On complète le deuxième trou du programme par l'instruction :

```
3  n = sum(x == 1)
```

  Détaillons brièvement :
  – l'instruction `x == 1` est un test d'égalité effectué terme à terme.
    Plus précisément, cette commande permet le calcul de la matrice ligne de taille 100 correspondant à :
    $$[x_1 == 1, \ldots, x_{100} == 1]$$
    (on teste si chaque élément de la matrice `x` *vaut* 1*)*
    Le résultat obtenu est une matrice ligne de booléens.
  – la commande `sum` permet de sommer tous les éléments de la matrice ligne de booléens précédents. Lors de cette somme, les booléens `True` sont convertis en l'entier 1 et les booléens `False` sont convertis en l'entier 0. Ainsi, `sum(x == 1)` permet de compter le nombre de coefficients qui sont égaux à 1 de la matrice `x`.

Commentaire

- Un tel niveau d'explication n'est pas attendu aux concours : l'écriture des lignes manquantes démontre la compréhension de toutes les commandes en question.
  On décrit ici de manière précise les instructions afin d'aider le lecteur un peu moins habile en **Scilab**.
- La ligne 3 est une manière de procéder spécifique à **Scilab**.
  On tire notamment profit de tous les outils prédéfinis du langage permettant la manipulation simple et efficace (en temps de calcul) de matrices, qui, rappelons-le, est l'objet de base de ce langage.
- Cependant, on pouvait opter pour une version plus générale, pouvant s'adapter plus facilement aux autres langages. Pour ce faire, on remplace la ligne 3 par les instructions suivantes :

```
3  n = 0
4  for i = 1:100
5      if x(i) == 1 then
6          n = n+1
7      end
8  end
```

  Ces instructions permettent, à l'aide d'une structure itérative (boucle `for`) de tester un à un les éléments de `x`. Si le coefficient testé vaut 1, on incrémente un compteur `n` initialisé à 0. Ainsi, on compte le nombre d'éléments de `x` qui sont égaux à 1.
  Cette version, bien que moins idiomatique, est évidemment acceptée aux concours.

□

9782340-026636_001_784.indd 343 30/07/2018 09:52

b) Après avoir exécuté cinq fois ce script, les réponses concernant le nombre de fois où le mobile est revenu sur le sommet 1 sont : $n = 23$, $n = 28$, $n = 23$, $n = 25$, $n = 26$.
En quoi est-ce normal ?

Démonstration.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons Y_n la v.a.r. définie par :

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } X_n = 1 \\ 0 & \text{si } X_n \neq 1 \end{cases}$$

La v.a.r. Y_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_n = \mathbb{P}([X_n = 1]) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

- On remarque alors :
  - pour $n = 1$, $p_0 = 0$,
  - pour $n \geqslant 2$, $p_n \simeq \dfrac{1}{4}$. En effet :

$$\begin{array}{ccccccccc} \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 & = & \dfrac{3}{4}\,\dfrac{1}{3^2} & = & \dfrac{1}{12} & \simeq & \dfrac{1}{10} & = & 0,1 \\ \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3 & = & \dfrac{3}{4}\,\dfrac{-1}{3^3} & = & -\dfrac{1}{36} & \simeq & -\dfrac{3}{100} & = & -0,03 \\ \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^4 & = & \dfrac{3}{4}\,\dfrac{1}{3^4} & = & -\dfrac{1}{108} & \simeq & \dfrac{1}{100} & = & 0,01 \end{array}$$

  et pour $n \geqslant 5$, $\left|\dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right| = \dfrac{1}{4\ 3^{n-1}} < 0,01$.

  Ainsi, pour $n \geqslant 2$, on peut considérer que $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{4}\right)$ et que $(Y_2, \dots, Y_{100})$ est un 99-échantillon d'une v.a.r. Y qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{4}$.

- La matrice obtenue par l'instruction `x == 1` est une simulation informatique de cet échantillon. Autrement dit, cette matrice s'écrit $[y_2, \dots, y_{100}]$ où, pour tout $i \in [\![2, 100]\!]$, $y_i \in Y_i(\Omega)$.

  En vertu de la loi (faible) des grands nombres :

$$\frac{1}{99}\sum_{k=2}^{100} y_k \simeq \mathbb{E}(Y) = \mathbb{P}([Y = 1]) = \frac{1}{4} \quad \text{et ainsi} \quad \sum_{k=2}^{100} y_k \simeq \frac{99}{4} \simeq 25$$

- On conclut en remarquant que $\sum\limits_{k=1}^{100} y_k = \sum\limits_{k=2}^{100} y_k$ car $y_1 = 0$ (Y_1 est constante égale à 0).

$\boxed{\text{Il est donc normal que le mobile revienne environ 25 fois en position 1.}}$

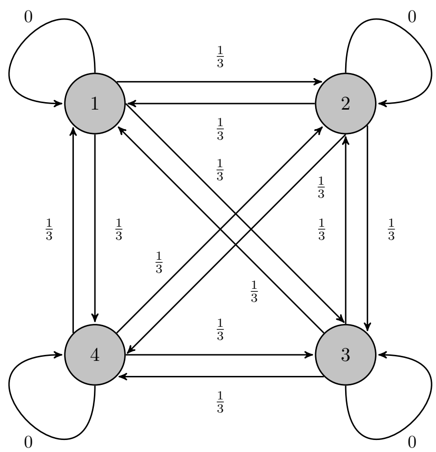
Commentaire

- Nous avons essayé ici de formaliser la réponse à cette question. Cependant, la formulation de la question (« En quoi est-ce normal ? ») laisse penser qu'une démonstration moins formelle serait acceptée.
- L'idée est alors de dire qu'à chaque étape (hormis la 1ère), le mobile a environ 1 chance sur 4 de se retrouver en position 1. Donc en 99 étapes, il est passé par la position 1 environ $99 \times \dfrac{1}{4} \simeq 25$ fois.

□

Commentaire

- Le problème traite de l'évolution d'une grandeur aléatoire qui varie dans le temps discret. Plus précisément, il s'agit ici de la position du mobile (notée X_n à l'instant n) sur les sommets d'un carré. Cette évolution se fait selon un schéma classique en mathématiques : le futur (*i.e.* la valeur de X_{n+1}, position du mobile à l'instant $n+1$) ne dépend du passé (position du mobile aux instants précédents) que par le présent (*i.e.* la valeur de X_n, position du mobile à l'instant n). On dit alors que (X_n) est une **chaîne de Markov**.
- L'évolution de la position de l'instant n à l'instant $n+1$ peut être représenté par le schéma suivant.



- On obtient un graphe possédant un nombre d'états fini (en l'occurrence 4).
  On dit que (X_n) est une chaîne de Markov **à espace d'états fini**.
- L'étiquette d'un arc est la probabilité pour le mobile de passer de la position de départ à la position d'arrivée de l'instant n à l'instant $n+1$. Autrement dit, l'étiquette d'un arc menant de la position i à la position j a pour valeur : $\mathbb{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1}=j])$.
  Ces étiquettes ne dépendent pas de n.
  On dit que la chaîne de Markov est **homogène**.
- Le contenu de ce schéma peut être résumé par la matrice A définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,4]\!]^2,\ A_{i,j} = \mathbb{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1}=j])$$

  Cette matrice est appelée **matrice de transition**. Ici :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

  On reconnaît la matrice A de l'énoncé.
- Tout ce vocabulaire n'est pas à proprement parler au programme (le terme « chaîne de Markov » est seulement présent dans la partie informatique). Cependant, il arrive fréquemment qu'un sujet propose l'étude d'une chaîne de Markov. Le problème était, de ce point de vue, très classique.

EML 2017 : le sujet

Exercice 1

On considère la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0,+\infty[$, par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < \mathrm{e} < 2,8 \qquad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7.$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. ***a)*** Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.

2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

4. ***a)*** Étudier les variations de la fonction $u : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) - x \end{array}$

b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Partie II : Étude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

5. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

6. ***a)*** Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : \begin{array}{ccc} [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.

8. Écrire un programme en **Scilab** qui, étant donné un réel A, renvoie un entier naturel N tel que $u_N \geqslant A$.

9. ***a)*** Démontrer : $\forall x \in [2,+\infty[,\ 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-\mathrm{e}}{2} u_n$.

c) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

Partie III : Étude d'intégrales généralisées

10. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 f(x)\ dx$ converge et calculer cette intégrale.

11. L'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)\ dx$ converge-t-elle ?

12. Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\ dx$ converge. On pourra utiliser le résultat de la question ***9.a)***.

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère la fonction $F :]1,+\infty[^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]1,+\infty[^2$, définie, pour tout (x,y) de $]1,+\infty[^2$, par :

$$F(x,y) = f(x) + f(y) - xy.$$

13. Montrer que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (α,α), le réel α ayant été défini à la question **4.** de la partie **I**.

14. ***a)*** Déterminer la matrice hessienne de F en (α,α).

b) La fonction F admet-elle un extremum local en (α,α) ? Si oui, s'agit-il d'un maximum local ou s'agit-il d'un minimum local ?

Exercice 2

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E. Pour tout polynôme P de E, on note indifféremment P ou $P(X)$.
Pour tout $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$, la dérivée P' du polynôme $P = \alpha+\beta X+\gamma X^2$ est le polynôme $P' = \beta+2\gamma X$, et la dérivée seconde P'' de P est le polynôme $P'' = 2\gamma$.
On note, pour tout polynôme P de E :

$$a(P) = P - XP', \quad b(P) = P - P', \quad c(P) = 2XP - (X^2-1)\ P'$$

Par exemple : $a(X^2) = X^2 - X(2X) = -X^2$.
Enfin, on note $f = b \circ a - a \circ b$.

Partie I : Étude de a

1. Montrer que a est un endomorphisme de E.

2. ***a)*** Montrer que la matrice A de a dans la base $\mathscr{B}$ de E est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Déterminer le rang de la matrice A.

3. L'endomorphisme a est-il bijectif ? Déterminer $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$.
On admet, pour la suite de l'exercice, que b et c sont des endomorphismes de E.
On note B et C les matrices, dans la base $\mathscr{B}$ de E, de b et c respectivement.

Partie II : Étude de b

4. Montrer que b est bijectif et que, pour tout Q de E, on a : $b^{-1}(Q) = Q + Q' + Q''$.

5. ***a)*** Montrer que b admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci.

b) L'endomorphisme b est-il diagonalisable ?

Partie III : Étude de c

6. Montrer : $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. L'endomorphisme c est-il bijectif ?

8. ***a)*** Déterminer une matrice R, carrée d'ordre trois, inversible, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, et une matrice D, carrée d'ordre trois, diagonale, à coefficients diagonaux dans l'ordre croissant, telles que $C = RDR^{-1}$.

b) En déduire que l'endomorphisme c est diagonalisable et déterminer une base de E constituée de vecteurs propres de c.

Partie IV : Étude de f

9. Montrer : $\forall P \in E,\ f(P) = P'$.

10. En déduire : $(BA - AB)^3 = 0$.

Exercice 3

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.
On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard et on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note : B_k l'événement : « on obtient une boule bleue au $k^{\text{ème}}$ tirage »,
R_k l'événement : « on obtient une boule rouge au $k^{\text{ème}}$ tirage ».

Partie I : Simulation informatique

1. Recopier et compléter la fonction suivante afin qu'elle simule l'expérience étudiée et renvoie le nombre de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages, l'entier n étant entré en argument.

```
function s = EML(n)
    b = 1 // b désigne le nombre de boules bleues présentes dans l'urne
    r = 2 // r désigne le nombre de boules rouges présentes dans l'urne
    s = 0 // s désigne le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages
    for k = 1:n
        x = rand()
        if ... then
            ...
        else
            ...
        end
    end
endfunction
```

2. On exécute le programme suivant :

```
n = 10
m = 0
for i = 1:1000
    m = m + EML(n)
end
disp(m/1000)
```

On obtient 6.657. Comment interpréter ce résultat ?

Partie II : Rang d'apparition de la première boule bleue et rang d'apparition de la première boule rouge

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue et la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

3. ***a)*** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Y = n]) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? une variance ?

4. Déterminer la loi de Z. La v.a.r. admet-elle une espérance ? une variance ?

Partie III : Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

On définit, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si l'on obtient une boule rouge au $k^{\text{ème}}$ tirage et égale à 0 sinon.
On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges obtenues au cours des n premiers tirages.

5. Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre S_n et certaines variables aléatoires X_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

6. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.

7. ***a)*** Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).

b) En déduire la loi de X_2.

c) Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

a) Calculer $\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$.

b) Justifier : $\mathbb{P}([S_n = k]) = \dbinom{n}{k}\ \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$,

puis en déduire : $\mathbb{P}([S_n = k]) = \dfrac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$.

9. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et : $\mathbb{E}(S_n) = \dfrac{2n}{3}$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}_{[S_n = k]}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{k+2}{n+3}$.

b) En déduire : $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{\mathbb{E}(S_n) + 2}{n+3}$.

c) Déterminer alors la loi de la variable aléatoire X_{n+1}. Que remarque-t-on ?

Partie IV : Étude d'une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la proportion de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $T_n = \dfrac{S_n}{n}$.

11. Justifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\forall x < 0$, $\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 0$, et : $\forall x > 1$, $\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 1$.

12. Soit $x \in [0,1]$. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)},$$

où $\lfloor . \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

13. En déduire que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité, dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

EML 2017 : le corrigé

Exercice 1

On considère la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0,+\infty[$, par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < \mathrm{e} < 2,8 \qquad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7.$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

Démonstration.
Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont deux fois dérivables sur l'intervalle $]0,+\infty[$ en tant que fonctions usuelles.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } f \text{ est deux fois dérivable sur }]0,+\infty[\\ \text{comme somme de fonctions deux fois dérivables sur }]0,+\infty[.\end{array}}$$

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}}{x} \ \text{ et } \ f''(x) = \mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{e}}{x^2}.}$$

□

b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.

Démonstration.

- Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f''(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{\mathrm{e}}{x^2} > 0$.
  La fonction f' est donc strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
- Par ailleurs : $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}}{x} = +\infty$.
  Donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\infty$.
- De plus : $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{x} = 0$.
  Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x) = +\infty$.
- $f'(1) = \mathrm{e}^1 - \dfrac{\mathrm{e}}{1} = \cancel{\mathrm{e}} - \cancel{\mathrm{e}} = 0$.

On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f''(x)$	‖ +		+
Variations de f'	‖ $-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

□

2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.

Démonstration.
Soit $x \in]0, +\infty[$.

- La fonction f' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Ainsi :
  - $\times$ si $x \in]0, 1[$, alors $x < 1$ et $f'(x) < f'(1) = 0$.
  - $\times$ si $x > 1$, alors $f'(x) > f'(1) = 0$.

  Donc f est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
- Déterminons la limite de f en 0. Comme : $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^x = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = +\infty$.
- Déterminons alors la limite de f en $+\infty$. On écrit :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e} \ln(x) = \mathrm{e}^x \left(1 - \mathrm{e}\frac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x}\right)$$

  Par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x} = 0$.
  Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- $f(1) = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e} \ln(1) = \mathrm{e}$.

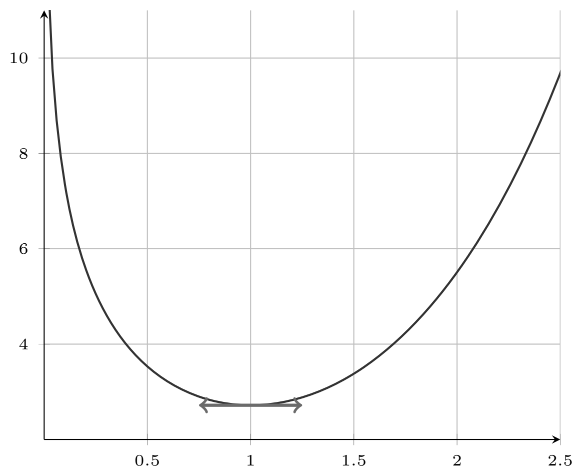
On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

$\square$

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Démonstration.



Commentaire

On s'efforcera de faire les questions de tracé de courbe.
En effet, ce type de question consiste uniquement à faire apparaître sur un graphique toutes les informations qu'on a recueillies dans les questions précédentes. D'ailleurs, il ne faut oublier de faire apparaître les tangentes horizontales et les points d'inflexion si on les a déterminés auparavant.

□

4. a) Étudier les variations de la fonction $u : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x)-x \end{array}$

Démonstration.

- La fonction f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ donc f' est dérivable sur $]0,+\infty[$.
  De plus, la fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Ainsi, la fonction u est dérivable sur $]0,+\infty[$ car elle est la différence de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.
- Pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$u'(x) = f''(x) - 1 = \mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{e}}{x^2} - 1 = \frac{x^2\ \mathrm{e}^x + \mathrm{e} - x^2}{x^2} = \frac{x^2\ (\mathrm{e}^x - 1) + \mathrm{e}}{x^2}$$

  Comme $x^2 > 0$, la quantité $u'(x)$ est du signe de $x^2\ (\mathrm{e}^x - 1) + \mathrm{e}$.
  Or, comme $x > 0$, alors $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0 = 1$. Comme de plus $x^2 > 0$ et $\mathrm{e} > 0$, on en déduit : $u'(x) > 0$.

  $\boxed{\text{La fonction } u \text{ est donc strictement croissante sur }]0,+\infty[.}$

- On a : $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$.
  Donc $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = -\infty$.
- Déterminons alors la limite de f en $+\infty$. Pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$u(x) = \mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}}{x} - x = \mathrm{e}^x \left(1 - \frac{\mathrm{e}}{x\mathrm{e}^x} - \frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$$

  Par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$. De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}}{x\mathrm{e}^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
  Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
Signe de $u'(x)$	‖	$+$	
Variations de u	‖	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

□

b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Démonstration.

- On commence par remarquer :

$$f'(x) = x \Leftrightarrow f'(x) - x = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0$$

On cherche donc à montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$.

- La fonction u est :
  - × continue sur $]0, +\infty[$ (car dérivable sur $]0, +\infty[$ d'après la question ***4.a)***),
  - × strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

  Ainsi la fonction u réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $u(]0, +\infty[)$.

$$u(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \to 0} u(x), \lim_{x \to +\infty} u(x) \right[=] - \infty, +\infty[$$

Or $0 \in] - \infty, +\infty[$, donc l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'équation } f'(x) = x \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

- Tout d'abord :
  - × $u(\alpha) = 0$
  - × $u(1) = f'(1) - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$
  - × $u(2) = f'(2) - 2 = e^2 - \dfrac{e}{2} - 2 > 0$

    En effet, d'après les encadrements donnés par l'énoncé, on obtient :
    - $7,3 < e^2 < 7,4$, donc $5,3 < e^2 - 2 < 5,4$
    - $2,7 < e < 2,8$, donc $1,35 < \dfrac{e}{2} < 1,4$, d'où $-1,4 < -\dfrac{e}{2} < -1,35$

    Donc $3,9 < e^2 - 2 - \dfrac{e}{2} < 4,05$, d'où $u(2) > 3,9 > 0$.

  On en déduit :

$$u(1) < u(\alpha) < u(2)$$

Or, d'après le théorème de la bijection, la bijection réciproque $u^{-1} :] - \infty, +\infty[\to]0, +\infty[$ est strictement croissante.

$$\boxed{\text{En appliquant } u^{-1} \text{ de part et d'autre de l'inégalité, on obtient : } 1 < \alpha < 2.}$$

□

Partie II : Étude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

5. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n)$: u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

- **Initialisation** :
  $u_0 = 2$. Donc $u_0 \geqslant 2$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire u_{n+1} existe et $u_{n+1} \geqslant 2$).
  Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.
  - La fonction f est définie sur $]0,+\infty[$.
    Or $u_n \geqslant 2$, donc $u_n \in\ ]0,+\infty[$. Ainsi $u_{n+1} = f(u_n)$ existe.
  - D'après la question ***2.***, e est le minimum de f sur $]0,+\infty|$, c'est-à-dire :

    $$\forall x \in\ ]0,+\infty[,\ f(x) \geqslant \mathrm{e}$$

    En appliquant cette inégalité à $x = u_n \in\ ]0,+\infty[$, on obtient :

    $$u_{n+1} \geqslant \mathrm{e} > 2$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n \geqslant 2.}$$ □

6. a) Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : \begin{array}{ccc} [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $[2,+\infty[$ d'après la question ***1.a)***, et la fonction $x \mapsto x$ l'est aussi en tant que fonction polynomiale. La fonction g est donc dérivable sur $[2,+\infty[$ en tant que différence de fonctions dérivables sur $[2,+\infty[$.
- Pour tout $x \in [2,+\infty[$, $g'(x) = f'(x) - 1$.
  D'après la question ***1.b)***, la fonction f' est croissante. Donc, pour tout $x \geqslant 2$:

  $$f'(x) \geqslant f'(2) = \mathrm{e}^2 - \frac{\mathrm{e}}{2} \geqslant 7,3 - 1,4 = 5,9 > 1$$

  On en déduit que pour tout $x \geqslant 2$, $g'(x) > 0$.
  On obtient le tableau de variations suivant :

x	2	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	$+$	
Variations de g	$g(2)$ $\nearrow$	$+\infty$

- Déterminons maintenant le signe de g. Comme g est croissante sur $[2,+\infty[$, on a :

$$\forall x \geqslant 2,\ g(x) \geqslant g(2)$$

Il ssufit alors de démontrer : $g(2) > 0$ pour pouvoir conclure. Calculons :

$$g(2) = f(2) - 2 = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\ln(2) - 2$$

D'après les approximations de l'énoncé :

× $7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4$

× $2,7 < \mathrm{e} < 2,8$ et $0,6 < \ln(2) < 0,7$, donc :

$$1,62 = 2,7 \times 0,6 < \mathrm{e}\ln(2) < 2,8 \times 0,7 = 1,96$$

D'où $-1,96 < -\mathrm{e}\ln(2) < -1,62$.
Ainsi : $\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\ln(2) - 2 > 7,3 - 1,96 - 2 = 3,34 > 0$.
On en déduit : $g(2) > 0$.

$$\boxed{\forall x \in [2,+\infty[,\ g(x) > 0}$$

□

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question ***6.a)*** : $\forall x \geqslant 2$, $g(x) > 0$. Autrement dit, pour tout $x \geqslant 2$:

$$f(x) > x$$

- En appliquant cette inégalité à $x = u_n \geqslant 2$ (question ***5.***), on obtient :

$$u_{n+1} = f(u_n) > u_n$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n. \text{ La suite } (u_n) \text{ est donc (strictement) croissante.}}$$

□

7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.

Démonstration.
On sait que la suite (u_n) est croissante (question ***6.b)***), donc :

– soit (u_n) est de plus majorée, et alors elle converge.

– soit (u_n) n'est pas majorée, et alors elle diverge vers $+\infty$.

Supposons par l'absurde que (u_n) est majorée.

- Dans ce cas, la suite (u_n) est croissante et majorée donc elle converge vers un réel ℓ.
D'après la question ***5.***, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$.
Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $\ell \geqslant 2$.
- D'autre part, par définition : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Par passage à la limite (f est continue sur $[2,+\infty[$), on obtient : $\ell = f(\ell)$, donc $g(\ell) = 0$.
Ceci est absurde car, d'après la question ***6.a)*** : $\forall x \geqslant 2$, $g(x) > 0$, donc $\forall x \geqslant 2$, $g(x) \neq 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n) \text{ n'est pas majorée et elle diverge vers } +\infty}$$

Commentaire

Il faut prendre le réflexe de penser à un raisonnement par l'absurde lorsque le résultat à démontrer est formulé sous forme de négation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général). À titre d'illustration, il faut penser à ce type de raisonnement pour :

× montrer qu'une suite `N`'est `PAS` majorée,

× montrer qu'une matrice admettant une seule valeur propre `N`'est `PAS` diagonalisable.

8. Écrire un programme en **Scilab** qui, étant donné un réel A, renvoie un entier naturel N tel que $u_N \geqslant A$.

Démonstration.

```
A = input('A=')
N = 0
u = 2
while u < A
    u = exp(u) - %e * ln(u)
    N = N + 1
end
disp(N)
```

9. a) Démontrer : $\forall x \in [2, +\infty[, \; 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \dfrac{e^x}{3}$.

Démonstration.

- Montrons que : $\forall x \in [2, +\infty[, \; 2\ln(x) \leqslant x$.
  La fonction $h : x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $[2, +\infty[$.
  Sa courbe représentative est donc située en dessous de ses tangentes.
  En particulier, elle est sous sa tangente au point 2, c'est-à-dire :
  $$\forall x \in [2, +\infty[, \;\; h(x) \leqslant h'(2)(x-2) + h(2) = \frac{1}{2}(x-2) + \ln(2)$$
  Ainsi, pour tout $x \in [2, +\infty[$:
  $$2\ln(x) \;\leqslant\; (x-2) + 2\ln(2) = x + 2(\ln(2) - 1) \leqslant x$$
  En effet, comme : $0,6 < \ln(2) < 0,7$, alors : $2(\ln(2) - 1) < 0$.
  $$\boxed{\forall x \in [2, +\infty[, \; 2\ln(x) \leqslant x}$$
- Montrons que : $\forall x \in [2, +\infty[, \; x \leqslant \dfrac{e^x}{3}$.
  Considérons la fonction $h : x \mapsto \dfrac{e^x}{3} - x$.
  La fonction h est dérivable sur $[2, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $[2, +\infty[$.
  Soit $x \in [2, +\infty[$.
  $$h'(x) = \frac{e^x}{3} - 1 = \frac{e^x - 3}{3}$$
  Comme $3 > 0$, la quantité $h'(x)$ est du signe de $e^x - 3$.
  Or, comme $x \geqslant 2$, par croissance de la fonction exp :
  $$e^x \;\geqslant\; e^2 > 7,3$$
  Et ainsi, $e^x - 3 > 4,3 > 0$ et donc $h'(x) > 0$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	2 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $h'(x)$	$+$
Variations de h	$h(2) \nearrow +\infty$

De plus $h(2) = \dfrac{e^2}{3} - 2 = \dfrac{e^2 - 6}{3} > 0$ car $e^2 > 7,3$.
Or h est strictement croissante sur $[2, +\infty[$, donc pour tout $x \in [2, +\infty[$:

$$h(x) \geqslant h(2) \geqslant 0$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall x \in [2, +\infty[,\ x \leqslant \dfrac{e^x}{3}.}$$

Commentaire

Pour démontrer la première inégalité, il est bien évidemment possible de passer par l'étude de la fonction $x \mapsto x - 2\ln(x)$.

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant \dfrac{6 - e}{2} u_n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question précédente :

$$\forall x \in [2, +\infty[,\ 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \frac{e^x}{3}$$

  En appliquant cette double inégalité à $x = u_n \in [2, +\infty$, on obtient :

$$2\ln(u_n) \leqslant u_n \leqslant \frac{e^{u_n}}{3}$$

- Comme $2\ln(u_n) \leqslant u_n$, alors $-e\ln(u_n) \geqslant -\dfrac{e}{2} u_n$.
- Comme $u_n \leqslant \dfrac{e^{u_n}}{3}$, alors $e^{u_n} \geqslant 3u_n$.

On en déduit :

$$u_{n+1} = f(u_n) = e^{u_n} - e\ln(u_n) \geqslant 3u_n - \frac{e}{2} u_n = \frac{6 - e}{2} u_n$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant \frac{6 - e}{2} u_n}$$

□

c) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question ***9.b)*** :

$$\begin{array}{rcll} u_{n+1} & \geqslant & \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\ u_n & \\ & \geqslant & \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\ \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\ u_{n-1} & = \left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^2 u_{n-1} \\ & \geqslant & \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\ \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\ \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\ u_{n-2} & = \left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^3 u_{n-2} \\ & \dots & & \\ & \geqslant & \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\ \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\ \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\ \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\ \dots\ \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\ u_0 & = \left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^{n+1} u_0 \end{array}$$

  On peut démontrer rigoureusement ce résultat par récurrence (voir remarque en page suivante).
  Comme $u_0 = 2$, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n$.

- Or, d'après la question ***5.*** : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 2 > 0$.
  On obtient donc, par passage à l'inverse :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{u_n} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n$$

- On a alors :
  × $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \dfrac{1}{u_n} \leqslant \left(\dfrac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n$
  × la série $\sum \left(\dfrac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n$ est une série géométrique de raison $\dfrac{2}{6-\mathrm{e}}$ avec $\left|\dfrac{2}{6-\mathrm{e}}\right| < 1$.
  (en effet, $3 < 3,2 < 6-\mathrm{e} < 3,3 < 4$ donc $-1 < \dfrac{2}{4} < \dfrac{2}{6-\mathrm{e}} < \dfrac{2}{3} < 1$)
  Elle est donc convergente.

$$\boxed{\text{Par critère de comparaison de séries à termes positifs, la série } \sum \frac{1}{u_n} \text{ est convergente.}}$$

Commentaire

On pouvait aussi résoudre cette question de la façon suivante.
On sait que les termes de la suite (u_n) sont non nuls, donc, d'après la question ***9.b)*** :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \frac{2}{6-\mathrm{e}} \geqslant \frac{u_k}{u_{k+1}}$$

En effectuant le produit de ces inégalités pour k variant de 0 à $n-1$, on obtient (tous les termes considérés sont positifs) :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2}{6-\mathrm{e}} \geqslant \prod_{k=1}^{n-1} \frac{u_k}{u_{k+1}} \quad \text{donc} \quad \left(\frac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n \geqslant \frac{u_0}{\cancel{u_1}}\frac{\cancel{u_1}}{\cancel{u_2}}\cdots\frac{\cancel{u_{n-1}}}{u_n} = \frac{u_0}{u_n} = \frac{2}{u_n}$$

On conclut en utilisant le critère de comparaison de séries à termes positifs.

Commentaire

- La question portait ici sur l'application du critère de comparaison des séries à termes positifs. On pouvait se permettre de simplement citer le principe de récurrence. Détaillons quand même cette rédaction.
- Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \geqslant 2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n$
  - **Initialisation** :
    D'une part, $u_0 = 2$.
    D'autre part, $2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^0 = 2$.
    Donc $\mathcal{P}(0)$.
  - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant 2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^{n+1}$)
    D'après la question ***9.b)***, $u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-\mathrm{e}}{2} u_n$.
    Par hypothèse de récurrence, on a : $u_n \geqslant 2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n$. Donc :
    $$u_{n+1} \geqslant \frac{6-\mathrm{e}}{2}\; u_n \geqslant \frac{6-\mathrm{e}}{2}\; 2\left(\frac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n = 2\left(\frac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^{n+1}$$
    Donc $\mathcal{P}(n+1)$.

  Par principe de récurrence, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n$.

□

Partie III : Étude d'intégrales généralisées

10. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ converge et calculer cette intégrale.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $]0,1]$.
- Soit $a \in\,]0,1]$.

$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\int_a^1 f(x)\,dx & = & \displaystyle\int_a^1 (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x))\,dx & \\
 & = & \displaystyle\int_a^1 \mathrm{e}^x\,dx - \mathrm{e}\int_a^1 \ln(x)\,dx & \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
 & = & [\,\mathrm{e}^x\,]_a^1 - \mathrm{e}\,[\,x\ln(x) - x\,]_a^1 & \\
 & = & \mathrm{e} - \mathrm{e}^a - \mathrm{e}\,(\cancel{1\ln(1)} - 1 - (a\ln(a) - a)) & \\
 & = & 2\mathrm{e} - \mathrm{e}^a + \mathrm{e}\,a\ln(a) - \mathrm{e}\,a & \\
 & \underset{a\to 0}{\longrightarrow} & 2\mathrm{e} - 1 &
\end{array}$$

En effet, $\lim\limits_{a\to 0} \mathrm{e}^a = 1$, $\lim\limits_{a\to 0} \mathrm{e}\,a = 0$ et $\lim\limits_{a\to 0} a\ln(a) = 0$ par croissances comparées.

$$\boxed{\text{Ainsi, l'intégrale impropre } \int_0^1 f(x)\,dx \text{ converge et } \int_0^1 f(x)\,dx = 2\mathrm{e} - 1.}$$

Commentaire

On peut retrouver la valeur de $\displaystyle\int_a^1 \ln(x)\ dx$ grâce à une intégration par parties (IPP) :

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & \ln(x) & & u'(x) & = & \dfrac{1}{x} \\ v'(x) & = & 1 & & v(x) & = & x \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, 1]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_a^1 \ln(x)\ dx &= [\ x \ln(x)\ ]_a^1 - \int_a^1 \frac{1}{x} x\ dx \\ &= -a \ln(a) - [\ x\ ]_a^1 \ = \ -a \ln(a) - 1 + a \end{aligned}$$

□

11. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\ dx$ converge-t-elle ?

Démonstration.
On a les informations suivantes :

× $f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e} \ln(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \mathrm{e}^x$.

× $\forall x \in [1, +\infty[,\ \mathrm{e}^x \geqslant 0$
D'après la question ***2.*** : $\forall x \in [1, +\infty[,\ f(x) \geqslant 0$.

× L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^x\ dx$ diverge.

Par critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\ dx$ est divergente.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_1^{+\infty} f(x)\ dx \text{ diverge.}}$$

Commentaire

L'énoncé demande simplement la **nature** de l'intégrale. Il faut donc privilégier l'utilisation d'un critère de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives.
On pouvait également traiter cette question par calcul. Détaillons-le.

- La fonction f est continue sur $[1, +\infty[$.
- Soit $A \in [1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_1^A f(x)\ dx &= \int_1^A (\mathrm{e}^x - \mathrm{e} \ln(x))\ dx \\ &= \int_1^A \mathrm{e}^x\ dx - \mathrm{e} \int_1^A \ln(x)\ dx && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= [\ \mathrm{e}^x\ ]_1^A - \mathrm{e}\,[\ x \ln(x) - x\ ]_1^A \\ &= \mathrm{e}^A - \mathrm{e} - \mathrm{e}(A \ln(A) - A - (\cancel{1 \ln(1)} - 1)) \\ &= \mathrm{e}^A \left(1 - \mathrm{e} \frac{A \ln(A)}{\mathrm{e}^A} - \frac{A}{\mathrm{e}^A} - \frac{2\mathrm{e}}{\mathrm{e}^A}\right) \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{aligned}$$

En effet, $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{2\mathrm{e}}{\mathrm{e}^A} = 0$, $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{A \ln(A)}{\mathrm{e}^A} = 0$, $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{A}{\mathrm{e}^A} = 0$ et $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \mathrm{e}^A = +\infty$.

□

12. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\, dx$ converge. On pourra utiliser le résultat de la question ***9.a)***.

Démonstration.

- Soit $x \in [2, +\infty[$.
  D'après la question ***9.a)***, $2\ln(x) \leqslant x$. Donc :
  $$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x) \geqslant \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\,\frac{x}{2}.$$
  Donc, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{f(x)} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\,\frac{x}{2}}$. Or :
  $$\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\frac{x}{2} = \mathrm{e}^x\left(1 - \frac{\mathrm{e}}{2}\,\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^x$$
  car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ par croissances comparées. Donc $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\,\frac{x}{2}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-x}$.

  Et comme $\mathrm{e}^{-x} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, alors $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\,\frac{x}{2}} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
- On sait donc :
  × $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\,\frac{x}{2}} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
  × $\forall x \in [2, +\infty[$, $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\,\frac{x}{2}} \geqslant 0$
  × L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ d'exposant strictement supérieur à 1. Elle est donc convergente.

  Par critère de négligeabilité d'intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\frac{x}{2}}\, dx$ converge.
- On sait alors :
  × $\forall x \in [2, +\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{1}{f(x)} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\,\frac{x}{2}}$.
  × D'après la question ***2.*** : $\forall x \in [2, +\infty[$, $f(x) \neq 0$.

  Donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$ est continue sur $[2, +\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $[2, +\infty[$ qui ne s'annule pas.
  × L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\frac{x}{2}}\, dx$ converge.

  Par critère de comparaison d'intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\, dx$ converge.

□

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère la fonction $F :]1,+\infty[^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]1,+\infty[^2$, définie, pour tout (x,y) de $]1,+\infty[^2$, par :

$$F(x,y) = f(x) + f(y) - xy.$$

13. Montrer que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (α,α), le réel α ayant été défini à la question **4.** de la partie **I**.

Démonstration.

- La fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1,+\infty[^2$, donc, a fortiori, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[^2$.
- Soit $(x,y) \in]1,+\infty[^2$.

$$\partial_1(F)(x,y) = f'(x) - y \quad \text{et} \quad \partial_2(F)(x,y) = f'(y) - x$$

- Donc (x,y) est un point critique de F si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\nabla(F)(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \partial_1(F)(x,y) = 0 \\ \partial_2(F)(x,y) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f'(x) - y = 0 \\ f'(y) - x = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = f'(x) \\ x = f'(y) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} xy = xf'(x) \\ xy = yf'(y) \end{cases} \qquad \textit{(car } x > 0 \textit{ et } y > 0\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} xy = xf'(x) \\ xf'(x) = yf'(y) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = f'(x) \\ xf'(x) = yf'(y) \end{cases} \qquad (*)
\end{aligned}$$

- On introduit la fonction $v : x \mapsto xf'(x)$. Montrons qu'elle est injective.
  Soit $x \in]1,+\infty[$.

$$v(x) = xf'(x) = x\left(\mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}}{x}\right) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}$$

  La fonction v est dérivable sur $]1,+\infty[$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables sur l'intervalle $]1,+\infty[$.

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad v'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^x > 0$$

  Donc la fonction v est strictement croissante.
  En particulier, la fonction v est injective.
- Reprenons alors le système $(*)$. Par injectivité de v :

$$\begin{cases} y = f'(x) \\ v(x) = v(y) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = f'(x) \\ x = y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = f'(x) \\ x = y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \alpha \\ x = y \end{cases}$$

  En effet, d'après la question ***4.b)***, l'équation $x = f'(x)$ admet le réel α comme unique solution sur l'intervalle $]1,+\infty[$.
  On obtient alors :

$$\nabla(F)(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \alpha \\ x = y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \end{cases}$$

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ admet un point critique et un seul et il s'agit de } (\alpha,\alpha).}$$

□

14. a) Déterminer la matrice hessienne de F en (α, α).

Démonstration.

- La fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1, +\infty[^2$.
- Soit $(x, y) \in]1, +\infty[^2$.

$$\nabla^2(F)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(F)(x,y) & \partial^2_{1,2}(F)(x,y) \\ \partial^2_{2,1}(F)(x,y) & \partial^2_{2,2}(F)(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f''(x) & -1 \\ -1 & f''(y) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Donc } \nabla^2(F)(\alpha,\alpha) = \begin{pmatrix} f''(\alpha) & -1 \\ -1 & f''(\alpha) \end{pmatrix}.}$$

□

b) La fonction F admet-elle un extremum local en (α, α) ? Si oui, s'agit-il d'un maximum local ou s'agit-il d'un minimum local ?

Démonstration.

Déterminons les valeurs propres de $\nabla^2(F)(\alpha, \alpha)$.

On cherche donc les valeurs de λ pour lesquelles $\nabla^2(F)(\alpha,\alpha) - \lambda\, I_2$ n'est pas inversible, c'est-à-dire pour lesquelles $\det(\nabla^2(F)(\alpha,\alpha) - \lambda\, I_2) = 0$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\det(\nabla^2(F)(\alpha,\alpha) - \lambda\, I_2) = \det \begin{pmatrix} f''(\alpha) - \lambda & -1 \\ -1 & f''(\alpha) - \lambda \end{pmatrix} = (f''(\alpha) - \lambda)^2 - 1 = (f''(\alpha) - \lambda - 1)(f''(\alpha) - \lambda + 1)$$

Donc les valeurs propres de $\nabla^2(F)(\alpha, \alpha)$ sont $f''(\alpha) - 1$ et $f''(\alpha) + 1$.

Or pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f''(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{\mathrm{e}}{x^2} > \mathrm{e}^x \geqslant 1$. Donc $f''(\alpha) - 1 > 0$ et $f''(\alpha) + 1 > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi } F \text{ admet un minimum local en } (\alpha, \alpha).}$$

□

9782340-026636_001_784.indd 366 30/07/2018 09:52

Exercice 2

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E. Pour tout polynôme P de E, on note indifféremment P ou $P(X)$.
Pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, la dérivée P' du polynôme $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ est le polynôme $P' = \beta + 2\gamma X$, et la dérivée seconde P'' de P est le polynôme $P'' = 2\gamma$.
On note, pour tout polynôme P de E :

$$a(P) = P - XP', \quad b(P) = P - P', \quad c(P) = 2XP - (X^2 - 1)\ P'$$

Par exemple : $a(X^2) = X^2 - X(2X) = -X^2$.
Enfin, on note $f = b \circ a - a \circ b$.

Commentaire

L'énoncé prend partie de noter indifféremment P et $P(X)$, ce qui permet d'alléger les notations. En contrepartie, ce choix peut amener à des confusions sur les objets manipulés. Afin d'éviter ces confusions, on évitera, dans ce corrigé, d'utiliser l'abus de notation autorisé par l'énoncé.

Partie I : Étude de a

1. Montrer que a est un endomorphisme de E.

Démonstration.

- Montrons que a est une application linéaire.
  Soit $(P_1, P_2) \in E^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl}
\big(a(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)\big)(X) & = & \big(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2\big)(X) - X\ \big(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2\big)'(X) \\
& = & \lambda_1 \cdot P_1(X) + \lambda_2 \cdot P_2(X) - X\ \big(\lambda_1 \cdot P_1'(X) + \lambda_2 \cdot P_2'(X)\big) \\
& = & \lambda_1 \cdot P_1(X) + \lambda_2 \cdot P_2(X) - \lambda_1 \cdot XP_1'(X) - \lambda_2 \cdot XP_2'(X) \\
& = & \lambda_1 \cdot (P_1(X) - XP_1'(X)) + \lambda_2 \cdot (P_2(X) - XP_2'(X)) \\
& = & \lambda_1 \cdot (a(P_1))(X) + \lambda_2 \cdot (a(P_2))(X) \\
& = & \big(\lambda_1 \cdot a(P_1) + \lambda_2 \cdot a(P_2)\big)(X)
\end{array}$$

  Et ainsi : $a(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2) = \lambda_1 \cdot a(P_1) + \lambda_2 \cdot a(P_2)$.

- Montrons que $a(E) \subset E$. Autrement dit, montrons que pour tout $P \in E$, $a(P) \in E$.
  Soit $P \in E$. Alors il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $P(X) = \alpha + \beta X + \gamma X^2$. Donc :

$$\begin{array}{rcl}
(a(P))(X) & = & P(X) - XP'(X) \\
& = & \alpha + \beta X + \gamma X^2 - X(\beta + 2\gamma X) \\
& = & -\gamma X^2 + \alpha
\end{array}$$

  Ainsi, $a(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 : $a(P) \in E$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } a \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

□

2. a) Montrer que la matrice A de a dans la base $\mathscr{B}$ de E est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Démonstration.
Pour éviter les confusions, on notera $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$P_0(X) = 1, \quad P_1(X) = X, \quad P_2(X) = X^2$$

- $\big(a(P_0)\big)(X) = P_0(X) - X \times P_0'(X) = 1 - 0 = 1 = P_0(X)$. On en déduit :

$$a(P_0) = 1 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$$

  Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a(P_0)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $\big(a(P_1)\big) = P_1(X) - X \times P_1'(X) = X - X = 0$. On en déduit :

$$a(P_1) = 0 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a(P_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $\big(a(P_2)\big)(X) = P_2(X) - X \times P_2'(X) = X^2 - 2X^2 = -X^2 = -P_2(X)$. On en déduit :

$$a(P_2) = 0 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 - 1 \cdot P_2$$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a(P_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

□

b) Déterminer le rang de la matrice A.

Démonstration.

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2$$

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = 2}$$

□

3. L'endomorphisme a est-il bijectif ? Déterminer $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\dim(\mathrm{Im}(a)) = \mathrm{rg}(A) = 2 \neq 3 = \dim(E)$.
  Donc $\mathrm{Im}(A) \neq E$. Ainsi l'endomorphisme a n'est pas surjectif.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'endomorphisme } a \text{ n'est pas bijectif.}}$$

- D'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim(E) & = & \dim(\mathrm{Ker}(a)) & + & \mathrm{rg}(a) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 3 & & & & 2 \end{array}$$

  D'où : $\dim(\mathrm{Ker}(a)) = 1$.

D'après la question précédente : $a(P_1) = 0$. Ainsi $P_1 \in \text{Ker}(a)$.
La famille (P_1) est une famille libre, car elle est constituée d'un polynôme non nul.
Comme $\text{Card}((P_1)) = 1 = \dim(\text{Ker}(a))$, on en déduit que (P_1) est une base de $\text{Ker}(a)$.

$$\boxed{\text{Ker}(a) = \text{Vect}\,(P_1)}$$

- Par caractérisation de l'image d'une application linéaire :

$$\text{Im}(a) = \text{Vect}\,(a(P_0),\ a(P_1),\ a(P_2)) = \text{Vect}\,(P_0,\ 0,\ -P_2) = \text{Vect}\,(P_0,\ P_2)$$

Ainsi :

× la famille (P_0, P_2) engendre $\text{Im}(a)$.

× $\text{Card}\big((P_0, P_2)\big) = 2 = \dim\big(\text{Im}(a)\big)$.

La famille (P_0, P_2) est donc une base de $\text{Im}(a)$.

$$\boxed{\text{Im}(a) = \text{Vect}\,(P_0, P_2)}$$

Commentaire

- On peut aussi utiliser le spectre de A pour déterminer si a est bijectif.
  Détaillons cette méthode.

  La matrice A est diagonale. Ainsi, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux et : $\text{Sp}(A) = \{-1, 0, 1\}$. Or, comme A est la matrice représentative de l'endomorphisme a dans la base $\mathscr{B}$:
  $$\text{Sp}(a) = \text{Sp}(A) = \{-1, 0, 1\}$$
  Le réel 0 étant valeur propre de a, l'endomorphisme a n'est pas bijectif.
- Il est possible de déterminer $\text{Ker}(a)$ par le calcul. Détaillons cette méthode.

  Soit $P \in E$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = x \cdot P_0 + y \cdot P_1 + z \cdot P_2$.
  Ainsi $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et :

  $$P \in \text{Ker}(a) \ \Leftrightarrow\ a(P) = 0_E \ \Leftrightarrow\ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow\ \left\{\begin{array}{rcrcl} x & & & = & 0 \\ & 0 & & = & 0 \\ & & -\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

  Donc :
  $$\begin{array}{rcl} \text{Ker}(a) & = & \{x \cdot P_0 + y \cdot P_1 + z \cdot P_2 \in E \mid x = 0 \text{ et } z = 0\} \\ & = & \{y \cdot P_1 \mid y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \text{Vect}\,(P_1) \end{array}$$

□

On admet, pour la suite de l'exercice, que b et c sont des endomorphismes de E.
On note B et C les matrices, dans la base $\mathscr{B}$ de E, de b et c respectivement.

Partie II : Étude de b

4. Montrer que b est bijectif et que, pour tout Q de E, on a : $b^{-1}(Q) = Q + Q' + Q''$.

Démonstration.

- Notons $g : E \to E$ l'endomorphisme de E qui à tout $Q \in E$ associe $g(Q) = Q + Q' + Q''$.
  Il s'agit de démontrer que b est bijective, de réciproque g. Pour ce faire, on démontre :
  $$b \circ g = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad g \circ b = \mathrm{id}_E$$
- Soit $P \in E$.
  $$\begin{aligned}
  (b \circ g)(P) &= b\big(g(P)\big) \\
  &= b(P + P' + P'') \\
  &= b(P) + b(P') + b(P'') && \textit{(par linéarité de } b\textit{)} \\
  &= (P - \cancel{P'}) + (\cancel{P'} - \cancel{P''}) + (\cancel{P''} - P''') \\
  &= P - P''' \\
  &= P && \textit{(}P''' = 0 \textit{ car } P \textit{ est un polynôme de degré au plus } 2\textit{)}
  \end{aligned}$$
  On en déduit : $b \circ g = \mathrm{id}_E$.
  De même :
  $$\begin{aligned}
  (g \circ b)(P) &= g\big(P - P'\big) \\
  &= (P - P') + (P - P')' + (P - P')'' \\
  &= P - P' + P' - P'' + P'' - P''' \ = \ P - P''' \ = \ P
  \end{aligned}$$

Les applications g et b sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.
On en déduit notamment : $\forall Q \in E$, $b^{-1}(Q) = g(Q) = Q + Q' + Q''$.

Commentaire

- Rigoureusement, tant que l'on n'a pas démontré que b est bijective, on ne peut utiliser la notation b^{-1}. C'est pourquoi on introduit l'application g en début de démonstration.
- L'énoncé fournit explicitement l'endomorphisme g. Dans ce cas, pour démontrer que b est bijectif et que $b^{-1} = g$, il suffit de vérifier les égalités :
  $$b \circ g = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad g \circ b = \mathrm{id}_E$$
- L'espace vectoriel E étant de dimension finie, il est même possible de ne démontrer qu'une des deux égalités précédentes. Plus précisément, si b et g sont des endomorphismes d'un espace vectoriel **de dimension finie** E :
  $$b \circ g = \mathrm{id}_E \ \Rightarrow \ \left\{ \begin{array}{l} b \text{ et } g \text{ sont bijectives,} \\ b^{-1} = g \ \text{ et } \ g^{-1} = b \end{array} \right.$$
  (la propriété réciproque est évidemment vérifiée)
- On peut énoncer un résultat similaire dans l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n. Plus précisément, si A et B sont des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:
  $$AB = I_n \ \Rightarrow \ \left\{ \begin{array}{l} A \text{ et } B \text{ sont inversibles,} \\ A^{-1} = B \ \text{ et } \ B^{-1} = A \end{array} \right.$$

$\square$

5. a) Montrer que b admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci.

Démonstration.

- Comme B est la matrice représentative de b dans la base $\mathscr{B}$:

$$\mathrm{Sp}(b) \ = \ \mathrm{Sp}(B)$$

On commence donc par déterminer cette matrice B.

× $\big(b(P_0)\big)(X) = P_0(X) - P_0'(X) = 1 = P_0(X)$. On en déduit :

$$b(P_0) = 1 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$$

Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b(P_0)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $\big(b(P_1)\big)(X) = P_1(X) - P_1'(X) = X - 1 = -P_0(X) + P_1(X)$. On en déduit :

$$b(P_1) = -1 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$$

Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b(P_1)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $\big(b(P_2)\big)(X) = P_2(X) - P_2'(X) = X^2 - 2X = -2\ P_1(X) + P_2(X)$. On en déduit :

$$b(P_1) = 0 \cdot P_0 - 2 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2$$

Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b(P_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

- La matrice B est triangulaire supérieure.
  Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux et $\mathrm{Sp}(B) = \{1\}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Sp}(b) = \mathrm{Sp}(B) = \{1\}.}$$

□

b) L'endomorphisme b est-il diagonalisable ?

Démonstration.
Montrons par l'absurde que b n'est pas diagonalisable.
Supposons que b est diagonalisable, alors $B = \mathrm{Mat}_B(b)$ l'est aussi.
Il existe donc une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de B telles que $B = PDP^{-1}$.
Or 1 est la seule valeur propre de B. Ainsi $D = I$ et :

$$B = PDP^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$$

Absurde !

$$\boxed{\text{On en déduit que } b \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Commentaire

- Il faut prendre le réflexe de penser à un raisonnement par l'absurde lorsque le résultat à démontrer est formulé sous forme de négation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général). À titre d'illustration, il faut penser à ce type de raisonnement pour :
  - × montrer qu'une suite `N`'est `PAS` majorée,
  - × montrer qu'une matrice admettant une seule valeur propre `N`'est `PAS` diagonalisable. □

Partie III : Étude de c

6. Montrer : $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- $(c(P_0))(X) = 2X \times P_0(X) - (X^2-1) \times P_0'(X) = 2X = 0 \cdot P_0(X) + 2 \cdot P_1(X) + 0 \cdot P_2(X)$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(c(P_0)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $(c(P_1))(X) = 2X \times P_1(X) - (X^2-1) \times P_1'(X) = X^2+1 = 1 \cdot P_0(X) + 0 \cdot P_1(X) + 1 \cdot P_2(X)$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(c(P_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $(c(P_2))(X) = 2X \times P_2(X) - (X^2-1) \times P_2'(X) = 2X = 0 \cdot P_0(X) + 2 \cdot P_1(X) + 0 \cdot P_2(X)$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(c(P_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

7. L'endomorphisme c est-il bijectif ?

Démonstration.

$$\mathrm{rg}(c) = \mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2$$

On en déduit $\dim(\mathrm{Im}(c)) = \mathrm{rg}(c) = 2 \neq 3 = \dim(E)$.
Donc : $\mathrm{Im}(c) \neq E$, ce qui implique que l'endomorphisme c n'est pas surjectif.

$$\boxed{\text{Ainsi l'endomorphisme } c \text{ n'est pas bijectif.}}$$

□

8. a) Déterminer une matrice R, carrée d'ordre trois, inversible, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, et une matrice D, carrée d'ordre trois, diagonale, à coefficients diagonaux dans l'ordre croissant, telles que $C = RDR^{-1}$.

Démonstration.

- Déterminons les valeurs propres de C.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On cherche les réels λ tels que la matrice $C - \lambda I_3$ n'est pas inversible, c'est-à-dire tels que $\text{rg}(C - \lambda I_3) < 3$.

$$\begin{array}{rcl} \text{rg}(C - \lambda\, I_3) & = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_2 \leftarrow 2L_2 + \lambda L_1}{=} & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 2-\lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3 - (2-\lambda^2)L_2}{=} & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & q(\lambda) \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

où $q(\lambda) = 2\lambda + \lambda(2 - \lambda^2) = \lambda(2 + (2 - \lambda^2)) = \lambda(4 - \lambda^2) = \lambda(2 - \lambda)(2 + \lambda)$.
La réduite obtenue est triangulaire supérieure.
Elle est non inversible ssi l'un de ses coefficients diagonaux est nul. Ainsi :

$$\text{rg}(C - \lambda\, I_3) < 3 \;\Leftrightarrow\; q(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda \in \{0, 2, -2\}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Sp}(C) = \{-2, 0, 2\}.}$$

- Déterminons $E_0(C)$, le sous-espace propre de C associé à la valeur propre 0.
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} X \in E_0(C) & \Leftrightarrow & CX = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & y & & & = & 0 \\ 2x & & & + & 2z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ x & = & -z \end{array} \right. \end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
E_0(C) &= \left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y = 0 \text{ et } x = -z\right\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix} -z\\ 0\\ z\end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\right\} = \left\{z \cdot \begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\right\}\\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

- Déterminons $E_2(C)$, le sous-espace propre de C associé à la valeur propre 2.
  Soit $X = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
X \in E_2(C) &\iff (C - 2\,I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\\
&\iff \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 2\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & & & = & 0\\ 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0\\ & & y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.\\
&\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & & & = & 0\\ & - & y & + & 2z & = & 0\\ & & y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.\\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcr} -2x & + & y & = & 0\\ & & y & = & 2z \end{array}\right.\\
&\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcr} -2x & & & = & -2z\\ & & y & = & 2z \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & z\\ y & = & 2z \end{array}\right.
\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
E_2(C) &= \left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \text{ et } y = 2z\right\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix} z\\ 2z\\ z\end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\right\} = \left\{z \cdot \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 1\end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\right\}\\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

- Déterminons $E_{-2}(C)$, le sous-espace propre de C associé à la valeur propre -2.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_{-2}(C) & \Longleftrightarrow & (C + 2\, I_3) X = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & & & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 0 \\ & & y & = & -2z \end{array} \right. \\[2mm]
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & & & = & 2z \\ & & y & = & -2z \end{array} \right. \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & z \\ y & = & -2z \end{array} \right.
\end{array}$$

  On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-2}(C) & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \text{ et } y = -2z \} \\[2mm]
& = & \{ \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \} \ = \ \{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \} \\[2mm]
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

- En résumé :
  - × $C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$
  - × C admet 3 valeurs propres **distinctes** : -2, 0, 2.

  On en déduit que la matrice C est diagonalisable.
  Il existe donc une matrice $R \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible (R est la concaténation des vecteurs bases des sous-espaces propres de C), et $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de C, telles que $C = RDR^{-1}$.

$$\boxed{\text{En posant } D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ on obtient bien : } C = RDR^{-1}.}$$

□

b) En déduire que l'endomorphisme c est diagonalisable et déterminer une base de E constituée de vecteurs propres de c.

Démonstration.

- D'après la question ***8.a)***, la matrice C est diagonalisable.
  Or c'est une matrice représentative de c dans la base $\mathscr{B}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'endomorphisme } c \text{ est diagonalisable.}}$$

- Une base de E constituée de vecteurs propres est alors la concaténation des bases des sous-espaces propres de c que l'on a déterminés à la question précédente.
  De plus :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(1 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 - 1 \cdot P_2),$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(1 \cdot P_0 + 2 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2),$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(1 \cdot P_0 - 2 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2)$$

Donc :

$$E_0(c) = \mathrm{Vect}\,(P_0 - P_2)\,, \qquad E_2(c) = \mathrm{Vect}\,(P_0 + 2P_1 + P_2)\,, \qquad E_{-2}(c) = \mathrm{Vect}\,(P_0 - 2P_1 + P_2)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Une base de } E \text{ constituée de vecteurs propres de } c \text{ est alors} \\ (P_0 - 2 \cdot P_1 + P_2, P_0 - P_2, P_0 + 2 \cdot P_1 + P_2).\end{array}}$$

□

Partie IV : Étude de f

9. Montrer : $\forall P \in E,\ f(P) = P'$.

Démonstration.
Soit $P \in E$.

$$\begin{array}{rcl}
(f(P))(X) & = & (b \circ a(P))(X) - (a \circ b(P))(X) \\
& = & b(P(X) - XP'(X)) - a(P(X) - P'(X)) \\
& = & (P(X) - XP'(X)) - (P(X) - XP'(X))' - \Big((P(X) - P'(X)) - X\ (P(X) - P'(X))'\Big) \\
& = & \cancel{P(X)} - XP'(X) - \Big(\cancel{P'(X)} - (\cancel{P'(X)} + XP''(X))\Big) \\
& & - \Big(\cancel{P(X)} - P'(X) - XP'(X) + XP''(X)\Big) \\
& = & -\cancel{XP'(X)} + \cancel{XP''(X)} + P'(X) + \cancel{XP'(X)} - \cancel{XP''(X)} \\
& = & P'(X)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } P \in E,\ f(P) = P'.}$$

□

10. En déduire : $(BA - AB)^3 = 0$.

Démonstration.
Soit $P \in E$.
Tout d'abord, d'après la question ***9*** : $f(P) = P'$.
De plus, comme P est un polynôme de degré au plus 2, on en déduit : $(f \circ f \circ f)(P) = P''' = 0$.
Ceci étant vrai pour tout $P \in E$, on en déduit : $f \circ f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
en passant à l'écriture matricielle :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ f \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(0_{\mathscr{L}(E)}) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

Or $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ f \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^3) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))^3 = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b \circ a - a \circ b))^3 = (BA - AB)^3$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } (BA - AB)^3 = 0.}$$

□

Exercice 3

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.
On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard et on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note : B_k l'événement : « on obtient une boule bleue au $k^{\text{ème}}$ tirage »,
R_k l'événement : « on obtient une boule rouge au $k^{\text{ème}}$ tirage ».

Partie I : Simulation informatique

1. Recopier et compléter la fonction suivante afin qu'elle simule l'expérience étudiée et renvoie le nombre de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages, l'entier n étant entré en argument.

```
function s = EML(n)
    b = 1 // b désigne le nombre de boules bleues présentes dans l'urne
    r = 2 // r désigne le nombre de boules rouges présentes dans l'urne
    s = 0 // s désigne le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages
    for k = 1:n
        x = rand()
        if ... then
            ...
        else
            ...
        end
    end
endfunction
```

Démonstration.

- Le programme consiste, au fur et à mesure des tirages :
  - × à mettre à jour les variables `b` et `r`, désignant respectivement le nombre de boules bleues et le nombre de boules rouges présentes dans l'urne.
  - × à comptabiliser le nombre `s` de boules rouges tirées.
- L'instruction `rand()` permet de simuler une v.a.r. de loi uniforme sur $]0, 1[$.
  Le résultat obtenu (stocké dans la variable `x`) va permettre de simuler le tirage :
  - × si $\mathtt{x} \in \left]0, \frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b+r}}\right[$, on considère qu'on a tiré une boule bleue dans l'urne. Dans ce cas :

    on ajoute une boule bleue dans l'urne : `b = b+1`.

    on ne modifie pas le nombre de boules rouges de l'urne.

    on ne modifie pas le nombre de boules rouges tirées.

    ($\frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b+r}}$ est la proportion de boules bleues dans l'urne)
  - × si $\mathtt{x} \in \left[\frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b+r}}, 1\right[$, on considère qu'on a tiré une boule rouge dans l'urne. Dans ce cas :

    on ajoute une boule rouge dans l'urne : `r = r+1`.

    on ne modifie pas le nombre de boules bleues de l'urne.

    on met à jour le nombre de boules rouges tirées : `s = s+1`.

    ($1 - \frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b+r}} = \frac{\mathtt{r}}{\mathtt{b+r}}$ est la proportion de boules rouges dans l'urne)

9782340-026636_001_784.indd 378 30/07/2018 09:52

En résumé, on obtient :

```
7  if x < b / (b+r) then
8      b = b + 1
9  else
10     r = r + 1
11     s = s + 1
12 end
```

Commentaire

- Pour être en accord avec le nombre de lignes utilisées dans le programme on pouvait remplacer les lignes 10 et 11 par :

```
10     r = r + 1; s = s + 1
```

- Les variables `r` et `s` évoluent de la même façon : elles sont incrémentées d'une unité à chaque tirage d'une boule rouge. Ainsi, la relation : $\texttt{s} = \texttt{r} - 2$ est vérifiée à chaque tour de boucle (on parle d'invariant de boucle) et donc aussi à la fin du programme. □

2. On exécute le programme suivant :

```
1  n = 10
2  m = 0
3  for i = 1:1000
4      m = m + EML(n)
5  end
6  disp(m/1000)
```

On obtient 6.657. Comment interpréter ce résultat ?

Démonstration.

- La fonction `EML` permet de simuler la v.a.r. S_n (introduite plus tard dans l'énoncé) égale au nombre de boules rouges obtenues au cours des n premiers tirages.
- Le programme consiste à simuler (à l'aide de l'appel `EML(10)`) de simuler un grand nombre de fois ($N = 1000$ est ce grand nombre) la v.a.r. S_{10}.
  Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(v_1, \dots, v_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(V_1, \dots, V_N)$ de la v.a.r. S_{10}.
  (cela signifie que les v.a.r. V_1, ..., V_N sont indépendantes et sont de même loi que S_{10})
- La variable `m`, initialisée à 0, est mise à jour à chaque tour de boucle i par l'ajout de la dernière valeur v_i créée. De sorte que, à l'issue de la boucle, la variable `m` contient : $\sum\limits_{i=1}^{N} v_i$.
- Enfin, en ligne 6, l'instruction `disp(m/1000)` permet de réaliser l'affichage de la division par 1000 de la valeur contenue dans `m`. C'est donc la valeur : $\dfrac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{N} v_i$ qui est affichée.
  Il s'agit de la moyenne empirique des N simulations de la v.a.r. S_{10}.
- Or, en vertu de la loi faible des grands nombres (LfGN) :

$$\text{moyenne de l'observation} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} v_i \ \simeq \ \mathbb{E}(S_{10})$$

Le programme fournit une approximation de $\mathbb{E}(S_{10})$. Le résultat obtenu : $\mathbb{E}(S_{10}) \simeq 6.657$ signifie qu'on obtient en moyenne un peu moins de 7 boules rouges lorsque l'on procède à 10 tirages successifs (en respectant le protocole de l'énoncé) dans l'urne.

Commentaire

Comme $6.657 \simeq \frac{2}{3} \times 10$, on peut faire l'hypothèse que : $\mathbb{E}(S_n) = \frac{2}{3} \times n$.
Ceci semble être le cas puisque la question ***9.*** demande justement de démontrer cette égalité. $\square$

Partie II : Rang d'apparition de la première boule bleue et rang d'apparition de la première boule rouge

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue et la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

3. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Y = n]) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $n \geqslant 2$, $[Y = n] = R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1} \cap B_n$.
  D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([Y = n]) \\ = \ & \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1} \cap B_n) \\ = \ & \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(R_3) \times \ldots \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \ldots \cap R_{n-2}}(R_{n-1}) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1}}(B_n) \\ = \ & \frac{2}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \times \ldots \times \frac{\cancel{n}}{n+1} \times \frac{1}{n+2} \\ = \ & \frac{2}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

- On a utilisé dans l'écriture précédente, pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$, l'égalité :

$$\mathbb{P}_{R_1 \cap \ldots \cap R_{k-1}}(R_k) = \frac{k+1}{k+2}$$

  En effet, si l'événement $R_1 \cap \ldots \cap R_{k-1}$ est réalisé c'est qu'on a tiré une boule rouge lors de chacun des $k-1$ premiers tirages. Juste avant le $k^{\text{ème}}$ tirage, l'urne est alors constituée de :
  × $2 + (k-1) = k+1$ boules rouges,
  × une seule boule bleue,
  × $(k+1) + 1 = k+2$ boules en tout.
- On note enfin que l'utilisation de la formule des probabilités composées est valide puisque : $\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1}) = \dfrac{2}{n+1} \neq 0$.
- Si $n = 1$, $[Y = 1] = B_1$. Ainsi : $\mathbb{P}([Y = 1]) = \mathbb{P}(B_1) = \dfrac{1}{3}$.
  Or : $\dfrac{2}{(1+1)(1+2)} = \dfrac{2}{2 \times 3} = \dfrac{1}{3}$.
  On en déduit que l'égalité de l'énoncé est vérifiée pour $n = 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Y = n]) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}}$$

$\square$

b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? une variance ?

Démonstration.

- Tout d'abord : $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
  En effet, la première boule bleue peut apparaître lors de n'importe quel tirage.
- La v.a.r. Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n \, \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$ est absolument convergente. Ceci revient à démontrer la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n}{(n+1)(n+2)}$ puisque :
  $\times$ c'est une série à termes positifs,
  $\times$ on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul.
- Enfin :
$$\frac{n}{(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \ (\geqslant 0)$$
  Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est divergente.
  Ainsi, par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n \, \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$ est elle aussi divergente.

  $$\boxed{\text{La v.a.r. } Y \text{ n'admet donc pas d'espérance.}}$$
- La v.a.r. Y n'admet pas de moment d'ordre 1, donc elle n'admet pas de moments aux ordres supérieurs.

  $$\boxed{\text{On en déduit que } Y \text{ n'admet pas de variance.}}$$

□

4. Déterminer la loi de Z. La v.a.r. admet-elle une espérance ? une variance ?

Démonstration.

- Tout d'abord : $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
  En effet, la première boule rouge peut apparaître lors de n'importe quel tirage.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
- Si $n \geqslant 2$, $[Z = n] = B_1 \cap \ldots \cap B_{n-1} \cap R_n$.
  En raisonnant comme dans la question précédente, on trouve, à l'aide de la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([Z = n]) \\
= \ & \mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_{n-1} \cap R_n) \\
= \ & \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(B_3) \times \ldots \times \mathbb{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_{n-2}}(B_{n-1}) \times \mathbb{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_{n-1}}(R_n) \\
= \ & \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \ldots \times \frac{n-1}{n+1} \times \frac{2}{n+2} \\
= \ & \frac{1 \times 2 \times \ldots \times (n-1)}{3 \times 4 \times \ldots \times (n+1)} \, \frac{2}{n+2} \ = \ 2 \, (n-1)! \, \frac{2}{2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (n+1) \times (n+2)} \\
= \ & 4 \, \frac{(n-1)!}{(n+2)!} \ = \ \frac{4}{n(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

- Si $n = 1$, $[Z = 1] = R_1$. Donc : $\mathbb{P}([Z = 1]) = \mathbb{P}(R_1) = \dfrac{2}{3}$.
  On en déduit que la formule précédente est vérifiée pour $n = 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } Z(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}([Z = n]) = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}.}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}$. La v.a.r. Z admet un moment d'ordre k si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n^k \dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}$ est absolument convergente. Ceci revient à démontrer la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{n^k}{n(n+1)(n+2)}$, car elle est à termes positifs.
- Enfin :

$$\frac{n^k}{(n+1)(n+2)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^k}{n^3} = \frac{1}{n^{3-k}} \ (\geqslant 0)$$

Or la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^{3-k}}$ est une série de Riemann d'exposant $3-k$.
Elle est donc convergente si et seulement si $3-k > 1$ soit $k < 2$.
Ainsi, par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n^k \dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}$ est convergente si et seulement si $k < 2$.

Ainsi, la v.a.r. Z admet un moment d'ordre 1 (et donc une espérance) mais n'admet pas de moment d'ordre 2 (et donc de variance).

□

Partie III : Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

On définit, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si l'on obtient une boule rouge au $k^{\text{ème}}$ tirage et égale à 0 sinon.
On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges obtenues au cours des n premiers tirages.

5. Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre S_n et certaines variables aléatoires X_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

□

6. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$.
- De plus : $[X_1 = 1] = R_1$ et $[X_1 = 0] = B_1$.
Initialement, l'urne contient 2 boules rouges et une boule bleue. On en déduit :

$$\mathbb{P}([X_1 = 1]) = \mathbb{P}(R_1) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X_1 = 0]) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{3}$$

Ainsi, $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{2}{3}\right)$. On en déduit : $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{2}{3}$ et $\mathbb{V}(X_1) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{9}$.

□

7. a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).

Démonstration.

- D'après l'énoncé, $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{0, 1\}$.
- Soit $i \in [\![0, 1]\!]$ et soit $j \in [\![0, 1]\!]$. Comme $\mathbb{P}([X_1 = i]) \neq 0$:

$$\mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \mathbb{P}([X_1 = i]) \times \mathbb{P}_{[X_1 = i]}([X_2 = j])$$

- Si $i = 0$:
  × $\mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = \mathbb{P}([X_1 = 0]) \times \mathbb{P}_{[X_1=0]}([X_2 = 0]) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{6}$.
  × $\mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]) = \mathbb{P}([X_1 = 0]) \times \mathbb{P}_{[X_1=0]}([X_2 = 1]) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{6}$.
  En effet, si l'événement $[X_1 = 0]$ est réalisé, c'est qu'on a tiré une boule bleue au premier tirage. Lors du deuxième tirage, l'urne contient alors 2 boules rouges et 2 boules bleues.
- Si $i = 1$, on obtient de même :
  × $\mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) = \mathbb{P}([X_1 = 0]) \times \mathbb{P}_{[X_1=1]}([X_2 = 0]) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{6}$.
  × $\mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \mathbb{P}([X_1 = 0]) \times \mathbb{P}_{[X_1=1]}([X_2 = 1]) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{2}$.
  En effet, si l'événement $[X_1 = 1]$ est réalisé, c'est qu'on a tiré une boule rouge au premier tirage. Lors du deuxième tirage, l'urne contient alors 3 boules rouges et 1 boule bleue.
- En résumé, la loi du couple (X_1, X_2) est donnée par le tableau suivant.

$y \in X_2(\Omega)$ \ $x \in X_1(\Omega)$	0	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

□

b) En déduire la loi de X_2.

Démonstration.

- La famille $([X_1 = 0], [X_1 = 1])$ forme un système complet d'événements.
  D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}([X_2 = 0]) = \mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) + \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

- Enfin :

$$\mathbb{P}([X_2 = 1]) = 1 - \mathbb{P}([X_2 = 0]) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{2}{3}\right).}$$

Commentaire

On note au passage que les v.a.r. X_1 et X_2 ont même loi.

Commentaire

Cela correspond à sommer les colonnes du tableau précédent. Plus précisément :

$x \in X_1(\Omega)$ \ $y \in X_2(\Omega)$	0	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbb{P}([X_2 = y])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

□

c) Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Démonstration.
On remarque :

$$\mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{9} = \mathbb{P}([X_1 = 0]) \times \mathbb{P}([X_2 = 0])$$

$$\boxed{\text{On en déduit que les v.a.r. } X_1 \text{ et } X_2 \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Commentaire

Ce résultat semble logique : le résultat du premier tirage influe sur le contenu de l'urne (ajout d'une boule bleue ou rouge) avant le deuxième tirage.

□

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

a) Calculer $\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$.

Démonstration.
On considère ici que $n \geqslant 2$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$.
(on reviendra sur ce point dans la remarque)

- Notons $A_k = R_1 \cap \ldots \cap R_k$. D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n) \\
= \ & \mathbb{P}(A_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n) \\
= \ & \mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}_{A_k}(B_{k+1}) \times \mathbb{P}_{A_k \cap B_{k+1}}(B_{k+2}) \times \ldots \times \mathbb{P}_{A_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_{n-1}}(B_n) \\
= \ & \frac{2}{k+2} \times \frac{1}{k+3} \times \frac{2}{k+4} \times \ldots \times \frac{n-k}{n+2} \\
= \ & 2\, \frac{(k+1)!}{(k+1)!}\, \frac{1 \times 2 \times \ldots \times (n-k)}{(k+2) \times (k+3) \times \ldots \times (n+2)} \\
= \ & 2\, \frac{(k+1)!\ (n-k)!}{(n+2)!}
\end{aligned}$$

- En effet, d'après la question ***3.a)***, on sait :

$$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k) = \frac{2}{k+2}$$

- D'autre part, on a utilisé le fait, que pour tout $j \in [\![1, n-k]\!]$:

$$\mathbb{P}_{A_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_{k+(j-1)}}(B_{k+j}) = \frac{j}{k+j+2}$$

En effet, si l'événement $A_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_{k+(j-1)}$ est réalisé c'est qu'on a tiré k boules rouges suivies de $j-1$ boules bleues. Juste avant le $(k+j)^{\text{ème}}$ tirage, l'urne est alors constituée de :

× $2+k = k+2$ boules rouges,

× $1+(j-1) = j$ boules bleues,

× et donc de $(k+2)+j = k+j+2$ boules en tout.

- On note enfin que l'utilisation de la formule des probabilités composées est valide puisque : $\mathbb{P}(A_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n) \neq 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour tout } n \geqslant 2 \text{ et pour tout } k \in [\![1, n-1]\!] :\\ \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n) = 2\ \dfrac{(k+1)!\ (n-k)!}{(n+2)!}\end{array}}$$

Commentaire

- Il y avait plusieurs problèmes de définition concernant cette question. Faire varier k dans $[\![0, n]\!]$ n'a pas vraiment de sens puisque l'on peut alors former dans l'intersection d'événements :

  × R_0 qui n'est pas défini dans l'énoncé,

  × B_{n+1} alors que l'on s'arrête à B_n.

- Pour autant, ce n'est pas à proprement parler une erreur de l'énoncé.
  On doit en fait deviner ce que le concepteur a voulu modéliser :

  × si $k = 0$, l'événement considéré est $B_1 \cap \ldots \cap B_n$, et il est réalisé si on a tiré successivement n boules bleues lors des n premiers tirages.

  × si $k = n$, l'événement considéré est $R_1 \cap \ldots \cap R_n$, et il est réalisé si on a tiré successivement n boules rouges lors des n premiers tirages.

- On comprend alors mieux le cas $n = 1$: pour $k = 0$, on cherche la probabilité $\mathbb{P}(B_1)$ et pour $k = 1$, on cherche la probabilité $\mathbb{P}(R_1)$.

- Il faut enfin noter que la formule donnée dans ce corrigé reste valide pour ces deux cas limites. Par exemple, si $k = 0$, d'après la question ***4.*** :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_n) = 2\ \frac{n!}{(n+2)!}$$

  et la formule précédente donne : $2\ \dfrac{(0+1)!(n-0)!}{(n+2)!} = 2\ \dfrac{n!}{(n+2)!}$.

- On laisse le soin au lecteur de vérifier les autres cas.

□

b) Justifier : $\mathbb{P}([S_n = k]) = \dbinom{n}{k}\ \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$,
puis en déduire : $\mathbb{P}([S_n = k]) = \dfrac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$.

Démonstration.

- L'événement $[S_n = k]$ est réalisé par tous les n-tirages (successions de n tirages) qui contiennent k boules rouges. Un tel n-tirage est entièrement déterminé par :
  - × la position des k boules rouges.
    Autrement dit, le choix de k places parmi les n disponibles : $\dbinom{n}{k}$ possibilités.

  Il y a donc $\dbinom{n}{k}$ tels n-tirages en tout.
- Chacun de ces n-tirages a la même probabilité d'apparaître puisque l'ordre dans lequel les k boules rouges sont tirées n'a pas d'influence sur le résultat. Plus précisément :
  - × que l'on tire une boule rouge ou bleue, on ajoute toujours une boule dans l'urne.
  - × si l'on tire une boule bleue, seul le nombre de boules bleues est modifié pour les tirages suivants.
  - × si l'on tire une boule rouge, seul le nombre de boules rouges est modifié pour les tirages suivants.

  Ainsi, en reprenant la question ***8.a)*** avec des R_i (k tels événements présents) et B_j ($n-k$ tels événements présents) placés dans un ordre différent, on obtient la même probabilité.
  Par exemple :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_{n-k} \cap R_{n-k+1} \cap \ldots \cap R_n) = 2\ \frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} = \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{P}([S_n = k]) = \binom{n}{k}\ \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n).}$$

- Enfin, d'après la question ***8.a)*** :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([S_n = k]) & = & \dbinom{n}{k}\ \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n) \\[2mm] & = & \dfrac{n!}{k!\ \cancel{(n-k)!}}\ 2\ \dfrac{(k+1)!\ \cancel{(n-k)!}}{(n+2)!} \\[2mm] & = & 2\ \dfrac{n!}{(n+2)!}\ \dfrac{(k+1)!}{k!} \\[2mm] & = & 2\ \dfrac{k+1}{(n+1)(n+2)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([S_n = k]) = 2\ \frac{k+1}{(n+1)(n+2)}}$$

□

9. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et : $\mathbb{E}(S_n) = \dfrac{2n}{3}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $S_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Ainsi, S_n admet une espérance en tant que v.a.r. discrète finie.
- Par définition :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n) &= \sum_{k=0}^{n} k\ \mathbb{P}([S_n = k]) \\
&= \sum_{k=0}^{n} 2k \frac{k+1}{(n+1)(n+2)} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{8.b)}}\textit{)} \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^{n} k(k+1) \ = \ \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^{n} (k^2+k) \\
&= \frac{2}{\cancel{(n+1)}(n+2)} \left(\frac{n\cancel{(n+1)}(2n+1)}{6} + \frac{n\cancel{(n+1)}}{2} \right) \\
&= \frac{\cancel{2}}{(n+2)} \left(\frac{n(2n+1)}{3.\cancel{2}} + \frac{n}{\cancel{2}} \right) \ = \ \frac{1}{(n+2)} \left(\frac{n(2n+1)+3n}{3} \right) \\
&= \frac{1}{\cancel{(n+2)}} \frac{2n\cancel{(n+2)}}{3} \ = \ \frac{2n}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(S_n) = \frac{2n}{3}.}$$

□

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}_{[S_n=k]}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{k+2}{n+3}$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

- Si l'événement $[S_n = k]$ est réalisé, cela signifie qu'on a obtenu k boules rouges au cours des n premiers tirages (et donc $n-k$ boules bleues). Ainsi, à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage, l'urne contient :
  - × $2+k$ boules rouges (les 2 boules rouges initialement présentes dans l'urne et les k boules rouges ajoutées lors des tirages),
  - × $1+(n-k)$ boules bleues (la boule bleue présente initialement dans l'urne et les $n-k$ boules bleues ajoutées lors des tirages).

  L'urne contient donc en tout $(2+\cancel{k}) + (1+n-\cancel{k}) = n+3$ boules.
- Le tirage de chaque boule est équiprobable, donc la probabilité d'obtenir une boule rouge au $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage, sachant que l'événement $[S_n = k]$ est réalisé, est $\dfrac{k+2}{n+3}$.

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}_{[S_n=k]}([X_{n+1} = 1]) = \frac{k+2}{n+3}}$$

□

b) En déduire : $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{\mathbb{E}(S_n) + 2}{n+3}$.

Démonstration.
La famille $([S_n = k])_{k \in [\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_{n+1} = 1] \cap [S_n = k]) \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}_{[S_n = k]}([X_{n+1} = 1])\, \mathbb{P}([S_n = k]) \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k+2}{n+3}\, \mathbb{P}([S_n = k]) \\ & = & \dfrac{1}{n+3} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}([S_n = k]) + 2 \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([S_n = k]) \right) \\ & = & \dfrac{1}{n+3} \left(\mathbb{E}(S_n) + 2 \times 1 \right) \qquad \textit{(car } ([S_n = k])_{k \in [\![0,n]\!]} \textit{ est un système complet d'événements)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{\mathbb{E}(S_n) + 2}{n+3}}$$

□

c) Déterminer alors la loi de la variable aléatoire X_{n+1}. Que remarque-t-on ?

Démonstration.

- $X_{n+1}(\Omega) = \{0, 1\}$
- Donc la v.a.r. X_{n+1} suit une loi de Bernoulli de paramètre :

$$p \ = \ \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{\mathbb{E}(S_n) + 2}{n+3} \ = \ \dfrac{\frac{2n}{3} + 2}{n+3} \ = \ \dfrac{1}{3}\, \dfrac{2n+6}{n+3} \ = \ \dfrac{1}{3}\, \dfrac{2\cancel{(n+3)}}{\cancel{n+3}} \ = \ \dfrac{2}{3}.$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X_{n+1} \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \dfrac{2}{3}.}$$

$$\boxed{\text{On remarque que la loi de } X_{n+1} \text{ ne dépend pas du nombre } n \text{ de tirages.}}$$

□

Partie IV : Étude d'une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la proportion de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $T_n = \dfrac{S_n}{n}$.

11. Justifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\forall x < 0$, $\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 0$, et : $\forall x > 1$, $\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 1$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On sait déjà : $S_n(\Omega) = [\![0, n]\!] = \{0, 1, 2, \ldots, n-1, n\}$.

$$\boxed{\text{Donc : } T_n(\Omega) = \left\{ 0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \dfrac{n-1}{n}, 1 \right\} \subset [0, 1].}$$

- Soit $x < 0$. Alors $[T_n \leqslant x] = \varnothing$, car $T_n(\Omega) \subset [0, 1]$. On a alors :

$$\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

- Soit $x > 1$. Alors $[T_n \leqslant x] = \Omega$, car $T_n(\Omega) \subset [0,1]$. On a alors :

$$\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 0$$

$$\boxed{\text{Donc } \forall x < 0,\ \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 0 \text{ et } \forall x > 1,\ \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 1.}$$

□

12. Soit $x \in [0,1]$. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)},$$

où $\lfloor . \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{S_n}{n} \leqslant x\right]\right) = \mathbb{P}([S_n \leqslant nx]) \\
&= \mathbb{P}([S_n \leqslant \lfloor nx \rfloor]) && \textit{(car } S_n \textit{ est une v.a.r. à valeurs entières)} \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} [S_n = k]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \mathbb{P}([S_n = k]) && \textit{(par réunion d'événements incompatibles)} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} 2\frac{k+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} (k+1) \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^{\lfloor nx \rfloor + 1} k \\
&= \frac{\cancel{2}}{(n+1)(n+2)} \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{\cancel{2}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)}.}$$

□

13. En déduire que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité, dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

Démonstration.

- × Soit $x < 0$. $\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 0$ d'après la question ***11***. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 0$.
  × Soit $x > 1$. $\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 1$, toujours d'après la question ***11***. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 1$.
  × Soit $x \in [0,1]$.
  Par définition de la partie entière : $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leqslant nx$. Donc :

$$nx < \lfloor nx \rfloor + 1 \leqslant nx + 1, \quad \text{d'où} \quad \frac{nx}{n+1} < \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n+1} \leqslant \frac{nx+1}{n+1}$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nx}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cancel{n}x}{\cancel{n}} = x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nx+1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cancel{n}x}{\cancel{n}} = x$.

Donc, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor nx\rfloor+1}{n+1} = x$.

De même : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor nx\rfloor+2}{n+2} = x$.

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = x^2$.

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([T_n \leqslant x])) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Montrons que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
  - × F est une fonction croissante.
  - × $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
  - × F est continue sur $]-\infty, 0[$, sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

    De plus $\lim\limits_{x\to 0^-} F(x) = 0 = 0^2 = F(0)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} F(x) = 1 = 1^2 = F(1)$.

    Donc F est continue sur $\mathbb{R}$.
  - × F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0 et en 1.

  Finalement F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
- Déterminons une densité f associée à F.

  Pour déterminer une densité de F, on dérive F sur des intervalles **ouverts**. Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - × Si $x \in]-\infty, 0[$: $f(x) = F'(x) = 0$.
  - × Si $x \in]1, +\infty[$: $f(x) = F'(x) = 0$.
  - × Si $x \in]0, 1[$: $f(x) = F'(x) = 2x$.
  - × On choisit des valeurs arbitraires pour f en 0 et 1 : $f(0) = 0$ et $f(1) = 2$.

$(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité de fonction de répartition :

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{et de densité } f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Commentaire

- Le programme officiel liste certaines propriétés d'une fonction de répartition F :
  1. F est croissante.
  2. F est continue à droite en tout point.
  3. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
  4. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

  Cependant, il n'est pas précisé qu'il s'agit là d'une caractérisation d'une fonction de répartition : toute fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés ***1.***, ***2.***, ***3.*** et ***4.*** peut être considérée comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire.
- L'utilisation de la caractérisation ci-dessus ne semble apparaître que dans ce type de question traitant de la convergence en loi. Ce type de question apparaît aussi dans le sujet d'EML 2016.

  Il est donc conseillé de connaître la caractérisation ci-dessus.

□

ESSEC-I 2017 : le sujet

Est-il possible que le marketing digital pose des problèmes de sécurité des données personnelles ? De récents travaux mettant en cause les outils de mesure de performance en temps réel des différentes campagnes de publicité sur internet, démontrent que certaines données très sensibles (préférences religieuses, sexuelles, etc.) peuvent être obtenues par des segmentations précises des audiences et sans aucune action de la part de l'utilisateur.

Dans ce problème, nous nous intéressons à une méthode proposée pour protéger ces données, méthode baptisée **confidentialité différentielle**.

Les parties I et II sont totalement indépendantes. Vous trouverez une aide **Scilab** en fin de sujet.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ sur lequel sont définies les variables aléatoires qui apparaissent dans l'énoncé.

Partie I - Lois de Laplace - propriétés et simulation

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$. On dit qu'une variable aléatoire réelle à densité suit une loi de Laplace de paramètre (α, β), notée $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$, si elle admet comme densité la fonction f donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{2\beta}\ \exp\left(-\frac{|t-\alpha|}{\beta}\right)$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle.

2. Déterminer la fonction de répartition, notée Ψ, de la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.

3. On suppose que X suit la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.

a) Montrer que $\beta X + \alpha$ suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

b) En déduire la fonction de répartition de la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

4. *Espérance et variance.*

a) On suppose que X suit la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.
Montrer que $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ existent et valent respectivement 0 et 2.

b) En déduire l'existence et les valeurs de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire réelle qui suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

5. *Simulation à partir d'une loi exponentielle.*
Soit U une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1 et V une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et indépendante de U.

a) En utilisant le système complet naturellement associé à V, montrer que $X = (2V-1)\,U$ suit la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.

b) Compléter la définition **Scilab** ci-dessous pour que la fonction ainsi définie réalise la simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$:

```
function r = Laplace(alpha, beta)
    if --- <= 1/2
        V = 1
    else
        V = 0
    end
    X = (2 * V - 1) * grand(1, 1, 'exp', 1)
    r = ---
endfunction
```

Partie II - Lois ε-différentielles

Soit $\varepsilon > 0$. On dit que (X, Y), un couple de variables aléatoires, est un couple ε-différentiel si, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{-\varepsilon}\, \mathbb{P}([X \in I]) \leqslant \mathbb{P}([Y \in I]) \leqslant \mathrm{e}^{\varepsilon}\, \mathbb{P}([X \in I])$$

Intuitivement, les lois de X et Y seront d'autant plus proches que le plus petit ε tel que (X, Y) soit un couple ε-différentiel est proche de 0.

6. Soit (X, Y, Z) un triplet de variables aléatoires réelles.

a) Montrer que si (X, Y) est ε-différentiel alors (Y, X) l'est aussi.

b) Montrer que si (X, Y) est ε-différentiel et (Y, Z) est ε'-différentiel alors (X, Z) est $(\varepsilon + \varepsilon')$-différentiel.

7. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes.
On suppose que $X(\Omega) \cup Y(\Omega) = \{z_n \mid n \in J\}$ où J est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$.

Montrer que (X, Y) est ε-différentiel si et seulement si

$$\forall n \in J,\ \mathrm{e}^{-\varepsilon}\, \mathbb{P}([X = z_n]) \leqslant \mathbb{P}([Y = z_n]) \leqslant \mathrm{e}^{\varepsilon}\, \mathbb{P}([X = z_n])$$

8. *Premier exemple.*
Dans cette question, on suppose que X suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$, Z suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ et elles sont indépendantes. On pose $Y = X + Z$.

a) Déterminer la loi de Y.

b) Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $1 - p \leqslant \dfrac{\mathbb{P}([Y = k])}{\mathbb{P}([X = k])} \leqslant \dfrac{1}{1 - p}$.

c) En déduire que (X, Y) est $-\ln(1 - p)$-différentiel.

d) Que ce passe-t-il lorsque p s'approche de 0 ou lorsqu'il s'approche de 1 ? Était-ce prévisible ?

9. On suppose que X et Y sont deux variables à densité de densités respectives f et g et de fonction de répartition F et G.

a) On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{-\varepsilon} f(t) \leqslant g(t) \leqslant \mathrm{e}^{\varepsilon} f(t)$.
Montrer que (X, Y) est ε-différentiel.

9782340-026636_001_784.indd 392 30/07/2018 09:52

b) On suppose dans la suite de cette question que (X, Y) est ε-différentiel.
Soit $h > 0$ et $t \in \mathbb{R}$ où f et g sont continues.

Montrer que :

$$\mathrm{e}^{-\varepsilon}\ \frac{F(t+h) - F(t)}{h} \ \leqslant\ \frac{G(t+h) - G(t)}{h} \ \leqslant\ \mathrm{e}^{\varepsilon}\ \frac{F(t+h) - F(t)}{h}$$

En conclure que : $\mathrm{e}^{-\varepsilon} f(t) \ \leqslant\ g(t) \ \leqslant\ \mathrm{e}^{\varepsilon}\ f(t)$.

10. *Deuxième exemple : lois de Cauchy.*

a) Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\, dt$ converge. On admet que cette intégrale est égale à π.

b) On définit, pour $a > 0$, la fonction f_a sur $\mathbb{R}$ par, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_a(t) = \dfrac{a}{\pi\ (t^2 + a^2)}$.
Montrer que f_a est une densité de probabilité d'une variable aléatoire à densité.

c) On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires admettant comme densités respectives f_1 et f_a avec $a > 1$.
Montrer que (X, Y) est $\ln(a)$-différentiel.

11. *Une première interprétation.*
On suppose que (X, Y) est un couple ε-différentiel et que U est une variable de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0, 1[$ indépendante de X et Y.
On définit la variable aléatoire Z par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } U(\omega) = 1 \\ Y(\omega) & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{P}([Z \in I]) \neq 0$.

Montrer que :

$$\mathbb{P}_{[Z\in I]}([U = 1]) = p\ \frac{\mathbb{P}([X \in I])}{p\ \mathbb{P}([X \in I]) + (1-p)\ \mathbb{P}([Y \in I])}$$

En déduire que :

$$\frac{p}{p + (1-p)\ \mathrm{e}^{\varepsilon}} \ \leqslant\ \mathbb{P}_{[Z\in I]}([U = 1]) \ \leqslant\ \frac{p}{p + (1-p)\ \mathrm{e}^{-\varepsilon}}$$

b) Si ε est proche de zéro, le fait de disposer d'une information sur la valeur de Z change-t-il notablement le paramètre de la loi de U et par conséquent la probabilité d'en déduire la valeur prise par U ?

Partie III - Confidentialité différentielle

- Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On considère $D = [\![0, d]\!]$ et n un entier naturel plus grand que 2.
- On dira que deux éléments de D^n, a et b, sont voisins s'ils ne diffèrent que d'une composante au plus. On note $\mathcal{V}$ l'ensemble des couples de voisins.
- On considère q une application de D^n dans $\mathbb{R}$.

Concrètement, un élément de D^n représente une table d'une base de données et q une requête sur cette base. Étant donné $a = (a_1, \ldots, a_n)$, on s'intéresse au problème de la confidentialité de certains des a_i lorsque les autres a_i sont connus, ainsi que D, q et $q(a)$.

12. Dans cette question on suppose que $a_2, \dots, a_n$ sont connus et on cherche à protéger a_1.

a) Quelle est probabilité d'obtenir la bonne valeur de a_1 si l'on choisit une valeur au hasard dans $[\![0, d]\!]$?

b) Dans cette question $q(a_1, \dots, a_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$.

Montrer que si $q(a)$ est publique alors on sait déterminer la valeur de a_1.

On dit que l'on dispose d'un procédé de ε-confidentialité de D^n pour q si :

(c1) pour tout $a \in D^n$, on dispose d'une variable aléatoire réelle X_a ;

(c2) pour tout $(a, b) \in \mathcal{V}$, (X_a, X_b) est ε-différentiel.

(c3) pour tout $a \in D^n$, $\mathbb{E}(X_a) = q(a)$.

13. *Majoration de la probabilité de trouver a_1.*

Dans cette question, nous allons justifier en partie la terminologie.

On suppose à nouveau que $a_2, \dots, a_n$ sont connus, que l'on cherche à protéger a_1 et que :

- × le public connaît des d'intervalles $I_0, \dots, I_d$ disjoints de réunion $\mathbb{R}$ tels qu'avec les valeurs fixées de $a_2, \dots, a_n$, si $q(a) \in I_j$ alors $a_1 = j$. Cela signifie que si $q(a)$ est publique alors a_1 aussi.
- × on dispose d'un procédé de ε-confidentialité de D^n pour q et que l'on rend X_a publique à la place de $q(a)$.

On considère alors que l'expérience aléatoire modélisée par $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ comporte comme première étape le choix au hasard de a_1 dans $[\![0, d]\!]$ et on définit :

- × A_1 la variable aléatoire associée à ce choix ;
- × pour tout $j \in [\![0, d]\!]$, $Y_j = X_{(j, a_2, \dots, a_n)}$.
  On suppose que A_1 et Y_j sont indépendantes pour tout $j \in D$.
- × la variable aléatoire réelle R par :

$$\forall \omega \in \Omega, \text{ si } A_1(\omega) = j \text{ alors on détermine l'unique } k \text{ tel que } Y_j(\omega) \in I_k \text{ et on pose } R(\omega) = k$$

- × $\theta = \mathbb{P}([R = A_1])$.

a) Montrer que $\theta = \sum\limits_{j=0}^{d} \mathbb{P}([Y_j \in I_j] \cap [A_1 = j])$.

b) En déduire que $\theta = \dfrac{1}{d+1} \sum\limits_{j=0}^{d} \mathbb{P}([Y_j \in I_j])$.

c) En conclure que :

$$\theta \leqslant \frac{1}{d+1} \left(e^{\varepsilon} - (e^{\varepsilon} - 1)\, \mathbb{P}([Y_0 \in I_0]) \right) \leqslant \frac{e^{\varepsilon}}{d+1}$$

d) On pose $\rho = \dfrac{1}{d+1}$ et $\tau = \dfrac{\theta - \rho}{\rho}$.

Donner une majoration de τ. Que représente cette quantité ?

Qu'en déduire concernant la méthode de confidentialité présentée dans cette question lorsque ε est proche de 0 ?

On pose $\delta = \max\limits_{(a,b)\in\mathcal{V}} |q(a) - q(b)|$ et on suppose que $\delta > 0$.

14. Dans cette question, pour tout $a \in D^n$, on pose $X_a = q(a) + Y$ où Y suit la loi de Laplace de paramètre $(0, \beta)$.

a) Pour tout $a \in D^n$, déterminer $\mathbb{E}(X_a)$ et une densité de probabilité f_a de la loi de X_a en fonction de $q(a)$ et de β.

b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $(a,b) \in \mathcal{V}$, $f_a(t) \leqslant \exp\left(\dfrac{\delta}{\beta}\right) f_b(t)$.

En déduire que pour tout $(a,b) \in \mathcal{V}$, (X_a, X_b) est $\dfrac{\delta}{\beta}$-différentiel.

c) Comment choisir β pour disposer alors d'un procédé de ε-confidentialité de D^n pour q ?

15. Dans cette question, pour tout $a = (a_1, \dots, a_n)$ appartenant à D^n, $q(a) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

a) Quelle est la valeur de δ ?

On utilise dans la suite le procédé de ε-confidentialité tel qu'il a été défini dans la question ***14.*** mais au lieu de publier la valeur X_a, on procède ainsi :

× si $X_a < \frac{1}{2}$ on publie 0 ;

× si $X_a \in [k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}[$ où $k \in [\![1, nd-1]\!]$, on publie k ;

× sinon on publie nd.

b) Montrer que la valeur aléatoire Z_a publiée vérifie :

$$Z_a = \begin{cases} 0 & \text{si } X_a < \frac{1}{2} \\ \lfloor X_a + \frac{1}{2} \rfloor & \text{si } X_a \in [\frac{1}{2}, nd - \frac{1}{2}[\\ nd & \text{si } X_a \geqslant nd - \frac{1}{2} \end{cases}$$

c) Écrire un script qui pour d, n et ε saisis par l'utilisateur, génère une valeur aléatoire de $a \in D^n$ puis affiche $q(a)$ et Z_a.

d) Pour $n = 1000$, $d = 4$ et ε choisi par l'utilisateur, écrire un script qui estime la valeur moyenne de $\dfrac{|Z_a - q(a)|}{q(a)}$ (on considèrera que $q(a)$ est toujours non nul).

N.B. À titre d'information, on obtient le tableau de valeurs suivant :

ε	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2
Moyenne	1.91%	1%	0.6%	0.5%	0.3%	0.3%	0.28%	0.2%	0.2%	0.19%	0.17%	0.16%

ESSEC-I 2017 : le corrigé

Est-il possible que le marketing digital pose des problèmes de sécurité des données personnelles ? De récents travaux mettant en cause les outils de mesure de performance en temps réel des différentes campagnes de publicité sur internet, démontrent que certaines données très sensibles (préférences religieuses, sexuelles, etc.) peuvent être obtenues par des segmentations précises des audiences et sans aucune action de la part de l'utilisateur.

Dans ce problème, nous nous intéressons à une méthode proposée pour protéger ces données, méthode baptisée **confidentialité différentielle**.

Les parties I et II sont totalement indépendantes. Vous trouverez une aide **Scilab** en fin de sujet.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ sur lequel sont définies les variables aléatoires qui apparaissent dans l'énoncé.

Partie I - Lois de Laplace - propriétés et simulation

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$. On dit qu'une variable aléatoire réelle à densité suit une loi de Laplace de paramètre (α, β), notée $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$, si elle admet comme densité la fonction f donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{2\beta}\ \exp\left(-\frac{|t-\alpha|}{\beta}\right)$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $f = f_2 \circ f_1$ où :
  - × $f_1 : t \mapsto \dfrac{-1}{\beta}\ |t-\alpha|$ est :
    - continue sur $\mathbb{R}$ car la fonction valeur absolue l'est,
    - telle que : $f_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
  - × $f_2 : t \mapsto \dfrac{1}{2\beta}\ \exp(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

- Tout d'abord, $\beta > 0$, donc on a : $\dfrac{1}{2\beta} > 0$. De plus, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\exp(u) > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{2\beta}\ \exp\left(-\frac{|t-\alpha|}{\beta}\right) \geqslant 0.}$$

- Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge et vaut 1.
  - Sous réserve de convergence, commençons par effectuer le changement de variable $\boxed{u = t - \alpha}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = t-\alpha \quad \text{(et donc } t = u+\alpha) \\ \hookrightarrow du = dt \\ \bullet\ t = -\infty \ \Rightarrow\ u = -\infty \\ \bullet\ t = +\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \end{array}\right.$$

  - Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto u + \alpha$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, +\infty[$.
    On obtient alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\beta}\ \exp\left(-\frac{|t-\alpha|}{\beta}\right)\ dt \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\beta}\ \exp\left(-\frac{|u|}{\beta}\right)\ du$$

– L'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\beta}\ \exp\left(-\frac{|u|}{\beta}\right)\ du$ est convergente si et seulement si les intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2\beta}\ \exp\left(-\frac{|u|}{\beta}\right)\ du$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2\beta}\ \exp\left(-\frac{|u|}{\beta}\right)\ du$ le sont.

– La fonction $g : u \mapsto \dfrac{1}{2\beta}\ \exp\left(-\dfrac{|u|}{\beta}\right)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, pour tout $A \in [0, +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^A g(u)du$ est bien définie. De plus :

$$\begin{aligned}
\int_0^A g(u)\ du &= \int_0^A \frac{1}{2\beta}\ \exp\left(-\frac{|u|}{\beta}\right)\ du \ = \ \frac{1}{2\beta} \int_0^A \exp\left(-\frac{u}{\beta}\right)\ du \\
&= \frac{-\cancel{\beta}}{2\cancel{\beta}} \int_0^A \frac{-1}{\beta} \exp\left(-\frac{u}{\beta}\right)\ du \\
&= \frac{-1}{2}\ \left[\ \mathrm{e}^{-\frac{u}{\beta}}\ \right]_0^A \\
&= \frac{-1}{2}\ \left(\mathrm{e}^{-\frac{A}{\beta}} - \mathrm{e}^{-\frac{0}{\beta}}\right) \ = \ \frac{1}{2}\ \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{A}{\beta}}\right) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

En effet, comme $-\frac{A}{\beta} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $\mathrm{e}^{-\frac{A}{\beta}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\text{L'intégrale impropre } \int_0^{+\infty} g(u)\ du \text{ est convergente. De plus : } \int_0^{+\infty} g(u)\ du = \frac{1}{2}.}$$

– On remarque enfin que la fonction g est impaire :

$$\forall u \in \mathbb{R},\ g(-u) \ = \ \frac{1}{2\beta}\ \exp\left(-\frac{|-u|}{\beta}\right) \ = \ \frac{1}{2\beta}\ \exp\left(-\frac{|u|}{\beta}\right) \ = \ g(u)$$

Ainsi, en posant le changement de variable $\boxed{v = -u}$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} g(u)\ du \ = \ \int_0^{-\infty} g(-v)(-dv) \ = \ -\int_0^{-\infty} g(v)\ dv \ = \ \int_{-\infty}^0 g(v)\ dv$$

On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^0 g(v)\ dv$ est convergente.

Il en est de même de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$. Et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\ du \ = \ \int_{-\infty}^0 g(u)\ du + \int_0^{+\infty} g(u)\ du \ = \ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 1.}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est bien la densité d'une variable aléatoire réelle.}}$$

Commentaire

- Le programme officiel précise que « les changements de variables **non affines** ne seront pratiqués qu'avec des intégrales sur un segment ». Il est donc autorisé, sous réserve de convergence, d'effectuer un changement de variable affine sur une intégrale généralisée (ce qui est fait dans cette question).
- Le changement de variable $\boxed{u = t - \alpha}$ permet de bénéficier de la parité de la fonction g. Il est aussi possible de travailler directement avec f comme ci-après.
  - L'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente si et seulement si les intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^{\alpha} f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} f(t)\ dt$ le sont.
  - La fonction f est continue sur $[\alpha, +\infty[$.
    Ainsi, pour tout $A \in [\alpha, +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\alpha}^{A} f(t)\ dt$ est bien définie. De plus :

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{A} f(t)\ dt &= \int_{\alpha}^{A} \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|t-\alpha|}{\beta}\right)\ dt \\ &= \frac{-\cancel{\beta}}{2\cancel{\beta}} \int_{\alpha}^{A} \frac{-1}{\beta} \exp\left(-\frac{t-\alpha}{\beta}\right)\ dt \\ &= \frac{-1}{2} \left[\ \mathrm{e}^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}\ \right]_{\alpha}^{A} \\ &= \frac{-1}{2} \left(\mathrm{e}^{-\frac{A-\alpha}{\beta}} - \mathrm{e}^{0}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{A-\alpha}{\beta}}\right) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\end{aligned}$$

  - De même, f est continue sur $]-\infty, \alpha]$.
    Ainsi, pour tout $B \in\ ]-\infty, \alpha]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{B}^{\alpha} f(t)\ dt$ est bien définie. De plus :

$$\begin{aligned}\int_{B}^{\alpha} f(t)\ dt &= \int_{B}^{\alpha} \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|t-\alpha|}{\beta}\right)\ dt = \frac{\cancel{\beta}}{2\cancel{\beta}} \int_{B}^{\alpha} \frac{1}{\beta} \exp\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right)\ dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\ \mathrm{e}^{\frac{t-\alpha}{\beta}}\ \right]_{B}^{\alpha} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{0} - \mathrm{e}^{\frac{B-\alpha}{\beta}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{B-\alpha}{\beta}}\right) \underset{B\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\end{aligned}$$

  Ainsi, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 1$.

$\square$

2. Déterminer la fonction de répartition, notée Ψ, de la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.

Démonstration.

- On considère ici le cas où $\alpha = 0$ et $\beta = 1$. On note alors $h : t \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t|}$.
  Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{x} h(t)\ dt = \lim_{B\to-\infty} \int_{B}^{x} h(t)\ dt$$

(cette limite existe et est finie d'après la question précédente)

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \leqslant 0$. Soit $B \in]-\infty, 0[$.

$$\int_B^x h(t)\ dt \ = \ \int_B^x \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-|t|}\ dt \ = \ \frac{1}{2} \int_B^x \mathrm{e}^t\ dt \ = \ \frac{1}{2}\ \Big[\ \mathrm{e}^t\ \Big]_B^x \ = \ \frac{1}{2}\ \left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^B\right) \underset{B \to -\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^x$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \leqslant 0,\ \Psi(x) = \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^x.}$$

  × si $x > 0$

$$\Psi(x) \ = \ \int_{-\infty}^x h(t)\ dt \ = \ \int_{-\infty}^0 h(t)\ dt \ + \ \int_0^x h(t)\ dt \ = \ \Psi(0) \ + \ \int_0^x h(t)\ dt$$

avec $\Psi(0) = \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^0 = \frac{1}{2}$ (d'après le calcul précédent) et :

$$\int_0^x h(t)\ dt \ = \ \int_0^x \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-|t|}\ dt \ = \ \int_0^x \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \ = \ \frac{1}{2}\ \Big[\ -\mathrm{e}^{-t}\ \Big]_0^x \ = \ \frac{-1}{2}\ \left(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-0}\right) \ = \ \frac{1}{2}\ \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x > 0,\ \Psi(x) \ = \ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right) \ = \ 1 - \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-x}.}$$

□

3. On suppose que X suit la loi $\mathcal{L}(0,1)$.

a) Montrer que $\beta X + \alpha$ suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

Démonstration.

- Notons $Y = \beta X + \alpha$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([\beta X + \alpha \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([\beta X \leqslant x - \alpha]) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant \tfrac{x-\alpha}{\beta}\right]\right) && \textit{(car } \beta > 0\textit{)} \\ &= \Psi\left(\tfrac{x-\alpha}{\beta}\right) \end{aligned}$$

Deux cas se présentent.

× Si $\frac{x-\alpha}{\beta} \leqslant 0$ autrement dit si $x \leqslant \alpha$. Alors :

$$\Psi\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) \ = \ \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{\frac{x-\alpha}{\beta}}$$

× Si $\frac{x-\alpha}{\beta} > 0$ autrement dit si $x > \alpha$. Alors :

$$\Psi\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) \ = \ 1 - \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}$$

$$\boxed{\text{En résumé : } F_Y : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{\frac{x-\alpha}{\beta}} & \text{si } x \leqslant \alpha \\ 1 - \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-\frac{x-\alpha}{\beta}} & \text{si } x > \alpha \end{cases}.}$$

- La fonction F_Y est continue sur $]-\infty, \alpha[$ car la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{x-\alpha}{\beta}}$ l'est comme la composée $F_2 \circ F_1$ où :

  × $F_1 : x \mapsto \frac{x-\alpha}{\beta}$ est :

    - continue sur $]-\infty, \alpha[$ car polynomiale,
    - telle que : $F_1(]-\infty, \alpha[) \subset \mathbb{R}$.

  × $F_2 : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

  On démontre de même que F_Y est continue sur $]\alpha, +\infty[$.

  Enfin :

  × $\displaystyle\lim_{x \to \alpha^-} F_Y(x) = \lim_{x \to \alpha} \frac{1}{2}\, \mathrm{e}^{\frac{x-\alpha}{\beta}} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^0 = \frac{1}{2}$,

  × $\displaystyle\lim_{x \to \alpha^+} F_Y(x) = \lim_{x \to \alpha} \left(1 - \frac{1}{2}\, \mathrm{e}^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}\right) = 1 - \frac{1}{2}\, \mathrm{e}^0 = \frac{1}{2}$.

  D'où : $\displaystyle\lim_{x \to \alpha^-} F_Y(x) = F_Y(\alpha) = \lim_{x \to \alpha^+} F_Y(x)$.

  $$\boxed{\text{Ainsi, } F_Y \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

  $$\boxed{\text{On démontre de même que } F_Y \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]-\infty, \alpha[\text{ et sur }]\alpha, +\infty[.}$$

- Ainsi, Y est une variable à densité. On obtient une densité f_Y en dérivant sur les intervalles ouverts :

  $$f_Y : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2\beta}\, \mathrm{e}^{\frac{x-\alpha}{\beta}} & \text{si } x < \alpha \\ \dfrac{1}{2\beta}\, \mathrm{e}^{-\frac{x-\alpha}{\beta}} & \text{si } x > \alpha \end{cases}$$

  que l'on complète en posant $f_Y(\alpha) = \dfrac{1}{2\beta}$.

  $$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R},\ f_Y(x) = \frac{1}{2\beta}\, \mathrm{e}^{-\frac{|x-\alpha|}{\beta}} = f(x).}$$

  $$\boxed{\text{On en conclut : } Y = \beta X + \alpha \hookrightarrow \mathcal{L}(\alpha, \beta).}$$

Commentaire

Le programme officiel précise que les candidats doivent savoir retrouver une densité de $aX + b$ (où $a \neq 0$), ce qui explique la rédaction choisie à cette question.
Cependant, on peut penser qu'un candidat utilisant directement l'expression de la densité d'une transformée affine se verrait attribuer la totalité des points.
On rappelle que, pour X une v.a.r. à densité et $Y = aX + b$ avec $a \neq 0$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_Y(x) = \frac{1}{|a|}\, f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

□

b) En déduire la fonction de répartition de la loi $\mathcal{L}(\alpha,\beta)$.

Démonstration.
Dans la question précédente, on a déterminé la fonction de répartition F_Y d'une v.a.r. Y et on a démontré : $Y \hookrightarrow \mathcal{L}(\alpha,\beta)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que la fonction de répartition de la loi } \mathcal{L}(\alpha,\beta) \text{ est :}\\ F : x \mapsto \left\{\begin{array}{cl} \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{x-\alpha}{\beta}} & \text{si } x \leqslant \alpha \\ 1-\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x-\alpha}{\beta}} & \text{si } x > \alpha \end{array}\right.\end{array}}$$

□

4. Espérance et variance.

a) On suppose que X suit la loi $\mathcal{L}(0,1)$.
Montrer que $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ existent et valent respectivement 0 et 2.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ h(t)\ dt$ est absolument convergente ce qui équivaut à démontrer sa convergence pour des calculs de moment de type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\ h(t)\ dt$.
- Remarquons alors que la fonction $t \mapsto t\ h(t)$ est impaire puisque h est paire :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ h(-t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|-t|} = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|t|} = h(t)$$

- Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ h(t)\ dt$ est convergente si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t\ h(t)\ dt$ l'est.

  En cas de convergence, à l'aide du changement de variable $\boxed{u=-t}$, on démontre :

$$\int_0^{+\infty} t\ h(t)\ dt = -\int_{-\infty}^{0} u\ h(u)\ du$$

  Et, dans ce cas, on peut alors conclure à l'aide de la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\ h(t)\ dt = \int_{-\infty}^{0} t\ h(t)\ dt + \int_{0}^{+\infty} t\ h(t)\ dt = 0$$

- Il reste à démontrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t\ h(t)\ dt$ est convergente.

  Or : $\forall t \in [0,+\infty[,\ \mathrm{e}^{-|t|} = \mathrm{e}^{-t}$. Ainsi on reconnaît, à une constante multiplicative près, l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{E}(1)$.
  On en déduit que cette intégrale impropre est convergente.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\ h(t)\ dt = 0.}$$

- Pour les mêmes raisons que celles qui précèdent, la v.a.r. X admet une variance si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\ h(t)\ dt$ est convergente.
- La fonction $t \mapsto t^2\ h(t)$ est paire.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\ h(t)\ dt$ est convergente si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^2\ h(t)\ dt$ l'est.
  Et, en cas de convergence :
  $$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\ h(t)\ dt = 2 \int_{0}^{+\infty} t^2\ h(t)\ dt = \int_{0}^{+\infty} 2\ t^2\ h(t)\ dt$$
- Or : $\forall t \in [0, +\infty[,\ 2\ t^2\ h(t) = t^2\ \mathrm{e}^{-|t|} = t^2\ \mathrm{e}^{-t}$.
  Ainsi on reconnaît, le moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z telle que : $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.
  On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} 2t^2\ h(t)\ dt$ est convergente.
- Déterminons alors $\mathbb{E}(Z^2)$. D'après la formule de Kœnig-Huygens :
  $$\begin{array}{ccccc} \mathbb{V}(Z) & = & \mathbb{E}\big(Z^2\big) & - & \big(\mathbb{E}(Z)\big)^2 \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ \dfrac{1}{1^2} & & & & \left(\dfrac{1}{1}\right)^2 \end{array}$$
  D'où : $\mathbb{E}\big(Z^2\big) = 1 + 1 = 2$.
- On en conclut que la v.a.r. X admet un moment d'ordre 2 et :
  $$\mathbb{E}\big(X^2\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\ h(t)\ dt = \int_{0}^{+\infty} 2t^2\ h(t)\ dt = \ \mathbb{E}\big(Z^2\big) = 2$$

$$\boxed{\text{Enfin, par la formule de Kœnig-Huygens : } \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\big(X^2\big) - \cancel{\big(\mathbb{E}(X)\big)^2} = 2.}$$

Commentaire

- On rappelle que la plupart des résultats sur les intégrales généralisées (comme la relation de Chasles ou les changements de variable affines) exigent la convergence des intégrales étudiées.
- Dans cette question on s'est ramené à l'étude d'une v.a.r. Z suivant une loi classique, ce qui permet de s'affranchir de longs calculs (on renvoie au cours pour ce qui est du calcul de $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{E}\big(Z^2\big)$). Évidemment, faire tous ces calculs n'est pas sanctionné le jour J. Mais la perte de temps qui en découle provoque, à terme, une perte de points. Il faut donc veiller à prendre du recul sur les questions posées.

□

b) En déduire l'existence et les valeurs de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire réelle qui suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

Démonstration.

- Soit X une v.a.r. telle que : $X \hookrightarrow \mathcal{L}(0, 1)$. D'après la question ***3.a)*** :
  $$\beta X + \alpha \hookrightarrow \mathcal{L}(\alpha, \beta)$$

- La v.a.r. $Y = \beta X + \alpha$ admet une espérance et une variance comme transformée affine de la v.a.r. X qui admet une espérance et une variance. De plus :
  - × par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\beta X + \alpha) = \beta\ \cancel{\mathbb{E}(X)} + \alpha = \alpha$.
  - × par propriété de la variance : $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(\beta X + \alpha) = \beta^2\ \mathbb{V}(X) = 2\beta^2$.

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \alpha \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y) = 2\beta^2}$$

Commentaire

- Le résultat de la question précédente étant donné par l'énoncé, il n'était pas nécessaire de la traiter pour pouvoir résoudre cette question. C'est une remarque très générale : même si l'on ne parvient pas à traiter complètement une question, il faut s'atteler à la suivante et celle qui suit encore. Il faut alors être vigilant et bien récupérer toutes les informations de l'énoncé.
- La manière de procéder ici est à rapprocher de celle du cours lors de l'étude des lois normales. On démontre (résultat à connaître) que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$:

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right) \ \Leftrightarrow\ aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}\left(am + b, a^2\sigma^2\right)$$

En particulier : $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right) \ \Leftrightarrow\ X^* = \dfrac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.
Ainsi, on peut déterminer l'espérance d'une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$ à l'aide de l'espérance et de la variance de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ en remarquant :
$X = \sigma X^* + m$.

□

5. *Simulation à partir d'une loi exponentielle.*
Soit U une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1 et V une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et indépendante de U.

a) En utilisant le système complet naturellement associé à V, montrer que $X = (2V - 1)\ U$ suit la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminons la fonction de répartition de X :

$$F_X(x) \ = \ \mathbb{P}([X \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([(2V - 1)\ U \leqslant x])$$

- La famille $([V = 0], [V = 1])$ est un système complet d'événements.
Ainsi, d'après la formule des probablités totales :

$$\begin{array}{rll}
& \mathbb{P}([(2V-1)\ U \leqslant x]) & \\
= & \mathbb{P}([V = 0] \cap [(2V-1)\ U \leqslant x]) + \mathbb{P}([V = 1] \cap [(2V-1)\ U \leqslant x]) & \\
= & \mathbb{P}([V = 0] \cap [-U \leqslant x]) + \mathbb{P}([V = 1] \cap [U \leqslant x]) & \\
= & \mathbb{P}([V = 0]) \times \mathbb{P}([-U \leqslant x]) + \mathbb{P}([V = 1]) \times \mathbb{P}([U \leqslant x]) & \textit{(car U et V sont indépendantes)} \\
= & \dfrac{1}{2}\ \mathbb{P}([-U \leqslant x]) + \dfrac{1}{2}\ \mathbb{P}([U \leqslant x]) & \textit{(car $V \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$)} \\
= & \dfrac{1}{2}\ \mathbb{P}([U \geqslant -x]) + \dfrac{1}{2}\ F_U(x) & \\
= & \dfrac{1}{2}\ (1 - \mathbb{P}([U < -x])) + \dfrac{1}{2}\ F_U(x) \ = \ \dfrac{1}{2}\ (1 - F_U(-x)) + \dfrac{1}{2}\ F_U(x) &
\end{array}$$

- Deux cas se présentent alors.
  × Si $x \leqslant 0$ alors $F_U(x) = 0$ et $F_U(-x) = 1 - \mathrm{e}^{-(-x)} = 1 - \mathrm{e}^{x}$. Dans ce cas :

$$F_X(x) \ = \ \frac{1}{2} \ (1 - F_U(-x)) + \frac{1}{2} \ F_U(x) \ = \ \frac{1}{2} \ (\cancel{1} - (\cancel{1} - \mathrm{e}^{x})) + \frac{1}{2} \ 0 \ = \ \frac{1}{2} \ \mathrm{e}^{x}$$

  × Si $x > 0$ alors $F_U(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ et $F_U(-x) = 0$. Dans ce cas :

$$F_X(x) \ = \ \frac{1}{2} \ (1 - F_U(-x)) + \frac{1}{2} \ F_U(x) \ = \ \frac{1}{2} \ (1 - 0) + \frac{1}{2} \ (1 - \mathrm{e}^{-x}) \ = \ 1 - \frac{1}{2} \ \mathrm{e}^{-x}$$

  On reconnaît la fonction de répartition Ψ associée à la loi $\mathcal{L}(0,1)$.
  Or, la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en conclut : } X = (2V-1)U \hookrightarrow \mathcal{L}(0,1).}$$

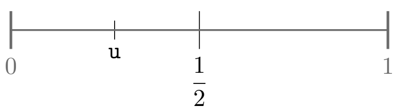
□

b) Compléter la définition **Scilab** ci-dessous pour que la fonction ainsi définie réalise la simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$:

```
1  function r = Laplace(alpha, beta)
2      if --- <= 1/2
3          V = 1
4      else
5          V = 0
6      end
7      X = (2 * V - 1) * grand(1, 1, 'exp', 1)
8      r = ---
9  endfunction
```

Démonstration.

- La fonction `rand` permet de simuler une v.a.r. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. Afin de simuler une v.a.r. V telle que $V \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ à l'aide de `rand`, on procède comme suit. L'appel `rand()` renvoie un réel `u` choisit aléatoirement dans $[0,1]$:



  Le réel `u` appartient à l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ avec probabilité :

$$\mathbb{P}\left(\left[U \in [0, \tfrac{1}{2}]\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}([V=1])$$

  Le réel `u` appartient à l'intervalle $]\frac{1}{2}, 1]$ avec probabilité :

$$\mathbb{P}\left(\left[U \in]\tfrac{1}{2}, 1]\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[U > \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}([V=0])$$

  C'est ce que réalise le programme demandé en complétant la ligne 2 comme suit :

```
2      if rand() <= 1/2
```

- L'instruction `grand(1, 1, 'exp', 1)` permet de simuler une v.a.r. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.
- D'après la question qui précède, l'instruction `X = (2 * V - 1) * grand(1, 1, 'exp', 1)` permet de simuler une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{L}(0,1)$.
- Enfin, d'après la question ***3.a)***, la v.a.r. $\beta X + \alpha \hookrightarrow \mathcal{L}(\alpha, \beta)$.
  On en déduit la ligne 8 du programme à compléter :

```
8    r = beta * X + alpha
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu dans cette question, on a détaillé sa réponse. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question. □

Partie II - Lois ε-différentielles

Soit $\varepsilon > 0$. On dit que (X, Y), un couple de variables aléatoires, est un couple ε-différentiel si, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$:

$$e^{-\varepsilon}\, \mathbb{P}([X \in I]) \leqslant \mathbb{P}([Y \in I]) \leqslant e^{\varepsilon}\, \mathbb{P}([X \in I])$$

Intuitivement, les lois de X et Y seront d'autant plus proches que le plus petit ε tel que (X, Y) soit un couple ε-différentiel est proche de 0.

6. Soit (X, Y, Z) un triplet de variables aléatoires réelles.

a) Montrer que si (X, Y) est ε-différentiel alors (Y, X) l'est aussi.

Démonstration.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

- Comme (X, Y) est ε-différentiel :

$$e^{-\varepsilon}\, \mathbb{P}([X \in I]) \leqslant \mathbb{P}([Y \in I]) \leqslant e^{\varepsilon}\, \mathbb{P}([X \in I])$$

- En multipliant l'inégalité de gauche par $e^{\varepsilon} > 0$, on obtient :

$$\mathbb{P}([X \in I]) \leqslant e^{\varepsilon}\, \mathbb{P}([Y \in I])$$

- En multipliant l'inégalité de droite par $e^{-\varepsilon} > 0$, on obtient :

$$e^{-\varepsilon}\, \mathbb{P}([Y \in I]) \leqslant \mathbb{P}([X \in I])$$

- Ainsi, en combinant ces deux résultats :

$$e^{-\varepsilon}\, \mathbb{P}([Y \in I]) \leqslant \mathbb{P}([X \in I]) \leqslant e^{\varepsilon}\, \mathbb{P}([Y \in I])$$

$\boxed{\text{Cette inégalité étant vérifiée pour tout } I \subset \mathbb{R}, \text{ on en déduit que } (Y, X) \text{ est } \varepsilon\text{-différentiel.}}$ □

b) Montrer que si (X,Y) est ε-différentiel et (Y,Z) est ε'-différentiel alors (X,Z) est $(\varepsilon+\varepsilon')$-différentiel.

Démonstration.
Soit I intervalle de $\mathbb{R}$.

- Tout d'abord, comme (Y,Z) est ε'-différentiel :

$$\mathrm{e}^{-\varepsilon'}\ \mathbb{P}([Y\in I]) \ \leqslant\ \mathbb{P}([Z\in I]) \ \leqslant\ \mathrm{e}^{\varepsilon'}\ \mathbb{P}([Y\in I])$$

- Comme (X,Y) est ε-différentiel : $\mathrm{e}^{-\varepsilon}\ \mathbb{P}([X\in I])\leqslant \mathbb{P}([Y\in I])$. En multipliant par $\mathrm{e}^{-\varepsilon'}>0$:

$$\mathrm{e}^{-\varepsilon}\ \mathrm{e}^{-\varepsilon'}\ \mathbb{P}([X\in I]) \ \leqslant\ \mathrm{e}^{-\varepsilon'}\ \mathbb{P}([Y\in I])$$

- Comme (X,Y) est ε-différentiel : $\mathbb{P}([Y\in I])\leqslant \mathrm{e}^{\varepsilon}\ \mathbb{P}([X\in I])$. En multipliant par $\mathrm{e}^{\varepsilon'}>0$:

$$\mathrm{e}^{\varepsilon'}\ \mathbb{P}([Y\in I]) \ \leqslant\ \mathrm{e}^{\varepsilon'}\ \mathrm{e}^{\varepsilon}\ \mathbb{P}([X\in I])$$

- En combinant ces résultats, on obtient :

$$\mathrm{e}^{-(\varepsilon+\varepsilon')}\ \mathbb{P}([X\in I]) \ \leqslant\ \mathrm{e}^{-\varepsilon'}\ \mathbb{P}([Y\in I]) \ \leqslant\ \mathbb{P}([Z\in I]) \ \leqslant\ \mathrm{e}^{\varepsilon'}\ \mathbb{P}([Y\in I]) \ \leqslant\ \mathrm{e}^{\varepsilon+\varepsilon'}\ \mathbb{P}([X\in I])$$

Cette inégalité étant vérifiée pour tout $I\subset\mathbb{R}$, on en déduit que (X,Z) est $(\varepsilon+\varepsilon')$-différentiel. □

7. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes.
On suppose que $X(\Omega)\ \cup\ Y(\Omega)=\{z_n \mid n\in J\}$ où J est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$.

Montrer que (X,Y) est ε-différentiel si et seulement si

$$\forall n\in J,\ \mathrm{e}^{-\varepsilon}\ \mathbb{P}([X=z_n]) \ \leqslant\ \mathbb{P}([Y=z_n]) \ \leqslant\ \mathrm{e}^{\varepsilon}\ \mathbb{P}([X=z_n])$$

Démonstration.
On procède par double implication.

($\Rightarrow$) On suppose que (X,Y) est ε-différentiel. Soit $n\in J$.
En notant $I=[z_n,z_n]\subset\mathbb{R}$, on obtient :

$$\begin{array}{cccccc} \mathrm{e}^{-\varepsilon} & \mathbb{P}([X\in I]) & \leqslant & \mathbb{P}([Y\in I]) & \leqslant\ \mathrm{e}^{\varepsilon} & \mathbb{P}([X\in I]) \\ & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ & \mathbb{P}([X=z_n]) & & \mathbb{P}([Y=z_n]) & & \mathbb{P}([X=z_n]) \end{array}$$

Ce qui démontre le résultat souhaité.

($\Leftarrow$) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors :

$$[Y\in I] \ =\ \bigcup_{\substack{y\,\in\,Y(\Omega)\\ y\,\in\,I}} [Y=y] \ =\ \bigcup_{\substack{n\,\in\,J\\ z_n\,\in\,I}} [Y=z_n]$$

Par incompatibilité des événements de la réunion :

$$\mathbb{P}\left([Y\in I]\right) \ =\ \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\substack{n\,\in\,J\\ z_n\,\in\,I}} [Y=z_n]\Big) \ =\ \sum_{\substack{n\,\in\,J\\ z_n\,\in\,I}} \mathbb{P}([Y=z_n])$$

(ces égalités sont aussi vérifiées pour la v.a.r. X)

Or, par hypothèse :

$$\forall n \in J,\ \mathrm{e}^{-\varepsilon}\ \mathbb{P}([X = z_n]) \ \leqslant\ \mathbb{P}([Y = z_n]) \ \leqslant\ \mathrm{e}^{\varepsilon}\ \mathbb{P}([X = z_n])$$

En sommant ces inégalités membre à membre, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{e}^{-\varepsilon} \displaystyle\sum_{\substack{n \in J \\ z_n \in I}} \mathbb{P}([X = z_n]) & \leqslant & \displaystyle\sum_{\substack{n \in J \\ z_n \in I}} \mathbb{P}([Y = z_n]) & \leqslant & \mathrm{e}^{\varepsilon} \displaystyle\sum_{\substack{n \in J \\ z_n \in I}} \mathbb{P}([X = z_n]) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \mathbb{P}([X = I]) & & \mathbb{P}([Y = I]) & & \mathbb{P}([X = I]) \end{array}$$

On a donc bien démontré que pour tout I intervalle de $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{-\varepsilon}\ \mathbb{P}([X = I]) \ \leqslant\ \mathbb{P}([Y = I]) \ \leqslant\ \mathrm{e}^{\varepsilon}\ \mathbb{P}([X = I])$$

Autrement dit, (X, Y) est bien ε-différentiel.

$$\boxed{(X, Y) \text{ est } \varepsilon\text{-différentiel} \quad \text{ssi} \quad \forall n \in J,\ \mathrm{e}^{-\varepsilon}\ \mathbb{P}([X = z_n]) \ \leqslant\ \mathbb{P}([Y = z_n]) \ \leqslant\ \mathrm{e}^{\varepsilon}\ \mathbb{P}([X = z_n]).}$$

Commentaire

- Pour pouvoir traiter cette question, il faut avoir compris que le caractère ε-différentiel est une propriété qui doit être démontrée pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$. Cette question revient à démontrer que, dans le cas où X et Y sont des v.a.r. discrètes, le caractère ε-différentiel est une propriété qui doit être démontrée seulement pour les intervalles I du type $I = [z_n, z_n]$ (ce qui permet d'écrire $[Y \in I] = [Y = z_n]$).
- Le sens direct est très abordable : si la propriété est vraie pour tout intervalle I, elle l'est en particulier pour des intervalles du type $I = [z_n, z_n]$.
- Le sens réciproque est bien plus complexe. En faisant l'hypothèse que la propriété est vraie pour des intervalles d'un type particulier (ceux qui s'écrivent $I = [z_n, z_n]$), on doit en déduire la propriété pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$.

□

8. *Premier exemple.*
Dans cette question, on suppose que X suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$, Z suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in\ ]0, 1[$ et elles sont indépendantes. On pose $Y = X + Z$.

a) Déterminer la loi de Y.

Démonstration.

- Tout d'abord, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Z(\Omega) = \{0, 1\}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
La famille $([Z = 0], [Z = 1])$ est un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Y = k]) & = & \mathbb{P}([X + Z = k]) & \\ & = & \mathbb{P}([Z = 0] \cap [X + Z = k]) + \mathbb{P}([Z = 1] \cap [X + Z = k]) & \\ & = & \mathbb{P}([Z = 0] \cap [X = k]) + \mathbb{P}([Z = 1] \cap [X + 1 = k]) & \\ & = & \mathbb{P}([Z = 0]) \times \mathbb{P}([X = k]) + \mathbb{P}([Z = 1]) \times \mathbb{P}([X = k - 1]) & \textit{(car } X \textit{ et } Z \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & (1 - p)\ \mathbb{P}([X = k]) + p\ \mathbb{P}([X = k - 1]) & \end{array}$$

Deux cas se présentent.

× Si $k = 1$ alors $[X = k-1] = [X = 0] = \varnothing$.

$$\mathbb{P}([Y = 1]) \;=\; (1-p)\,\mathbb{P}([X = 1]) + p\,\cancel{\mathbb{P}([X = 0])} \;=\; \frac{1-p}{2}$$

× Si $k \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y = k]) &= (1-p)\,\mathbb{P}([X = k]) + p\,\mathbb{P}([X = k-1]) \\ &= (1-p)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\frac{1}{2} + p\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}\frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k}((1-p)+2p) \;=\; \left(\frac{1}{2}\right)^{k}(1+p)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En résumé : } \mathbb{P}([Y = k]) = \begin{cases} \dfrac{1-p}{2} & \text{si } k = 1 \\[2ex] \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k}(1+p) & \text{si } k \geqslant 2 \end{cases}.}$$

□

b) Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $1-p \;\leqslant\; \dfrac{\mathbb{P}([Y = k])}{\mathbb{P}([X = k])} \;\leqslant\; \dfrac{1}{1-p}$.

Démonstration.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Deux cas se présentent.

- Si $k = 1$

$$\frac{\mathbb{P}([Y = 1])}{\mathbb{P}([X = 1])} \;=\; \frac{\frac{1-p}{2}}{\frac{1}{2}} \;=\; 1-p$$

Dans ce cas, on a bien : $1-p \leqslant \dfrac{\mathbb{P}([Y = 1])}{\mathbb{P}([X = 1])}$.

On raisonne par équivalence pour la deuxième inégalité. Comme $1-p \in \,]0,1[$:

$$1-p \;\leqslant\; \frac{1}{1-p} \;\Leftrightarrow\; (1-p)^2 \;\leqslant\; 1$$

Cette dernière inégalité est vérifiée car $1-p \in \,]0,1[$. Il en est donc de même de la première.

$$\boxed{1-p \;\leqslant\; \frac{\mathbb{P}([Y = 1])}{\mathbb{P}([X = 1])} \;\leqslant\; \frac{1}{1-p}}$$

- Si $k \geqslant 2$

$$\frac{\mathbb{P}([Y = k])}{\mathbb{P}([X = k])} \;=\; \frac{\cancel{(\frac{1}{2})^{k}}\,(1+p)}{\cancel{(\frac{1}{2})^{k-1}\,\frac{1}{2}}} \;=\; 1+p$$

Raisonnons par équivalence :

$$1-p \;\leqslant\; 1+p \;\Leftrightarrow\; 0 \;\leqslant\; 2p \;\Leftrightarrow\; 0 \;\leqslant\; p$$

Cette dernière inégalité est vérifiée. Il en est donc de même de la première.

De même :

$$1+p \;\leqslant\; \frac{1}{1-p} \;\Leftrightarrow\; 1-p^2 \;\leqslant\; 1 \;\Leftrightarrow\; 0 \;\leqslant\; p^2$$

Cette dernière inégalité est vérifiée. Il en est donc de même de la première.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \geqslant 2,\ 1-p \;\leqslant\; \frac{\mathbb{P}([Y = k])}{\mathbb{P}([X = k])} \;\leqslant\; \frac{1}{1-p}.}$$

□

c) En déduire que (X, Y) est $-\ln(1-p)$-différentiel.

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Ainsi, $X(\Omega) \ \cup \ Y(\Omega) \ = \ \mathbb{N}^*$.
- D'après la question ***7.***, pour démontrer que (X, Y) est $-\ln(1-p)$-différentiel, on doit vérifier :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{e}^{-(-\ln(1-p))}\, \mathbb{P}([X = k]) \ \leqslant \ \mathbb{P}([Y = k]) \ \leqslant \ \mathrm{e}^{-\ln(1-p)}\, \mathbb{P}([X = k])$$

  Ce qui équivaut, en divisant de part et d'autre par $\mathbb{P}([X = k]) > 0$, à :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{e}^{-(-\ln(1-p))} \ \leqslant \ \frac{\mathbb{P}([Y = k])}{\mathbb{P}([X = k])} \ \leqslant \ \mathrm{e}^{-\ln(1-p)}$$

- Or :

$$\mathrm{e}^{-(-\ln(1-p))} \ = \ \mathrm{e}^{\ln(1-p)} \ = \ 1-p \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{-\ln(1-p)} \ = \ \mathrm{e}^{\ln\left((1-p)^{-1}\right)} \ = \ (1-p)^{-1} \ = \ \frac{1}{1-p}$$

  Ainsi, le couple (X, Y) est $-\ln(1-p)$-différentiel si l'inégalité de la question précédente est vérifiée.

  $\boxed{\text{Le couple } (X, Y) \text{ est bien } -\ln(1-p)\text{-différentiel.}}$ □

d) Que ce passe-t-il lorsque p s'approche de 0 ou lorsqu'il s'approche de 1 ? Était-ce prévisible ?

Démonstration.

- Lorsque p s'approche de 0, $-\ln(1-p)$ s'approche de $-\ln(1) = 0$. Or les lois de X et Y sont d'autant plus proches que le plus petit ε rendant (X, Y) ε-différentiel est proche de 0.

  $\boxed{\text{Les lois de } X \text{ et } Y \text{ sont donc d'autant plus proches que } p \text{ s'approche de } 0.}$

  On pouvait s'attendre à ce résultat puisque, par définition : $Y = X + Z$ avec $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
  Ainsi, si p s'approche de 0, alors la probabilité $\mathbb{P}([X = Y]) = \mathbb{P}([Z = 0]) = 1 - p$ se rapproche de 1.
- Lorsque p s'approche de 1, $-\ln(1-p)$ s'approche de $+\infty$.
  L'inégalité obtenue en ***7.b)*** fournit une faible information : $\dfrac{\mathbb{P}([Y = k])}{\mathbb{P}([X = k])} \in [0, +\infty[$.

  Cela provient essentiellement du cas $k = 1$ pour lequel : $\dfrac{\mathbb{P}([Y = 1])}{\mathbb{P}([X = 1])} = 1 - p$.
  Le réel $\varepsilon = -\ln(1-p)$ est alors le meilleur choix (celui qui réalise l'égalité) pour assurer :

$$\mathrm{e}^{-\varepsilon} \ \leqslant \ \frac{\mathbb{P}([Y = 1])}{\mathbb{P}([X = 1])}$$

  On aurait pu s'attendre à cette difficulté amenée par le cas $k = 1$. En effet, si p s'approche de 0, alors la probabilité $\mathbb{P}([X = Y]) = \mathbb{P}([Z = 0]) = 1 - p$ se rapproche de 0. □

9. On suppose que X et Y sont deux variables à densité de densités respectives f et g et de fonction de répartition F et G.

a) On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{-\varepsilon} f(t) \ \leqslant \ g(t) \ \leqslant \ \mathrm{e}^{\varepsilon} f(t)$.
Montrer que (X, Y) est ε-différentiel.

Démonstration.

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
  On note a la borne inférieure de cet intervalle et b la borne supérieure (on a notamment $a \leqslant b$).
  Afin de couvrir tous les cas possibles, a et b sont des éléments de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

- Par hypothèse :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-\varepsilon} f(t) \ \leqslant\ g(t) \ \leqslant\ \mathrm{e}^{\varepsilon} f(t)$$
Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($a \leqslant b$) :
$$\begin{array}{ccccc} & \displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{-\varepsilon} f(t)\ dt & \leqslant \displaystyle\int_a^b g(t)\ dt \leqslant & \displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{\varepsilon} f(t)\ dt & \\ & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \\ \mathrm{e}^{-\varepsilon}\ \mathbb{P}([X \in I]) = & \mathrm{e}^{-\varepsilon} \displaystyle\int_a^b f(t)\ dt & \mathbb{P}([Y \in I]) & \mathrm{e}^{\varepsilon} \displaystyle\int_a^b f(t)\ dt & = \mathrm{e}^{\varepsilon}\ \mathbb{P}([X \in I]) \end{array}$$
$$\boxed{\text{Ainsi, } (X, Y) \text{ est } \varepsilon\text{-différentiel.}}$$
□

b) On suppose dans la suite de cette question que (X, Y) est ε-différentiel.
Soit $h > 0$ et $t \in \mathbb{R}$ où f et g sont continues.

Montrer que :
$$\mathrm{e}^{-\varepsilon}\ \frac{F(t+h) - F(t)}{h} \ \leqslant\ \frac{G(t+h) - G(t)}{h} \ \leqslant\ \mathrm{e}^{\varepsilon}\ \frac{F(t+h) - F(t)}{h}$$
En conclure que : $\mathrm{e}^{-\varepsilon} f(t) \ \leqslant\ g(t) \ \leqslant\ \mathrm{e}^{\varepsilon}\ f(t)$.

Démonstration.

- Comme X est une variable à densité :
$$F(t+h) - F(t) \ =\ \mathbb{P}([t \leqslant X \leqslant t+h]) \ =\ \int_t^{t+h} f(t)\ dt \qquad (\star)$$
(on obtient une égalité analogue pour la v.a.r. Y)
- Comme (X, Y) est ε-différentiel, avec $I = [t, t+h]$, on obtient :
$$\mathrm{e}^{-\varepsilon}\mathbb{P}([t \leqslant X \leqslant t+h]) \leqslant \mathbb{P}([t \leqslant Y \leqslant t+h]) \leqslant \mathrm{e}^{\varepsilon}\mathbb{P}([t \leqslant X \leqslant t+h])$$
Soit :
$$\mathrm{e}^{-\varepsilon} \int_t^{t+h} f(t)\ dt \ \leqslant\ \int_t^{t+h} g(t)\ dt \ \leqslant\ \mathrm{e}^{\varepsilon} \int_t^{t+h} f(t)\ dt$$
En multipliant de part et d'autre par $\dfrac{1}{h} > 0$ et en appliquant l'égalité $(\star)$:
$$\mathrm{e}^{-\varepsilon}\ \frac{F(t+h) - F(t)}{h} \ \leqslant\ \frac{G(t+h) - G(t)}{h} \ \leqslant\ \mathrm{e}^{\varepsilon}\ \frac{F(t+h) - F(t)}{h}$$
- La fonction f étant continue en t, F est dérivable en t.
On en déduit que le taux d'accroissement $\dfrac{F(t+h) - F(t)}{h}$ admet une limite finie lorsque $h \to 0$. Plus précisément :
$$\lim_{h \to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} \ =\ F'(t) \ =\ f(t)$$
(on obtient une formule analogue pour les fonctions G et g)

Ainsi, par passage à la limite dans l'encadrement précédent :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{e}^{-\varepsilon}\ \dfrac{F(t+h)-F(t)}{h} & \leqslant & \dfrac{G(t+h)-G(t)}{h} & \leqslant & \mathrm{e}^{\varepsilon}\ \dfrac{F(t+h)-F(t)}{h} \\ {\scriptstyle h \to +\infty}\downarrow & & {\scriptstyle h \to +\infty}\downarrow & & {\scriptstyle h \to +\infty}\downarrow \\ \mathrm{e}^{-\varepsilon}\ f(t) & \leqslant & g(t) & \leqslant & \mathrm{e}^{\varepsilon}\ f(t) \end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{e}^{-\varepsilon}\ f(t)\ \leqslant\ g(t)\ \leqslant\ \mathrm{e}^{\varepsilon}\ f(t)}$$

□

10. *Deuxième exemple : lois de Cauchy.*

a) Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\, dt$ converge. On admet que cette intégrale est égale à π.

Démonstration.

- L'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\, dt$ est convergente si les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{t^2+1}\, dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\, dt$ le sont.
- La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
  - × $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$
  - × $\forall t \in [1,+\infty[,\ \dfrac{1}{1+t^2} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$
  - × L'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann impropre en $+\infty$, d'exposant 2 $(2 > 1)$.

  Ainsi, par critère de convergence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ est convergente.

  De plus, comme la fonction f est continue sur $[0,1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$ est bien définie.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt \text{ est convergente.}}$$

- La fonction f est paire sur $\mathbb{R}$. Ainsi, à l'aide du changement de variable $\boxed{u = -t}$:

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt\ =\ \int_{0}^{+\infty} f(u)\ du$$

L'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt$ est donc elle aussi convergente.

$$\boxed{\text{L'intégrale impropre } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt \text{ est convergente.}}$$

□

b) On définit, pour $a > 0$, la fonction f_a sur $\mathbb{R}$ par, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_a(t) = \dfrac{a}{\pi\ (t^2 + a^2)}$.
Montrer que f_a est une densité de probabilité d'une variable aléatoire à densité.

Démonstration.

- La fonction f_a est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall t \in \mathbb{R},\ f_a(t) \geqslant 0$.
- Sous réserve de convergence, effectuons le changement de variable $\boxed{u = \frac{1}{a}\ t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = \frac{1}{a}\ t \quad \text{(et donc } t = au) \\ \hookrightarrow du = \frac{1}{a}\ dt \quad \text{et} \quad dt = a\ du \\ \bullet\ t = -\infty \ \Rightarrow\ u = -\infty \\ \bullet\ t = +\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto au$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, +\infty[$.
On obtient alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{\pi\ (t^2 + a^2)}\ dt \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{\pi\ ((au)^2 + a^2)}\ (a\ du) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cancel{a^2}}{\pi\ \cancel{a^2}\ (u^2 + 1)}\ du$$

On reconnaît, à une constante multiplicative près l'intégrale impropre de la question précédente. Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t)\ dt$ est convergente et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t)\ dt \ = \ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(u^2 + 1)}\ du \ = \ \frac{1}{\pi}\ \pi \ = \ 1$$

$\boxed{\text{On en déduit que } f_a \text{ peut être considérée comme une densité de probabilité.}}$ □

c) On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires admettant comme densités respectives f_1 et f_a avec $a > 1$.
Montrer que (X, Y) est $\ln(a)$-différentiel.

Démonstration.

- D'après la question ***9.a)***, pour démontrer que (X, Y) est $\ln(a)$-différentiel, il suffit de démontrer :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-\ln(a)}\ f_1(t) \ \leqslant\ f_a(t) \ \leqslant\ \mathrm{e}^{\ln(a)}\ f_1(t)$$

avec $\mathrm{e}^{-\ln(a)} = \mathrm{e}^{\ln(a^{-1})} = \dfrac{1}{a}$ et $\mathrm{e}^{\ln(a)} = a$.

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Raisonnons par équivalence pour démontrer l'inégalité de gauche :

$$\begin{array}{rcll} \frac{1}{a}\ f_1(t) \ \leqslant\ f_a(t) & \Leftrightarrow & \frac{1}{a}\ \frac{1}{\pi\ (1 + t^2)} \ \leqslant\ \frac{a}{\pi\ (a^2 + t^2)} & \\ & \Leftrightarrow & \cancel{a^2} + t^2 \ \leqslant\ a^2\ (\cancel{1} + t^2) & \textit{(en multipliant par } a\pi(1+t^2)(a^2+t^2) > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & t^2 \ \leqslant\ a^2\ t^2 & \\ & \Leftrightarrow & 0 \ \leqslant\ (a^2 - 1)\ t^2 & \end{array}$$

Or, comme $a > 1$ alors $a^2 > 1$ et ainsi : $(a^2 - 1)\ t^2 \geqslant 0$. On en déduit : $\mathrm{e}^{-\ln(a)}\ f_1(t) \ \leqslant\ f_a(t)$.

- Démontrons de même l'inégalité de droite :

$$\begin{aligned} f_a(t) \leqslant a\ f_1(t) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a}{\pi\ (a^2+t^2)} \leqslant a\ \frac{1}{\pi\ (1+t^2)} \\ &\Leftrightarrow \quad 1+\cancel{t^2} \leqslant a^2+\cancel{t^2} \qquad \textit{(en multipliant par } \tfrac{1}{a}\ \pi(1+t^2)(a^2+t^2)>0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \leqslant a^2 \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant vérifiée, on en déduit : $f_a(t) \leqslant a\ f_1(t) = \mathrm{e}^{\ln(a)}\ f_1(t)$.

$\boxed{\text{L'inégalité souhaitée étant démontrée, on en conclut que } (X,Y) \text{ est } \ln(a)\text{-différentiel.}}$ □

11. *Une première interprétation.*
On suppose que (X, Y) est un couple ε-différentiel et que U est une variable de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ indépendante de X et Y.
On définit la variable aléatoire Z par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } U(\omega) = 1 \\ Y(\omega) & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{P}([Z \in I]) \neq 0$.

Montrer que :

$$\mathbb{P}_{[Z\in I]}([U=1]) = p\ \frac{\mathbb{P}([X \in I])}{p\ \mathbb{P}([X \in I]) + (1-p)\ \mathbb{P}([Y \in I])}$$

En déduire que :

$$\frac{p}{p+(1-p)\ \mathrm{e}^{\varepsilon}} \leqslant \mathbb{P}_{[Z\in I]}([U=1]) \leqslant \frac{p}{p+(1-p)\ \mathrm{e}^{-\varepsilon}}$$

Démonstration.

- Comme $\mathbb{P}([Z \in I]) \neq 0$, par définition des probabilités conditionnelles :

$$\mathbb{P}_{[Z\in I]}([U=1]) = \frac{\mathbb{P}([Z \in I] \cap [U=1])}{\mathbb{P}([Z \in I])}$$

- Par définition de la v.a.r. Z :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z \in I] \cap [U=1]) &= \mathbb{P}([X \in I] \cap [U=1]) \\ &= \mathbb{P}([U=1])\ \mathbb{P}([X \in I]) \qquad \textit{(car } X \textit{ et } U \textit{ sont indépendantes)} \\ &= p\ \mathbb{P}([X \in I]) \end{aligned}$$

- La famille $([U=1], [U=0])$ est un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z \in I]) &= \mathbb{P}([U=1] \cap [Z \in I]) + \mathbb{P}([U=0] \cap [Z \in I]) \\ &= \mathbb{P}([U=1] \cap [X \in I]) + \mathbb{P}([U=0] \cap [Y \in I]) \qquad \textit{(par définition de } Y\textit{)} \\ &= \mathbb{P}([U=1])\ \mathbb{P}([X \in I]) + \mathbb{P}([U=0])\ \mathbb{P}([Y \in I]) \qquad \textit{(car } U \textit{ est indépendante de } X \textit{ et } Y\textit{)} \\ &= p\ \mathbb{P}([X \in I]) + (1-p)\ \mathbb{P}([Y \in I]) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En combinant ces résultats : } \mathbb{P}_{[Z\in I]}([U=1]) = p\ \frac{\mathbb{P}([X \in I])}{p\ \mathbb{P}([X \in I]) + (1-p)\ \mathbb{P}([Y \in I])}.}$$

- Comme (X, Y) est supposé ε-différentiel, $\mathrm{e}^{-\varepsilon}\ \mathbb{P}([X \in I]) \leqslant \mathbb{P}([Y \in I])$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} p\ \mathbb{P}([X \in I]) + (1-p)\ \mathbb{P}([Y \in I]) & \geqslant & p\ \mathbb{P}([X \in I]) + (1-p)\ \mathrm{e}^{-\varepsilon}\ \mathbb{P}([X \in I]) \\ & & \shortparallel \\ & & \left(p + (1-p)\ \mathrm{e}^{-\varepsilon}\right)\ \mathbb{P}([X \in I]) \end{array}$$

Ainsi, par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$:

$$\frac{1}{p\ \mathbb{P}([X \in I]) + (1-p)\ \mathbb{P}([Y \in I])} \leqslant \frac{1}{\left(p + (1-p)\ \mathrm{e}^{-\varepsilon}\right)\ \mathbb{P}([X \in I])}$$

Par multiplication par $p\ \mathbb{P}([X \in I]) \geqslant 0$, on obtient :

$$\mathbb{P}_{[Z \in I]}([U=1]) = \frac{p\ \mathbb{P}([X \in I])}{p\ \mathbb{P}([X \in I]) + (1-p)\ \mathbb{P}([Y \in I])} \leqslant \frac{p\ \cancel{\mathbb{P}([X \in I])}}{\left(p + (1-p)\ \mathrm{e}^{-\varepsilon}\right)\ \cancel{\mathbb{P}([X \in I])}}$$

- En raisonnant de même, comme $\mathbb{P}([Y \in I]) \leqslant \mathrm{e}^{\varepsilon}\ \mathbb{P}([X \in I])$:

$$p\ \mathbb{P}([X \in I]) + (1-p)\ \mathbb{P}([Y \in I]) \leqslant \left(p + (1-p)\ \mathrm{e}^{\varepsilon}\right)\ \mathbb{P}([X \in I])$$

puis :

$$\mathbb{P}_{[Z \in I]}([U=1]) = \frac{p\ \mathbb{P}([X \in I])}{p\ \mathbb{P}([X \in I]) + (1-p)\ \mathbb{P}([Y \in I])} \geqslant \frac{p\ \cancel{\mathbb{P}([X \in I])}}{\left(p + (1-p)\ \mathrm{e}^{\varepsilon}\right)\ \cancel{\mathbb{P}([X \in I])}}$$

$$\boxed{\frac{p}{p + (1-p)\ \mathrm{e}^{\varepsilon}} \leqslant \mathbb{P}_{[Z \in I]}([U=1]) \leqslant \frac{p}{p + (1-p)\ \mathrm{e}^{-\varepsilon}}}$$

□

b) Si ε est proche de zéro, le fait de disposer d'une information sur la valeur de Z change-t-il notablement le paramètre de la loi de U et par conséquent la probabilité d'en déduire la valeur prise par U ?

Démonstration.

- Si ε est proche de 0 alors e^{ε} et $\mathrm{e}^{-\varepsilon}$ sont proches de 1.
On peut alors faire les approximations : $p + (1-p)\ \mathrm{e}^{\varepsilon} \simeq 1$ et $p + (1-p)\ \mathrm{e}^{-\varepsilon} \simeq 1$.
- On obtient alors, à l'aide de l'inégalité précédente :

$$p \simeq \frac{p}{p + (1-p)\ \mathrm{e}^{\varepsilon}} \leqslant \mathbb{P}_{[Z \in I]}([U=1]) \leqslant \frac{p}{p + (1-p)\ \mathrm{e}^{-\varepsilon}} \simeq p$$

Ainsi, $\mathbb{P}_{[Z \in I]}([U=1])$ est proche de p.
Or, par définition de U : $\mathbb{P}([U=1]) = p$.

> On en conclut que disposer d'une information sur la valeur de Z (savoir que $[Z \in I]$ est réalisé) ne permet pas de déduire la valeur prise par U. □

Partie III - Confidentialité différentielle

- Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On considère $D = [\![0, d]\!]$ et n un entier naturel plus grand que 2.
- On dira que deux éléments de D^n, a et b, sont voisins s'ils ne diffèrent que d'une composante au plus. On note $\mathcal{V}$ l'ensemble des couples de voisins.
- On considère q une application de D^n dans $\mathbb{R}$.

Concrètement, un élément de D^n représente une table d'une base de données et q une requête sur cette base. Étant donné $a = (a_1, \dots, a_n)$, on s'intéresse au problème de la confidentialité de certains des a_i lorsque les autres a_i sont connus, ainsi que D, q et $q(a)$.

12. Dans cette question on suppose que $a_2, \dots, a_n$ sont connus et on cherche à protéger a_1.

a) Quelle est probabilité d'obtenir la bonne valeur de a_1 si l'on choisit une valeur au hasard dans $[\![0, d]\!]$?

Démonstration.
L'entier a_1 est un élément de $[\![0, d]\!]$, ensemble de cardinal $d + 1$.
Un choix au hasard dans D correspond à effectuer un tirage uniforme dans D.

La probabilité d'obtenir la bonne valeur de a_1 en choisissant une valeur au hasard dans D est donc de $\dfrac{1}{d+1}$.

Commentaire

- On peut s'interroger sur la pertinence de l'interprétation du problème présentée dans l'énoncé. Tout d'abord, il est fait mention de « base de données », de « requête » et de « table ». Ces notions sont absentes du programme de voie ECE / ECS (elles sont étudiées en prépa scientifique). Précisons ces termes :
  - × **une base de données** est un moyen de stocker des informations appelées données. Par exemple, on peut penser à une enseigne de grande distribution qui récolterait des informations via les cartes de fidélité.
  - × **une table** est un regroupement d'informations du même type.
    En reprenant l'exemple précédent, on peut penser à une table qui regroupe les informations sur les clients : c'est un tableau dont chaque ligne (appelée **enregistrement**) contient le nom, le prénom, l'adresse, le numéro de téléphone, la date de naissance et le nom du magasin fréquenté par le porteur de carte.
    Une telle base de données contiendrait aussi une table sur les informations des magasins : un enregistrement d'une telle table pourrait contenir le nom du magasin, son adresse, ses horaires d'ouverture.
  - × **une requête** est une interrogation de la base de données. Par exemple, si un magasin particulier organise un événement promotionnel, l'enseigne souhaitera recueillir tous les numéros de téléphone des clients fréquentant ce magasin afin de pouvoir communiquer par sms sur cet événement.
- Revenons à l'énoncé. On considère que les données apparaissent sous forme de nombres. Un élément $(a_1, \dots, a_n) \in D^n$ serait alors un enregistrement (plutôt qu'une table) et une table serait un sous ensemble de D^n. Une fonction $q : D^n \to \mathbb{R}$ peut être considérée comme permettant la sélection de certains enregistrements (q peut par exemple être à valeur dans $\{0, 1\}$ et on sélectionne tous les enregistrements $a \in D^n$ pour lesquels $q(a) = 1$).

□

b) Dans cette question $q(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i$.
Montrer que si $q(a)$ est publique alors on sait déterminer la valeur de a_1.

Démonstration.

- On rappelle que l'on suppose connus $a_2, \dots, a_n$. Ainsi, $\sum_{i=2}^{n} a_i$ est connu.
- On suppose en plus dans cette question que $q(a) = \sum_{i=1}^{n} a_i$ est connu. Or :

$$a_1 = q(a) - \sum_{i=2}^{n} a_i$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } q(a) \text{ et } a_2, \dots, a_n \text{ sont connus, alors } a_1 \text{ est connu.}}$$

Commentaire

Le terme « publique » présent dans l'énoncé doit être compris comme un synonyme de « connu ».

□

On dit que l'on dispose d'un procédé de ε-confidentialité de D^n pour q si :

(c1) pour tout $a \in D^n$, on dispose d'une variable aléatoire réelle X_a ;

(c2) pour tout $(a, b) \in \mathcal{V}$, (X_a, X_b) est ε-différentiel.

(c3) pour tout $a \in D^n$, $\mathbb{E}(X_a) = q(a)$.

13. *Majoration de la probabilité de trouver a_1.*
Dans cette question, nous allons justifier en partie la terminologie.
On suppose à nouveau que $a_2, \dots, a_n$ sont connus, que l'on cherche à protéger a_1 et que :

× le public connaît des d'intervalles $I_0, \dots, I_d$ disjoints de réunion $\mathbb{R}$ tels qu'avec les valeurs fixées de $a_2, \dots, a_n$, si $q(a) \in I_j$ alors $a_1 = j$. Cela signifie que si $q(a)$ est publique alors a_1 aussi.

× on dispose d'un procédé de ε-confidentialité de D^n pour q et que l'on rend X_a publique à la place de $q(a)$.

On considère alors que l'expérience aléatoire modélisée par $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ comporte comme première étape le choix au hasard de a_1 dans $[\![0, d]\!]$ et on définit :

× A_1 la variable aléatoire associée à ce choix ;

× pour tout $j \in [\![0, d]\!]$, $Y_j = X_{(j, a_2, \dots, a_n)}$.
On suppose que A_1 et Y_j sont indépendantes pour tout $j \in D$.

× la variable aléatoire réelle R par :

$$\forall \omega \in \Omega, \text{ si } A_1(\omega) = j \text{ alors on détermine l'unique } k \text{ tel que } Y_j(\omega) \in I_k \text{ et on pose } R(\omega) = k$$

× $\theta = \mathbb{P}([R = A_1])$.

a) Montrer que $\theta = \sum\limits_{j=0}^{d} \mathbb{P}([Y_j \in I_j] \cap [A_1 = j])$.

Démonstration.

- Par défintion, $A_1(\Omega) = [\![0, d]\!]$.
  Ainsi, $([A_1 = j])_{j \in [\![0,d]\!]}$ est un système complet d'événements.
  D'où, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([R = A_1]) &= \sum_{j=0}^{d} \mathbb{P}([A_1 = j] \cap [R = A_1]) \\
&= \sum_{j=0}^{d} \mathbb{P}([A_1 = j] \cap [R = j]) \\
&= \sum_{j=0}^{d} \mathbb{P}([A_1 = j] \cap [Y_j \in I_j]) \quad \textit{(par définition de R)}
\end{aligned}$$

- Détaillons la dernière égalité. D'après l'énoncé, si $(j, k) \in [\![0, d]\!]^2$ alors, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$R(\omega) = k \ \Leftrightarrow\ A_1(\omega) = j \ \text{ et } \ Y_j(\omega) \in I_k$$

  On en déduit : $[R = k] = [A_1 = j] \cap [Y_j \in I_k]$. Et en particulier : $[R = j] = [A_1 = j] \cap [Y_j \in I_j]$

$$\boxed{\theta = \mathbb{P}([R = A_1]) = \sum_{j=0}^{d} \mathbb{P}([A_1 = j] \cap [Y_j \in I_j])}$$

□

b) En déduire que $\theta = \dfrac{1}{d+1} \sum\limits_{j=0}^{d} \mathbb{P}([Y_j \in I_j])$.

Démonstration.
D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
\theta &= \sum_{j=0}^{d} \mathbb{P}([A_1 = j] \cap [Y_j \in I_j]) \\
&= \sum_{j=0}^{d} \mathbb{P}([A_1 = j]) \times \mathbb{P}([Y_j \in I_j]) \quad \textit{(car } A_1 \textit{ et } Y_j \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \sum_{j=0}^{d} \frac{1}{d+1}\, \mathbb{P}([Y_j \in I_j]) \quad \textit{(car } A_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, d]\!])\textit{)} \\
&= \frac{1}{d+1} \sum_{j=0}^{d} \mathbb{P}([Y_j \in I_j])
\end{aligned}$$

$$\boxed{\theta = \frac{1}{d+1} \sum_{j=0}^{d} \mathbb{P}([Y_j \in I_j])}$$

Commentaire

La question ***13.a)*** présente une vraie difficulté car il faut prendre l'initiative d'introduire un système complet d'événements et d'utiliser la formule des probabilités totales de manière adéquate. En contrepartie, cette question ***13.b)*** ne présente aucune difficulté. Comme le signale l'énoncé (à l'aide du « En déduire »), il s'agit d'utiliser le résultat de la question précédente ce qui permet ici de conclure de manière directe. Il est important d'apprendre à repérer ce genre de questions et d'avoir le courage de les traiter même si l'on a passé la question qui précède !

□

c) En conclure que :
$$\theta \leqslant \frac{1}{d+1}\ \left(e^{\varepsilon} - (e^{\varepsilon}-1)\ \mathbb{P}([Y_0 \in I_0])\right) \leqslant \frac{e^{\varepsilon}}{d+1}$$

Démonstration.
Soit $j \in [\![1, d]\!]$.

- Tout d'abord, notons que $Y_j = X_{(j,a_2,\ldots,a_n)}$ et $Y_0 = X_{(0,a_2,\ldots,a_n)}$.
Les n-uplets $(j, a_2, \ldots, a_n)$ et $(0, a_2, \ldots, a_n)$ sont voisins car ne diffèrent que d'une composante.
Ainsi, comme on suppose que l'on dispose d'un procédé de ε-confidentialité, le couple (Y_j, Y_0) est ε-différentiel.
- On en déduit :
$$e^{-\varepsilon}\ \mathbb{P}([Y_0 \in I_j]) \leqslant \mathbb{P}([Y_j \in I_j]) \leqslant e^{\varepsilon}\ \mathbb{P}([Y_0 \in I_j])$$
- Or, d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}
(d+1)\ \theta &= \sum_{j=0}^{d} \mathbb{P}([Y_j \in I_j]) \\
&= \mathbb{P}([Y_0 \in I_0]) + \sum_{j=1}^{d} \mathbb{P}([Y_j \in I_j]) \\
&\leqslant \mathbb{P}([Y_0 \in I_0]) + \sum_{j=1}^{d} e^{\varepsilon}\ \mathbb{P}([Y_0 \in I_j]) && \textit{(d'après l'inégalité précédente)} \\
&= \mathbb{P}([Y_0 \in I_0]) + e^{\varepsilon} \sum_{j=1}^{d} \mathbb{P}([Y_0 \in I_j])
\end{aligned}$$
- Par ailleurs, comme $I_0, \ldots, I_d$ est une partition de $\mathbb{R}$, la famille $([Y_0 \in I_j])_{i\in[\![0,d]\!]}$ est un système complet d'événements. Ainsi :
$$\sum_{j=0}^{d} \mathbb{P}([Y_0 \in I_j]) = 1 \quad \text{et donc} \quad \sum_{j=1}^{d} \mathbb{P}([Y_0 \in I_j]) = 1 - \mathbb{P}([Y_0 \in I_0])$$
- En combinant ces informations, on obtient :
$$\begin{aligned}
(d+1)\ \theta &\leqslant \mathbb{P}([Y_0 \in I_0]) + e^{\varepsilon}\ \big(1 - \mathbb{P}([Y_0 \in I_0])\big) \\
&= e^{\varepsilon} - (e^{\varepsilon}-1)\ \mathbb{P}([Y_0 \in I_0]) \\
&\leqslant e^{\varepsilon} && \textit{(car } (e^{\varepsilon}-1)\ \mathbb{P}([Y_0 \in I_0]) \geqslant 0\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En divisant par } d+1>0, \text{ on obtient bien : } \theta \leqslant \frac{1}{d+1}\ \left(e^{\varepsilon} - (e^{\varepsilon}-1)\ \mathbb{P}([Y_0 \in I_0])\right) \leqslant \frac{e^{\varepsilon}}{d+1}.}$$
□

d) On pose $\rho = \dfrac{1}{d+1}$ et $\tau = \dfrac{\theta - \rho}{\rho}$.
Donner une majoration de τ. Que représente cette quantité ?
Qu'en déduire concernant la méthode de confidentialité présentée dans cette question lorsque ε est proche de 0 ?

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$\tau = \frac{\theta - \rho}{\rho} = \frac{\theta}{\rho} - 1 = \frac{\theta}{\frac{1}{d+1}} - 1 = (d+1)\ \theta - 1 \leqslant e^{\varepsilon} - 1$$
l'inégalité finale étant obtenue par la question précédente.

- Pour comprendre ce que représente la quantité τ, reprenons en détail l'énoncé :
  - × le réel a_1 a été choisi au hasard mais est inconnu du public.
  - × la v.a.r. X_a est connue du public.
  - × la partition de $\mathbb{R}$, formée des intervalles $I_0, \ldots, I_d$, est aussi connue du public.
    Ces intervalles sont choisis de telle sorte que si $q(a)$ est un jour rendu publique, alors on pourra en déduire a_1.
  - × on cherche à déduire a_1 de ces connaissances. Pour ce faire, on regarde à quel unique intervalle I_k (l'unicité est une conséquence directe du partitionnement de $\mathbb{R}$) appartient X_a et on définit alors la v.a.r. R égale à cet entier k.

  La procédure de découverte consiste à décréter que la valeur de R est a_1.
  On cherche à évaluer à quel point cette procédure est robuste. Il s'agit donc d'évaluer la probabilité $\mathbb{P}([R = A_1])$.

  Plus précisément, il s'agit de comparer la probabilité d'obtenir la valeur de a_1 via la procédure de l'énoncé (c'est $\theta = \mathbb{P}([R = A_1])$) à la probabilité d'obtenir a_1 avec la procédure basique consistant à piocher au hasard un nombre dans $[\![0, d]\!]$ (on tombe sur le bon résultat avec probabilité $\rho = \dfrac{1}{d+1}$).
  On considèrera que la procédure est robuste si θ est très grand devant ρ.
- On suppose que $\theta \geqslant \rho$ (si ce n'est pas le cas, le procédé de découverte n'a pas d'intérêt car il est moins bon que celui consistant à piocher une valeur au hasard dans $[\![0, d]\!]$). D'après ce qui précède :
$$0 \ \leqslant \ \frac{\theta - \rho}{\rho} \ \leqslant \ \mathrm{e}^{\varepsilon} - 1$$
  Lorsque ε se rapproche de 0, $\mathrm{e}^{\varepsilon} - 1$ se rapproche de 0. Alors, par théorème d'encadrement, $\theta - \rho$ se rapproche de 0 donc θ se rapproche de ρ.

Lorsque ε se rapproche de 0, la méthode de confidentialité est performante car on ne peut déduire la valeur a_1 des informations rendues publiques qu'avec une probabilité proche de celle obtenue en piochant une valeur au hasard dans $[\![0, d]\!]$. Les informations publiques ne nous renseignent donc pratiquement pas sur la valeur de a_1. □

On pose $\delta = \max\limits_{(a,b)\in\mathcal{V}} |q(a) - q(b)|$ et on suppose que $\delta > 0$.

14. Dans cette question, pour tout $a \in D^n$, on pose $X_a = q(a) + Y$ où Y suit la loi de Laplace de paramètre $(0, \beta)$.

a) Pour tout $a \in D^n$, déterminer $\mathbb{E}(X_a)$ et une densité de probabilité f_a de la loi de X_a en fonction de $q(a)$ et de β.

Démonstration.
Commençons par déterminer F_{X_a}.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$F_{X_a}(x) \ = \ \mathbb{P}\left([q(a) + Y \leqslant x]\right) \ = \ \mathbb{P}([Y \leqslant x - q(a)]) \ = \ F_Y(x - q(a))$$
  Deux cas se présentent alors.
  - × Si $x - q(a) \leqslant 0$, *i.e.* si $x \leqslant q(a)$:
$$F_{X_a}\big(x - q(a)\big) \ = \ \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{x-q(a)}{\beta}}$$
    *(d'après la fonction de répartition associée à $\mathcal{L}(0,1)$ déterminée en question **3.b)**)*

× Si $x - q(a) > 0$, *i.e.* si $x > q(a)$:

$$F_{X_a}\big(x - q(a)\big) \;=\; 1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x-q(a)}{\beta}}$$

(toujours d'après la question ***3.b)****)*

Ainsi : $F_{X_a} : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{x-q(a)}{\beta}} & \text{si } x \leqslant q(a) \\ 1 - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x-q(a)}{\beta}} & \text{si } x > q(a) \end{cases}$.

On reconnaît la fonction de répartition associée à la loi $\mathcal{L}\big(q(a), \beta\big)$.

La fonction de répartition caractérisant la loi, on en déduit : $X_a \hookrightarrow \mathcal{L}\big(q(a), \beta\big)$.

En particulier, X_a admet pour espérance $\mathbb{E}(X_a) = q(a)$ et est une v.a.r. à densité, de densité $f_a : t \mapsto \dfrac{1}{2\beta}\,\exp\left(-\dfrac{|t - q(a)|}{\beta}\right)$

Commentaire

De manière plus générale, on peut démontrer, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$:

$$X \hookrightarrow \mathcal{L}(m, s) \;\Leftrightarrow\; aX + b \hookrightarrow \mathcal{L}(am + b, |a| s)$$

On peut encore une fois rapprocher ce résultat de celui sur les lois normales.

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right) \;\Leftrightarrow\; aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}\left(am + b, a^2\sigma^2\right)$$

□

b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \in \mathcal{V}$, $f_a(t) \;\leqslant\; \exp\left(\dfrac{\delta}{\beta}\right) f_b(t)$.

En déduire que pour tout $(a, b) \in \mathcal{V}$, (X_a, X_b) est $\dfrac{\delta}{\beta}$-différentiel.

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$ et soit $(a, b) \in \mathcal{V}$.

- Raisonnons par équivalence.

$$\begin{array}{rcll} f_a(t) \;\leqslant\; \exp\left(\dfrac{\delta}{\beta}\right)\; f_b(t) & \Leftrightarrow & \cancel{\dfrac{1}{2\beta}}\,\exp\left(-\dfrac{|t-q(a)|}{\beta}\right) \;\leqslant\; \cancel{\dfrac{1}{2\beta}}\,\exp\left(\dfrac{\delta}{\beta}\right)\,\exp\left(-\dfrac{|t-q(b)|}{\beta}\right) & \\ & \Leftrightarrow & \exp\left(-\dfrac{|t-q(a)|}{\beta}\right) \;\leqslant\; \exp\left(\dfrac{\delta}{\beta} - \dfrac{|t-q(b)|}{\beta}\right) & \\ & \Leftrightarrow & -\dfrac{|t-q(a)|}{\beta} \;\leqslant\; \dfrac{\delta}{\beta} - \dfrac{|t-q(b)|}{\beta} & \textit{(car } \ln \textit{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{|t-q(b)| - |t-q(a)|}{\cancel{\beta}} \;\leqslant\; \dfrac{\delta}{\cancel{\beta}} & \textit{(avec } \beta > 0\textit{)} \end{array}$$

- Or, d'après l'inégalité triangulaire :

$$|t - q(b)| - |t - q(a)| \;\leqslant\; \big|(\cancel{t} - q(b)) - (\cancel{t} - q(a))\big| \;=\; |q(a) - q(b)| \;\leqslant\; \delta$$

La dernière inégalité est obtenue par définition de δ.

On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $(a, b) \in \mathcal{V}$, $f_a(t) \;\leqslant\; \exp\left(\dfrac{\delta}{\beta}\right)\; f_b(t)$.

- En multipliant de part et d'autre par $\exp\left(-\dfrac{\delta}{\beta}\right) > 0$, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\exp\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)\ f_a(t) \ \leqslant\ f_b(t)$$

- Cette inégalité est vérifiée pour tout couple (a, b) de voisins. Or, si $(a, b) \in \mathcal{V}$ alors $(b, a) \in \mathcal{V}$ et en appliquant l'inégalité en ce couple (b, a), on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f_b(t) \ \leqslant\ \exp\left(\frac{\delta}{\beta}\right) f_a(t)$$

On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $(a, b) \in \mathcal{V}$:
$$\exp\left(-\frac{\delta}{\beta}\right) f_a(t) \ \leqslant\ f_b(t) \ \leqslant\ \exp\left(\frac{\delta}{\beta}\right)\ f_a(t).$$

Les fonctions f_a et f_b étant les densités respectives de X_a et X_b, on en déduit, par la question ***9.a)***, que le couple (X_a, X_b) est $\dfrac{\delta}{\beta}$-différentiel. □

c) Comment choisir β pour disposer alors d'un procédé de ε-confidentialité de D^n pour q ?

Démonstration.

- On dit que l'on dispose d'un procédé de ε-confidentialité de D^n pour q si les propriétés (c1), (c2) et (c3) sont vérifiées. Les propriétés (c1) et (c3) sont vérifiées.
Il s'agit donc de vérifier la propriété (c2).
- D'après la question précédente, pour tout $(a, b) \in \mathcal{V}$, (X_a, X_b) est $\left(\dfrac{\delta}{\beta}\right)$-différentiel.
Pour disposer d'un procédé de ε-confidentialité, il suffit de choisir β tel que $\varepsilon = \dfrac{\delta}{\beta}$.

En choisissant $\beta = \dfrac{\delta}{\varepsilon}$, on a bien un procédé de ε-confidentialité de D^n pour q. □

15. Dans cette question, pour tout $a = (a_1, \ldots, a_n)$ appartenant à D^n, $q(a) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

a) Quelle est la valeur de δ ?

Démonstration.

- Commençons par rappeler la définition : $\delta = \max\limits_{(a,b)\in\mathcal{V}} |q(a) - q(b)|$.
- Soit $(a, b) \in \mathcal{V}$. Alors a et b ne diffèrent que d'une composante.
Autrement dit, il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \setminus \{i_0\},\ a_i = b_i \quad \text{ et } \quad a_{i_0} \neq b_{i_0}$$

On en déduit :
$$\left|q(a) - q(b)\right| \ = \ \left|\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i\right| \ = \ \left|a_{i_0} - b_{i_0}\right| \ \leqslant\ d$$
car a_{i_0} et b_{i_0} sont des éléments de $D = [\![0, d]\!]$.
Ainsi, pour tout $(a, b) \in \mathcal{V}$, $\left|q(a) - q(b)\right| \leqslant d$.

On en déduit : $\delta \ \leqslant\ d.$

- D'autre part, si $a = (0, a_2, \dots, a_n)$ et $b = (d, a_2, \dots, a_n)$ (où pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $a_i \in [\![0, d]\!]$) alors $(a, b) \in \mathcal{V}$ et :
$$\left|q(b) - q(a)\right| \ = \ \left|d - 0\right| \ = \ d$$
Ainsi, le majorant de δ est atteint pour un couple de voisins.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \delta = d.}$$
□

On utilise dans la suite le procédé de ε-confidentialité tel qu'il a été défini dans la question ***14.*** mais au lieu de publier la valeur X_a, on procède ainsi :
× si $X_a < \frac{1}{2}$ on publie 0 ;
× si $X_a \in [k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}[$ où $k \in [\![1, nd - 1]\!]$, on publie k ;
× sinon on publie nd.

b) Montrer que la valeur aléatoire Z_a publiée vérifie :

$$Z_a = \begin{cases} 0 & \text{si } X_a < \frac{1}{2} \\ \lfloor X_a + \frac{1}{2} \rfloor & \text{si } X_a \in [\frac{1}{2}, nd - \frac{1}{2}[\\ nd & \text{si } X_a \geqslant nd - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Démonstration.
- Soit $\omega \in \Omega$ et $k \in [\![1, nd - 1]\!]$. Alors :
$$\begin{aligned} X_a(\omega) \in [k - \tfrac{1}{2}, k + \tfrac{1}{2}[\ &\Leftrightarrow \ k - \frac{1}{2} \ \leqslant \ X_a(\omega) \ < \ k + \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \ k \ \leqslant \ X_a(\omega) + \frac{1}{2} \ < \ k + 1 \\ &\Leftrightarrow \ k = \lfloor X_a(\omega) + \tfrac{1}{2} \rfloor \qquad \textit{(par définition de la fonction } \lfloor \cdot \rfloor \textit{)} \end{aligned}$$
Ainsi, dès que $X_a \in [k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}[$ avec $k \in [\![1, nd - 1]\!]$, on publie $\lfloor X_a + \frac{1}{2} \rfloor$.
Ceci étant vrai pour tout $k \in [\![1, nd-1]\!]$, on doit publier $\lfloor X_a + \frac{1}{2} \rfloor$ dès que $X_a \in [1 - \frac{1}{2}, nd + \frac{1}{2}[$.

Le premier et dernier cas étant fournis par l'énoncé, on obtient :
$$\boxed{Z_a = \begin{cases} 0 & \text{si } X_a < \frac{1}{2} \\ \lfloor X_a + \frac{1}{2} \rfloor & \text{si } X_a \in [\frac{1}{2}, nd - \frac{1}{2}[\\ nd & \text{si } X_a \geqslant nd - \frac{1}{2} \end{cases}.}$$
□

c) Écrire un script qui pour d, n et ε saisis par l'utilisateur, génère une valeur aléatoire de $a \in D^n$ puis affiche $q(a)$ et Z_a.

Démonstration.
- Il s'agit tout d'abord de générer une valeur aléatoire de $a \in D^n$ (stockée dans une variable `a`) :

```
a = grand(1, n, 'uin', 0, d)
```

- La quantité $q(a) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_i$ est obtenue par l'appel :

```
q = sum(a)
```

- Il s'agit alors de simuler la v.a.r. $X_a = q(a) + Y$ où $Y \hookrightarrow \mathcal{L}(0, \beta)$. On a vu dans la question ***14.c)*** que pour obtenir un procédé de ε-confidentialité, il fallait choisir $\beta = \dfrac{\delta}{\varepsilon}$.
  De plus, d'après la question ***15.a)***, $\delta = d$. Ainsi, afin de simuler une v.a.r. qui suit la loi de Laplace, on utiliser la fonction `Laplace` de la question ***5.b)***.

```
X = q + Laplace(0, d/eps)
```

- Il s'agit enfin de simuler la v.a.r. Z_a. On stocke le résultat de cette simulation dans une variable `Z`. La v.a.r. Z_a étant définie par cas selon les valeurs de X_a, la variable `Z` est définie par une structure conditionnelle dont les conditions dépendent des valeurs de la variable `X`.
  Plus précisément :

```
if X < 1/2 then
    Z = 0
elseif X <= n ⋆ d - 1/2 then
    Z = floor(X + 1/2)
else
    Z = n ⋆ d
end
```

  On rappelle que la fonction `floor` correspond à la fonction $\lfloor . \rfloor$ (partie entière par défaut).
- On obtient le programme souhaité en regroupant ces différentes instructions et en ajoutant les dialogues utilisateur et affichages demandés par l'énoncé.

```
d = input('Entrez un entier d plus grand que 1 : ')
n = input('Entrez un entier n plus grand que 2 : ')
eps = input('Entrez un réel epsilon strictement positif: ')

a = grand(1, n, 'uin', 0, d)
q = sum(a)
X = q + Laplace(0, d/eps)

if X < 1/2 then
    Z = 0
elseif X <= n ⋆ d - 1/2 then
    Z = floor(X + 1/2)
else
    Z = n ⋆ d
end

disp(q)
disp(Z)
```

□

9782340-026636_001_784.indd 424 30/07/2018 09:52

d) Pour $n = 1000$, $d = 4$ et ε choisi par l'utilisateur, écrire un script qui estime la valeur moyenne de $\dfrac{|Z_a - q(a)|}{q(a)}$ (on considèrera que $q(a)$ est toujours non nul).

N.B. À titre d'information, on obtient le tableau de valeurs suivant :

ε	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2
Moyenne	1.91%	1%	0.6%	0.5%	0.3%	0.3%	0.28%	0.2%	0.2%	0.19%	0.17%	0.16%

Démonstration.

- Dans la suite, notons $T_a = \dfrac{|Z_a - q(a)|}{q(a)}$.

  L'énoncé demande d'estimer la « valeur moyenne » de la v.a.r. T_a. On considère, dans la suite de la question, qu'il s'agit d'estimer l'espérance de la v.a.r. T_a.
- L'idée naturelle pour obtenir une approximation de cette espérance est :
  - × de simuler un grand nombre de fois ($N = 10000$ par exemple) la v.a.r. T_a.
    Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(t_1, \dots, t_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(T_1, \dots, T_N)$ de la v.a.r. T_a.
  - × de réaliser la moyenne des résultats de cette observation.

  Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\text{moyenne de l'observation} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} t_i \ \simeq \ \mathbb{E}(T_a)$$

- Cette idée est implémentée à l'aide de la fonction suivante :

```
d = 4
n = 1000
N = 10000
eps = input('Entrez un réel epsilon strictement positif: ')
tabT = zeros(1, N)

a = grand(1, n, 'uin', 0, d)
q = sum(a)

for i = 1:N
    X = q + Laplace(0, delta/eps)
    if X < 1/2 then
        Z = 0
    elseif X <= n * d - 1/2 then
        Z = floor(X + 1/2)
    else
        Z = n * d
    end
    tabT(i) = abs(Z - q) / q
end

Moy = sum(tabT) / N
disp(Moy)
```

Détaillons les différents éléments de ce code :

× en ligne 5, on crée une matrice ligne `tabT` de taille N destinée à contenir les différentes valeurs t_i.

× en ligne 6, on génère la valeur $a \in D^n$ permettant la bonne définition de X_a.

× en ligne 8, on calcul la somme $q(a)$ correspondante.

× en ligne 10 à 20, on effectue une boucle permettant d'obtenir les valeurs successives t_1, $\dots$, t_N. Plus précisément, lors du $i^{\text{ème}}$ tour de boucle, on stocke la valeur t_i dans le $i^{\text{ème}}$ coefficient de la matrice `tabT`.

× en ligne 22, on stocke dans la variable `Moy` la valeur $\dfrac{1}{N} \sum\limits_{j=1}^{N} t_j$ calculée par le programme.

Commentaire

- L'énoncé nous incite à écrire des scripts avec des dialogues utilisateurs et des affichages. Cependant, il semble pertinent pour ces deux questions de présenter le résultat sous forme de fonctions. On rappelle qu'une fonction permet de réaliser un calcul dont le résultat est réutilisable par un autre programme. C'est d'ailleurs une des bases de la programmation de mener une réflexion sur le découpage en sous-fonctions du projet que l'on souhaite coder.
- Plus précisément, il était possible ici de factoriser certains blocs de code. Dans le deuxième programme, les lignes 12 à 18 correspondent aux lignes 9 à 15 du programme précédent. On peut donc penser à écrire une fonction, prenant en entrée les paramètres nécessaires à l'écriture de ces lignes.

```
function Z = simuZ(d, n, eps, a)
    q = sum(a)
    X = q + Laplace(0, d/eps)
    if X < 1/2 then
        Z = 0
    elseif X <= n * d - 1/2 then
        Z = floor(X + 1/2)
    else
        Z = n * d
    end
endfunction
```

- La fonction suivante permet alors de répondre aux attentes de la question.

```
function Moy = approxEsperance(d, n, eps, N)
    a = grand(1, n, 'uin', 0, d)
    q = sum(a)
    tabT = zeros(1, N)
    for i=1:N
        Z = simuZ(d, n, eps, a)
        tabT(i) = abs(Z - q) / q
    end
    Moy = sum(tabT) / N
endfunction
```

(on réalise son appel avec les paramètres $d = 4$, $n = 1000$, $N = 10000$ et ε choisi par l'utilisateur)

Commentaire

- Ajoutons enfin qu'il est plus pratique d'obtenir le tableau des résultats fournit par l'énoncé si l'on a opté pour la présentation sous forme de fonctions. Si le programme est présenté à l'aide d'un script, pour obtenir ce tableau, il faudra appeler ce script 12 fois de suite en rentrant à chaque fois la nouvelle valeur de ε. Si le programme est présenté sous forme de fonction, le programme suivant permet d'obtenir ce tableau des résultats :

```
tabEps = 0.1:0.1:1.2
tabMoy = zeros(1, 12) // On crée un tableau suffisamment grand
for i = 1:12
    tabMoy(i) = approxEsperance(4, 1000, tabEsp(i), 10000)
end
disp(tabMoy)
```

Ici, on écrit un script et pas une fonction car on ne souhaite pas utiliser le résultat de ce programme dans un autre programme. À titre d'information, on obtient les résultats suivants :

ε	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2
Moyenne	1.97%	1%	0.68%	0.51%	0.4%	0.32%	0.29%	0.24%	0.21%	0.21%	0.17%	0.17%

Ce résultat est tout à fait comparable à celui présenté à la fin de l'énoncé.

ESSEC-II 2017 : le sujet

Étudier l'évolution des inégalités dans la répartition des richesses, matérielles ou symboliques, dans une société est un des thèmes majeurs des sciences humaines. Considérons un exemple élémentaire. Le tableau ci-dessous présente le pourcentage d'accès à l'enseignement secondaire en Grande-Bretagne lors de deux périodes pour deux catégories sociales :

	avant 1910	entre 1935 et 1940
Profession libérale	37%	62%
Ouvriers	1%	10%

On propose trois modes de comparaison des inégalités entre les deux classes sociales.

1. En regardant l'augmentation des pourcentages pour les deux classes entre les deux périodes on conclut que l'inégalité a augmenté entre la classe la plus aisée (Profession libérale) et la plus défavorisée (Ouvriers).

2. Si on regarde le taux d'accroissement des pourcentages, comme $\frac{10}{1} > \frac{62}{37}$, on déduit que l'inégalité a diminué.

3. Si on regarde le taux d'accroissement des pourcentages *de ceux qui n'accèdent pas à l'enseignement secondaire*, comme $\frac{90}{99} > \frac{38}{63}$, on déduit que l'inégalité a augmenté puisque le nombre de ceux qui n'ont pas accès à l'enseignement supérieur a proportionnellement plus diminué que celui de ceux qui y ont accès.

Comme on le voit chacune des façons de voir est légitime à sa manière. L'objet du problème est d'introduire des outils afin d'étudier la *concentration* d'une loi de probabilité pour contourner des paradoxes auxquels une analyse trop rapide peut conduire, ou du moins d'en être conscient.

Partie I - Indice de Gini

On rappelle qu'une fonction numérique définie sur l'intervalle J de $\mathbb{R}$ est *convexe* sur J si elle vérifie la propriété suivante : $\forall (t_1, t_2) \in J^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda\, t_1 + (1-\lambda)\, t_2) \leqslant \lambda\, f(t_1) + (1-\lambda)\, f(t_2)$.
On rappelle en outre qu'une fonction f est *concave* si $-f$ est convexe.
On désigne par E l'ensemble des applications f définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$, continues et convexes sur $[0,1]$, et telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Pour toute application f de E, on note $\tilde{f}$ l'application associée à f, définie sur $[0,1]$ par $\tilde{f}(t) = t - f(t)$.

On pose $I(f) = 2\displaystyle\int_0^1 \tilde{f}(t)\, dt = 2\int_0^1 (t - f(t))\, dt$. $I(f)$ s'appelle l'**indice de Gini** de l'application f.

1. *a)* Donnez une interprétation géométrique de la propriété de convexité.

b) Lorsque f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, rappeler la caractérisation de la convexité de f sur $[0,1]$ à l'aide de la dérivée f'.

2. *a)* Justifier que $\tilde{f}$ est concave sur $[0,1]$.

b) Montrer que $I(f) = 1 - 2\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$.

c) Représenter dans un même repère orthonormé les fonctions f et $t \mapsto t$ et donner une interprétation géométrique de $I(f)$.

3. **Un premier exemple**.
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(t) = t^2$ pour tout $t \in [0,1]$.

a) Montrer que f est un élément de E.

b) Calculer $I(f)$.

4. **Propriétés de l'indice de Gini.**

a) Pour f élément de E, établir que $I(f) \geqslant 0$.

b) Montrer que $I(f) = 0$ si et seulement si $f(t) = t$ pour tout $t \in [0, 1]$.

c) Montrer que pour tout f élément de E, $I(f) < 1$.

d) Pour tout entier $n > 0$, on définit f_n sur $[0, 1]$ par $f_n(t) = t^n$.

(i) Pour tout entier n strictement positif, calculer $I(f_n)$.

(ii) En déduire que pour tout réel A vérifiant $0 \leqslant A < 1$, il existe f appartenant à E telle que $I(f) > A$.

5. **Minoration de l'indice de Gini**

a) Soit f élément de E. Montrer qu'il existe t_0 dans $]0, 1[$ tel que $\tilde{f}(t_0) = \max\limits_{t\in[0,1]} \tilde{f}(t)$.

b) Montrer que pour tout t de $[0, t_0]$, $\tilde{f}(t) \geqslant \tilde{f}(t_0) \cdot \dfrac{t}{t_0}$.

c) Montrer que pour tout t de $[t_0, 1]$, $\tilde{f}(t) \geqslant \tilde{f}(t_0) \cdot \dfrac{t-1}{t_0-1}$.

d) En déduire que $I(f) \geqslant \tilde{f}(t_0)$.

L'indice de Gini donne une indication sur la concentration des richesses d'un pays si l'on suppose que la fonction f rend compte de cette concentration. Par exemple, $f(0,3) = 0,09$ s'interprète par le fait que dans la population classée par ordre de richesse croissante, les premiers 30% de la population possèdent 9% de la richesse totale du pays. Plus l'indice $I(f)$ est grand, plus la répartition des richesses est inégalitaire.

Partie II - Le cas à densité

Soit g une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, 0]$, continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$. On définit une fonction G sur $\mathbb{R}_+$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(v)\, dv$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Si g représente la densité de population classée suivant son revenu croissant, $G(x)$ représente la proportion de la population dont le revenu est inférieur à x. On suppose de plus que $\displaystyle\int_0^{+\infty} v\, g(v)\, dv$ est convergente et on note m sa valeur qui représente donc la richesse moyenne de la population.

6. ***a)*** Montrer que $m > 0$.

b) Montrer que G est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$. On notera G^{-1} son application réciproque.

c) Quel est le sens de variation de G^{-1} sur $[0, 1[$?

7. ***a)*** À l'aide du changement de variable $u = G(v)$, établir que pour tout $t \in [0, 1[$,

$$\int_0^t G^{-1}(u)\, du = \int_0^{G^{-1}(t)} v\, g(v)\, dv$$

b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 G^{-1}(u)\, du$ converge et donner sa valeur.

8. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(t) = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_0^t G^{-1}(u)\, du$ pour tout $t \in [0,1[$ et $f(1) = 1$.

a) (i) Montrer que f est continue sur $[0,1]$.

(ii) Montrer que f est convexe sur $[0,1[$. **On admettra qu'en fait f est convexe sur $[0,1]$.**

(iii) En déduire que f est un élément de E.

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, l'égalité

$$I(f) = -1 + \frac{2}{m}\int_0^{\infty} v\, g(v)\, G(v)\, dv$$

9. Soit λ un réel strictement positif. On suppose dans cette question que g est une densité de la loi exponentielle de paramètre λ.

a) Expliciter $G(x)$ pour $x > 0$.

b) Expliciter $G^{-1}(u)$ pour $u \in [0,1[$.

c) Donner la valeur de m.

d) Soit $t \in [0,1[$. Montrer que $f(t) = -\displaystyle\int_0^t \ln(1-u)\, du$.

e) En déduire que pour tout t élément de $[0,1[$, on a $f(t) = (1-t)\ln(1-t) + t$.

f) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-t)\ln(1-t)\, dt$ et la calculer.

g) En déduire la valeur de $I(f)$.

Partie III - Application à une population

Une population de N personnes est divisée en deux classes (typiquement hommes et femmes) et en n catégories (par exemple socio-professionnelles), suivant le tableau à double entrée suivant où tous les x_i et y_i pour i dans $[\![1,n]\!]$ sont des entiers naturels.
On suppose en outre que pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, $x_i \neq 0$.

Classes \ Catégories	c_1	c_2	c_3	$\cdots$	c_i	$\cdots$	c_n	Total
I	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n	X
II	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_i	$\cdots$	y_n	Y
Total	n_1	n_2	n_3	$\cdots$	n_i	$\cdots$	n_n	N

où on a donc posé $X = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$ et $X + Y = N$. On suppose en outre que $Y > 0$.
Pour i appartenant à $[\![1,n]\!]$, on adopte les notations suivantes :

$$p_i = \frac{n_i}{N},\ q_i = \frac{x_i}{X},\ r_i = \frac{y_i}{Y}$$

On note aussi $\varepsilon_i = \dfrac{x_i}{n_i}$, et $\varepsilon = \dfrac{X}{N}$, et on suppose que les catégories sont numérotées de telle sorte que :

$$\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2 \leqslant \cdots \leqslant \varepsilon_n$$

10. On pose $\Omega = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, ensemble des catégories dans la population.

a) Montrer que $P = (p_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, $Q = (q_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $R = (r_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont des distributions de probabilités.

b) Montrer que : $\dfrac{q_1}{p_1} \leqslant \cdots \leqslant \dfrac{q_n}{p_n}$ $(*)$

c) Montrer que : $\dfrac{r_1}{p_1} \geqslant \cdots \geqslant \dfrac{r_n}{p_n}$.

d) Montrer que pour i appartenant à $[\![1, n]\!]$, $r_i = \dfrac{n_i - x_i}{N - X} = \dfrac{p_i - \varepsilon q_i}{1 - \varepsilon}$.

11. Dans un premier temps, nous allons construire une application appartenant à E, qui permet de mesurer les inégalités à l'intérieur de la classe I.

On pose $P_0 = Q_0 = 0$, et pour $i \in [\![1, n]\!]$, $P_i = \sum\limits_{h=1}^{i} p_h$ et $Q_i = \sum\limits_{h=1}^{i} q_h$. On définit alors l'application φ de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que, pour tout entier $i \in [\![0, n]\!]$, $\varphi(P_i) = Q_i$ et pour tout entier $i \in [\![0, n-1]\!]$, φ est affine sur le segment $[P_i, P_{i+1}]$.

a) On suppose **dans cette question** $n = 3$.
Représenter dans un repère orthonormé φ lorsque $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ et $Q = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$.

b) Montrer que, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la pente de la droite passant par les points de coordonnées (P_{i-1}, Q_{i-1}) et (P_i, Q_i) est $u_i = \frac{q_i}{p_i}$ pour i appartenant à $[\![1, n]\!]$.

c) Montrer que si $i \in [\![0, n-1]\!]$ et $t \in [P_i, P_{i+1}]$, on a $\varphi(t) = u_{i+1}(t - P_i) + Q_i$.

d) **En admettant** que les inégalités $(*)$ de la question ***10.b)*** permettent d'affirmer que φ est convexe, justifier que φ appartient à E.

e) Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, calculer $\displaystyle\int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t)\, dt$.

f) Exprimer $I(\varphi)$ sous la forme d'une somme en fonction de $P_0, P_1, ..., P_n, Q_0, ...Q_n$.

12. Nous allons maintenant étudier l'application correspondante pour la classe II.

On pose $P_0 = R_0 = 0$ et pour $i \in [\![1, n]\!]$, $P_i = \sum\limits_{h=1}^{i} p_h$ et $R_i = \sum\limits_{h=1}^{i} r_h$. De même, on définit pour i élément de $[\![0, n]\!]$, $\Pi_i = 1 - P_{n-i}$. On considère l'application ψ de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\psi(P_i) = R_i$ et pour tout entier $i \in [\![0, n-1]\!]$, ψ est affine sur le segment $[P_i, P_{i+1}]$.

a) Montrer que la pente de la droite passant par les points de coordonnées (P_{i-1}, R_{i-1}) et (P_i, R_i) est $v_i = \frac{r_i}{p_i}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.

b) On considère l'application ψ^* définie pour tout $t \in [0, 1]$, par $\psi^*(t) = 1 - \psi(1 - t)$.

(i) On suppose **dans cette question** $n = 3$.
Représenter dans un même repère orthonormé les courbes représentatives de ψ et ψ^* lorsque $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ et $R = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

(ii) Montrer que ψ^* est convexe sur $[0, 1]$.

(iii) Montrer que ψ^* est affine sur $[\Pi_{i-1}, \Pi_i]$ pour $i \in [\![0, n-1]\!]$.

(iv) Montrer que la pente de ψ^* sur $[\Pi_{i-1}, \Pi_i]$ est v_{n-i+1} pour $i \in [\![1, n]\!]$.

On dit dans cette situation que les fonctions φ et ψ^* sont **adjointes** l'une de l'autre. C'est leur comparaison que Gini a proposé de considérer pour « mesurer les inégalités » entre la population de catégorie I et celle de catégorie II.
Une égalité entre les fonctions adjointes signale notamment l'absence totale d'inégalité sociale. La dernière question précise quelque peu ce point.

13. a) Montrer que si $\varphi = \psi^*$ alors pour tout i appartenant à $[\![1, n]\!]$:

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \frac{1 - \varepsilon_{n-i+1}}{1 - \varepsilon}$$

b) Montrer que si $\varphi = \psi^*$, alors pour tout i appartenant à $[\![1, n]\!]$, $\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1} = 2\varepsilon$.

c) Déduire que si $\varphi = \psi^*$, on a pour tout i appartenant à $[\![1, n]\!]$, $\varepsilon_i(1 - 2\varepsilon) = \varepsilon(1 - 2\varepsilon)$.

d) On suppose que $\varepsilon \neq \dfrac{1}{2}$. Montrer que si $\varphi = \psi^*$, alors pour tout i appartenant à $[\![1, n]\!]$, $\varepsilon_i = \varepsilon$. Interpréter ce résultat.

ESSEC-II 2017 : le corrigé

Étudier l'évolution des inégalités dans la répartition des richesses, matérielles ou symboliques, dans une société est un des thèmes majeurs des sciences humaines. Considérons un exemple élémentaire. Le tableau ci-dessous présente le pourcentage d'accès à l'enseignement secondaire en Grande-Bretagne lors de deux périodes pour deux catégories sociales :

	avant 1910	entre 1935 et 1940
Profession libérale	37%	62%
Ouvriers	1%	10%

On propose trois modes de comparaison des inégalités entre les deux classes sociales.

1. En regardant l'augmentation des pourcentages pour les deux classes entre les deux périodes on conclut que l'inégalité a augmenté entre la classe la plus aisée (Profession libérale) et la plus défavorisée (Ouvriers).
2. Si on regarde le taux d'accroissement des pourcentages, comme $\frac{10}{1} > \frac{62}{37}$, on déduit que l'inégalité a diminué.
3. Si on regarde le taux d'accroissement des pourcentages *de ceux qui n'accèdent pas à l'enseignement secondaire*, comme $\frac{90}{99} > \frac{38}{63}$, on déduit que l'inégalité a augmenté puisque le nombre de ceux qui n'ont pas accès à l'enseignement supérieur a proportionnellement plus diminué que celui de ceux qui y ont accès.

Comme on le voit chacune des façons de voir est légitime à sa manière. L'objet du problème est d'introduire des outils afin d'étudier la *concentration* d'une loi de probabilité pour contourner des paradoxes auxquels une analyse trop rapide peut conduire, ou du moins d'en être conscient.

Partie I - Indice de Gini

On rappelle qu'une fonction numérique définie sur l'intervalle J de $\mathbb{R}$ est *convexe* sur J si elle vérifie la propriété suivante : $\forall (t_1, t_2) \in J^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda\, t_1 + (1-\lambda)\, t_2) \leqslant \lambda\, f(t_1) + (1-\lambda)\, f(t_2)$.
On rappelle en outre qu'une fonction f est *concave* si $-f$ est convexe.
On désigne par E l'ensemble des applications f définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$, continues et convexes sur $[0,1]$, et telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Pour toute application f de E, on note $\tilde{f}$ l'application associée à f, définie sur $[0,1]$ par $\tilde{f}(t) = t - f(t)$.

On pose $I(f) = 2\displaystyle\int_0^1 \tilde{f}(t)\, dt = 2\int_0^1 (t - f(t))\, dt$. $I(f)$ s'appelle l'**indice de Gini** de l'application f.

1. a) Donnez une interprétation géométrique de la propriété de convexité.

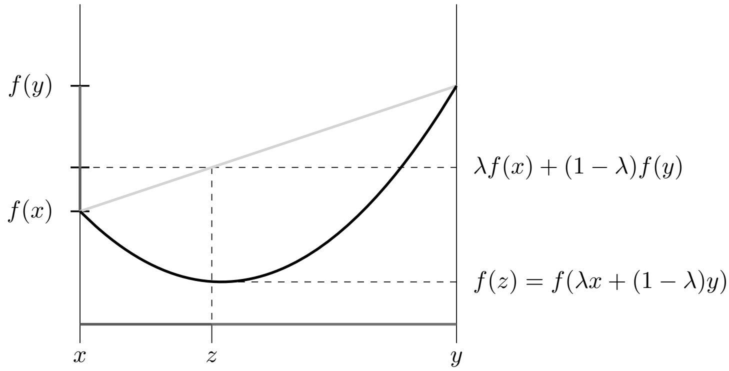
Démonstration.

Une fonction f est convexe si sa courbe représentative se situe en dessous de chacune de ses cordes.

Commentaire

Bien sûr, cette caractéristique est valide pour une orientation des axes usuelle.

On peut représenter graphiquement cette propriété grâce à la figure suivante :



Commentaire

Cette question est une question de cours. Il faut absolument répondre parfaitement pour mettre le correcteur en confiance.
On pouvait aussi utiliser la caractérisation de la convexité avec les tangentes : une fonction f est convexe si sa courbe représentative se situe au-dessus de chacune de ses tangentes.

□

b) Lorsque f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, rappeler la caractérisation de la convexité de f sur $[0,1]$ à l'aide de la dérivée f'.

Démonstration.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si la fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,1], \text{ alors :} \\ f \text{ convexe sur } [0,1] \Leftrightarrow f' \text{ croissante sur } [0,1].\end{array}}$$

Commentaire

Attention à ne pas donner ici la caractérisation pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.
Si une fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, alors :

$$f \text{ convexe sur } [0,1] \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in [0,1],\ f''(x) \geqslant 0$$

L'énoncé insistait bien sur le fait que la fonction f était seulement de classe $\mathcal{C}^1$. D'ailleurs, dans la suite, on ne travaillera qu'avec des fonctions seulement **continues** sur $[0,1]$.

□

2. a) Justifier que $\tilde{f}$ est concave sur $[0,1]$.

Démonstration.
Montrons que $\tilde{f}$ est concave sur $[0,1]$, c'est-à-dire que $-\tilde{f}$ est convexe sur $[0,1]$.
Soit $(t_1,t_2) \in [0,1]^2$. Soit $\lambda \in [0,1]$.

$$\begin{array}{rcll}
-\tilde{f}(\lambda\, t_1 + (1-\lambda) t_2) & = & f(\lambda\, t_1 + (1-\lambda) t_2) - (\lambda\, t_1 + (1-\lambda) t_2) & \\
& \leqslant & \lambda\, f(t_1) + (1-\lambda) f(t_2) - \lambda\, t_1 - (1-\lambda) t_2 & \textit{(car } f \textit{ est convexe sur } [0,1]\textit{)} \\
& = & \lambda (f(t_1) - t_1) + (1-\lambda)(f(t_2) - t_2) & \\
& = & \lambda (-\tilde{f})(t_1) + (1-\lambda)(-\tilde{f}(t_2)) &
\end{array}$$

Donc la fonction $-\tilde{f}$ est convexe sur $[0,1]$.

$$\boxed{\text{La fonction } \tilde{f} \text{ est concave sur } [0,1].}$$

Commentaire

Attention encore une fois : la fonction f n'est pas supposée ici de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Il n'y a donc pas d'autre choix que d'utiliser la définition de la convexité.

□

b) Montrer que $I(f) = 1 - 2 \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$.

Démonstration.

- La fonction $\tilde{f}$ est continue sur $[0,1]$ en tant que somme de fonctions continues sur $[0,1]$. Donc l'intégrale $I(f)$ est bien définie.
- On calcule alors :

$$\begin{aligned} I(f) &= 2\int_0^1 (t - f(t)\ dt \ = \ 2\int_0^1 t\ dt - 2\int_0^1 f(t)\ dt \ = \ 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 - 2\int_0^1 f(t)\ dt \\ &= 2 \times \frac{1}{2} - 2\int_0^1 f(t)\ dt \ = \ 1 - 2\int_0^1 f(t)\ dt \end{aligned}$$

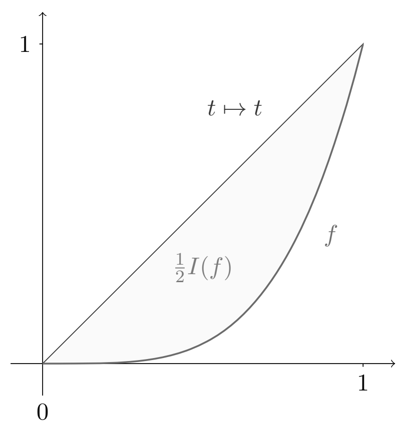
$$\boxed{I(f) = 1 - 2\int_0^1 f(t)\ dt}$$

□

c) Représenter dans un même repère orthonormé les fonctions f et $t \mapsto t$ et donner une interprétation géométrique de $I(f)$.

Démonstration.

Dans l'ensemble du problème, on notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.
La fonction $t \mapsto t$ correspond en fait à la corde de $\mathcal{C}_f$ sur $[0,1]$.



On sait que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 t\ dt$ et $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ mesurent respectivement l'aire sous la courbe de $t \mapsto t$ et l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } I(f) \text{ mesure le double de l'aire entre } \mathcal{C}_f \text{ et sa corde sur } [0,1].}$$

□

3. **Un premier exemple**.
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(t) = t^2$ pour tout $t \in [0,1]$.

a) Montrer que f est un élément de E.

Démonstration.

- La fonction f est bien définie sur $[0,1]$.
- De plus : $f(0) = 0^2 = 0$ et $f(1) = 1^2 = 1$.
- La fonction f est croissante sur $[0,1]$, donc :

$$\forall t \in [0,1], \ f(0) \leqslant f(t) \leqslant f(1)$$

On obtient : $\forall t \in [0,1]$, $0 \leqslant f(t) \leqslant 1$.
Donc la fonction f est à valeurs dans $[0,1]$.

- La fonction f est bien continue sur $[0,1]$ (en tant que fonction polynomiale).
- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et :

$$\forall t \in [0,1], \ f''(t) = 2 \geqslant 0$$

Donc f est convexe.

$$\boxed{\text{Finalement : } f \in E.}$$

□

b) Calculer $I(f)$.

Démonstration.
D'après la question ***2.b)*** :

$$I(f) \ = \ 1 - 2 \int_0^1 \ t^2 \ dt \ = \ 1 - 2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 \ = \ 1 - \frac{2}{3} \ = \ \frac{1}{3}$$

$$\boxed{I(f) = \frac{1}{3}}$$

Commentaire

Ces questions ***3.a)*** et ***3.b)*** testent la compréhension des notions et notations introduites par l'énoncé.
Ce sont souvent des questions simples qu'il faut repérer et rédiger soigneusement.

□

4. **Propriétés de l'indice de Gini.**

a) Pour f élément de E, établir que $I(f) \geqslant 0$.

Démonstration.

- La fonction f est convexe sur $[0,1]$.
Sa courbe représentative est donc située en-dessous de sa corde sur $[0,1]$.
- Or, la corde sur $[0,1]$ de $\mathcal{C}_f$ est le segment reliant les points $(0, f(0))$ et $(1, f(1))$.
Donc, comme $f \in E$, c'est le segment reliant les points $(0,0)$ et $(1,1)$.
La corde de $\mathcal{C}_f$ sur $[0,1]$ est la représentation de la fonction $t \mapsto t$ sur le segment $[0,1]$.

- On obtient alors :
$$\forall t \in [0,1],\ f(t) \leqslant t \quad \text{donc} \quad f(t) - t \leqslant 0$$
Ainsi : $\tilde{f}(t) = t - f(t) \geqslant 0$.
- Par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans l'ordre croissant) :
$$\int_0^1 (f(t) - t)\ dt \leqslant 0$$

$$\boxed{\text{D'où : } I(f) = 2\int_0^1 \tilde{f}(t)\ dt \geqslant 0.}$$

Commentaire

Le sujet adopte une approche géométrique de la convexité dès le début. On privilégiera donc des réponses de ce type.
On pouvait néanmoins aussi résoudre cette question de la manière suivante.
Soit $t \in [0,1]$.

- On applique l'inégalité de convexité de l'énoncé avec :
$$t_1 = 1, \quad t_2 = 0, \quad \lambda = t$$
On obtient alors :
$$f(t \times 1 + (1-t) \times 0) \ \leqslant\ t\, f(1) + (1-t) f(0)$$
Or : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
D'où : $f(t) \leqslant t$. Donc : $\tilde{f}(t) = t - f(t) \geqslant 0$.
- On conclut alors de la même manière que précédemment en utilisant la croissance de l'intégrale.

□

b) Montrer que $I(f) = 0$ si et seulement si $f(t) = t$ pour tout $t \in [0,1]$.

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$I(f) = 0 \ \Leftrightarrow\ 2\int_0^1 \tilde{f}(t)\ dt = 0 \ \Leftrightarrow\ \int_0^1 \tilde{f}(t)\ dt = 0$$
- De plus, la fonction $\tilde{f}$ est :
  × continue sur $[0,1]$, en tant que somme de fonctions continues sur $[0,1]$;
  × positive sur $[0,1]$, d'après la question précédente.

  Donc :
$$\int_0^1 \tilde{f}(t)\ dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in [0,1],\ \tilde{f}(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in [0,1],\ f(t) = t$$

$$\boxed{I(f) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [0,1],\ f(t) = t}$$

□

c) Montrer que pour tout f élément de E, $I(f) < 1$.

Démonstration.
Soit $f \in E$.

- D'après la question ***2.b)*** :

$$I(f) < 1 \;\Leftrightarrow\; 1 - 2\int_0^1 f(t)\,dt < 1 \;\Leftrightarrow\; 2\int_0^1 f(t)\,dt > 0 \;\Leftrightarrow\; \int_0^1 f(t)\,dt > 0$$

- Comme f est à valeurs positives (elle est à valeurs dans $[0,1]$), on a déjà : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt \geqslant 0$.
- De plus, la fonction f est :
  × continue sur $[0,1]$;
  × positive sur $[0,1]$.

  Donc :

$$\int_0^1 f(t)\,dt = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \forall t \in [0,1],\; f(t) = 0$$

  Cette dernière assertion est fausse car $f(1) = 1$.
  Donc : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt \neq 0$. D'où : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt > 0$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall f \in E,\ I(f) < 1.}$$

□

d) Pour tout entier $n > 0$, on définit f_n sur $[0,1]$ par $f_n(t) = t^n$.

(i) Pour tout entier n strictement positif, calculer $I(f_n)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Commençons par montrer : $f_n \in E$.

- La fonction f_n est bien définie sur $[0,1]$.
- De plus, comme $n > 0$: $f_n(0) = 0^n = 0$ et $f_n(1) = 1^n = 1$.
- La fonction f_n est croissante sur $[0,1]$, donc :

$$\forall t \in [0,1],\; f_n(0) \leqslant f_n(t) \leqslant f_n(1)$$

  On obtient : $\forall t \in [0,1]$, $0 \leqslant f_n(t) \leqslant 1$.
  Donc la fonction f_n est à valeurs dans $[0,1]$.
- La fonction f_n est bien continue sur $[0,1]$.
- Elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et :

$$\forall t \in [0,1],\; f_n''(t) = n(n-1) \geqslant 0$$

  Donc f_n est convexe.

$$\boxed{\text{Finalement : } f_n \in E.}$$

D'après la question ***2.b)*** :

$$I(f_n) \;=\; 1 - 2\int_0^1 t^n\,dt \;=\; 1 - 2\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \;=\; 1 - \frac{2}{n+1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I(f_n) = 1 - \frac{2}{n+1}}$$

Commentaire

On remarque que l'on retrouve bien le résultat obtenu en question ***3.*** pour $n = 2$. □

(ii) En déduire que pour tout réel A vérifiant $0 \leqslant A < 1$, il existe f appartenant à E telle que $I(f) > A$.

Démonstration.
Soit $A \in [0, 1[$.

- D'après la question précédente : $I(f_n) = 1 - \dfrac{2}{n+1}$.
- Donc :

$$\begin{aligned} I(f_n) > A \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{2}{n+1} > A \ \Leftrightarrow\ \frac{2}{n+1} < 1 - A \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{n+1}{2} > \frac{1}{1-A} \qquad \textit{(par stricte décroissance de } x \mapsto \frac{1}{x} \textit{ sur }]0, +\infty[\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad n + 1 > \frac{2}{1-A} \ \Leftrightarrow\ n > \frac{2}{1-A} - 1 \end{aligned}$$

On choisit alors $N = \lceil \dfrac{2}{1-A} - 1 \rceil$, et on obtient : $I(f_N) > A$.

$$\boxed{\text{Donc pour tout } A \in [0, 1[, \text{ il existe } f \in E \text{ tel que } I(f) > A.}$$

Commentaire

On pouvait aussi se servir de la définition de la limite d'une suite, comme détaillé ci-dessous.

- D'après la question précédente : $\lim\limits_{n \to +\infty} I(f_n) = 1$
- Donc, par définition de la limite d'une suite :

pour tout $A \in [0, 1[$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $I(f_N) > A$. □

5. **Minoration de l'indice de Gini**

a) Soit f élément de E. Montrer qu'il existe t_0 dans $]0, 1[$ tel que $\tilde{f}(t_0) = \max\limits_{t \in [0,1]} \tilde{f}(t)$.

Démonstration.
La fonction $\tilde{f}$ est continue sur le **segment** $[0, 1]$.
Elle est donc bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle est majorée et son maximum est atteint pour un certain réel de $[0, 1]$.
Donc il existe $a \in [0, 1]$ tel que : $\tilde{f}(a) = \max\limits_{t \in [0,1]} \tilde{f}(t)$.

Trois cas se présentent alors.

- Si $a \in \,]0,1[$. Alors on choisit $t_0 = a$.
  Et on a effectivement montré qu'il existe $t_0 \in \,]0,1[$ tel que : $\tilde{f}(t_0) = \max\limits_{t\in[0,1]} \tilde{f}(t)$.
- Si $a = 0$.
  × Alors :
  $$\tilde{f}(a) = \tilde{f}(0) = 0 - f(0) = 0$$
  × Donc, comme a est un maximum de $\tilde{f}$ sur $[0,1]$, on obtient :
  $$\forall t \in [0,1],\ \tilde{f}(t) \leqslant \tilde{f}(a) = 0$$
  × Or, d'après la question *4.* : $\forall t \in [0,1]$, $\tilde{f}(t) \geqslant 0$.
  On en déduit :
  $$\forall t \in [0,1],\ \tilde{f}(t) = 0 \quad \textit{(donc } f(t) = t\textit{)}$$
  Le maximum de $\tilde{f}$ est donc 0 et il est atteint en chaque réel du segment $[0,1]$.
  On peut donc choisir n'importe quel réel de $]0,1[$ pour t_0.
  Par exemple, on choisit : $t_0 = \dfrac{1}{2} \in \,]0,1[$.
- Si $a = 1$. Alors, en raisonnant comme pour le cas $a = 0$, on obtient :
  $$\forall t \in [0,1],\ \tilde{f}(t) = 0$$
  On choisit donc encore : $t_0 = \dfrac{1}{2} \in \,]0,1[$.

$$\boxed{\text{Ainsi, il existe toujours } t_0 \in \,]0,1[\text{ tel que : } \tilde{f}(t_0) = \max_{t\in[0,1]} \tilde{f}(t).}$$

□

b) Montrer que pour tout t de $[0, t_0]$, $\tilde{f}(t) \geqslant \tilde{f}(t_0) \cdot \dfrac{t}{t_0}$.

Démonstration.

- La fonction $\tilde{f}$ est concave sur $[0, t_0]$.
  Sa courbe représentative est donc située au-dessus de sa corde sur $[0, t_0]$.
- Or la corde sur $[0, t_0]$ de $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$ est le segment reliant les points $(0, \tilde{f}(0))$ et $(t_0, \tilde{f}(t_0))$.
  Donc, c'est le segment reliant $(0,0)$ et $(t_0, \tilde{f}(t_0))$.
  Montrons que $y = \tilde{f}(t_0) \cdot \dfrac{t}{t_0}$ est l'équation de la droite (D) passant par ces deux points.
  × La fonction $t \mapsto \tilde{f}(t_0) \cdot \dfrac{t}{t_0}$ est bien une fonction affine.
  × Ensuite : $\tilde{f}(t_0)\, \dfrac{0}{t_0} = 0$.
  Donc (D) passe bien par le point $(0,0)$.
  × Enfin : $\tilde{f}(t_0)\, \dfrac{t_0}{t_0} = \tilde{f}(t_0)$.
  Donc (D) passe bien par le point $(t_0, \tilde{f}(t_0))$.

  La corde de $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$ sur $[0, t_0]$ est donc la représentation de la fonction $t \mapsto \tilde{f}(t_0) \cdot \dfrac{t}{t_0}$ sur $[0, t_0]$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in [0, t_0],\ \tilde{f}(t) \geqslant \tilde{f}(t_0)\, \frac{t}{t_0}}$$

Commentaire

- Comme à la question ***4.a)***, on pouvait appliquer l'inégalité de concavité à $\tilde{f}$ avec :

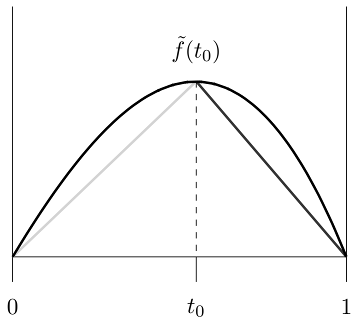
$$t_1 = t_0, \quad t_2 = 0, \quad \lambda = \frac{t}{t_0}$$

(on a bien $\lambda \in [0,1]$ car $t \in [0, t_0]$)
On obtient alors :

$$\tilde{f}\left(\frac{t}{\cancel{t_0}} \times \cancel{t_0} + \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \times 0\right) \geqslant \frac{t}{t_0}\,\tilde{f}(t_0) + \left(1 - \frac{t}{t_0}\right)\tilde{f}(0)$$

Or : $\tilde{f}(0) = 0$. D'où : $\tilde{f}(t) \geqslant \dfrac{t}{t_0}\tilde{f}(t_0)$.

- On peut représenter la situation graphiquement :



Le segment vert représente la corde de $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$ sur $[0, t_0]$ et le segment bleu représente la corde de $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$ sur $[t_0, 1]$.

□

c) Montrer que pour tout t de $[t_0, 1]$, $\tilde{f}(t) \geqslant \tilde{f}(t_0) \cdot \dfrac{t-1}{t_0-1}$.

Démonstration.

- La fonction $\tilde{f}$ est concave $[t_0, 1]$.
  Sa courbe représentative est donc située au-dessus de sa corde sur $[t_0, 1]$.
- Or la corde sur $[t_0, 1]$ de $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$ est le segment reliant les points $(t_0, \tilde{f}(t_0))$ et $(1, \tilde{f}(1))$.
  Donc, d'après la question ***5.a)***, c'est le segment reliant $(t_0, \tilde{f}(t_0))$ et $(1, 0)$.
  Montrons que $y = \tilde{f}(t_0) \cdot \dfrac{t-1}{t_0-1}$ est l'équation de la droite (d) passant par ces deux points.
  - × La fonction $t \mapsto \tilde{f}(t_0) \cdot \dfrac{t-1}{t_0-1}$ est bien une fonction affine.
  - × Ensuite : $\tilde{f}(t_0)\,\dfrac{t_0-1}{t_0-1} = \tilde{f}(t_0)$.
    Donc (d) passe bien par le point $(t_0, \tilde{f}(t_0))$.
  - × Enfin : $\tilde{f}(t_0)\,\dfrac{1-1}{t_0-1} = 0$.
    Donc (d) passe bien par le point $(1, 0)$.

  La corde de $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$ sur $[t_0, 1]$ est donc représentée par la fonction $t \mapsto \tilde{f}(t_0) \cdot \dfrac{t-1}{t_0-1}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in [t_0, 1],\ \tilde{f}(t) \geqslant \tilde{f}(t_0)\,\frac{t-1}{t_0-1}}$$

Commentaire

Comme à la question ***4.a)***, on pouvait aussi appliquer l'inégalité de concavité à $\tilde{f}$ avec :

$$t_1 = t_0, \quad t_2 = 1, \quad \lambda = \frac{t-1}{t_0 - 1}$$

(on a bien $\lambda \in [0,1]$ car $t \in [t_0, 1]$)

□

d) En déduire que $I(f) \geqslant \tilde{f}(t_0)$.

Démonstration.

- D'après la question ***5.b)*** :

$$\forall t \in [0, t_0], \ \tilde{f}(t) \geqslant \tilde{f}(t_0)\, \frac{t}{t_0}$$

Donc, par croissance de l'intégration (les bornes sont bien ordonnées) :

$$\int_0^{t_0} \tilde{f}(t)\ dt \geqslant \int_0^{t_0} \tilde{f}(t_0)\, \frac{t}{t_0}\ dt$$

Or :

$$\int_0^{t_0} \tilde{f}(t_0)\, \frac{t}{t_0}\ dt \ = \ \frac{\tilde{f}(t_0)}{t_0} \int_0^{t_0} t\ dt \ = \ \frac{\tilde{f}(t_0)}{t_0} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{t_0} \ = \ \frac{\tilde{f}(t_0)}{2\, t_0} (t_0^2 - 0^2) \ = \ \frac{\tilde{f}(t_0)\, t_0}{2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \int_0^{t_0} \tilde{f}(t)\ dt \geqslant \frac{\tilde{f}(t_0)\, t_0}{2}.}$$

- De même, d'après la question ***5.c)*** :

$$\forall t \in [t_0, 1], \ \tilde{f}(t) \geqslant \tilde{f}(t_0)\, \frac{t-1}{t_0 - 1}$$

Donc, par croissance de l'intégration (les bornes sont bien ordonnées) :

$$\int_{t_0}^{1} \tilde{f}(t)\ dt \geqslant \int_{t_0}^{1} \tilde{f}(t_0)\, \frac{t-1}{t_0-1}\ dt$$

Or :

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{1} \tilde{f}(t_0)\, \frac{t-1}{t_0-1}\ dt \ &= \ \frac{\tilde{f}(t_0)}{t_0-1} \int_{t_0}^{1} (t-1)\ dt \ = \ \frac{\tilde{f}(t_0)}{t_0-1} \left[\frac{t^2}{2} - t \right]_{t_0}^{1} \\
&= \ \frac{\tilde{f}(t_0)}{t_0-1} \left(\frac{1^2}{2} - 1 - \left(\frac{t_0^2}{2} - t_0 \right) \right) \ = \ \frac{\tilde{f}(t_0)}{2(t_0-1)} (-t_0^2 + 2t_0 - 1) \\
&= \ -\frac{\tilde{f}(t_0)}{2(t_0-1)} (t_0^2 - 2t_0 + 1) \ = \ -\frac{\tilde{f}(t_0)}{2\cancel{(t_0-1)}} (t_0 - 1)^{\cancel{2}} \\
&= \ \frac{\tilde{f}(t_0)(1-t_0)}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \int_{t_0}^{1} \tilde{f}(t)\ dt \geqslant \frac{\tilde{f}(t_0)(1-t_0)}{2}.}$$

- Par relations de Chasles :

$$\begin{array}{rcl} I(f) & = & 2\displaystyle\int_0^1 \tilde{f}(t)\ dt \\ & = & 2\displaystyle\int_0^{t_0} \tilde{f}(t)\ dt + 2\displaystyle\int_{t_0}^1 \tilde{f}(t)\ dt \\ & \geqslant & \tilde{f}(t_0)\, t_0 + \tilde{f}(t_0)(1-t_0) \ = \ \tilde{f}(t_0) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } I(f) \geqslant \tilde{f}(t_0).}$$

□

L'indice de Gini donne une indication sur la concentration des richesses d'un pays si l'on suppose que la fonction f rend compte de cette concentration. Par exemple, $f(0,3) = 0,09$ s'interprète par le fait que dans la population classée par ordre de richesse croissante, les premiers 30% de la population possèdent 9% de la richesse totale du pays. Plus l'indice $I(f)$ est grand, plus la répartition des richesses est inégalitaire.

Partie II - Le cas à densité

Soit g une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, 0]$, continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$. On définit une fonction G sur $\mathbb{R}_+$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(v)\ dv$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Si g représente la densité de population classée suivant son revenu croissant, $G(x)$ représente la proportion de la population dont le revenu est inférieur à x. On suppose de plus que $\displaystyle\int_0^{+\infty} v\, g(v)\ dv$ est convergente et on note m sa valeur qui représente donc la richesse moyenne de la population.

6. a) Montrer que $m > 0$.

Démonstration.
La fonction $v \mapsto v\, g(v)$ est :

× continue sur $]0, +\infty[$, en tant que produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$;

× **strictement** positive sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Donc, par positivité de l'intégrale : } m = \int_0^{+\infty} v\, g(v)\ dv > 0.}$$

□

b) Montrer que G est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$. On notera G^{-1} son application réciproque.

Démonstration.

- La fonction g est nulle en dehors de $]0, +\infty[$. Donc, pour tout $x \geqslant 0$:

$$\int_{-\infty}^x g(v)\ dv \ = \ \int_0^x g(v)\ dv \ = \ G(x)$$

On en déduit que la fonction G coïncide sur $\mathbb{R}_+$ avec la fonction de répartition associée à la densité g.
En particulier, la fonction G :

× est continue sur $\mathbb{R}_+$,

× est croissante sur $\mathbb{R}_+$,

× vérifie : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} G(x) = 1$.

- La fonction g est continue sur $]0, +\infty[$.
  Donc, en tant que primitive de g, la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
  De plus, pour tout $x \in\,]0, +\infty[$:
  $$G'(x) = g(x) > 0$$
  D'où G est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc strictement croissante sur $[0, +\infty[$ (car $g(0) = 0$ et donc : $\forall x > 0,\ g(x) > g(0)$).
- En résumé, la fonction G est :
  × continue sur $[0, +\infty[$,
  × strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
  Ainsi, G réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $G([0, +\infty[)$.
  $$G([0, +\infty[) = \left[G(0), \lim_{x \to +\infty} G(x)\right[= [0, 1[$$
  $$\boxed{\text{La fonction } G \text{ réalise une bijection de } [0, +\infty[\text{ sur } [0, 1[.}$$

□

c) Quel est le sens de variation de G^{-1} sur $[0, 1[$?

Démonstration.
D'après le théorème de la bijection, la fonction G^{-1} est continue sur $[0, 1[$ et strictement monotone sur $[0, 1[$, de même sens de variation que G.

$$\boxed{\text{La fonction } G^{-1} \text{ est donc strictement croissante sur } [0, 1[.}$$

□

7. a) À l'aide du changement de variable $u = G(v)$, établir que pour tout $t \in [0, 1[$,

$$\int_0^t G^{-1}(u)\ du = \int_0^{G^{-1}(t)} v\, g(v)\ dv$$

Démonstration.

- La fonction G^{-1} est continue sur $[0, 1[$.
  Donc, en particulier, pour tout $t \in [0, 1[$, G^{-1} est continue sur le segment $[0, t]$.
  $$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } t \in [0, 1[, \text{ l'intégrale } \int_0^t G^{-1}(u)\ du \text{ est bien définie.}}$$
- Soit $t \in\,]0, 1[$. Soit $a > 0$.
  On effectue le changement de variable $\boxed{u = G(v)}$, où G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, t] \subset\,]0, +\infty[$ (d'après la question ***6.b)***).

  $u = G(v)$ (et donc $v = G^{-1}(u)$)
  $\hookrightarrow du = g(v)\ dv$
  - $v = G^{-1}(a) \ \Rightarrow\ u = G(G^{-1}(a)) = a$
  - $v = G^{-1}(t) \ \Rightarrow\ u = G(G^{-1}(t)) = t$

On obtient finalement :

$$\int_a^t G^{-1}(u)\,du \;=\; \int_{G(G^{-1}(a))}^{G(G^{-1}(t))} G^{-1}(u)\,du \;=\; \int_{G^{-a}}^{G^{-1}(t)} G^{-1}(G(v))\,g(v)\,dv \;=\; \int_{G^{-1}(a)}^{G^{-1}(t)} v\,g(v)\,dv$$

Or : $\lim\limits_{a\to 0} G^{-1}(a) = G^{-1}(0) = 0$.

De plus, d'après l'énoncé, $\displaystyle\int_0^{+\infty} v\,g(v)\;dv$ converge en 0.

$$\boxed{\text{Donc : } \forall t \in [0,1[,\ \int_0^t G^{-1}(u)\;du = \int_0^{G^{-1}(t)} v\,g(v)\;dv.}$$

□

b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 G^{-1}(u)\;du$ converge et donner sa valeur.

Démonstration.
D'après la question ***6.b)*** : $\lim\limits_{t\to 1^-} G^{-1}(t) = +\infty$.

Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} v\,g(v)\;dv$ converge.

D'après la question précédente, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 G^{-1}(u)\;du$ converge et :

$$\int_0^1 G^{-1}(u)\;du = \int_0^{+\infty} v\,g(v)\;dv = m$$

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^1 G^{-1}(u)\;du \text{ converge et vaut } m.}$$

□

8. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(t) = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_0^t G^{-1}(u)\;du$ pour tout $t \in [0,1[$ et $f(1) = 1$.

a) (i) Montrer que f est continue sur $[0,1]$.

Démonstration.

- La fonction G^{-1} est continue sur $[0,1[$.
  Donc elle admet une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
  On obtient alors :
  $$\forall t \in [0,1[,\ f(t) = \frac{1}{m}(F(t) - F(0))$$
  Donc la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ en tant que transformée affine d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
  En particulier, f est continue sur $[0,1[$.
- De plus, d'après la question précédente :
  $$\lim_{t\to 1^-} f(t) = \frac{1}{\cancel{m}} \times \cancel{m} = 1 = f(1)$$
  Donc f est continue en 1.

$$\boxed{\text{Finalement, la fonction } f \text{ est continue sur } [0,1].}$$

□

(ii) Montrer que f est convexe sur $[0,1[$. **On admettra qu'en fait f est convexe sur** $[0,1]$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
  De plus, comme F est une primitive de G^{-1}, on obtient, pour tout $t \in [0,1[$:

$$f'(t) = \frac{1}{m}\,F'(t) = \frac{1}{m}\,G^{-1}(t)$$

- Or, d'après la question ***6.c)***, la fonction G^{-1} est strictement croissante sur $[0,1[$.
  Donc, comme $\dfrac{1}{m} > 0$, f' est strictement croissante sur $[0,1[$.

$$\boxed{\text{D'où, d'après la question } \textbf{\textit{1.b)}}\text{, } f \text{ est convexe sur } [0,1[.}$$

□

(iii) En déduire que f est un élément de E.

Démonstration.

- D'après la question ***8.a)(i)***, la fonction f est continue sur $[0,1]$.
- D'après la question ***8.a)(ii)***, la fonction f est convexe sur $[0,1]$.
- $f(0) = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_0^0 G^{-1}(u)\ du = 0$
- $f(1) = 1$
- D'après la question précédente : $f' = \dfrac{1}{m}\,G^{-1}$.
  Or la fonction G^{-1} est à valeurs dans $[0,+\infty[$.
  D'où : $\forall t \in [0,1[$, $f'(t) \geqslant 0$. Ainsi f est croissante sur $[0,1[$, donc sur $[0,1]$ par continuité.
  Soit $t \in [0,1]$. On a alors :
  $$f(0) \ \leqslant\ f(t) \ \leqslant\ f(1)$$
  Donc : $0 \leqslant f(t) \leqslant 1$. Ainsi f est à valeurs dans $[0,1]$.

$$\boxed{\text{Finalement : } f \in E.}$$

□

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, l'égalité

$$I(f) = -1 + \frac{2}{m}\int_0^{\infty} v\,g(v)\,G(v)\ dv$$

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question ***2.b)*** :
  $$I(f) = 1 - 2\int_0^1 f(t)\ dt$$
  On s'intéresse donc au calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$.
- Soit $a \in [0,1[$. On effectue l'intégration par parties (IPP) suivante.

$$\left|\begin{array}{rclcrclcl} u(t) & = & f(t) & \quad & u'(t) & = & f'(t) & = & \dfrac{1}{m}\,G^{-1}(t) \\[2ex] v'(t) & = & 1 & & v(t) & = & t & & \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$. On obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^a f(t)\ dt &= \left[\ t\, f(t)\ \right]_0^a - \frac{1}{m}\int_0^a t\, G^{-1}(t)\ dt \\ &= a\, f(a) - \frac{1}{m}\int_0^a t\, G^{-1}(t)\ dt \quad (*)\end{aligned}$$

On sait déjà : $\lim\limits_{a\to 1^-} a\, f(a) = 1 \times f(1) = 1$.

On s'intéresse donc au calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^a t\, G^{-1}(t)\ dt$.

- Comme en question ***7.a)***, on effectue le changement de variable $\boxed{t = G(v)}$, où G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

$$\left|\begin{array}{l} t = G(v) \text{ (et donc } v = G^{-1}(t)) \\ \hookrightarrow dt = g(v)\ dv \\ \bullet\ v = 0 \ \Rightarrow\ t = G(0) = 0 \\ \bullet\ v = G^{-1}(a) \ \Rightarrow\ t = G(G^{-1}(a)) = a \end{array}\right.$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned}\int_0^a t\, G^{-1}(t)\ dt &= \int_0^{G(G^{-1}(a))} t\, G^{-1}(t)\ dt \\ &= \int_0^{G^{-1}(a)} G(v)\, G^{-1}(G(v))\, g(v)\ dv \\ &= \int_0^{G^{-1}(a)} G(v)\, v\, g(v)\ dv\end{aligned}$$

- On en déduit, avec $(*)$:

$$\int_0^{G^{-1}(a)} v\, g(v)\, G(v)\ dv = m\left(a f(a) - \int_0^a f(t)\ dt\right)$$

Or : $\lim\limits_{a\to 1^-} a\, f(a) = 1$.

De plus $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ converge, car f est continue sur $[0,1]$.

Donc, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} v\, g(v)\, G(v)\ dv$ converge (car : $\lim\limits_{a\to 1^-} G^{-1}(a) = +\infty$).

- On obtient alors :

$$\begin{aligned} I(f) &= 1 - 2\int_0^1 f(t)\ dt \\ &= 1 - 2\left(1 - \frac{1}{m}\int_0^{+\infty} v\, g(v)\, G(v)\ dv\right) \\ &= -1 + \frac{2}{m}\int_0^{+\infty} v\, g(v)\, G(v)\ dv\end{aligned}$$

$$\boxed{I(f) = -1 + \frac{2}{m}\int_0^{+\infty} v\, g(v)\, G(v)\ dv}$$

□

9. Soit λ un réel strictement positif. On suppose dans cette question que g est une densité de la loi exponentielle de paramètre λ.

a) Expliciter $G(x)$ pour $x > 0$.

Démonstration.
On rappelle que G coïncide sur $\mathbb{R}_+$ avec la fonction de répartition associée à la densité g.
La fonction G coïncide donc ici sur $\mathbb{R}_+$ avec la fonction de répartition d'une v.a.r. suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

$$\boxed{\forall x > 0,\ G(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, x}}$$

□

b) Expliciter $G^{-1}(u)$ pour $u \in [0, 1[$.

Démonstration.
Soit $u \in [0, 1[$. Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} G^{-1}(u) = x \quad &\Leftrightarrow \quad u = G(x) \ \Leftrightarrow \ u = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, x} \ \Leftrightarrow \ 1 - u = \mathrm{e}^{-\lambda\, x} \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(1-u) = -\lambda\, x \ \Leftrightarrow \ -\frac{1}{\lambda} \ln(1-u) = x \qquad \textit{(car } \lambda \neq 0\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall u \in [0, 1[,\ G^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-u)}$$

□

c) Donner la valeur de m.

Démonstration.
On note X une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
On rappelle que g est une densité de X. Donc :

$$m = \int_0^{+\infty} v\, g(v)\ dv = \mathbb{E}(X)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}.}$$

□

d) Soit $t \in [0, 1[$. Montrer que $f(t) = -\displaystyle\int_0^t \ln(1-u)\ du$.

Démonstration.
Soit $t \in [0, 1[$.
Par définition de f (question ***8.***) :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{m} \int_0^t G^{-1}(u)\ du \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\lambda}} \int_0^t -\frac{1}{\lambda} \ln(1-u)\ du \qquad \textit{(d'après } \textbf{9.b)} \textit{ et } \textbf{9.c)}\textit{)} \\ &= -\int_0^t \ln(1-u)\ du \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in [0, 1[,\ f(t) = -\int_0^t \ln(1-u)\ du}$$

□

e) En déduire que pour tout t élément de $[0,1[$, on a $f(t) = (1-t)\ln(1-t) + t$.

Démonstration.
On note $h : t \mapsto (1-t)\ \ln(1-t) + t$.
Pour montrer que f coïncide avec h, vérifions que h est l'unique primitive de $t \mapsto -\ln(1-t)$ qui s'annule en 0.

- $h(0) = (1-0)\ \ln(1-0) + 0 = 0$
- La fonction h est dérivable sur l'intervalle $[0,1[$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables sur $[0,1[$.
  Soit $t \in [0,1[$.

$$h'(t) = -\ln(1-t) - \cancel{(1-t)}\frac{1}{\cancel{1-t}} + 1 = -\ln(1-t) - \cancel{1} + \cancel{1} = -\ln(1-t)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } f : t \mapsto (1-t)\ln(1-t) + t.}$$

Commentaire

- Il était également possible (bien que plus long et périlleux) d'effectuer une intégration par parties. Détaillons cette méthode.
  Soit $x \in [0,1[$. On effectue l'intégration par parties (IPP) suivante.

$$\left|\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} u(t) & = & \ln(1-t) & u'(t) & = & -\dfrac{1}{1-t} \\[2ex] v'(t) & = & -1 & v(t) & = & 1-t \end{array}\right.$$

  Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,x]$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \displaystyle\int_0^x -\ln(1-t)\ dt \\[2ex] & = & \Big[\ (1-t)\ln(1-t)\ \Big]_0^x + \displaystyle\int_0^x \cancel{(1-t)}\frac{1}{\cancel{1-t}}\ dt \\[2ex] & = & (1-x)\ln(1-x) + \displaystyle\int_0^x 1\ dt \ = \ (1-x)\ln(1-x) + \Big[\ t\ \Big]_0^x \\[2ex] & = & (1-x)\ln(1-x) + x \end{array}$$

- On remarque le choix non usuel d'une primitive de $v' : t \mapsto -1$.
  On choisit ici $v : t \mapsto 1-t$ plutôt que $v : t \mapsto -t$ dans un soucis de simplification des calculs ultérieurs.

$\square$

f) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-t)\ln(1-t)\ dt$ et la calculer.

Démonstration.

- La fonction $t \mapsto (1-t)\ln(1-t)$ est continue sur $[0,1[$.
- Soit $a \in [0,1[$. On effectue l'intégration par parties (IPP) suivante.

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & \ln(1-t) & & u'(t) & = & -\dfrac{1}{1-t} \\ v'(t) & = & 1-t & & v(t) & = & -\dfrac{1}{2}(1-t)^2 \end{array} \right.$$

  Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^a (1-t)\ln(1-t)\ dt &= \left[-\frac{1}{2}(1-t)^2 \ln(1-t) \right]_0^a - \frac{1}{2}\int_0^a (1-t)^{\cancel{2}} \frac{1}{\cancel{1-t}}\ dt \\ &= -\frac{1}{2}(1-a)^2\ln(1-a) - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}(1-t)^2 \right]_0^a \\ &= -\frac{1}{2}(1-a)^2\ln(1-a) + \frac{1}{4}((1-a)^2-1) \end{aligned}$$

- De plus : $\lim\limits_{a\to 1^-} (1-a)^2 = 0$.
- On a aussi : $\lim\limits_{a\to 1^-} (1-a) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x) = 0$ (par croissances comparées).
  D'où : $\lim\limits_{a\to 1^-} (1-a)^2\ln(1-a) = 0$.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^1 (1-t)\ln(1-t)\ dt \text{ converge et vaut } -\frac{1}{4}.}$$

□

g) En déduire la valeur de $I(f)$.

Démonstration.

- Par définition :

$$I(f) \ = \ 2\int_0^1 \tilde{f}(t)\ dt \ = \ 2\int_0^1 (t-f(t))\ dt$$

  Cette intégrale est bien définie car la fonction $t \mapsto t - f(t)$ est continue sur le segment $[0,1]$ (la fonction f est continue sur $[0,1]$).
- De plus, d'après la question ***9.e)***, pour tout $t \in [0,1[$:

$$t - f(t) \ = \ \cancel{t} - \Big((1-t)\ln(1-t) + \cancel{t}\Big) \ = \ -(1-t)\ln(1-t)$$

- On en déduit, avec la question précédente :

$$I(f) \ = \ -2\int_0^1 (1-t)\ln(1-t)\ dt \ = \ -2\left(-\frac{1}{4}\right) \ = \ \frac{1}{2}$$

$$\boxed{I(f) = \frac{1}{2}}$$

□

Partie III - Application à une population

Une population de N personnes est divisée en deux classes (typiquement hommes et femmes) et en n catégories (par exemple socio-professionnelles), suivant le tableau à double entrée suivant où tous les x_i et y_i pour i dans $[\![1, n]\!]$ sont des entiers naturels.
On suppose en outre que pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $x_i \neq 0$.

Classes \ Catégories	c_1	c_2	c_3	$\cdots$	c_i	$\cdots$	c_n	Total
I	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n	X
II	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_i	$\cdots$	y_n	Y
Total	n_1	n_2	n_3	$\cdots$	n_i	$\cdots$	n_n	N

où on a donc posé $X = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$ et $X + Y = N$. On suppose en outre que $Y > 0$.
Pour i appartenant à $[\![1, n]\!]$, on adopte les notations suivantes :

$$p_i = \frac{n_i}{N},\ q_i = \frac{x_i}{X},\ r_i = \frac{y_i}{Y}$$

On note aussi $\varepsilon_i = \dfrac{x_i}{n_i}$, et $\varepsilon = \dfrac{X}{N}$, et on suppose que les catégories sont numérotées de telle sorte que :

$$\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2 \leqslant \cdots \leqslant \varepsilon_n$$

10. On pose $\Omega = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, ensemble des catégories dans la population.

a) Montrer que $P = (p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $Q = (q_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $R = (r_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont des distributions de probabilités.

Démonstration.

- Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
  D'après l'énoncé : $x_i \in \mathbb{N}^*$ et $y_i \in \mathbb{N}$.
  Donc : $n_i = x_i + y_i \in \mathbb{N}^*$. En particulier : $n_i > 0$.
  De plus : $N = X + Y$, avec $X = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i > 0$ et $Y > 0$.
  Donc $N > 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall i \in [\![1, n]\!],\ p_i = \frac{n_i}{N} > 0.}$$

- On calcule :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} p_i &= \sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) \\ &= \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \frac{1}{N}(X+Y) = \frac{N}{N} = 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} p_i = 1}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Donc } P \text{ est une loi de probabilité.}\\ \text{De même, } Q \text{ et } R \text{ sont des lois de probabilité.}\end{array}}$$

□

b) Montrer que : $\dfrac{q_1}{p_1} \leqslant \cdots \leqslant \dfrac{q_n}{p_n}$ $(*)$

Démonstration.

- Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
$$\frac{q_i}{p_i} = \frac{\frac{x_i}{X}}{\frac{n_i}{N}} = \frac{N}{X}\,\frac{x_i}{n_i} = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon}$$
- Or, d'après l'énoncé :
$$\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2 \leqslant \cdots \leqslant \varepsilon_n$$
- De plus : $\varepsilon = \dfrac{X}{n} > 0$.
En effet, d'après la question précédente : $X > 0$ et $N > 0$.
- On obtient donc :
$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \leqslant \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} \leqslant \ldots \leqslant \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \frac{q_1}{p_1} \leqslant \cdots \leqslant \frac{q_n}{p_n}}$$

□

c) Montrer que : $\dfrac{r_1}{p_1} \geqslant \cdots \geqslant \dfrac{r_n}{p_n}$.

Démonstration.

- Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
$$\frac{r_i}{p_i} = \frac{\frac{y_i}{Y}}{\frac{n_i}{N}} = \frac{N}{Y}\,\frac{y_i}{n_i} = \frac{N}{Y}\,\frac{n_i - x_i}{n_i} = \frac{N}{Y}(1 - \varepsilon_i)$$
- Or, d'après l'énoncé :
$$\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2 \leqslant \cdots \leqslant \varepsilon_n$$
Donc :
$$1 - \varepsilon_1 \geqslant 1 - \varepsilon_2 \geqslant \cdots \geqslant 1 - \varepsilon_n$$
- De plus : $\dfrac{N}{Y} > 0$. En effet : $N > 0$ et $Y > 0$.
- On obtient donc :
$$\frac{N}{Y}(1 - \varepsilon_1) \geqslant \frac{N}{Y}(1 - \varepsilon_2) \geqslant \ldots \geqslant \frac{N}{Y}(1 - \varepsilon_n)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \frac{r_1}{p_1} \geqslant \cdots \geqslant \frac{r_n}{p_n}}$$

□

d) Montrer que pour i appartenant à $[\![1, n]\!]$, $r_i = \dfrac{n_i - x_i}{N - X} = \dfrac{p_i - \varepsilon q_i}{1 - \varepsilon}$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

- Tout d'abord : $r_i = \dfrac{y_i}{Y} = \dfrac{n_i - x_i}{N - X}$
- De plus :
$$\frac{p_i - \varepsilon\, q_i}{1 - \varepsilon} = \frac{\frac{n_i}{N} - \frac{\cancel{X}}{N}\frac{x_i}{\cancel{X}}}{1 - \dfrac{X}{N}} = \frac{\frac{n_i - x_i}{\cancel{N}}}{\frac{N - X}{\cancel{N}}} = \frac{n_i - x_i}{N - X}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ r_i = \frac{n_i - x_i}{N - X} = \frac{p_i - \varepsilon\, q_i}{1 - \varepsilon}}$$

□

11. Dans un premier temps, nous allons construire une application appartenant à E, qui permet de mesurer les inégalités à l'intérieur de la classe I.

On pose $P_0 = Q_0 = 0$, et pour $i \in [\![1, n]\!]$, $P_i = \sum\limits_{h=1}^{i} p_h$ et $Q_i = \sum\limits_{h=1}^{i} q_h$. On définit alors l'application φ de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que, pour tout entier $i \in [\![0, n]\!]$, $\varphi(P_i) = Q_i$ et pour tout entier $i \in [\![0, n-1]\!]$, φ est affine sur le segment $[P_i, P_{i+1}]$.

a) On suppose **dans cette question** $n = 3$.
Représenter dans un repère orthonormé φ lorsque $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ et $Q = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$.

Démonstration.
D'après l'énoncé :

× $p_1 = \dfrac{1}{2}$ et $q_1 = \dfrac{1}{3}$. Donc : $(P_1, Q_1) = (p_1, q_1) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$.

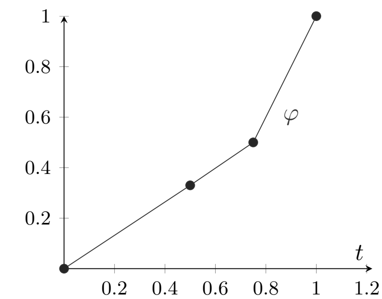
× $p_2 = \dfrac{1}{4}$ et $q_2 = \dfrac{1}{6}$. Donc : $(P_2, Q_2) = (p_1 + p_2, q_1 + q_2) = \left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$.

× $p_3 = \dfrac{1}{4}$ et $q_3 = \dfrac{1}{2}$. Donc : $(P_3, Q_3) = (p_1 + p_2 + p_3, q_1 + q_2 + q_3) = (1, 1)$.

On peut résumer ces informations dans le tableau suivant :

i	0	1	2	3
P_i	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
Q_i	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

Comme la fonction φ est affine sur chaque segment $[P_i, P_{i+1}]$, il suffit alors de relier les points précédents par des segments. On obtient la figure suivante :



□

b) Montrer que, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la pente de la droite passant par les points de coordonnées (P_{i-1}, Q_{i-1}) et (P_i, Q_i) est $u_i = \frac{q_i}{p_i}$ pour i appartenant à $[\![1, n]\!]$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
Le coefficient directeur de la droite passant par (P_{i-1}, Q_{i-1}) et (P_i, Q_i) est donné par :

$$\frac{Q_i - Q_{i-1}}{P_i - P_{i-1}} = \frac{\sum\limits_{h=1}^{i} q_h - \sum\limits_{h=1}^{i-1} q_h}{\sum\limits_{h=1}^{i} p_h - \sum\limits_{h=1}^{i-1} p_h} = \frac{q_i}{p_i}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ u_i = \frac{q_i}{p_i}}$$

□

c) Montrer que si $i \in [\![0, n-1]\!]$ et $t \in [P_i, P_{i+1}]$, on a $\varphi(t) = u_{i+1}(t - P_i) + Q_i$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$.

× Le coefficient directeur de la droite représentant φ sur $[P_i, P_{i+1}]$ est : $u_{i+1} = \dfrac{q_{i+1}}{p_{i+1}}$.
Donc l'expression de la fonction φ est de la forme $t \mapsto u_{i+1}\, t + b$, avec $b \in \mathbb{R}$.

× De plus, $\varphi(P_i) = Q_i$. Donc :
$$Q_i = u_{i+1} \times P_i + b$$
D'où : $b = Q_i - u_{i+1}\, P_i$

Donc, pour tout $t \in [P_i, P_{i+1}]$:
$$\varphi(t) = u_{i+1}\, t + (Q_i - u_{i+1}\, P_i) = u_{i+1}(t - P_i) + Q_i$$
$$\boxed{\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ \forall t \in [P_i, P_{i+1}],\ \varphi(t) = u_{i+1}(t - P_i) + Q_i}$$
□

d) **En admettant** que les inégalités $(*)$ de la question ***10.b)*** permettent d'affirmer que φ est convexe, justifier que φ appartient à E.

Démonstration.

- La fonction φ est définie sur $[0, 1]$ car, comme P est une loi de probabilité : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $0 \leqslant P_i \leqslant 1$.
- La fonction φ est à valeurs dans $[0, 1]$ car :
  × comme Q est une loi de probabilité : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $0 \leqslant Q_i \leqslant 1$.
  × la fonction φ est de plus affine sur chaque intervalle $[P_i, P_{i+1}]$.
  Donc, sur cet intervalle : $0 \leqslant Q_i \leqslant \varphi(t) \leqslant Q_{i+1} \leqslant 1$.
- L'énoncé affirme que φ est convexe sur $[0, 1]$.
- Par construction, φ est continue sur $[0, 1]$ (elle est même affine par morceaux).
- $\varphi(0) = \varphi(P_0) = Q_0 = 0$.
- $\varphi(1) = \varphi(P_n) = Q_n = 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \varphi \in E}$$
□

e) Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, calculer $\displaystyle\int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t)\ dt$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$.
D'après la question ***11.c)*** : $\forall t \in [P_i, P_{i+1}]$, $\varphi(t) = u_{i+1}(t - P_i) + Q_i$. Donc :
$$\begin{aligned}\int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t)\ dt &= \int_{P_i}^{P_{i+1}} (u_{i+1}(t - P_i) + Q_i)\ dt \\ &= u_{i+1} \int_{P_i}^{P_{i+1}} (t - P_i)\ dt + \int_{P_i}^{P_{i+1}} Q_i\ dt \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale)}\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t)\ dt &= u_{i+1}\left[\ \frac{(t-P_i)^2}{2}\ \right]_{P_i}^{P_{i+1}} + Q_i\ [\ t\ ]_{P_i}^{P_{i+1}} \\
&= u_{i+1}\frac{(P_{i_1}-P_i)^2}{2} + Q_i(P_{i+1}-P_i) \\
&= \frac{Q_{i+1}-Q_i}{\cancel{P_{i+1}-P_i}}\ \frac{(P_{i+1}-P_i)^{\cancel{2}}}{2} + Q_i(P_{i+1}-P_i) \qquad \textit{(d'après la question \textbf{11.b)})} \\
&= \frac{1}{2}(Q_{i+1}-Q_i)(P_{i+1}-P_i) + Q_i(P_{i+1}-P_i) \\
&= \frac{1}{2}(P_{i+1}-P_i)(Q_{i+1}-Q_i+2Q_i) \\
&= \frac{1}{2}(P_{i+1}-P_i)(Q_{i+1}+Q_i)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ \int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t)\ dt = \frac{1}{2}(P_{i+1}-P_i)(Q_{i+1}+Q_i)}$$

□

f) Exprimer $I(\varphi)$ sous la forme d'une somme en fonction de $P_0, P_1, ..., P_n, Q_0, ...Q_n$.

Démonstration.

- D'après la question ***2.b)*** :

$$I(\varphi) \ = \ 1 - 2\int_0^1 \varphi(t)\ dt \ = \ 1 - 2\int_{P_0}^{P_n} \varphi(t)\ dt$$

- De plus, d'après la relation de Chasles :

$$\int_{P_0}^{P_n} \varphi(t)\ dt \ = \ \sum_{i=0}^{n-1} \int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t)\ dt \ = \ \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} (P_{i+1}-P_i)(Q_{i+1}+Q_i)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } I(\varphi) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} (P_{i+1}-P_i)(Q_{i+1}+Q_i).}$$

□

12. Nous allons maintenant étudier l'application correspondante pour la classe II.

On pose $P_0 = R_0 = 0$ et pour $i \in [\![1, n]\!]$, $P_i = \sum\limits_{h=1}^{i} p_h$ et $R_i = \sum\limits_{h=1}^{i} r_h$. De même, on définit pour i élément de $[\![0, n]\!]$, $\Pi_i = 1 - P_{n-i}$. On considère l'application ψ de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\psi(P_i) = R_i$ et pour tout entier $i \in [\![0, n-1]\!]$, ψ est affine sur le segment $[P_i, P_{i+1}]$.

a) Montrer que la pente de la droite passant par les points de coordonnées (P_{i-1}, R_{i-1}) et (P_i, R_i) est $v_i = \frac{r_i}{p_i}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.

Démonstration.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

Le coefficient directeur de la droite passant par (P_{i-1}, R_{i-1}) et (P_i, R_i) est donné par :

$$\frac{R_i - R_{i-1}}{P_i - P_{i-1}} \ = \ \frac{\sum\limits_{h=1}^{i} r_h - \sum\limits_{h=1}^{i-1} r_h}{\sum\limits_{h=1}^{i} p_h - \sum\limits_{h=1}^{i-1} p_h} \ = \ \frac{r_i}{p_i}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ v_i = \frac{r_i}{p_i}}$$

□

b) On considère l'application ψ^* définie pour tout $t \in [0,1]$, par $\psi^*(t) = 1 - \psi(1-t)$.

(i) On suppose **dans cette question** $n = 3$.
Représenter dans un même repère orthonormé les courbes représentatives de ψ et ψ^* lorsque $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ et $R = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Par définition de ψ^* :

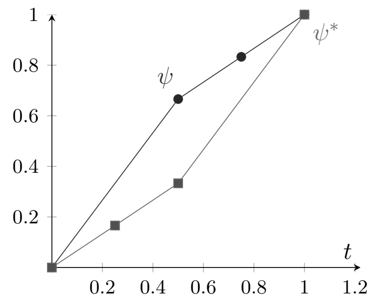
$$\psi^*(\Pi_i) = 1 - \psi(1 - \Pi_i) = 1 - \psi(P_{n-i}) = 1 - R_{n-i}$$

Détaillons, par exemple, le calcul de $\psi^*(\Pi_2)$.

- Tout d'abord : $\Pi_2 = 1 - P_{3-2} = 1 - P_1 = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.
- De plus : $\psi^*(\Pi_2) = 1 - R_{3-2} = 1 - R_1 = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

On procède ensuite comme en question ***11.a)*** et on obtient le tableau et la figure suivants :

i	0	1	2	3
P_i	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
R_i	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	1
Π_i	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1



□

(ii) Montrer que ψ^* est convexe sur $[0,1]$.

Démonstration.

- Comme en question ***11.d)***, on admet que les inégalités de ***10.c)*** permettent d'affirmer que ψ est concave sur $[0,1]$.
- Montrons que ψ^* est alors convexe sur $[0,1]$.
Soit $(t_1, t_2) \in [0,1]^2$. Soit $\lambda \in [0,1]$.

$$\begin{array}{rcl} \lambda\,\psi^*(t_1) + (1-\lambda)\psi^*(t_2) & = & \lambda(1 - \psi(1-t_1)) + (1-\lambda)(1 - \psi(1-t_2)) \\ & = & \cancel{\lambda} - \lambda\,\psi(1-t_1) + 1 - \cancel{\lambda} + (1-\lambda)\psi(1-t_2) \\ & = & 1 - \Big(\lambda\,\psi(1-t_1) + (1-\lambda)\psi(1-t_2)\Big) \end{array}$$

- Or $(t_1, t_2) \in [0,1]^2$, donc $(1-t_1, 1-t_2) \in [0,1]^2$.
D'où, par concavité de ψ :

$$\lambda\,\psi(1-t_1) + (1-\lambda)\psi(1-t_2) \ \leqslant\ \psi(\lambda\,(1-t_1) + (1-\lambda)t_2)$$

De plus :

$$\psi(\lambda\,(1-t_1) + (1-\lambda)(1-t_2)) \ = \ \psi(\cancel{\lambda} - \lambda\,t_1 + 1 - \cancel{\lambda} - (1-\lambda)t_2) \ = \ \psi\Big(1 - (\lambda\,t_1 + (1-\lambda)t_2)\Big)$$

- On obtient alors :

$$\lambda\,\psi^*(t_1)+(1-\lambda)\psi^*(t_2) \;\geqslant\; 1-\psi\Big(1-(\lambda\,t_1+(1-\lambda)t_2)\Big)$$

D'où, par définition de ψ^* :

$$\psi^*(\lambda\,t_1+(1-\lambda)t_2) \;\leqslant\; \lambda\,\psi^*(t_1)+(1-\lambda)\psi^*(t_2)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \psi^* \text{ est convexe sur } [0,1].}$$

□

(iii) Montrer que ψ^* est affine sur $[\Pi_{i-1},\Pi_i]$ pour $i\in[\![0,n-1]\!]$.

Démonstration.
On note σ la fonction $t\mapsto 1-t$.
Par définition de ψ^* :

$$\psi^*=\sigma\circ\psi\circ\sigma$$

Or :

× la fonction σ est une bijection affine de $[\Pi_{i-1},\Pi_i]$ sur $[P_{n-i},P_{n-i+1}]$,

× la fonction ψ est affine sur $[P_{n-i},P_{n-i+1}]$.

Ainsi, sur $[\Pi_{i-1},\Pi_i]$, la fonction ψ^* est une composition de trois fonctions affines.

$$\boxed{\text{Donc } \psi^* \text{ est affine sur } [\Pi_{i-1},\Pi_i].}$$

□

(iv) Montrer que la pente de ψ^* sur $[\Pi_{i-1},\Pi_i]$ est v_{n-i+1} pour $i\in[\![1,n]\!]$.

Démonstration.
Soit $i\in[\![1,n]\!]$.
D'après la question ***12.b)(i)***, le coefficient directeur de ψ^* sur $[\Pi_{i-1},\Pi_i]$ est donné par :

$$\frac{\psi^*(\Pi_i)-\psi^*(\Pi_{i-1})}{\Pi_i-\Pi_{i-1}} \;=\; \frac{\cancel{1}-R_{n-i}-(\cancel{1}-R_{n-(i-1)})}{\cancel{1}-P_{n-i}-(\cancel{1}-P_{n-(i-1)})} \;=\; \frac{R_{n-i+1}-R_{n-i}}{P_{n-i+1}-P_{n-i}} \;=\; \frac{r_{n-i+1}}{p_{n-i+1}} \;=\; v_{n-i+1}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } i\in[\![1,n]\!], \text{ la pente de } \psi^* \text{ sur } [\Pi_{i-1},\Pi] \text{ est donc } v_{n-i+1}.}$$

□

On dit dans cette situation que les fonctions φ et ψ^* sont **adjointes** l'une de l'autre. C'est leur comparaison que Gini a proposé de considérer pour « mesurer les inégalités » entre la population de catégorie I et celle de catégorie II.
Une égalité entre les fonctions adjointes signale notamment l'absence totale d'inégalité sociale. La dernière question précise quelque peu ce point.

13. a) Montrer que si $\varphi=\psi^*$ alors pour tout i appartenant à $[\![1,n]\!]$:

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon}=\frac{1-\varepsilon_{n-i+1}}{1-\varepsilon}$$

Démonstration.

- Si $\varphi=\psi^*$, alors ces fonctions sont égales en tout point. En particulier :

  × pour tout $i\in[\![0,n]\!]$, $P_i=\Pi_i$;

  × pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$, sur chaque intervalle $[P_i,P_{i+1}]$, $\mathcal{C}_\varphi$ et $\mathcal{C}_{\psi^*}$ ont même pente.

Donc, d'après les questions ***11.b)*** et ***12.b)(iv)*** :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ u_i = v_{n-i+1}$$

- De plus, d'après les questions ***11.b)*** et ***10.b)*** :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ u_i = \frac{q_i}{p_i} = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon}$$

- Enfin, d'après les questions ***12.b)(iv)*** et ***10.c)*** :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ v_{n-i+1} = \frac{r_{n-i+1}}{p_{n-i+1}} = \frac{1-\varepsilon_{n-i+1}}{1-\varepsilon}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } \varphi = \psi^*\text{, alors : } \forall i \in [\![1,n]\!],\ \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \frac{1-\varepsilon_{n-i+1}}{1-\varepsilon}.}$$

□

b) Montrer que si $\varphi = \psi^*$, alors pour tout i appartenant à $[\![1,n]\!]$, $\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1} = 2\varepsilon$.

Démonstration.
Supposons $\varphi = \psi^*$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

- D'après la question précédente : $\dfrac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \dfrac{1-\varepsilon_{n-i+1}}{1-\varepsilon}$ (1).
- On applique cette égalité à $i = n-i+1 \in [\![1,n]\!]$. On obtient alors :

$$\frac{\varepsilon_{n-i+1}}{\varepsilon} = \frac{1-\varepsilon_{\cancel{n}-(\cancel{n}-i+\cancel{1})+\cancel{1}}}{1-\varepsilon} = \frac{1-\varepsilon_i}{1-\varepsilon} \quad (2)$$

- En sommant (1) et (2), on en déduit :

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon_{n-i+1}}{\varepsilon} = \frac{1-\varepsilon_{n-i+1}}{1-\varepsilon} + \frac{1-\varepsilon_i}{1-\varepsilon}$$

Donc : $(1-\varepsilon)(\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1}) = \varepsilon(1-\varepsilon_i+1-\varepsilon_{n-i+1}) = \varepsilon(2-\varepsilon_i-\varepsilon_{n-i+1})$.
D'où : $(1-\varepsilon)(\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1}) = 2\varepsilon - \varepsilon(\varepsilon_i+\varepsilon_{n-i+1})$.
Ainsi : $(1-\cancel{\varepsilon}-(-\cancel{\varepsilon}))(\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1}) = 2\varepsilon$.

$$\boxed{\text{Si } \varphi = \psi^*\text{, alors : } \forall i \in [\![1,n]\!],\ \varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1} = 2\varepsilon.}$$

□

c) Déduire que si $\varphi = \psi^*$, on a pour tout i appartenant à $[\![1,n]\!]$, $\varepsilon_i(1-2\varepsilon) = \varepsilon(1-2\varepsilon)$.

Démonstration.
Supposons $\varphi = \psi^*$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

- D'après ***13.b)*** : $\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1} = 2\varepsilon$. Donc : $\varepsilon_{n-i+1} = 2\varepsilon - \varepsilon_i$.
- D'après ***13.a)*** : $\dfrac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \dfrac{1-\varepsilon_{n-i+1}}{1-\varepsilon}$. Donc : $(1-\varepsilon)\varepsilon_i = \varepsilon(1-\varepsilon_{n-i+1})$.

On obtient donc :

$$(1-\varepsilon)\varepsilon_i = \varepsilon(1-(2\varepsilon-\varepsilon_i)) = \varepsilon(1-2\varepsilon) + \varepsilon\,\varepsilon_i$$

D'où :

$$(1-\varepsilon)\varepsilon_i - \varepsilon\,\varepsilon_i = \varepsilon(1-2\varepsilon)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } \varphi = \psi^*\text{, alors : } \forall i \in [\![1,n]\!],\ \varepsilon_i(1-2\varepsilon) = \varepsilon(1-2\varepsilon).}$$

□

d) On suppose que $\varepsilon \neq \dfrac{1}{2}$. Montrer que si $\varphi = \psi^*$, alors pour tout i appartenant à $[\![1, n]\!]$, $\varepsilon_i = \varepsilon$. Interpréter ce résultat.

Démonstration.
Supposons $\varphi = \psi^*$.

- Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
  D'après la question précédente : $\varepsilon_i(1 - 2\varepsilon) = \varepsilon(1 - 2\varepsilon)$.
  Or $\varepsilon \neq \dfrac{1}{2}$, donc $1 - 2\varepsilon \neq 0$. D'où : $\varepsilon_i = \varepsilon$

$$\boxed{\text{Si } \varphi = \psi^*, \text{ alors : } \forall i \in [\![1, n]\!],\ \varepsilon_i = \varepsilon.}$$

- Lorsque $\varphi = \psi^*$, chaque catégorie présente le même coefficient $\varepsilon_i = \varepsilon$, c'est-à-dire la même proportion $\dfrac{x_i}{n_i} = \varepsilon$ et *a fortiori* la même proportion $\dfrac{y_i}{n_i} = 1 - \varepsilon$.
  Donc le pourcentage de femmes (ou plus généralement de personnes de classe I) est le même dans toutes les catégories socio-professionnelles.

$$\boxed{\text{Autrement dit, on n'observe aucune inégalité sociale entre la classe I (les femmes) et la classe II (les hommes).}}$$

□

HEC 2017 : le sujet

EXERCICE

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrés à n lignes et n colonnes à coefficients réels et B_n l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 1.

1. *Exemple 1.* Soit A la matrice de B_2 définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer la matrice A^2.

b) Quelles sont les valeurs propres de A ?

c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. *Exemple 2.* Soit B la matrice de B_3 définie par : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère les instructions et la sortie (`ans`) **Scilab** suivantes :

```
B = [0,1,0;1,0,0;0,0,1]
P = [1,1,0;1,-1,0;0,0,1]
inv(P) * B * P
```

```
ans  =
     1.   0.   0.
     0. - 1.   0.
     0.   0.   1.
```

a) Déduire les valeurs propres de B de la séquence **Scilab** précédente.

b) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de B.

3. ***a)*** Combien existe-t-il de matrices appartenant à B_n ?

b) Combien existe-t-il de matrices de B_n dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1 ?

4. Dans cette question, n est un entier supérieur ou égal à 2.
Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. On note :

- id l'endomorphisme identité de E ;
- F le noyau de l'endomorphisme $(u + \mathrm{id})$ et G le noyau de l'endomorphisme $(u - \mathrm{id})$;
- p la dimension de F et q la dimension de G.

On suppose que $u \circ u = \mathrm{id}$.

a) Justifier que l'image de $(u - \mathrm{id})$ est incluse dans F.

b) En déduire l'inégalité : $p + q \geqslant n$.
On suppose désormais que $1 \leqslant p < q$.
Soit $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une base de F et $(g_1, g_2, \ldots, g_q)$ une base de G.

c) Justifier que $(f_1, f_2, \ldots, f_p,\ g_1, g_2, \ldots, g_q)$ est une base de E.

d) Calculer $u(g_1 - f_1)$ et $u(g_1 + f_1)$.

e) Trouver une base de E dans laquelle la matrice de u appartient à B_n.

PROBLÈME

Les tables de mortalité sont utilisées en démographie et en actuariat pour prévoir l'espérance de vie des individus d'une population. On s'intéresse dans ce problème à un modèle qui permet d'ajuster la durée de vie à des statistiques portant sur les décès observés au sein d'une génération.

Dans tout le problème, on note :

- a et b deux réels strictement positifs ;
- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires du problème ;
- $G_{a,b}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $G_{a,b}(x) = \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2}x^2\right)$.

Partie I. Loi exponentielle linéaire

1. ***a)*** Montrer que la fonction $G_{a,b}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur l'intervalle $]0,1]$.

b) Pour tout réel $y > 0$, résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $ax + \dfrac{b}{2}x^2 = y$.

c) On note $G_{a,b}^{-1}$ la bijection réciproque de $G_{a,b}$.
Quelle est, pour tout $u \in [0,1[$, l'expression de $G_{a,b}^{-1}(1-u)$?

2. ***a)*** Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\,dx$.

b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{b}{2\pi}} \times \exp\left(-\dfrac{1}{2}b\left(x + \dfrac{a}{b}\right)^2\right)$.
Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire suivant une loi normale dont on précisera les paramètres (espérance et variance).

c) Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
Déduire de la question ***2.b)***, l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\,dx = \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \times \exp\left(\frac{a^2}{2b}\right) \times \Phi\left(-\frac{a}{\sqrt{b}}\right)$$

3. Pour tout $a > 0$ et pour tout $b > 0$, on pose : $f_{a,b}(x) = \begin{cases} (a+bx)\ \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2}x^2\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

a) Justifier que la fonction $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.
On dit qu'une variable aléatoire suit la loi exponentielle linéaire de paramètres a et b, notée $\mathcal{E}_\ell(a,b)$, si elle admet $f_{a,b}$ pour densité.

b) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{E}_\ell(a,b)$. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ telle que : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\,dx$.

4. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On pose : $X = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + 2bY}}{b}$.

a) Justifier que pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $\mathbb{P}([X \geqslant x]) = G_{a,b}(x)$.

b) En déduire que X suit la loi $\mathcal{E}_\ell(a,b)$.

c) On note U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire $G_{a,b}^{-1}(1-U)$.

5. La fonction **Scilab** suivante génère des simulations de la loi exponentielle linéaire.

```
1 function x = grandlinexp(a,b,n)
2     u = rand(n,1)
3     y = ...........
4     x = (-a + sqrt(a^2 + 2 * b * y)) / b
5 endfunction
```

a) Quelle est la signification de la ligne de code 2 ?

b) Compléter la ligne de code 3 pour que la fonction `grandlinexp` génère les simulations désirées.

6. De quel nombre réel peut-on penser que les six valeurs générées par la boucle **Scilab** suivante fourniront des valeurs approchées de plus en plus précises et pourquoi ?

```
for k = 1:6
    mean(grandlinexp(0, 1, 10^k)
end
```

Dans la suite du problème, on note $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi exponentielle linéaire $\mathcal{E}_\ell(a,b)$ dont les paramètres $a>0$ et $b>0$ sont inconnus.
Soit h un entier supérieur ou égal à 2. On suit pendant une période de h années, une « cohorte » de n individus de même âge au début de l'étude et on modélise leurs durées de vie respectives à partir de cette date par les variables aléatoires X_1, X_2, …, X_n.

Partie II. Premier décès et intervalle de confiance de a

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit les variables aléatoires M_n, H_n et U_n par :

$$M_n=\min(X_1,X_2,\dots,X_n),\quad H_n=\min(h,X_1,X_2,\dots,X_n)\quad\text{et}\quad U_n=nH_n.$$

7. Calculer pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, la probabilité $\mathbb{P}([M_n\geqslant x])$.
Reconnaître la loi de la variable aléatoire M_n.

8. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note F_{U_n} la fonction de répartition de la variable aléatoire U_n.

a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $F_{U_n}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-\exp\left(-ax-\dfrac{b}{2n}x^2\right) & \text{si } 0\leqslant x<nh\\ 1 & \text{si } x\geqslant nh\end{cases}$.

b) Étudier la continuité de la fonction F_{U_n}.

c) La variable aléatoire U_n admet-elle une densité ?

d) Montrer que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

9. Soit $\alpha\in\,]0,1[$.

a) Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.
Trouver deux réels c et d strictement positifs tels que :

$$\mathbb{P}([c\leqslant Y\leqslant d])=1-\alpha\quad\text{et}\quad\mathbb{P}([Y\leqslant c])=\frac{\alpha}{2}$$

b) Montrer que $\left[\dfrac{c}{U_n}\ ,\ \dfrac{d}{U_n}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de a, de niveau de confiance $1-\alpha$.

Partie III. Nombre de survivants et estimateur convergent de b

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, soit S_i et D_i les variables aléatoires telles que :

$$S_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \geqslant h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad D_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\overline{S}_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} S_i$ et $\overline{D}_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} D_i$.

10. ***a)*** Justifier que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\mathbb{E}(S_i) = G_{a,b}(h)$ et calculer $\mathbb{E}(S_i D_i)$.

b) Pour quels couples $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, les variables aléatoires S_i et D_j sont-elles indépendantes ?

c) Déduire des questions précédentes l'expression de la covariance $\mathrm{Cov}(\overline{S}_n, \overline{D}_n)$ de $\overline{S}_n$ et $\overline{D}_n$ en fonction de n, $G_{a,b}(h)$ et $G_{a,b}(1)$. Le signe de cette covariance était-il prévisible ?

11. ***a)*** Montrer que $\overline{S}_n$ est un estimateur sans biais et convergent du paramètre $G_{a,b}(h)$.

b) De quel paramètre, $\overline{D}_n$ est-il un estimateur sans biais et convergent ?

12. On pose : $z(a, b) = \ln(G_{a,b}(1))$ et $r(a, b) = \ln(G_{a,b}(h))$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $Z_n = \ln\left(1 - \overline{D}_n + \dfrac{1}{n}\right)$ et $R_n = \ln\left(\overline{S}_n + \dfrac{1}{n}\right)$.

On admet que Z_n et R_n sont des estimateurs convergents de $z(a, b)$ et $r(a, b)$ respectivement.

a) Soit ε, λ et μ des réels strictement positifs.

(i) Justifier l'inclusion suivante :

$$[|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a, b) - \mu r(a, b))| \geqslant \varepsilon] \subset [\lambda |Z_n - z(a, b)| + \mu |R_n - r(a, b)| \geqslant \varepsilon]\,.$$

(ii) En déduire l'inégalité suivante :

$$\mathbb{P}([|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a, b) - \mu r(a, b))\,| \geqslant \varepsilon]) \leqslant \mathbb{P}\left(\left[|Z_n - z(a, b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\lambda}\right]\right) + \mathbb{P}\left(\left[|R_n - r(a, b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\mu}\right]\right).$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $B_n = \dfrac{2}{h-1} Z_n - \dfrac{2}{h(h-1)} R_n$.

Montrer que B_n est un estimateur convergent du paramètre b.

HEC 2017 : le corrigé

EXERCICE

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrés à n lignes et n colonnes à coefficients réels et B_n l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 1.

1. *Exemple 1.* Soit A la matrice de B_2 définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer la matrice A^2.

Démonstration.

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I_2.}$$

□

b) Quelles sont les valeurs propres de A ?

Démonstration.

- D'après la question ***1.a)***, $A^2 - I_2 = 0$.
  On en déduit que le polynôme $P(X) = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur de A. Le polynôme P admet donc 1 et -1 comme racines.
  Or, le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de P.
  $$\boxed{\text{Autrement dit : } \mathrm{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}.}$$
- Vérifions que 1 est valeur propre de A.
  $$\det(A - I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = 1 - 1 = 0$$
  Ainsi, $A - I_2$ n'est pas inversible. Donc 1 est valeur propre de A.
- Vérifions que -1 est valeur propre de A.
  $$\det(A + I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 - 1 = 0$$
  Donc $A + I_2$ n'est pas inversible. Donc -1 est valeur propre de A.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1\}.}$$

Commentaire

- Étant en présence d'une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on privilégie ici l'utilisation du déterminant. Cependant, on peut aussi rédiger à l'aide d'un calcul de rang. Par exemple :
  $$\mathrm{rg}(A + I_2) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) < 2 \quad \text{car } L_1 = L_2$$
- Au vu de la première question, introduire un polynôme annulateur est un bon réflexe. Cependant, on peut faire une démonstration directe.
  Détaillons là. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
  $$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(A) & \Leftrightarrow \quad A - \lambda\, I \text{ non inversible} \\ & \Leftrightarrow \quad \det(A - \lambda\, I_2) = 0 \end{aligned}$$
  Or : $\det(A - \lambda I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$.
  On obtient bien que $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1\}$.

□

c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Démonstration.
La matrice A est carrée d'ordre 2 et admet 2 valeurs propres **distinctes**.

$$\boxed{\text{Ainsi, la matrice } A \text{ est diagonalisable.}}$$

□

2. *Exemple 2.* Soit B la matrice de B_3 définie par : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère les instructions et la sortie (`ans`) **Scilab** suivantes :

```
B = [0,1,0;1,0,0;0,0,1]
P = [1,1,0;1,-1,0;0,0,1]
inv(P) ⋆ B ⋆ P
```

```
ans  =
    1.   0.   0.
    0. - 1.   0.
    0.   0.   1.
```

a) Déduire les valeurs propres de B de la séquence **Scilab** précédente.

Démonstration.
Notons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D'après la séquence **Scilab**, $P^{-1}BP = D$, d'où $B = PDP^{-1}$.
Ainsi, B est semblable à une matrice diagonale.
Elle est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont les coefficients diagonaux de D.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(B) = \{-1, 1\}}$$

□

b) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de B.

Démonstration.

- Le programme **Scilab** précédent nous fournit la diagonalisation de la matrice B :

$$B = PDP^{-1}$$

La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ constituée des colonnes de la matrice P est une base de vecteurs propres de B. Plus précisément, pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, le $i^{\text{ème}}$ vecteur de $\mathcal{F}$ est un vecteur propre associé au coefficient diagonal $d_{i,i}$.

- On en déduit :

$$E_{-1}(B) \supset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{et} \qquad E_1(B) \supset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

- Ainsi, $\dim(E_{-1}(B)) \geqslant 1$ et $\dim(E_1(B)) \geqslant 2$.
  Or, comme B est diagonalisable :

$$\dim(E_{-1}(B)) + \dim(E_1(B)) = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$$

  On en déduit : $\dim(E_{-1}(B)) = 1$ et $\dim(E_1(B)) = 2$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } E_{-1}(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_1(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).}$$

Commentaire

- On aurait aussi pu déterminer ces deux sous-espaces propres « à la main ».
- Détaillons la méthode. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} X \in E_{-1}(B) & \Leftrightarrow & (B + I_3)\ X = 0 \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 0 \\ & & & & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & -y \\ & & z & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

  Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} E_{-1}(B) & = & \{X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid X \in E_{-1}(B)\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = -y \ \texttt{ET} \ z = 0\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

  La famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est donc :
  × génératrice de $E_{-1}(B)$,
  × libre car constituée d'un unique vecteur non nul.
  C'est donc une base de $E_{-1}(B)$.
- De même, on démontre : $E_1(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

□

3. a) Combien existe-t-il de matrices appartenant à B_n ?

Démonstration.
Une matrice M de B_n est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont chaque coefficient vaut soit 0 soit 1.
Une telle matrice est entièrement déterminée par :

× le choix du coefficient m_{11} : 2 possibilités.
× ...
× le choix du coefficient m_{1n} : 2 possibilités.
× le choix du coefficient m_{21} : 2 possibilités.
× ...
× le choix du coefficient m_{2n} : 2 possibilités.
× ...
× le choix du coefficient m_{n1} : 2 possibilités.
× ...
× le choix du coefficient m_{nn} : 2 possibilités.

Il y a donc 2^{n^2} telles matrices.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Card}(B_n) = 2^{n^2}.}$$

□

b) Combien existe-t-il de matrices de B_n dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1 ?

Démonstration.
Une matrice M de B_n dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1 est entièrement déterminée par :

× la position du 1 sur la $1^{\text{ère}}$ ligne : n possibilités.
(on peut le placer sur n'importe quelle colonne)
× la position du 1 sur la $2^{\text{ème}}$ ligne : $n-1$ possibilités.
(on peut le placer sur n'importe quelle colonne non déjà choisie)
× la position du 1 sur la $3^{\text{ème}}$ ligne : $n-2$ possibilités.
(on peut le placer sur n'importe quelle colonne non déjà choisie)
× ...
× la position du 1 sur la $n^{\text{ème}}$ ligne : 1 possibilité.
(on peut le placer sur n'importe quelle colonne non déjà choisie)

Il existe donc $n\ (n-1)\ (n-2) \cdots 1 = n!$ telles matrices.

L'ensemble des matrices de B_n dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1 comporte exactement $n!$ éléments.

Commentaire

- Une matrice de B_n dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1 peut être représentée par le n-uplet $(c_1, \dots, c_n)$ où $c_i \in [\![1, n]\!]$ est le numéro de colonne où se situe le coefficient égal à 1 de la ligne i.
- Dans cette question, on demande donc de dénombrer l'ensemble des n-uplets d'éléments distincts (il n'y a qu'un 1 sur chaque ligne) de $[\![1, n]\!]$. Autrement dit, on s'intéresse aux n-arrangements de $[\![1, n]\!]$ ou encore aux permutations de $[\![1, n]\!]$.
Il y en a exactement $n!$

□

4. Dans cette question, n est un entier supérieur ou égal à 2.
Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. On note :
- id l'endomorphisme identité de E ;
- F le noyau de l'endomorphisme $(u + \mathrm{id})$ et G le noyau de l'endomorphisme $(u - \mathrm{id})$;
- p la dimension de F et q la dimension de G.

On suppose que $u \circ u = \mathrm{id}$.

a) Justifier que l'image de $(u - \mathrm{id})$ est incluse dans F.

Démonstration.
Il s'agit de montrer que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}) = F$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que $y = (u - \mathrm{id})(x) = u(x) - x$.
Démontrons que $y \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$.

$$\begin{array}{rcll} (u+\mathrm{id})(y) & = & u(y) + y & \\ & = & u(u(x) - x) + (u(x) - x) & \textit{(par définition de } y\textit{)} \\ & = & u(u(x)) - \cancel{u(x)} + \cancel{u(x)} - x & \textit{(par linéarité de } u\textit{)} \\ & = & \cancel{x} - \cancel{x} \ = \ 0_E & \textit{(car } u \circ u = \mathrm{id}\textit{)} \end{array}$$

Donc $y \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}) = F$.

$$\boxed{\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}) \subset F}$$

□

b) En déduire l'inégalité : $p + q \geqslant n$.

Démonstration.
- D'après la question ***4.a)***, $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \dim(\mathrm{Im}(u - \mathrm{id})) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})) = p.}$$

- D'après le théorème du rang :

$$\underset{\overset{\shortparallel}{n}}{\dim(E)} \quad = \quad \underset{\overset{\shortparallel}{q}}{\dim(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}))} \quad + \quad \dim(\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}))$$

$$\boxed{\dim(\mathrm{Im}(u - \mathrm{id})) = n - q}$$

- En combinant ces deux résultats, on obtient : $n - q \leqslant p$.

$$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } p + q \geqslant n.}$$

□

On suppose désormais que $1 \leqslant p < q$.
Soit $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ une base de F et $(g_1, g_2, \dots, g_q)$ une base de G.

c) Justifier que $(f_1, f_2, \dots, f_p,\ g_1, g_2, \dots, g_q)$ est une base de E.

Démonstration.
- On suppose ici que $\dim(\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})) = p \geqslant 1$. En particulier : $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}) \neq \{0_E\}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } -1 \text{ est valeur propre de } u \text{ et } F = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}) = E_{-1}(u).}$$

- De même, $\dim(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})) = q > 1$. En particulier : $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \neq \{0_E\}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } 1 \text{ est valeur propre de } u \text{ et } G = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) = E_1(u).}$$

- On a alors :
  - × la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ est une base de $E_{-1}(u)$.
    En particulier, c'est donc une famille libre de $E_{-1}(u)$.
  - × la famille $(g_1, g_2, \ldots, g_q)$ est une base de $E_1(u)$.
    En particulier, c'est donc une famille libre de $E_1(u)$.

  La famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_p,\ g_1, g_2, \ldots, g_q)$ est la concaténation de deux familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes.

  $$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{F} \text{ est une famille libre de } E.}$$

Commentaire

L'énoncé demande de « Justifier » que $\mathcal{F}$ est une base de G. Cette terminologie est souvent associée à des démonstrations courtes. Ici, il est aussi possible de démontrer que $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_p, g_1, g_2, \ldots, g_q)$ est libre en revenant à la définition. Ce raisonnement est tout aussi rigoureux mais plus long à mettre en place, ce qui provoque une perte de temps pénalisante pour la suite. Détaillons cette rédaction.

- Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q) \in \mathbb{R}^{p+q}$. On suppose :

  $$\lambda_1 \cdot f_1 \ + \ \ldots \ + \ \lambda_p \cdot f_p \ + \ \mu_1 \cdot g_1 \ + \ \ldots \ + \ \mu_q \cdot g_q \ = \ 0_E \quad (*)$$

  En appliquant l'endomorphisme u de part et d'autre, on obtient par linéarité :

  $$\begin{array}{lrcl} & u\big(\lambda_1 \cdot f_1 + \ldots + \lambda_p \cdot f_p + \mu_1 \cdot g_1 + \ldots + \mu_q \cdot g_q\big) & = & u(0_E) \\ \text{puis} & \lambda_1 \cdot u(f_1) + \ldots + \lambda_p \cdot u(f_p) + \mu_1 \cdot u(g_1) + \ldots + \mu_q \cdot u(g_q) & = & 0_E \\ \text{et} & -\lambda_1 \cdot f_1 - \ldots - \lambda_p \cdot f_p + \mu_1 \cdot g_1 + \ldots + \mu_q \cdot g_q & = & 0_E \quad (**) \end{array}$$

  En effet :
  - × pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $f_i \in F = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$. Et ainsi :

    $$\begin{array}{ccc} (u + \mathrm{id})(f_i) & = & 0_E \\ \shortparallel & & \\ u(f_i) + \mathrm{id}(f_i) & = & u(f_i) + f_i \end{array}$$

    On en déduit : $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $u(f_i) = -f_i$.
  - × pour tout $j \in [\![1, q]\!]$, $g_j \in G = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$. Et ainsi : $(u - \mathrm{id})(g_j) = 0_E$.
    On obtient de même : $\forall j \in [\![1, q]\!]$, $u(g_j) = g_j$.
- En sommant membre à membre les égalités $(*)$ et $(**)$, on obtient :

  $$\mu_1 \cdot g_1 + \ldots + \mu_q \cdot g_q = 0_E$$

  Or $(g_1, \ldots, g_q)$ est une base de G. En particulier, c'est une famille libre.
  On en déduit : $\mu_1 = \ldots = \mu_q = 0_{\mathbb{R}}$.
- On reporte dans $(*)$ et on obtient : $\lambda_1 \cdot f_1 + \ldots + \lambda_p \cdot f_p = 0_E$.
  Or $(f_1, \ldots, f_q)$ est une base de F. En particulier, c'est une famille libre.
  On en déduit : $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0_{\mathbb{R}}$.
- Finalement : $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = \mu_1 = \ldots = \mu_q = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } (f_1, f_2, \ldots, f_p, g_1, g_2, \ldots, g_q) \text{ est libre.}}$$

9782340-026636_001_784.indd 472 30/07/2018 09:53

- La famille $\mathcal{F}$ est une famille libre de E, espace vectoriel de dimension n. Ainsi :
$$\text{Card}(\mathcal{F}) = p+q \leqslant n = \dim(E)$$
Or, d'après la question précédente : $p+q \geqslant n$.
$$\boxed{\text{On en déduit : } p+q = n.}$$
- En résumé :
  × la famille $\mathcal{F}$ est libre.
  × $\text{Card}(\mathcal{F}) = n = \dim(E)$.

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_q) \text{ est donc une base de } E.}$$ □

d) Calculer $u(g_1 - f_1)$ et $u(g_1 + f_1)$.

Démonstration.
- Tout d'abord :
$$\begin{array}{rcllll} u(g_1 - f_1) & = & u(g_1) & - & u(f_1) & \textit{(par linéarité de } u\textit{)} \\ & = & 1 \cdot g_1 & - & (-1) \cdot f_1 & \begin{array}{l}\textit{(car } g_1 \in E_1(u) \\ \textit{et } f_1 \in E_{-1}(u)\textit{)}\end{array} \\ & = & g_1 & + & f_1 & \end{array}$$
- On démontre de même : $u(g_1 + f_1) = u(g_1) + u(f_1) = g_1 - f_1$.

$$\boxed{u(g_1 - f_1) = g_1 + f_1 \quad \text{et} \quad u(g_1 + f_1) = g_1 - f_1}$$ □

e) Trouver une base de E dans laquelle la matrice de u appartient à B_n.

Démonstration.
On considère $\mathscr{B}'$ la famille :
$$\mathscr{B}' = (g_1 - f_1,\ g_1 + f_1,\ g_2 - f_2,\ g_2 + f_2, \dots,\ g_p - f_p,\ g_p + f_p,\ g_{p+1},\ g_{p+2}, \dots,\ g_q)$$
(qui est bien définie car $p < q$)
- Montrons tout d'abord que $\mathscr{B}'$ est une famille libre.
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_p, \gamma_{p+1}, \dots, \gamma_q) \in \mathbb{R}^n$. Supposons :
$$\lambda_1 \cdot (g_1 - f_1) + \mu_1 \cdot (g_1 + f_1) + \dots + \lambda_p \cdot (g_p - f_p) + \mu_p \cdot (g_p + f_p) + \gamma_{p+1} \cdot g_{p+1} + \dots + \gamma_q \cdot g_q = 0_E$$
En réordonnant :
$$(\mu_1 - \lambda_1) \cdot f_1 + \dots + (\mu_p - \lambda_p) \cdot f_p + (\mu_1 + \lambda_1) \cdot g_1 + \dots + (\mu_p + \lambda_p) \cdot g_p + \gamma_{p+1} \cdot g_{p+1} + \dots + \gamma_q \cdot g_q = 0_E$$
Or, d'après la question ***4.c)***, $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base de E.
C'est donc une famille libre. Ainsi :
$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall i \in [\![1, p]\!], & \mu_i - \lambda_i = 0 \\ \forall i \in [\![1, p]\!], & \mu_i + \lambda_i = 0 \\ \forall j \in [\![p+1, q]\!], & \gamma_j = 0 \end{array} \right.$$
Or, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:
$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \mu_i & - & \lambda_i & = & 0 \\ \mu_i & + & \lambda_i & = & 0 \end{array} \right. \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{ \begin{array}{rcrcl} \mu_i & - & \lambda_i & = & 0 \\ & & 2\,\lambda_i & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \mu_i & & = 0 \\ & \lambda_i & = 0 \end{array} \right.$$
(par remontées successives)

Ainsi : $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \mu_1 = \dots = \mu_p = \gamma_{p+1} = \dots = \gamma_q = 0$.
$$\boxed{\text{La famille } \mathscr{B}' \text{ est libre.}}$$

- On a alors :
  × la famille $\mathscr{B}'$ est libre.
  × $\text{Card}(\mathscr{B}') = n = \dim(E)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathscr{B}' \text{ est une base de } E.}$$

- Déterminons la matrice de u dans cette base.
  Pour plus de lisibilité, notons : $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $r_i = g_i - f_i$ et $s_i = g_i + f_i$.
  On démontre, par le même raisonnement que dans la question précédente :

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ u(g_i - f_i) = g_i + f_i \quad \text{et} \quad u(g_i + f_i) = g_i - f_i$$

La base $\mathscr{B}'$ s'écrit alors : $\mathscr{B}' = (r_1,\ s_1,\ \dots,\ r_i,\ s_i, \dots,\ r_p,\ s_p,\ g_{p+1},\ \dots,\ g_q)$ et :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall i \in [\![1, p]\!], & u(r_i) = s_i \\ \forall i \in [\![1, p]\!], & u(s_i) = r_i \\ \forall j \in [\![p+1, q]\!], & u(g_j) = g_j \end{array} \right.$$

On en déduit la matrice représentative de u dans la base $\mathscr{B}'$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} u(r_1) & u(s_1) & \dots & u(r_i) & u(s_i) & \dots & u(r_p) & u(s_p) & u(g_{p+1}) & \dots & u(g_q) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & \ddots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & 1 & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & 0 & 1 & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & & & & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ r_1 \\ s_1 \\ \vdots \\ r_i \\ s_i \\ \vdots \\ r_p \\ s_p \\ g_{p+1} \\ \vdots \\ g_q \end{array}$$

$$\boxed{\text{Dans la base } \mathscr{B}', \text{ la matrice de } u \text{ appartient à } B_n.}$$

Commentaire

Cette question est difficile car elle demande de prendre beaucoup d'initiatives.

- Il faut tout d'abord se rendre compte que la base $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ ne convient pas. En effet, comme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall i \in [\![1, p]\!], & u(f_i) = -f_i \\ \forall i \in [\![1, q]\!], & u(g_i) = g_i \end{array} \right.$$

  la matrice représentative de u dans $\mathcal{F}$ contient des -1 (en plus des 0 et des 1).
- L'idée est alors de créer une base sur laquelle u a pour effet d'échanger les éléments de cette base. Cette idée est guidée par la question précédente dans laquelle on démontre : $u(g_1 - f_1) = g_1 + f_1$ et $u(g_1 + f_1) = g_1 - f_1$.

□

Commentaire

Prenons un peu de recul sur le thème développé dans cet exercice.

- Dans cet exercice, on s'intéresse aux endomorphismes involutifs de E, c'est à dire aux applications $s \in \mathscr{L}(E)$ qui vérifient :

$$s \circ s = \text{id}$$

(cette égalité démontre que s est bijectif de réciproque s)
Les cas les plus simples de telles applications sont : $s = \text{id}$ et $s = -\text{id}$.

- Lors de l'étude de s, on considère généralement les espaces vectoriels suivants :
  - × $F = \text{Ker}(s - \text{id})$: c'est l'ensemble des vecteurs invariants par s.
    En effet, si $x \in F$, alors : $(s - \text{id})(x) = 0$ et donc $s(x) = x$.
  - × $G = \text{Ker}(s + \text{id})$: c'est l'ensemble des vecteurs changés en leur opposé par s.
    En effet, si $x \in G$, alors : $(s + \text{id})(x) = 0$ et donc $s(x) = -x$.

  (on prend ici les notations classiques - dans l'énoncé, les rôles de F et G sont échangés)

  Dès lors, on comprend pourquoi un endomorphisme involutif $s \in \mathscr{L}(E)$ est appelé **symétrie** par rapport à F parallèlement à G.

- On peut aussi étudier les symétries dans le cadre de la réduction.
On suppose que $F \neq \{0_E\}$ et $G \neq \{0_E\}$. Alors :

$$F = \text{Ker}(s - \text{id}) = E_1(s) \quad \text{et} \quad G = \text{Ker}(s + \text{id}) = E_{-1}(s)$$

On peut démontrer :

$$E \ = \ \text{Ker}(s - \text{id}) \ \oplus \ \text{Ker}(s + \text{id})$$

Cette égalité signifie que tout vecteur de E s'écrit de manière unique sous la forme d'une somme d'un vecteur de $\text{Ker}(s - \text{id})$ et d'un vecteur de $\text{Ker}(s + \text{id})$.
Autrement dit :

$$\forall x \in E, \exists!(y, z) \in \text{Ker}(s - \text{id}) \times \text{Ker}(s + \text{id}), \ x = y + z$$

Considérons alors la famille $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_{-1}$ obtenue en concaténant une base $\mathscr{B}_1$ de $E_1(s) = \text{Ker}(s - \text{id})$ et une base $\mathscr{B}_{-1}$ de $E_{-1}(s) = \text{Ker}(s + \text{id})$.
Cette famille est libre par construction.
De plus, elle est génératrice de E par la décomposition précédente $E = F + G$ (tout vecteur de E peut s'écrire comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G).

Finalement $\mathscr{B}$ est une base de vecteurs propres et s s'écrit dans cette base comme matrice diagonale dont la diagonale ne contient que des 1 et des -1.

- La notion de symétrie n'est pas au programme de la voie ECE.
Toutefois, on peut faire l'étude de tels endomorphismes avec des outils au programme.
C'est donc un candidat idéal pour faire un sujet de concours.

- Cette notion est très liée à la notion de **projecteurs** qui ne sont autres que les endomorphismes idempotents de E, c'est à dire les applications $p \in \mathscr{L}(E)$ qui vérifient :

$$p \circ p = p$$

Ceci n'est pas non plus au programme mais revient régulièrement pour les raisons citées au-dessus.

PROBLÈME

Les tables de mortalité sont utilisées en démographie et en actuariat pour prévoir l'espérance de vie des individus d'une population. On s'intéresse dans ce problème à un modèle qui permet d'ajuster la durée de vie à des statistiques portant sur les décès observés au sein d'une génération.

Dans tout le problème, on note :

- a et b deux réels strictement positifs ;
- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires du problème ;
- $G_{a,b}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $G_{a,b}(x) = \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2}x^2\right)$.

Partie I. Loi exponentielle linéaire

1. a) Montrer que la fonction $G_{a,b}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur l'intervalle $]0,1]$.

Démonstration.

- La fonction $G_{a,b}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$ car elle est la composée $G_{a,b} = g_2 \circ g_1$ où :
  - $\times$ $g_1 : x \mapsto -ax - \dfrac{b}{2}x^2$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$ car polynomiale,
    - telle que : $g_1([0,+\infty[) \subset \mathbb{R}$.
  - $\times$ $g_2 : x \mapsto \exp(x)$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in [0,+\infty[$:

$$G'_{a,b}(x) = (-a-bx)\ \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right) \quad = \quad - \quad \underbrace{(a+bx)}_{>0} \quad \underbrace{\exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right)}_{>0} \quad < \ 0$$

  La fonction $G_{a,b}$ est donc strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.
- La fonction $G_{a,b}$ est :
  - $\times$ continue sur $[0,+\infty[$,
  - $\times$ strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

  Ainsi, $G_{a,b}$ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $G_{a,b}([0,+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} G_{a,b}(x), G_{a,b}(0)\right]$.

  Enfin : $G_{a,b}(0) = \exp(0) = 1$.

  Et : $\lim\limits_{x\to+\infty} G_{a,b}(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-ax - \dfrac{b}{2}x^2\right) = -\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } G_{a,b} \text{ réalise une bijection de } [0,+\infty[\text{ sur }]0,1].}$$

□

b) Pour tout réel $y > 0$, résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $ax + \frac{b}{2}x^2 = y$.

Démonstration.
Soit $y > 0$. Notons : $P(x) = \frac{b}{2}\, x^2 + ax - y$.

- Calculons le discriminant du polynôme P :

$$\Delta = a^2 - 4 \times \frac{b}{2} \times (-y) = a^2 + 2by \ > \ 0$$

- On en déduit que P admet exactement deux racines notées r_+ et r_- :

$$r_+ = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2\frac{b}{2}} = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2by}}{b} \qquad \text{et} \qquad r_- = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2\frac{b}{2}} = -\frac{a + \sqrt{a^2 + 2by}}{b}$$

- Or $b > 0$ et $y > 0$ donc $a^2 + 2by > a^2$ et $\sqrt{a^2 + 2by} > \sqrt{a^2} = |a| = a$.
  On en déduit que $r_+ > 0$.

  D'autre part, $r_- < 0$ car $a > 0$, $\sqrt{a^2 + 2by} > 0$ et $b > 0$.

$$\boxed{\text{L'équation } ax + \frac{b}{2}x^2 = y \text{ admet deux solutions : } r_+ > 0 \text{ et } r_- < 0.}$$

□

c) On note $G_{a,b}^{-1}$ la bijection réciproque de $G_{a,b}$.
Quelle est, pour tout $u \in [0, 1[$, l'expression de $G_{a,b}^{-1}(1 - u)$?

Démonstration.
Soit $u \in [0, 1[$.

- On remarque tout d'abord que $1 - u \in \,]0, 1]$. Notons alors : $v = G_{a,b}^{-1}(1 - u)$.
  Par définition de $G_{a,b}$ et $G_{a,b}^{-1}$:

$$\begin{array}{rrcl} & v & = & G_{a,b}^{-1}(1-u) \\ \Leftrightarrow & G_{a,b}(v) & = & 1-u \\ \Leftrightarrow & \exp\left(-av - \frac{b}{2}v^2\right) & = & 1-u \\ \Leftrightarrow & -av - \frac{b}{2}v^2 & = & \ln(1-u) \\ \Leftrightarrow & av + \frac{b}{2}v^2 & = & -\ln(1-u) \end{array}$$

- Notons alors : $y = -\ln(1 - u)$. Comme $1 - u \in \,]0, 1]$, $\ln(1 - u) \in \,]-\infty, 0]$ et donc $y \geqslant 0$.
  On retombe alors sur l'équation de la question précédente dont la résolution est valable pour $y = 0$ (car on a toujours dans ce cas $\Delta > 0$).
  Cette équation admet pour solution :

$$r_+ = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2by}}{b} = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b\ \ln(1-u)}}{b} \ \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad r_- < 0$$

- Or, comme $G_{a,b}^{-1}$ est à valeurs dans $[0, +\infty[$, on en déduit :

$$v = G_{a,b}^{-1}(1-u) \ \Leftrightarrow \ v = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b\ \ln(1-u)}}{b}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } u \in [0,1[,\ G_{a,b}^{-1}(1-u) = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b\ \ln(1-u)}}{b}.}$$

□

2. a) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx$.

Démonstration.

- L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 G_{a,b}(x)\ dx$ est bien définie comme intégrale sur le segment $[0,1]$ de la fonction $G_{a,b}$ continue sur $[0,1]$.
- × Or : $G_{a,b}(x) = \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2}\ x^2\right) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

  En effet :
  $$x^2\ G_{a,b}(x) = x^2\ \exp\left(-ax - \frac{b}{2}\ x^2\right) = \frac{x^2}{(\mathrm{e}^a)^x} \times \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{b}{2}x^2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \times 0 = 0$$
  par croissances comparées.

  × $\forall x \in [1,+\infty[$, $G_{a,b}(x) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$.

  × L'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ dx$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann impropre en $+\infty$, d'exposant 2 $(2>1)$.

  Par critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx$ est elle aussi convergente.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^1 G_{a,b}(x)\ dx \text{ est convergente.}}$$

□

b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{b}{2\pi}} \times \exp\left(-\dfrac{1}{2}b\left(x+\dfrac{a}{b}\right)^2\right)$.

Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire suivant une loi normale dont on précisera les paramètres (espérance et variance).

Démonstration.

- On rappelle qu'une v.a.r. X suit la loi normale de paramètres (m,σ^2) si :

  a) $X(\Omega) = \mathbb{R}$,

  b) X admet pour densité la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\ \sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2}$ (définie sur $\mathbb{R}$).
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}b\left(x+\frac{a}{b}\right)^2\right) \\ &= \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2\pi}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}b\left(\frac{bx+a}{b}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{b}}\ \sqrt{2\pi}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sqrt{b}\ \frac{\cancel{b}(x+\frac{a}{b})}{\cancel{b}}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{b}}\ \sqrt{2\pi}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x+\frac{a}{b}}{\frac{1}{\sqrt{b}}}\right)^2\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que } f \text{ est la densité d'une v.a.r. } X \text{ qui suit la loi } \mathcal{N}\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right). \\ \text{Ainsi, } \mathbb{E}(X) = -\dfrac{a}{b} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{b}.\end{array}}$$

□

c) Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
Déduire de la question ***2.b)***, l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx = \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \times \exp\left(\frac{a^2}{2b}\right) \times \Phi\left(-\frac{a}{\sqrt{b}}\right)$$

Démonstration.

- Soit $x \in [0, +\infty[$. Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned} -ax - \frac{b}{2}\ x^2 &= -\frac{1}{2}\ b\ \left(2\ \frac{a}{b}\ x + x^2\right) \\ &= -\frac{1}{2}\ b\ \left(\left(x+\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a^2}{b^2}\right) \ = \ -\frac{1}{2}\ b\ \left(x+\frac{a}{b}\right)^2 \ + \ \frac{1}{2}\frac{a^2}{b} \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} G_{a,b}(x) &= \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\ b\ \left(x+\frac{a}{b}\right)^2 \ + \ \frac{1}{2}\frac{a^2}{b}\right) \\ &= \exp\left(\frac{a^2}{2b}\right) \times \exp\left(-\frac{1}{2}\ b\ \left(x+\frac{a}{b}\right)^2\right) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \times \exp\left(\frac{a^2}{2b}\right) \times \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}\ b\ \left(x+\frac{a}{b}\right)^2\right) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \times \exp\left(\frac{a^2}{2b}\right) \times f(x) \end{aligned}$$

- Et ainsi :

$$\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx = \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \times \exp\left(\frac{a^2}{2b}\right) \times \int_0^{+\infty} f(x)\ dx$$

- On rappelle : $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right) \ \Leftrightarrow\ X^* = \dfrac{X - (-\frac{a}{b})}{\frac{1}{\sqrt{b}}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

  On effectue alors le changement de variable $u = \dfrac{x+\frac{a}{b}}{\frac{1}{\sqrt{b}}}$, autrement dit $\boxed{u = \sqrt{b}\ \left(x + \frac{a}{b}\right)}$:

$$\left|\begin{array}{l} u = \sqrt{b}\ \left(x+\dfrac{a}{b}\right) \quad \text{(et donc } x = \dfrac{1}{\sqrt{b}}\ u - \dfrac{a}{b}\text{)} \\ \hookrightarrow du = \sqrt{b}\ dx \quad \text{et} \quad dx = \dfrac{1}{\sqrt{b}}\ du \\ \bullet\ x = 0 \ \Rightarrow\ u = \dfrac{a}{\sqrt{b}} \\ \bullet\ x = +\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \end{array}\right.$$

  Ce changement de variable est valide car la fonction $\varphi : u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{b}}u - \dfrac{a}{b}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[\frac{a}{\sqrt{b}}, +\infty[$.

Et donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(x)\ dx &= \sqrt{\frac{b}{2\pi}}\ \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\ b\ \left(x+\frac{a}{b}\right)^2\right)\ dx \\
&= \sqrt{\frac{b}{2\pi}}\ \int_{\frac{a}{\sqrt{b}}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\ u^2\right)\ \frac{1}{\sqrt{b}}\ du \ = \ \int_{\frac{a}{\sqrt{b}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\ du \\
&= \int_{\frac{a}{\sqrt{b}}}^{+\infty} \varphi(u)\ du \ = \ 1-\int_{+\infty}^{\frac{a}{\sqrt{b}}} \varphi(u)\ du \ = \ 1-\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) \ = \ \Phi\left(-\frac{a}{\sqrt{b}}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx = \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \times \exp\left(\frac{a^2}{2b}\right) \times \Phi\left(-\frac{a}{\sqrt{b}}\right)}$$

Commentaire

On utilise ici la propriété : $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right) \ \Leftrightarrow\ X^* = \dfrac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)}$

dans le cas particulier où $m = -\dfrac{a}{b}$ et $\sigma^2 = \dfrac{1}{b}$ (propriété à connaître !).

□

3. Pour tout $a > 0$ et pour tout $b > 0$, on pose : $f_{a,b}(x) = \begin{cases} (a+bx)\ \exp\left(-ax-\dfrac{b}{2}x^2\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

a) Justifier que la fonction $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.
On dit qu'une variable aléatoire suit la loi exponentielle linéaire de paramètres a et b, notée $\mathcal{E}_\ell(a,b)$, si elle admet $f_{a,b}$ pour densité.

Démonstration.
On vérifie les trois propriétés des densités de probabilité.

(i) La fonction $f_{a,b}$ est :
- × continue sur $]-\infty,0[$ car constante sur cet intervalle,
- × continue sur $]0,+\infty[$ comme composée et produit de fonctions continues sur $]0,+\infty[$.

(ii) D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{a,b}(x) \geqslant 0$ car :
- × si $x \geqslant 0$: $f_{a,b}(x) = (a+bx)\exp\left(-ax-\dfrac{b}{2}x^2\right) > 0$ (car $a > 0$ et $b > 0$),
- × si $x < 0$: $f_{a,b}(x) = 0 \geqslant 0$.

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x)\ dx = \int_0^{+\infty} f_{a,b}(x)\ dx$ car $f_{a,b}$ est nulle en dehors de $[0,+\infty[$.
La fonction $f_{a,b}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
Soit $A \in [0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{A} f_{a,b}(x)\ dx &= \int_0^{A} (a+bx)\ \exp\left(-ax-\frac{b}{2}x^2\right)\ dx \\
&= -\left[\ \exp\left(-ax-\frac{b}{2}x^2\right)\ \right]_0^A \\
&= -\left(\exp\left(-aA-\frac{b}{2}A^2\right)-\exp(0)\right) \\
&= 1-\mathrm{e}^{-aA}\times \mathrm{e}^{-\frac{b}{2}A^2} \ \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}\ 1
\end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x)\ dx$ est convergente et vaut 1.

$$\boxed{\text{On en conclut que } f_{a,b} \text{ est une densité de probabilité.}}$$

□

b) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{E}_\ell(a,b)$. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ telle que : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx$.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f_{a,b}(x)\ dx$ converge absolument, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour des calculs de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_{a,b}(x)\ dx$.
- La fonction $f_{a,b}$ est nulle en dehors de $[0,+\infty[$. Donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{a,b}(x)\ dx = \int_0^{+\infty} x f_{a,b}(x)\ dx$$

- Soit $A \in [0,+\infty[$.
La fonction $x \mapsto x\ f_{a,b}(x)$ est continue par morceaux sur $[0,A]$.
On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x & & u'(x) & = & 1 \\ v'(x) & = & f_{a,b}(x) & & v(x) & = & -G_{a,b}(x) \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,A]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^A x\ f_{a,b}(x)\ dx &= \Big[\ -x\ G_{a,b}(x)\ \Big]_0^A + \int_0^A G_{a,b}(x)\ dx \\ &= -(A\ G_{a,b}(A) - 0) + \int_0^A G_{a,b}(x)\ dx \end{aligned}$$

De plus, par croissances comparées :

$$A\ G_{a,b}(A) = A\ \exp\left(-aA - \frac{b}{2}\ A^2\right) = \frac{A}{(\mathrm{e}^a)^A} \times \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{b}{2}A^2}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \times 0 = 0$$

Et, comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx$ est convergente d'après la question ***2.a)*** :

$$\int_0^A x\ f_{a,b}(x)\ dx \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + \int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } X \text{ admet une espérance et que } \mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx.}$$

□

4. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On pose : $X = \dfrac{-a+\sqrt{a^2+2bY}}{b}$.

a) Justifier que pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $\mathbb{P}([X \geqslant x]) = G_{a,b}(x)$.

Démonstration.

- D'après la question ***1.c)*** :

$$\forall u \in [0,1[,\ G_{a,b}^{-1}(1-u) = \frac{-a+\sqrt{a^2-2b\ \ln(1-u)}}{b}$$

On remarque :

$$-\ln(1-u) = y \ \Leftrightarrow\ \ln(1-u) = -y \ \Leftrightarrow\ 1-u = \mathrm{e}^{-y} \ \Leftrightarrow\ u = 1-\mathrm{e}^{-y}$$

Si $y \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-y} \in]0,1]$ et donc $u \in [0,1[$.
On peut donc appliquer la formule précédente et on obtient :

$$G_{a,b}^{-1}(\mathrm{e}^{-y}) = \frac{-a+\sqrt{a^2+2b\ y}}{b}$$

- Comme $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, $Y(\Omega) = [0,+\infty[$. Ainsi, d'après ce qui précède : $X = G_{a,b}^{-1}(\mathrm{e}^{-Y})$.

On a alors, pour tout $x \in [0,+\infty[$:

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([X \geqslant x]) & = & \mathbb{P}\left(\left[G_{a,b}^{-1}(\mathrm{e}^{-Y}) \ \geqslant\ x\right]\right) & \\
& = & \mathbb{P}\left(\left[\mathrm{e}^{-Y} \ \leqslant\ G_{a,b}(x)\right]\right) & \textit{(par stricte décroissance de } G_{a,b} \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \\
& = & \mathbb{P}\left([-Y \ \leqslant\ \ln(G_{a,b}(x))]\right) & \textit{(par stricte croissance de } \ln \textit{ sur }]0,1]\textit{)} \\
& = & \mathbb{P}\left([Y \ \geqslant\ -\ln(G_{a,b}(x))]\right) & \\
& = & 1-\mathbb{P}\left([Y \ <\ -\ln(G_{a,b}(x))]\right) & \\
& = & 1-F_y(-\ln(G_{a,b}(x))) & \textit{(car } Y \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\
& = & \cancel{1}-\left(\cancel{1}-\mathrm{e}^{-(-\ln(G_{a,b}(x)))}\right) & \textit{(car } Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \textit{ et } -\ln(G_{a,b}(x)) \geqslant 0\textit{)} \\
& = & \mathrm{e}^{\ln(G_{a,b}(x))} \ =\ G_{a,b}(x) &
\end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in [0,+\infty[,\ \mathbb{P}([X \geqslant x]) = G_{a,b}(x)}$$

Commentaire

- Il est aussi possible de traiter cette question même sans avoir traité la question ***1.c)***. Précisons ci-dessous cette rédaction :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([X \geqslant x]) & = & \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{-a+\sqrt{a^2+2bY}}{b} \geqslant x\right]\right) & \\
& = & \mathbb{P}\left(\left[-a+\sqrt{a^2+2bY} \geqslant bx\right]\right) & \textit{(car } b>0\textit{)} \\
& = & \mathbb{P}\left(\left[\sqrt{a^2+2bY} \geqslant a+bx\right]\right) & \\
& = & \mathbb{P}\left(\left[a^2+2bY \geqslant (a+bx)^2\right]\right) & \textit{(par stricte croissance de la fonction élévation au carré sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\
& = & \mathbb{P}\left(\left[2bY \geqslant (a+bx)^2-a^2\right]\right) & \\
& = & \mathbb{P}\left(\left[Y \geqslant \dfrac{1}{2b}\left((a+bx)^2-a^2\right)\right]\right) & \textit{(car } 2b>0\textit{)}
\end{array}$$

On remarque alors :

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{1}{2b}\left((a+bx)^2-a^2\right) & = & \dfrac{1}{2b}\left((\cancel{a^2}+2ab\ x+b^2x^2)-\cancel{a^2}\right) \\
& = & a\ x+\dfrac{b}{2}\ x^2
\end{array}$$

Et, en reprenant le calcul précédent :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([X \geqslant x]) & = & \mathbb{P}\left(\left[Y \geqslant a\ x+\dfrac{b}{2}\ x^2\right]\right) & \\
& = & 1-\mathbb{P}\left(\left[Y < a\ x+\dfrac{b}{2}\ x^2\right]\right) & \\
& = & \cancel{1}-\left(\cancel{1}-\mathrm{e}^{-(a\ x+\frac{b}{2}\ x^2)}\right) & \textit{(car } Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \textit{ et } a\ x+\dfrac{b}{2}\ x^2 \geqslant 0\textit{)} \\
& = & \exp\left(-a\ x-\dfrac{b}{2}\ x^2\right) \ = \ G_{a,b}(x) &
\end{array}$$

- En réalité, il s'agit de deux présentations différentes d'une seule et même démonstration. Il s'agit simplement « d'inverser » l'inégalité : $X \geqslant x$, c'est-à-dire d'isoler Y.
  - × dans la première rédaction, on sait que $X = G_{a,b}^{-1}(Y)$ et il suffit donc d'appliquer $G_{a,b}$ de part et d'autre. On aboutit tout de suite à l'inégalité : $Y \geqslant a\ x+\dfrac{b}{2}\ x^2$.
    (notée $Y \geqslant -\ln(G_{a,b}(x))$ dans la démonstration)
  - × dans la deuxième rédaction, on prend moins de recul : on part de la définition de X donnée par l'énoncé et, par opérations successives, on tombe encore une fois sur l'inégalité : $Y \geqslant a\ x+\dfrac{b}{2}\ x^2$.

□

b) En déduire que X suit la loi $\mathcal{E}_\ell(a,b)$.

Démonstration.

- Notons $g : x \mapsto \dfrac{-a+\sqrt{a^2+2b\,x}}{b}$. Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & = & \big(g(Y)\big)\,(\Omega) \\ & = & g\,\big(Y(\Omega)\big) \\ & = & g\,\big([0,+\infty[\big) \end{array}$$

Or, comme g est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$:

$$g\,\big([0,+\infty[\big) = \ [g(0), \lim_{x\to+\infty} g(x)[\ = \ [0,+\infty[$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } X(\Omega) = [0,+\infty[.}$$

- Déterminons alors la fonction de répartition de X.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  - × Si $x < 0$ alors $[X \leqslant x] = \varnothing$ car $X(\Omega) = [0,+\infty[$. Ainsi :

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = 0$$

  - × Si $x \geqslant 0$ alors :

$$\begin{array}{rcll} F_X(x) & = & \mathbb{P}([X \leqslant x]) & \\ & = & 1-\mathbb{P}([X > x]) & \\ & = & 1-G_{a,b}(x) & \textit{(en reprenant la démonstration précédente} \\ & & & \textit{en remplaçant } [X \geqslant x] \textit{ par } [X > x]\textit{)} \end{array}$$

En résumé :

$$F_X \ : \ x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-G_{a,b}(x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{array} \right.$$

- La fonction F_X est :

  1) continue sur $\mathbb{R}$ puisque :
  - × $x \mapsto 1-G_{a,b}(x)$ est continue sur $]0,+\infty[$ car $G_{a,b}$ l'est.
  - × $x \mapsto 0$ est continue sur $]-\infty,0[$.
  - × $\lim\limits_{x\to 0} (1-G_{a,b}(x)) = 1-1 = 0 = F_X(0) = \lim\limits_{x\to 0} 0$.

  2) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ car :
  - × $x \mapsto 0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0[$,
  - × $x \mapsto 1-G_{a,b}(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ car $G_{a,b}$ l'est.

$$\boxed{\text{On en déduit que } X \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

- On obtient une densité f_X de X en dérivant sur les intervalles ouverts.
  On **pose** de plus : $f_X(0) = (a + b \times 0)\ \exp(0) = a$.

$$f_X \ : \ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (a+bx)\ \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2}x^2\right) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Ainsi, f_X coïncide avec $f_{a,b}$. On en déduit : $X \hookrightarrow \mathcal{E}_\ell(a,b)$.

Commentaire

- L'énoncé demande de déterminer, en question ***4.a)*** : $\mathbb{P}([X \geqslant x])$. Le caractère large de l'inégalité est étonnant puisque pour déterminer la fonction de répartition de X on se sert de l'égalité :

$$\mathbb{P}([X \leqslant x]) = 1 - \mathbb{P}([X > x])$$

- Ce choix est validé après coup puisqu'on démontre, **après avoir déterminé** F_X, que X est une v.a.r. à densité et donc : $\mathbb{P}([X \geqslant x]) = \mathbb{P}([X > x])$.
- La même remarque peut être faite en question ***7.***. Par contre, la question ***8.a)*** ne détaillant pas précisément la méthode à suivre, on en profitera pour déterminer $\mathbb{P}([U_n > x])$, ce qui est bien plus judicieux (d'autant plus que la v.a.r. U_n étudiée n'est pas à densité !).

□

c) On note U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire $G_{a,b}^{-1}(1-U)$.

Démonstration.

- Si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$ et $\lambda > 0$, alors $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
  On note alors : $Y = -\ln(1-U)$. On obtient ainsi $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.
- Or, comme vu en question ***4.a)*** et ***4.b)*** :

$$G_{a,b}^{-1}(\mathrm{e}^{-Y}) \hookrightarrow \mathcal{E}_\ell(a,b)$$

- On remarque enfin :

$$\mathrm{e}^{-Y} = \mathrm{e}^{-(-\ln(1-U))} = \mathrm{e}^{\ln(1-U)} = 1-U$$

On en déduit que $G_{a,b}^{-1}(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}_\ell(a,b)$.

Commentaire

- Rappelons que si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$ alors $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
 C'est un attendu du programme qu'on demande souvent de démontrer dans les énoncés. Rappelons ici la démonstration.
- Notons $g : x \mapsto -\frac{1}{\lambda}\ \ln(1-x)$. Tout d'abord :

$$V(\Omega) \ = \ \big(g(U)\big)\,(\Omega) \ = \ g\,\big(U(\Omega)\big) \ = \ g\,\big([0,1[\big) \ = \ [0,+\infty[$$

 En effet, comme g est continue et strictement croissante sur $[0,1[$:

$$g\,\big([0,1[\big) = \ [g(0), \lim_{x\to 1} g(x)[\ = \ [0,+\infty[$$

- Déterminons la fonction de répartition de V.
 Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
 × Si $x < 0$, alors $[V \leqslant x] = \varnothing$ car $V(\Omega) = [0,+\infty[$. Donc :

$$F_V(x) = \mathbb{P}([V \leqslant X]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

 × Si $x \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}
F_V(x) &= \mathbb{P}([V \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}\left(\left[-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leqslant x\right]\right) \\
&= \mathbb{P}([\ln(1-U) \geqslant -\lambda x]) \quad \textit{(car } -\lambda < 0\textit{)} \\
&= \mathbb{P}\left(\left[1-U \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda x}\right]\right) \quad \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\
&= \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]\right) \\
&= F_U\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right) \\
&= 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} \quad \textit{(car } 1-e^{-\lambda x} \in [0,1[\textit{)}
\end{aligned}$$

- Il est possible de faire une démonstration identique à celle de la question ***4.a)***. En reprenant la 2$^{\text{ème}}$ rédaction et en posant : $Y = \ln(1-U)$, on obtient, pour tout $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X \geqslant x]) &= 1-\mathbb{P}\left(\left[Y < a\ x + \frac{b}{2}\ x^2\right]\right) \ = \ 1-\mathbb{P}\left(\left[-\ln(1-U) < a\ x + \frac{b}{2}\ x^2\right]\right) \\
&= 1-\mathbb{P}\left(\left[\ln(1-U) > -a\ x - \frac{b}{2}\ x^2\right]\right) \\
&= 1-\mathbb{P}\left(\left[1-U > \exp\left(-a\ x - \frac{b}{2}\ x^2\right)\right]\right) \quad \textit{(par stricte croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\
&= 1-\mathbb{P}\left(\left[U < 1-\exp\left(-a\ x - \frac{b}{2}\ x^2\right)\right]\right) \\
&= \cancel{1} - \left(\cancel{1} - \exp\left(-a\ x - \frac{b}{2}\ x^2\right)\right) \ = \ G_{a,b}(x)
\end{aligned}$$

 et on conclut en utilisant la question ***4.b)***.

□

5. La fonction **Scilab** suivante génère des simulations de la loi exponentielle linéaire.

```
1 function x = grandlinexp(a,b,n)
2     u = rand(n,1)
3     y = ...........
4     x = (-a + sqrt(a ^2 + 2 * b * y)) / b
5 endfunction
```

a) Quelle est la signification de la ligne de code 2 ?

Démonstration.

L'instruction `rand(n,1)` renvoie un vecteur colonne de taille `n` $\times$ 1 contenant le résultat de la simulation de `n` v.a.r. aléatoires indépendantes qui suivent toutes la même loi $\mathcal{U}([0,1])$. □

b) Compléter la ligne de code 3 pour que la fonction `grandlinexp` génère les simulations désirées.

Démonstration.
D'après la question ***4.c)***, il suffit d'écrire :

```
3     y = - log(1 - u)
```

□

6. De quel nombre réel peut-on penser que les six valeurs générées par la boucle **Scilab** suivante fourniront des valeurs approchées de plus en plus précises et pourquoi ?

```
for k = 1:6
    mean(grandlinexp(0, 1, 10 ^k)
end
```

Démonstration.

- Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}_\ell(0,1)$.
  Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on considère $(X_1, \ldots, X_m)$ un m-échantillon de la v.a.r. X.
  Autrement dit, on considère $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes et toutes de même loi $\mathcal{E}_\ell(0,1)$. On note alors :
  $$\overline{X_m} = \frac{X_1 + \ldots + X_m}{m}$$
  la v.a.r. donnant la moyenne empirique associée à v.a.r. X.
- Pour chaque `k`, l'instruction `mean(grandlinexp(0, 1, 10 ^k))` permet de simuler la v.a.r. $\overline{X_{10^{\mathtt{k}}}}$.
- En vertu de la loi faible des grands nombres, la v.a.r. $\overline{X_{10^{\mathtt{k}}}}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire constante égale à $\mathbb{E}(X)$.
- L'entier `k` prenant des valeurs de plus en plus grandes (on considère une simulation de $\overline{X_{10}}$, puis $\overline{X_{100}}$, ..., puis $\overline{X_{1000000}}$), on peut penser que le résultat sera de plus en plus proche de $\mathbb{E}(X)$.

Les six valeurs générées par la boucle **Scilab** fourniront des valeurs de plus en plus précises de $\mathbb{E}(X)$. □

Dans la suite du problème, on note $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi exponentielle linéaire $\mathcal{E}_\ell(a,b)$ dont les paramètres $a>0$ et $b>0$ sont inconnus.
Soit h un entier supérieur ou égal à 2. On suit pendant une période de h années, une « cohorte » de n individus de même âge au début de l'étude et on modélise leurs durées de vie respectives à partir de cette date par les variables aléatoires X_1, X_2, …, X_n.

Partie II. Premier décès et intervalle de confiance de a

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les variables aléatoires M_n, H_n et U_n par :

$$M_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad H_n = \min(h, X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad U_n = nH_n.$$

7. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la probabilité $\mathbb{P}([M_n \geqslant x])$.
Reconnaître la loi de la variable aléatoire M_n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord : $M_n(\Omega) \subset [0,+\infty[$. En effet : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $X_i(\Omega) = [0,+\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x<0$ alors $[M_n \geqslant x] = \Omega$ car $M_n(\Omega) \subset [0,+\infty[$.
    Ainsi : $\mathbb{P}([M_n \geqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
  - × si $x \geqslant 0$ alors :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([M_n \geqslant x]) & = & \mathbb{P}([\min(X_1,\dots,X_n) \geqslant x]) & \\
& = & \mathbb{P}([X_1 \geqslant x] \cap \dots \cap [X_n \geqslant x]) & \\
& = & \mathbb{P}([X_1 \geqslant x]) \times \dots \times \mathbb{P}([X_n \geqslant x]) & \textit{(car les v.a.r. } X_i \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & G_{a,b}(x) \times \dots \times G_{a,b}(x) & \textit{(d'après la question } \mathbf{4.a)}) \\
& = & (G_{a,b}(x))^n &
\end{array}$$

Enfin, comme $\mathbb{P}([M_n \leqslant x]) = 1 - \mathbb{P}([M_n > x])$ (on peut remplacer, sans modification du résultat, $[M_n \geqslant x]$ par $[M_n > x]$ dans la démonstration ci-dessus), on obtient :

$$F_{M_n} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-(G_{a,b}(x))^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

- La fonction F_{M_n} (*cf* ***4.b)***) est :
  1) continue sur $\mathbb{R}$,
  2) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$.
  On en déduit que M_n est une v.a.r. à densité.
- On obtient une densité f_{M_n} de M_n en dérivant F_{M_n} sur les intervalles ouverts.
  On choisit de plus : $f_{M_n}(0) = -n\ (G_{a,b}(0))^{n-1}\ G'_{a,b}(0)$. On obtient :

$$f_{M_n} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ -n\ (G_{a,b}(x))^{n-1}\ G'_{a,b}(x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Or :

$$\begin{array}{rcl} -n\ (G_{a,b}(x))^{n-1}\ G'_{a,b}(x) & = & -n\ \left(\exp\left(-ax - \frac{b}{2}\ x^2\right)\right)^{n-1}\ (-a-bx)\ \exp\left(-ax - \frac{b}{2}\ x^2\right) \\ & = & n\ (a+bx)\ \left(\exp\left(-ax - \frac{b}{2}\ x^2\right)\right)^{n} \\ & = & ((na)+(nb)x)\ \exp\left(-(na)x - \frac{(nb)}{2}\ x^2\right)\ =\ f_{na,nb}(x) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } M_n \hookrightarrow \mathcal{E}_\ell(na, nb).}$$

□

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_{U_n} la fonction de répartition de la variable aléatoire U_n.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $F_{U_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2n}x^2\right) & \text{si } 0 \leqslant x < nh \\ 1 & \text{si } x \geqslant nh \end{cases}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Commençons par déterminer $U_n(\Omega)$.
Remarquons tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} H_n & = & \min(h, X_1, X_2, \ldots, X_n) \\ & = & \min(h, \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)) \\ & = & \min(h, M_n) \end{array}$$

On en déduit : $H_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$.

$$\boxed{U_n(\Omega) \subset [0, +\infty[}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :
  × si $x < 0$ alors $[U_n > x] = \Omega$ car $U_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$.
  Ainsi, $\mathbb{P}([U_n > x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
  × si $x \in [0, nh[$ alors :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([U_n > x]) & = & \mathbb{P}([nH_n > x]) & \\ & = & \mathbb{P}(\left[H_n > \frac{x}{n}\right]) & \textit{(puisque } n > 0\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}(\left[\min(h, M_n) > \frac{x}{n}\right]) & \\ & = & \mathbb{P}(\left[h > \frac{x}{n}\right] \cap \left[M_n > \frac{x}{n}\right]) & \\ & = & \mathbb{P}(\left[h > \frac{x}{n}\right])\ \times\ \mathbb{P}(\left[M_n > \frac{x}{n}\right]) & \textit{(car la v.a.r. constante } h \textit{ et la v.a.r. } M_n \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & 1\ \times\ \mathbb{P}(\left[M_n > \frac{x}{n}\right]) & \textit{(car } [x < nh] = \Omega \textit{ puisque } x \in [0, nh[\textit{)} \\ & = & \left(G_{a,b}(\frac{x}{n})\right)^n & \textit{(d'après la question } \textbf{7}\textit{)} \end{array}$$

  × si $x \geqslant nh$ alors (en reprenant la démonstration ci-dessus) :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([U_n > x]) & = & \mathbb{P}(\left[h > \frac{x}{n}\right])\ \times\ \mathbb{P}(\left[M_n > \frac{x}{n}\right]) & \\ & = & 0\ \times\ \mathbb{P}(\left[M_n > \frac{x}{n}\right])\ =\ 0 & \textit{(car } [x < nh] = \varnothing \textit{ puisque } x \geqslant nh\textit{)} \end{array}$$

- Enfin, comme $\mathbb{P}([U_n \leqslant x]) = 1 - \mathbb{P}([U_n > x])$, on obtient :

$$\boxed{F_{U_n} \; : \; x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(G_{a,b}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n & \text{si } x \in [0, nh[\\ 1 & \text{si } x \geqslant nh \end{cases}}$$

Il suffit alors de remarquer :

$$\left(G_{a,b}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n = \exp\left(-a\frac{x}{n} - \frac{b}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2\right)^n = \exp\left(-a\cancel{n}\frac{x}{\cancel{n}} - \frac{b}{2}\cancel{n}\frac{x^2}{n^{\cancel{2}}}\right) = \exp\left(-ax - \frac{b}{2n}x^2\right) \square$$

b) Étudier la continuité de la fonction F_{U_n}.

Démonstration.
La fonction F_{U_n} est :

× continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]nh, +\infty[$ car constante sur chacun de ces intervalles.

× continue sur $]0, nh[$ car $G_{a,b}$ l'est sur $[0, +\infty[$.

× continue en 0 puisque :

1) $\lim\limits_{x \to 0^-} F_{U_n}(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$,

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} F_{U_n}(x) = \lim\limits_{x \to 0} 1 - \left(G_{a,b}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n = 1 - (G_{a,b}(0))^n = 1 - 1^n = 0$,

3) $F_{U_n}(0) = 0$.

× non continue en nh. En effet :

$$\lim_{x \to (nh)^-} F_{U_n}(x) = \lim_{x \to nh} 1 - \left(G_{a,b}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n = 1 - \left(G_{a,b}\left(\frac{nh}{n}\right)\right)^n = 1 - \exp\left(-anh - \frac{b}{2\cancel{n}}n^{\cancel{2}}\; h^2\right) < 1$$

et $F_{U_n}(nh) = 1$

$$\boxed{\text{Ainsi, } F_{U_n} \text{ est continue uniquement sur }]-\infty, nh[\text{ et sur }]nh, +\infty[.}$$ $\square$

c) La variable aléatoire U_n admet-elle une densité ?

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après la question précédente, } F_{U_n} \text{ n'est pas continue sur } \mathbb{R}. \text{ Ainsi, } U_n \text{ n'est pas une variable à densité.}}$$ $\square$

d) Montrer que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Démonstration.
Deux cas se présentent.

- Si $x < 0$ alors :

$$\lim_{n \to +\infty} F_{U_n}(x) = \lim_{n \to +\infty} 0 = 0$$

- Si $x \geqslant 0$ alors, pour n suffisamment grand (plus précisément pour tout $n > \left\lceil \frac{x}{h} \right\rceil$) :

$$\lim_{n \to +\infty} F_{U_n}(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \exp\left(-ax - \frac{b}{2n}x^2\right)\right) = 1 - \exp(-ax)$$

- On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z telle que $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Z \text{ où } Z \hookrightarrow \mathcal{E}(a).}$$

□

9. Soit $\alpha \in]0,1[$.

a) Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.
Trouver deux réels c et d strictement positifs tels que :

$$\mathbb{P}([c \leqslant Y \leqslant d]) = 1-\alpha \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Y \leqslant c]) = \frac{\alpha}{2}$$

Démonstration.

- Comme $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et que les réels c et d doivent être strictement positifs :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([c \leqslant Y \leqslant d]) &= F_Y(d) - F_Y(c) = (\cancel{1} - e^{-d}) - (\cancel{1} - e^{-c}) = e^{-c} - e^{-d} \\ \mathbb{P}([Y \leqslant c]) &= F_Y(c) = 1 - e^{-c}\end{aligned}$$

- On obtient ainsi :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} e^{-c} & - & e^{-d} & = & 1-\alpha \\ -e^{-c} & & & = & -1+\dfrac{\alpha}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} & - & e^{-d} & = & -\dfrac{\alpha}{2} \\ -e^{-c} & & & = & -1+\dfrac{\alpha}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^{-d} = \dfrac{\alpha}{2} \\ e^{-c} = 1-\dfrac{\alpha}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -d = \ln\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) \\ -c = \ln\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right) \end{array}\right.$$

Ainsi, $c = -\ln\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right) > 0$ car $1-\dfrac{\alpha}{2} \in]0,1[$ puisque $\alpha \in]0,1[$.

De même, $d = -\ln\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) > 0$ car $\dfrac{\alpha}{2} \in]0,1[$.

$$\boxed{c = -\ln\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{et} \quad d = -\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Commentaire

On pouvait bien évidemment faire les calculs de probabilité à l'aide d'une densité de probabilité :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([c \leqslant Y \leqslant d]) &= \int_c^d f_Y(x)\,dx = \int_c^d 1 \times e^{-x}\,dx = \left[\,-e^{-x}\,\right]_c^d = -(e^{-d} - e^{-c}) = e^{-c} - e^{-d} \\ \mathbb{P}([Y \leqslant c]) &= \int_{-\infty}^c f_Y(x)\,dx = \int_0^c e^{-x}\,dx = \left[\,-e^{-x}\,\right]_0^c = -(e^{-c} - e^0) = 1 - e^{-c}\end{aligned}$$

□

b) Montrer que $\left[\dfrac{c}{U_n}\ ,\ \dfrac{d}{U_n}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de a, de niveau de confiance $1-\alpha$.

Démonstration.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\left(a \in \left[\dfrac{c}{U_n}, \dfrac{d}{U_n}\right]\right) & = & \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{c}{U_n} \leqslant a \leqslant \dfrac{d}{U_n}\right]\right) & \\
& = & \mathbb{P}\left([c \leqslant a\ U_n \leqslant d]\right) & \textit{(car } U_n > 0\textit{)} \\
& = & \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{c}{a} \leqslant U_n \leqslant \dfrac{d}{a}\right]\right) & \textit{(car } a > 0\textit{)} \\
& \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{c}{a} \leqslant Z \leqslant \dfrac{d}{a}\right]\right) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{8.d)}}\textit{)}
\end{array}$$

On constate enfin :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\left(\left[\dfrac{c}{a} \leqslant Z \leqslant \dfrac{d}{a}\right]\right) & = & F_Z\left(\dfrac{d}{a}\right) - F_Z\left(\dfrac{c}{a}\right) & \\
& = & (\cancel{1} - \mathrm{e}^{-a\frac{d}{a}}) - (\cancel{1} - \mathrm{e}^{-a\frac{c}{a}}) & \textit{(car } Z \hookrightarrow \mathcal{E}(a)\textit{)} \\
& = & \mathrm{e}^{-c} - \mathrm{e}^{-d} & \\
& = & 1-\alpha & \textit{(d'après la question précédente)}
\end{array}$$

Ainsi, $\mathbb{P}\left(a \in \left[\dfrac{c}{U_n}, \dfrac{d}{U_n}\right]\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1-\alpha$ ce qui démontre que $\left[\dfrac{c}{U_n}\ ,\ \dfrac{d}{U_n}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de a, de niveau de confiance $1-\alpha$.

Commentaire

- Avec une telle rédaction, il est difficile de comprendre pourquoi on a introduit la loi $\mathcal{E}(1)$ dans la question précédente. Pour bien comprendre ce point, on peut utiliser la propriété :
$$Z \hookrightarrow \mathcal{E}(a) \ \Leftrightarrow\ aZ \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$$
Ainsi, on peut écrire dans la rédaction précédente :
$$\mathbb{P}\left(\left[\dfrac{c}{a} \leqslant Z \leqslant \dfrac{d}{a}\right]\right) = \mathbb{P}\left([c \leqslant aZ \leqslant d]\right) = \mathbb{P}([c \leqslant Y \leqslant d]) = \mathrm{e}^{-c} - \mathrm{e}^{-d}$$
où $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.
- Attention toutefois : si la transformée affine d'une v.a.r. est bien au programme, la transformée affine d'une v.a.r. suivant une loi exponentielle n'est pas explicitement mentionnée. Il faudrait donc démontrer la propriété précédente ! C'est assez simple :
  × $(aZ)(\Omega) = [0, +\infty[$ car $Z(\Omega) = [0, +\infty[$ et $a > 0$.
  × Ainsi, si $x < 0$, $\mathbb{P}([aZ \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
  Et si $x \geqslant 0$, $\mathbb{P}([aZ \leqslant x]) = \mathbb{P}(\left[Z \leqslant \dfrac{x}{a}\right]) = F_Z\left(\dfrac{x}{a}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-a\ \frac{x}{a}} = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.
  On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. qui suit la loi $\mathcal{E}(1)$.

□

Partie III. Nombre de survivants et estimateur convergent de b

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, soit S_i et D_i les variables aléatoires telles que :

$$S_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \geqslant h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad D_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\overline{S}_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} S_i$ et $\overline{D}_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} D_i$.

10. a) Justifier que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\mathbb{E}(S_i) = G_{a,b}(h)$ et calculer $\mathbb{E}(S_i D_i)$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

- Comme $S_i(\Omega) = \{0, 1\}$, la v.a.r. S_i suit une loi de Bernoulli de paramètre :

$$p = \mathbb{P}([X_i \geqslant h]) = G_{a,b}(h)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } S_i \text{ admet une espérance et : } \mathbb{E}(S_i) = G_{a,b}(h).}$$

- De même, $(S_i D_i)(\Omega) = \{0, 1\}$. Plus précisément :

$$S_i D_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \geqslant h \text{ et } X_i \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc la v.a.r. $S_i\, D_i$ suit une loi de Bernoulli de paramètre :

$$p = \mathbb{P}([X_i \geqslant h] \cap [X_i \leqslant 1]) = \mathbb{P}([h \leqslant X_i \leqslant 1]) = 0$$

En effet, $[h \leqslant X_i \leqslant 1] = \varnothing$ puisque $h \geqslant 2$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{E}(S_i D_i) = 0.}$$

□

b) Pour quels couples $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, les variables aléatoires S_i et D_j sont-elles indépendantes ?

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On raisonne comme dans la question précédente.

- Comme $D_i(\Omega) = \{0, 1\}$, , la v.a.r. S_i suit une loi de Bernoulli de paramètre :

$$p = \mathbb{P}([X_i \leqslant h]) = 1 - G_{a,b}(1)$$

$$\boxed{\text{Ainsi la v.a.r. } D_i \text{ admet une espérance et : } \mathbb{E}(D_i) = 1 - G_{a,b}(1).}$$

De plus, $\mathbb{E}(D_i) \neq 0$ puisque $G_{a,b}(1) \in \,]0, 1[$ (d'après la question ***1.a)***).

- On en déduit que D_i et S_i ne sont pas indépendantes puisque, d'après ce qui précède :

$$\mathbb{E}(S_i D_i) \;=\; 0 \;\neq\; \mathbb{E}(S_i)\, \mathbb{E}(D_i)$$

- Considérons maintenant $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $j \neq i$. Comme X_i et X_j sont indépendantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([S_i = 0] \cap [D_j = 0]) &= \mathbb{P}([X_i < h] \cap [X_j > 1]) \;=\; \mathbb{P}([X_i < h]) \times \mathbb{P}([X_j > 1]) \\ &= \mathbb{P}([S_i = 0]) \times \mathbb{P}([D_j = 0]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([S_i = 0] \cap [D_j = 1]) &= \mathbb{P}([X_i < h] \cap [X_j \leqslant 1]) \;=\; \mathbb{P}([X_i < h]) \times \mathbb{P}([X_j \leqslant 1]) \\ &= \mathbb{P}([S_i = 0]) \times \mathbb{P}([D_j = 1]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([S_i = 1] \cap [D_j = 0]) &= \mathbb{P}([X_i \geqslant h] \cap [X_j > 1]) = \mathbb{P}([X_i \geqslant h]) \times \mathbb{P}([X_j > 1]) \\
&= \mathbb{P}([S_i = 1]) \times \mathbb{P}([D_j = 0]) \\
\mathbb{P}([S_i = 1] \cap [D_j = 1]) &= \mathbb{P}([X_i \geqslant h] \cap [X_j \leqslant 1]) = \mathbb{P}([X_i \geqslant h]) \times \mathbb{P}([X_j \leqslant 1]) \\
&= \mathbb{P}([S_i = 1]) \times \mathbb{P}([D_j = 1])
\end{aligned}$$

On en déduit que S_i et D_j sont indépendantes.

$$\boxed{S_i \text{ et } D_j \text{ sont indépendantes si et seulement si } i \neq j.}$$

Commentaire

- Rappelons : X et Y indépendantes $\Rightarrow$ $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\, \mathbb{E}(Y)$
  On se sert dans la démonstration de la contraposée de cet énoncé à savoir :
  $$\mathbb{E}(XY) \neq \mathbb{E}(X)\, \mathbb{E}(Y) \Rightarrow X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}$$
- Ce résultat `N'EST PAS` une équivalence. Autrement dit :
  $$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\, \mathbb{E}(Y) \quad \cancel{\Rightarrow} \quad X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}$$

□

c) Déduire des questions précédentes l'expression de la covariance $\mathrm{Cov}(\overline{S}_n, \overline{D}_n)$ de $\overline{S}_n$ et $\overline{D}_n$ en fonction de n, $G_{a,b}(h)$ et $G_{a,b}(1)$. Le signe de cette covariance était-il prévisible ?

Démonstration.

- D'après ce qui précède, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(S_i, D_j) &= \mathbb{E}(S_i D_j) - \mathbb{E}(S_i)\, \mathbb{E}(D_j) = 0 && \textit{(car } S_i \textit{ et } D_j \textit{ sont indépendantes)} \\
\mathrm{Cov}(S_i, D_i) &= \mathbb{E}(S_i D_i) - \mathbb{E}(S_i)\, \mathbb{E}(D_i) \\
&= 0 - G_{a,b}(h)\, (1 - G_{a,b}(1)) \\
&= -G_{a,b}(h)\, (1 - G_{a,b}(1))
\end{aligned}$$

- On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\left(\overline{S_n}, \overline{D_n}\right) &= \mathrm{Cov}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_i, \overline{D_n}\right) && \textit{(par définition de } \overline{S_n}\textit{)} \\
&= \frac{1}{n} \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} S_i, \overline{D_n}\right) && \textit{(par linéarité à gauche)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}\left(S_i, \overline{D_n}\right) && \textit{(par linéarité à gauche)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}\left(S_i, \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} D_j\right) && \textit{(par définition de } \overline{D_n}\textit{)} \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(S_i, D_j) && \textit{(par linéarité à droite)}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\text{Cov}\left(\overline{S_n}, \overline{D_n}\right) &= \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \text{Cov}(S_i, D_j) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i=j}} \text{Cov}(S_i, D_j) + \cancel{\frac{1}{n^2} \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} \text{Cov}(S_i, D_j)} \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \text{Cov}(S_i, D_i) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \left(-G_{a,b}(h)\ (1 - G_{a,b}(1))\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\, n\, \left(-G_{a,b}(h)\ (1 - G_{a,b}(1))\right) \ = \ -\frac{G_{a,b}(h)\ (1 - G_{a,b}(1))}{n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Cov}\left(\overline{S_n}, \overline{D_n}\right) = -\frac{G_{a,b}(h)\ (1 - G_{a,b}(1))}{n}}$$

- Comme $G_{a,b}(h) > 0$ et $1 - G_{a,b}(1) > 0$, $\text{Cov}(\overline{S_n}, \overline{D_n}) < 0$.
  Revenons à la définition de S_i et D_i pour comprendre ce signe.
  × $S_i = 1$ (0 sinon) si le $i^{\text{ème}}$ individu de la cohorte est encore en vie après h années,
  × $D_i = 1$ (0 sinon) si le $i^{\text{ème}}$ individu de la cohorte est mort au cours de la première année.
  Ainsi, $\overline{S_n}$ représente la proportion d'individus encore en vie après h années et $\overline{D_n}$ représente la proportion d'individus morts au cours de la première année.

Lorsqu'une de ces deux proportions augmente, l'autre à tendance à diminuer. Le signe négatif de la quantité était donc prévisible.

□

11. a) Montrer que $\overline{S}_n$ est un estimateur sans biais et convergent du paramètre $G_{a,b}(h)$.

Démonstration.

- La v.a.r. $\overline{S_n}$ admet une espérance en tant que combinaison linéaire des *v.a.r.* $S_1, \ldots, S_n$ qui admettent toutes une espérance. De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\overline{S_n}) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_i\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(S_i) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} G_{a,b}(h) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{10.a)}}\textit{)} \\
&= \frac{1}{n}\, n\, G_{a,b}(h) \ = \ G_{a,b}(h)
\end{aligned}$$

Donc : $b(\overline{S_n}) = \mathbb{E}(\overline{S_n}) - G_{a,b}(h) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \overline{S_n} \text{ est un estimateur sans biais de } G_{a,b}(h).}$$

- La v.a.r. $\overline{S_n}$ admet un moment d'ordre 2 en tant que combinaison linéaire des *v.a.r.* $S_1, \ldots, S_n$ qui sont **indépendantes** (car les v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$ le sont) et admettent toutes un moment d'ordre 2 puisqu'elles sont finies.
Ainsi, $\overline{S_n}$ admet un risque quadratique et d'après la décomposition biais-variance :

$$\begin{aligned}
r(\overline{S_n}) &= \mathbb{V}(\overline{S_n}) + \left(\cancel{b(\overline{S_n})}\right)^2 \\
&= \mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\,\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} S_i\right) && \textit{(par propriété de la variance)} \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(S_i) && \textit{(par indépendance des v.a.r. } S_1, \ldots, S_n\textit{)} \\
&= \frac{1}{n^2}\, n\, \mathbb{V}(S_1) && \textit{(les v.a.r. } X_i \textit{ étant toutes de même loi, il en est de même des v.a.r. } S_i\textit{)} \\
&= \frac{1}{n}\,\mathbb{V}(S_1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 && \textit{(car } \mathbb{V}(S_1) \textit{ est une constante)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{S_n} \text{ est un estimateur convergent de } G_{a,b}(h).}$$

□

b) De quel paramètre, $\overline{D}_n$ est-il un estimateur sans biais et convergent ?

Démonstration.

- Montrons que $\overline{D_n}$ est un estimateur sans biais de $1 - G_{a,b}(1)$.
La v.a.r. $\overline{D_n}$ admet une espérance en tant que combinaison linéaire des *v.a.r.* $D_1, \ldots, D_n$ qui admettent toutes une espérance. De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\overline{D_n}) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(D_i) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (1 - G_{a,b}(1)) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{10.b)}}\textit{)} \\
&= \frac{1}{n}\, n\, (1 - G_{a,b}(1)) \;=\; 1 - G_{a,b}(1)
\end{aligned}$$

Donc : $b(\overline{D_n}) = \mathbb{E}(\overline{D_n}) - \Big(1 - G_{a,b}(1)\Big) = 0$.

$$\boxed{\overline{D_n} \text{ est un estimateur sans biais de } 1 - G_{a,b}(1).}$$

- Montrons que $\overline{D_n}$ est un estimateur convergent de $1 - G_{a,b}(1)$.
La v.a.r. $\overline{D_n}$ admet un moment d'ordre 2 comme combinaison linéaire des v.a.r. $D_1, \ldots, D_n$ qui sont **indépendantes** (car les v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$ le sont) et admettent toutes un moment d'ordre 2 puisqu'elles sont finies.
Ainsi, $\overline{D_n}$ admet un risque quadratique et d'après la décomposition biais-variance :

$$\begin{aligned}
r(\overline{D_n}) &= \mathbb{V}(\overline{D_n}) + \left(\cancel{b(\overline{D_n})}\right)^2 = \mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\,\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} D_i\right) && \textit{(par propriété de la variance)} \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(D_i) && \textit{(par indépendance des v.a.r. } D_1, \ldots, D_n\textit{)} \\
&= \frac{1}{n^2}\, n\, \mathbb{V}(D_1) && \textit{(les v.a.r. } X_i \textit{ étant toutes de même loi, il en est de même des v.a.r. } D_i\textit{)} \\
&= \frac{1}{n}\,\mathbb{V}(D_1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 && \textit{(car } \mathbb{V}(D_1) \textit{ est une constante)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{D_n} \text{ est un estimateur convergent de } 1 - G_{a,b}(1).}$$

Commentaire

Le caractère « convergent » est une qualité recherchée pour un estimateur. Il permet notamment de classer entre eux les estimateurs d'un même paramètre.
Considérons par exemple un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de loi $\mathcal{B}(\theta)$, où $\theta \in]0,1[$ est inconnu, et les estimateurs $T_n = X_n$ et $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
On cherche en fait à savoir si on obtient une estimation plus précise de θ en augmentant la taille de notre échantillon. C'est ce qu'indique le caractère convergent.

- Pour T_n, on sait : $T_n(\Omega) = X_n(\Omega) = \{0, 1\}$. Donc $|T_n - \theta|(\Omega) = \{\theta, 1-\theta\}$. Donc

$$\mathbb{P}(|T_n - \theta| \geqslant \min(\theta, 1-\theta)) = 1$$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([|T_n - \theta| \geqslant \min(\theta, 1-\theta)]) \neq 0$.
Donc T_n n'est pas un estimateur convergent de θ.

- Pour $\overline{X_n}$, comme cet estimateur est sans biais (se démontre grâce à la linéarité de l'espérance), on obtient :

$$\begin{aligned}
r_\theta(\overline{X_n}) = \mathbb{V}(\overline{X_n}) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i) && \textit{(par indépendance de } X_1, \ldots, X_n\textit{)} \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(\theta(1-\theta)) \\
&= \frac{\theta(1-\theta)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Donc $\overline{X_n}$ est un estimateur convergent de θ.

L'estimation de θ donnée par $\overline{X_n}$ va donc être de plus en plus précise, contrairement à celle de T_n, qui n'est pas un estimateur convergent.
Dans cet exemple, le meilleur estimateur est donc $\overline{X_n}$.

□

Commentaire

On rappelle qu'il existe deux manières de montrer qu'un estimateur T_n est convergent pour un paramètre θ.

1) La définition : T_n est un estimateur convergent de θ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|T_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

2) L'utilisation du risque quadratique :

$$\lim_{n\to+\infty} r_\theta(T_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_n \text{ est un estimateur convergent de } \theta.$$

C'est la méthode employée pour la question ***11.***.
Cette méthode est à privilégier lorsque l'estimateur T_n est sans biais.

12. On pose : $z(a, b) = \ln(G_{a,b}(1))$ et $r(a, b) = \ln(G_{a,b}(h))$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $Z_n = \ln\left(1 - \overline{D}_n + \dfrac{1}{n}\right)$ et $R_n = \ln\left(\overline{S}_n + \dfrac{1}{n}\right)$.

On admet que Z_n et R_n sont des estimateurs convergents de $z(a, b)$ et $r(a, b)$ respectivement.

a) Soit ε, λ et μ des réels strictement positifs.

(i) Justifier l'inclusion suivante :

$$[|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a, b) - \mu r(a, b))| \geqslant \varepsilon] \subset [\lambda|Z_n - z(a, b)| + \mu|R_n - r(a, b)| \geqslant \varepsilon]\,.$$

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$.
Supposons : $\omega \in [|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda\, z(a, b) - \mu\, r(a, b))| \geqslant \varepsilon]$.
Autrement dit : $|(\lambda Z_n(\omega) - \mu R_n(\omega)) - (\lambda\, z(a, b) - \mu\, r(a, b))| \geqslant \varepsilon$.
Or :

$$\begin{aligned}
& |\ (\lambda Z_n(\omega) - \mu R_n(\omega)) \ - \ (\lambda\, z(a, b) - \mu\, r(a, b))\ | \\
= \ & |\ \lambda Z_n(\omega) - \lambda\, z(a, b) - \mu R_n(\omega) + \mu\, r(a, b))\ | \\
= \ & |\ \lambda(Z_n(\omega) - z(a, b)) \ - \ \mu(R_n(\omega) - r(a, b))\ | \\
\leqslant \ & |\ \lambda(Z_n(\omega) - z(a, b))\ | \ + \ |\ \mu(R_n(\omega) - r(a, b))\ | \qquad \textit{(par inégalité triangulaire)} \\
= \ & \lambda\,|\ (Z_n(\omega) - z(a, b))\ | \ + \ \mu\,|\ (R_n(\omega) - r(a, b))\ | \qquad \textit{(car } \lambda > 0 \textit{ et } \mu > 0\textit{)}
\end{aligned}$$

Donc : $\lambda\,|\ (Z_n(\omega) - z(a, b))\ | \ + \ \mu\,|\ (R_n(\omega) - r(a, b))\ | \geqslant \varepsilon$.
Autrement dit : $\omega \in [\lambda|Z_n - z(a, b)| + \mu|R_n - r(a, b)| \geqslant \varepsilon]$.

D'où : $[|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a, b) - \mu r(a, b))| \geqslant \varepsilon] \subset [\lambda|Z_n - z(a, b)| + \mu|R_n - r(a, b)| \geqslant \varepsilon]$.

Commentaire

- Par définition, un événement est un ensemble. Démontrer l'inclusion de deux ensembles c'est démontrer que tout élément du premier ensemble est dans le second.
- En terme d'événement, cela signifie que si le premier événement est réalisé (il existe ω réalisant cet événement *i.e.* il existe ω appartenant à cet événement) alors le second événement est réalisé (l'élément ω précédent est aussi élément de cet événement). □

(ii) En déduire l'inégalité suivante :

$$\mathbb{P}([|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a,b) - \mu r(a,b))\,| \geqslant \varepsilon]) \leqslant \mathbb{P}\left(\left[|Z_n - z(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\lambda}\right]\right) + \mathbb{P}\left(\left[|R_n - r(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\mu}\right]\right).$$

Démonstration.

- D'après la question précédente, on a déjà :

$$\mathbb{P}([|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a,b) - \mu r(a,b))| \geqslant \varepsilon]) \leqslant \mathbb{P}([\lambda|Z_n - z(a,b)| + \mu|R_n - r(a,b)| \geqslant \varepsilon]) \quad (\star)$$

- On note :

$$\begin{aligned} A &= [\lambda|Z_n - z(a,b)| + \mu|R_n - r(a,b)| \geqslant \varepsilon] \\ B &= \left[\lambda|Z_n - z(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right] \\ C &= \left[\mu|R_n - r(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right] \end{aligned}$$

Si on parvient à démontrer : $A \subset B \cup C$, alors par croissance de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B \cup C)$$

Et comme :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B \cup C) &= \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ &\leqslant \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \end{aligned}$$

En utilisant la propriété $(\star)$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a,b) - \mu r(a,b))| \geqslant \varepsilon]) &\leqslant \mathbb{P}(A) && \textit{(d'après } (\star)\textit{)} \\ &\leqslant \mathbb{P}(B \cup C) \\ &\leqslant \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure la question.

- Il reste alors à montrer : $A \subset B \cup C$. Autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \omega \in A \Rightarrow \omega \in B \cup C$$

ce qui équivaut par contraposée à :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \texttt{NON}(\omega \in B \cup C) \Rightarrow \texttt{NON}(\omega \in A)$$

Soit $\omega \in \Omega$. Supposons donc : $\texttt{NON}(\omega \in B \cup C)$.
Ainsi : $\omega \in \overline{B \cup C} = \overline{B} \cap \overline{C}$, ou encore :

$$\lambda|Z_n(\omega) - z(a,b)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \mu|R_n(\omega) - r(a,b)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Alors, en sommant membre à membre :

$$\lambda|Z_n(\omega) - z(a,b)| + \mu|R_n(\omega) - r(a,b)| < \varepsilon$$

D'où :

$$\omega \in [\lambda|Z_n(\omega) - z(a,b)| + \mu|R_n(\omega) - r(a,b)| < \varepsilon] = \overline{A}$$

De plus : $\omega \in \overline{A} \Leftrightarrow \texttt{NON}(\omega \in A)$.
On a donc bien démontré : $A \subset B \cup C$.

$$\boxed{\mathbb{P}([|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a,b) - \mu r(a,b))\,| \geqslant \varepsilon]) \leqslant \mathbb{P}\left(\left[|Z_n - z(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\lambda}\right]\right) + \mathbb{P}\left(\left[|R_n - r(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\mu}\right]\right).}$$

Commentaire

On utilise dans cette question la formule du crible : pour tout $(A, B) \in \mathscr{A}$,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

On peut distinguer 3 corollaires usuels de cette formule.

1) En toute généralité :

$$\mathbb{P}(A \cup B) \leqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B),$$

car une probabilité est toujours positive.
C'est le corollaire utilisé dans cette question.
On remarquera bien que celui-ci est valable pour tout type d'événements A et B.

2) Si A et B sont incompatibles :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

En effet, si A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \varnothing$ et donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.

3) Si A et B sont indépendants :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

En effet, si A et B sont indépendants, alors : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.

$\square$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $B_n = \dfrac{2}{h-1} Z_n - \dfrac{2}{h(h-1)} R_n$.
Montrer que B_n est un estimateur convergent du paramètre b.

Démonstration.
On pose $\lambda = \dfrac{2}{h-1}$ et $\mu = \dfrac{2}{h(h-1)}$.
On remarque que $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, car $h \geqslant 2$, et $B_n = \lambda Z_n - \mu R_n$.
D'après la question précédente et puisqu'une probabilité est toujours positive, on obtient :

$$0 \leqslant \mathbb{P}([|B_n - (\lambda z(a,b) - \mu r(a,b))\,| \geqslant \varepsilon]) \leqslant \mathbb{P}\left(\left[|Z_n - z(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\lambda}\right]\right) + \mathbb{P}\left(\left[|R_n - r(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\mu}\right]\right)$$

Or :

- par hypothèse, Z_n est un estimateur convergent de $z(a,b)$.
  D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[|Z_n - z(a,b)| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2\lambda}\right]\right) = 0$.
- de plus, R_n est un estimateur convergent de $r(a,b)$.
  D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[|R_n - r(a,b)| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2\mu}\right]\right) = 0$.

D'après le théorème d'encadrement, on a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}([|B_n - (\lambda z(a,b) - \mu r(a,b))\,| \geqslant \varepsilon]) = 0$$

c'est-à-dire que B_n est un estimateur convergent de $\lambda z(a,b) - \mu r(a,b)$.

Or :

$$\begin{aligned}
\lambda z(a,b) - \mu r(a,b) &= \frac{2}{h-1}\ln\left(G_{a,b}(1)\right) - \frac{2}{h(h-1)}\ln\left(G_{a,b}(h)\right)\\
&= \frac{2}{h-1}\left[\ln\left(\exp\left(-a-\frac{b}{2}\right)\right) - \frac{1}{h}\ln\left(\exp\left(-ah-\frac{b}{2}h^2\right)\right)\right]\\
&= \frac{2}{h-1}\left[\left(-a-\frac{b}{2}\right) - \frac{1}{h}\left(-ah-\frac{b}{2}h^2\right)\right]\\
&= \frac{2}{h-1}\left[-\cancel{a}-\frac{b}{2}+\cancel{a}+\frac{b}{2}h\right]\\
&= \frac{\cancel{2}}{\cancel{h-1}}\left[\frac{b}{\cancel{2}}\cancel{(h-1)}\right]\\
&= b
\end{aligned}$$

$$\boxed{B_n \text{ est un estimateur convergent de } b.}$$

Commentaire

On utilise ici la définition d'un estimateur convergent et non la propriété nécessitant le risque quadratique. □

Session 2018

ECRICOME 2018 : le sujet

Exercice I

Partie I

1. Soit A la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^2 - 7A$.

b) En déduire que les seuls réels susceptibles d'être valeurs propres de A sont les réels 3 et 4.

c) Trouver alors toutes les valeurs propres de A, et pour chacune d'entre elles, donner une base du sous-espace propre associé.

d) La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

2. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice : $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le noyau de f. En déduire une valeur propre de f et l'espace propre associé.

b) Déterminer le rang de la matrice $B - 2I_3$.

c) Calculer $f(e_1 - e_2 - e_3)$.

d) Déduire des questions précédentes que l'endomorphisme f est diagonalisable.

3. Trouver une matrice P inversible vérifiant toutes les conditions ci-dessous :

- ⋆ la matrice $D_2 = P^{-1}\ B\ P$ est égale à $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
- ⋆ les coefficients situés sur la première ligne de P sont 1, 1 et -1 (de gauche à droite),
- ⋆ la matrice $D_1 = P^{-1}\ A\ P$ est également diagonale.

Partie II

On pose $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n : $X_{n+2} = \dfrac{1}{6}\ A\ X_{n+1} + \dfrac{1}{6}\ B\ X_n$.

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite matricielle définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = P^{-1}X_n$.

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+2} = \dfrac{1}{6}\ D_1\ Y_{n+1} + \dfrac{1}{6}\ D_2\ Y_n$.

2. Pour tout entier naturel n, on note $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Déduire de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+2} & = \dfrac{1}{2}\ a_{n+1} + \dfrac{1}{2}\ a_n \\[2ex] b_{n+2} & = \dfrac{1}{2}\ b_{n+1} \\[2ex] c_{n+2} & = \dfrac{2}{3}\ c_{n+1} + \dfrac{1}{3}\ c_n \end{cases}$$

3. Démontrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, puis calculer les matrices Y_0 et Y_1.

4. Pour tout entier naturel n, calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

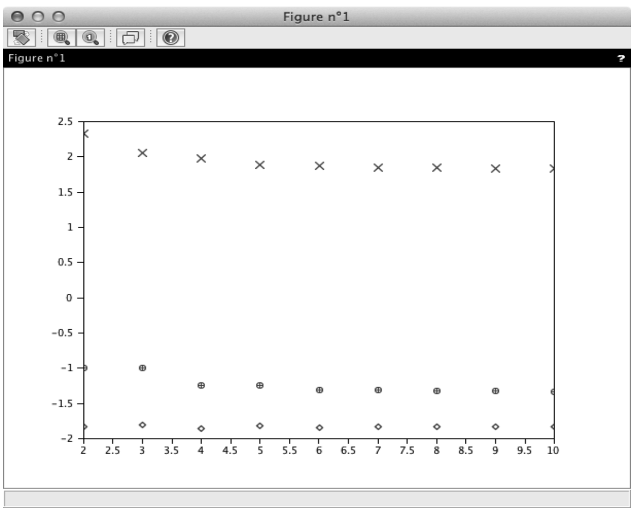
5. En déduire l'expression de X_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
On notera $X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, et on vérifiera que :

$$\beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}$$

6. a) Compléter la fonction ci-dessous qui prend en argument un entier n supérieur ou égal à 2 et qui renvoie la matrice X_n :

```
function res = X(n)
    Xold = [3; 0; -1]
    Xnew = [3; 0; -2]
    A = [2,1,-2; 0,3,0; 1,-1,5]
    B = [1,-1,-1; -3,3,-3; -1,1,1]
    for i = 2:n
        Aux = ..........
        Xold = .........
        Xnew = .........
    end
    res = .........
endfunction
```

b) La fonction précédente a été utilisée dans un script permettant d'obtenir graphiquement (voir figure 1) les valeurs de α_n, β_n et γ_n en fonction de n.
Associer chacune des trois représentations graphiques à chacune des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en justifiant votre réponse.



Exercice 2

Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations.

c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = f(n)$.

d) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

e) Écrire une fonction d'en-tête : `function y = u(n)` qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n.

2. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

b) Montrer que pour tout réel x positif : $\ln(1+x) \leqslant x$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

c) Donner le développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0. En déduire que :

$$v_{n+1} - v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

d) Déterminer la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. On note $\gamma = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.

e) Pour $n \geqslant 2$, simplifier la somme partielle : $\sum\limits_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n \geqslant 2}$ converge vers γ.

3. a) Déterminer $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$.

b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|u_n - \gamma\right| \leqslant \frac{1}{n}$$

c) On rappelle que l'instruction `floor(x)` renvoie la partie entière d'un réel x et on suppose que la fonction `u` de la question ***1.e)*** a été correctement programmée. Expliquer l'intérêt et le fonctionnement du script ci-dessous :

```
eps = input('Entrer un réel strictement positif : ')
n = floor(1/eps) + 1
disp(u(n))
```

Partie II : Étude d'une série

Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \dfrac{1}{n(2n-1)}$.

1. Démontrer que la série de terme général a_n converge.

2. ***a)*** Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k-1} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k}$.

b) Déterminer deux réels α et β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{2n-1}$.

c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 2 \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k}$.

3. ***a)*** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$$

où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie dans la partie I.

b) Calculer alors $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$.

4. ***a)*** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

b) Retrouver alors le résultat de la question ***3.b)***.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.
Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.
Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu.
En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à p ($p \in]0,1[$), et celle d'obtenir Face est de $1-p$.
On notera X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Enfin, on notera A l'événement : « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

Partie I

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

1. Reconnaître la loi de X et vérifier que : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{13}{27}$.

2. Montrer que : $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G.

3. Calculer l'espérance de G. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est entier naturel non nul et $p \in]0,1[$.
Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant « À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.
Soit Y la variable aléatoire définie par : $Y = (-1)^X$.
Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

1. ***a)*** On note $Z = \dfrac{Y+1}{2}$.

Déterminer $Y(\Omega)$, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

b) Démontrer que : $\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{P}(A) - 1$.

2. ***a)*** Donner la loi de X.

b) En déduire que l'on a également :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

puis que : $\mathbb{E}(Y) = (1-2p)^n$.

3. Exprimer alors la valeur de $\mathbb{P}(A)$ en fonction de n et p.

4. Démontrer que :

$$\mathbb{P}(A) \geqslant \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \left[p \leqslant \frac{1}{2} \text{ OU « } n \text{ est pair »}\right]$$

Partie III

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est à dire en faisant en sorte que $\mathbb{P}(A) \geqslant \frac{1}{2}$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est à dire que $\mathbb{E}(G) \leqslant 0$).

1. Exprimer G en fonction de X et Y. En déduire que : $\mathbb{E}(G) = 10 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, k \, \mathbb{P}([X=k])$.

2. Démontrer que : $\forall k \in [\![1,n]\!],\ k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

3. Montrer que : $\mathbb{E}(G) = -10\, np\, (1-2p)^{n-1}$.

4. Démontrer alors que :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A) \geqslant \dfrac{1}{2} \\ \mathbb{E}(G) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow\; p \leqslant \frac{1}{2}$$

5. ***a)*** Étudier la fonction f définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par : $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right],\ f(x) = x\,(1-2x)^{n-1}$.

b) Pour une valeur de n fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce (c'est à dire quelle valeur doit-il donner à $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$) pour optimiser la rentabilité de son activité ?

Partie IV

Le forain décide de fixer $n = 2$ et $p = \dfrac{1}{4}$. En période estivale, il pense pouvoir compter sur la participation de 200 clients dans le journée. Avant de se décider à installer son stand, il voudrait être certain, avec un risque d'erreur inférieur à 10%, qu'il gagnera plus de 100 euros dans la journée.
Pour tout entier i compris ente 1 et 200, on note alors G_i le gain algébrique du $i^{\text{ème}}$ joueur.
On note aussi J la variable aléatoire égale au gain du forain sur toute la journée.

1. Pour tout entier $i \in [\![1, 200]\!]$, donner la loi de G_i et calculer son espérance et sa variance.

2. Exprimer la variable aléatoire J en fonction des variables aléatoires G_i.
Démontrer alors que $\mathbb{E}(J) = 500$ et $\mathbb{V}(J) = 11250$.

3. Justifier que : $\mathbb{P}\big(\,[J \leqslant 100]\,\big) \leqslant \mathbb{P}\big(\,[|J - 500| \geqslant 400]\,\big)$.

4. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, puis montrer que : $\mathbb{P}\left([J \leqslant 100]\right) \leqslant \dfrac{9}{128}$.

5. Compte tenu de ses exigences de rentabilité, le forain peut-il installer son stand ?

ECRICOME 2018 : le corrigé

Exercice I

Partie I

1. Soit A la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^2 - 7A$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -14 \\ 0 & 9 & 0 \\ 7 & -7 & 23 \end{pmatrix}$.
- Ainsi : $A^2 - 7A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -14 \\ 0 & 9 & 0 \\ 7 & -7 & 23 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & 7 & -14 \\ 0 & 21 & 0 \\ 7 & -7 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = -12I_3$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } A^2 - 7A = -12I_3.}$$

□

b) En déduire que les seuls réels susceptibles d'être valeurs propres de A sont les réels 3 et 4.

Démonstration.
D'après la question précédente, le polynôme $P(X) = X^2 - 7X + 12 = (X-3)(X-4)$ est un polynôme annulateur de la matrice A.
Or, le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur de A.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathrm{Sp}(A) \subset \{3,4\}. \text{ Les seuls réels susceptibles d'être valeurs propres de } A \text{ sont 3 et 4.}}$$

Commentaire

- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul P.
On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus) n.
- Si P est un polynôme annulateur de A alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme αP est toujours un polynôme annulateur puisque :

$$(\alpha P)(A) = \alpha P(A) = 0$$

Cela suffit à démontrer que A possède une infinité de polynômes annulateurs.
On peut en obtenir d'autres. Par exemple $Q(X) = (X-5)\ P(X)$ est un polynôme annulateur de A puisque :

$$Q(A) = (A - 5\,I)\ P(A) = 0$$

Il faut donc parler `D'UN` polynôme annulateur d'une matrice.
- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de A. Si c'était le cas, A aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus 3 !). Par exemple, comme $Q(X) = (X-5)\ P(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.

□

c) Trouver alors toutes les valeurs propres de A, et pour chacune d'entre elles, donner une base du sous-espace propre associé.

Démonstration.

- Déterminons $E_3(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (A - 3 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} X \in E_3(A) & \Longleftrightarrow & (A - 3 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

  Finalement, on obtient l'expression de $E_3(A)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl} E_3(A) & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = y - 2z \} \\ & = & \{ \begin{pmatrix} y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \} \\ & = & \{ y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \} \ = \ \mathrm{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

  Comme $E_3(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$, 3 est bien valeur propre de A, d'espace propre associé $E_3(A)$.

$$\boxed{E_3(A) \ = \ \mathrm{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

Commentaire

Il est important de lire l'énoncé de ce type de questions en entier pour choisir une méthode de résolution. En effet :

× si l'énoncé demande simplement de montrer qu'un réel λ donné est valeur propre d'une matrice A carrée d'ordre 3, alors on vérifie $\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) < 3$ pour ce réel λ particulier.
(si A est une matrice carrée d'ordre 2, on vérifie $\det(A - \lambda I_2) = 0_{\mathbb{R}}$*)*

× si l'énoncé demande de montrer qu'un réel λ est valeur propre d'une matrice A carrée d'ordre 3 **et** de déterminer le sous-espace propre associé, alors on détermine directement $E_\lambda(A)$ et comme $E_\lambda(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$, cela démontre que $E_\lambda(A)$ est bien le sous-espace propre associé à la valeur propre λ.

- Déterminons $E_4(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (A - 4 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_4(A) & \Longleftrightarrow & (A - 4 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & - & y & & 0 & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 + L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & - & y & & & = & 0 \\ & - & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -2x & + & y & = & 2z \\ & - & y & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -2x & & & = & 2z \\ & - & y & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

  Finalement, on obtient l'expression de $E_4(A)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl}
E_4(A) & = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \ \text{ et } \ y = 0\} \\
& = & \{\begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} \ = \ \{z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} \ = \ \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

  Comme $E_4(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$, 4 est bien valeur propre de A, d'espace propre associé $E_4(A)$.

$$\boxed{E_4(A) \ = \ \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

□

d) La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

Démonstration.

- D'après la question précédente, 0 n'est pas valeur propre de A.

$$\boxed{\text{Ainsi, } A \text{ est inversible.}}$$

- Déterminons les dimensions des sous-espaces propres.

  La famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$:

  × engendre $E_3(A)$,

  × est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.

  Ainsi, $\mathcal{F}_1$ est une base de $E_3(A)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim\big(E_3(A)\big) = \text{Card}\big(\mathcal{F}_1\big) = 2.}$$

La famille $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_4(A)$,

× est libre car constituée d'un vecteur non nul.

Ainsi, $\mathcal{F}_2$ est une base de $E_4(A)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim\big(E_4(A)\big) = \operatorname{Card}\big(\mathcal{F}_2\big) = 1.}$$

- La matrice A est un matrice carrée d'ordre 3. Or :

$$\dim\big(E_3(A)\big) + \dim\big(E_4(A)\big) \ = \ 3$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } A \text{ est diagonalisable.}}$$

□

2. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice : $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le noyau de f. En déduire une valeur propre de f et l'espace propre associé.

Démonstration.

- Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et notons $U = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in \operatorname{Ker}(f) & \iff & f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \iff & BU = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & z & = & 0 \\ -3x & + & 3y & - & 3z & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + 3\,L_1}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & z & = & 0 \\ & & & - & 6z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & z & = & y \\ & & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y \\ z & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

Finalement, on obtient l'expression de $\operatorname{Ker}(f)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl}
\operatorname{Ker}(f) & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \ \text{ et } \ z = 0\} \\
& = & \{(y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} \ = \ \{y \cdot (1, 1, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} \ = \ \operatorname{Vect}((1, 1, 0))
\end{array}$$

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}((1, 1, 0))}$$

- Ainsi : $E_0(f) = \text{Ker}(f) = \text{Vect}\left((1,1,0)\right) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que 0 est valeur propre de } f\text{, d'espace propre associé } E_0(f) = \text{Vect}\left((1,1,0)\right).}$$

□

b) Déterminer le rang de la matrice $B - 2I_3$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\text{rg}(B-2I_3) &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \dim\left(\text{ Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\ \right) \\
&= \dim\left(\text{ Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\ \right) \ = \ 2
\end{aligned}$$

En effet, la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.

$$\boxed{\text{rg}(B-2I_3) = 2}$$

□

c) Calculer $f(e_1 - e_2 - e_3)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_1-e_2-e_3)\big) &= \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1-e_2-e_3) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } f(e_1-e_2-e_3) = (3,-3,-3).}$$

□

d) Déduire des questions précédentes que l'endomorphisme f est diagonalisable.

Démonstration.

- D'après la question ***2.b)*** : $\text{rg}(B-2I_3) = 2 < 3$.
  On en déduit que la matrice $B - 2I_3$ n'est pas inversible.
  Ainsi, 2 est valeur propre de $B = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

$$\boxed{\text{Le réel 2 est valeur propre de } f.}$$

- D'après la question ***2.c)*** :

$$f(e_1-e_2-e_3) = (3,-3,-3) = 3\cdot(1,-1,-1) = 3\cdot(e_1-e_2-e_3)$$

$$\boxed{\text{Comme } e_1-e_2-e_3 \neq 0_{\mathbb{R}^3}\text{, le réel 3 est valeur propre de } f.}$$

- Enfin, on a démontré en ***2.a)*** que 0 est valeur propre de f.
  L'application f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui possède 3 valeurs propres distinctes.

$$\boxed{\text{On en conclut que } f \text{ est diagonalisable.}}$$

Commentaire

- On peut aussi démontrer que 2 est valeur propre de f à l'aide du théorème du rang. Détaillons cette rédaction.
- Comme $B - 2I_3 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f - 2\mathrm{id})$, on en déduit : $\mathrm{rg}(f - 2\mathrm{id}) = 2$.
  Ainsi, d'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim(\mathbb{R}^3) & = & \dim\big(\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{id})\big) & + & \dim\big(\mathrm{Im}(f-2\mathrm{id})\big) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 3 & & & & 2 \end{array}$$

On en déduit : $\dim\big(\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id})\big) = 1$.
Comme $E_2(f) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, 2 est valeur propre de f.

□

3. Trouver une matrice P inversible vérifiant toutes les conditions ci-dessous :

- ⋆ la matrice $D_2 = P^{-1}\ B\ P$ est égale à $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
- ⋆ les coefficients situés sur la première ligne de P sont 1, 1 et -1 (de gauche à droite),
- ⋆ la matrice $D_1 = P^{-1}\ A\ P$ est également diagonale.

Démonstration.

- D'après la question précédente, l'endomorphisme f est diagonalisable.
  Il en est donc de même de la matrice B.
  Il existe donc une matrice inversible P et une matrice D_2 diagonale telles que :

$$B = PD_2P^{-1}$$

  Plus précisément, la matrice P est obtenue par concaténation de bases des sous-espaces propres de B et la matrice D_2 est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de B (dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres).

- Déterminons alors les sous-espaces propres de B.
  - On a vu en question ***2.c)*** que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de B associé à la valeur propre 3.

    On en déduit :

$$E_3(B) \supset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

    Or, comme B est diagonalisable : $\dim\big(E_3(B)\big) + \dim\big(E_0(B)\big) + \dim\big(E_4(B)\big) = 3$.
    Comme tous ces espaces propres sont de dimension 1 au minimum, on obtient :

$$\dim\big(E_3(B)\big) = \dim\big(E_0(B)\big) = \dim\big(E_4(B)\big) = 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } E_3(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).}$$

– D'après la question ***2.a)*** : $E_0(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

– Il reste alors à déterminer $E_2(B)) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (B - 2 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_2(B) & \iff & (B - 2 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & \begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -3 & 1 & -3\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & y & - & z & = & 0 \\ -3x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ -x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\iff}} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & y & - & z & = & 0 \\ & & 4y & & & = & 0 \\ & & 2y & & & = & 0 \end{array}\right. \\
& \iff & \left\{\begin{array}{rcrcl} -x & - & y & = & z \\ & & y & = & 0 \end{array}\right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcl} -x & & & = & z \\ & & y & = & 0 \end{array}\right.
\end{array}$$

Finalement, on obtient l'expression de $E_2(B)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl}
E_2(B) & = & \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \ \text{ et } \ y = 0\right\} \\
& = & E_4(A) \ = \ \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \qquad \textit{(en reconnaissant l'expression obtenue en } \textbf{\textit{1.c)}}\textit{)}
\end{array}$$

- On obtient donc :

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_2 = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

- Remarquons alors :

– $A \times \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\\-3\end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

Ainsi, $\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 3.

– $A \times \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

car, d'après la question ***1.c)***, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 3.

La famille $\mathcal{F}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre (car constituée de deux vecteurs non colinéaires) de $E_3(A)$.
Or : Card $(\mathcal{F}_3) = 2 = \dim \big(E_3(A)\big)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathcal{F}_3 \text{ est une base de } E_3(A).}$$

– $A \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 4.

La famille $\mathcal{F}_4 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre (car constituée d'un vecteur non nul) de $E_3(A)$.
Or : Card $(\mathcal{F}_4) = 1 = \dim \big(E_4(A)\big)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathcal{F}_4 \text{ est une base de } E_4(A).}$$

- La matrice A étant diagonalisable, on sait qu'il existe une matrice Q inversible et une matrice D_1 diagonale telles que :
$$A = QD_1Q^{-1}$$
Plus précisément, la matrice Q est obtenue par concaténation de bases des sous-espaces propres de A et la matrice D_1 est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A (dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres). On obtient donc :
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P \quad \text{et} \quad D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{La matrice } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ vérifie les conditions énoncées dans le sujet.}}$$

□

Partie II

On pose $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n : $X_{n+2} = \dfrac{1}{6}\ A\ X_{n+1} + \dfrac{1}{6}\ B\ X_n$.
Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite matricielle définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = P^{-1}X_n$.

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+2} = \dfrac{1}{6}\ D_1\ Y_{n+1} + \dfrac{1}{6}\ D_2\ Y_n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- En multipliant à gauche de part et d'autre de l'égalité de définition de la suite matricielle $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient :
$$\begin{aligned} P^{-1}X_{n+2} &= P^{-1}\left(\frac{1}{6}\ A\ X_{n+1} + \frac{1}{6}\ B\ X_n\right) \\ &= \frac{1}{6}\ P^{-1}A\ X_{n+1} + \frac{1}{6}\ P^{-1}B\ X_n \end{aligned}$$

- Par définition de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $X_n = PY_n$ et $X_{n+1} = PY_{n+1}$. Ainsi :

$$P^{-1}X_{n+2} \;=\; \frac{1}{6}\,P^{-1}AP\;Y_{n+1} + \frac{1}{6}\,P^{-1}BP\;Y_n \;=\; \frac{1}{6}\,D_1\;Y_{n+1} + \frac{1}{6}\,D_2\;Y_n$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\, Y_{n+2} = \frac{1}{6}\,D_1\;Y_{n+1} + \frac{1}{6}\,D_2\;Y_n}$$

□

2. Pour tout entier naturel n, on note $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Déduire de la question précédente que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\;\begin{cases} a_{n+2} &= \dfrac{1}{2}\,a_{n+1} + \dfrac{1}{2}\,a_n \\[2ex] b_{n+2} &= \dfrac{1}{2}\,b_{n+1} \\[2ex] c_{n+2} &= \dfrac{2}{3}\,c_{n+1} + \dfrac{1}{3}\,c_n \end{cases}$$

Démonstration.
Soit $n\in\mathbb{N}$.

- Par calcul :

$$D_1Y_{n+1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\;a_{n+1} \\ 3\;b_{n+1} \\ 4\;c_{n+1} \end{pmatrix} \quad\text{et}\quad D_2Y_n = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\;a_n \\ 0 \\ 2\;c_n \end{pmatrix}$$

- On en déduit, par la question précédente :

$$\begin{array}{ccccccc} Y_{n+2} & = & \dfrac{1}{6}\,D_1Y_{n+1} & + & \dfrac{1}{6}\,D_2Y_n & & \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \\ \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \\ c_{n+2} \end{pmatrix} & = & \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 3\;a_{n+1} \\ 3\;b_{n+1} \\ 4\;c_{n+1} \end{pmatrix} & + & \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 3\;a_n \\ 0 \\ 2\;c_n \end{pmatrix} & = & \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 3\;a_{n+1} + 3\;a_n \\ 3\;b_{n+1} \\ 4\;c_{n+1} + 2\;c_n \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n\in\mathbb{N},\;\; a_{n+2} = \frac{1}{2}\,a_{n+1} + \frac{1}{2}\,a_n, \quad b_{n+2} = \frac{1}{2}\,b_{n+1} \quad\text{et}\quad c_{n+2} = \frac{2}{3}\,c_{n+1} + \frac{1}{3}\,c_n.}$$

□

3. Démontrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, puis calculer les matrices Y_0 et Y_1.

Démonstration.

- On remarque :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la matrice } P \text{ est inversible, d'inverse } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

L'énoncé fournit l'inverse (supposée) de P. Il est donc inutile de calculer cette inverse à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss. Cette rédaction est évidemment acceptée mais pénalisante à terme du fait de la perte de temps qu'elle implique. On détaille ci-dessous cette rédaction qu'il convient de connaître mais qu'il ne faut appliquer que lorsque nécessaire.

On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ \; L_3 \leftarrow 2\, L_3 - L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi, P est inversible.
On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ \; L_1 \leftarrow 2\, L_1 - L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue enfin les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}\, L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}\, L_2 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

- Par définition :

$$Y_0 = P^{-1} X_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_1 = P^{-1} X_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Commentaire

- Par définition, la matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est l'inverse de la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ si :

$$AB = BA = I_n$$

Si c'est le cas, B est notée A^{-1} et on obtient aussi que A est l'inverse de B.

- Dans la démonstration, on utilise le résultat classique suivant :

$$AB = I_n \;\Rightarrow\; A \text{ et } B \text{ sont inverses l'une de l'autre}$$

(la propriété réciproque est évidemment vérifiée)
autrement dit :

$$AB = I_n \;\Rightarrow\; AB = BA = I_n$$

Si $AB = I_n$, on dit que la matrice B est **l'inverse à droite** de la matrice A. Ainsi, l'implication précédente signifie que, dans l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n, si A possède une inverse à droite notée B alors A est inversible d'inverse (tout court) B. Si l'on sait que $AB = I_n$, il est donc inutile de vérifier $BA = I_n$ pour conclure quant à l'inversibilité de A.

- Le résultat suivant est évidemment lui aussi vérifié :

$$BA = I_n \;\Rightarrow\; A \text{ et } B \text{ sont inverses l'une de l'autre}$$

Si B est **l'inverse à gauche** de A alors B est l'inverse de A. □

4. Pour tout entier naturel n, calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Démonstration.

- La suite (a_n) vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = \frac{1}{2}\ a_{n+1} + \frac{1}{2}\ a_n$.
C'est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
  - L'équation caractéristique associée à la suite (a_n) est : $x^2 = \frac{1}{2}\ x + \frac{1}{2}$.
  Notons P le polynôme : $P(X) = X^2 - \frac{1}{2}\ X - \frac{1}{2} = (X-1)(X+\frac{1}{2})$.
  Ce polynôme admet deux racines distinctes : 1 et $-\frac{1}{2}$.
  - On en déduit la formule explicite de (a_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \lambda \times 1^n + \mu \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \lambda + \mu \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

où les valeurs λ et μ sont données par le système :

$$(S)\ \left\{\begin{array}{rcrcl} \lambda & + & \mu & = & 2 \qquad \textit{(valeur de } a_0\textit{)} \\ \lambda & - & \dfrac{1}{2}\,\mu & = & 1 \qquad \textit{(valeur de } a_1\textit{)} \end{array}\right.$$

Résolvons-le.

$$(S) \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff}} \left\{\begin{array}{rcrcl} \lambda & + & \mu & = & 2 \\ & & -\dfrac{3}{2}\,\mu & = & -1 \end{array}\right. \overset{L_1 \leftarrow \frac{3}{2} L_1 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{3}{2}\,\lambda & = & 2 \\ -\dfrac{3}{2}\,\mu & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n.}$$

- La suite (b_n) vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = \frac{1}{2}\ b_n$.
  C'est donc une suite géométrique.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N} : b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\ b_0 = 2\ \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.}$$

- La suite (c_n) vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_{n+2} = \frac{2}{3}\ c_{n+1} + \frac{1}{3}\ c_n$.
  C'est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
  - L'équation caractéristique associée à la suite (c_n) est : $x^2 = \frac{2}{3}\ x + \frac{1}{3}$.
    Notons P le polynôme : $P(X) = X^2 - \frac{2}{3}\ X - \frac{1}{3} = (X-1)(X+\frac{1}{3})$.
    Ce polynôme admet deux racines distinctes : 1 et $-\frac{1}{3}$.
  - On en déduit la formule explicite de (c_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \lambda \times 1^n + \mu \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \lambda + \mu \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

où les valeurs λ et μ sont données par le système :

$$(S)\ \left\{\begin{array}{rcrcrl} \lambda & + & \mu & = & 1 & \quad \textit{(valeur de } c_0\textit{)} \\ \lambda & - & \frac{1}{3}\ \mu & = & -1 & \quad \textit{(valeur de } c_1\textit{)} \end{array}\right.$$

Résolvons-le.

$$(S) \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcr} \lambda & + & \mu & = & 1 \\ & & -\frac{4}{3}\ \mu & = & -2 \end{array}\right. \overset{L_1 \leftarrow \frac{4}{3} L_1 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rrcr} \frac{4}{3}\ \lambda & & = & -\frac{2}{3} \\ & -\frac{4}{3}\ \mu & = & -2 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N} : c_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n.}$$

□

5. En déduire l'expression de X_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
On notera $X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, et on vérifiera que :

$$\beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Par définition :

$$X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix} = PY_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + b_n - c_n \\ -a_n + b_n \\ -a_n + c_n \end{pmatrix}$$

- On calcule alors :

$$\begin{array}{rcl} \alpha_n \ = \ a_n + b_n - c_n & = & \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) \\ & = & \frac{11}{6} + \frac{2}{3}\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{3}{2}\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{array}$$

- Puis :

$$\beta_n \;=\; -a_n + b_n \;=\; -\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\,\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \;=\; \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\,\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned}\gamma_n \;=\; -a_n + c_n \;&=\; -\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\,\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\,\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)\\ &=\; -\frac{11}{6} - \frac{2}{3}\,\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{2}\,\left(-\frac{1}{3}\right)^n\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \in \mathbb{N},\ \beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}.}$$

□

6. a) Compléter la fonction ci-dessous qui prend en argument un entier n supérieur ou égal à 2 et qui renvoie la matrice X_n :

```
1  function res = X(n)
2      Xold = [3; 0; -1]
3      Xnew = [3; 0; -2]
4      A = [2,1,-2; 0,3,0; 1,-1,5]
5      B = [1,-1,-1; -3,3,-3; -1,1,1]
6      for i = 2:n
7          Aux = ..........
8          Xold = .........
9          Xnew = .........
10     end
11     res = .........
12 endfunction
```

Démonstration.
Détaillons les différents éléments présents dans cette fonction.

- En ligne 2 et 3, on définit les variables `Xold` et `Xnew`.
  Ces deux variables sont initialement affectées aux valeurs X_0 et X_1.
- En ligne 4 et 5, on stocke les matrices A et B dans les variables `A` et `B`.
- De la ligne 6 à la ligne 10, on met à jour les variables `Xold` et `Xnew` de sorte à ce qu'elles contiennent les valeurs successives de la suite matricielle (X_n).

```
6      for i = 2:n
7          Aux = Xold
8          Xold = Xnew
9          Xnew = 1/6 ⋆ A ⋆ Xold + 1/6 ⋆ B ⋆ Aux
10     end
```

  Pour ce faire, on a introduit une variable auxiliaire `Aux`.

Détaillons le principe de cette boucle :

× avant le 1er tour de boucle :

`Xold` contient X_0 et `Xnew` contient X_1

lors du 1er tour de boucle (`i` contient 2) :

`Aux = Xold`	(`Aux` contient X_0, dernière valeur de `Xold`)
`Xold = Xnew`	(`Xold` contient X_1, dernière valeur de `Xnew`)
`Xnew = 1/6 ⋆ A ⋆ Xold + 1/6 ⋆ B ⋆ Aux`	(`Xnew` contient X_2, valeur obtenue par la définition $X_2 = \frac{1}{6}\, AX_1 + \frac{1}{6}\, BX_0$)

× avant le 2ème tour de boucle, d'après ce qui précède :

`Xold` contient X_0, `Xold` contient X_1 et `Xnew` contient X_2

lors du 2ème tour de boucle (`i` contient 3) :

`Aux = Xold`	(`Aux` contient X_1, dernière valeur de `Xold`)
`Xold = Xnew`	(`Xold` contient X_2, dernière valeur de `Xnew`)
`Xnew = 1/6 ⋆ A ⋆ Xold + 1/6 ⋆ B ⋆ Aux`	(`Xnew` contient X_3, valeur obtenue par la définition $X_3 = \frac{1}{6}\, AX_2 + \frac{1}{6}\, BX_1$)

× ...

× avant le $(n-1)$ème tour de boucle :

`Xold` contient X_{n-3}, `Xold` contient X_{n-2} et `Xnew` contient X_{n-1}

lors du $(n-1)$ème tour de boucle (`i` contient n) :

`Aux = Xold`	(`Aux` contient X_{n-2}, dernière valeur de `Xold`)
`Xold = Xnew`	(`Xold` contient X_{n-1}, dernière valeur de `Xnew`)
`Xnew = 1/6 ⋆ A ⋆ Xold + 1/6 ⋆ B ⋆ Aux`	(`Xnew` contient X_n, valeur obtenue par la définition $X_n = \frac{1}{6}\, AX_{n-1} + \frac{1}{6}\, BX_{n-2}$)

– Enfin, il n'y a plus qu'à affecter à `res` la valeur X_n.

```
11      res = Xnew
```

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, écrire correctement la fonction **Scilab** démontre la bonne compréhension et permet certainement d'obtenir tous les points alloués.
- On a démontré dans cette question que si, avant le $i^{\text{ème}}$ tour de boucle :

  `Aux` contient X_{i-2}, `Xold` contient X_{i-1} et `Xnew` contient X_i

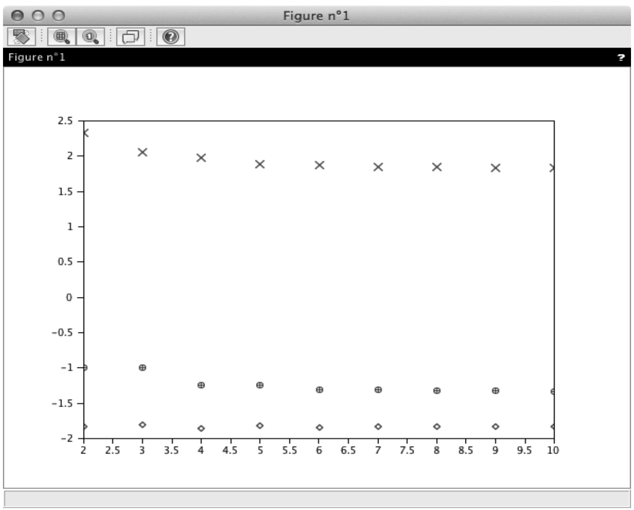
  alors, à l'issue de ce tour de boucle :

  `Aux` contient X_{i-1}, `Xold` contient X_i et `Xnew` contient X_{i+1}

  Cette propriété est ce qu'on appelle un **invariant de boucle**. Elle permet d'assurer la correction de la fonction implémentée et notamment le fait qu'à l'issue du dernier tour de boucle la variable `Xnew` contient X_n.
- Il est à noter que si on teste la fonction avec une valeur de `n` strictement inférieure à 2, alors on n'entre pas dans la boucle (l'instruction `2:n` crée une matrice ligne vide). Dans ce cas, la variable `Xnew` n'est pas mise à jour et la variable `res` contient à la fin du programme X_1, soit la valeur initialement affectée à `Xnew`. Ainsi, la fonction renvoie la bonne valeur aussi lorsque la variable `n` prend la valeur 1.

□

b) La fonction précédente a été utilisée dans un script permettant d'obtenir graphiquement (voir figure 1) les valeurs de α_n, β_n et γ_n en fonction de n.
Associer chacune des trois représentations graphiques à chacune des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en justifiant votre réponse.



Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question ***5*** :

$$\beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{4}{3} \simeq -1,33$$

En effet, comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ et $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n} = 0$.

- On démontre de même, toujours d'après les expressions obtenues en question ***5.*** :

$$\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{11}{6} \simeq 1,8 \quad \text{et} \quad \gamma_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{11}{6} \simeq -1,8$$

- Or, d'après la figure :
  - × la suite repérée par × semble converger vers un réel valant approximativement $1,8$.

    $\boxed{\text{Cette représentation graphique correspond à la suite } (\alpha_n).}$
  - × la suite repérée par ⊕ semble converger vers un réel valant approximativement $-1,3$.

    $\boxed{\text{Cette représentation graphique correspond à la suite } (\beta_n).}$
  - × la suite repérée par ♢ semble converger vers un réel valant approximativement $-1,8$.

    $\boxed{\text{Cette représentation graphique correspond à la suite } (\gamma_n).}$

Commentaire

Il est possible de rédiger autrement.
La représentation graphique commençant à 2, on peut calculer :

$$\alpha_2 = \frac{14}{6}, \quad \beta_2 = -1 \quad \text{et} \quad \gamma_2 = -\frac{11}{6}$$

ce qui permet d'associer chaque représentation graphique à la bonne suite.

□

Exercice 2

Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\frac{1}{x+1} \underset{x\to0}{\longrightarrow} \frac{1}{1} = 1, \quad \ln(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{et} \quad \ln(x+1) \underset{x\to0}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit } \lim_{x\to0} f(x) = -\infty.}$$

- D'autre part :

$$\ln(x) - \ln(x+1) = -\big(\ln(x+1) - \ln(x)\big) = -\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = -\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(1) = 0$$

$$\boxed{\text{Comme de plus } \frac{1}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ on en déduit } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

□

b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.
- Soit $x \in]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{-x + (x+1)^2 - x(x+1)}{x\,(x+1)^2} = \frac{-x + (x^2+2x+1) - x^2 - x}{x\,(x+1)^2} = \frac{1}{x\,(x+1)^2} \end{aligned}$$

Or $x(x+1)^2 > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) > 0.}$$

- On en déduit le tableau de variations de f.

x	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$
Variations de f	‖ $-\infty$	$\nearrow$ 0

□

c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = f(n)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) = f(n) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = f(n)}$$

□

d) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après l'étude en question ***1.b)***, la fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$. On en déduit :

$$\forall x \in \,]0,+\infty[,\, f(x) < 0$$

- En appliquant cette propriété en $x = n$, on obtient, d'après la question précédente :

$$u_{n+1} - u_n = f(n) < 0$$

On en conclut que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est (strictement) décroissante.

□

e) Écrire une fonction d'en-tête : `function y = u(n)` qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n.

Démonstration.

```
1  function y = u(n)
2      S = 0
3      for k = 1:n
4          S = S + 1/k
5      end
6      y = S - log(n)
7  endfunction
```

Détaillons les différents éléments de ce code :

× en ligne 2, on crée la variable S dont le but est de contenir, en fin de programme $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
Cette variable S est donc initialisée à 0.

× de la ligne 3 à la ligne 5, on met à jour la variable S à l'aide d'une boucle.
Pour ce faire, on ajoute au $k^{\text{ème}}$ tour de boucle la quantité $\frac{1}{k}$.
Ainsi, S contient bien $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ en sortie de boucle.

× en ligne 6, on affecte à la variable y la valeur $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

Commentaire

Pour le calcul de la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, on peut aussi tirer profit des fonctionnalités **Scilab** :

```
S = sum(1 ./ 1:n)
```

Pour bien comprendre cette instruction, rappelons que :

× l'instruction `1:n` permet de créer la matrice ligne $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$.

× l'opérateur `./` permet d'effectuer la division terme à terme.
Ainsi, l'instruction `1 ./ 1:n` permet de créer la matrice ligne $\begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$.

× la fonction `sum` permet de sommer tous les coefficients d'une matrice.

On obtient donc bien la somme à calculer par cette méthode.

□

2. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n - \frac{1}{n}\right) \\
&= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
&= \left(\cancel{\frac{1}{n+1}} + \ln(n) - \ln(n+1)\right) + \frac{1}{n} - \cancel{\frac{1}{n+1}} \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.c}}\textit{))} \\
&= \frac{1}{n} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \ = \ \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

□

b) Montrer que pour tout réel x positif : $\ln(1+x) \leqslant x$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Démonstration.

- La fonction $g : x \mapsto \ln(x)$ est concave.
  On en déduit que sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ se situe sous ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 1. Or cette tangente est la droite d'équation :

$$\begin{aligned}
y &= g(1) + g'(1)\ (x-1) \\
&= \ln(1) + \frac{1}{1}\ (x-1) \ = \ x - 1
\end{aligned}$$

  On en déduit donc :
$$\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ \ln(x) \ \leqslant \ x - 1$$
  Soit $t \geqslant 0$. En appliquant la propriété ci-dessus à $x = 1 + t \in\ ]0, +\infty[$, on obtient :
$$\ln(1+t) \leqslant (\cancel{1} + t) - \cancel{1} = t$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall t \geqslant 0,\ \ln(1+t) \leqslant t.}$$

Commentaire

- Notons tout d'abord que la variable t étant sous la portée d'un quantificateur, elle est muette. Ainsi, le résultat démontré est bien celui souhaité.
- Il est possible de procéder différemment.
  On peut par exemple considérer la fonction $g_1 : x \mapsto \ln(1+x)$ et démontrer qu'elle est concave. Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_{g_1}$ est située sous sa tangente au point d'abscisse 0 :
$$\forall x \geqslant 0,\ \ln(1+x) \ \leqslant \ g_1(0) + g_1'(0)\ (x-0) = \ln(1) + x = x$$
- On peut aussi considérer la fonction $g_2 : x \mapsto x - \ln(1+x)$, procéder à son étude et conclure quant à son signe :
$$\forall x \geqslant 0,\ g_2(x) \geqslant 0$$
  ce qui correspond à l'inégalité souhaitée.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant l'inégalité précédente à $t = \frac{1}{n}$, on obtient :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et ainsi} \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geqslant 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$$

□

c) Donner le développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0. En déduire que :

$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

Démonstration.

- La fonction $h : x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ car elle est la composée $h = h_2 \circ h_1$ où :
  - × $h_1 : x \mapsto 1+x$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,+\infty[$ car polynomiale sur cet intervalle.
    - telle que $h_1(]-1,+\infty[) \subset]0,+\infty[$.
  - × $h_2 : x \mapsto \ln(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, } h \text{ admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de tout point de} \\ \text{l'intervalle }]-1,+\infty[\text{ et donc en particulier de 0.}\end{array}}$$

- Ainsi, il existe une fonction ε définie dans un voisinage de 0, telle que, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} h(x) &= h(0) + h'(0)x + \frac{h''(0)}{2}x^2 + x^2\ \varepsilon(x) \\ &= x - \frac{1}{2}\ x^2 + x^2\ \varepsilon(x) \end{aligned}$$

  où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

- Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut appliquer cette égalité à $x = \frac{1}{n}$ pour n dans un voisinage de $+\infty$.
  On obtient :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\ \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\ \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

  avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ par théorème de composition des limites.

  On peut donc écrire :

$$v_n - v_{n+1} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = -\frac{1}{2}\ \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}\ \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et donc } v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.}$$

□

d) Déterminer la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. On note $\gamma = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.

Démonstration.
D'après ce qui précède :

× $v_{n+1} - v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{n^2}$.

× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{2} \dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$.

× La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

Il en est de même de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{n^2}$ (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul).

Ainsi, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} (v_{n+1} - v_n)$ est convergente.

Commentaire

La seule difficulté de cette démonstration réside dans la rédaction du critère des séries à termes positifs (les arguments à utiliser ont tous été démontrés dans les questions précédentes). C'est donc une question d'application directe du cours qu'il convient de savoir traiter.

□

e) Pour $n \geqslant 2$, simplifier la somme partielle : $\sum\limits_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n \geqslant 2}$ converge vers γ.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Par sommation télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) \ = \ v_{(n-1)+1} - v_1 \ = \ v_n - v_1$$

  On en déduit : $v_n = v_1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.

- Or, d'après la question précédente, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} (v_{n+1} - v_n)$ est convergente.
  On déduit de l'écriture précédente de v_n que la suite (v_n) est convergente, de limite :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = v_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) = v_1 + \gamma$$

- Enfin :

$$v_1 = u_1 - \frac{1}{1} = \left(\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} - \cancel{\ln(1)} \right) - 1 = 1 - 1 = 0$$

Ainsi, la suite (v_n) est convergente, de limite $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \gamma$.

□

3. a) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Par définition : $u_n \ = \ v_n + \dfrac{1}{n}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente car elle est la somme de suites convergentes.

$$\boxed{\text{De plus, } \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n + \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \gamma + 0 = \gamma.}$$

Commentaire

- Il n'y a pas forcément dans les sujets une croissance linéaire de la difficulté. Au contraire, chaque nouvelle partie commence généralement par une question plus simple de mise en route. Il n'est donc pas judicieux de laisser de côté certaines parties.
- Cette question ***3.a)*** ne présente pas de difficulté. Comme dans la question ***2.d)***, on est confronté ici à une question bilan qui consiste simplement à rappeler puis utiliser certains résultats précédents. Ces résultats étant fournis par l'énoncé, cette question peut être traitée même si les questions précédentes ne l'ont pas été.

□

b) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$$
puis que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|u_n - \gamma\right| \leqslant \frac{1}{n}$$

Démonstration.

- Dans ce qui précède, on a démontré que :
  × la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante (question ***2.b***).
  × la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers γ.

  Démontrons alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leqslant \gamma$. Pour ce faire, on suppose par l'absurde que ce n'est pas le cas. Autrement dit, on suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $v_{n_0} > \gamma$.

  La suite (v_n) étant croissante : $\forall n \geqslant n_0,\ v_n \geqslant v_{n_0}$.
  Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $\gamma \geqslant v_{n_0}$.
  En combinant avec l'inégalité de l'hypothèse, on a alors :
  $$\gamma \geqslant v_{n_0} > \gamma$$
  Ce qui est absurde !
  $$\boxed{\text{On en conclut : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leqslant \gamma.}$$

- En appliquant le résultat précédent à la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui est croissante (car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante) et de limite $-\gamma$, on obtient :
  $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -u_n \leqslant -\gamma$$
  $$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \gamma.}$$

Commentaire

- L'esprit de l'énoncé semble être d'utiliser directement le résultat suivant :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}(v_n) \text{ croissante} \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\end{array}\right\} \Rightarrow \ \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant \ell}$$

- Le résultat encadré ci-dessus est lié à la notion de borne supérieure d'une suite, qui par définition, et sous réserve d'existence, est le plus petit des majorants de la suite. Si on connaît ce vocabulaire, on a accès à un énoncé plus précis du théorème de convergence monotone : toute suite croissante et majorée converge **vers sa borne supérieure**. On peut alors démontrer le résultat précédent :
  - × la suite (v_n) converge (vers ℓ) donc elle est majorée,
  - × la suite (v_n) est croissante.

  Ainsi, d'après le théorème ci-dessus, $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \ v_n$ et donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant \ell$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'inégalité précédente : $u_n - \gamma \geqslant 0$. On en déduit :

$$\left|u_n - \gamma\right| \ = \ u_n - \gamma$$

Or, par définition de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$u_n - \gamma \ = \ v_n + \frac{1}{n} - \gamma \ = \ (v_n - \gamma) + \frac{1}{n} \ \leqslant \ \frac{1}{n}$$

car, d'après ce qui précède : $v_n - \gamma \leqslant 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|u_n - \gamma\right| \ \leqslant \ \frac{1}{n}}$$

□

c) On rappelle que l'instruction `floor(x)` renvoie la partie entière d'un réel x et on suppose que la fonction `u` de la question ***1.e)*** a été correctement programmée. Expliquer l'intérêt et le fonctionnement du script ci-dessous :

```
eps = input('Entrer un réel strictement positif : ')
n = floor(1/eps) + 1
disp(u(n))
```

Démonstration.

- Ce script a pour but d'afficher une valeur approchée de γ à ε près (où ε est un réel strictement positif fourni par l'utilisateur et stocké dans la variable `eps`).
  Pour ce faire, il faut commencer par trouver un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\left|u_N - \gamma\right| \ \leqslant \ \varepsilon$$

- Or, d'après ce qui précède :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|u_n - \gamma\right| \ \leqslant \ \frac{1}{n}$$

Afin de trouver l'entier N recherché, il suffit de trouver un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\frac{1}{N} \ \leqslant \ \varepsilon$$

Si c'est le cas, on obtient alors, par transitivité :

$$\left|u_N - \gamma\right| \ \leqslant \ \frac{1}{N} \ \leqslant \ \varepsilon$$

- Raisonnons par équivalence pour trouver N :

$$\frac{1}{N} \leqslant \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad N \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \qquad \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)}$$

Ainsi, tout entier plus grand que $\frac{1}{\varepsilon}$ convient. En particulier, l'entier $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ convient.

Ce script affiche la valeur u_N où $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$. C'est une valeur approchée de γ à ε près. □

Partie II : Étude d'une série

Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \dfrac{1}{n(2n-1)}$.

1. Démontrer que la série de terme général a_n converge.

Démonstration. On a :

× $a_n = \dfrac{1}{n(2n-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^2}$.

× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$.

× La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

Il en est de même de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^2}$ (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul).

Ainsi, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum a_n$ est convergente.

Commentaire

La démonstration demandée ici est à peu de choses près celle de la question ***I.2.d)***.

□

2. a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k-1} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k}$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} &= \sum_{\substack{k \in [\![1,2n]\!] \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{k \in [\![1,2n]\!] \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k} \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}.}$$

Commentaire

- L'énoncé demande de « Justifier » le résultat. Cette terminologie est souvent associée à des démonstrations courtes et éventuellement moins formelles.
- Il est aussi possible ici de procéder par récurrence. Détaillons la rédaction.

  Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k-1} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k}$.

  ▸ **Initialisation** :

  – D'une part : $\sum\limits_{k=1}^{1} \dfrac{1}{2k-1} = \dfrac{1}{2-1} = \dfrac{1}{1} = 1$.

  – D'autre part : $\sum\limits_{k=1}^{2} \dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{1} \dfrac{1}{2k} = \left(\dfrac{1}{1} + \cancel{\dfrac{1}{2}}\right) - \cancel{\dfrac{1}{2}} = 1$.

  D'où $\mathcal{P}(0)$.

  ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(i.e.\ \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{2k-1} = \sum\limits_{k=1}^{2(n+1)} \dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{2k} \right)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k-1} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}\right) + \frac{1}{2(n+1)-1} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\right) + \frac{1}{2n+1} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + \frac{1}{2n+2}\right) && \textit{(en introduisant } \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+2}\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k}
\end{aligned}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

  $\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n).}$

□

b) Déterminer deux réels α et β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{2n-1}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned}
& a_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{\alpha\ (2n-1) + \beta\ n}{n(2n-1)} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{(2\alpha+\beta)\ n - \alpha}{n(2n-1)} \\
\Leftrightarrow\ & 1 = (2\alpha+\beta)\ n - \alpha && \textit{(en multipliant par } n(2n-1) > 0\textit{)}
\end{aligned}$$

La dernière égalité étant vérifiée pour tout entier non nul n, elle est équivalente, par identification, au système suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcl} 2\alpha & + & \beta & = & 0 \\ -\alpha & & & = & 1 \end{array}\right.$$

Et enfin : $(S) \underset{}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 + 2\,L_2}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcrcl} & & \beta & = & 2 \\ -\alpha & & & = & 1 \end{array}\right.$.

$$\boxed{\text{Les réels } \alpha = -1 \text{ et } \beta = 2 \text{ conviennent.}}$$

□

c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 2 \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$a_k \ = \ \frac{-1}{k} + \frac{2}{2k-1}$$

- En sommant ces égalités membre à membre, on obtient, par linéarité de la somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{k} + 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{k} + 2 \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \right) && \textit{(d'après la question } \boldsymbol{2.b}\textit{))} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{k} + 2 \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \cancel{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cancel{2}k} \\
&= 2 \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) \\
&= 2 \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ = \ 2 \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) \\
&= 2 \left(\cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \right) \ = \ 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} a_k \ = \ 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}}$$

□

3. a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$$

où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie dans la partie I.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$\begin{aligned} u_{2n} - u_n &= \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2n)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - (\ln(2n) - \ln(n)) \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \left((\ln(2) + \cancel{\ln(n)}) - \cancel{\ln(n)}\right) \;=\; \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit, en réordonnant : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2).}$$

□

b) Calculer alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

Démonstration.

- D'après la question ***1.***, la série $\sum a_n$ est convergente.
- Déterminons sa somme. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k &= 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.c)}}\textit{)} \\ &= 2\ (u_{2n} - u_n + \ln(2)) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.a)}}\textit{)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\ (\cancel{\gamma} - \cancel{\gamma} + \ln(2)) && \textit{(car comme la suite } (u_n) \textit{ converge vers } \gamma\textit{, il en est de même de sa sous-suite } (u_{2n})\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2\ln(2).}$$

□

4. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} && \textit{(par décalage d'indice)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\left(\frac{k}{n}+1\right)} \;=\; \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}}$$

□

b) Retrouver alors le résultat de la question ***3.b)***.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \;=\; \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \;=\; \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est continue sur $[0,1]$.

- On reconnaît une somme de Riemann, ce qui démontre :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\ dx$$

Or :

$$\int_0^1 f(x)\ dx \;=\; \int_0^1 \frac{1}{1+x}\ dx \;=\; \Big[\ \ln\left(|1+x|\right)\ \Big]_0^1 \;=\; \Big[\ \ln\left(1+x\right)\ \Big]_0^1 \;=\; \ln(2) - \cancel{\ln(1)}$$

- Ainsi, d'après la question ***2.c)*** :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \;=\; 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\ \ln(2)$$

$$\boxed{\text{On retrouve bien : } \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2\ \ln(2)}$$

□

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.
Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.
Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu.
En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à p ($p \in\ ]0,1[$), et celle d'obtenir Face est de $1-p$.
On notera X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Enfin, on notera A l'événement : « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

Partie I

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

1. Reconnaître la loi de X et vérifier que : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{13}{27}$.

Démonstration.

- Commençons par décrire l'expérience.
  - Chaque lancer de pièce est une épreuve à deux issues : Pile (issue nommée succès), obtenu avec la probabilité p et Face, obtenu avec la probabilité $1-p$.
  - Ainsi, l'expérience consiste en la succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.

  La v.a.r. X compte le nombre de succès obtenu au cours de cette expérience.

  $$\boxed{\text{Ainsi : } X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p).}$$

- L'événement A est réalisé si et seulement si le joueur a obtenu un nombre pair de Pile.
  Comme $n = 3$, ceci ne se produit que si le joueur n'obtient aucun Pile ou en obtient deux.
  On en déduit :
  $$A \ = \ [X=0] \ \cup \ [X=2]$$
  Ainsi, en appliquant $\mathbb{P}$ de part et d'autre :
  $$\begin{aligned}
  \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\big([X=0] \ \cup \ [X=2]\big) \\
  &= \mathbb{P}\big([X=0]\big) + \mathbb{P}\big([X=2]\big) && \textit{(car } [X=0] \textit{ et } [X=2] \textit{ sont incompatibles)} \\
  &= \binom{3}{0} p^0 (1-p)^3 + \binom{3}{2} p^2 (1-p)^1 && \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{B}(3,p)\textit{)} \\
  &= \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) && \textit{(car } p = \tfrac{2}{3}\textit{)} \\
  &= \frac{1}{27} + 3\,\frac{4}{27} \ = \ \frac{13}{27}
  \end{aligned}$$
  $$\boxed{\text{On obtient bien : } \mathbb{P}(A) = \frac{13}{27}.}$$

□

2. Montrer que : $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G.

Démonstration.

- Le gain du joueur dépend du nombre de Pile obtenus :
  × si le joueur obtient 0 Pile, il est déclaré vainqueur et touche : $0 \times 10 = 0$ euros.
  × si le joueur obtient 1 Pile, il est déclaré perdant et touche : $1 \times (-10) = -10$ euros.
  × si le joueur obtient 2 Pile, il est déclaré vainqueur et touche : $2 \times 10 = 20$ euros.
  × si le joueur obtient 3 Pile, il est déclaré perdant et touche : $3 \times (-10) = -30$ euros.

  $$\boxed{\text{Ainsi, } G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}.}$$

Commentaire

La variable G représente le gain **algébrique** du joueur. Cela signifie que G peut prendre des valeurs positives (en cas de victoire du joueur) ou négatives (en cas de défaite). Si le gain algébrique du joueur est de -30, cela signifie que le joueur doit payer 30 euros.

- D'après ce qui précède :

$$\begin{array}{lclclclcl}
\mathbb{P}\big([G=0]\big) & = & \mathbb{P}\big([X=0]\big) & = & \binom{3}{0}\, p^0(1-p)^3 & = & \left(\frac{1}{3}\right)^3 & = & \frac{1}{27} \\[2mm]
\mathbb{P}\big([G=-10]\big) & = & \mathbb{P}\big([X=1]\big) & = & \binom{3}{1}\, p^1(1-p)^2 & = & 3\,\frac{2}{3}\,\left(\frac{1}{3}\right)^2 & = & \frac{6}{27} \\[2mm]
\mathbb{P}\big([G=20]\big) & = & \mathbb{P}\big([X=2]\big) & = & \binom{3}{2}\, p^2(1-p)^1 & = & 3\,\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1 & = & \frac{12}{27} \\[2mm]
\mathbb{P}\big([G=-30]\big) & = & \mathbb{P}\big([X=3]\big) & = & \binom{3}{3}\, p^3(1-p)^0 & = & \left(\frac{2}{3}\right)^3 & = & \frac{8}{27}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([G=-30]\big)=\frac{8}{27},\ \mathbb{P}\big([G=-10]\big)=\frac{6}{27},\ \mathbb{P}\big([G=0]\big)=\frac{1}{27},\ \mathbb{P}\big([G=20]\big)=\frac{12}{27}}$$

Commentaire

- Dans cette question, on calcule $\mathbb{P}\big([G=x]\big)$ pour tout $x \in G(\Omega)$. On peut s'affranchir du dernier calcul (à savoir $\mathbb{P}\big([G=-30]\big)$), puisque, comme $\Big([G=x]\Big)_{x\in\{-30,-10,0,20\}}$ est un système complet d'événements, on a :

$$\mathbb{P}\big([G=0]\big)+\mathbb{P}\big([G=-10]\big)+\mathbb{P}\big([G=20]\big)+\mathbb{P}\big([G=-30]\big)=1$$

  et donc :

$$\mathbb{P}\big([G=-30]\big)=1-\mathbb{P}\big([G=0]\big)-\mathbb{P}\big([G=-10]\big)-\mathbb{P}\big([G=20]\big)$$

- Toutefois, il est vivement conseillé de réaliser tous ces calculs et d'utiliser la propriété ci-dessus comme mesure de vérification.

□

3. Calculer l'espérance de G. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Démonstration.

- La v.a.r. G admet une espérance car c'est une v.a.r. finie.
- Par définition :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(G) & = & \sum\limits_{x\in G(\Omega)} x\ \mathbb{P}\big([G=x]\big) \\
& = & -30\ \mathbb{P}\big([G=-30]\big)-10\ \mathbb{P}\big([G=-10]\big)+0\ \mathbb{P}\big([G=0]\big)+20\ \mathbb{P}\big([G=20]\big) \\
& = & -30\ \frac{8}{27}-10\ \frac{6}{27}+20\ \frac{12}{27} \\
& = & \dfrac{-\cancel{240}-60+\cancel{240}}{27} \\
& = & \dfrac{-60}{27} \ = \ -\dfrac{20}{9}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{L'espérance de gain est négative donc le jeu n'est pas favorable au joueur.}}$$

(le joueur perd en moyenne environ $2,22$ *euros par partie)* □

Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est entier naturel non nul et $p \in]0,1[$.
Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant « À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.
Soit Y la variable aléatoire définie par : $Y = (-1)^X$.
Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

1. ***a)*** On note $Z = \dfrac{Y+1}{2}$.

Déterminer $Y(\Omega)$, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

Démonstration.

- Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.
  - × Si $X(\omega)$ est pair : alors $Y(\omega) = (-1)^{X(\omega)} = 1$. Et dans ce cas :

$$Z(\omega) \ = \ \frac{Y(\omega)+1}{2} \ = \ \frac{2}{2} \ = \ 1$$

  - × Si $X(\omega)$ est impair : alors $Y(\omega) = (-1)^{X(\omega)} = -1$. Et dans ce cas :

$$Z(\omega) \ = \ \frac{Y(\omega)+1}{2} \ = \ \frac{0}{2} \ = \ 0$$

$$\boxed{Y(\Omega) = \{-1,1\} \quad \text{et} \quad Z(\Omega) = \{0,1\}}$$

- Comme $Z(\Omega) = \{0,1\}$, la v.a.r. Z suit une loi de Bernoulli dont le paramètre vaut :

$$\mathbb{P}\big([Z=1]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([Y=1]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([X \text{ est pair}]\big) \ = \ \mathbb{P}(A)$$

$$\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\mathbb{P}(A)\right)}$$

□

b) Démontrer que : $\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{P}(A) - 1$.

Démonstration.

- La v.a.r. Y admet une espérance car elle est finie.
  Par définition :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) \ &= \ \sum_{y \in Y(\Omega)} y \ \mathbb{P}\big([Y=y]\big) \\
&= \ (-1) \times \mathbb{P}\big([Y=-1]\big) + 1 \times \mathbb{P}\big([Y=1]\big) \\
&= \ (-1) \times \big(1 - \mathbb{P}\big([Y=1]\big)\big) + \mathbb{P}\big([Y=1]\big) \\
&= \ (-1) \times (1 - \mathbb{P}(A)) + \mathbb{P}(A) \\
&= \ 2\mathbb{P}(A) - 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) \ = \ 2\mathbb{P}(A) - 1}$$

□

2. a) Donner la loi de X.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Comme vu en question } \textbf{\textit{1.}} : X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p).}$$

□

b) En déduire que l'on a également :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

puis que : $\mathbb{E}(Y) = (1-2p)^n$.

Démonstration.

- D'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k \in X(\Omega)} (-1)^k \, \mathbb{P}\big([X=k]\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, \mathbb{P}\big([X=k]\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

- On en déduit :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k} = (-p + (1-p))^n = (1-2p)^n$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = (1-2p)^n}$$

□

3. Exprimer alors la valeur de $\mathbb{P}(A)$ en fonction de n et p.

Démonstration.
D'après la question ***1.b)*** et ***2.b)*** :

$$(1-2p)^n = \mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{P}(A) - 1$$

On en déduit : $2\mathbb{P}(A) = 1 + (1-2p)^n$.

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{1+(1-2p)^n}{2} = \frac{1}{2} + \frac{(1-2p)^n}{2}}$$

□

4. Démontrer que :

$$\mathbb{P}(A) \geqslant \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow\ \left[p \leqslant \frac{1}{2} \text{ OU « } n \text{ est pair »}\right]$$

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{(1-2p)^n}{2}$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(A) \geqslant \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow\ \frac{(1-2p)^n}{2} \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ (1-2p)^n \geqslant 0$$

- Déterminons le signe de $(1-2p)^n$. Deux cas se présentent :
  - × si $1-2p \geqslant 0$ (*i.e.* $p \leqslant \frac{1}{2}$) alors $(1-2p)^n \geqslant 0$.
  - × si $1-2p < 0$ (*i.e.* $p > \frac{1}{2}$) alors le signe de $(1-2p)^n$ dépend de n. Plus précisément :
    - – si n est pair : alors $(1-2p)^n > 0 \geqslant 0$.
    - – si n est impair : alors $(1-2p)^n < 0$.

  On en déduit :

$$\begin{aligned}
(1-2p)^n \geqslant 0 \ &\Leftrightarrow\ (p \leqslant \tfrac{1}{2}) \texttt{ OU } \big((p > \tfrac{1}{2}) \texttt{ ET } (n \text{ est pair})\big) \\
&\Leftrightarrow\ \Big((p \leqslant \tfrac{1}{2}) \texttt{ OU } (p > \tfrac{1}{2})\Big) \texttt{ ET } \Big((p \leqslant \tfrac{1}{2}) \texttt{ OU } (n \text{ est pair})\Big) \quad \textit{(par distributivité de } \texttt{OU} \textit{ sur } \texttt{ET)} \\
&\Leftrightarrow\ \text{Vrai} \texttt{ ET } \Big((p \leqslant \tfrac{1}{2}) \texttt{ OU } (n \text{ est pair})\Big) \\
&\Leftrightarrow\ \Big((p \leqslant \tfrac{1}{2}) \texttt{ OU } (n \text{ est pair})\Big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) \geqslant \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow\ (p \leqslant \tfrac{1}{2}) \texttt{ OU } (n \text{ est pair})}$$

Commentaire

Dans l'énoncé, l'expression demandée est présentée à l'aide de crochets. Cela peut amener à confusion : dans le contexte d'un exercice de probabilité, on préfère, si cela est possible, réserver les crochets à l'écriture d'événements du type $[X \in I]$ où X est une v.a.r. et I une partie de $\mathbb{R}$.

□

Partie III

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est à dire en faisant en sorte que $\mathbb{P}(A) \geqslant \frac{1}{2}$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est à dire que $\mathbb{E}(G) \leqslant 0$).

1. Exprimer G en fonction de X et Y. En déduire que : $\mathbb{E}(G) = 10 \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \, k \, \mathbb{P}([X = k])$.

Démonstration.

- Démontrons :

$$G \;=\; 10\; XY$$

Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent :

× si $X(\omega)$ est pair alors le joueur est déclaré vainqueur. Dans ce cas :

$$G(\omega) \;=\; 10\; X(\omega) \;=\; 10\; X(\omega)Y(\omega)$$

car $Y(\omega) = 1$ dans ce cas (*cf* question ***1.a)*** de la partie II).

× si $X(\omega)$ est impair alors le joueur est déclaré perdant. Dans ce cas :

$$G(\omega) \;=\; -10\; X(\omega) \;=\; 10\; X(\omega)Y(\omega)$$

car $Y(\omega) = -1$ dans ce cas (*cf* question ***1.a)*** de la partie II).

$$\boxed{G \;=\; 10\; XY}$$

- Par définition de la v.a.r. Y, on obtient :

$$G \;=\; 10\; (-1)^X \; X$$

D'après le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(G) \;=\; \sum_{k \in X(\Omega)} 10\; (-1)^k \; k \; \mathbb{P}\big([X = k]\big)$$

$$\boxed{\mathbb{E}(G) \;=\; 10 \sum_{k \in X(\Omega)} (-1)^k \; k \; \mathbb{P}\big([X = k]\big)}$$

□

2. Démontrer que : $\forall k \in [\![1, n]\!],\; k \dbinom{n}{k} = n \dbinom{n-1}{k-1}$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

- Tout d'abord :

$$k \binom{n}{k} = k \; \frac{n!}{k! \; (n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)! \; (n-k)!}$$

- Par ailleurs :

$$n \binom{n-1}{k-1} = n \; \frac{(n-1)!}{(k-1)! \; ((n-\cancel{1}) - (k-\cancel{1}))!} = \frac{n!}{(k-1)! \; (n-k)!}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in [\![1, n]\!],\; k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.}$$

Commentaire

La relation sur les coefficients binomiaux peut aussi se faire par dénombrement.
Pour ce faire, on considère un ensemble E à n éléments.
(on peut penser à une pièce qui contient n individus)
On souhaite alors construire une partie P à k éléments de cet ensemble contenant un élément distingué *(on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de k individus dans lequel figure un représentant de ces individus).*
Pour ce faire, on peut procéder de deux manières :

1) On choisit d'abord la partie à k éléments de E : $\binom{n}{k}$ possibilités.

   On distingue ensuite un élément de cet ensemble P : $\binom{k}{1} = k$ possibilités.
   (on choisit d'abord les k individus et on élit ensuite un représentant de ces individus)
   Ainsi, il y a $k\binom{n}{k}$ manières de construire P.

2) On choisit d'abord, dans E, l'élément à distinguer : $\binom{n}{1} = n$ possibilités.

   On choisit ensuite $k-1$ éléments dans E qui, pour former P, en y ajoutant l'élément précédent : $\binom{n-1}{k-1}$ possibilités.
   (on choisit d'abord le représentant puis on lui adjoint un groupe de $k-1$ individus)
   Ainsi, il y a $n\binom{n-1}{k-1}$ manières de construire P.

On retrouve ainsi le résultat.

□

3. Montrer que : $\mathbb{E}(G) = -10\ np\ (1-2p)^{n-1}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G) &= 10 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, k\, \mathbb{P}\big([X=k]\big) && \textit{(d'après la question } \textbf{1.} \textit{ de la partie III)}\\
&= 10 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, k \binom{n}{k} p^k\, (1-p)^{n-k} && \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)\textit{)}\\
&= 10 \sum_{k=1}^{n} (-1)^k\, k \binom{n}{k} p^k\, (1-p)^{n-k} && \textit{(car le terme d'indice 0 est nul)}\\
&= 10 \sum_{k=1}^{n} (-1)^k\, n \binom{n-1}{k-1} p^k\, (1-p)^{n-k} && \textit{(d'après la question précédente et car } k \in [\![1,n]\!]\textit{)}\\
&= 10\, n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} p^{k+1}\, (1-p)^{n-(k+1)} && \textit{(par décalage d'indice)}\\
&= -10\, np \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} p^k\, (1-p)^{(n-1)-k}\\
&= -10\, np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-p)^k\, (1-p)^{(n-1)-k}\\
&= -10\, np\, \big((-p)+(1-p)\big)^{n-1} = -10\, np\, (1-2p)^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(G) = -10\ np\ (1-2p)^{n-1}}$$

□

4. Démontrer alors que :
$$\left\{\begin{array}{l}\mathbb{P}(A) \geqslant \dfrac{1}{2} \\ \mathbb{E}(G) \leqslant 0\end{array}\right. \Leftrightarrow p \leqslant \frac{1}{2}$$

Démonstration.

- On procède de la même manière qu'en question *4.* de la partie II. On obtient :
$$\left\{\begin{array}{l}\mathbb{P}(A) \geqslant \dfrac{1}{2} \\ \mathbb{E}(G) \leqslant 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(1-2p)^n \geqslant 0 \\ -10\ np\ (1-2p)^{n-1} \leqslant 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(1-2p)^n \geqslant 0 \\ (1-2p)^{n-1} \geqslant 0\end{array}\right.$$
- Étudions les signes de $(1-2p)^n$ et $(1-2p)^{n-1}$. Deux cas se présentent :
  × si $1-2p \geqslant 0$ (*i.e.* $p \leqslant \frac{1}{2}$) alors $(1-2p)^n \geqslant 0$ et $(1-2p)^{n-1} \geqslant 0$
  × si $1-2p < 0$ (*i.e.* $p > \frac{1}{2}$) alors les signes des quantités étudiées dépendent de n.
  Plus précisément :
  – si n est pair : alors $(1-2p)^n > 0$ et $(1-2p)^{n-1} < 0$ car $n-1$ est impair.
  – si n est impair : alors $(1-2p)^n < 0$ et $(1-2p)^{n-1} > 0$ car $n-1$ est pair.

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \left\{\begin{array}{l}\mathbb{P}(A) \geqslant \dfrac{1}{2} \\ \mathbb{E}(G) \leqslant 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(1-2p)^n \geqslant 0 \\ (1-2p)^{n-1} \geqslant 0\end{array}\right. \Leftrightarrow p \leqslant \frac{1}{2}.}$$

□

5. a) Étudier la fonction f définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par : $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right],\ f(x) = x\ (1-2x)^{n-1}$.

Démonstration.
Dans le cas $n = 1$, la fonction f est la fonction identité : $f : x \mapsto x$.
Étudions maintenant le cas $n \geqslant 2$.

- La fonction f est dérivable sur $[0, \frac{1}{2}]$ car polynomiale.
- Soit $x \in [0, \frac{1}{2}]$.
$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & (1-2x)^{n-1} + x\ (n-1)\ (1-2x)^{n-2}\ (-2) \\ & = & (1-2x)^{n-2}\ \left((1-2x) - 2(n-1)\ x\right) \\ & = & (1-2x)^{n-2}\ (1-2nx) \end{array}$$
  – Si $x = \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{1}{2n}$ alors $f'(x) = 0$.
  – Si $x \in [0, \frac{1}{2}[$, $1-2x > 0$ et ainsi $(1-2x)^{n-2} > 0$.
  La quantité $f'(x)$ est donc du signe de $1-2nx$.
- On en déduit le tableau de variations de f.

x	0		$\frac{1}{2n}$		$\frac{1}{2}$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0
Variations de f	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{2n}\right)$	$\searrow$	0

Avec $f\left(\dfrac{1}{2n}\right) = \dfrac{1}{2n}\left(1 - \cancel{2}\,\dfrac{1}{\cancel{2}n}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{2n}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}.$

Commentaire

- Il est plus prudent de traiter le cas $n = 1$ à part. Dans ce cas, $\frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{2}$ coïncident et la fonction f est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$. Le tableau de variations obtenu est ainsi un cas dégénéré du tableau obtenu lorsque $n \geqslant 2$.
- Si l'on se place du point de vue du jeu, ce cas n'a aucun intérêt pratique.
  En effet, si le joueur n'effectue qu'un lancer :
  - × soit il obtient Face et est déclaré vainqueur puisqu'il a obtenu un nombre pair (0) de Pile. Dans ce cas, son gain est de $0 \times 10 = 0$.
  - × soit il obtient Pile et est déclaré perdant puisqu'il a obtenu un nombre impair (1) de Pile. Dans ce cas, son gain est de $(-1) \times 10 = -10$.

  L'énoncé aurait pu écarter le cas $n = 1$ (« considérons par la suite un entier $n \geqslant 2$ ») : il est peu probable que le forain attire des clients assurés de ne jamais gagner d'argent en jouant.

□

b) Pour une valeur de n fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce (c'est à dire quelle valeur doit-il donner à $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$) pour optimiser la rentabilité de son activité ?

Démonstration.
Le concepteur du jeu souhaite que les conditions $\mathbb{P}(A) \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{E}(G) \leqslant 0$ soient vérifiées.
D'après la question ***4.***, ceci équivaut à :

$$p \leqslant \frac{1}{2}$$

On considère donc $p \leqslant \dfrac{1}{2}$ dans cette question. La rentabilité est optimale lorsque le gain du joueur est le plus faible. Il s'agit donc de trouver la valeur de p qui rend minimale la quantité :

$$\mathbb{E}(G) = -10\ np\ (1 - 2p)^{n-1}$$

Autrement dit, la valeur de p pour laquelle la quantité $f(p) = p\ (1 - 2p)^{n-1}$ est maximale.

- Dans le cas $n = 1$, $f(p) = p$.

$$\boxed{\text{Si } n = 1 \text{, le concepteur doit choisir } p = \frac{1}{2} \text{ (la pièce est alors non truquée).}}$$

- Dans le cas $n \geqslant 2$, f atteint son maximum pour $x = \dfrac{1}{2n}$ (*cf* question précédente).

$$\boxed{\text{Si } n \geqslant 2 \text{, le concepteur doit truquer la pièce de sorte que } p = \frac{1}{2n}.}$$

□

Partie IV

Le forain décide de fixer $n = 2$ et $p = \dfrac{1}{4}$. En période estivale, il pense pouvoir compter sur la participation de 200 clients dans le journée. Avant de se décider à installer son stand, il voudrait être certain, avec un risque d'erreur inférieur à 10%, qu'il gagnera plus de 100 euros dans la journée.
Pour tout entier i compris ente 1 et 200, on note alors G_i le gain algébrique du $i^{\text{ème}}$ joueur.
On note aussi J la variable aléatoire égale au gain du forain sur toute la journée.

1. Pour tout entier $i \in [\![1, 200]\!]$, donner la loi de G_i et calculer son espérance et sa variance.

Démonstration.
On procède comme en partie I. En particulier, on note X_i le nombre de Pile obtenus par le $i^{\text{ème}}$ joueur. On rappelle : $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

- Le gain du joueur dépend du nombre de Pile obtenus :
  - × si le joueur obtient 0 Pile, il est déclaré vainqueur et touche : $0 \times 10 = 0$ euros.
  - × si le joueur obtient 1 Pile, il est déclaré perdant et touche : $1 \times (-10) = -10$ euros.
  - × si le joueur obtient 2 Pile, il est déclaré vainqueur et touche : $2 \times 10 = 20$ euros.

$$\boxed{\text{Ainsi, } G(\Omega) = \{-10, 0, 20\}.}$$

- D'autre part :

$$\begin{array}{lclclclcl}
\mathbb{P}\big([G=0]\big) & = & \mathbb{P}\big([X=0]\big) & = & \dbinom{2}{0}\, p^0(1-p)^2 & = & \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 & = & \dfrac{9}{16} \\[2ex]
\mathbb{P}\big([G=-10]\big) & = & \mathbb{P}\big([X=1]\big) & = & \dbinom{2}{1}\, p^1(1-p)^1 & = & 2\,\dfrac{1}{4}\,\dfrac{3}{4} & = & \dfrac{6}{16} \\[2ex]
\mathbb{P}\big([G=20]\big) & = & \mathbb{P}\big([X=2]\big) & = & \dbinom{2}{2}\, p^2(1-p)^0 & = & \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 & = & \dfrac{1}{16}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([G=-10]\big) = \frac{6}{16},\ \mathbb{P}\big([G=0]\big) = \frac{9}{16},\ \mathbb{P}\big([G=20]\big) = \frac{1}{16}}$$

> **Commentaire**
>
> Comme on l'a mentionné précédemment, l'égalité :
>
> $$\mathbb{P}\big([G=0]\big) + \mathbb{P}\big([G=-10]\big) + \mathbb{P}\big([G=20]\big) = 1$$
>
> permet de vérifier que l'on ne s'est pas trompé dans les calculs.

- La v.a.r. G admet une espérance et une variance car c'est une v.a.r. finie.
- Par définition :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(G) & = & \displaystyle\sum_{x \in G(\Omega)} x\, \mathbb{P}\big([G=x]\big) \\
& = & -10\, \mathbb{P}\big([G=-10]\big) + 0\, \mathbb{P}\big([G=0]\big) + 20\, \mathbb{P}\big([G=20]\big) \\
& = & -10\, \dfrac{6}{16} + 20\, \dfrac{1}{16} \ = \ -\dfrac{40}{16} \ = \ -\dfrac{5}{2}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(G) = -\frac{5}{2}}$$

- Par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(G^2\big) &= \sum_{x\in G(\Omega)} x^2\ \mathbb{P}\big([G=x]\big)\\ &= (-10)^2\ \mathbb{P}\big([G=-10]\big)+0^2\ \mathbb{P}\big([G=0]\big)+20^2\ \mathbb{P}\big([G=20]\big)\\ &= 100\ \frac{6}{16}+400\ \frac{1}{16} \ = \ \frac{1000}{16} \ = \ \frac{125}{2}\end{aligned}$$

- On obtient alors $\mathbb{V}(G)$ par la formule de Kœnig-Huygens.

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(G) &= \mathbb{E}\big(G^2\big)-\big(\mathbb{E}(G)\big)^2\\ &= \frac{125}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right)^2\\ &= \frac{125}{2}-\frac{25}{4} \ = \ \frac{225}{4}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(G)=\frac{225}{4}}$$

□

2. Exprimer la variable aléatoire J en fonction des variables aléatoires G_i.
Démontrer alors que $\mathbb{E}(J)=500$ et $\mathbb{V}(J)=11250$.

Démonstration.

- Le gain algébrique cumulé des joueurs sur une journée est donné par la v.a.r. : $\sum\limits_{i=1}^{200} G_i$.
Sur la journée, le gain algébrique du forain est l'opposé de celui des joueurs.

$$\boxed{\text{Ainsi : } J=-\sum_{i=1}^{200} G_i.}$$

Commentaire

On rappelle que les gains des joueurs et du forain sont des gains algébriques et peuvent donc être négatifs ou positifs. Par exemple, sur la journée :
- × si les joueurs ont touché 100 alors le forain touche −100 (ce qui représente une perte cumulée de 100 euros).
- × si les joueurs ont touché −100 (ce qui correspond à une perte cumulée de 100 euros), le forain a touché 100.

- La v.a.r. J admet une espérance comme somme de v.a.r. admettant une espérance.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(J) &= \mathbb{E}\left(-\sum_{i=1}^{200} G_i\right)\\ &= -\sum_{i=1}^{200}\ \mathbb{E}(G_i) && \textit{(par linéarité de l'espérance)}\\ &= \cancel{-}\sum_{i=1}^{200}\ \frac{\cancel{-}5}{2} && \textit{(d'après la question précédente)}\\ &= 200\ \frac{5}{2} \ = \ 500\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(J)=500}$$

- On fait l'hypothèse raisonnable d'indépendance des v.a.r. X_i, ce qui permet d'établir, par le lemme des coalitions que les v.a.r. $G_i = 10\ (-1)^{X_i}\ X_i$ sont elles aussi indépendantes.
  La v.a.r. J admet une variance comme somme de v.a.r. indépendantes admettant une variance.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(J) & = & \mathbb{V}\left(-\sum\limits_{i=1}^{200} G_i\right) & \\ & = & (-1)^2\ \mathbb{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{200} G_i\right) & \textit{(par propriété de la variance)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{200}\ \mathbb{V}(G_i) & \textit{(car les v.a.r. } G_i \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{200}\ \dfrac{225}{4} & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & 200\ \dfrac{225}{4}\ =\ 11250 & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(J) = 11250}$$

Commentaire

- Insistons sur le fait que l'opérateur variance n'est pas linéaire. Cela provient notamment de son comportement vis à vis de la multiplication externe.
  Plus précisément, si X est une v.a.r. qui admet une variance :
  $$\mathbb{V}(aX)\ =\ a^2\ \mathbb{V}(X)$$
- Si X et Y sont deux v.a.r. indépendantes qui admettent une variance, alors :
  $$\mathbb{V}(X+Y)\ =\ \mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)$$
  Pour autant, cela ne signifie pas que la variance est linéaire (le premier point est toujours vérifié). En particulier, dans le cas de l'indépendance, insistons sur la formule :
  $$\mathbb{V}(X-Y)\ =\ \mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)$$
  Cette formule est une source classique d'erreur.
  Rappelons donc : $\mathbb{V}(X-Y) \cancel{=} \mathbb{V}(X)-\mathbb{V}(Y)$.
- Il faut garder en tête que, par définition : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}(X))^2\big)$.
  Ainsi, $\mathbb{V}(X)$ est forcément un réel positif puisque c'est l'espérance de la v.a.r. $(X - \mathbb{E}(X))^2$ qui ne prend que des valeurs positives.

$\square$

3. Justifier que : $\mathbb{P}\big([J \leqslant 100]\big) \leqslant \mathbb{P}\big([|J-500| \geqslant 400]\big)$.

Démonstration.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([|J-500| \geqslant 400]\big) & = & \mathbb{P}\big([J-500 \leqslant -400] \cup [J-500 \geqslant 400]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big([J-500 \leqslant -400]\big) + \mathbb{P}\big([J-500 \geqslant 400]\big) & \textit{(par incompatibilité des événements)} \\ & = & \mathbb{P}\big([J \leqslant 100]\big) + \mathbb{P}\big([J \geqslant 900]\big)\ \geqslant\ \mathbb{P}\big([J \leqslant 100]\big) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \mathbb{P}\big([J \leqslant 100]\big) \leqslant \mathbb{P}\big([|J-500| \geqslant 400]\big).}$$

Commentaire

- Rappelons que si $x \in \mathbb{R}$ alors pour tout $\varepsilon \geqslant 0$:

$$|x| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ -\varepsilon < x < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ (-\varepsilon < x) \ \texttt{ET} \ (x < \varepsilon)$$

- Par négation de cette propriété on obtient la propriété utilisée dans la question précédente :

$$|x| \geqslant \varepsilon \ \Leftrightarrow\ (-\varepsilon \geqslant x) \ \texttt{OU} \ (x \geqslant \varepsilon) \ \Leftrightarrow\ (x \leqslant -\varepsilon) \ \texttt{OU} \ (x \geqslant \varepsilon)$$

□

4. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, puis montrer que : $\mathbb{P}([J \leqslant 100]) \leqslant \dfrac{9}{128}$.

Démonstration.

- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev stipule que pour toute v.a.r. X qui admet une variance :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\big([|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon] \big) \ \leqslant\ \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

- Il suffit d'appliquer cette inégalité à la v.a.r. $X = J$ qui admet une variance (d'après la question *2.*) et à $\varepsilon = 400 > 0$. On obtient :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}\big([|J - \mathbb{E}(J)| \geqslant 400] \big) & \leqslant & \dfrac{\mathbb{V}(J)}{400^2} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \mathbb{P}\big([|J - 500| \geqslant 400] \big) & & \dfrac{11250}{400 \times 400} \end{array}$$

Puis par calcul :

$$\frac{11250}{400 \times 400} = \frac{50 \times 225}{400 \times 400} = \frac{225}{8 \times 100} = \frac{9 \times 25}{8 \times 4 \times 100} = \frac{9}{8 \times 4 \times 4} = \frac{9}{128}$$

- Enfin, on obtient l'inégalité souhaitée à l'aide de la question précédente :

$$\mathbb{P}\big([J \leqslant 100] \big) \ \leqslant\ \mathbb{P}\big([|J - 500| \geqslant 400] \big) \ \leqslant\ \frac{9}{128}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([J \leqslant 100] \big) \ \leqslant\ \frac{9}{128}}$$

□

5. Compte tenu de ses exigences de rentabilité, le forain peut-il installer son stand ?

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}\big([J > 100] \big) \ =\ 1 - \mathbb{P}\big([J \leqslant 100] \big) \ \geqslant\ 1 - \frac{9}{128}$$

Ainsi, le risque que le gain du forain ne dépasse 100 euros sur la journée est de $\dfrac{9}{128}$.
Comme $128 \geqslant 100$:

$$\frac{9}{128} \ \leqslant\ \frac{9}{100}$$

$$\boxed{\text{Les exigences de rentabilité sont bien réalisées : avec un risque inférieur à 10\%, le forain gagne plus de 100 euros dans la journée.}}$$

□

EDHEC 2018 : le sujet

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que A n'est pas inversible.

2. Déterminer les valeurs propres de A, puis trouver les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

Dans la suite de l'exercice, on considère l'application f qui, à toute matrice M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) = AM$$

3. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

4. ***a)*** Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et vérifier que $\text{Ker}(f)$ est de dimension 2.

b) En déduire la dimension de $\text{Im}(f)$.

c) On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle que la famille (E_1, E_2, E_3, E_4) est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Écrire $f(E_1)$, $f(E_2)$, $f(E_3)$, $f(E_4)$ sous forme de combinaisons linéaires de E_1, E_2, E_3, et E_4 puis donner une base de $\text{Im}(f)$.

5. ***a)*** Déterminer l'image par f des vecteurs de $\text{Im}(f)$.

b) Donner les valeurs propres de f puis conclure que f est diagonalisable.

6. Généralisation : f est toujours l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$, mais cette fois, A est une matrice quelconque de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On admet que f et A possèdent des valeurs propres et on se propose de montrer que ce sont les mêmes.

a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre colonne associé.
Justifier que X^tX appartient à $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, puis montrer que c'est un vecteur propre de f.
En déduire que λ est valeur propre de f.

b) Soit λ une valeur propre de f et M une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ vecteur propre de f associé à cette valeur propre. En considérant les colonnes C_1 et C_2 de M, montrer que λ est valeur propre de A.

Exercice 2

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $\dfrac{1}{2}$ et celle d'obtenir Face vaut également $\dfrac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant Face à coup sûr et une troisième pièce numérotée 2, donnant Pile à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient Pile au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier Pile et la variable aléatoire Y, égale au rang d'apparition du premier Face. On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Pile et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Face.

1. ***a)*** Déterminer $\mathbb{P}([X = 1])$.

b) Montrer que : $\forall n \geqslant 2$, $\mathbb{P}([X=n]) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c) En déduire la valeur de $\mathbb{P}([X=0])$.

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

3. Montrer que $X(X-1)$ possède une espérance.
En déduire que X possède une variance et vérifier que $\mathbb{V}(X) = \dfrac{4}{3}$.

4. Justifier que Y suit la même loi que X.

5. ***a)*** Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=j]) = \mathbb{P}([Y=j])$.

b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=1]) = \mathbb{P}([X=i])$.

6. Loi de $X+Y$.

a) Expliquer pourquoi $X+Y$ prend toutes les valeurs positives sauf 0 et 2.

b) Montrer que $\mathbb{P}\big([X+Y=1]\big) = \dfrac{2}{3}$.

c) Justifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$[X+Y=n] = \big([X=1]\cap[Y=n-1]\big) \bigcup \big([Y=1]\cap[X=n-1]\big)$$

d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$\mathbb{P}([X+Y=n]) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

7. Informatique.
On rappelle que, pour tout entier naturel m, l'instruction `grand(1, 1, 'uin', 0, m)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et m (ceci de façon équiprobable).
On décide de coder Pile par 1 et Face par 0.

a) Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
piece = grand(1, 1, 'uin', ---, ---)
x = 1
if piece == 0 then
    lancer == grand(1, 1, 'uin', ---, ---)
    while lancer == 0
        lancer = ---
        x = ---
    end
else
    if piece == 1 then
        x = ---
    end
end
disp(x)
```

b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

Exercice 3

On admet que toutes les variables aléatoires considérés dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

1. Montrer que la fonction f est une densité.

Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X de densité f.

2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

3. On considère la variable aléatoire Y définie par : $Y = \dfrac{X^2}{2a}$.

a) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

b) On rappelle qu'en **Scilab** la commande `grand(1, 1, 'exp', 1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Écrire un script **Scilab** demandant la valeur de a à l'utilisateur et permettant de simuler la variable aléatoire X.

4. ***a)*** Vérifier que la fonction g qui à tout réel associe $x^2\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}}$, est paire.

b) Rappeler l'expression intégrale ainsi que la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale de paramètre 0 et a.

c) En déduire que X possède une espérance et la déterminer.

5. ***a)*** Rappeler l'espérance de Y puis montrer que X possède un moment d'ordre 2 et le calculer.

b) En déduire que la variance de X est donnée par :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{(4-\pi)\, a}{2}$$

On suppose désormais que le paramètre a est inconnu et on souhaite l'estimer.

6. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X.
On note S_n la variable aléatoire définie par $S_n = \dfrac{1}{2n} \sum\limits_{k=1}^{n} {X_k}^2$.

a) Montrer que S_n est un estimateur sans biais de a.

b) Montrer que X^2 possède une variance et que $\mathbb{V}(X^2) = 4a^2$.

c) Déterminer le risque quadratique $r_a(S_n)$ de S_n en tant qu'estimateur de a.
En déduire que S_n est un estimateur convergent de a.

7. On suppose que a est inférieur ou égal à 1.

a) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire S_n et en déduire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\Big([|S_n - a| \leqslant \varepsilon]\Big) \ \geqslant\ 1 - \frac{1}{n\, \varepsilon^2}$$

b) Déterminer une valeur de n pour laquelle $\left[S_n - \dfrac{1}{10}, S_n + \dfrac{1}{10}\right]$ est un intervalle de confiance pour a avec niveau de confiance au moins égal à 95%.

Problème

On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)\ dt$.

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie 1 : étude de f

1. ***a)*** Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x.

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à calculer les limites de f).

2. ***a)*** Montrer que f est impaire.

b) Étudier la convexité de la fonction f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

3. ***a)*** Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}$$

b) En déduire, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) \ = \ x\ \left(\ln(1+x^2) - 2\right) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\ dt$$

4. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\ dt$ est une intégrale convergente.

b) En déduire que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln(1+x^2)$.

c) Vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on a $\ln(1+x^2) = 2\ln(x) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$, puis établir l'équivalent suivant :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x\ \ln(x)$$

d) Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de $-\infty$.

5. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.

On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction f, c'est à dire :

$$f(x) = f(0) + \frac{x^1}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \underset{x\to0}{o}(x^3)$$

b) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$.

c) En déduire alors un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0 (on trouve $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{x^3}{3}$).

6. On rappelle qu'en **Scilab**, la commande `grand(1, 1, 'unf', a, b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a, b]$. Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il calcule et affiche, à l'aide de la méthode de Monte-Carlo, une valeur approchée de $f(1)$:

```
U = grand(1, 100 000, 'unf', 0, 1)
V = log(1 + U .^2)
f = -----
disp(f)
```

Partie 2 : étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^n \, dt$.

7. ***a)*** La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ?

b) Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f.

8. ***a)*** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.

9. ***a)*** Établir l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n$$

b) Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Sur la série de terme général u_n ?

10. ***a)*** Montrer que :

$$0 \ \leqslant \ \int_0^1 \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt \ \leqslant \ \frac{u_n}{1-\ln(2)}$$

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt$.

c) Justifier que, pour tout entier naturel n, non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \ = \ \int_0^1 \frac{1-\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt$$

d) En déduire que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \ = \ \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} \, dt$$

e) Modifier le script présenté à la question ***6)*** pour donner un valeur approchée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

EDHEC 2018 : le corrigé

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que A n'est pas inversible.

Démonstration.

$$\det(A) \;=\; \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\right) \;=\; 6 - 2 \times 3 \;=\; 0$$

$$\boxed{\text{Comme } \det(A) = 0, \text{ la matrice } A \text{ n'est pas inversible.}}$$

Commentaire

On peut aussi démontrer qu'une matrice carrée est non inversible en remarquant qu'une de ses colonnes (resp. ligne) s'écrit comme combinaison linéaire de ses autres colonnes (resp. lignes). Ici, la deuxième colonne de A est proportionnelle à la première. Ceci permet de conclure que A n'est pas inversible.

□

2. Déterminer les valeurs propres de A, puis trouver les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord que, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ est une valeur propre de } A & \Leftrightarrow & A - \lambda\, I \text{ n'est pas inversible} \\ & \Leftrightarrow & \det(A - \lambda\, I) = 0 \end{array}$$

$$\det(A - \lambda\, I) \;=\; \det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 6-\lambda \end{pmatrix}\right) \;=\; (1-\lambda)(6-\lambda) - 2 \times 3 \;=\; \lambda^2 - 7\lambda + \cancel{6} - \cancel{6} \;=\; \lambda\,(\lambda - 7)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathrm{Sp}(A) = \{0, 7\}.}$$

Commentaire

- On a démontré dans la question précédente que la matrice A n'est pas inversible. Cela démontre que 0 est valeur propre de A, ce qu'on retrouve ici.
- La matrice A est une matrice carrée d'ordre 2. On démontre ici qu'elle possède 2 valeurs propres distinctes. Même si ce n'est pas l'objet de la question, on peut conclure que cette matrice est diagonalisable.

- Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} U \in E_0(A) & \iff & AU = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & 2\,y & = & 0 \\ 3\,x & + & 6\,y & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & 2\,y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} E_0(A) &= \left\{ U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \ \mid \ AU = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \ \mid \ x = -2y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \ \mid \ y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \ \mid \ y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } E_0(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).}$$

- Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} U \in E_7(A) &\iff AU = 7U \\ &\iff (AU - 7I)\ U = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} -6\,x & + & 2\,y & = & 0 \\ 3\,x & - & y & = & 0 \end{array} \right. \\ &\overset{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcl} -6\,x & + & 2\,y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} E_7(A) &= \left\{ U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \ \mid \ (A - 7I)\ U = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \ \mid \ y = 3x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \ \mid \ x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \ \mid \ x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } E_7(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).}$$

□

Dans la suite de l'exercice, on considère l'application f qui, à toute matrice M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) = AM$$

3. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord que si $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, alors $f(M) = AM \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est à valeurs dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

- Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M_1, M_2) \in \big(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\big)^2$.

$$\begin{aligned} f\big(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2\big) &= A\ \big(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2\big) \\ &= A(\lambda_1 \cdot M_1) + A(\lambda_2 \cdot M_2) \\ &= \lambda_1\ AM_1 + \lambda_2\ AM_2 \\ &= \lambda_1\ f(M_1) + \lambda_2\ f(M_2) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que l'application } f \text{ est linéaire.}}$$

□

9782340-026636_001_784.indd 560 30/07/2018 09:53

4. a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et vérifier que $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 2.

Démonstration.

- Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
M \in \mathrm{Ker}(f) & \Longleftrightarrow & f(M) = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & AM = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+6z & 3y+6t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rrrrcl} x & & +\ 2\,z & & = & 0 \\ & y & & +\ 2\,t & = & 0 \\ 3\,x & & +\ 6\,z & & = & 0 \\ & 3\,y & & +\ 6\,t & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 3\,L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rrrrcl} x & & +\ 2\,z & & = & 0 \\ & y & & +\ 2\,t & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \\ & 3\,y & & +\ 6\,t & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_4 \leftarrow L_4 - 3\,L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rrrrcl} x & & +\ 2\,z & & = & 0 \\ & y & & +\ 2\,t & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Ker}(f) & = & \left\{ M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \ \mid\ x = -2z \ \texttt{ ET } \ y = -2t \right\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} -2z & -2t \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \ \mid\ z \in \mathbb{R} \ \texttt{ ET } \ t \in \mathbb{R} \right\} \\
& = & \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \ \mid\ z \in \mathbb{R} \ \texttt{ ET } \ t \in \mathbb{R} \right\} \\
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

- La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est :

  × génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$.

  × libre car constituée de **deux** vecteurs non colinéaires.

  C'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 2.}$$

□

b) En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

Démonstration.
D'après le théorème du rang :

$$\underbrace{\dim\big(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\big)}_{=4} = \underbrace{\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)}_{=2} + \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 2.}$$

□

c) On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle que la famille (E_1, E_2, E_3, E_4) est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Écrire $f(E_1)$, $f(E_2)$, $f(E_3)$, $f(E_4)$ sous forme de combinaisons linéaires de E_1, E_2, E_3, et E_4 puis donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Démonstration.

- Procédons tout d'abord au calcul :

× $f(E_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot E_1 + 0 \cdot E_2 + 3 \cdot E_3 + 0 \cdot E_4.$

× $f(E_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot E_1 + 1 \cdot E_2 + 0 \cdot E_3 + 3 \cdot E_4.$

× $f(E_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot E_1 + 0 \cdot E_2 + 6 \cdot E_3 + 0 \cdot E_4.$

On remarque : $f(E_3) = 2f(E_1)$.

× $f(E_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 0 \cdot E_1 + 2 \cdot E_2 + 0 \cdot E_3 + 6 \cdot E_4.$

On remarque : $f(E_4) = 2f(E_2)$.

- Comme $(E_1, E_2, 2_3, E_4)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\,(f(E_1), f(E_2), f(E_3), f(E_4)) \\ &= \mathrm{Vect}\,(f(E_1), f(E_2), 2 \cdot f(E_1), 2 \cdot f(E_1)) \\ &= \mathrm{Vect}\,(f(E_1), f(E_2)) \\ &= \mathrm{Vect}\,(E_1 + 3 \cdot E_3,\ E_2 + 3 \cdot E_4) \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F} = (E_1 + 3 \cdot E_3,\ E_2 + 3 \cdot E_4)$ est :

× génératrice de $\mathrm{Im}(f)$,

× de cardinal $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 2 = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$.

$$\boxed{\text{On en conclut que la famille } (E_1 + 3 \cdot E_3,\ E_2 + 3 \cdot E_4) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f).}$$

Commentaire

- Il est souvent demandé, à la suite d'un tel calcul, de donner la matrice représentative de l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. On obtient ici :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- La matrice obtenue n'est pas inversible puisque sa dernière colonne est colinéaire à la deuxième. Ce résultat n'est pas surprenant puisque :

$$f \text{ non bijective} \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ non inversible}$$

Lorsque la base $\mathscr{B}$ est fixée, l'application $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$, appelée parfois isomorphisme de représentation, permet de traduire les propriétés énoncées dans le monde des espaces vectoriels en des propriétés énoncées dans le monde matriciel. Voici quelques correspondances :

$$\begin{array}{rcl} E \text{ espace vectoriel de dimension } n & \longleftrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ f : E \to E \text{ endomorphisme} & \longleftrightarrow & \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ f \text{ bijective} & \longleftrightarrow & \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ inversible} \end{array}$$

Dans cet exercice le travail s'effectue au niveau des espaces vectoriels.

□

5. a) Déterminer l'image par f des vecteurs de $\text{Im}(f)$.

Démonstration.
Soit $M \in \text{Im}(f) = \text{Vect}\,(E_1 + 3 \cdot E_3,\ E_2 + 3 \cdot E_4)$. Il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{array}{rrcl} & M & = & \lambda_1 \cdot (E_1 + 3 \cdot E_3) + \lambda_2 \cdot (E_2 + 3 \cdot E_4) \\ \text{ainsi} & f(M) & = & \lambda_1 \cdot f(E_1 + 3 \cdot E_3) + \lambda_2 \cdot f(E_2 + 3 \cdot E_4) \end{array}$$

Or :

× $$\begin{array}{rcl} f(E_1 + 3 \cdot E_3) & = & f(E_1) + 3 \cdot f(E_3) \\ & = & E_1 + 3 \cdot E_3 + 3 \cdot (2 \cdot E_1 + 6 \cdot E_3) \\ & = & 7 \cdot E_1 + 21 \cdot E_3 = 7 \cdot (E_1 + 3 \cdot E_3) \end{array}$$

× $$\begin{array}{rcl} f(E_2 + 3 \cdot E_4) & = & f(E_2) + 3 \cdot f(E_4) \\ & = & E_2 + 3 \cdot E_4 + 3 \cdot (2 \cdot E_2 + 6 \cdot E_4) \\ & = & 7 \cdot E_2 + 21 \cdot E_4 = 7 \cdot (E_2 + 3 \cdot E_4) \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} f(M) & = & 7\lambda_1 \cdot (E_1 + 3 \cdot E_3) + 7\lambda_2 \cdot (E_2 + 3 \cdot E_4) \\ & = & 7 \cdot \Big(\lambda_1 \cdot (E_1 + 3 \cdot E_3) + \lambda_2 \cdot (E_2 + 3 \cdot E_4)\Big) \\ & = & 7 \cdot M \end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } M \in \text{Im}(f),\ f(M) = 7 \cdot M.}$$

Commentaire

Il est aussi possible de revenir à la définition de f est des matrices $f(E_i)$.
On écrit alors :

- Tout d'abord : $E_1 + 3 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Et :

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 21 & 0 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Puis : $E_2 + 3 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Et :

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

□

b) Donner les valeurs propres de f puis conclure que f est diagonalisable.

Démonstration.

- D'après la question ***4.a)***, $\text{Ker}(f) \neq \{0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\}$.
  Ainsi, 0 est valeur propre de f, d'espace propre associé $E_0(f) = \text{Ker}(f)$ et $\dim\big(\text{Ker}(f)\big) = 2$.
- D'après la question précédente, 7 est valeur propre de f et :

$$E_7(f) \supset \text{Im}(f)$$

  (toute matrice $M \in \text{Im}(f)$ est vecteur propre de f associé à la valeur propre 7)
  Or, d'après la question précédente, $\dim\big(\text{Im}(f)\big) = 2$.
- On en déduit :

$$\dim\big(E_0(f)\big) + \dim\big(E_7(f)\big) \geqslant 4$$

  Or, par propriété du cours :

$$\dim\big(E_0(f)\big) + \dim\big(E_7(f)\big) \leqslant \dim\big(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\big) = 4$$

- On en conclut :

$$\dim\big(E_0(f)\big) + \dim\big(E_7(f)\big) = 4$$

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ est diagonalisable.}}$$

Commentaire

Il est possible de rédiger autrement en exhibant une base de vecteurs propres.
Pour ce faire, on définit la famille $\mathcal{F}$ obtenue comme concaténation de bases de $E_0(f)$ et de $\text{Im}(f) \subset E_7(f)$. Plus précisément, on note :

$$\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$$

Cette famille est libre car est la concaténation de familles libres (puisqu'une base est une famille libre) issues de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes.
Ainsi la famille $\mathcal{F}$ est :

× libre,

× de cardinal $\text{Card}\,(\mathcal{F}) = 4 = \dim\Big(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\Big)$.

Ainsi, $\mathcal{F}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de f.
On en conclut que f est diagonalisable.

□

6. Généralisation : f est toujours l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$, mais cette fois, A est une matrice quelconque de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On admet que f et A possèdent des valeurs propres et on se propose de montrer que ce sont les mêmes.

a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre colonne associé.
Justifier que X^tX appartient à $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, puis montrer que c'est un vecteur propre de f.
En déduire que λ est valeur propre de f.

Démonstration.

- L'énoncé précise que X est un vecteur colonne. Notons le $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Alors :

$$X^tX = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 \\ x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$$

De plus, comme X est un vecteur propre de A, en particulier : $X \neq 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.
Cela signifie : $x_1 \neq 0$ `OU` $x_2 \neq 0$. On en déduit : $x_1^2 \neq 0$ `OU` $x_2^2 \neq 0$.

En conclusion, X^tX est un élément **non nul** de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

- D'autre part :

$$\begin{aligned} f\big(X^tX\big) &= AX^tX = (AX)\ {}^tX \\ &= (\lambda X)\ {}^tX && \textit{(car } X \textit{ est un vecteur propre associé à la valeur propre } \lambda\textit{)} \\ &= \lambda\ X^tX \end{aligned}$$

Ainsi, $X^tX \neq 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ est un vecteur propre de f associé à λ qui est elle-même une valeur propre de f.

Commentaire

On rappelle qu'un vecteur propre est un vecteur **non nul**. Il convient donc de démontrer le caractère non nul de X^tX pour obtenir tous les points.

□

b) Soit λ une valeur propre de f et M une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ vecteur propre de f associé à cette valeur propre. En considérant les colonnes C_1 et C_2 de M, montrer que λ est valeur propre de A.

Démonstration.

- Tout d'abord comme M est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ :

$$\begin{array}{ccc} f(M) & = & \lambda \cdot M \\ \shortparallel & & \\ AM & & \end{array}$$

- En multipliant de part et d'autre cette égalité par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} AM\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & = & \lambda \cdot M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ AC_1 & & \lambda \cdot C_1 \end{array}$$

- De même, en multipliant de part et d'autre cette égalité par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$AC_2 \ = \ \lambda \cdot C_2$$

- Enfin, comme M est un vecteur propre de f, alors, en particulier : $M \neq 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.
On en déduit : $C_1 \neq 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$ `OU` $C_2 \neq 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.

Ainsi, l'une (au moins) des colonnes de M est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Commentaire

- La remarque précédente s'applique de nouveau ici : pour que C_1 soit un vecteur propre de M, il faut démontrer $C_1 \neq 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.
- Afin de travailler sur la première (resp. deuxième) colonne de la matrice A, on a multiplié à droite par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$). Cette technique peut être adaptée à un travail sur les lignes. En multipliant à gauche par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$), on récupère la première (resp. deuxième) ligne de A. Cette technique était déjà présente dans le problème de l'épreuve `EDHEC 2017`. On peut retenir l'idée développée dans le paragraphe par la forme :

$$L \ A \ C$$

qui signifie qu'avec une multiplication à gauche, on effectue une opération sur les (L)ignes, tandis qu'avec une multiplication à droite, on effectue une multiplication sur les (C)olonnes.

□

Exercice 2

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir Face vaut également $\frac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant Face à coup sûr et une troisième pièce numérotée 2, donnant Pile à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient Pile au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier Pile et la variable aléatoire Y, égale au rang d'apparition du premier Face. On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Pile et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Face.

1. a) Déterminer $\mathbb{P}([X = 1])$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord : $[X = 1] = P_1$.
- La famille (A_0, A_1, A_2) forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X=1]\big) &= \mathbb{P}(P_1) \\
&= \mathbb{P}(A_0 \cap P_1) + \cancel{\mathbb{P}(A_1 \cap P_1)} + \mathbb{P}(A_2 \cap P_1) && \textit{(car } A_1 \cap P_1 = \varnothing \textit{ puisque la pièce } 1 \textit{ ne donne que Face)} \\
&= \mathbb{P}(A_0)\ \mathbb{P}_{A_0}(P_1) + \mathbb{P}(A_2)\ \mathbb{P}_{A_2}(P_1) && \textit{(car pour tout } i \in [\![0,2]\!], \ \mathbb{P}(A_i) = \tfrac{1}{3} \neq 0\textit{)} \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 \ = \ \frac{1}{2} && \textit{(par définition des pièces } 0 \textit{ et } 2\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X=1]\big) \ = \ \frac{1}{2}}$$

Commentaire

Cette question est une illustration du cadre classique de la formule des probabilités totales : l'expérience aléatoire débute par un choix et ce choix influence le reste de l'expérience aléatoire. On considère ici l'événement P_1, réalisé si Pile est obtenu dès le premier lancer. Il est important de comprendre que la probabilité de cet événement dépend du choix initial de la pièce utilisée pour faire les lancers. L'idée derrière la formule des probabilités totales est de déterminer la probabilité de l'événement P_1 pour tous les choix possibles de pièce.
Ce qui se formalise comme suit :

- × les choix de la pièce sont représentés par la famille d'événements (A_0, A_1, A_2).
  Cette famille est un système complet d'événements car deux pièces ne peuvent être choisies à la fois (si $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$) et car l'une des pièces est forcément choisie ($A_0 \cup A_1 \cup A_2 = \Omega$).
- × on détermine, pour tout $i \in [\![0, 2]\!]$, $\mathbb{P}\big(A_i \cap P_1\big)$.

□

b) Montrer que : $\forall n \geqslant 2$, $\mathbb{P}([X = n]) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- On raisonne comme dans la question précédente.
  On remarque tout d'abord que l'événement $[X = n]$ est réalisé si et seulement si le premier Pile apparaît au rang n. Autrement dit, si et seulement si l'on a obtenu $n-1$ Face suivi d'un Pile. Ainsi :
  $$[X = n] \ = \ F_1 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap P_n$$
- Par la formule des probabilités totales :
  $$\mathbb{P}\big(\,[X = n]\,\big) \ = \ \mathbb{P}\big(A_0 \cap [X = n]\,\big) + \cancel{\mathbb{P}\big(A_1 \cap [X = n]\,\big)} + \cancel{\mathbb{P}\big(A_2 \cap [X = n]\,\big)}$$
  En effet :
  × $A_1 \cap [X = n] = A_1 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap P_n = \varnothing$ puisque la pièce 1 ne donne jamais Pile.
  × $A_2 \cap [X = n] = A_2 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap P_n = \varnothing$ puisque la pièce 2 donne toujours Pile, notamment dès le premier lancer.
- On obtient ainsi :
  $$\begin{array}{cll} & \mathbb{P}\big(\,[X = n]\,\big) & \\ = & \mathbb{P}\big(A_0 \cap [X = n]\,\big) \ = \ \mathbb{P}\big(A_0 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap P_n\big) & \\ = & \mathbb{P}(A_0) \times \mathbb{P}_{A_0}\big(A_0 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap P_n\big) & \\ = & \mathbb{P}(A_0) \ \times \ \mathbb{P}_{A_0}\big(F_1\big) \ \times \ \ldots \ \times \ \mathbb{P}_{A_0}\big(F_{n-1}\big) \ \times \ \mathbb{P}_{A_0}\big(P_n\big) & \textit{(car les événements sont indépendants pour } \mathbb{P}_{A_0}\textit{)} \\ = & \dfrac{1}{3} \ \times \ \dfrac{1}{2} \ \times \ \ldots \ \times \ \dfrac{1}{2} \ \times \ \dfrac{1}{2} \ = \ \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n & \textit{(car la pièce 0 est équilibrée)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{En combinant tous ces résultats, on obtient : } \mathbb{P}\big(\,[X = n]\,\big) \ = \ \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n.}$$

Commentaire

Il y a une subtilité cachée dans cette question. On utilise le fait que les événements P_i (avec $i \in \mathbb{N}^*$) et F_j (avec $j \in \mathbb{N}^*$) sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}_{A_0}$. L'idée est qu'une fois la pièce choisie, les lancers sont indépendants. Cependant, ces événements `NE SONT PAS` indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$. Démontrons-le.

- Tout d'abord, par la formule des probabilités totales :
  $$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\big(P_1 \cap P_2\big) & = & \mathbb{P}\big(A_0 \cap P_1 \cap P_2\big) + \cancel{\mathbb{P}\big(A_1 \cap P_1 \cap P_2\big)} + \mathbb{P}\big(A_2 \cap P_1 \cap P_2\big) \\ & = & \mathbb{P}(A_0)\ \mathbb{P}_{A_0}\big(P_1 \cap P_2\big) + \mathbb{P}(A_2)\ \mathbb{P}_{A_2}\big(P_1 \cap P_2\big) \\ & = & \mathbb{P}(A_0)\ \mathbb{P}_{A_0}(P_1)\ \mathbb{P}_{A_0}(P_2) + \mathbb{P}(A_2)\ \mathbb{P}_{A_2}(P_1)\ \mathbb{P}_{A_2}(P_2) \\ & = & \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \ + \ \dfrac{1}{3} \times 1 \times 1 \ = \ \dfrac{5}{12} \end{array}$$
- Or, comme vu en question ***1.a)*** : $\mathbb{P}(P_1) \ = \ \frac{1}{2}$ et en raisonnant de même : $\mathbb{P}(P_2) \ = \ \frac{1}{2}$.
  Et ainsi :
  $$\mathbb{P}\big(P_1 \cap P_2\big) = \frac{5}{12} \neq \frac{1}{4} = \mathbb{P}(P_1)\ \mathbb{P}(P_2)$$

□

c) En déduire la valeur de $\mathbb{P}([X=0])$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, X prend soit la valeur 0, soit le rang d'apparition du premier Pile.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X(\Omega) = \{0\} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{N}}$$

- Ainsi, la famille $\big([X=n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=n]\big) = 1$$

et ainsi en réordonnant :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X=0]\big) &= 1 - \mathbb{P}\big([X=1]\big) - \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=n]\big) \\
&= 1 - \frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n && \textit{(d'après les deux questions précédentes)} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}} && \textit{(avec } \tfrac{1}{2} \in\,]-1,1[\textit{)} \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}}{3} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathbb{P}\big([X=0]\big) = \frac{1}{3}.}$$

Commentaire

- La propriété de la question précédente (***1.b)***) a été démontrée pour tout $n \in [\![2,+\infty[\![$. On ne peut donc l'utiliser que pour un entier $n \geqslant 2$. C'est une évidence qu'il convient toutefois de rappeler car elle est trop régulièrement ignorée par les candidats. Lorsque l'on souhaite utiliser un résultat précédemment démontré ou admis, il faut scrupuleusement vérifier que l'on est dans les conditions d'application de ce résultat.
- Il est indispensable de connaître les formules donnant la valeur d'une somme géométrique.
  - Dans le cas d'une somme finie.
    Pour tout $q \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \leqslant n$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=m}^{n} q^k = \frac{q^m - q^{n+1}}{1-q}$$

  - Dans le cas d'une somme infinie.
    Pour tout $q \in\,]-1,1[$, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=m}^{+\infty} q^k = \frac{q^m}{1-q}$$

Commentaire

- Il est aussi possible de traiter cette question directement.
Rappelons tout d'abord que l'événement $[X = 0]$ est réalisé si l'on n'obtient jamais Pile. Ainsi :
$$[X = 0] \; = \; \bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i$$
D'après le théorème de la limite monotone :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i\right) \; = \; \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right)$$
Pour plus de lisibilité, notons $C_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i$. Par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements (A_0, A_1, A_2) :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_n) &= \mathbb{P}(A_0 \cap C_n) + \mathbb{P}(A_1 \cap C_n) + \cancel{\mathbb{P}(A_2 \cap C_n)} \\ &= \mathbb{P}(A_0)\ \mathbb{P}_{A_0}(C_n) + \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}_{A_1}(C_n) \end{aligned}$$
En effet $A_2 \cap C_n = \varnothing$ puisque la pièce 2 donne toujours Pile, notamment dès le premier lancer. Enfin :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{A_0}(C_n) &= \mathbb{P}_{A_0}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\Big) \; = \; \mathbb{P}_{A_0}(F_1) \times \ldots \times \mathbb{P}_{A_0}(F_n) \; = \; \frac{1}{2} \times \ldots \times \frac{1}{2} \; = \; \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \mathbb{P}_{A_1}(C_n) &= \mathbb{P}_{A_1}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\Big) \; = \; \mathbb{P}_{A_1}(F_1) \times \ldots \times \mathbb{P}_{A_1}(F_n) \; = \; 1 \times \ldots \times 1 \; = \; 1 \end{aligned}$$
On en conclut :
$$\mathbb{P}(C_n) \; = \; \mathbb{P}(A_0)\ \mathbb{P}_{A_0}(C_n) + \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}_{A_1}(C_n) \; = \; \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$
car $\frac{1}{2} \in \,]-1, 1[$. On retrouve bien le résultat énoncé.
- Cette démonstration permet de comprendre le résultat :
  - × si on choisit la pièce 0, l'événement $[X = 0]$ se produit avec probabilité nulle.
  - × si on choisit la pièce 1 (ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{3}$), l'événement $[X = 0]$ est l'événement certain puisqu'on n'obtient que des Face avec cette pièce. Il se produit alors avec probabilité 1.
  - × si on choisit la pièce 2, l'événement $[X = 0]$ est l'événement impossible puisqu'on n'obtient que des Pile avec cette pièce.

□

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum n\ \mathbb{P}([X = n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k\ \mathbb{P}([X = k])$. Alors, pour $n \geqslant 2$:
$$\begin{aligned} S_n &= \cancel{0 \times \mathbb{P}([X = 0])} + 1 \times \mathbb{P}([X = 1]) + \sum_{k=2}^{n} k\ \mathbb{P}([X = k]) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} k\ \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^k \; = \; \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\ \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

- On fait alors apparaître la somme partielle d'une série géométrique dérivée première convergente car de raison $\frac{1}{2} \in \,]-1,1[$:

$$\sum_{k=2}^{n} k \, \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \; = \; \left(\sum_{k=1}^{n} k \, \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right) - 1 \times 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} - 1 \; = \; 4 - 1 \; = \; 3$$

- On en déduit que X admet une espérance, donnée par :

$$\mathbb{E}(X) \; = \; \sum_{k=0}^{+\infty} k \, \mathbb{P}([X=k]) \; = \; \lim_{n \to +\infty} S_n \; = \; \frac{1}{2} + \frac{1}{\cancel{3}} \, \frac{1}{2} \, \cancel{3} \; = \; \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \; = \; 1$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 1}$$

□

3. Montrer que $X(X-1)$ possède une espérance.
En déduire que X possède une variance et vérifier que $\mathbb{V}(X) = \dfrac{4}{3}$.

Démonstration.

- La v.a.r. $X(X-1)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum n(n-1) \, \mathbb{P}([X=n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1) \, \mathbb{P}([X=k]) = \sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1) \, \mathbb{P}([X=k])$. Alors, pour $n \geqslant 2$:

$$T_n \;\; = \; \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \, \frac{1}{3} \, \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \; = \; \frac{1}{3} \, \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \, \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3} \, \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \, \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}$$

en reconnaissant la somme partielle d'une série géométrique dérivée deuxième convergente car de raison $\frac{1}{2} \in \,]-1,1[$.
- On en déduit que $X(X-1)$ admet une espérance, donnée par :

$$\mathbb{E}\big(X(X-1)\big) \; = \; \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \, \mathbb{P}([X=k]) \; = \; \lim_{n \to +\infty} T_n \; = \; \frac{1}{3} \, \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \, 2 \times 2^3 \; = \; \frac{4}{3}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\big(X(X-1)\big) = \frac{4}{3}}$$

- D'autre part :

$$X^2 \; = \; X(X-1) + X$$

Ainsi, X^2 admet une espérance comme somme de v.a.r. qui admettent une espérance. Enfin, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}\big(X^2\big) \; = \; \mathbb{E}\big(X(X-1)\big) + \mathbb{E}(X) \; = \; \frac{4}{3} + 1 \; = \; \frac{7}{3}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\big(X^2\big) \; = \; \frac{7}{3}}$$

- Enfin, par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) \; = \; \mathbb{E}\big(X^2\big) - (\mathbb{E}(X))^2 \; = \; \frac{7}{3} - 1^2 \; = \; \frac{4}{3}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) \; = \; \frac{4}{3}}$$

Commentaire

On a déjà rappelé les formules concernant les sommes géométriques.
Ajoutons celles des sommes géométriques dérivées première et deuxième. Pour $q \in]-1, 1[$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} k\ q^k = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\ q^k = \frac{2}{(1-q)^3}$$

□

4. Justifier que Y suit la même loi que X.

Démonstration.
L'expérience décrite dans l'énoncé fait apparaître une symétrie des rôles de Pile et Face.
Plus précisément, pour chaque côté (Pile et Face), on dispose :
- × d'une pièce donnant ce côté avec probabilité $\frac{1}{2}$,
- × d'une deuxième pièce donnant toujours ce côté,
- × d'une troisième pièce donnant toujours l'autre côté.

De plus, le choix de la pièce se fait de manière équiprobable. Ainsi, la probabilité d'obtenir Pile à un certain rang est la même que la probabilité d'obtenir Face à ce même rang.

> On en déduit que les v.a.r. X et Y qui donnent respectivement le rang d'apparition du premier Pile et du premier Face suivent la même loi.

□

5. ***a)*** Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}([Y = j])$.

Démonstration.
L'événement $[X = 1] \cap [Y = j]$ est réalisé si et seulement si le premier Pile apparaît au 1^{er} rang et le premier Face apparaît au $j^{\text{ème}}$ rang. Ainsi, cet événement est réalisé par tous les ∞-tirages qui commencent par $j-1$ Pile suivis d'un Face :

$$[X = 1] \cap [Y = j] \ = \ P_1 \cap \ldots \cap P_{j-1} \cap F_j \ = \ [Y = j]$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big([X = 1] \cap [Y = j]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([Y = j]\big).}$$

□

b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = 1]) = \mathbb{P}([X = i])$.

Démonstration.
On retrouve la question précédente en échangeant les rôles de Face et Pile. Par un raisonnement analogue, on obtient :

$$[X = i] \cap [Y = 1] \ = \ F_1 \cap \ldots \cap F_{i-1} \cap P_i \ = \ [X = i]$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big([X = i] \cap [Y = 1]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([X = i]\big).}$$

□

6. Loi de $X + Y$.

a) Expliquer pourquoi $X + Y$ prend toutes les valeurs positives sauf 0 et 2.

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$ un ∞-tirage. Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$, trois cas se présentent.
- Si $X(\omega) = 0$ c'est qu'on n'a pas obtenu de Pile lors de ce tirage.
  Dans ce cas, on obtient Face dès le premier tirage. Ainsi :

$$(X + Y)(\omega) \ = \ X(\omega) + Y(\omega) \ = \ 0 + 1 \ = \ 1$$

- Si $X(\omega) = 1$ c'est qu'on obtient Pile lors du premier tirage. Dans ce cas :
  × soit Face n'apparaît pas du tout dans le tirage ω. Alors $Y(\omega) = 0$ et :
$$(X+Y)(\omega) \;=\; X(\omega) + Y(\omega) \;=\; 1$$
  × soit Face apparaît dans le tirage, ce qui se produit au mieux pour la première fois au $2^{\text{ème}}$ rang. En notant $Y(\omega) = j \in [\![2, +\infty[\![$, on obtient :
$$(X+Y)(\omega) \;=\; X(\omega) + Y(\omega) \;=\; 1 + j \in [\![3, +\infty[\![$$
  Il est à noter que la v.a.r. $X+Y$ peut prendre toutes les valeurs $k \in [\![3, +\infty[\![$: il suffit pour cela de considérer un ∞-tirage commençant par $k-1$ Pile successifs et suivi d'un Face au $k^{\text{ème}}$ rang.
- Si $X(\omega) = i \in [\![2, +\infty[\![$ c'est qu'on obtient Pile pour la première fois au $i^{\text{ème}}$ rang.
  On a alors obtenu Face lors du 1^{er} tirage.
$$(X+Y)(\omega) \;=\; X(\omega) + Y(\omega) \;=\; i + 1 \in [\![3, +\infty[\![$$
$$\boxed{(X+Y)(\Omega) \;=\; \{1\} \cup [\![3, +\infty[\![}$$
□

b) Montrer que $\mathbb{P}\big([X+Y=1]\big) = \dfrac{2}{3}$.

Démonstration.
Comme détaillé dans la question précédente, l'événement $[X+Y=1]$ est réalisé si on n'obtient jamais Face ou si on n'obtient jamais Pile. Ainsi :
$$[X+Y=1] \;=\; [X=0] \cup [Y=0]$$
Ces deux événements étant incompatibles, on obtient :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X+Y=1]\big) &= \mathbb{P}\big([X=0]\big) + \mathbb{P}\big([Y=0]\big) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \;=\; \frac{2}{3} \qquad \textit{(d'après les questions } \textbf{\textit{1.c)}} \textit{ et } \textbf{\textit{4.}}\textit{)}\end{aligned}$$
$$\boxed{\mathbb{P}\big([X+Y=1]\big) = \frac{2}{3}}$$
□

c) Justifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :
$$[X+Y=n] = \big([X=1] \cap [Y=n-1]\big) \bigcup \big([Y=1] \cap [X=n-1]\big)$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 3$. On procède par double inclusion.
Soit $\omega \in \Omega$ un ∞-tirage.

($\subset$) Supposons $\omega \in [X+Y=n]$. Autrement dit : $X(\omega) + Y(\omega) = n$. Comme $n \geqslant 3$, cela démontre, comme déjà vu en question ***6.a)*** que l'∞-tirage ω contient au moins un Pile (si ce n'est pas le cas, Face apparaît dès le premier lancer et dans ce cas $Y(\omega) = 1$ et $X(\omega) + Y(\omega) = 1$). Notons alors i le rang du premier Pile dans ω. Deux cas se présentent.

- Soit $i = 1$: dans ce cas, $X(\omega) = 1$.
  Or, comme $X(\omega) + Y(\omega) = n$ alors $Y(\omega) = n-1$.

  Ainsi, $\omega \in [X=1] \cap [Y=n-1]$.

– Soit $i \in [\![2, +\infty[\![$: dans ce cas, l'∞-tirage ω débute forcément par Face car le premier Pile apparaît au rang $i \geqslant 2$. Ainsi : $Y(\omega) = 1$ et $X(\omega) = i$. Or, comme $X(\omega) + Y(\omega) = n$ alors $i + 1 = n$ ou encore $i = n - 1$.

Ainsi, $\omega \in [Y = 1] \cap [X = n - 1]$.

On en déduit : $\omega \in \big([X = 1] \cap [Y = n - 1] \big) \bigcup \big([Y = 1] \cap [X = n - 1] \big)$.

($\supset$) Supposons $\omega \in \big([X = 1] \cap [Y = n - 1] \big) \bigcup \big([Y = 1] \cap [X = n - 1] \big)$. Ainsi :

× soit $\omega \in [X = 1] \cap [Y = n - 1]$.
Dans ce cas $X(\omega) = 1$, $Y(\omega) = n - 1$ et ainsi : $X(\omega) + Y(\omega) = n$.

× soit $\omega \in [X = n - 1] \cap [Y = 1]$.
Dans ce cas $X(\omega) = n - 1$, $Y(\omega) = 1$ et ainsi : $X(\omega) + Y(\omega) = n$.

Ainsi, dans les deux cas $X(\omega) + Y(\omega) = n$ et donc : $\omega \in [X + Y = n]$.

Commentaire

- Par définition, un événement est un ensemble. Démontrer l'égalité de deux ensembles c'est démontrer que tout élément du premier ensemble est dans le second et inversement. Ou encore qu'un élément est dans le premier ensemble si et seulement si il est aussi dans le second.
- En terme d'événement, cela signifie que le premier événement est réalisé (il existe ω réalisant cet événement *i.e.* il existe ω appartenant à cet événement) si et seulement si le second événement est réalisé (l'élément ω précédent est aussi élément de cet événement).
- L'énoncé demande de « Justifier » une égalité entre événements. Cette terminologie est souvent associée à des démonstrations courtes. On peut alors supposer qu'une rédaction sans les ω (en prenant comme hypothèse initiale : $X + Y = n$) serait acceptée. Cependant, il faut bien comprendre que toute v.a.r. Z est une application $Z : \Omega \to \mathbb{R}$. Écrire « si $Z = n$ » signifie donc que l'on considère tous les éléments $\omega \in \Omega$ tels que $Z(\omega) = n$ c'est à dire tous les éléments ω qui réalisent l'événement $[Z = n]$. D'ailleurs, on peut aussi rédiger en commençant par : « Supposons que l'événement $[X + Y = n]$ est réalisé ».

□

d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$\mathbb{P}([X + Y = n]) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 3$.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\big([X + Y = n] \big) \\
= \ & \mathbb{P}\big([X = 1] \cap [Y = n - 1] \ \cup \ [Y = 1] \cap [X = n - 1] \big) && \textit{(d'après la question précédente)} \\
= \ & \mathbb{P}\big([X = 1] \cap [Y = n - 1] \big) + \mathbb{P}\big([Y = 1] \cap [X = n - 1] \big) && \textit{(car les deux événements de cette réunion sont incompatibles)} \\
= \ & \mathbb{P}\big([Y = n - 1] \big) + \mathbb{P}\big([X = n - 1] \big) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{5.}}\textit{)} \\
= \ & \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.b)}}\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X + Y = n] \big) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

□

7. Informatique.
On rappelle que, pour tout entier naturel m, l'instruction `grand(1, 1, 'uin', 0, m)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et m (ceci de façon équiprobable).
On décide de coder Pile par 1 et Face par 0.

a) Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
1  piece = grand(1, 1, 'uin', ---, ---)
2  x = 1
3  if piece == 0 then
4      lancer == grand(1, 1, 'uin', ---, ---)
5      while lancer == 0
6          lancer = ---
7          x = ---
8      end
9  else
10     if piece == 1 then
11         x = ---
12     end
13 end
14 disp(x)
```

Démonstration.

- En ligne 1, la variable `piece` doit contenir un entier aléatoire compris entre 0 et 2 ce qui permet de coder le choix de la pièce qui sera utilisée pour les tirages.

```
1  piece = grand(1, 1, 'uin', 0, 2)
```

- La structure conditionnelle qui suit (l'utilisation du `if`) permet de coder l'expérience pour chacune des pièces :
  - si la pièce 0 a été initialement choisie, on effectue un premier lancer qui doit donner Pile (représenté par 1) avec probabilité $\frac{1}{2}$ et Face (représenté par 0) avec probabilité $\frac{1}{2}$.

```
4      lancer == grand(1, 1, 'uin', 0, 1)
```

On doit alors réitérer cet expérience tant que l'on n'obtient pas Pile, c'est à dire tant que l'on obtient Face, ce qui correspond à la condition :

```
5      while lancer == 0
```

À chaque tour de boucle (on y rentre tant qu'on n'obtient pas Pile), on effectue un nouveau lancer avec cette pièce :

```
6          lancer = grand(1, 1, 'uin', 0, 1)
```

On met alors à jour le compteur `x`, en l'incrémentant de 1 à chaque Face obtenu.

```
7          x = x + 1
```

Ce compteur a été initialisé à 1 de sorte qu'en sortie de boucle il contient ce nombre 1 incrémenté de 1 à chaque Face. Ainsi, `x` contient bien le rang d'apparition du premier Pile.

– si la pièce 1 a été initialement choisie, alors à chaque tirage on obtient Face. Dans ce cas, la v.a.r. X prend la valeur 0. On met à jour la variable `x` en conséquence.

```
    if piece == 1 then
        x = 0
    end
```

– le dernier cas (choix de la pièce 2) n'apparaît pas explicitement dans cette structure conditionnelle (*cf* question suivante).

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.
On procédera de même dans les autres questions **Scilab**.

□

b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

Démonstration.
Comme signalé dans la question précédente, le choix de la pièce 2 n'apparaît pas explicitement dans la structure conditionnelle. Cette pièce renvoie Pile à chaque lancer. Ainsi, si cette pièce est choisie, X prend la valeur 1. La variable `x` qui est initialisée à 1 ne nécessite donc pas de mise à jour.

Le cas de la pièce numérotée 2 n'apparaît pas explicitement dans le script mais est bien géré par ce programme.

□

9782340-026636_001_784.indd 576 30/07/2018 09:53

Exercice 3

On admet que toutes les variables aléatoires considérés dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

1. Montrer que la fonction f est une densité.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  - Si $x \geqslant 0$: $\frac{x}{a} \geqslant 0$ car $a > 0$ et $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}} > 0$. Ainsi, $f(x) = \frac{x}{a}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}} \geqslant 0$. Donc : $f(x) \geqslant 0$.
  - Si $x < 0$: $f(x) = 0 \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{D'où : } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0.}$$

- La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$ car elle est constante (nulle) sur cet intervalle.
  La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues sur cet intervalle.

$$\boxed{\text{Ainsi } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

Commentaire

La continuité sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points suffit ici.
Mais on peut remarquer que f est continue en 0 puisque :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} 0 = 0, \qquad f(0) = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{a}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}} = 0$$

- Montrons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1.
  - Tout d'abord : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt$, car f est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.
  - La fonction f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $[0, +\infty[$.
    Soit $A \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_0^A f(t)\,dt &= \int_0^A \frac{t}{a}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}}\,dt \\ &= -\int_0^A \frac{-t}{a}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}}\,dt \\ &= -\left[\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}}\right]_0^A \\ &= -\left(\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2a}} - \mathrm{e}^0\right) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2a}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge et vaut } 1.}$$

□

Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X de densité f.

2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
– Si $x < 0$, alors :

$$F_X(x) \;=\; \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) \;=\; \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \;=\; \int_{-\infty}^{x} 0\,dt \;=\; 0$$

car f est nulle sur $]-\infty, 0[$.
– Si $x \geqslant 0$, alors :

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \\
&= \int_{0}^{x} f(t)\,dt && \textit{(car } f \textit{ est nulle en dehors de } [0,+\infty[\textit{)} \\
&= \int_{0}^{x} \frac{t}{a}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}}\,dt && \textit{(par définition de } f \textit{ sur } [0,x]\textit{)} \\
&= 1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}} && \textit{(d'après le calcul de la question précédente)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } F_X : x \mapsto \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

□

3. On considère la variable aléatoire Y définie par : $Y = \dfrac{X^2}{2a}$.

a) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Démonstration.

- Notons $\varphi : x \mapsto \dfrac{x^2}{2a}$ de sorte que $Y = \varphi(X)$.

$$Y(\Omega) = (\varphi(X))(\Omega) = \varphi\big(X(\Omega)\big) \subset \; [0,+\infty[$$

En effet, $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ et $\varphi(\mathbb{R}) \;=\; [0,+\infty[$ (φ ne prend que des valeurs positives).

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  – Si $x < 0$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) \subset \; [0,+\infty[$. Ainsi :

$$F_Y(x) \;=\; \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$$

  – Si $x \geqslant 0$, alors :

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) = \mathbb{P}\Big(\Big[\tfrac{X^2}{2a} \leqslant x\Big]\Big) \\
&= \mathbb{P}\big(\big[X^2 \leqslant 2a\,x\big]\big) && \textit{(car } a > 0\textit{)} \\
&= \mathbb{P}\Big(\Big[\sqrt{X^2} \leqslant \sqrt{2a\,x}\Big]\Big) && \textit{(car la fonction } \sqrt{\cdot} \textit{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[\textit{)} \\
&= \mathbb{P}\big(\big[\,|X| \leqslant \sqrt{2a\,x}\big]\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\big[-\sqrt{2a\,x} \leqslant X \leqslant \sqrt{2a\,x}\big]\big) \\
&= F_X\big(\sqrt{2a\,x}\big) - F_X\big(-\sqrt{2a\,x}\big) && \textit{(car } X \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\
&= F_X\big(\sqrt{2a\,x}\big) = 1-\exp\left(-\frac{\big(\sqrt{2a\,x}\big)^2}{2a}\right) = 1-\exp\left(-\frac{\cancel{2a}\,x}{\cancel{2a}}\right)
\end{aligned}$$

- On en conclut que X admet pour fonction de répartition :

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{On a donc bien : } Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1).}$$ □

b) On rappelle qu'en **Scilab** la commande `grand(1, 1, 'exp', 1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Écrire un script **Scilab** demandant la valeur de a à l'utilisateur et permettant de simuler la variable aléatoire X.

Démonstration.

- Dans cette question, on considère : $X(\Omega) \subset [0, +\infty[$.

Commentaire

Ce premier point amène une remarque sur la notation $X(\Omega)$ lorsque X est une v.a.r.

- Rappelons qu'une v.a.r. X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
  Comme la notation le suggère, $X(\Omega)$ est l'image de Ω par l'application X.
  Ainsi, $X(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \end{aligned}$$

- Il faut bien noter que, dans la définition de $X(\Omega)$, aucune application probabilité $\mathbb{P}$ n'apparaît. Il y a donc une différence fondamentale entre les valeurs que peut prendre X et les valeurs de F_X ou f_X dont la définition dépend d'une probabilité $\mathbb{P}$. Par exemple, si l'on sait que f_X est nulle en dehors de $]0, +\infty[$ alors : :

$$\mathbb{P}\big(\,[X \leqslant 0]\,\big) \ = \ \int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt \ = \ \int_{-\infty}^{0} 0\ dt \ = \ 0$$

  Cela ne signifie pas que X ne prend pas de valeurs négatives mais simplement que cela se produit avec probabilité nulle.
- En toute rigueur, on ne peut donc pas confondre $X(\Omega)$ et l'ensemble sur lequel f_X ne s'annule pas (cela n'a pas beaucoup de sens puisque f_X est définie à un nombre fini de points près). Il est donc fréquent que les énoncés précisent, lors de l'introduction de la v.a.r. X, son ensemble image :

  On considère un variable aléatoire X, **à valeurs positives***, de densité f*

  C'est ce qu'on se permet de faire dans cette question.

- Par définition : $Y = \dfrac{X^2}{2a}$. Ainsi : $X^2 = 2a\ Y$ et $\sqrt{X^2} = \sqrt{2a\ Y}$.
  Enfin, comme on a supposé que X ne prend que des valeurs positives, on obtient :

$$X = \sqrt{2a\ Y}$$

- D'après la question précédente : $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. On en déduit le script suivant :

```
a = input("Prière d''entrer une valeur strictement positive")
y = grand(1, 1, 'exp', 1)
x = sqrt(2*a*y)
disp(x)
```

□

4. a) Vérifier que la fonction g qui à tout réel associe $x^2\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}}$, est paire.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$g(-x) \ = \ (-x)^2\ \exp\left(-\frac{(-x)^2}{2a}\right) \ = \ x^2\ \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) \ = \ g(x)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } g \text{ est paire.}}$$ □

b) Rappeler l'expression intégrale ainsi que la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale de paramètre 0 et a.

Démonstration.
Notons Z une v.a.r. telle que : $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, a)$.

- Alors Z admet pour densité la fonction f_Z définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_Z : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a}\ \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right)$$

- La v.a.r. Z admet une espérance et une variance données par :

$$\mathbb{E}(Z) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(Z) = a$$

De plus, d'après la formule de Kœnig-Huygens : $\mathbb{V}(Z) \ = \ \mathbb{E}\big(Z^2\big) - \big(\mathbb{E}(Z)\big)^2$. Et ainsi :

$$\mathbb{E}\big(Z^2\big) \ = \ \mathbb{V}(Z) + \big(\mathbb{E}(Z)\big)^2 \ = \ a + 0 \ = \ a$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Z \text{ admet pour moment d'ordre 2 : } \mathbb{E}\big(Z^2\big) = a.}$$

Commentaire

- Une bonne connaissance du cours est une condition *sine qua non* de réussite au concours. En effet, on trouve dans toutes les épreuves de maths (même pour les écoles les plus prestigieuses), des questions d'application directe du cours. C'est particulièrement le cas dans cet énoncé où les propriétés caractéristiques de lois usuelles (loi exponentielle, loi normale) sont explicitement demandées.
- Profitons-en pour rappeler que si T est une v.a.r. telle que $T \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ alors T admet pour densité la fonction f_T définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_T : x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

De plus, T admet une espérance et une variance données par : $\mathbb{E}(T) = \mu$ et $\mathbb{V}(T) = \sigma^2$. □

c) En déduire que X possède une espérance et la déterminer.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f_X(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour les calculs de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\ f_X(t)\ dt$.

- Comme f est nulle en dehors de $[0, +\infty[$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f_X(t)\ dt \ = \ \int_0^{+\infty} t\ f_X(t)\ dt$$

- Or, pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$t\ f_X(t) \ = \ \frac{1}{a}\ t^2\ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}} \ = \ \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}\ \frac{1}{\sqrt{a}\ \sqrt{2\pi}}\ t^2\ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}} \ = \ \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}\ t^2 f_Z(t)$$

On a rappelé en question précédente que Z admet un moment d'ordre 2.
De plus, on a démontré en question ***4.a)*** que la fonction $g : t \mapsto t^2\ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}}$ est paire. Il en est de même de la fonction $t \mapsto t^2\ f_Z(t)$ qui n'est autre que g, à une constante multiplicative près.
Ainsi :

$$\mathbb{E}\big(Z^2\big) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_Z(t)\ dt \ = \ 2\int_0^{+\infty} t^2 f_Z(t)\ dt \ = \ 2\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}}\ t f_X(t)\ dt$$

- On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f_X(t)\ dt$ est convergente.
Ainsi, X admet une espérance qui vérifie :

$$\mathbb{E}\big(Z^2\big) \ = \ 2\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}}\ \mathbb{E}(X)$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet pour espérance : } \mathbb{E}(X) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\ \sqrt{a}}\ \mathbb{E}(Z^2) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{2\ \sqrt{a}}\ a \ = \ \frac{\sqrt{a\pi}}{\sqrt{2}}.}$$ □

5. a) Rappeler l'espérance de Y puis montrer que X possède un moment d'ordre 2 et le calculer.

Démonstration.

- On a démontré en question ***3.a)*** : $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } Y \text{ admet une espérance donnée par : } \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{1} = 1.}$$

- Par définition : $X^2 = 2a\ Y$. La v.a.r. X^2 admet donc une espérance car c'est la transformée affine d'une v.a.r. Y qui admet une espérance.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, la v.a.r. } X \text{ admet un moment d'ordre 2 et par linéarité de l'espérance :}\\ \mathbb{E}\big(X^2\big) = 2a\ \mathbb{E}(Y) = 2a.\end{array}}$$ □

b) En déduire que la variance de X est donnée par :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{(4-\pi)\ a}{2}$$

Démonstration.
On a démontré en question précédente que X admet un moment d'ordre 2. Ainsi, X admet une variance et par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) \ &= \ \mathbb{E}\big(X^2\big) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2\\ &= \ 2a - \left(\frac{\sqrt{a\pi}}{\sqrt{2}}\right)^2 \ = \ 2a - \frac{a\pi}{2} \ = \ \frac{4a - a\pi}{2} \ = \ \frac{(4-\pi)\ a}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{(4-\pi)\ a}{2}}$$ □

On suppose désormais que le paramètre a est inconnu et on souhaite l'estimer.

6. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X.

On note S_n la variable aléatoire définie par $S_n = \dfrac{1}{2n} \sum\limits_{k=1}^{n} {X_k}^2$.

a) Montrer que S_n est un estimateur sans biais de a.

Démonstration.
La v.a.r. S_n admet une espérance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui admettent une espérance. De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} {X_k}^2\right) \\
&= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big({X_k}^2\big) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{1}{\cancel{2}n} \sum_{k=1}^{n} \cancel{2}a && \textit{(car } \mathbb{E}\big(X^2\big) = 2a\textit{)} \\
&= \frac{1}{\cancel{n}} \cancel{n}a \;=\; a
\end{aligned}$$

Ainsi, S_n admet un biais donné par :

$$b_a(S_n) \;=\; \mathbb{E}(S_n) - a \;=\; 0$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } S_n \text{ est un estimateur sans biais du paramètre } a.}$$

□

b) Montrer que X^2 possède une variance et que $\mathbb{V}\big(X^2\big) = 4a^2$.

Démonstration.
Par définition : $X^2 = 2a\ Y$. Ainsi, X^2 admet une variance car c'est la transformée affine d'une v.a.r. qui admet une variance. Par propriété de la variance, on obtient :

$$\mathbb{V}\big(X^2\big) \;=\; \mathbb{V}\big(2a\ Y\big) \;=\; 4a^2\ \mathbb{V}(Y) \;=\; 4a^2\ \frac{1}{1^2} \;=\; 4a^2$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } X^2 \text{ admet une variance donnée par } \mathbb{V}\big(X^2\big) = 4a^2.}$$

□

c) Déterminer le risque quadratique $r_a(S_n)$ de S_n en tant qu'estimateur de a.
En déduire que S_n est un estimateur convergent de a.

Démonstration.

- La v.a.r. S_n admet un moment d'ordre 2 en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui admettent des moments d'ordre 2.
- Ainsi, S_n admet un risque quadratique. Et d'après la décomposition biais-variance :

$$\begin{aligned}
r_a(S_n) &= \mathbb{V}_a(S_n) + \cancel{\big(b_a(S_n)\big)^2} && \textit{(car } S_n \textit{ est un estimateur sans biais)} \\
&= \mathbb{V}_a\left(\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} {X_k}^2\right) \;=\; \frac{1}{4n^2}\ \mathbb{V}_a\left(\sum_{k=1}^{n} {X_k}^2\right) && \textit{(par propriété de la variance)} \\
&= \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}_a\left({X_k}^2\right) && \textit{(les v.a.r. } X_k \textit{ sont indépendantes donc, d'après le lemme des coalitions, les v.a.r. } X_k^2 \textit{ le sont aussi)} \\
&= \frac{1}{\cancel{4}n^2} \sum_{k=1}^{n} \cancel{4}a^2 \;=\; \frac{1}{n^{\cancel{2}}}\ \cancel{n}a^2 \;=\; \frac{a^2}{n}
\end{aligned}$$

- Ainsi :

$$r_a(S_n) \;=\; \frac{a^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{\text{Comme } \lim_{n\to+\infty} r_a(S_n) = 0, \text{ on en déduit que } S_n \text{ est un estimateur convergent de } a.}$$ □

7. On suppose que a est inférieur ou égal à 1.

a) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire S_n et en déduire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\Big([|S_n - a| \leqslant \varepsilon] \Big) \;\geqslant\; 1 - \frac{1}{n\ \varepsilon^2}$$

Démonstration.

- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev stipule que pour toute v.a.r. U qui admet une variance :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\big([|U - \mathbb{E}(U)| > \varepsilon] \big) \;\leqslant\; \frac{\mathbb{V}(U)}{\varepsilon^2}$$

Commentaire

Dans cette question, on a considéré l'événement $[|U - \mathbb{E}(U)| > \varepsilon]$ avec une inégalité stricte. Habituellement, le résultat est plutôt présenté avec une inégalité large. Cette dernière permet cependant d'obtenir celle utilisée ici. Pour cela, il suffit de remarquer :

$$[|U - \mathbb{E}(U)| > \varepsilon] \;\subset\; [|U - \mathbb{E}(U)| \geqslant \varepsilon]$$

et ainsi, par croissance de l'application $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}\big([|U - \mathbb{E}(U)| > \varepsilon] \big) \;\leqslant\; \mathbb{P}\big([|U - \mathbb{E}(U)| \geqslant \varepsilon] \big)$$

- Il suffit d'appliquer cette inégalité à la v.a.r. $U = S_n$ qui admet une variance (d'après la question ***6.c)***) et à $\varepsilon > 0$. On obtient :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}\big([|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > \varepsilon] \big) & \leqslant & \dfrac{\mathbb{V}(S_n)}{\varepsilon^2} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \mathbb{P}\big([|S_n - a| > \varepsilon] \big) & & \dfrac{a^2}{n\ \varepsilon^2} \end{array}$$

On en déduit :

$$-\mathbb{P}\big([|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > \varepsilon] \big) \;\geqslant\; -\frac{a^2}{n\ \varepsilon^2}$$

Et ainsi :

$$\mathbb{P}\big([|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \leqslant \varepsilon] \big) \;=\; 1 - \mathbb{P}\big([|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > \varepsilon] \big) \;\geqslant\; 1 - \frac{a^2}{n\ \varepsilon^2}$$

- Enfin, comme on a supposé : $0 < a \leqslant 1$, alors, par croissance de la fonction élévation au carré sur $\mathbb{R}_+$ on a :

$$a^2 \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad 1 - \frac{a^2}{n\ \varepsilon^2} \;\geqslant\; 1 - \frac{1}{n\ \varepsilon^2}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\Big([|S_n - a| \leqslant \varepsilon] \Big) \;\geqslant\; 1 - \frac{1}{n\ \varepsilon^2}.}$$ □

b) Déterminer une valeur de n pour laquelle $\left[S_n - \dfrac{1}{10}, S_n + \dfrac{1}{10}\right]$ est un intervalle de confiance pour a avec niveau de confiance au moins égal à 95%.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\big([|S_n - a| \leqslant \varepsilon]\big) \ \geqslant\ 1 - \dfrac{1}{n\ \varepsilon^2}$.
- Soit $\varepsilon > 0$. Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned}
[|S_n - a| \leqslant \varepsilon] &= [-\varepsilon \leqslant S_n - a \leqslant \varepsilon] \\
&= [-S_n - \varepsilon \leqslant -a \leqslant -S_n + \varepsilon] \\
&= [S_n - \varepsilon \leqslant a \leqslant S_n + \varepsilon] \\
&= [a \in [S_n - \varepsilon, S_n + \varepsilon]\ ]
\end{aligned}$$

- Ainsi, en choisissant $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$, on obtient, par la question précédente :

$$\mathbb{P}\Big(\left[S_n - \frac{1}{10} \leqslant a \leqslant S_n + \frac{1}{10}\right]\Big) \ \geqslant\ 1 - \frac{1}{n\ \left(\frac{1}{10}\right)^2} = 1 - \frac{100}{n}$$

On cherche un intervalle de confiance pour a avec un niveau de confiance au moins égal à 95%. Il faut donc trouver n tel que : $1 - \dfrac{100}{n} \geqslant 0,95$. Or :

$$\begin{aligned}
1 - \frac{100}{n} \geqslant 0,95 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{100}{n} \leqslant 0,05 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{n}{100} \geqslant \frac{1}{0,05} \qquad \textit{(car la fonction inverse est strictement croissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \quad n \geqslant \frac{100}{0,05}
\end{aligned}$$

avec : $\dfrac{100}{0,05} = \dfrac{100}{5 \times 10^{-2}} = \dfrac{20}{10^{-2}} = 20 \times 10^2 = 2000$.

$$\boxed{\text{Pour } n \geqslant 2000,\ \left[S_n - \frac{1}{10}, S_n + \frac{1}{10}\right] \text{ est un intervalle de confiance pour } a \text{ avec niveau de confiance au moins égal à 95\%.}}$$

□

Problème

On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)\ dt$.

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie 1 : étude de f

1. a) Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x.

Démonstration.
Notons $g : t \mapsto \ln\left(1+t^2\right)$.

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Remarquons tout d'abord : $1+t^2 \geqslant 1$.
  Ainsi, par croissance de la fonction ln sur $]0,+\infty[$:

$$g(t) \ = \ \ln\left(1+t^2\right) \ \geqslant \ \ln(1) = 0$$

- La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $g = g_2 \circ g_1$ où :
  - × $g_1 : t \mapsto 1+t^2$ est :
    - – continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale,
    - – telle que $g_1(\mathbb{R}) = [1,+\infty[\ \subset \ ]0,+\infty[$.
  - × $g_2 : t \mapsto \ln(t)$, continue sur $]0,+\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \geqslant 0$ alors la quantité $f(x)$ est bien définie comme intégrale sur le **segment** $[0,x]$ de la fonction g continue sur $[0,x]$.
    De plus : $\forall t \in [0,x]$, $g(t) \geqslant 0$.

    Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant x)$:

$$f(x) \ = \ \int_0^x g(t)\ dt \ \geqslant \ 0$$

$$\boxed{\forall x \geqslant 0,\ f(x) \geqslant 0}$$

  - × si $x < 0$ alors la quantité $f(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\ dt = -\int_x^0 g(t)\ dt$ et bien définie comme opposée de l'intégrale sur le **segment** $[x,0]$ de la fonction g continue sur $[x,0]$.
    De plus : $\forall t \in [x,0]$, $g(t) \geqslant 0$.

    Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(x < 0)$:

$$\int_x^0 g(t)\ dt \ \geqslant \ 0$$

    et ainsi : $f(x) \ = \ \displaystyle\int_0^x g(t)\ dt \ = \ -\int_x^0 g(t)\ dt \ \leqslant \ 0.$

$$\boxed{\forall x < 0,\ f(x) \leqslant 0}$$

Commentaire

On illustre dans cette question la rédaction attendue afin de démontrer qu'une composée de fonctions continues est continue. Par la même rédaction, on pourrait démontrer qu'une composée de fonctions dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^k$ ou $\mathcal{C}^\infty$) est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^k$ ou $\mathcal{C}^\infty$) en remplaçant chaque occurrence du terme « continue » par dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^k$ ou $\mathcal{C}^\infty$). □

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

Démonstration.

- On a vu dans la question précédente que g est continue sur $\mathbb{R}$.
  Elle admet donc une primitive G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition :

$$f(x) \ = \ \int_0^x g(t)\ dt \ = \ \left[\ G(t)\ \right]_0^x \ = \ G(x) - G(0)$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ car } G \text{ l'est.}}$$

(f est la somme d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et d'une constante)

- De plus :

$$f'(x) \ = \ G'(x) - 0 \ = \ g(x) \ = \ \ln\left(1 + x^2\right)$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \ln\left(1 + x^2\right)}$$

Commentaire

- On peut aussi rédiger en se servant du fait que la fonction f est la primitive de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule au point 0. On en déduit immédiatement que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = g(x)$.
- L'intérêt de la démonstration précédente est qu'elle est plus générale et peut donc être adaptée à tous les cas particuliers. Imaginons par exemple une fonction h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \int_0^{x^2} g(t)\ dt = \left[\ G(t)\ \right]_0^{x^2} = G(x^2) - G(0)$$

  La fonction h `N'EST PAS` une primitive de g.
  L'expression ci-dessus permet toutefois de conclure que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de $x \mapsto x^2$ par G toutes les deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = 2x \times G'(x^2) = 2x \times g(x^2) = 2x\ \ln\left(1 + x^2\right)$$

- Il n'y a pas, dans le programme ECE, de théorème permettant de dériver sous le symbole d'intégration. Les tentatives de ce genre révèlent une mauvaise compréhension des objets étudiés.

□

c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à calculer les limites de f).

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = g(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$$

- Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 \geqslant 1$. Ainsi, par croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$:

$$\ln\left(1 + x^2\right) \ \geqslant \ \ln(1) = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que } f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}. \text{ La fonction } f' \text{ ne s'annulant qu'en un point} \\ (f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0), \text{ la fonction } f \text{ est même strictement croissante sur } \mathbb{R}.\end{array}}$$

□

9782340-026636_001_784.indd 586 30/07/2018 09:53

2. a) Montrer que f est impaire.

Démonstration.

- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, intervalle symétrique.
- De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) \ = \ \int_0^{-x} \ln\left(1+t^2\right) \, dt$$

On effectue le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -t \text{ (et donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = - \, dt \quad \text{et} \quad dt = - \, du \\ \bullet \ t = 0 \ \Rightarrow \ u = 0 \\ \bullet \ t = -x \ \Rightarrow \ u = x \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car la fonction $\varphi : u \mapsto -u$ est $\mathcal{C}^1$ sur le segment de bornes 0 et x (c'est le segment $[0, x]$ si $x \geqslant 0$ ou le segment $[x, 0]$ si $x < 0$).

On obtient finalement :

$$f(-x) \ = \ \int_0^{-x} \ln\left(1+t^2\right) dt \ = \ \int_0^{x} \ln\left(1+(-u)^2\right) (-\, du) \ = \ -\int_0^{x} \ln\left(1+u^2\right) du \ = \ -f(x)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x) \text{ et la fonction } f \text{ est impaire.}}$$ □

b) Étudier la convexité de la fonction f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Démonstration.

- En question ***1.a)***, on a démontré que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $f' = g$. En adoptant la même rédaction que dans la question ***1.a)***, on démontre que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) \ = \ \frac{1}{1+x^2} \times 2x$$

Comme $1 + x^2 \geqslant 1 > 0$, la quantité $f''(x)$ est du signe de $2x$.
On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } f \text{ est concave sur }]-\infty, 0] \text{ et convexe sur } [0, +\infty[\text{. La fonction } f \text{ change de} \\ \text{concavité en 0, seul point d'inflexion de la courbe représentative de } f.\end{array}}$$ □

3. a) Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}$$

Démonstration.
Remarquons tout d'abord :

$$a + \frac{b}{1+t^2} = \frac{a\,(1+t^2)+b}{1+t^2} = \frac{(a+b)+at^2}{1+t^2}$$

Ainsi :

$$\frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2} \Leftrightarrow \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{(a+b)+at^2}{1+t^2}$$

Cette dernière égalité étant vérifiée pour tout réel t, elle est équivalente, par identification, au système suivant :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } t \in \mathbb{R},\ \frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}.}$$

□

b) En déduire, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) = x\ \big(\ln(1+x^2)-2\big) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
On calcule $\displaystyle\int_0^x \ln\big(1+t^2\big)\,dt$ en procédant par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{lcl} u(t) = \ln\big(1+t^2\big) & & u'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ v'(t) = 1 & & v(t) = t \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment de bornes 0 et x (c'est le segment $[0,x]$ si $x \geqslant 0$ ou le segment $[x,0]$ si $x < 0$).

On obtient finalement :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \ln\big(1+t^2\big)\,dt &= \Big[\ t\ \ln\big(1+t^2\big)\ \Big]_0^x - \int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2}\,dt \\
&= \Big(x\ \ln\big(1+x^2\big) - \cancel{0\ \ln(1)}\Big) - 2\int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt \quad \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= x\ \ln\big(1+x^2\big) - 2\int_0^x 1\,dt + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \\
&= x\ \ln\big(1+x^2\big) - 2x + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x\ \big(\ln(1+x^2)-2\big) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt}$$

□

4. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ est une intégrale convergente.

Démonstration.
La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

× $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$

× $\forall t \in [1, +\infty[$, $\dfrac{1}{1+t^2} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$

× L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann impropre en $+\infty$, d'exposant 2 ($2 > 1$).

Ainsi, par critère de convergence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ est convergente.

De plus, comme la fonction f est continue sur $[0, 1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$ est bien définie.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt \text{ est convergente.}}$$

□

b) En déduire que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x \ln(1 + x^2)$.

Démonstration.
Soit $x > 0$.

- D'après la question ***3.a)*** :

$$f(x) \;=\; x\; \ln(1+x^2) - 2x + 2 \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

- On en déduit, en divisant de part et d'autre par $x\; \ln(1+x^2) \neq 0$:

$$\frac{f(x)}{x\; \ln(1+x^2)} \;=\; 1 - 2\, \frac{x}{x\; \ln(1+x^2)} + 2\, \frac{\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt}{x\; \ln(1+x^2)}$$

- Or :

  × $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$ ainsi $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln(1+x^2)} = 0$.

  × l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ est convergente.

  On en déduit que $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

  D'autre part, comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln(1+x^2)} = 0$:

$$\lim_{x \to +\infty} 2\, \frac{\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt}{x\; \ln(1+x^2)} \;=\; 0$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x\; \ln(1+x^2)} \;=\; 1 \text{ et ainsi : } f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x\; \ln(1+x^2).}$$

Commentaire

- Dans cette question, il est demandé de démontrer que la fonction f est équivalente à la fonction $h : x \mapsto x \ \ln\left(1+x^2\right)$ au voisinage de $+\infty$. Pour ce faire, il faut systématiquement penser à former le quotient des deux fonctions.
Il s'agit alors de vérifier :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{h(x)} \ = \ 1$$
- Afin de pouvoir appliquer cette définition, on vérifiera au préalable que h ne s'annule pas dans un voisinage de $+\infty$ (ici on a : $\forall x > 0,\ h(x) \neq 0$).

□

c) Vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on a $\ln(1+x^2) = 2\ln(x) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$, puis établir l'équivalent suivant :
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x \ \ln(x)$$

Démonstration.
Soit $x > 0$.
- Remarquons tout d'abord : $1+x^2 \ = \ x^2 \ \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.
- On en déduit, par propriété de la fonction ln :
$$\ln\left(1+x^2\right) \ = \ \ln\left(x^2\right) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \ = \ 2 \ \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$
- Enfin, d'après la question précédente :
$$\frac{f(x)}{2x \ \ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x \ \ln\left(1+x^2\right)}{2x \ \ln(x)} \ = \ \frac{2x \ \ln(x) + x \ \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2x \ \ln(x)} \ = \ 1 + \frac{\cancel{x} \ \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2\cancel{x} \ \ln(x)}$$
et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \ln(1) = 0$ alors :
$$1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2 \ \ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x \ \ln(x).}$$

□

d) Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de $-\infty$.

Démonstration.
- D'après la question ***4.c)*** : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{2x \ \ln(x)} = 1$.
- On pose alors le changement de variable $X = -x$.
Ainsi, si $x \to +\infty$, $X \to -\infty$. On a alors :
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{2x \ \ln(x)} \ &= \ \lim_{X\to-\infty} \frac{f(-X)}{2(-X) \ \ln(-X)} \\ &= \ \lim_{X\to-\infty} \frac{\cancel{-}f(X)}{\cancel{-}2X \ \ln(-X)} \qquad \textit{(car } f \textit{ est impaire)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit } \lim_{X\to-\infty} \frac{f(X)}{2X \ \ln(-X)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{2x \ \ln(x)} = 1 \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} 2x \ \ln(-x).}$$

Commentaire

- Si une fonction est paire (resp. impaire) sur $\mathbb{R}$, alors on peut limiter son étude à l'intervalle $[0, +\infty[$ et en déduire le comportement de la fonction sur $]-\infty, 0]$.
  Plus précisément :
  - × si f est paire sur $\mathbb{R}$ alors la courbe représentative de f, $\mathcal{C}_f$, est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On en déduit notamment que si f admet une limite en $+\infty$, alors elle admet la même limite en $-\infty$.
  - × si f est impaire sur $\mathbb{R}$ alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine. On en déduit notamment que si f admet une limite en $+\infty$, alors elle admet la limite opposée en $-\infty$.
- On écrit dans cette question $\ln(-X)$. On rappelle que l'écriture $-X$ ne désigne pas obligatoirement une quantité négative. Dans cette question, comme $X < 0$, on a $-X > 0$ ce qui permet l'écriture de $\ln(-X)$.

□

5. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
En question ***2.b)*** on a démontré que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée $f' = g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En adoptant la même rédaction que dans la question ***1.a)***, on démontre que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^3 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

□

On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction f, c'est à dire :

$$f(x) = f(0) + \frac{x^1}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) + \underset{x \to 0}{o}(x^3)$$

b) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Commençons par déterminer les dérivées successives de f.

$$f'(x) = \ln\left(1 + x^2\right), \qquad f''(x) = \frac{2x}{1 + x^2}, \qquad f^{(3)}(x) = \frac{2(1 + x^2) - 2x(2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2}$$

- On en déduit :

$$f'(0) = \ln(1) = 0, \qquad f''(0) = 0, \qquad f^{(3)}(0) = \frac{2}{1} = 2$$

Enfin, $f(0) = \displaystyle\int_0^0 \ln\left(1 + t^2\right)\, dt = 0$.
(on peut aussi rappeler que f est la primitive qui s'annule au point 0 de $g : t \mapsto \ln\left(1 + t^2\right)$)

$$\boxed{f(0) = f'(0) = f''(0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(3)}(0) = 2}$$

Commentaire

- Dans l'exercice, il est fondamental d'écrire la formule de Taylor-Young jusqu'à l'ordre 3 puisque les dérivées successives de f en 0 sont nulles jusqu'à cet ordre : $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ et $f^{(3)}(0) \neq 0$.
- Dans le programme ECE, il est clairement spécifié que la notion de développement limité n'est abordée que jusqu'à l'ordre 2. C'est pourquoi le concepteur donne l'expression de la formule à l'ordre 3.
- Il est simple de généraliser la formule de Taylor-Young à l'ordre n. Plus précisément, si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage du point 0, alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

où $f^{(k)}$ représente la dérivée $k^{\text{ème}}$ de f.

□

c) En déduire alors un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0 (on trouve $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^3}{3}$).

Démonstration.
D'après la question précédente et par la formule de Taylor-Young rappelée dans l'énoncé :

$$f(x) \ = \ 2\ \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \ = \ \frac{2}{6}\ x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{3}\ x^3.}$$

□

6. On rappelle qu'en **Scilab**, la commande `grand(1, 1, 'unf', a, b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a, b]$. Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il calcule et affiche, à l'aide de la méthode de Monte-Carlo, une valeur approchée de $f(1)$:

```
U = grand(1, 100 000, 'unf', 0, 1)
V = log(1 + U .^2)
f = -----
disp(f)
```

Démonstration.

- L'idée de la méthode de Monte-Carlo est de faire apparaître $f(1) = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\ dt$ sous forme d'une espérance qu'on pourra alors approcher à l'aide d'une simulation informatique.
- On considère U une v.a.r. telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ de densité : $f_U : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

  Notons alors V la v.a.r. définie par $V = g(U) = \ln(1 + U^2)$.

  D'après le théorème de transfert, la v.a.r. V admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)\ f_U(t)\ dt$ est absolument convergente.
  Les fonctions g et f_U étant à valeurs positives, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

  La fonction $t \mapsto g(t)\ f_U(t)$ étant de classe $\mathcal{C}^0_m$ sur $[0,1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)\ f_U(t)\ dt$ est bien définie.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } V \text{ admet une espérance.}}$$

- Enfin, par définition de f_U on obtient l'espérance de V sous la forme :

$$\mathbb{E}(V) \;=\; \int_0^1 g(t)\; f_U(t)\; dt \;=\; \int_0^1 \ln(1+t^2)\; dt \;=\; f(1)$$

- L'énoncé demande donc de déterminer une valeur approchée de $\mathbb{E}(V)$. L'idée naturelle pour obtenir une approximation de cette espérance est :
  - × de simuler un grand nombre de fois ($N = 100000$ par exemple) la v.a.r. V.
    Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(v_1, \ldots, v_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(V_1, \ldots, V_N)$ de la v.a.r. V.
    (les v.a.r. V_i sont indépendantes et ont même loi que V)
  - × de réaliser la moyenne des résultats de cette observation.

  Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\text{moyenne de l'observation} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} v_i \;\simeq\; \mathbb{E}(V)$$

- Cela se traduit de la manière suivante en **Scilab** :
  - × la ligne 1 permet d'obtenir des valeurs $(u_1, \ldots, u_{100000})$ qui correspondent à l'observation d'un 100000-échantillon $(U_1, \ldots, U_{100000})$ de la v.a.r. U.
  - × en ligne 2, on applique la fonction g à tous les éléments du 100000-uplet précédent, ce qui permet d'obtenir des valeurs $(v_1, \ldots, v_{100000})$ qui correspondent à l'observation d'un 100000-échantillon $(V_1, \ldots, V_{100000})$ de la v.a.r. V.
  - × en ligne 3, il faut calculer la moyenne de ces observations.
    On complète donc cette ligne comme suit.

```
3  f = mean(V)
```

Commentaire

- Un tel niveau d'explication n'est pas attendu aux concours : l'écriture de la ligne manquante démontre la compréhension de toutes les commandes en question.
  On décrit ici de manière précise les instructions afin d'aider le lecteur un peu moins habile en **Scilab**.
- On a utilisé en ligne 3 une fonction prédéfinie en **Scilab**. D'autres solutions sont possibles. Tout d'abord, on peut utiliser la fonction `sum` :

```
3  f = sum(V) / 100000
```

  On peut aussi effectuer la somme à l'aide d'une boucle :

```
3  S = 0
4  for i = 1:100000
5      S = S + V(i)
6  end
7  f = S / 100000
```

  Étant donné l'espace alloué par le programme (une ligne), le concepteur avait certainement en tête la première ou la deuxième solution. Cependant, il est raisonnable de penser que toute réponse juste sera comptée comme telle. Ainsi, la dernière solution rapporte certainement la totalité des points.

□

Partie 2 : étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^n \, dt$.

7. a) La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ?

Démonstration.
Si $n = 0$ alors :

$$\int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^n \, dt \;=\; \int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^0 \, dt \;=\; \int_0^1 1 \, dt \;=\; 1$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La valeur donnée à } u_0 \text{ est cohérente avec l'expression générale de } u_n\text{. On peut donc}\\ \text{considérer, par la suite, que la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est définie par :}\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^n \, dt\end{array}}$$

□

b) Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f.

Démonstration.
Par définition :

$$u_1 \;=\; \int_0^1 \ln(1+t^2) \, dt \;=\; f(1)$$

$$\boxed{u_1 = f(1)}$$

□

8. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $t \in [0,1]$.

- Comme $t \in [0,1]$: $\quad 0 \leqslant t^2 \leqslant 1 \quad$ *(par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0,1]$)*

  ainsi : $\quad 1 \leqslant 1 + t^2 \leqslant 2$

  et : $\quad 0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2) \quad$ *(par croissance de la fonction $\ln$ sur $[0,1]$)*

- Rappelons alors : $\ln(2) \leqslant 1$.
  En effet, par stricte croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, cette inégalité équivaut à $2 \leqslant e^1$.
  On a donc :

$$\ln(1+t^2) \;\leqslant\; 1$$

  En multipliant de part et d'autre de cette inégalité par $\big(\ln(1+t^2)\big)^n \geqslant 0$, on obtient :

$$\big(\ln(1+t^2)\big)^{n+1} \;\leqslant\; \big(\ln(1+t^2)\big)^n$$

- Enfin, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant 1)$:

$$\underbrace{\int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^n \, dt}_{= u_n} \;\leqslant\; \underbrace{\int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^{n+1} \, dt}_{= u_{n+1}}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}\text{. La suite } (u_n) \text{ est donc décroissante.}}$$

Commentaire

Il est possible d'adopter une présentation légèrement différente :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^{n+1} \, dt - \int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^n \, dt \\ &= \int_0^1 \Big(\big(\ln(1+t^2)\big)^{n+1} - \big(\ln(1+t^2)\big)^n\Big) \, dt \\ &= \int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^n \, \big(\ln(1+t^2) - 1\big) \, dt \end{aligned}$$

On démontre alors : $\ln(1+t^2) - 1 \leqslant 0$ pour tout $t \in [0,1]$, d'où on en déduit :

$$\big(\ln(1+t^2)\big)^n \, \big(\ln(1+t^2) - 1\big) \leqslant 0$$

par multiplication par $\big(\ln(1+t^2)\big)^n \geqslant 0$.
On conclut par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$). □

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Dans la question précédente, on a démontré, pour tout $t \in [0,1]$:

$$0 \leqslant \ln(1+t^2)$$

  Par croissance de la fonction élévation à la puissance n sur $[0,+\infty[$, on en déduit :

$$0 \leqslant \big(\ln(1+t^2)\big)^n$$

- Enfin, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$) :

$$\underbrace{\int_0^1 0 \, dt}_{=0} \leqslant \underbrace{\int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^n \, dt}_{=u_n}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est minorée par } 0.}$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante et minorée par } 0. \text{ Elle est donc convergente vers un réel } \ell \geqslant 0.}$$ □

9. a) Établir l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Dans la question ***8.a)***, on a démontré, pour tout $t \in [0,1]$:

$$0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2)$$

  Par croissance de la fonction élévation à la puissance n sur $[0,+\infty[$, on en déduit :

$$0 \leqslant \big(\ln(1+t^2)\big)^n \leqslant \big(\ln(2)\big)^n$$

- Enfin, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_0^1 0 \, dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^n \, dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^1 \big(\ln(2)\big)^n \, dt \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 0 & & u_n & & \big(\ln(2)\big)^n \end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : 0 \leqslant u_n \leqslant \big(\ln(2)\big)^n.}$$

□

b) Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Sur la série de terme général u_n ?

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leqslant u_n \leqslant \big(\ln(2)\big)^n$$

- Or, la série $\sum \big(\ln(2)\big)^n$ est convergente en tant que série géométrique de raison $\ln(2) \in [0, 1[$ (comme on l'a démontré en question ***8.a)***).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série } \sum u_n \text{ est convergente.} \\ \text{On en déduit alors que la suite } (u_n) \text{ est convergente de limite nulle.}\end{array}}$$

Commentaire

Si l'on suit l'ordre de la question, on doit d'abord déterminer la nature de la suite (u_n).
On utilise l'encadrement précédent et on remarque :
× $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.
× $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(\ln(2)\big)^n = 0$ car $\ln(2) \in [0, 1[$.
Ainsi, par théorème d'encadrement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite nulle.

□

10. a) Montrer que :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt \leqslant \frac{u_n}{1-\ln(2)}$$

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Dans la question ***8.a)***, on a démontré, pour tout $t \in [0, 1]$:

$$0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2)$$

donc : $$0 \geqslant -\ln(1+t^2) \geqslant -\ln(2)$$

puis : $$1 \geqslant 1-\ln(1+t^2) \geqslant 1-\ln(2)$$

et : $$\frac{1}{1} \leqslant \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{1}{1-\ln(2)}$$ *(par croissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$ avec $1-\ln(2) > 0$)*

enfin : $$\big(\ln(1+t^2)\big)^n \leqslant \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(2)}$$ *(en multipliant de part et d'autre par $\big(\ln(1+t^2)\big)^n \geqslant 0$)*

$$\boxed{\text{On en déduit, pour tout } t \in [0, 1] : 0 \leqslant \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(2)}}$$

- Enfin, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_0^1 0\ dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^1 \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)}\ dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^1 \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(2)}\ dt \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 0 & & u_n & & \displaystyle\frac{1}{1-\ln(2)} \int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^n\ dt \ = \ \frac{u_n}{1-\ln(2)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : 0 \ \leqslant \ \int_0^1 \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)}\ dt \ \leqslant \ \frac{u_n}{1-\ln(2)}.}$$

□

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)}\ dt$.

Démonstration.
Remarquons :

× $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$.

× $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{1-\ln(2)} = 0$ d'après la question ***9.b)***.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit, par théorème d'encadrement, que la suite } \left(\displaystyle\int_0^1 \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)}\ dt\right)_{n\in\mathbb{N}} \\ \text{est convergente, de limite nulle.}\end{array}}$$

□

c) Justifier que, pour tout entier naturel n, non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \ = \ \int_0^1 \frac{1-\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)}\ dt$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} u_k &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^k\ dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} \big(\ln(1+t^2)\big)^k\ dt \qquad \textit{(par linéarité de l'intégration)} \\ &= \int_0^1 \frac{1-\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)}\ dt \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=0}^{n-1} u_k \ = \ \int_0^1 \frac{1-\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)}\ dt.}$$

□

d) En déduire que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}\, dt$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente et par linéarité de l'intégration :

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k & = & \displaystyle\int_0^1 \frac{1-\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)}\, dt \\ & = & \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}\, dt - \int_0^1 \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)}\, dt \\ & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}\, dt \qquad \textit{(d'après la question \textbf{10.b}))} \end{array}$$

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ est convergente et admet pour somme } \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}\, dt.}$$

□

e) Modifier le script présenté à la question ***6)*** pour donner un valeur approchée de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Démonstration.

- Comme en question ***6***, il s'agit d'utiliser la méthode de Monte-Carlo. L'idée est de faire apparaître $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}\, dt$ sous forme d'une espérance qu'on pourra alors approcher à l'aide d'une simulation informatique.
- On considère U une v.a.r. telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ de densité :

$$f_U : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons alors W la v.a.r. définie par $W = h(U) = \dfrac{1}{1-\ln(1+U^2)}$ où la fonction h est définie par :

$$h : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{1}{1-\ln(1+t^2)} & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

- D'après le théorème de transfert, la v.a.r. W admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 h(t)\ f_U(t)\ dt$ est absolument convergente.
Les fonctions g et f_U étant à valeurs positives, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
La fonction $t \mapsto h(t)\ f_U(t)$ étant de classe $\mathcal{C}_m^0$ sur $[0,1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 h(t)\ f_U(t)\ dt$ est bien définie.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } W \text{ admet une espérance.}}$$

- Enfin, par définition de f_U on obtient l'espérance de W sous la forme :

$$\mathbb{E}(W) \; = \; \int_0^1 \; h(t) \; f_U(t) \; dt$$

- On peut donc appliquer la méthode de Monte-Carlo. Il s'agit, comme on l'a vu en question ***6*** d'approcher la valeur de $\mathbb{E}(W)$ par la quantité :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} w_i$$

  où $(w_1, \ldots, w_N)$ est un N-uplet d'observation du N-échantillon $(W_1, \ldots, W_N)$ de la v.a.r. W.
- En procédant comme en question ***6***, on obtient :

```
U = grand(1, 100 000, 'unf', 0, 1)
W = 1 / (1 - log(1 + U .^2) )
res = mean(W)
disp(res)
```

□

EML 2018 : le sujet

Exercice 1

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère également l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \; g(x, y, z) = (x + y - z, \, 2y, \, -x + y + z)$$

Enfin, on pose :

$$u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0) \quad \text{et} \quad v = f(e_1) + e_1$$

1. a) Calculer v.

b) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathcal{C}$.
Expliciter la matrice P et calculer P^{-1}.

2. a) Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{C}$.

b) En déduire les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

c) L'endomorphisme f est-il bijectif ?

d) Expliciter, sans justification, le lien entre les matrices A, A', P et P^{-1}.

3. a) Déterminer la matrice B de g dans la base $\mathscr{B}$.

b) Montrer : $B^2 = 2\,B$.

c) En déduire les valeurs propres de g, ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre.

d) L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

On pose : $\mathcal{E} = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MA\}$.

4. a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.

b) Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{E}$.
Montrer que M n'est pas inversible. *(On pourra raisonner par l'absurde).*

5. On cherche à montrer que $\mathcal{E}$ n'est pas réduit à l'ensemble $\{0\}$.

a) Justifier que, pour tout réel λ, les matrices $A - \lambda\,I_3$ et $({}^tA) - \lambda\,I_3$ ont même rang, la matrice I_3 désignant la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

b) En déduire que la matrices B et ${}^tA$ admettent une valeur propre en commun, notée α.

c) Soient X un vecteur propre de B associé à la valeur propre α, et Y un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre α. On note : $N = X\,{}^tY$.
Montrer que la matrice N est non nulle et que N appartient à $\mathcal{E}$.

d) En déduire : $\dim(\mathcal{E}) \geqslant 2$.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in \,]0, +\infty[, \ \ f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in \,]0, +\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

3. Montrer : $b \in [2, 4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,\ 7$.

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b, +\infty[$.

5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

6. ***a)*** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}\,(u_n - b)$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

7. ***a)*** Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1 function b = valeur_approchee(epsilon)
2     n = 0
3     while ...........
4         n = n + 1
5     end
6     b = suite(n)
7 endfunction
```

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt$$

8. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in \,]0, +\infty[, \ \ \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

9. En déduire les variations de Φ sur $]0, +\infty[$.

10. Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[,\ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.

11. ***a)*** Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

b) Montrer : $\lim\limits_{x \to 0} \Phi'(x) = 0$.
On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

12. On donne $\Phi(2) \simeq 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0,7$.
Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction H de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U =]0, +\infty[^2$ définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2,\ H(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy - 2x + e^y$$

13. ***a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de H en tout (x, y) de U.

b) Montrer que la fonction H admet exactement deux points critiques : $(a, \ln(a))$ et $(b, \ln(b))$, où les réels a et b sont ceux introduits dans la question ***2.***

14. ***a)*** Écrire la matrice hessienne, notée M_a, de H au point $(a, \ln(a))$.

b) Montrer que M_a admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2, vérifiant

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = & a + 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 & = & a - 1 \end{cases}$$

c) La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(a, \ln(a))$?

15. La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(b, \ln(b))$?

Exercice 3

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. ***a)*** Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ puis calculer leurs probabilités.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X = n]) = (n + 1)\,\dfrac{4}{3^{n+2}}$.

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n + 1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule de cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose : $V = X - U$.

2. *a)* Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable U.

b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.

c) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \mathbb{P}([X = n]) \quad \text{puis} \quad \mathbb{P}([U = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}$$

d) Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.

3. *a)* Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V.

b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.

c) En déduire la loi de V.

4. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

5. Que vaut $\text{Cov}(U, V)$? En déduire $\text{Cov}(X, U)$?

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0, 1[$.
Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose de la pièce amenant Pile avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note X la v.a.r. prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la v.a.r. prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

6. **Simulation informatique**

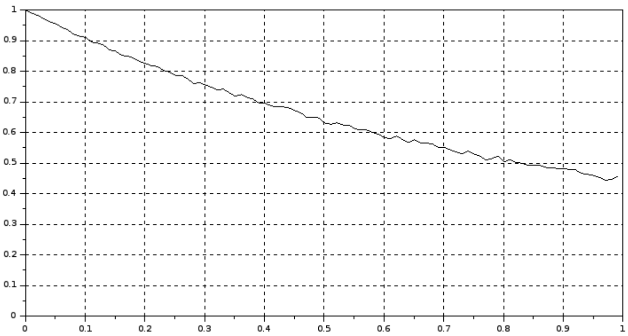
a) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function x = simule_X()` qui simule la v.a.r. X.

b) On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel p de $]0, 1[$, simule la variable aléatoire Y. Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```
function r = mystere(p)
    r = 0
    N = 10 ^ 4
    for k = 1:N
        x = simule_X()
        y = simule_Y(p)
        if x <= y then
            r = r + 1/N
        end
    end
endfunction
```

9782340-026636_001_784.indd 604 30/07/2018 09:53

c) On trace, en fonction de p, une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour laquelle le jeu serait équilibré.

7. **Étude de la variable aléatoire** Y

On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B.

a) Reconnaître la loi de Z et préciser son (ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.

b) Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.

c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y \geqslant n]) = (1-p)^n$.

8. a) Montrer : $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\,\mathbb{P}([Y \geqslant n])$.

b) Déduire des résultats précédents : $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \dfrac{4}{(2+p)^2}$.

c) Déterminer la valeur de p pour lequel le jeu est équilibré.

EML 2018 : le corrigé

Exercice 1

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère également l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ g(x,y,z) = (x+y-z,\ 2y,\ -x+y+z)$$

Enfin, on pose :

$$u = e_1 - e_2 = (1,-1,0) \quad \text{et} \quad v = f(e_1) + e_1$$

1. a) Calculer v.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_1)) \ = \ A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  On en déduit : $f(e_1) = (0,-2,1)$.

- Ainsi :

$$v \ = \ f(e_1) + e_1 \ = \ (0,-2,1) + (1,0,0) \ = \ (1,-2,1)$$

$$\boxed{v = (1,-2,1)}$$

□

b) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

- Montrons que la famille $\mathcal{C}$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
  Supposons :

$$\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot e_1 \ = \ 0_{\mathbb{R}^3}$$

  On obtient alors les équivalences suivantes :

$$\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot e_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 & - & 2\,\lambda_2 & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \quad \textit{(par remontées successives)}$$

$$\boxed{\text{Donc la famille } \mathcal{C} \text{ est une famille libre de } \mathbb{R}^3.}$$

- En résumé :
  - × la famille $\mathcal{C}$ est libre,
  - × $\text{Card}(\mathcal{C}) = \text{Card}((u, v, e_1)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{\text{Donc } \mathcal{C} = (u, v, e_1) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

□

c) On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathcal{C}$.
Expliciter la matrice P et calculer P^{-1}.

Démonstration.

- Pour déterminer la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ dans la base $\mathcal{C}$, on commence par exprimer les vecteurs de la base $\mathcal{C}$ dans la base $\mathscr{B}$.
  On obtient ici :
  $$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
  La matrice P est la concaténation de ces trois vecteurs.
  $$\boxed{\text{Donc : } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$
- La matrice P est inversible en tant que matrice de passage.
- Pour déterminer P^{-1}, on applique l'algorithme du pivot de Gauss.
  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$
  On effectue l'opération $\left\{ \ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \right.$. On obtient :
  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$
  On effectue l'opération $\left\{ \ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \right.$. On obtient :
  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$
  La réduite obtenue est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.
  On retrouve ainsi que P est inversible.
  On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} \right.$. On obtient :
  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ \; L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ \; L_2 \leftarrow -L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{Finalement : } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

2. a) Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{C}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(u)) \;=\; A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; 2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \text{Mat}_{\mathscr{B}}(2\cdot u)$$

On en déduit : $f(u) = 2\cdot u + 0\cdot v + 0\cdot e_1$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(u)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

- Ensuite :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(v)) \;=\; A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \;=\; -\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \text{Mat}_{\mathscr{B}}(-v)$$

On en déduit : $f(v) = 0\cdot u + (-1)\cdot v + 0\cdot e_1$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(v)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

- Enfin, par définition de v : $v = f(e_1) + e_1$.
Donc : $f(e_1) = v - e_1 = 0\cdot u + 1\cdot v + (-1)\cdot e_1$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } A' = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

On pouvait également remarquer que la formule de changement de base donne :

$$A' = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = P_{\mathcal{C},\mathscr{B}} \times \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B},\mathcal{C}} = P^{-1} \times A \times P$$

Par multiplication matricielle, on obtient aussi : $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ce n'était cependant sans doute pas la méthode attendue dans cette question, si on se fie à l'énoncé de la question ***2.d)***.

□

b) En déduire les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Démonstration.

- La matrice A' est une matrice triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. D'où : $\text{Sp}(A') = \{2, -1\}$.
  De plus, A' est la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{C}$.

  $\boxed{\text{On en déduit : } \text{Sp}(f) = \{2, -1\}.}$

- La matrice A' est la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{C}$.
  Pour étudier la diagonalisabilité de f, on va donc étudier celle de A'.
  - Déterminons $E_2(A')$ le sous-espace propre de A' associé à la valeur propre 2.
    Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} X \in E_2(A') &\Leftrightarrow (A' - 2\,I_3)X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} -3y & + & z & = & 0 \\ & - & 3z & = & 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \\ \textit{(par remontées successives)} \end{array} \right. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} E_2(A') &= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = 0 \text{ et } z = 0\} = \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$:

× engendre $E_2(A')$,

× est libre, car constituée d'un unique vecteur non nul.

Ainsi $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_2(A')$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim(E_2(A)) = \text{Card}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 1.}$$

- Déterminons $E_{-1}(A')$ le sous-espace propre de A' associé à la valeur propre -1.

  Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} X \in E_{-1}(A') & \Leftrightarrow & (A' + I_3)X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcl} 3x & & & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcl} x & & & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array}\right. \end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} E_{-1}(A') & = & \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid x = 0 \text{ et } z = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\right\} \\ & = & \left\{y \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) \end{array}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$:

× engendre $E_{-1}(A')$,

× est libre, car constituée d'un unique vecteur non nul.

Ainsi $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{-1}(A')$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim(E_{-1}(A)) = \text{Card}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = 1.}$$

9782340-026636_001_784.indd 611 30/07/2018 09:53

- On obtient alors :
$$\dim(E_2(A')) + \dim(E_{-1}(A')) = 2 \neq 3$$
Or la matrice A' est d'ordre 3.
On en déduit que la matrice A' n'est pas diagonalisable.
$$\boxed{\text{Ainsi, l'endomorphisme } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$
□

c) L'endomorphisme f est-il bijectif ?

Démonstration.

$$\boxed{\text{Le réel 0 n'est pas valeur propre de } f\text{, donc l'endomorphisme } f \text{ est bijectif.}}$$
□

d) Expliciter, sans justification, le lien entre les matrices A, A', P et P^{-1}.

Démonstration.

$$\boxed{A' = P^{-1}\, A\, P}$$

Commentaire

Aucune justification n'est demandée ici.
Cette relation vient de la formule de changement de base, détaillée dans le commentaire de la question ***2.a)***.

□

3. a) Déterminer la matrice B de g dans la base $\mathscr{B}$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $g(e_1) \;=\; g(1,0,0) \;=\; (1+0-0,\, 0,\, -1+0+0) \;=\; (1,0,-1)$.
Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g(e_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- Ensuite : $g(e_2) \;=\; g(0,1,0) \;=\; (0+1-0,\, 2,\, -0+1+0) \;=\; (1,2,1)$.
Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g(e_2)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Enfin : $g(e_3) \;=\; g(0,0,1) \;=\; (0+0-1,\, 0,\, -0+0+1) \;=\; (-1,0,1)$.
Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g(e_3)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$
□

b) Montrer : $B^2 = 2\,B$.

Démonstration. On calcule :
$$B^2 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \;=\; 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;=\; 2\,B$$
$$\boxed{\text{On a bien : } B^2 = 2\,B.}$$
□

c) En déduire les valeurs propres de g, ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre.

Démonstration.

- D'après la question précédente, le polynôme $Q(X) = X^2 - 2X = X(X-2)$ est un polynôme annulateur de la matrice B.
  Or le spectre de B est inclus dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur de B.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}(g) = \mathrm{Sp}(B) \subset \{0, 2\}.}$$

Commentaire

- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul Q.
  On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus) n.
- Si Q est un polynôme annulateur de A alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\, Q$ est toujours un polynôme annulateur de A puisque :

$$(\alpha\, Q)(A) \;=\; \alpha\, Q(A) \;=\; 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

  Cela suffit à démontrer que A possède une infinité de polynômes annulateurs.
  On peut en obtenir d'autres. Par exemple $R(X) = (X-5)Q(X)$ est un polynôme annulateur de A puisque :

$$R(A) \;=\; (A - 5\, I)\, Q(A) \;=\; 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

  Il faut donc parler `D'UN` polynôme annulateur d'une matrice.
- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de A. Si c'était le cas, A aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus n). Par exemple, comme $R(X) = (X-5)\, Q(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.

- Déterminons $E_0(g) = \mathrm{Ker}(g - 0 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Ker}(g)$.
  Soit $w \in \mathbb{R}^3$. Il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
w \in E_0(g) & \iff & g(w) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff B\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[2mm]
& \iff & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[4mm]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & 2y & & & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\[4mm]
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\[4mm]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right. \\[4mm]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

Finalement, on obtient l'expression de $E_0(g)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl} E_0(g) & = & \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \text{ et } y = 0\} \\ & = & \{(z,\, 0,\, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{z \cdot (1,\, 0,\, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \text{Vect}\,((1,0,1)) \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Comme } E_0(g) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}\text{, le réel 0 est bien valeur propre de } B, \\ \text{d'espace propre associé } E_0(g).\end{array}}$$

La famille $\mathcal{F}_0 = \big((1,\, 0,\, 1)\big)$:

× engendre $E_0(g)$,

× est libre car constituée d'un unique vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{F}_0 = \big(1,\, 0,\, 1\big) \text{ est une base de } E_0(g)}$$

- Déterminons $E_2(g) = \text{Ker}(g - 2 \cdot \text{id}_{\mathbb{R}^3})$.

Soit $w \in \mathbb{R}^3$. Il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(w) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} w \in E_2(g) & \iff & (g - 2\,\text{id}_{\mathbb{R}^3})(w) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff (B - 2\,I_3)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff & \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & y & - & z \end{array} \right. \end{array}$$

Finalement, on obtient l'expression de $E_2(g)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl} E_2(g) & = & \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y - z\} \\ & = & \{(y - z,\, y,\, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \{y \cdot (1,\, 1,\, 0) + z \cdot (-1,\, 0,\, 1) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \text{Vect}\,((1,1,0), (-1,0,1)) \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Comme } E_2(g) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}\text{, le réel 2 est bien valeur propre de } B, \\ \text{d'espace propre associé } E_2(g).\end{array}}$$

La famille $\mathcal{F}_2 = \big((1,\, 1,\, 0),\, (-1,\, 0,\, 1)\big)$:

× engendre $E_2(g)$,

× est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{F}_2 \text{ est une base de } E_2(g).}$$

Commentaire

On a bien déterminé toutes les valeurs propres de g. En effet :

× on a montré dans un premier temps : $\text{Sp}(g) \subset \{0,2\}$. Ainsi, les réels 0 et 2 sont **les seules valeurs propres possibles** de l'endomorphisme g.

× on a ensuite démontré que 0 et 2 étaient effectivement des valeurs propres de g

On en déduit : $\text{Sp}(g) = \{0,2\}$.

□

d) L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

Démonstration.

- La famille $\mathcal{F}_0$ est une base de $E_0(g)$ donc : $\dim(E_0(g)) = \text{Card}(\mathcal{F}_0) = 1$.
- La famille $\mathcal{F}_2$ est une base de $E_2(g)$ donc : $\dim(E_2(g)) = \text{Card}(\mathcal{F}_2) = 2$.
- On en déduit :

$$\dim(E_0(g)) + \dim(E_2(g)) \; = \; 3 \; = \; \dim(\mathbb{R}^3)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'endomorphisme } g \text{ est diagonalisable.}}$$

□

On pose : $\mathcal{E} = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MA\}$.

4. a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\mathcal{E} \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
- Ensuite : $0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \in \mathcal{E}$. En effet : $B \times 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \times A$.
- Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(M_1, M_2) \in \mathcal{E}^2$.

$$\begin{array}{rcll} B(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2) & = & \lambda_1 \cdot B\,M_1 + \lambda_2 \cdot B\,M_2 & \\ & = & \lambda_1 \cdot M_1\,A + \lambda_2 \cdot M_2\,A & \textit{(car } (M_1, M_2) \in \mathcal{E}^2\textit{)} \\ & = & (\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2)\; A & \end{array}$$

Donc : $(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2) \in \mathcal{E}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathcal{E} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), \text{ donc } \mathcal{E} \text{ est un espace vectoriel.}}$$

□

b) Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{E}$.
Montrer que M n'est pas inversible. *(On pourra raisonner par l'absurde).*

Démonstration.

Raisonnons par l'absurde. Autrement dit, supposons que la matrice M est inversible.

- Comme $M \in \mathcal{E}$, on a : $B\,M = M\,A$.
- De plus, M est inversible, donc, en multipliant à gauche par M^{-1}, on obtient :

$$M^{-1}\,B\,M \; = \; M^{-1}\,M\,A \; = \; A$$

Ainsi, les matrices A et B sont semblables.

- De plus, d'après la question ***3.d)***, la matrice B est diagonalisable, donc elle est semblable à une matrice diagonale.
  Autrement dit, il existe $Q \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que $B = QDQ^{-1}$.
- On en déduit : $A = M^{-1}\,B\,M \;=\; M^{-1}Q\,D\,Q^{-1}M \;=\; (Q^{-1}M)^{-1}\,D\,Q^{-1}M$.
  Ainsi la matrice A est semblable à une matrice diagonale, elle est donc diagonalisable.
  Ceci est absurde d'après la question ***2.b)***.

$$\boxed{\text{Donc la matrice } M \text{ n'est pas inversible.}}$$

Commentaire

- On redémontre en fait ici la transitivité de la transposition, c'est-à-dire :

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ semblable à } B \\ B \text{ semblable à } C \end{array}\right\} \Rightarrow \; A \text{ semblable à } C$$

- Après avoir conclut que les matrices A et B sont semblables, on pouvait aussi raisonner de la manière suivante.
  - × Les matrices A et B sont semblables, donc elles représentent un même endomorphisme f dans deux bases différentes.
  - × Or, d'après la question ***3.d)***, la matrice B représente un endomorphisme diagonalisable. Donc f est diagonalisable.
  - × De plus, d'après ***2.b)***, la matrice A représente un endomorphisme non diagonalisable. Donc f n'est pas diagonalisable.

  Ceci est absurde.

□

5. On cherche à montrer que $\mathcal{E}$ n'est pas réduit à l'ensemble $\{0\}$.

a) Justifier que, pour tout réel λ, les matrices $A - \lambda\, I_3$ et $({}^tA) - \lambda\, I_3$ ont même rang, la matrice I_3 désignant la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Démonstration.
La transposition est une application linéaire, donc :

$${}^t(A - \lambda\, I_3) \;=\; {}^tA - \lambda\, {}^tI_3 \;=\; {}^tA - \lambda\, I_3$$

Or, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$: $\text{rg}({}^tM) = \text{rg}(M)$.
Donc, en appliquant cette égalité à $M = A - \lambda\, I_3$, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \text{rg}({}^t(A - \lambda\, I_3)) & = & \text{rg}(A - \lambda\, I_3) \\ \shortparallel & & \\ \text{rg}({}^tA - \lambda\, I_3) & & \end{array}$$

$$\boxed{\text{rg}({}^tA - \lambda\, I_3) = \text{rg}(A - \lambda\, I_3)}$$

Commentaire

On rappelle la linéarité de la transposition :

$$\forall (A, B) \in \big(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})\big)^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad {}^t(\lambda \cdot A + \mu \cdot B) = \lambda \cdot {}^tA + \mu \cdot {}^tB$$

□

b) En déduire que la matrices B et ${}^tA$ admettent une valeur propre en commun, notée α.

Démonstration.

- D'après les questions ***2.b)*** et ***3.c)***, les matrices A et B ont la valeur propre 2 en commun.
- De plus, d'après la question précédente :

$$\text{rg}({}^tA - 2\,I_3) \;=\; \text{rg}(A - 2\,I_3) < 3$$

Donc 2 est une valeur propre de ${}^tA$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } B \text{ et } {}^tA \text{ ont une valeur propre en commun (la valeur propre 2).}}$$ □

c) Soient X un vecteur propre de B associé à la valeur propre α, et Y un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre α. On note : $N = X\,{}^tY$.
Montrer que la matrice N est non nulle et que N appartient à $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs X et Y sont des vecteurs propres. Ils sont donc non nuls. Ainsi :

× au moins l'un des x_i n'est pas nul. Notons le x_{i_0}. Donc $x_{i_0} \neq 0$.

× au moins l'un des y_i n'est pas nul. Notons le y_{i_0}. Donc $y_{i_0} \neq 0$.

De plus :

$$N \;=\; X\,{}^tY \;=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} x_1\,y_1 & x_1\,y_2 & x_1\,y_3 \\ x_2\,y_1 & x_2\,y_2 & x_2\,y_3 \\ x_3\,y_1 & x_3\,y_2 & x_3\,y_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Comme } x_{i_0}\,y_{i_0} \neq 0_{\mathbb{R}}, \text{ on en déduit : } N \neq 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.}$$

- Tout d'abord, comme X est un vecteur propre de B associé à la valeur propre α :

$$B\,N \;=\; B\,X\,{}^tY \;=\; (BX)\,{}^tY \;=\; \alpha \cdot X\,{}^tY \;=\; \alpha \cdot N$$

De plus :

$$\begin{aligned} N\,A \;&=\; X\,{}^tY\,A \;=\; X\,{}^tY\,{}^t({}^tA) \;=\; X\,{}^t({}^tA\,Y) \\ &=\; X\,{}^t(\alpha \cdot Y) \qquad \textit{(car } Y \textit{ est un vecteur propre de } {}^tA \textit{ associé à la valeur propre } \alpha\textit{)} \\ &=\; X\,(\alpha \cdot {}^tY) \;=\; \alpha \cdot X\,{}^tY \;=\; \alpha \cdot N \end{aligned}$$

Finalement : $B\,N \;=\; \alpha \cdot N \;=\; N\,A$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } N \in \mathcal{E}.}$$

Commentaire

On utilise ici deux propriétés de la transposée :

- $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^t({}^tA) = A$,
- $\forall (A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, ${}^t(A\,B) = {}^tB\,{}^tA$.

□

d) En déduire : $\dim(\mathcal{E}) \geqslant 2$.

Démonstration.

- D'après la question ***3.c)***, les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de B associés à la valeur propre 2.
- On note Y un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre 2.
- D'après la question précédente, les matrices :

$$N_1 = X_1\, {}^tY \quad \text{et} \quad N_2 = X_2\, {}^tY$$

appartiennent à $\mathcal{E}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : Vect}\,(N_1, N_2) \subset \mathcal{E}.}$$

- Montrons maintenant que la famille (N_1, N_2) est libre dans $\mathcal{E}$.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
Supposons : $\lambda_1 \cdot N_1 + \lambda_2 \cdot N_2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
De plus :

$$\lambda_1 \cdot N_1 + \lambda_2 \cdot N_2 \ = \ \lambda_1 \cdot X_1\, {}^tY + \lambda_2 \cdot X_2\, {}^tY \ = \ (\lambda_1 \cdot X_1 + \lambda_2 \cdot X_2)\, {}^tY$$

  × Le vecteur Y est un vecteur propre de ${}^tA$ donc : $Y \neq 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

  × Donc, d'après la question ***3.c)*** :

$$\lambda_1 \cdot N_1 + \lambda_2 \cdot N_2 \neq 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \ \Leftrightarrow \ \lambda_1 \cdot X_1 + \lambda_2 \cdot X_2 \neq 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

  Autrement dit :

$$\lambda_1 \cdot N_1 + \lambda_2 \cdot N_2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \ \Leftrightarrow \ \lambda_1 \cdot X_1 + \lambda_2 \cdot X_2 = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

  D'où : $\lambda_1 \cdot X_1 + \lambda_2 \cdot X_2 = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

  × Or, les vecteurs X_1 et X_2 ne sont pas colinéaires. Ils forment donc une famille libre.
  Ainsi : $\lambda_1 = \lambda_2 = 0_{\mathbb{R}}$.

On en déduit que la famille (N_1, N_2) est libre.
Ainsi : $\dim(\text{Vect}\,(N_1, N_2)) = 2$.

- De plus : $\dim(\text{Vect}\,(N_1, N_2)) \leqslant \dim(\mathcal{E})$, car $\text{Vect}\,(N_1, N_2) \subset \mathcal{E}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } 2 \leqslant \dim(\mathcal{E}).}$$

□

Exercice 2

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \; f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.
- Soit $x \in]0,+\infty[$.
$$f'(x) \; = \; 1 - \frac{1}{x} \; = \; \frac{x-1}{x}$$
Alors, comme $x > 0$:
$$f'(x) \geqslant 0 \; \Leftrightarrow \; x - 1 \geqslant 0 \; \Leftrightarrow \; x \geqslant 1$$
On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - Tout d'abord : $f(1) = 1 - \ln(1) = 1$.
  - Ensuite : $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$.
  $$\boxed{\text{Donc : } \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty.}$$
  - Enfin, soit $x \in]0,+\infty[$:
  $$f(x) \; = \; x - \ln(x) \; = \; x\Big(1 - \frac{\ln(x)}{x}\Big)$$
  De plus, par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.
  $$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

□

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

Démonstration.

- La fonction f est :
  × continue sur $]0,1[$ (car dérivable sur $]0,1[$),
  × strictement décroissante sur $]0,1[$.

  Ainsi f réalise une bijection de $]0,1[$ dans $f(]0,1[)$.
  $$f(]0,1[) \; = \; \Big] \lim_{x\to 1^-} f(x), \lim_{x\to 0} f(x) \Big[\; = \;]1,+\infty[$$
  Or $2 \in]1,+\infty[$.
  Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]0,1[$, notée a.

- La fonction f est :
  - × continue sur $]1, +\infty[$ (car dérivable sur $]1, +\infty[$),
  - × strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

  Ainsi f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ dans $f(]1, +\infty[)$.

$$f(]1, +\infty[) \; = \; \left] \lim_{x \to 1^-} f(x), \; \lim_{x \to +\infty} f(x) \right[=]1, +\infty[$$

  Or $2 \in]1, +\infty[$.
  Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]1, +\infty[$, notée b.

Finalement, l'équation $f(x) = 2$ admet exactement 2 solutions sur $]0, +\infty[$ notées a et b telles que $0 < a < 1 < b$.

Commentaire

- Il est important dans cette question d'avoir parfaitement en tête toutes les hypothèses du théorème de la bijection. En particulier, la fonction f doit être **strictement monotone** sur l'intervalle considéré.
- On ne pouvait donc pas appliquer le théorème de la bijection directement sur l'intervalle $]0, +\infty[$, mais il fallait découper cet intervalle en plusieurs sous-intervalles sur lesquels f est strictement monotone (ici $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$).

□

3. Montrer : $b \in [2, 4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,\ 7$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $f(2) = 2 - \ln(2) \leqslant 2$.
- Ensuite : $f(4) = 4 - \ln(4) = 4 - \ln(2^2) = 4 - 2\ln(2) = 2(2 - \ln(2))$.
  De plus, $\ln(2) \simeq 0, 7$, donc : $2 - \ln(2) \simeq 1, 3$ et $2(2 - \ln(2)) \simeq 2, 6$.
  D'où : $f(4) \geqslant 2$.
- On rappelle : $f(b) = 2$.
  Ainsi : $f(2) \leqslant f(b) \leqslant f(4)$.
  On note g la réciproque de f sur $]1, +\infty[$. D'après le théorème de la bijection, g est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

On en déduit : $2 \leqslant b \leqslant 4$.

Commentaire

L'indication de l'énoncé $\ln(2) \simeq 0, 7$ ne permet pas de savoir s'il s'agit d'une sur ou d'une sous-approximation.
Un encadrement, tel que $0, 6 \leqslant \ln(2) \leqslant 0, 8$, permettrait de résoudre ce problème.

□

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b, +\infty[$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \left\{ \begin{array}{l} u_n \text{ est bien défini} \\ u_n \in [b, +\infty[\end{array} \right.$

- **Initialisation** :
  $u_0 = 4$. Or, d'après la question ***3.***, $b \leqslant 4$. Donc : $u_0 \in [b, +\infty[$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} \text{ est bien défini} \\ u_{n+1} \in [b, +\infty[\end{array} \right.$)

  Par hypothèse de récurrence, u_n est bien défini et $u_n \in [b, +\infty[$.
  - Comme $u_n \geqslant b \geqslant 2$, on a en particulier $u_n > 0$.
    Donc $\ln(u_n)$ est bien définie. D'où u_{n+1} est bien défini.
  - Par stricte croissance de ln sur $]0, +\infty[$:

  $$u_n \geqslant b \ \Leftrightarrow\ \ln(u_n) \geqslant \ln(b) \ \Leftrightarrow\ \ln(u_n) + 2 \geqslant \ln(b) + 2 \ \Leftrightarrow\ u_{n+1} \geqslant \ln(b) + 2$$

    Or, par définition de b : $f(b) = 2$, c'est-à-dire $b - \ln(b) = 2$. Donc : $\ln(b) = b - 2$.
    On en déduit : $u_{n+1} \geqslant b - \cancel{2} + \cancel{2} = b$. Ainsi : $u_{n+1} \in [b, +\infty[$.

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on obtient que } (u_n) \text{ est bien définie et : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b, +\infty[.}$

Commentaire

- Cette question est un classique des suites récurrentes. Elle se traite presque toujours par récurrence.
- Il faut ici faire attention à bien énoncer l'hypothèse de récurrence.
  Pour montrer que « **la suite** (u_n) est bien définie », on démontre : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: **le réel** u_n est bien défini.

□

5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n \ =\ \ln(u_n) + 2 - u_n \ =\ 2 - (u_n - \ln(u_n)) \ =\ f(b) - f(u_n)$$

  Or, d'après la question précédente : $u_n \geqslant b$.
  De plus, par croissance de la fonction f sur $[b, +\infty[$: $f(u_n) \geqslant f(b)$.
  D'où : $u_{n+1} - u_n = f(b) - f(u_n) \leqslant 0$.

$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$

Commentaire

On pouvait aussi démontrer la décroissance de la suite (u_n) par récurrence.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation** :
  $u_1 = \ln(u_0) + 2 = \ln(4) + 2 = 2\ \ln(2) + 2 \simeq 2 \times 0,7 + 2 \simeq 3,4$.
  Donc $u_1 \leqslant u_0$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$).
  Par hypothèse de récurrence : $u_{n+1} \geqslant u_n$.
  On obtient donc, par stricte croissance de ln sur $]0, +\infty[$:
  $$u_{n+1} \leqslant u_n \ \Leftrightarrow\ \ln(u_{n+1}) \leqslant \ln(u_n) \ \Leftrightarrow\ \ln(u_{n+1}) + 2 \leqslant \ln(u_n) + 2 \ \Leftrightarrow\ u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

- La suite (u_n) est donc :
  × décroissante,
  × minorée par b (car : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [b, +\infty[$).

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ converge. On note } \ell \text{ sa limite.}}$$

- \- Tout d'abord : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant b$.
  Par passage à limite, on en déduit : $\ell \geqslant b$.
  \- Ensuite : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.
  Donc, par continuité de ln sur $]0, +\infty[$:
  $$\ell = \ln(\ell) + 2 \ \Leftrightarrow\ \ell - \ln(\ell) = 2 \ \Leftrightarrow\ f(\ell) = 2$$
  Or, d'après la question ***2.***, b est l'unique solution de l'équation $f(x) = 2$ sur $]1, +\infty[$.
  $$\boxed{\text{Donc } \ell = b.}$$

□

6. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}\,(u_n - b)$.

Démonstration.
On note g la fonction définie par $g : x \mapsto \ln(x) + 2$.

- La fonction g est dérivable sur $[b, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[b, +\infty[$.
  De plus : $\forall x \in [b, +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{1}{x}$.
  Or, d'après la question ***3.***, $b \geqslant 2$. Donc, pour tout $x \in [b, +\infty[$: $x \geqslant b \geqslant 2$.
  Par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$, on en déduit : $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
  Ainsi :
  $$\forall x \in [b, +\infty[,\ g'(x) \leqslant \frac{1}{2}$$

- On sait alors :
  × g est dérivable sur $[b, +\infty[$,
  × $\forall x \in [b, +\infty[,\ g'(x) \leqslant \frac{1}{2}$.

  On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis que :

$$\forall (x, y) \in [b, +\infty[^2 \text{ tel que } x \leqslant y,\ g(y) - g(x) \leqslant \frac{1}{2}(y - x)$$

  Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in [b, +\infty[$ et $x = b \in [b, +\infty[$, on obtient :

$$g(u_n) - g(b) \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b)$$

  Or :
  × $g(u_n) = \ln(u_n) + 2 = u_{n+1}$
  × $g(b) = \ln(b) + 2 = (b - \cancel{2}) + \cancel{2} = b$, car b est solution de l'équation $f(x) = 2$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b).}$$

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question ***4.*** : $u_n \geqslant b$.

$$\boxed{\text{Donc : } u_n - b \geqslant 0.}$$

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.
  - **Initialisation** :
    D'une part : $u_0 - b = 4 - b$.
    D'autre part : $\frac{1}{2^{0-1}} = \frac{1}{2^{-1}} = 2$.
    On en déduit :
$$u_0 - b \leqslant \frac{1}{2^{0-1}} \ \Leftrightarrow\ 4 - b \leqslant 2 \ \Leftrightarrow\ 2 \leqslant b$$
    Or la dernière assertion est vraie d'après la question ***3***. Donc, par équivalence, la première assertion aussi.
    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{2^n}$).
    D'après la question précédente : $u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b)$.
    Or, par hypothèse de récurrence : $u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.
    En combinant ces deux résultats, on obtient :
$$u_{n+1} - b \ \leqslant\ \frac{1}{2}(u_n - b) \ \leqslant\ \frac{1}{2}\,\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$$
    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

□

7. a) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

Démonstration.

```
1  function u = suite(n)
2      u = 4
3      for k = 1:n
4          u = log(u) + 2
5      end
6  endfunction
```

Expliquons un peu ce programme.
La variable `u` est créée pour contenir successivement les valeurs u_0, u_1, $\ldots$, u_n.

- On initialise donc cette variable à $u_0 = 4$ avec la ligne 2

```
2      u = 4
```

- On met ensuite à jour `u` de manière itérative avec la ligne 4

```
4      u = log(u) + 2
```

Commentaire

- On décrit ici de manière précise les instructions afin d'aider le lecteur un peu moins habile en **Scilab**.
  Cependant, l'écriture du script démontre la compréhension de toutes les commandes en question et permet sans doute d'obtenir la totalité des points alloués à cette question.
- Si on avait souhaité afficher tous les n premiers termes de la suite (u_n), on aurait modifié le script précédent de la façon suivante :

```
function u = suite(n)
    u = zeros(1, n)
    u(1) = 4
    for k = 2:n
        u(k) = log(u(k-1)) + 2
    end
endfunction
```

□

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1  function b = valeur_approchee(epsilon)
2      n = 0
3      while ...........
4          n = n + 1
5      end
6      b = suite(n)
7  endfunction
```

Démonstration.

- D'après la question ***6.b)*** :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

  S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2^{n-1}} \leqslant \varepsilon$, on obtiendra par transitivité :

$$0 \leqslant u_N - b \leqslant \varepsilon$$

  Donc u_N est une valeur approchée de b à ε près.

- On complète alors le programme **Scilab** de la façon suivante :

```
    while 1 / 2^(n-1) > epsilon
```

□

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\ dt$$

8. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

Démonstration.

- La fonction $\dfrac{1}{f}$ est continue sur $]0, +\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $]0, +\infty[$ qui ne s'annule pas sur cet intervalle.
  En effet, d'après le tableau de variations de f en question ***1.*** : $\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ f(x) \geqslant 1$.
  Donc la fonction $\dfrac{1}{f}$ admet une primitive G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

- On obtient alors :

$$\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ \Phi(x) = G(2x) - G(x)$$

  Or la fonction $x \mapsto G(2x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ car elle est la composée $G \circ h$ où :
  × $h : x \mapsto 2x$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$,
    - telle que $h(]0, +\infty[) \subset\ ]0, +\infty[$.

  × G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, } \Phi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ (donc dérivable sur }]0, +\infty[) \\ \text{en tant que différence de fonctions de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[.\end{array}}$$

- Soit $x \in\ ]0, +\infty[$.

$$\begin{array}{rcl} \Phi'(x) & = & 2\,G'(2x) - G'(x) \ = \ 2\,\dfrac{1}{f(2x)} - \dfrac{1}{f(x)} \\ & = & \dfrac{2}{2x - \ln(2x)} - \dfrac{1}{x - \ln(x)} \ = \ \dfrac{2(\cancel{x} - \ln(x)) - (\cancel{2x} - \ln(2x))}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))} \\ & = & \dfrac{-2\ln(x) + \ln(2) + \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} \ = \ \dfrac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}}$$

□

9. En déduire les variations de Φ sur $]0,+\infty[$.

Démonstration.
Soit $x \in \,]0,+\infty[$. D'après la question précédente, on a :

$$\Phi'(x) \;=\; \frac{\ln(2)-\ln(x)}{(x-\ln(x))(2x-\ln(2x))} \;=\; \frac{\ln(2)-\ln(x)}{f(x)\,f(2x)}$$

Or, d'après la question ***1.*** : $f(x) \geqslant 0$ et $f(2x) \geqslant 0$.
On obtient alors :

$$\begin{aligned} \Phi'(x) \geqslant 0 \;&\Leftrightarrow\; \ln(2)-\ln(x) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \ln(2) \geqslant \ln(x) \\ &\Leftrightarrow\; 2 \geqslant x \end{aligned}$$

(car la fonction ln *est strictement croissante sur* $]0,+\infty[$*)*

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		2		$+\infty$
Signe de $\Phi'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de Φ		$\nearrow$	$\Phi(2)$	$\searrow$	

□

10. Montrer : $\forall x \in \,]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.

Démonstration.
Soit $x \in \,]0,+\infty[$.

- Tout d'abord, d'après la question ***1.*** : $\forall t \in \,]0,+\infty[,\ f(t) \geqslant 1 > 0$.
  On en déduit : $\forall t \in \,]0,+\infty[,\ \dfrac{1}{f(t)} > 0$.
  Ainsi, par positivité de l'intégration :

$$0 \;\leqslant\; \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\,dt \;=\; \Phi(x)$$

- Ensuite, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$, pour tout $t \in \,]0,+\infty[$:

$$f(t) \geqslant 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{f(t)} \leqslant 1$$

  Par croissance de l'intégration (les bornes sont bien ordonnées : $x \leqslant 2x$ car $x > 0$), on obtient :

$$\begin{array}{c} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\,dt \\ \shortparallel \\ \Phi(x) \end{array} \;\leqslant\; \int_x^{2x} 1\,dt \;=\; [\,t\,]_x^{2x} \;=\; 2x-x \;=\; x$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \,]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x.}$$

Commentaire

Le schéma de résolution de cette question est plutôt classique.

Afin d'encadrer une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$,

1) on cherche d'abord à encadrer l'intégrande, c'est-à-dire montrer :

$$\forall t \in [a,b],\ m \leqslant f(t) \leqslant M$$

où m et M sont deux réels à déterminer grâce à l'étude de la fonction f,

2) on utilise en suite la croissance de l'intégration (si les bornes a et b sont bien ordonnées, c'est-à-dire $a \leqslant b$) pour conclure :

$$m(b-a) = \int_a^b m\, dt \ \leqslant \ \int_a^b f(t)\, dt \ \leqslant \ \int_a^b M\, dt = M(b-a)$$

□

11. ***a)*** Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

Démonstration.
D'après la question précédente : $\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.
Or $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.
Donc, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi(x) = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } \Phi \text{ est prolongeable par continuité et que ce prolongement, toujours noté } \Phi, \text{ vérifie } \Phi(0) = 0.}$$

□

b) Montrer : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$.
On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

Démonstration.
D'après la question ***8.*** :

$$\forall x \in\ ]0,+\infty[,\ \Phi'(x) = \frac{2}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)}$$

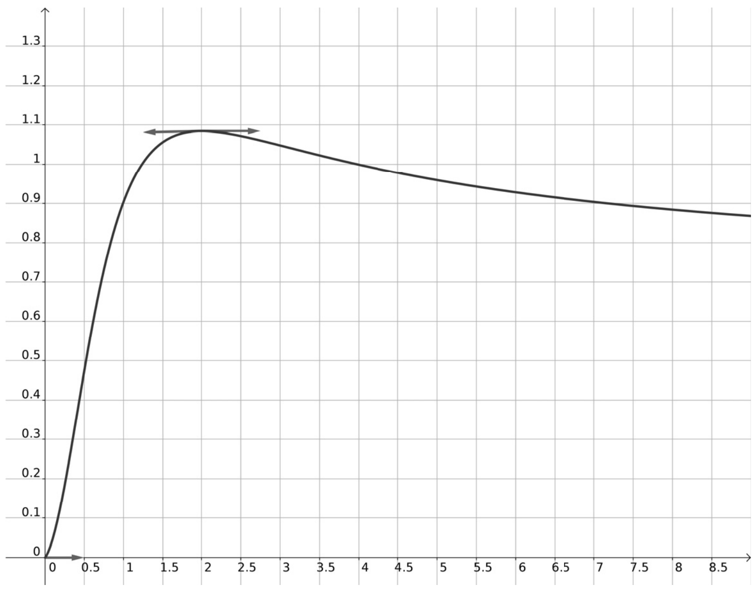
Or, d'après la question ***1.*** : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$, par composition, on a aussi : $\lim\limits_{x\to 0} f(2x) = +\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{x\to 0} \Phi'(x) = 0.}$$

□

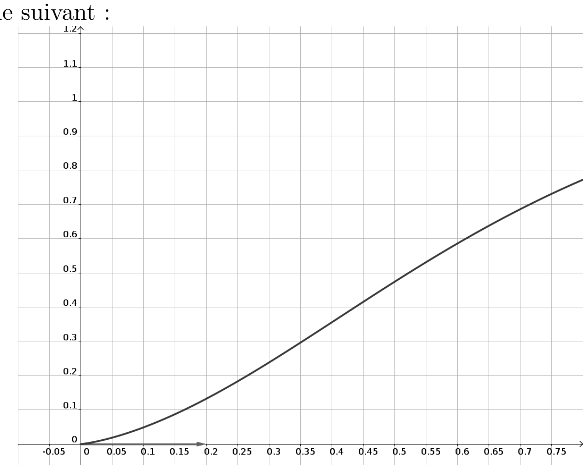
12. On donne $\Phi(2) \simeq 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0,7$.
Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Démonstration.



Commentaire

Sur le graphe précédent, la tangente à l'origine ne semble pas être correcte.
En effet, comme son étymologie (le verbe latin « tangere ») l'indique, une tangente doit **toucher** la courbe, ce qui ne paraît pas être le cas ici.
Cela est simplement dû à l'échelle de la figure. Si on zoome sur l'origine du repère, on obtient le graphe suivant :



Sur une copie, il faut bien évidemment accentuer les tangentes à la courbe.

□

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction H de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U =]0, +\infty[^2$ définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \ H(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy - 2x + \mathrm{e}^y$$

Commentaire

On peut remarquer que cette fonction H est en fait définie sur $\mathbb{R}^2$. Cela sera d'ailleurs utile plus tard dans l'énoncé.
Elle est même de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Démontrons le.

- La fonction $(x, y) \mapsto \dfrac{x^2}{2} - xy - 2x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynomiale.
- La fonction $(x, y) \mapsto \mathrm{e}^y$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car elle est la composée $h_2 \circ h_1$ où :
  - × $h_1 : (x, y) \mapsto y$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynomiale,
    - telle que $h_1(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}$.
  - × $h_2 : u \mapsto \mathrm{e}^u$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction H est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

13. a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de H en tout (x, y) de U.

Démonstration.

- La fonction H est de classe $\mathcal{C}^2$, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
  Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 1 sur U.
- Soit $(x, y) \in U$.

$$\begin{aligned} \partial_1(H)(x, y) &= \frac{\cancel{2}\,x}{\cancel{2}} - y - 2 \ = \ x - y - 2 \\ \partial_2(H)(x, y) &= -x + \mathrm{e}^y \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x, y) \in U, \ \partial_1(H)(x, y) = x - y - 2, \quad \partial_2(H)(x, y) = \mathrm{e}^y - x}$$

Commentaire

On trouve bien sûr les mêmes dérivées premières sur $\mathbb{R}^2$.

□

b) Montrer que la fonction H admet exactement deux points critiques : $(a, \ln(a))$ et $(b, \ln(b))$, où les réels a et b sont ceux introduits dans la question ***2.***

Démonstration.
Soit $(x, y) \in U$.
Le couple (x, y) est un point critique de H si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\nabla(H)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \partial_1(H)(x,y) &=& 0 \\ \partial_2(H)(x,y) &=& 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y - 2 = 0 \\ \mathrm{e}^y - x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ \mathrm{e}^y = x \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ \mathrm{e}^{x-2} = x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ x - 2 = \ln(x) \end{array}\right. \qquad \textit{(car } x > 0\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ x - \ln(x) = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ f(x) = 2 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Or, d'après la question ***2.***, l'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions sur $]0, +\infty[$: les réels a et b.
On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\nabla(H)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ x = a \end{array}\right. \quad \texttt{OU} \quad \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ x = b \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = a - 2 \\ x = a \end{array}\right. \quad \texttt{OU} \quad \left\{\begin{array}{l} y = b - 2 \\ x = b \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Or, comme a et b sont solutions de l'équation $f(x) = 2$, on a :

$$f(b) = 2 \Leftrightarrow b - \ln(b) = 2 \Leftrightarrow \ln(b) = b - 2$$

De même : $\ln(a) = a - 2$. D'où :

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ est un point critique de } H &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \ln(a) \\ x = a \end{array}\right. \quad \texttt{OU} \quad \left\{\begin{array}{l} y = \ln(b) \\ x = b \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow (x,y) = (a, \ln(a)) \quad \texttt{OU} \quad (x,y) = (b, \ln(b))
\end{aligned}$$

Or, comme $a \in]0, 1[$, alors $\ln(a) < 0$. Donc $(a, \ln(a)) \notin U$.
On en déduit que le couple $(a, \ln(a))$ n'est pas un point critique de H sur U.

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } H \text{ admet un unique point critique } \underline{\text{sur } U} : (b, \ln(b)).}$$

Commentaire

- La réponse à cette question semble contredire l'énoncé.
  En fait, le couple $(a, \ln(a))$ est bien un point critique de H. Seulement, c'est un point critique de H sur $\mathbb{R}^2$ et non sur U.
  Montrer que $(a, \ln(a))$ est bien un point critique de H sur $\mathbb{R}^2$ demande peu d'adaptations dans la preuve précédente.
  Le seul point problématique est la composition par la fonction ln dans la première série d'équivalences :
  $$\begin{cases} y = x - 2 \\ e^{x-2} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ x - 2 = \ln(x) \end{cases}$$
  En effet, il faut démontrer auparavant que $x > 0$ (a priori : $x \in \mathbb{R}$).
  Cependant, d'après le système $\begin{cases} y = x - 2 \\ e^y = x \end{cases}$, on en déduit en particulier que $x > 0$, et on peut donc continuer la preuve comme précédemment.
- Dans la suite, lorsque l'on étudiera le point critique $(a, \ln(a))$, on se placera donc sur $\mathbb{R}^2$ et non sur U.

□

14. a) Écrire la matrice hessienne, notée M_a, de H au point $(a, \ln(a))$.

Démonstration.

- La fonction H est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^2$.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\nabla^2(H)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(H)(x,y) & \partial^2_{1,2}(H)(x,y) \\ \partial^2_{2,1}(H)(x,y) & \partial^2_{2,2}(H)(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & e^y \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Donc : } M_a = \nabla^2(H)(a, \ln(a)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & e^{\ln(a)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}}$$

Commentaire

On rappelle que $(a, \ln(a)) \notin U$.
Il est donc indispensable de déterminer $\nabla^2(H)$ sur $\mathbb{R}^2$ et non sur U.

□

b) Montrer que M_a admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2, vérifiant

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= a + 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 &= a - 1 \end{cases}$$

Démonstration.

- La matrice M_a est une matrice réelle symétrique. Donc elle est diagonalisable.
  On note λ_1 et λ_2 ses valeurs propres (éventuellement égales).
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \det(M_a - \lambda \cdot I_2) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & a-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(a-\lambda) - 1 \\ &= \lambda^2 - (a+1)\lambda + (a-1) \end{aligned}$$

On en déduit que la matrice $M_a - \lambda \cdot I_2$ n'est pas inversible si et seulement si :

$$\lambda^2 - (a+1)\lambda + (a-1) = 0 \quad (*)$$

- Or λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de M_a, donc :

$$(M_a - \lambda \cdot I_2) \text{ n'est pas inversible } \Leftrightarrow \lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$$

Ainsi les réels λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation $(*)$. D'où :

$$\lambda^2 - (a+1)\lambda + (a-1) \;=\; (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \;=\; \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\,\lambda_2$$

Par identification des coefficients de ces polynômes de degré 2 en λ, on obtient le système suivant : $\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = a+1 \\ \lambda_1\,\lambda_2 = a-1 \end{array}\right.$

- Montrons maintenant que λ_1 et λ_2 sont distincts.
Raisonnons par l'absurde. Supposons alors que $\lambda_1 = \lambda_2$.
D'après le système précédent, on obtient en particulier :

$$\lambda_1^2 \;=\; \lambda_1\,\lambda_2 \;=\; a-1$$

Or, d'après la question ***2.***, on a : $a < 1$. Donc $a - 1 < 0$.
On en déduit : $\lambda_1^2 < 0$, ce qui est absurde.

Ainsi, λ_1 et λ_2 sont distincts.

□

c) La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(a, \ln(a))$?

Démonstration.
On a montré dans la question précédente : $a - 1 < 0$. On en déduit : $\lambda_1\,\lambda_2 < 0$.
Les valeurs propres de M_a sont donc de signes opposés.

Ainsi, la fonction H n'admet pas d'extremum local au point $(a, \ln(a))$.

Commentaire

Le point $(a, \ln(a))$ est un point selle pour la fonction H.

□

15. La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(b, \ln(b))$?

Démonstration.
On reprend la démarche des questions précédentes.

- On note M_b la matrice hessienne de H au point $(b, \ln(b))$. Alors :

$$M_b \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \mathrm{e}^{\ln(b)} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & b \end{pmatrix}$$

- La matrice M_b est une matrice réelle symétrique. Donc elle est diagonalisable.
On note μ_1 et μ_2 ses valeurs propres éventuellement égales).
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\det(M_b - \lambda \cdot I_2) \;=\; \lambda^2 - (b+1)\lambda + (b-1)$$

On en déduit que la matrice $M_b - \lambda \cdot I_2$ n'est pas inversible si et seulement si :

$$\lambda^2 - (b+1)\lambda + (b-1) = 0 \quad (\star)$$

- Or μ_1 et μ_2 sont les valeurs propres de M_b, donc μ_1 et μ_2 sont les racines de l'équation ($\star$). D'où :

$$\lambda^2 - (b+1)\lambda + (b-1) \;=\; (\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2) \;=\; \lambda^2 - (\mu_1 + \mu_2)\lambda + \mu_1\,\mu_2$$

$$\boxed{\text{Par identification : } \left\{ \begin{array}{rcl} \mu_1 + \mu_2 & = & b+1 \\ \mu_1\,\mu_2 & = & b-1 \end{array} \right. .}$$

- D'après la question ***3.*** : $b \geqslant 2$. Donc : $b - 1 > 0$ et $b + 1 > 0$.
  On obtient alors :
  - × $\mu_1\,\mu_2 > 0$.
    Donc μ_1 et μ_2 sont non nuls et de même signe.
  - × $\mu_1 + \mu_2 > 0$.
    Or μ_1 et μ_2 ont même signe. Donc : $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } H \text{ admet un minimum local en } (b, \ln(b)).}$$

□

Exercice 3

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. a) Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ puis calculer leurs probabilités.

Démonstration.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit les événements suivants :

$$P_k \;:\; \text{« obtenir Pile au } k^{\text{ème}} \text{ lancer »}$$

$$F_k \;:\; \text{« obtenir Face au } k^{\text{ème}} \text{ lancer »}$$

- L'événement $[X = 0]$ est réalisé si et seulement si on n'a obtenu aucun Face avant l'obtention du $2^{\text{ème}}$ Pile.
  On a donc obtenu successivement deux Pile.

$$\boxed{\text{Ainsi : } [X = 0] = P_1 \cap P_2.}$$

  Les lancers de pièce sont indépendants, donc :

$$\mathbb{P}([X = 0]) \;=\; \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) \;=\; \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2) \;=\; \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \;=\; \frac{4}{9}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X = 0]) = \frac{4}{9}}$$

Commentaire

L'énoncé ne précise pas explicitement que les lancers sont indépendants. Cette hypothèse est cependant raisonnable puisque l'expérience de lancer est répétée dans des conditions identiques.

- L'événement $[X=1]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu un unique Face avant l'apparition du $2^{\text{ème}}$ Pile.
  Deux cas se présentent alors :
  × soit on a obtenu ce Face avant deux Pile successifs,
  × soit on a obtenu ce Face entre les deux premiers Pile.

$$\boxed{\text{Ainsi : } [X=1] \ = \ (F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3).}$$

  On obtient alors :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X=1]) & = & \mathbb{P}(F_1 \cap P_2 \cap P_3) \ + \ \mathbb{P}(P_1 \cap F_2 \cap P_3) & \textit{(par incompatibilité de } F_1 \cap P_2 \cap P_3 \textit{ et } P_1 \cap F_2 \cap P_3\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}(F_1)\,\mathbb{P}(P_2)\,\mathbb{P}(P_3) \ + \ \mathbb{P}(P_1)\,\mathbb{P}(F_2)\,\mathbb{P}(P_3) & \textit{(par indépendance des lancers)} \\ & = & \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \ + \ \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} & \\ & = & 2\,\dfrac{4}{3^3} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X=1]) = 2\,\frac{4}{3^3}}$$

- On raisonne de la même manière pour l'événement $[X=2]$.

$$\boxed{[X=2] \ = \ (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4)}$$

  On obtient alors :

$$\begin{array}{rll} & \mathbb{P}([X=2]) & \\ = & \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) + \mathbb{P}(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) + \mathbb{P}(P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) & \textit{(par incompatibilité)} \\ = & \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \ + \ \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} \ + \ \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} & \textit{(par indépendance)} \\ = & 3\,\dfrac{4}{3^4} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X=2]) = 3\,\frac{4}{3^4}}$$

□

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X=n]) = (n+1)\,\dfrac{4}{3^{n+2}}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- L'événement $[X=n]$ est réalisé par les tirages qui contiennent n Face et 2 Pile.
  De tels $(n+2)$-tirages sont entièrement caractérisés par :
  × la place du 2^{nd} Pile : 1 choix (le $(n+2)^{\text{ème}}$ lancer),
  × la place du 1^{er} Pile : $(n+1)$ choix (du 1^{er} lancer au $(n+1)^{\text{ème}}$ lancer).
  Il y a donc $1 \times (n+1) = n+1$ tels $(n+2)$-tirages.
- Il s'agit alors de savoir qu'elle est la probabilité d'apparition de ces $(n+2)$-tirage.
  - Tout d'abord, tous ces $(n+2)$-tirages ont la même probabilité d'apparition, car ils comportent tous le même nombre de Face (n) et le même nombre de Pile (2).
    Donc en particulier, ils ont la même probabilité d'apparition que le tirage suivant qui réalise l'événement :

$$F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2}$$

- Or, comme les lancers sont indépendants :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2}) \\
= \ & \mathbb{P}(F_1)\,\mathbb{P}(F_2)\,\cdots\,\mathbb{P}(F_n)\,\mathbb{P}(P_{n+1})\,\mathbb{P}(P_{n+2}) \\
= \ & \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \cdots \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \\
= \ & \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{3^n} \times \frac{4}{3^2} \\
= \ & \frac{4}{3^{n+2}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a donc : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X = n]) = (n+1)\ \frac{4}{3^{n+2}}.}$$

Commentaire

On peut exprimer l'événement $[X = n]$ à partir des (P_k) et (F_k) :

$$\begin{aligned}
[X = n] \quad = \quad & \ (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap F_n \cap F_{n+1} \cap P_{n+2}) \\
& \cup \ (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap F_n \cap F_{n+1} \cap P_{n+2}) \\
& \cup \ (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap \cdots \cap F_n \cap F_{n+1} \cap P_{n+2}) \\
& \vdots \\
& \cup \ (F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2})
\end{aligned}$$

On voit apparaître le fait que $[X = n]$ est la réunion de $(n + 1)$ événements incompatibles (on voit bien également que c'est le choix de la place du 1er Pile qui importe).
Les probabilités de chacun de ces événements sont identiques (égales à $\frac{4}{3^{n+2}}$ avec le même calcul que précédemment).
On retrouve bien évidemment le résultat démontré plus haut. Seule la présentation de la démonstration diffère.

□

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n + 1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule de cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose : $V = X - U$.

2. a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable U.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Si l'événement $[X = n]$ est réalisé, alors l'expérience consiste à piocher parmi les boules numérotées de 0 à n.
Donc la v.a.r. U peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 et n.
Ceci est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } U(\Omega) = \mathbb{N}}$$

□

b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Comme expliqué précédemment, si l'événement $[X = n]$ est réalisé, alors l'expérience consiste à piocher parmi les boules numérotées de 0 à n. On en déduit :

× soit $k \in [\![n+1, +\infty[\![$.
Comme il est impossible de piocher une boule de numéro supérieur à $(n+1)$, on a :
$$\mathbb{P}_{[X=n]}([U = k]) = 0$$

× soit $k \in [\![0, n]\!]$.
Comme la probabilité de choisir parmi ces $(n+1)$ boules est uniforme, on a :
$$\mathbb{P}_{[X=n]}([U = k]) = \frac{1}{n+1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Finalement : } \forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}_{[X=n]}([U = k]) = \dfrac{1}{n+1} \quad \text{et} \\ \qquad\qquad \forall k \in [\![n+1, +\infty[\![,\ \mathbb{P}_{[X=n]}([U = k]) = 0.\end{array}}$$

Commentaire

Le caractère uniforme du choix d'une boule est justifiée par :
× le fait que les boules sont indiscernables au toucher,
× on pioche au hasard dans une urne.

□

c) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:
$$\mathbb{P}([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\, \mathbb{P}([X = n]) \quad \text{puis} \quad \mathbb{P}([U = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}$$

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}$.
  La famille $([X = n])_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.
  D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([U = k]) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n] \cap [U = k]) & \\ & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\, \mathbb{P}_{[X=n]}([U = k]) & \\ & = & \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\, \mathbb{P}_{[X=n]}([U = k]) & \textit{(car : } \forall n < k,\ \mathbb{P}_{[X=n]}([U = k]) = 0 \\ & & & \textit{d'après la question } \textbf{2.b)}\textit{)} \\ & = & \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\, \frac{1}{n+1} & \textit{(d'après la question } \textbf{2.b)}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\, \mathbb{P}([X = n])}$$

- D'après la question ***1.b)*** :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X = n]) = (n+1)\, \frac{4}{3^{n+2}}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([U=k]) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{\cancel{n+1}}\, \cancel{(n+1)}\, \frac{4}{3^{n+2}} = \frac{4}{3^2} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \\
&= \frac{4}{3^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+k}} = \frac{4}{3^{k+2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{4}{3^{k+2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= \frac{4}{3^{k+2}}\, \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{4}{3^{k+2}}\, \frac{3}{2} \\
&= \frac{2}{3^{k+1}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([U=k]) = \frac{2}{3^{k+1}}}$$

□

d) Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.

Démonstration.

- La v.a.r. U admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} k\,\mathbb{P}([U=k])$ converge absolument, ce qui équivaut à démontrer sa convergence car la série est à termes positifs.
- Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}([U=k]) = \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}([U=k]) = \sum_{k=1}^{N} k\,\frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{3^2} \sum_{k=1}^{N} k\,\frac{1}{3^{k-1}} = \frac{2}{3^2} \sum_{k=1}^{N} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

On reconnaît la somme partielle d'ordre N de la série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{3}$ (avec $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$), donc elle converge.

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } U \text{ admet une espérance.}}$$

De plus :

$$\mathbb{E}(U) = \frac{2}{3^2} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{2}{3^2}\, \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{3^2}\, \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{3^2}}\, \frac{\cancel{3^2}}{2^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(U) = \frac{1}{2}}$$

- La v.a.r. U admet une variance si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} k^2\,\mathbb{P}([U=k])$ converge absolument, ce qui équivaut à démontrer sa convergence car la série est à termes positifs.
- Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} k^2\,\mathbb{P}([U=k]) &= \sum_{k=1}^{N} \big(k(k-1)+k\big)\,\mathbb{P}([U=k]) \\
&= \sum_{k=1}^{N} k(k-1)\,\mathbb{P}([U=k]) + \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}([U=k]) \\
&= \sum_{k=2}^{N} k(k-1)\,\mathbb{P}([U=k]) + \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}([U=k])
\end{aligned}$$

On sait déjà que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}^{k} \mathbb{P}([U=k])$ converge et est de somme $\frac{1}{2}$, car l'espérance $\mathbb{E}(U)$ existe et vaut $\frac{1}{2}$.

De plus :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{N} k(k-1)\,\mathbb{P}([U=k]) &= \sum_{k=2}^{N} k(k-1)\,\frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{3^3}\sum_{k=2}^{N} k(k-1)\,\frac{1}{3^{k-2}} \\ &= \frac{2}{3^3}\sum_{k=2}^{N} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}\end{aligned}$$

On reconnaît la somme partielle d'ordre N de la série géométrique dérivée seconde de raison $\frac{1}{3}$ (avec $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$), donc elle converge.

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } U \text{ admet une variance.}}$$

De plus :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U^2) &= \frac{2}{3^3}\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3^3}\,\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2^2}{3^3}\,\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} + \frac{1}{2} = \frac{\cancel{2^2}}{\cancel{3^3}}\,\frac{\cancel{3^3}}{\cancel{2^3}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\end{aligned}$$

Enfin, d'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(U) = \mathbb{E}(U^2) - \big(\mathbb{E}(U)\big)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(U) = \frac{3}{4}}$$

Commentaire

On pouvait résoudre cette question plu rapidement en remarquant que la v.a.r. $U+1$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$.

- En effet :
  - × $U(\Omega) = \mathbb{N}$. Donc $(U+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
  - × soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}([U+1=k]) = \mathbb{P}([U=k-1]) = \frac{2}{3^k} = \frac{1}{3^{k-1}} \times \frac{2}{3} = \left(1-\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{2}{3}$$

  On reconnaît une loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$. D'où : $U+1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{2}{3}\right)$.

- On en déduit l'espérance et la variance de U.
  - × Tout d'abord : $\mathbb{E}(U+1) = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$.
    Or, par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(U+1) = \mathbb{E}(U) + 1$.
    D'où : $\mathbb{E}(U) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.
  - × Ensuite : $V(U+1) = \dfrac{1-\frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{\frac{1}{\cancel{3}}}{\frac{4}{3^{\cancel{2}}}} = \frac{3}{4}$.
    Par propriété de la variance : $V(U+1) = \mathbb{V}(U)$. D'où : $V(U) = \frac{3}{4}$.

□

3. a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V.

Démonstration.
Rappelons que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. On procède alors par disjonction de cas.
Soit $n \in X(\Omega) = \mathbb{N}$. Supposons que l'événement $[X = n]$ est réalisé.

- On a donc obtenu n Face avant le $2^{\text{ème}}$ Pile.
- On doit donc ensuite piocher parmi les boules numérotées de 0 à n. Dans ce cas, la v.a.r. U peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 et n.
- On en déduit que $V = X - U$ peut prendre toutes les valeurs entières entre $n - 0$ et $n - n$, c'est-à-dire toutes les valeurs entières entre 0 et n.

$\boxed{\text{Ceci étant valable pour tout } n \in X(\Omega) = \mathbb{N}\text{, on en déduit : } V(\Omega) = \mathbb{N}.}$

Commentaire

On pouvait aussi démontrer que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ par double inclusion.

- Par définition des v.a.r. U et X : $\forall \omega \in \Omega$, $U(\omega) \leqslant X(\omega)$.
  Donc : $\forall \omega \in \Omega$, $V(\omega) = X(\omega) - U(\omega) \geqslant 0$.
  De plus, les v.a.r. X et U prennent des valeurs entières.
  On en déduit : $V(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  L'événement $[V = n]$ est réalisé par exemple si on obtient d'abord n Face, puis on pioche la boule numérotée 0.
  On a ainsi trouvé une réalisation de l'événement $[V = n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  On en déduit : $\mathbb{N} \subset V(\Omega)$.

Finalement : $V(\Omega) = \mathbb{N}$.

□

b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$.
Deux cas se présentent.

- Si $k \in [\![n + 1, +\infty[\![$, alors : $\mathbb{P}_{[X=n]}([V = k]) = 0$.
  En effet, si l'événement $[X = n]$ est réalisé, alors la v.a.r. U peut prendre des valeurs entre 0 et n, et donc V ne peut prendre une valeur strictement supérieure à n.
- Si $k \in [\![0, n]\!]$, alors, d'après la question ***2.b)*** :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[X=n]}([V = k]) &= \frac{\mathbb{P}([X = n] \cap [V = k])}{\mathbb{P}([X = n])} = \frac{\mathbb{P}([X = n] \cap [X - U = k])}{\mathbb{P}([X = n])} \\
&= \frac{\mathbb{P}([X = n] \cap [U = n - k])}{\mathbb{P}([X = n])} = \frac{\cancel{\mathbb{P}([X = n])}\, \mathbb{P}_{[X=n]}([U = n - k])}{\cancel{\mathbb{P}([X = n])}} \\
&= \mathbb{P}_{[X=n]}([U = n - k]) = \frac{1}{n + 1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Finalement : } \forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}_{[X=n]}([V = k]) = \dfrac{1}{n+1} \quad \text{et} \\ \qquad \forall k \in [\![n + 1, +\infty[\![,\ \mathbb{P}_{[X=n]}([V = k]) = 0. \end{array}}$$

□

c) En déduire la loi de V.

Démonstration.
On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V par rapport à $[X = n]$ est la même que la loi conditionnelle de U par rapport à $[X = n]$.

Donc, avec les mêmes calculs qu'à la question ***2.c)***, on obtient :
$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([V = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}.}$$
□

4. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

Démonstration.
On souhaite montrer dans cette question :
$$\forall (k,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}([U = k] \cap [V = j]) = \mathbb{P}([U = k])\, \mathbb{P}([V = j])$$
Soit $(k,j) \in \mathbb{N}^2$.

- Tout d'abord :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([U = k] \cap [V = j]) & = & \mathbb{P}([U = k] \cap [X - U = j]) & \\ & = & \mathbb{P}([U = k] \cap [X = k + j]) & \\ & = & \mathbb{P}([X = k + j])\, \mathbb{P}_{[X=k+j]}([U = k]) & \\ & = & \cancel{(k + j + 1)}\ \dfrac{4}{3^{k+j+2}} \times \dfrac{1}{\cancel{k + j + 1}} & \textit{(d'après les questions } \textbf{\textit{1.b)}} \textit{ et } \textbf{\textit{2.b)}}\textit{, car } k + j \geqslant k\textit{)} \\ & = & \dfrac{4}{3^{k+j+2}} & \end{array}$$

- Ensuite, d'après les questions ***2.c)*** et ***3.c)*** :
$$\mathbb{P}([U = k])\ \mathbb{P}([V = j]) \ = \ \frac{2}{3^{k+1}} \times \frac{2}{3^{j+1}} \ = \ \frac{4}{3^{k+j+2}}$$

On a donc bien : $\forall (k,j) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}([U = k] \cap [V = j]) \ = \ \mathbb{P}([U = k])\ \mathbb{P}([V = j])$.

$$\boxed{\text{On en déduit que les v.a.r. } U \text{ et } V \text{ sont indépendantes.}}$$
□

5. Que vaut $\mathrm{Cov}(U, V)$? En déduire $\mathrm{Cov}(X, U)$?

Démonstration.

- Les v.a.r. U et V sont indépendantes d'après la question précédente.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Cov}(U, V) = 0}$$

Commentaire

Attention ! L'implication suivante n'est pas une équivalence :
$$X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Cov}(X, Y) = 0$$

- On calcule :

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(X,U) &= \text{Cov}(U+V,U) && \textit{(par définition de } V\textit{)} \\
&= \text{Cov}(U,U) + \text{Cov}(V,U) && \textit{(par linéarité à gauche de la covariance)} \\
&= \text{Cov}(U,U) + \text{Cov}(U,V) && \textit{(par symétrie de la covariance)} \\
&= \mathbb{V}(U) + 0 && \textit{(par propriété de la covariance et d'après la question précédente)} \\
&= \frac{3}{4} && \textit{(d'après la question } \textbf{2.d)}\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Cov}(X,U) = \frac{3}{4}}$$

□

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0,1[$.

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose de la pièce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note X la v.a.r. prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la v.a.r. prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

6. **Simulation informatique**

a) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function x = simule_X()` qui simule la v.a.r. X.

Démonstration.

```
function x = simule_X()
    nbFace = 0
    nbPile = 0
    while nbPile < 2
        lancer = grand(1, 1, 'bin', 2/3)
        if lancer == 1 then
            nbPile = nbPile + 1
        else
            nbFace = nbFace + 1
        end
    end
    x = nbFace
endfunction
```

Détaillons ce programme.

- On s'intéresse au nombre de Pile et au nombre de Face obtenus dans l'expérience. On initialise donc ces deux variables.

```
    nbFace = 0
    nbPile = 0
```

- On veut ensuite simuler l'expérience décrite par l'énoncé.
  On veut donc simuler des lancers de pièces où la probabilité d'obtenir Pile est $\frac{2}{3}$ tant qu'on n'a pas obtenu le $2^{\text{ème}}$ Pile. On traduit cette condition avec une boucle `while` :

```
    while nbPile < 2
```

- Un lancer de pièce est une épreuve de Bernoulli de succès Pile.
  Ainsi on simule un lancer avec une v.a.r. , notée Y, de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{3}$.
  La v.a.r. Y prend la valeur 1 si et seulement si on obtient un Pile, et la valeur 0 sinon.
  On simule la v.a.r. Y dans la variable `lancer`.

```
        lancer = grand(1, 1, 'bin', 2/3)
```

- À chaque lancer, si la variable `lancer` vaut 1 (c'est-à-dire si on a obtenu Pile), alors on veut augmenter de 1 le nombre de Pile. Si la variable `lancer` vaut 0 (c'est-à-dire si on a obtenu Face), alors on veut augmenter de 1 le nombre de Face.

```
        if lancer == 1 then
            nbPile = nbPile + 1
        else
            nbFace = nbFace + 1
        end
```

- La boucle `while` s'arrête dès que `nbPile` vaut 2.
  La réalisation de X obtenue est alors stockée dans la variable `nbFace`.

```
    x = nbFace
```

Commentaire

De manière plus élégante, on aurait pu éviter la structure conditionnelle avec ce script :

```
function x = simule_X()
    nbFace = 0
    nbPile = 0
    while nbPile < 2
        lancer = grand(1, 1, 'bin', 2/3)
        nbPile = nbPile + lancer
        nbFace = nbFace + (1-lancer)
    end
    x = nbFace
endfunction
```

En effet, comme précisé précédemment :

× si `lancer` vaut 1, alors `nbPile` augmente de 1,

× si `lancer` vaut 0, alors `nbPile` n'augmente pas.

De même :

× si `lancer` vaut 1, alors `nbFace` n'augmente pas,

× si `lancer` vaut 0, alors `nbFace` augmente de 1.

On obtient bien :

```
        nbPile = nbPile + lancer
        nbFace = nbFace + (1-lancer)
```

Commentaire

Encore plus élégamment, on aurait pu aussi proposer le script suivant qui n'utilise pas de structure itérative :

```
function x = simule_X()
    PremierPile = grand(1, 1, 'geom', 2/3)
    DeuxiemePile = grand(1, 1, 'geom', 2/3)
    x = PremierPile + DeuxiemePile - 2
endfunction
```

On utilise ici :

× le fait que lors d'une succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, la loi de la v.a.r. associée au premier Pile est une loi géométrique (ici de paramètre $\dfrac{2}{3}$)

```
    PremierPile = grand(1, 1, 'geom', 2/3)
```

× le fait que les lancers sont indépendants. Donc la v.a.r. associée au deuxième Pile est indépendante de la v.a.r. associée au premier Pile.
Elle suit la même loi géométrique (de paramètre $\dfrac{2}{3}$).

```
    DeuxiemePile = grand(1, 1, 'geom', 2/3)
```

× le fait que le nombre de Face obtenus avant de deuxième Pile correspond au nombre total de lancers jusqu'au deuxième Pile (`PremierPile + DeuxiemePile`) auquel on retranche les deux lancers pour lesquels on a obtenu Pile.
On obtient :

```
    x = PremierPile + DeuxiemePile - 2
```

□

b) On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel p de $]0,1[$, simule la variable aléatoire Y. Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```
function r = mystere(p)
    r = 0
    N = 10 ^ 4
    for k = 1:N
        x = simule_X()
        y = simule_Y(p)
        if x <= y then
            r = r + 1/N
        end
    end
endfunction
```

Démonstration.

- Cette fonction permet d'obtenir une approximation de la probabilité $\mathbb{P}([X \leqslant Y])$ en fonction du paramètre p.

- L'idée naturelle pour obtenir cette approximation est :
  - × de simuler un grand nombre de fois ($N = 10^4$ est ce grand nombre) les v.a.r. X et Y. Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(x_1, \dots, x_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(X_1, \dots, X_N)$ de la v.a.r. X, et un N-uplet $(y_1, \dots, y_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(Y_1, \dots, Y_N)$ de la v.a.r. Y.
  - × de compter le nombre de fois où $x_i \leqslant y_i$, pour $i \in [\![1, N]\!]$.

  Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\frac{\text{nombre de fois où } x_i \leqslant y_i}{\text{taille de l'observation}} \simeq \mathbb{P}([X \leqslant Y])$$

- Dans la fonction, les valeurs $(x_1, \dots, x_N)$ et $(y_1, \dots, y_N)$ sont obtenues par des appels successifs (à l'aide d'une boucle `for`) aux fonctions `simule_X` et `simule_Y` et stockées les unes après les autres dans les variables `x` et `y`.

```
    for k = 1:N
        x = simule_X()
        y = simule_Y(p)
```

  La variable `r` est alors mise à jour à chaque tour de boucle :

```
        if x <= y then
            r = r + 1/N
        end
```

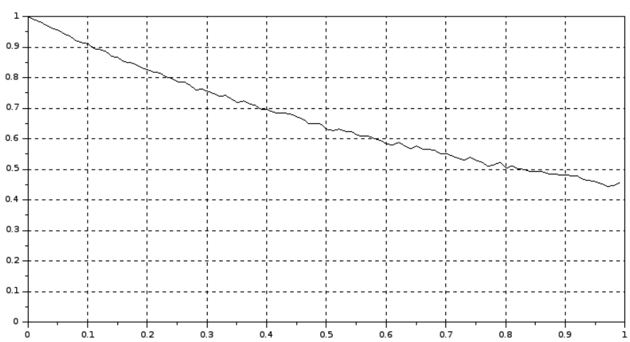
  Détaillons cette mise à jour :
  - × si `x` $\leqslant$ `y`, alors on effectue l'instruction `r = r + 1/N`.
    Ainsi, à chaque fois que `x` $\leqslant$ `y`, la variable `r` vaut successivement : $\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{j}{N}$, où j est le nombre de fois, parmi les N observations, où `x` $\leqslant$ `y`.
  - × si `x` $>$ `y`, alors la variable `r` n'est pas mise à jour.

  Cela signifie que la variable `r` compte le nombre de fois où `x` $\leqslant$ `y` et divise ce nombre par `N`. Une fois cette boucle effectuée, la variable `r` contient donc l'approximation de $\mathbb{P}([X \leqslant Y])$ formulée par la LfGN.

$$\boxed{\text{La fonction } \texttt{mystere} \text{ renvoie une approximation de la probabilité } \mathbb{P}([X \leqslant Y]) \text{ pour différentes valeurs de } p.}$$

□

c) On trace, en fonction de p, une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour laquelle le jeu serait équilibré.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, le jeu est équilibré si les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner, autrement dit si la probabilité que le joueur A gagne vaut $\frac{1}{2}$.
- La probabilité que le joueur A gagne se lit sur l'axe des ordonnées du graphe.
  On constate qu'elle vaut $\frac{1}{2}$ pour une valeur de p à peu près égale à $0,82$.

$$\boxed{\text{On conjecture que la valeur de } p \text{ pour laquelle le jeu est équilibré est } 0,83.}$$

□

7. Étude de la variable aléatoire Y

On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B.

a) Reconnaître la loi de Z et préciser son (ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.

Démonstration.

- Pour le joueur B, l'expérience consiste en la succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de succès Pile, de probabilité p.
- La v.a.r. Z est la v.a.r. associée au rang d'obtention du premier Pile, donc du premier succès.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit : } Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p). \\ \mathbb{E}(Z) = \dfrac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Z) = \dfrac{1-p}{p^2}\end{array}}$$

□

b) Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.

Démonstration.

- Le joueur B arrête de jouer lorsqu'il obtient son premier Pile.
  Il a donc obtenu un nombre de Face égal à son nombre de lancers moins 1 (le dernier lancer pour lequel il a obtenu Pile).

$$\boxed{Y = Z - 1}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La v.a.r. } Y \text{ admet donc une espérance et une variance en tant que} \\ \text{transformée affine d'une v.a.r. qui en admet.}\end{array}}$$

- Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Y) \;=\; \mathbb{E}(Z-1) \;=\; \mathbb{E}(Z) - 1 \;=\; \frac{1}{p} - 1 \;=\; \frac{1-p}{p}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{1-p}{p}}$$

- Par propriété de la variance :

$$\mathbb{V}(Y) \;=\; \mathbb{V}(Z-1) \;=\; \mathbb{V}(Z) \;=\; \frac{1-p}{p^2}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(Y) = \frac{1-p}{p^2}}$$

□

c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y \geqslant n]) = (1-p)^n$.

Démonstration.

- On rappelle que $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Donc $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\text{Comme } Y = Z - 1, \text{ on a : } Y(\Omega) = \mathbb{N}.}$$

- Si $n = 0$, alors $[Y \geqslant 0] = \Omega$ car $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Donc :

$$\mathbb{P}([Y \geqslant 0]) \;=\; \mathbb{P}(\Omega) \;=\; 1 \;=\; (1-p)^0$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([Y \geqslant n]) & = & \mathbb{P}([Z-1 \geqslant n]) \;=\; \mathbb{P}([Z \geqslant n+1]) \\ & = & 1 - \mathbb{P}([Z < n+1]) \;=\; 1 - \mathbb{P}([Z \leqslant n]) \end{array}$$

(car Z est à valeurs entières)

Or : $[Z \leqslant n] \;=\; \bigcup\limits_{k=1}^{n} [Z = k]$.

Les événements $[Z = 1]$, ..., $[Z = n]$ sont incompatibles. Donc :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([Z \leqslant n]) & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([Z = k]) \;=\; \sum\limits_{k=1}^{n} p\,(1-p)^{k-1} \\ & = & p \sum\limits_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} \;=\; p \sum\limits_{k=0}^{n-1} (1-p)^{k} \\ & = & p\, \dfrac{1-(1-p)^n}{\cancel{1} - (\cancel{1} - p)} \;=\; \cancel{p}\, \dfrac{1-(1-p)^n}{\cancel{p}} \\ & = & 1 - (1-p)^n \end{array}$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}([Y \geqslant n]) \;=\; \cancel{1} - \Big(\cancel{1} - (1-p)^n\Big) \;=\; (1-p)^n$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y \geqslant n]) = (1-p)^n.}$$

Commentaire

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On aurait aussi pu résoudre cette question en exprimant l'événement $[Y \geqslant n]$ en fonction des événements :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ F_i \;=\; \text{« obtenir Face au } i^{\text{ème}} \text{ lancer}$$

En effet, comme la v.a.r. Y est le nombre de Face obtenus avant l'obtention du premier Pile, on a :

$$[Y \geqslant n] \;=\; F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n \;=\; \bigcap_{i=1}^{n} F_i$$

Comme les lancers sont indépendants, on en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([Y \geqslant n]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i\right) \;=\; \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(F_i) \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} (1-p) \;=\; (1-p)^n \end{array}$$

□

8. a) Montrer : $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\, \mathbb{P}([Y \geqslant n])$.

Démonstration.
La famille $([X = n])_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X \leqslant Y]) & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n] \cap [X \leqslant Y]) & \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n] \cap [n \leqslant Y]) & \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\ \mathbb{P}([n \leqslant Y]) & \textit{(car les v.a.r. } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \end{array}$$

Les v.a.r. X et Y sont indépendantes, car les lancers du joueur A et ceux du joueur B sont indépendants.

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\ \mathbb{P}([Y \geqslant n]).}$$

□

b) Déduire des résultats précédents : $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \dfrac{4}{(2+p)^2}$.

Démonstration.
D'après les questions ***1.b)*** et ***7.b)*** et la question précédente :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X \leqslant Y]) & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\ \mathbb{P}([Y \geqslant n]) \ = \ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \Big((n+1)\ \dfrac{4}{3^{n+2}}\ (1-p)^n \Big) \\ & = & \dfrac{4}{3^2} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \Big((n+1)\ \dfrac{1}{3^n}\ (1-p)^n \Big) \ = \ \dfrac{4}{3^2} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)\ \left(\dfrac{1-p}{3}\right)^n \\ & = & \dfrac{4}{3^2} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\ \left(\dfrac{1-p}{3}\right)^{n-1} \end{array}$$

On reconnaît la somme d'une série géométrique dérivée de raison $\dfrac{1-p}{3}$ (avec $\left|\dfrac{1-p}{3}\right| < 1$), donc elle converge bien.
On obtient :

$$\mathbb{P}([X \leqslant Y]) \ = \ \frac{4}{3^2}\ \frac{1}{\left(1 - \frac{1-p}{3}\right)^2} \ = \ \frac{4}{3^2}\ \frac{1}{\left(\frac{2+p}{3}\right)^2} \ = \ \frac{4}{\cancel{3^2}}\ \frac{\cancel{3^2}}{(2+p)^2} \ = \ \frac{4}{(2+p)^2}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \frac{4}{(2+p)^2}}$$

□

c) Déterminer la valeur de p pour lequel le jeu est équilibré.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, le jeu est équilibré si les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.
- Or le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui du joueur B, c'est-à-dire si l'événement $[X \leqslant Y]$ est réalisé.
  Sinon le joueur A perd.

- Donc le jeu est équilibré si $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \dfrac{1}{2}$. Or, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow 8 = (2+p)^2 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{8} = 2+p && \textit{(car la fonction } x \mapsto x^2 \textit{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[\textit{ et } 2+p \geqslant 0\textit{)} \\
&\Leftrightarrow 2\sqrt{2} = 2+p \\
&\Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 2 = p \\
&\Leftrightarrow 2(\sqrt{2}-1) = p
\end{aligned}$$

Le jeu est équilibré si $p = 2(\sqrt{2}-1)$.

Commentaire

On peut noter que $2(\sqrt{2}-1) \simeq 0,83$ (à 10^{-2} près).
On confirme donc bien la conjecture de la question ***6.c)***.

□

ESSEC-I 2018 : le sujet

Dans tous le sujet :

- on désigne par n un entier naturel, au moins égal à 2,
- X est une v.a.r. à valeurs dans un intervalle $]0, \alpha[$, où α est un réel strictement positif. On suppose que X admet une densité f strictement positive et continue sur $]0, \alpha[$, et nulle en dehors de $]0, \alpha[$.
- on note F la fonction de répartition de X.
- $X_1, \ldots, X_n$ est une famille de v.a.r. mutuellement indépendantes et de même loi que X.

On admet que toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Partie I - Lois des deux plus grands

Les notations et résultats de cette partie seront utilisés dans le reste du sujet.
On définit deux variables aléatoires Y_n et Z_n de la façon suivante.
Pour tout $\omega \in \Omega$:

- $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ est le plus grand des réels $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$;
  on remarque que Y_n est définie également lorsque n vaut 1, de sorte que dans la suite du sujet on pourra considérer Y_{n-1}.
- $Z_n(\omega)$ est le « deuxième plus grand » des nombres $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$, autrement dit, une fois que ces n réels sont ordonnés dans l'ordre croissant, Z_n est l'avant-dernière valeur. On note que lorsque la plus grande valeur est présente plusieurs fois, $Z_n(\omega)$ et $Y_n(\omega)$ sont égaux.

1. Loi de Y_n.
Soit G_n la fonction de répartition de Y_n.

a) Montrer que pour tout réel x : $G_n(x) = F(x)^n$.

b) En déduire que Y_n est une variable aléatoire à densité et exprimer une densité g_n de Y_n en fonction de f, F et n.

c) Montrer que Y_n admet une espérance.

2. Loi de Z_n.
Soit H_n la fonction de répartition de Z_n.

a) Soit x un réel.

(i) Soit $\omega \in \Omega$, justifier que $Z_n(\omega) \leqslant x$ si et seulement si dans la liste de n éléments $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$, au moins $n-1$ sont inférieurs ou égaux à x.
Donner une expression de l'événement $[Z_n \leqslant x]$ en fonction des événements $[X_k \leqslant x]$ et $[X_k > x]$ avec $k \in \{1, \ldots, n\}$.

(ii) Établir : $H_n(x) = n(1 - F(x))(F(x))^{n-1} + F(x)^n$.

b) Montrer que Z_n est une variable à densité et qu'une densité de Z_n est donnée par :

$$h_n(x) \;=\; n(n-1)\, f(x)\, (1 - F(x))(F(x))^{n-2}$$

3. Simulation informatique.
On suppose que l'on a défini une fonction **Scilab** d'entête `function x = simulX(n)` qui retourne une simulation d'un échantillon de taille n de la loi de X sous la forme d'un vecteur de longueur n.
Compléter la fonction qui suit pour qu'elle retourne le couple $(Y_n(\omega), Z_n(\omega))$ associé à l'échantillon simulé par l'instruction `X = simulX(n)` :

```
function [y, z] = DeuxPlusGrands(n)
  X = simulX(n)
  if ...
    y = X(1) ; z = X(2)
  else
    ...
  end
  for k = 3:n
    if X(k) > y
      z = ... ; y = ...
    else
      if ...
        z = ...
      end
    end
  end
endfunction
```

4. Premier exemple : loi uniforme.
On suppose dans cette question que X suit la loi uniforme sur $]0, \alpha[$.

a) Donner une densité de Y_n et une densité de Z_n.

b) Calculer l'espérance de Y_n et de Z_n.

5. Deuxième exemple : loi puissance.

On suppose dans cette question que la densité f est donnée par : $f(x) = \begin{cases} \lambda \dfrac{x^{\lambda-1}}{\alpha^{\lambda}} & \text{si } x \in]0, \alpha[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

où λ est une constante strictement positive.
On dit que X suit la *loi puissance* de paramètres α et λ.

a) (i) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

(ii) Déterminer la fonction de répartition F de X.

(iii) Calculer l'espérance de X.

b) (i) Montrer que Y_n suit une loi puissance de paramètres à préciser en fonction de n, λ et α.

(ii) En déduire l'espérance de Y_n.

c) Calculer l'espérance de Z_n.

Partie II - Un problème d'optimisation

On reprend la notation de la partie précédente : G_{n-1} est la fonction de répartition de Y_{n-1}, qui est le maximum de X_1, ..., X_{n-1}.
On répond dans cette partie au problème d'optimisation suivant : trouver une fonction σ définie sur $]0, \alpha[$ vérifiant les trois propriétés :

- σ est une bijection de $]0, \alpha[$ dans un intervalle $]0, \beta[$, avec β un réel strictement positif.
- σ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \alpha[$ et σ' est à valeurs strictement positives sur $]0, \alpha[$.
- on définit, pour tout $x \in]0, \alpha[$ et tout $y \in]0, \beta[$,

$$\gamma(x, y) \;=\; (x - y)\, G_{n-1}(\sigma^{-1}(y))$$

Alors pour tout $x \in]0, \alpha[$, $\gamma(x, y)$ atteint son maximum lorsque $y = \sigma(x)$.

6. Analyse.
On suppose dans un premier temps qu'une telle fonction σ vérifiant ces trois propriétés existe.

a) Montrer que σ^{-1} est dérivable sur $]0, \beta[$ et exprimer sa dérivée $(\sigma^{-1})'$ en fonction de σ' et σ^{-1}.

b) Calculer la dérivée partielle $\partial_2(\gamma)(x, y)$.

c) Montrer que pour tout $x \in]0, \alpha[$, on a $\partial_2(\gamma)(x, \sigma(x)) = 0$.
En déduire que pour tout $x \in]0, \alpha[$:

$$\sigma'(x)\, G_{n-1}(x) + \sigma(x)\, g_{n-1}(x) \;=\; x\, g_{n-1}(x)$$

d) Montrer alors, pour tout $x \in]0, \alpha[$:

$$\sigma(x) \;=\; \frac{1}{G_{n-1}(x)} \int_0^x t\, g_{n-1}(t)\; dt \qquad (*)$$

e) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $x \in]0, \alpha[$, on a également :

$$\sigma(x) \;=\; x - \int_0^x \frac{G_{n-1}(t)}{G_{n-1}(x)}\; dt \qquad (**)$$

7. Synthèse.
On suppose à présent que σ est la fonction définie par l'égalité $(*)$ ou $(**)$.

a) Montrer que pour tout $x \in]0, \alpha[$, $0 < \sigma(x) < x$.

b) Montrer que σ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \alpha[$ et que pour tout $x \in]0, \alpha[$, $\sigma'(x)$ est du signe de $x - \sigma(x)$.
En déduire que σ' est strictement positive sur $]0, \alpha[$.

c) Montrer que σ réalise une bijection de $]0, \alpha[$ dans $]0, \beta[$, avec $\beta = \mathbb{E}(Y_{n-1})$.

d) On fixe un réel $x \in]0, \alpha[$. Soit $y \in]0, \beta[$, on pose $z = \sigma^{-1}(y)$.

(i) Établir :

$$\gamma(x, y) \;=\; (x - z)\, G_{n-1}(z) + \int_0^z G_{n-1}(t)\; dt$$

(ii) En déduire : $\gamma(x, \sigma(x)) - \gamma(x, y) \;=\; (z - x)\, G_{n-1}(z) - \displaystyle\int_x^z G_{n-1}(t)\; dt$.

(iii) Déterminer le signe de $\gamma(x, \sigma(x)) - \gamma(x, y)$ et conclure que $\gamma(x, y)$ est maximal lorsque $y = \sigma(x)$.

8. Estimation de $\sigma(x)$.
Soit $x \in \,]0, \alpha[$.

a) On considère la fonction φ_x définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\varphi_x(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leqslant x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

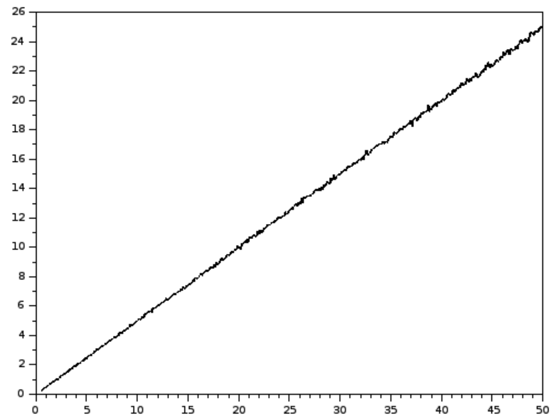
En utilisant la relation $(*)$, montrer que $\sigma(x) = \dfrac{\mathbb{E}(\varphi_x(Y_{n-1}))}{\mathbb{P}([Y_{n-1} \leqslant x])}$.

b) En déduire une fonction **Scilab** `function s = sigma(x,n)` qui retourne une valeur approchée de $\sigma(x)$ obtenue comme quotient d'une estimation de $\mathbb{E}(\varphi_x(Y_{n-1}))$ et de $\mathbb{P}([Y_{n-1} \leqslant x])$.
On utilisera la fonction `simulX` pour simuler des échantillons de la loi de X, et on rappelle que si `v` est un vecteur, `max(v)` est égal au plus grand élément de `v`.

9. Exemples.
Donner une expression de $\sigma(x)$ pour tout $x \in \,]0, \alpha[$ dans les cas suivants :

a) X suit la loi uniforme sur $]0, \alpha[$.

b) X suit la loi puissance de paramètres α et λ. Votre résultat est-il en accord avec la courbe ci-dessous obtenue sous cette hypothèse, en utilisant la fonction `sigma` de la question précédente lorsque $n = 6$, $\lambda = 0,2$ et $\alpha = 50$? Justifier votre réponse.



Partie III - Modélisation d'enchères

Un bien est mis en vente aux enchères et n acheteurs $A_1, \ldots, A_n$ sont intéressés. Chaque acheteur A_k attribue une valeur x_k à ce bien, appelée *valeur privée*, qui n'est pas connue des autres acheteurs. Afin de se procurer ce bien, A_k propose ensuite, de façon secrète, une *mise* (on dit aussi une *offre*) y_k. Toutes les mises sont alors révélées simultanément et l'acheteur qui remporte le bien est celui qui a proposé la plus grande mise. En cas d'égalité, le gagnant est tiré au sort parmi ceux qui ont la mise la plus importante.

Le prix à payer par le gagnant au vendeur dépend du type d'enchère organisé. On étudie ici deux formats d'enchères :

- l'*enchère au premier prix*, ou enchère hollandaise : l'acheteur gagnant paye la mise qu'il a lui-même proposée. Ce type d'enchère correspond aux enchères dynamiques « descendantes » : la vente commence avec un prix très élevé et baisse progressivement. Le premier qui accepte le prix remporte le bien.
- l'*enchère au second prix*, ou enchère anglaise : l'acheteur gagnant paye le prix correspondant à la deuxième meilleure mise.
  Ce type d'enchère est presque équivalent aux enchères dynamiques « montantes » bien connues : le prix monte progressivement jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul acheteur : celui qui est prêt à mettre le plus haut prix, et qui paye (à peu de chose près) le prix de la deuxième offre après la sienne.

Pour chaque acheteur A_k, on appelle *résultat net* ou simplement *résultat* de l'enchère, et on note r_k, le bénéfice ou le perte résultant de l'opération. Pour l'acheteur qui a remporté l'enchère, le résultat est la différence entre la valeur privée et le prix payé. Pour les autres acheteurs, le résultat est considéré comme nul.

À titre d'exemple, considérons quatre acheteurs, dont les mises en euros sont $y_1 = 50$, $y_2 = 100$, $y_3 = 80$ et $y_4 = 40$, alors l'acheteur A_2 gagne l'enchère. Si sa valeur privée x_2 vaut 90 euros, il paye 100 euros au vendeur pour un résultat de $r_2 = -10$ euros s'il s'agit d'une enchère au premier prix, et 80 euros pour un résultat de $r_2 = 10$ euros si c'est une enchère au second prix.

On s'intéresse au problème suivant : à partir de l'information dont dispose l'acheteur k, notamment à partir de sa valeur privée x_k, comment doit-il choisir sa mise y_k afin d'optimiser son résultat net ? On appelle *stratégie* de l'acheteur k une fonction σ_k telle que $y_k = \sigma_k(x_k)$.

1- Enchère au premier prix

On suppose que chaque acheteur A_k a une valeur privée $x_k = X_k(\omega)$ qui est une réalisation de la variable aléatoire X_k.

Soit σ la fonction définie à la partie II.

Le problème étant symétrique, on se met par exemple à la place de l'acheteur n, et on suppose que les $n-1$ premiers acheteurs appliquent la stratégie σ, c'est-à-dire : pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, l'acheteur k mise $\sigma(X_k)$.

L'acheteur n a une valeur privée x_n et choisit une mise y_n.

On note E_n l'événement « l'acheteur A_n remporte l'enchère ».

10. En remarquant que $\mathbb{P}(\big[Y_{n-1} = \sigma^{-1}(y_n)\big]) = 0$, montrer que $\mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(\big[Y_{n-1} < \sigma^{-1}(y_n)\big])$.
On note R_n la variable aléatoire donnant le résultat net de l'enchère pour l'acheteur A_n.
Justifier que $R_n = (x_n - y_n)\,\mathbb{1}_{E_n}$ et en déduire que le résultat espéré de l'acheteur A_n en fonction de sa valeur privée $x_n \in \,]0, \alpha[$ et de l'offre $y_n \in \,]0, \beta[$ est donné par :

$$\mathbb{E}(R_n) \;=\; (x_n - y_n)\, G_{n-1}(\sigma^{-1}(y_n))$$

11. En déduire que pour optimiser son espérance de résultat, l'acheteur A_n a intérêt à appliquer lui aussi la stratégie σ.
Il s'agit de ce que l'on appelle un *équilibre de Nash* en théorie des jeux : si tous les acheteurs appliquent cette stratégie d'équilibre σ, alors aucun n'a intérêt à changer de stratégie.

2- Enchère au second prix

On se met à nouveau à la place de l'acheteur n. Soit $m = \max(y_1, \ldots, y_{n-1})$ la meilleure offre faite par les acheteurs A_1, …, A_{n-1} (que A_n ne connaît pas).

12. ***a)*** Si on suppose que $m \geqslant x_n$, montrer que quelle que soit la mise y_n, le résultat net r_n pour A_n est négatif ou nul. Que vaut r_n pour le choix $y_n = x_n$?

b) Si on suppose que $m < x_n$, quel est le résultat pour A_n dans les cas $y_n < m$ et $y_n \geqslant m$?

c) En déduire que la meilleure stratégie pour A_n consiste à prendre $y_n = x_n$.

Par symétrie, chaque acheteur a également intérêt à miser le montant de sa valeur privée. On parle de *stratégie dominante* : chaque acheteur a une stratégie optimale indépendamment du comportement des autres acheteurs.

3- Équivalence des revenus

On se met maintenant à la place du vendeur.
Les valeurs privées des acheteurs sont données par les variables aléatoires X_1, …, X_n.

13. Enchère au premier prix.
On suppose que le vendeur organise une enchère au premier prix, et que les acheteurs adoptent la stratégie d'équilibre σ donnée à la partie III-1.
On note B_n la variable aléatoire donnant le *bénéfice*, ou *revenu*, du vendeur. Il s'agit du montant que paye l'acheteur qui a remporté l'enchère.

a) Justifier que $B_n = \sigma(Y_n)$.

b) En déduire :

$$\mathbb{E}(B_n) \;=\; n \int_0^\alpha \sigma(x)\, G_{n-1}(x)\, f(x)\; dx \;=\; n \int_0^\alpha \left(\int_0^x t\, g_{n-1}(t)\; dt \right) f(x)\; dx$$

c) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\mathbb{E}(B_n) \;=\; n \int_0^\alpha x\,(1 - F(x))\, g_{n-1}(x)\; dx$$

14. Enchère au second prix.
On suppose que le vendeur organise une enchère au second prix, et que les acheteurs adoptent la stratégie dominante de la partie III-2 : chacun mise autant que sa valeur privée.
On note B'_n la variable aléatoire donnant le revenu du vendeur dans cette enchère.
Justifier que $\mathbb{E}(B'_n) = \mathbb{E}(Z_n)$.

15. Établir : $\mathbb{E}(B_n) = \mathbb{E}(B'_n)$.

Ainsi, le revenu moyen pour le vendeur est le même pour les enchères au premier ou au second prix lorsque les acheteurs adoptent tous la stratégie optimale. Plus généralement, on peut montrer que ce revenu moyen est encore le même dans une très grande classe de formats d'enchères, ce résultat portant le nom de *principe d'équivalence du revenu.*

ESSEC-I 2018 : le corrigé

Dans tous le sujet :

- on désigne par n un entier naturel, au moins égal à 2,
- X est une v.a.r. à valeurs dans un intervalle $]0, \alpha[$, où α est un réel strictement positif. On suppose que X admet une densité f strictement positive et continue sur $]0, \alpha[$, et nulle en dehors de $]0, \alpha[$.
- on note F la fonction de répartition de X.
- X_1, ..., X_n est une famille de v.a.r. mutuellement indépendantes et de même loi que X.

On admet que toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Partie I - Lois des deux plus grands

Les notations et résultats de cette partie seront utilisés dans le reste du sujet.
On définit deux variables aléatoires Y_n et Z_n de la façon suivante.
Pour tout $\omega \in \Omega$:

- $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ est le plus grand des réels $X_1(\omega)$, ..., $X_n(\omega)$;
on remarque que Y_n est définie également lorsque n vaut 1, de sorte que dans la suite du sujet on pourra considérer Y_{n-1}.
- $Z_n(\omega)$ est le « deuxième plus grand » des nombres $X_1(\omega)$, ..., $X_n(\omega)$, autrement dit, une fois que ces n réels sont ordonnés dans l'ordre croissant, Z_n est l'avant-dernière valeur. On note que lorsque la plus grande valeur est présente plusieurs fois, $Z_n(\omega)$ et $Y_n(\omega)$ sont égaux.

1. Loi de Y_n.
Soit G_n la fonction de répartition de Y_n.

a) Montrer que pour tout réel x : $G_n(x) = F(x)^n$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord :

$$[Y_n \leqslant x] \; = \; [X_1 \leqslant x] \cap \cdots \cap [X_n \leqslant x] \; = \; \bigcap_{i=1}^{n} \; [X_i \leqslant x]$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \mathbb{P}([Y_n \leqslant x]) \; = \; \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \; [X_i \leqslant x]\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i \leqslant x]) && \textit{(car } X_1, \ldots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\ &= \prod_{i=1}^{n} F(x) && \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \textit{ ont même loi)} \\ &= (F(x))^n \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \, G_n(x) = (F(x))^n}$$

□

b) En déduire que Y_n est une variable aléatoire à densité et exprimer une densité g_n de Y_n en fonction de f, F et n.

Démonstration.

- La fonction F est la fonction de répartition de la v.a.r. X qui est **à densité**, donc F est :
  - × continue sur $\mathbb{R}$,
  - × de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0 et α.
- La fonction G_n est donc continue sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $h \circ F$ où :
  - × F est :
    - – continue sur $\mathbb{R}$,
    - – telle que $F(\mathbb{R}) \subset [0,1]$ (car F est une fonction de répartition)
  - × $h : x \mapsto x^n$ est continue sur $[0,1]$.
- De même G_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et α.
  Finalement, la fonction G_n est :
  - × continue sur $\mathbb{R}$,
  - × de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et α.

$$\boxed{\text{Ainsi, } Y_n \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

- On obtient une densité g_n de Y_n en dérivant la fonction G_n sur les intervalles ouverts.
  - × Soit $x \in \,]-\infty, 0[$.
  $$g_n(x) \ = \ G_n'(x) \ = \ n\, f(x)\, (F(x))^{n-1} \ = \ 0$$
  En effet, la fonction f est nulle sur $]-\infty, 0[$.
  - × Soit $x \in \,]0, \alpha[$.
  $$g_n(x) \ = \ G_n'(x) \ = \ n\, f(x)\, (F(x))^{n-1}$$
  - × Soit $x \in \,]\alpha, +\infty[$.
  $$g_n(x) \ = \ G_n'(x) \ = \ n\, f(x)\, (F(x))^{n-1} \ = \ 0$$
  En effet, la fonction f est nulle sur $]\alpha, +\infty[$.
  - × On choisit : $g_n(0) = 0$ et $g_n(\alpha) = 0$.

$$\boxed{\text{Une densité de } Y_n \text{ est donc } g_n : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} n\, f(x)\, (F(x))^{n-1} & \text{si } x \in \,]0, \alpha[\\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.}$$

Commentaire

Comme la fonction f est nulle en dehors de $]0, \alpha[$, on peut généraliser la formule précédente de la façon suivante :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ g_n(x) \ = \ n\, f(x)\, (F(x))^{n-1}$$

□

c) Montrer que Y_n admet une espérance.

Démonstration.

- La v.a.r. Y_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, g_n(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour un calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k g_n(t)\ dt$.
- La fonction g_n est nulle en dehors de $]0, \alpha[$, donc :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, g_n(t)\ dt \ = \ \int_0^{\alpha} t\, g_n(t)\ dt$$

- Soit $t \in]0, \alpha[$.
Comme la fonction F est une fonction de répartition : $0 \leqslant F(t) \leqslant 1$. D'où : $0 \leqslant (F(t))^{n-1} \leqslant 1$.
Ainsi :

$$\begin{array}{rl} & 0 \leqslant t \leqslant \alpha \\ \text{donc} & 0 \leqslant n\, t\, f(t)\, (F(t))^{n-1} \leqslant n\, \alpha\, f(t)\, (F(t))^{n-1} \\ \text{d'où} & 0 \leqslant n\, t\, f(t)\, (F(t))^{n-1} \leqslant n\, \alpha\, f(t) \\ \text{ainsi} & 0 \leqslant t\, g_{n-1}(t) \leqslant n\, \alpha\, f(t) \end{array}$$

Finalement :
× $\forall t \in]0, \alpha[,\ 0 \leqslant t\, g_{n-1}(t) \leqslant n\, \alpha\, f(t)$
× l'intégrale $\displaystyle\int_0^\alpha f(t)\, dt$ converge car la fonction f est une densité de X.
Par critère de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^\alpha t\, g_{n-1}(t)\, dt$ converge.

$$\boxed{\text{Donc la v.a.r. } Y_n \text{ admet une espérance.}}$$

Commentaire

On peut démontrer de la même manière que toute v.a.r. X bornée (à valeurs dans un intervalle $]a, b[$ par exemple) à densité admet une espérance. Démontrons le.
On note f une densité de X.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt$ est absolument convergente.
- La fonction f est nulle en dehors de $]a, b[$ car X est à valeurs dans $]a, b[$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t\, f(t)|\, dt = \int_a^b |t\, f(t)|\, dt$$

- Soit $t \in]a, b[$.

$$\begin{array}{rll} & a \leqslant t \leqslant b & \\ \text{donc} & a\, f(t) \leqslant t\, f(t) \leqslant b\, f(t) & \textit{(car } f(t) \geqslant 0 \textit{ puisque } f \textit{ est une densité)} \\ \text{d'où} & 0 \leqslant |t\, f(t)| \leqslant \max(|a|, |b|)\, f(t) & \end{array}$$

Finalement :
× $\forall t \in]a, b[,\ 0 \leqslant |t\, f(t)| \leqslant \max(|a|, |b|)\, f(t)$
× l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ converge car la fonction f est une densité de X.
Par critère de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b |t\, f(t)|\, dt$ converge, c'est-à-dire que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b t\, f(t)\, dt$ converge absolument.

Ainsi, la v.a.r. X admet une espérance. □

2. Loi de Z_n.
Soit H_n la fonction de répartition de Z_n.

a) Soit x un réel.

(i) Soit $\omega \in \Omega$, justifier que $Z_n(\omega) \leqslant x$ si et seulement si dans la liste de n éléments $X_1(\omega)$, ..., $X_n(\omega)$, au moins $n-1$ sont inférieurs ou égaux à x.
Donner une expression de l'événement $[Z_n \leqslant x]$ en fonction des événements $[X_k \leqslant x]$ et $[X_k > x]$ avec $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Démonstration.

- Le réel $Z_n(\omega)$ est le deuxième plus grand nombre parmi $X_1(\omega)$, ..., $X_n(\omega)$. Donc $Z_n(\omega) \leqslant x$ si et seulement si tous les éléments $X_1(\omega)$, ..., $X_n(\omega)$ sont inférieurs à x, sauf éventuellement un (le plus grand élément parmi $X_1(\omega)$, ..., $X_n(\omega)$).

Ainsi, $Z_n(\omega) \leqslant x$ si et seulement si, dans la liste de n éléments $X_1(\omega)$, ..., $X_n(\omega)$, au moins $(n-1)$ sont inférieurs ou égaux à x.

- D'après ce qui précède, si $Z_n(\omega) \leqslant x$, $(n+1)$ cas se présentent :
  - × soit tous les $X_i(\omega)$ sont inférieurs à x, c'est-à-dire l'événement $\bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]$ est réalisé.
  - × soit $X_1(\omega)$ est strictement supérieur à x, et les autres sont inférieurs à x, c'est-à-dire l'événement $[X_1 > x] \cap \left(\bigcap\limits_{i=2}^{n} [X_i \leqslant x] \right)$ est réalisé.
  - × soit $X_2(\omega)$ est strictement supérieur à x, et les autres sont inférieurs à x, c'est-à-dire l'événement $[X_2 > x] \cap \left(\bigcap\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{n} [X_i \leqslant x] \right)$ est réalisé.
  - × ⋯
  - × soit $X_n(\omega)$ est strictement supérieur à x, et les autres sont inférieurs à x, c'est-à-dire l'événement $[X_n > x] \cap \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n-1} [X_i \leqslant x] \right)$ est réalisé.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} [Z_n \leqslant x] &= \left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x] \right) \cup \left([X_1 > x] \cap \left(\bigcap_{i=2}^{n} [X_i \leqslant x] \right) \right) \\ &\qquad \cup \left([X_2 > x] \cap \left(\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{n} [X_i \leqslant x] \right) \right) \\ &\qquad \cup \quad \cdots \\ &\qquad \cup \left([X_{n+1} > x] \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} [X_i \leqslant x] \right) \right) \\ &= \left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x] \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} [X_k > x] \cap \left(\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} [X_i \leqslant x] \right) \right) \end{aligned}$$

□

9782340-026636_001_784.indd 658 30/07/2018 09:53

(ii) Établir : $H_n(x) = n(1 - F(x))(F(x))^{n-1} + F(x)^n$.

Démonstration.

- Les événements $\bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]$, $[X_1 > x] \cap \Big(\bigcap\limits_{i=2}^{n} [X_i \leqslant x]\Big)$, …, $[X_{n+1} > x] \cap \Big(\bigcap\limits_{i=1}^{n-1} [X_i \leqslant x]\Big)$ sont incompatibles. Donc :

$$\mathbb{P}([Z_n \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]\Big) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\Big([X_k > x] \cap \big(\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} [X_i \leqslant x] \big)\Big)$$

- Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Comme les v.a.r. X_1, …, X_n sont indépendantes, on obtient :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\Big([X_k > x] \cap \big(\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} [X_i \leqslant x] \big)\Big) \\ = \ & \mathbb{P}([X_k > x]) \times \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \mathbb{P}([X_i \leqslant x]) \\ = \ & (1 - F(x)) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} F(x) && \textit{(car } X_1, \ldots, X_n \textit{ ont même fonction de répartition } F\textit{)} \\ = \ & (1 - F(x))(F(x))^{n-1} \end{aligned}$$

- De même, par indépendance de X_1, …, X_n :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]\Big) \ = \ \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i \leqslant x]) \ = \ \prod_{i=1}^{n} F(x) \ = \ (F(x))^n$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z_n \leqslant x]) \ & = \ (F(x))^n + \sum_{k=1}^{n} (1 - F(x))\,(F(x))^{n-1} \\ & = \ (F(x))^n + n\,(1 - F(x))\,(F(x))^{n-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{H_n(x) \ = \ \mathbb{P}([Z_n \leqslant x]) \ = \ n\,(1 - F(x))\,(F(x))^{n-1} + (F(x))^n}$$

□

b) Montrer que Z_n est une variable à densité et qu'une densité de Z_n est donnée par :

$$h_n(x) \ = \ n(n-1)\,f(x)\,(1 - F(x))(F(x))^{n-2}$$

Démonstration.

- D'après la formule obtenue à la question précédente, la fonction H_n est :
  - × continue sur $\mathbb{R}$ en tant que composée et somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ (car la fonction F l'est),
  - × de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et α en tant que composée et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en 0 et α (car la fonction F l'est)

$$\boxed{\text{On en déduit que } Z_n \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

- Pour déterminer une densité de Z_n, on dérive la fonction H_n sur des intervalles ouverts.
  - × Soit $x \in \,]0, \alpha[$.

$$\begin{aligned} h_n(x) &= \cancel{n\,(-f(x))\,(F(x))^{n-1}} + n\,(1-F(x))\,(n-1)f(x)(F(x))^{n-2} + \cancel{n\,f(x)\,(F(x))^{n-1}} \\ &= n(n-1)\,f(x)\,(1-F(x))\,(F(x))^{n-2} \end{aligned}$$

  - × On raisonne de même sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]\alpha, +\infty[$.
  - × On choisit $h_n(0) = 0$ et $h_n(\alpha) = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Comme } f(0) = f(\alpha) = 0, \text{ on obtient bien :} \\ h_n : x \mapsto n(n-1)\,f(x)\,(1-F(x))\,(F(x))^{n-2}.\end{array}}$$

□

3. Simulation informatique.
On suppose que l'on a défini une fonction **Scilab** d'entête `function x = simulX(n)` qui retourne une simulation d'un échantillon de taille n de la loi de X sous la forme d'un vecteur de longueur n.
Compléter la fonction qui suit pour qu'elle retourne le couple $(Y_n(\omega), Z_n(\omega))$ associé à l'échantillon simulé par l'instruction `X = simulX(n)` :

```
function [y, z] = DeuxPlusGrands(n)
  X = simulX(n)
  if ...
    y = X(1) ; z = X(2)
  else
    ...
  end
  for k = 3:n
    if X(k) > y
      z = ... ; y = ...
    else
      if ...
        z = ...
      end
    end
  end
endfunction
```

Démonstration.

```
  if X(1) > X(2)
    y = X(1) ; z = X(2)
  else
    y = X(2) ; z = X(1)
  end
  for k = 3:n
    if X(k) > y
      z = y ; y = X(k)
    else
      if X(k) > z
        z = X(k)
      end
    end
  end
```

Détaillons l'obtention de ce programme.

- Comme précisé par l'énoncé, `X = simulX(n)` est un vecteur de longueur n, contenant n réalisations de la v.a.r. X : $X_1(\omega)$, …, $X_n(\omega)$.
- La variable `y` doit contenir le plus grand élément parmi $X_1(\omega)$, …, $X_n(\omega)$. Elle sera alors la réalisation $Y_n(\omega)$.
- De même, la variable `z` doit contenir le second plus grand élément parmi $X_1(\omega)$, …, $X_n(\omega)$. Elle sera alors la réalisation $Z_n(\omega)$.
- L'idée derrière ce script est de parcourir le vecteur `X` et de mettre à jour les variables `y` et `z` au fur et à mesure.
  - × On commence donc par comparer `X(1)` et `X(2)`
    La plus grande valeur est alors stockée dans `y` et la seconde dans `z`. Autrement dit :
    - si `X(1)` $>$ `X(2)`, alors `y` $=$ `X(1)` et `z` $=$ `X(2)`

```
if X(1) > X(2)
  y = X(1) ; z = X(2)
```

    - si `X(1)` $\leqslant$ `X(2)`, alors `y` $=$ `X(2)` et `z` $=$ `X(1)`

```
else
  y = X(2) ; z = X(1)
```

  - × On compare ensuite chaque nouvel élément `X(k)` du vecteur `X` à `y`.
    - Si `X(k)` $>$ `y`, alors :
      - `X(k)` est le maximum de `X(1)`, …, `X(k)`,
      - `y` est donc le deuxième plus grand élément parmi `X(1)`, …, `X(k)` (puisque c'était le maximum de `X(1)`, …, `X(k-1)`)
      - la variable `z` prend donc la valeur de `y`, et la variable `y` celle de `X(k)`.

    On obtient donc :

```
  if X(k) > y
    z = y ; y = X(k)
```

    (La mise à jour de la variable `z` *avant celle de la variable* `y` *a permis de ne pas écraser le contenu précédent de* `y`*)*

    - Si `X(k)` $\leqslant$ `y`, alors :
      - `y` est toujours le maximum de `X(1)`, …, `X(k)`.
        Il est donc inutile de mettre cette variable à jour.
      - on compare alors `X(k)` et `z`.
        Si `X(k)` $>$ `z`, alors `X(k)` est le deuxième plus grand élément parmi `X(1)`, …, `X(k)`.
        On met donc à jour la variable `z` :

```
  else
    if X(k) > z
      z = X(k)
```

        Sinon, `z` reste la deuxième plus grande valeur de `X(1)`, …, `X(k)`.
        On ne la met donc pas à jour.

  - × En réitérant ce procédé pour toutes les coordonnées de `X`, on obtient que `(y,z)` est bien une réalisation de (Y_n, Z_n).

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, écrire correctement la fonction **Scilab** démontre la bonne compréhension et permet certainement d'obtenir tous les points alloués.
- On pourrait avoir envie d'écrire :

```
      if X(k) > y
        y = X(k) ; z = y
```

Mais attention : en écrivant cela, on effectue les calculs suivants :

$$\begin{array}{lcl} \texttt{y} = \texttt{X(k)} & \longleftrightarrow & \texttt{y} \text{ contient } \texttt{X(k)} \\[1em] \texttt{z} = \texttt{y} & \longleftrightarrow & \begin{array}{l} \texttt{z} \text{ contient } \texttt{y} \text{ donc } \texttt{X(k)} \\ \textit{(et non la valeur précédente de } \texttt{y}\textit{)} \end{array} \end{array}$$

D'où la mise à jour de `z` avant celle de `y`.

□

4. Premier exemple : loi uniforme.
On suppose dans cette question que X suit la loi uniforme sur $]0, \alpha[$.

a) Donner une densité de Y_n et une densité de Z_n.

Démonstration.

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(]0, \alpha[)$, alors :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} & \text{si } x \in \,]0, \alpha[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \quad F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, 0] \\ \dfrac{x}{\alpha} & \text{si } x \in \,]0, \alpha[\\ 1 & \text{si } x \in [\alpha, +\infty[\end{cases}$$

- D'après la question ***1.b)***, une densité de Y_n est :

$$g_n : x \mapsto \begin{cases} n\, f(x)\, (F(x))^{n-1} & \text{si } x \in \,]0, \alpha[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $x \in \,]0, \alpha[$.

$$g_n(x) \;=\; n\, f(x)\, (F(x))^{n-1} \;=\; n \times \frac{1}{\alpha} \times \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{n-1} \;=\; \frac{n}{\alpha^n}\, x^{n-1}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } g_n : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{n}{\alpha^n}\, x^{n-1} & \text{si } x \in \,]0, \alpha[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .}$$

- D'après la question ***2.b)***, une densité de Z_n est :

$$h_n : x \mapsto x \mapsto n(n-1)\, f(x)\, (1 - F(x))\, (F(x))^{n-2}$$

× La fonction f est nulle en dehors de $]0, \alpha[$, donc :

$$\forall x \in \,]-\infty, 0] \cup [\alpha, +\infty[, \; h_n(x) = 0$$

× Soit $x \in \,]0, \alpha[$.

$$\begin{array}{rcl} h_n(x) & = & n(n-1)\, f(x)\, (1 - F(x))\, (F(x))^{n-2} \\ & = & n(n-1) \times \dfrac{1}{\alpha} \times \left(1 - \dfrac{x}{\alpha}\right) \left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^{n-2} \\ & = & \dfrac{n(n-1)}{\alpha^{n-1}} \times \dfrac{\alpha - x}{\alpha}\, x^{n-2} \\ & = & \dfrac{n(n-1)}{\alpha^n}\, (\alpha - x)\, x^{n-2} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } h_n : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{n(n-1)}{\alpha^n}\, (\alpha - x)\, x^{n-2} & \text{si } x \in \,]0, \alpha[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.}$$

□

b) Calculer l'espérance de Y_n et de Z_n.

Démonstration.

- D'après la question ***1.c)***, la v.a.r. Y_n admet une espérance.
  D'après la question précédente, la fonction g_n est nulle en dehors de $]0, \alpha[$, donc :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(Y_n) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, g_n(t)\ dt \ = \ \int_0^{\alpha} t\, g_n(t)\ dt \\ & = & \displaystyle\int_0^{\alpha} t\, \frac{n}{\alpha^n}\, t^{n-1}\ dt \ = \ \frac{n}{\alpha^n} \int_0^{\alpha} t^n\ dt \\ & = & \displaystyle\frac{n}{\alpha^n} \left[\ \frac{t^{n+1}}{n+1}\ \right]_0^{\alpha} \ = \ \frac{n}{\alpha^n} \times \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \\ & = & \displaystyle\frac{n}{n+1}\, \alpha \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_n) \ = \ \frac{n}{n+1}\, \alpha}$$

- Montrons que la v.a.r. Z_n admet une espérance.
  - La v.a.r. Z_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, h_n(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour un calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k\, h_n(t)\ dt$.
  - La fonction h_n est nulle en dehors de $]0, \alpha[$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, h_n(t)\ dt \ = \ \int_0^{\alpha} t\, h_n(t)\ dt$$

  - Or la fonction $t \mapsto t\, h_n(t)$ est continue par morceaux sur $[0, \alpha]$ en tant que produit de fonctions continues par morceaux sur $[0, \alpha]$.
    On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\alpha} t\, h_n(t)\ dt$ est bien définie.

$$\boxed{\text{Donc la v.a.r. } Z_n \text{ admet une espérance.}}$$

- Calculons $\mathbb{E}(Z_n)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_n) &= \int_0^\alpha t\, h_n(t)\ dt \ = \ \int_0^\alpha t\, \frac{n(n-1)}{\alpha^n}\, (\alpha - t)\, t^{n-2}\ dt \\
&= \frac{n(n-1)}{\alpha^n} \int_0^\alpha (\alpha - t)\, t^{n-1}\ dt \\
&= \frac{n(n-1)}{\alpha^n} \left(\alpha \int_0^\alpha t^{n-1}\ dt - \int_0^\alpha t^n\ dt \right) \\
&= \frac{n(n-1)}{\alpha^n} \left(\alpha \left[\frac{t^n}{n} \right]_0^\alpha - \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^\alpha \right) \\
&= \frac{n(n-1)}{\alpha^n} \left(\alpha\, \frac{\alpha^n}{n} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \right) \ = \ \frac{n(n-1)\alpha^{\cancel{n}+1}}{\cancel{\alpha^{n}}} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \cancel{n}(n-1)\alpha\, \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\cancel{n}(n+1)} \ = \ \frac{n-1}{n+1}\, \alpha
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = \frac{n-1}{n+1}\, \alpha}$$

Commentaire

- La continuité par morceaux de la fonction $t \mapsto t\, h_n(t)$ sur $[0, \alpha]$ suffit à conclure quant à la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^\alpha t\, h_n(t)\ dt$.
  Cependant, on peut même démontrer que la fonction $t \mapsto t\, h_n(t)$ est continue sur le segment $[0, \alpha]$.
- Revenons sur l'hypothèse de continuité par morceaux.
  Considérons la fonction $u : t \mapsto t\, g_n(t)$ par exemple.
  - Tout d'abord, il faut se rendre compte que la fonction $u : t \mapsto t\, g_n(t)$ `N'EST PAS` continue sur $[0, \alpha]$. En fait, elle n'est pas continue en α. Par contre u est continue sur $]-\infty, \alpha[$ et $]\alpha, +\infty[$.
  - Pour autant, cela ne signifie pas que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\alpha u(t)\ dt$ est impropre.
    En effet, la fonction $u_{|[0,\alpha[}$ (restriction de u sur l'ensemble $[0, \alpha[$) admet une limite finie en α (égale à $\alpha \times \dfrac{n}{\alpha^n}\, \alpha^{n-1} = n$).
    Ainsi, $u_{|[0,\alpha[}$ est prolongeable par continuité en une fonction continue sur $[0, \alpha]$ ce qui justifie que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\alpha u(t)\ dt$ est bien définie.
    Mais c'est la fonction $u_{|[0,\alpha[}$ qui est prolongée par continuité et en aucun cas u (ce qui n'aurait pas de sens : la fonction u est définie en 0 et en α, il n'y a pas lieu de la prolonger en ces points).
  - La notion de continuité par morceaux décrit complètement cette situation :
    × u est continue sur les intervalles ouverts $]-\infty, \alpha[$ et $]\alpha, +\infty[$.
    (ici, elle n'est pas continue en α)
    × u admet une limite finie à gauche en ces deux points.
    × u admet une limite finie à droite en ces deux points.

  (la limite à gauche est éventuellement différente de la limite à droite)
  Ainsi, u est **continue par morceaux** sur $[0, \alpha]$.

□

5. Deuxième exemple : loi puissance.

On suppose dans cette question que la densité f est donnée par : $f(x) = \begin{cases} \lambda \dfrac{x^{\lambda-1}}{\alpha^\lambda} & \text{si } x \in \,]0, \alpha[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

où λ est une constante strictement positive.
On dit que X suit la *loi puissance* de paramètres α et λ.

a) (i) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

Démonstration.

- La fonction f est continue :
  - × sur $]-\infty, 0[$ et sur $]\alpha, +\infty[$ en tant que fonction constante,
  - × sur $]0, \alpha[$ en tant que fonction élévation à la puissance $\lambda - 1$ (multipliée par un scalaire).

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0 \text{ et en } \alpha.}$$

- Soit $x \in \,]-\infty, 0] \cup [\alpha, +\infty[$. Alors : $f(x) = 0$, donc $f(x) \geqslant 0$.
  Soit $x \in \,]0, \alpha[$. D'après l'énoncé : $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$.
  De plus : $x > 0$. D'où : $f(x) = \lambda \dfrac{x^{\lambda-1}}{\alpha^\lambda} > 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0.}$$

- Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.
  - × La fonction f est nulle en dehors de $]0, \alpha[$, donc :
  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = \int_0^\alpha f(t)\, dt$$
  - × De plus, la fonction f est continue par morceaux sur $[0, \alpha]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^\alpha f(t)\, dt$ est bien définie. D'où l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

- Calculons $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt &= \int_0^\alpha f(t)\, dt = \int_0^\alpha \lambda \frac{t^{\lambda-1}}{\alpha^\lambda}\, dt = \frac{\lambda}{\alpha^\lambda} \int_0^\alpha t^{\lambda-1}\, dt \\ &= \frac{\lambda}{\alpha^\lambda} \left[\frac{t^\lambda}{\lambda} \right]_0^\alpha = \frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{\alpha^\lambda}} \frac{\cancel{\alpha^\lambda}}{\cancel{\lambda}} = 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

□

(ii) Déterminer la fonction de répartition F de X.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent.

- Si $x \in]-\infty, 0]$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = 0$$

- Si $x \in]0, \alpha[$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{0}^{x} f(t)\, dt = \frac{\lambda}{\alpha^\lambda} \int_{0}^{x} t^{\lambda-1}\, dt = \frac{\lambda}{\alpha^\lambda} \left[\frac{t^\lambda}{\lambda} \right]_0^x = \frac{\cancel{\lambda}}{\alpha^\lambda} \frac{x^\lambda}{\cancel{\lambda}} = \frac{x^\lambda}{\alpha^\lambda}$$

- Si $x \in [\alpha, +\infty[$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{0}^{\alpha} f(t)\, dt = 1$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ \dfrac{x^\lambda}{\alpha^\lambda} & \text{si } x \in]0, \alpha[\\ 1 & \text{si } x \in [\alpha, +\infty[\end{cases}}$$

□

(iii) Calculer l'espérance de X.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour un calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\, f(t)\, dt$.
- La fonction $t \mapsto t\, f(t)$ est nulle en dehors de $]0, \alpha[$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt = \int_{0}^{\alpha} t\, f(t)\, dt$$

- De plus, la fonction $t \mapsto t\, f(t)$ est continue par morceaux sur $[0, \alpha]$ en tant que produit de fonctions continues par morceaux sur $[0, \alpha]$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{\alpha} t\, f(t)\, dt$ est bien définie.

$$\boxed{\text{Donc la v.a.r. } X \text{ admet une espérance.}}$$

- Calculons $\mathbb{E}(X)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt = \int_{0}^{\alpha} t\, f(t)\, dt \\ &= \int_{0}^{\alpha} t\, \lambda \frac{t^{\lambda-1}}{\lambda}\, dt = \frac{\lambda}{\alpha^\lambda} \int_{0}^{\alpha} t^\lambda\, dt \\ &= \frac{\lambda}{\alpha^\lambda} \left[\frac{t^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right]_0^\alpha = \frac{\lambda}{\cancel{\alpha^{\lambda}}} \frac{\alpha^{\cancel{\lambda}+1}}{\lambda+1} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda+1}\, \alpha \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{\lambda}{\lambda+1}\, \alpha}$$

□

b) (i) Montrer que Y_n suit une loi puissance de paramètres à préciser en fonction de n, λ et α.

Démonstration.

- D'après la question ***1.b)***, la fonction de répartition de Y_n est : $G_n : x \mapsto (F(x))^n$.
  - × Soit $x \in]-\infty, 0]$. D'après la question ***5.a)(ii)*** : $F(x) = 0$.
    Donc : $G_n(x) = 0^n = 0$.
  - × Soit $x \in]0, \alpha[$.

$$\begin{aligned} G_n(x) &= (F(x))^n = \left(\frac{x^\lambda}{\alpha^\lambda}\right)^n \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{5.a)(i)}}\textit{)} \\ &= \frac{x^{n\lambda}}{\alpha^{n\lambda}} \end{aligned}$$

  - × Soit $x \in [\alpha, +\infty[$. D'après la question ***5.a)(ii)*** : $F(x) = 1$.
    Donc : $G_n(x) = 1^n = 1$.

  Finalement : $G_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ \dfrac{x^{n\lambda}}{\alpha^{n\lambda}} & \text{si } x \in]0, \alpha[\\ 1 & \text{si } x \in [\alpha, +\infty[\end{cases}$

- On reconnaît la fonction de répartition de la loi puissance de paramètres $n\lambda$ et α.
  Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{Donc } Y_n \text{ suit la loi puissance de paramètres } n\lambda \text{ et } \alpha.}$$

□

(ii) En déduire l'espérance de Y_n.

Démonstration.
Comme Y_n suit une loi puissance, on utilise la question ***5.a)(iii)*** avec $\lambda' = n\lambda$ et $\alpha' = \alpha$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y_n \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(Y_n) = \frac{\lambda'}{\lambda'+1}\,\alpha' = \frac{n\lambda}{n\lambda+1}\,\alpha.}$$

□

c) Calculer l'espérance de Z_n.

Démonstration.

- D'après la question ***2.b)***, une densité de Z_n est :

$$h_n : x \mapsto n(n-1)\, f(x)\,(1 - F(x))\,(F(x))^{n-2}$$

- Comme la fonction f est nulle en dehors de $]0, \alpha[$:

$$\forall x \in]-\infty, 0] \cup [\alpha, +\infty[,\ h_n(x) = 0$$

- Soit $x \in \,]0, \alpha[$.

$$\begin{array}{rcl} h_n(x) & = & n(n-1)\, f(x)\, (1-F(x))\, (F(x))^{n-2} \\ & = & n(n-1)\, \lambda\, \dfrac{x^{\lambda-1}}{\alpha^\lambda} \left(1 - \dfrac{x^\lambda}{\alpha^\lambda}\right) \left(\dfrac{x^\lambda}{\alpha^\lambda}\right)^{n-2} \\ & = & n(n-1)\, \lambda\, \dfrac{x^{\lambda-1}}{\alpha^\lambda}\, \dfrac{\alpha^\lambda - x^\lambda}{\alpha^\lambda}\, \dfrac{x^{\lambda(n-2)}}{(\alpha^\lambda)^{n-2}} \\ & = & n(n-1)\lambda\, (\alpha^\lambda - x^\lambda)\, \dfrac{x^{\lambda(n-1)-1}}{(\alpha^\lambda)^n} \\ & = & n(n-1)\lambda \left(\dfrac{x^{\lambda(n-1)-1}}{(\alpha^\lambda)^{n-1}} - \dfrac{x^{\lambda\, n-1}}{(\alpha^\lambda)^n}\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } h_n : x \mapsto \begin{cases} n(n-1)\lambda \left(\dfrac{x^{\lambda(n-1)-1}}{\alpha^{\lambda(n-1)}} - \dfrac{x^{\lambda n-1}}{\alpha^{\lambda n}}\right) & \text{si } x \in]0, \alpha[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

- Avec le même raisonnement qu'en question ***4.b)***, la v.a.r. Z_n admet une espérance car la fonction $t \mapsto t\, h_n(t)$ est continue par morceaux sur $[0, \alpha]$.
  Comme cette fonction est nulle en dehors de $]0, \alpha[$:

$$\mathbb{E}(Z_n) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} t\, h_n(t)\; dt \;=\; \int_0^\alpha t\, h_n(t)\; dt$$

- Calculons d'abord l'intégrale $\displaystyle\int_0^\alpha t\, \frac{t^{\lambda n-1}}{\alpha^{\lambda n}}\; dt$.

$$\int_0^\alpha t\, \frac{t^{\lambda n-1}}{\alpha^{\lambda n}}\; dt \;=\; \frac{1}{\alpha^{\lambda n}} \int_0^\alpha t^{\lambda n}\; dt \;=\; \frac{1}{\alpha^{\lambda n}} \left[\; \frac{t^{\lambda n+1}}{\lambda n+1} \;\right]_0^\alpha \;=\; \frac{1}{\cancel{\alpha^{\lambda n}}}\, \frac{\alpha^{\cancel{\lambda n}+1}}{\lambda n+1} \;=\; \frac{\alpha}{\lambda n+1}$$

  De même : $\displaystyle\int_0^\alpha t\, \frac{t^{\lambda(n-1)-1}}{\alpha^{\lambda(n-1)}}\; dt \;=\; \frac{\alpha}{\lambda(n-1)+1}$.

- On en déduit alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(Z_n) & = & \displaystyle\int_0^\alpha t\, h_n(t)\; dt \;=\; \int_0^\alpha t\, n(n-1)\lambda \left(\frac{t^{\lambda(n-1)-1}}{\alpha^{\lambda(n-1)}} - \frac{t^{\lambda n-1}}{\alpha^{\lambda n}}\right)\; dt \\ & = & \displaystyle n(n-1)\lambda \left(\int_0^\alpha t\, \frac{t^{\lambda(n-1)-1}}{\alpha^{\lambda(n-1)}}\; dt - \int_0^\alpha t\, \frac{t^{\lambda n-1}}{\alpha^{\lambda n}}\; dt\right) \qquad \textit{(par linéarité de l'intégration)} \\ & = & \displaystyle n(n-1)\lambda \left(\frac{\alpha}{\lambda(n-1)+1} - \frac{\alpha}{\lambda n+1}\right) \\ & = & \displaystyle n(n-1)\lambda\alpha\, \frac{\cancel{\lambda n} + \cancel{1} - (\lambda(\cancel{n}-1) + \cancel{1})}{(\lambda(n-1)+1)(\lambda n+1)} \\ & = & \displaystyle \frac{n(n-1)\alpha\, \lambda^2}{(\lambda(n-1)+1)(\lambda n+1)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_n) \;=\; \frac{n(n-1)\alpha\, \lambda^2}{(\lambda(n-1)+1)(\lambda n+1)}}$$

9782340-026636_001_784.indd 668 30/07/2018 09:53

Commentaire

Dans les questions ***4.b)***, ***5.a)(iii)*** et ***5.c)***, on utilise la continuité par morceaux des fonctions en présence pour conclure quant à la convergence des intégrales concernées. On aurait pu également utiliser le critère de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives (comme détaillé en question ***1.c)***).

□

Partie II - Un problème d'optimisation

On reprend la notation de la partie précédente : G_{n-1} est la fonction de répartition de Y_{n-1}, qui est le maximum de $X_1, \ldots, X_{n-1}$.
On répond dans cette partie au problème d'optimisation suivant : trouver une fonction σ définie sur $]0, \alpha[$ vérifiant les trois propriétés :

- σ est une bijection de $]0, \alpha[$ dans un intervalle $]0, \beta[$, avec β un réel strictement positif.
- σ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \alpha[$ et σ' est à valeurs strictement positives sur $]0, \alpha[$.
- on définit, pour tout $x \in]0, \alpha[$ et tout $y \in]0, \beta[$,

$$\gamma(x, y) \; = \; (x - y)\, G_{n-1}(\sigma^{-1}(y))$$

Alors pour tout $x \in]0, \alpha[$, $\gamma(x, y)$ atteint son maximum lorsque $y = \sigma(x)$.

Commentaire

L'énoncé de cette partie II comporte une confusion entre les objets « réel » et « fonction ». En effet, le sujet énonce « $\gamma(x, y)$ atteint son maximum lorsque ... ». Il fallait comprendre « $y \mapsto \gamma(x, y)$ atteint son maximum lorsque ... ».

6. Analyse.
On suppose dans un premier temps qu'une telle fonction σ vérifiant ces trois propriétés existe.

a) Montrer que σ^{-1} est dérivable sur $]0, \beta[$ et exprimer sa dérivée $(\sigma^{-1})'$ en fonction de σ' et σ^{-1}.

Démonstration. La fonction σ :

× réalise une bijection de $]0, \alpha[$ sur $]0, \beta[$,
× est dérivable sur $]0, \alpha[$ (car de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \alpha[$)
× est telle que : $\forall x \in]0, \alpha[$, $\sigma'(x) \neq 0$.

$$\boxed{\text{Alors } \sigma^{-1} \text{ est dérivable sur }]0, \beta[\text{ et } (\sigma^{-1})' = \frac{1}{\sigma' \circ \sigma^{-1}}.}$$

Commentaire

- On peut retrouver la formule de $(\sigma^{-1})'$ via l'égalité $\sigma \circ \sigma^{-1} = \mathrm{id}$.
En effet, en dérivant formellement cette égalité, on obtient :

$$(\sigma' \circ \sigma^{-1}) \times (\sigma^{-1})' \; = \; 1$$

- La formule $(\sigma^{-1})' = \dfrac{1}{\sigma' \circ \sigma^{-1}}$ permet également de conclure que la fonction σ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \beta[$, car $(\sigma^{-1})'$ est continue sur $]0, \beta[$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $]0, \beta[$, ne s'annulant pas sur cet intervalle.

□

b) Calculer la dérivée partielle $\partial_2(\gamma)(x, y)$.

Démonstration.
La fonction γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \alpha[\times]0, \beta[$. En effet :

- la fonction $(x, y) \mapsto x - y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \alpha[\times]0, \beta[$ en tant que fonction polynomiale.
- la fonction $(x, y) \mapsto G_{n-1}(\sigma^{-1}(y))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \alpha[\times]0, \beta[$, car elle est la composée $G_{n-1} \circ \sigma^{-1} \circ \varphi$ où :
  × $\varphi : (x, y) \mapsto y$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \alpha[\times]0, \beta[$ en tant que fonction polynomiale,
    - telle que $\varphi(]0, \alpha[\times]0, \beta[) \subset]0, \beta[$
  × σ^{-1} est :
    - de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \beta[$,
    - telle que $\sigma^{-1}(]0, \beta[) \subset]0, \alpha[$.
  × G_{n-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \alpha[$ d'après la question ***1.b)***.

$$\boxed{\text{La fonction } \gamma \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, \alpha[\times]0, \beta[\text{ en tant que produit de fonctions de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, \alpha[\times]0, \beta[.}$$

Soit $(x, y) \in]0, \alpha[\times]0, \beta[$.

$$\begin{aligned}
\partial_2(\gamma)(x, y) &= -G_{n-1}(\sigma^{-1}(y)) + (x-y)(\sigma^{-1})'(y)\, g_{n-1}(\sigma^{-1}(y)) \\
&= -G_{n-1}(\sigma^{-1}(y)) + \frac{x-y}{\sigma'(\sigma^{-1}(y))}\, g_{n-1}(\sigma^{-1}(y))
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x, y) \in]0, \alpha[\times]0, \beta[,\ \partial_2(\gamma)(x, y) = -G_{n-1}(\sigma^{-1}(y)) + \frac{x-y}{\sigma'(\sigma^{-1}(y))}\, g_{n-1}(\sigma^{-1}(y))}$$

Commentaire

On a détaillé ici la démonstration du caractère $\mathcal{C}^1$ de la fonction γ. Autant de précision n'était sans doute pas attendu.

□

c) Montrer que pour tout $x \in]0, \alpha[$, on a $\partial_2(\gamma)(x, \sigma(x)) = 0$.
En déduire que pour tout $x \in]0, \alpha[$:

$$\sigma'(x)\, G_{n-1}(x) + \sigma(x)\, g_{n-1}(x) = x\, g_{n-1}(x)$$

Démonstration.

- Soit $x \in]0, \alpha[$.
  D'après l'énoncé, la fonction $\psi : y \mapsto \gamma(x, y)$ atteint son maximum en $\sigma(x)$.
  Or, si $\sigma(x)$ est un maximum de ψ, alors : $\psi'(\sigma(x)) = 0$.
  Autrement dit, par définition de ψ :

$$0 = \psi'(\sigma(x)) = \partial_2(\gamma)(x, \sigma(x))$$

$$\boxed{\forall x \in]0, \alpha[,\ \partial_2(\gamma)(x, \sigma(x)) = 0}$$

- Soit $x \in \,]0, \alpha[$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_2(\gamma)(x, \sigma(x)) \\ &= -G_{n-1}(\sigma^{-1}(\sigma(x))) + \frac{x - \sigma(x)}{\sigma'(\sigma^{-1}(\sigma(x)))}\, g_{n-1}(\sigma^{-1}(\sigma(x))) \\ &= -G_{n-1}(x) + \frac{x - \sigma(x)}{\sigma'(x)}\, g_{n-1}(x) \end{aligned}$$

En multipliant cette égalité par $\sigma'(x)$:

$$0 \;=\; -\sigma'(x)\, G_{n-1}(x) + (x - \sigma(x))\, g_{n-1}(x)$$

$$\boxed{\text{D'où : } \forall x \in \,]0, \alpha[,\ \sigma'(x)\, G_{n-1}(x) + \sigma(x)\, g_{n-1}(x) \;=\; x\, g_{n-1}(x).}$$

□

d) Montrer alors, pour tout $x \in \,]0, \alpha[$:

$$\sigma(x) \;=\; \frac{1}{G_{n-1}(x)} \int_0^x t\, g_{n-1}(t)\ dt \qquad (*)$$

Démonstration.
Soit $x \in \,]0, \alpha[$.

- Soit $t \in \,]0, x]$. D'après la question précédente :

$$t\, g_{n-1}(t) \;=\; \sigma'(t)\, G_{n-1}(t) + \sigma(t)\, g_{n-1}(t) \;=\; (\sigma \times G_{n-1})'(t)$$

En effet, on reconnaît ici la formule de dérivation d'un produit :

$$(u \times v)' \;=\; u' \times v + u \times v'$$

appliquée à $u = \sigma$ et $v = G_{n-1}$.

On souhaite intégrer cette égalité entre 0 et x.

- On sait déjà que la fonction G_{n-1} est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0, x]$ (car la v.a.r. Y_{n-1} est une variable aléatoire à densité d'après la question ***1.b)***).
- Il reste à montrer que la fonction σ est continue par morceaux sur $[0, x]$.
  On sait déjà que la fonction σ est continue sur $]0, x]$, car $x \in \,]0, \alpha[$. Montrons donc que σ admet une limite à droite en 0 finie.
  - × La fonction σ est strictement croissante sur $]0, \alpha[$, car : $\forall x \in \,]0, \alpha[$, $\sigma'(x) > 0$ (d'après l'énoncé).
  - × De plus, d'après l'énoncé : $\sigma(]0, \alpha[) \;= \,]0, \beta[$. Donc, la fonction σ est bornée sur $]0, \alpha[$.

Par théorème de la limite monotone, la fonction σ admet une limite à droite en 0 finie.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } \sigma \text{ est continue par morceaux sur } [0, x].}$$

Commentaire

La croissance seule de la fonction σ sur $]0, \alpha[$ permet de conclure que σ admet une limite à gauche et à droite en tout point de $]0, \alpha[$.

Soit $a \in \,]0, x]$.

$$\int_a^x t\, g_{n-1}(t)\ dt \;=\; (\sigma \times G_{n-1})(x) - (\sigma \times G_{n-1})(a) \;=\; \sigma(x) \times G_{n-1}(x) - \sigma(a) \times G_{n-1}(a)$$

Or :

× d'après ce qui précède, la limite $\lim\limits_{a \to 0} \sigma(a)$ est finie.

× de plus, comme la fonction G_{n-1} est continue en 0 :

$$\lim_{a \to 0} G_{n-1}(a) \;=\; G_{n-1}(0) \;=\; \int_{-\infty}^0 g_{n-1}(t)\ dt \;=\; 0$$

(car la fonction g_{n-1} est nulle en dehors de $]0, \alpha[$)

On en déduit : $\lim\limits_{a \to 0} \sigma(a)\, G_{n-1}(a) = 0$. Ainsi :

$$\int_0^x t\, g_{n-1}(t)\ dt \;=\; \sigma(x)\, G_{n-1}(x)$$

- De plus : $G_{n-1}(x) \;=\; \displaystyle\int_{-\infty}^x g_{n-1}(t)\ dt \;=\; \int_0^x g_{n-1}(t)\ dt$.

 Or : $\forall t \in \,]0, \alpha[,\ g_{n-1}(t) > 0$. Donc : $G_{n-1}(x) > 0$.

$$\boxed{\text{D'où : } \forall x \in \,]0, \alpha[,\ \sigma(x) = \frac{1}{G_{n-1}(x)} \int_0^x t\, g_{n-1}(t)\ dt.}$$

□

e) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $x \in \,]0, \alpha[$, on a également :

$$\sigma(x) \;=\; x - \int_0^x \frac{G_{n-1}(t)}{G_{n-1}(x)}\ dt \qquad (**)$$

Démonstration.
Soit $x \in \,]0, \alpha[$. D'après la question précédente :

$$\sigma(x) \;=\; \frac{1}{G_{n-1}(x)} \int_0^x t\, g_{n-1}(t)\ dt$$

Soit $a \in \,]0, x]$. On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t & \quad & u'(t) & = & 1 \\ v'(t) & = & g_{n-1}(t) & \quad & v(t) & = & G_{n-1}(t) \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[a, x]$.
On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_{n-1}(x)} \int_a^x t\, g_{n-1}(t)\ dt \;&=\; \frac{1}{G_{n-1}(x)} \left([\ t\, G_{n-1}(t)\ ]_a^x - \int_a^x G_{n-1}(t)\ dt \right) \\ &=\; \frac{1}{G_{n-1}(x)} \left(x\, G_{n-1}(x) - a\, G_{n-1}(a) - \int_a^x G_{n-1}(t)\ dt \right) \end{aligned}$$

Or, comme : $\forall a \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant G_{n-1}(a) \leqslant 1$, alors $\lim\limits_{a \to 0} a\, G_{n-1}(a) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \frac{1}{G_{n-1}(x)} \left(x\, G_{n-1}(x) - \int_0^x G_{n-1}(t)\, dt \right) \\ &= x - \frac{1}{G_{n-1}(x)} \int_0^x G_{n-1}(t)\, dt \\ &= x - \int_0^x \frac{G_{n-1}(t)}{G_{n-1}(x)}\, dt \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \,]0, \alpha[, \ \sigma(x) = x - \int_0^x \frac{G_{n-1}(t)}{G_{n-1}(x)}\, dt}$$

□

7. Synthèse.
On suppose à présent que σ est la fonction définie par l'égalité $(*)$ ou $(**)$.

a) Montrer que pour tout $x \in \,]0, \alpha[$, $0 < \sigma(x) < x$.

Démonstration.
Soit $x \in \,]0, \alpha[$.

- Montrons : $\sigma(x) > 0$. On utilise pour cela l'expression $(*)$.
  - On a déjà démontré en question ***6.d)*** : $G_{n-1}(x) > 0$.
  - De plus : $\forall t \in \,]0, x]$, $t\, g_{n-1}(t) > 0$.
    Donc : $\displaystyle\int_0^x t\, g_{n-1}(t)\, dt > 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \sigma(x) > 0.}$$

- Montrons : $\sigma(x) < x$. On utilise pour cela l'expression $(**)$.
  - Tout d'abord, soit $t \in \,]0, x]$: $G_{n-1}(t) > 0$. Donc : $\dfrac{G_{n-1}(t)}{G_{n-1}(x)} > 0$.
    D'où : $\displaystyle\int_0^x \frac{G_{n-1}(t)}{G_{n-1}(x)}\, dt > 0$.
  - On en déduit :

$$x - \int_0^x \frac{G_{n-1}(t)}{G_{n-1}(x)}\, dt < x - 0 = x$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \sigma(x) < x}$$

□

b) Montrer que σ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \alpha[$ et que pour tout $x \in \,]0, \alpha[$, $\sigma'(x)$ est du signe de $x - \sigma(x)$.
En déduire que σ' est strictement positive sur $]0, \alpha[$.

Démonstration.

- On utilise l'expression $(*)$.
  - La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{G_{n-1}(x)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \alpha[$ en tant qu'inverse de la fonction G_{n-1} de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \alpha[$ (d'après la question ***1.b)***), qui ne s'annule pas sur cet intervalle.
    En effet : $\forall x \in \,]0, \alpha[$, $G_{n-1}(x) > 0$.
  - La fonction $t \mapsto t\, g_{n-1}(t)$ est continue sur $]0, \alpha[$.
    Donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x t\, g_{n-1}(t)\, dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \alpha[$ en tant que primitive de $t \mapsto t\, g_{n-1}(t)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, la fonction } \sigma \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, \alpha[\\ \text{en tant que produit de fonctions de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, \alpha[.\end{array}}$$

- Soit $x \in]0, \alpha[$.

$$\begin{aligned} \sigma'(x) &= \frac{x\, g_{n-1}(x)\, G_{n-1}(x) - g_{n-1}(x) \displaystyle\int_0^x t\, g_{n-1}(t)\ dt}{(G_{n-1}(x))^2} \\ &= \frac{g_{n-1}(x)\, \cancel{G_{n-1}(x)}}{(G_{n-1}(x))^{\cancel{2}}} \left(x - \frac{1}{G_{n-1}(x)} \int_0^x t\, g_{n-1}(t)\ dt \right) \\ &= \frac{g_{n-1}(x)}{G_{n-1}(x)} \, (x - \sigma(x)) \end{aligned}$$

Or : $g_{n-1}(x) > 0$ et $G_{n-1}(x) > 0$.

$$\boxed{\text{Donc } \sigma'(x) \text{ est du signe de } (x - \sigma(x)).}$$

- D'après la question ***7.a)*** : $x - \sigma(x) > 0$. Donc : $\sigma'(x) > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } \sigma \text{ est strictement croissante sur }]0, \alpha[.}$$

□

c) Montrer que σ réalise une bijection de $]0, \alpha[$ dans $]0, \beta[$, avec $\beta = \mathbb{E}(Y_{n-1})$.

Démonstration.
La fonction σ est :
× continue sur $]0, \alpha[$ (car elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \alpha[$),
× strictement croissante sur $]0, \alpha[$.
Ainsi, σ réalise une bijection de $]0, \alpha[$ sur $\sigma(]0, \alpha[)$.

$$\sigma(]0, \alpha[) = \left] \lim_{x \to 0} \sigma(x), \lim_{x \to \alpha} \sigma(x) \right[$$

- Déterminons $\lim\limits_{x \to 0} \sigma(x)$.
  D'après la question ***7.a)*** : $\forall x \in]0, \alpha[$, $0 < \sigma(x) < x$.
  Or : $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$.
  Donc, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x \to 0} \sigma(x) = 0$.
- Déterminons $\lim\limits_{x \to \alpha} \sigma(x)$.
  Tout d'abord :

$$\begin{aligned} G_{n-1}(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\alpha} g_{n-1}(t)\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_{n-1}(t)\ dt && \textit{(car } g_{n-1} \textit{ est nulle en dehors de }]0, \alpha[) \\ &= 1 && \textit{(car } g_{n-1} \textit{ est une densité)} \end{aligned}$$

  Ainsi :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \alpha} \sigma(x) &= \frac{1}{1} \int_0^{\alpha} t\, g_{n-1}(t)\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} t\, g_{n-1}(t)\ dt && \textit{(car } g_{n-1} \textit{ est nulle en dehors de }]0, \alpha[) \\ &= \mathbb{E}(Y_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } \sigma \text{ réalise une bijection de }]0, \alpha[\text{ dans }]0, \beta[\text{ avec } \beta = \mathbb{E}(Y_{n-1}).}$$

□

d) On fixe un réel $x \in]0, \alpha[$. Soit $y \in]0, \beta[$, on pose $z = \sigma^{-1}(y)$.

(i) Établir :

$$\gamma(x,y) \;=\; (x-z)\,G_{n-1}(z) + \int_0^z G_{n-1}(t)\;dt$$

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\gamma(x,y) \;=\; (x-y)\,G_{n-1}(\sigma^{-1}(y)) \;=\; (x-\sigma(z))\,G_{n-1}(\sigma^{-1}(\sigma(z))) \;=\; (x-\sigma(z))\,G_{n-1}(z)$$

- Or, d'après l'expression $(**)$: $\sigma(z) = z - \displaystyle\int_0^z \frac{G_{n-1}(t)}{G_{n-1}(z)}\;dt$.
- Donc :

$$\begin{aligned}
\gamma(x,y) &= x\,G_{n-1}(z) - \left(z - \int_0^z \frac{G_{n-1}(t)}{G_{n-1}(z)}\;dt\right) G_{n-1}(z) \\
&= x\,G_{n-1}(z) - z\,G_{n-1}(z) + \cancel{G_{n-1}(z)} \int_0^z \frac{G_{n-1}(t)}{\cancel{G_{n-1}(z)}}\;dt \\
&= (x-z)\,G_{n-1}(z) + \int_0^z G_{n-1}(t)\;dt
\end{aligned}$$

$$\boxed{\gamma(x,y) \;=\; (x-z)\,G_{n-1}(z) + \int_0^z G_{n-1}(t)\;dt}$$

□

(ii) En déduire : $\gamma(x,\sigma(x)) - \gamma(x,y) \;=\; (z-x)\,G_{n-1}(z) - \displaystyle\int_x^z G_{n-1}(t)\;dt$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\gamma(x,\sigma(x)) \;=\; (x-\sigma(x))\,G_{n-1}(\sigma^{-1}(\sigma(x))) \;=\; (x-\sigma(x))\,G_{n-1}(x)$$

Or : $\sigma(x) \;=\; x - \displaystyle\int_0^x \frac{G_{n-1}(t)}{G_{n-1}(x)}\;dt$. D'où :

$$\begin{aligned}
\gamma(x,\sigma(x)) &= x\,G_{n-1}(x) - \left(x - \int_0^x \frac{G_{n-1}(t)}{G_{n-1}(x)}\;dt\right) G_{n-1}(x) \\
&= \cancel{x\,G_{n-1}(x)} - \cancel{x\,G_{n-1}(x)} + \cancel{G_{n-1}(x)} \int_0^x \frac{G_{n-1}(t)}{\cancel{G_{n-1}(x)}}\;dt \\
&= \int_0^x G_{n-1}(t)\;dt
\end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\gamma(x,\sigma(x)) - \gamma(x,y) &= \int_0^x G_{n-1}(t)\;dt - \left((x-z)\,G_{n-1}(z) + \int_0^z G_{n-1}(t)\;dt\right) \\
&= (z-x)\,G_{n-1}(z) + \int_z^x G_{n-1}(t)\;dt \\
&= (z-x)\,G_{n-1}(z) - \int_x^z G_{n-1}(t)\;dt
\end{aligned}$$

$$\boxed{\gamma(x,\sigma(x)) - \gamma(x,y) \;=\; (z-x)\,G_{n-1}(z) - \int_x^z G_{n-1}(t)\;dt}$$

□

(iii) Déterminer le signe de $\gamma(x, \sigma(x)) - \gamma(x, y)$ et conclure que $\gamma(x, y)$ est maximal lorsque $y = \sigma(x)$.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\gamma(x, \sigma(x)) - \gamma(x, y) \ = \ (z - x)\, G_{n-1}(z) - \int_x^z \ G_{n-1}(t) \ dt$$

Deux cas se présentent.

- Si $z \geqslant x$.
  La fonction G_{n-1} est croissante car c'est une fonction de répartition. Donc :

  $$\forall t \in [x, z], \ G_{n-1}(t) \leqslant G_{n-1}(z)$$

  Par croissance de l'intégration (les bornes sont dans l'ordre croissant) :

  $$\int_x^z \ G_{n-1}(t) \ dt \ \leqslant \ \int_x^z \ G_{n-1}(z) \ dt$$

  Or : $\displaystyle\int_x^z \ G_{n-1}(z) \ dt \ = \ G_{n-1}(z) \int_x^z \ dt \ = \ G_{n-1}(z) \, [\ t\ ]_x^z \ = \ (z - x)\, G_{n-1}(z).$
  Donc :

  $$\int_x^z \ G_{n-1}(t) \ dt \ \leqslant \ (z - x)\, G_{n-1}(z)$$

  On en déduit :

  $$(z - x)\, G_{n-1}(z) - \int_x^z \ G_{n-1}(t) \ dt \geqslant 0$$

  Ainsi, d'après l'expression trouvée à la question précédente :

  $$\gamma(x, \sigma(x)) - \gamma(x, y) \geqslant 0$$

- Si $z \leqslant x$.
  Par croissance de la fonction G_{n-1} sur $]0, \alpha[$:

  $$\forall t \in [z, x], \ G_{n-1}(t) \geqslant G_{n-1}(z)$$

  Par croissance de l'intégration (les bornes sont dans l'ordre croissant) :

  $$\int_z^x \ G_{n-1}(t) \ dt \ \geqslant \ \int_z^x \ G_{n-1}(z) \ dt$$

  Or : $\displaystyle\int_z^x \ G_{n-1}(z) \ dt \ = \ G_{n-1}(z) \int_z^x \ dt \ = \ G_{n-1}(z) \, [\ t\ ]_z^x \ = \ (x - z)\, G_{n-1}(z).$
  Donc :

  $$\int_z^x \ G_{n-1}(t) \ dt \ \geqslant \ -(z - x)\, G_{n-1}(z)$$

  D'où : $\displaystyle\int_x^z \ G_{n-1}(t) \ dt \ \leqslant \ (z - x)\, G_{n-1}(z)$. On en déduit :

  $$(z - x)\, G_{n-1}(z) - \int_x^z \ G_{n-1}(t) \ dt \geqslant 0$$

  Ainsi, d'après l'expression trouvée à la question précédente :

  $$\gamma(x, \sigma(x)) - \gamma(x, y) \geqslant 0$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall (x, y) \in \,]0, \alpha[\times]0, \beta[, \ \gamma(x, \sigma(x)) - \gamma(x, y) \geqslant 0.}$$

Soient $x \in]0, \alpha[$ et $y \in]0, \beta[$. D'après l'inégalité précédente :

$$\gamma(x, \sigma(x)) \geqslant \gamma(x, y)$$

C'est-à-dire, avec la même notation qu'en question ***6.c)*** ($\psi : y \mapsto \gamma(x, y)$) :

$$\psi(\sigma(x)) \geqslant \psi(y)$$

Ceci est vrai pour tout $y \in]0, \beta[$, donc la fonction ψ est maximale en $\sigma(x)$.

$$\boxed{\text{Autrement dit, la fonction } y \mapsto \gamma(x, y) \text{ est maximale en } \sigma(x).}$$ □

8. Estimation de $\sigma(x)$.
Soit $x \in]0, \alpha[$.

a) On considère la fonction φ_x définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\varphi_x(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leqslant x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

En utilisant la relation $(*)$, montrer que $\sigma(x) = \dfrac{\mathbb{E}(\varphi_x(Y_{n-1}))}{\mathbb{P}([Y_{n-1} \leqslant x])}$.

Démonstration.

- La fonction g_{n-1} est nulle en dehors de $]0, \alpha[$.
  Donc, d'après le théorème de transfert, la v.a.r. $\varphi_x(Y_{n-1})$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^\alpha \varphi_x(t) g_{n-1}(t)\, dt$ est absolument convergente.
  Les fonctions φ_x et g_{n-1} étant à valeurs positives sur $]0, \alpha[$, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- De plus, la fonction φ_x est nulle sur $]x, +\infty[$, donc :

$$\int_0^\alpha \varphi_x(t)\, g_{n-1}(t)\, dt \;=\; \int_0^x \varphi_x(t)\, g_{n-1}(t)\, dt$$

- Par définition de φ_x :

$$\forall t \in]0, x],\;\; \varphi_x(t)\, g_{n-1}(t) = t\, g_{n-1}(t)$$

  Or l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^x t\, g_{n-1}(t)\, dt$ est bien définie car Y_{n-1} admet une espérance.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que la v.a.r. } \varphi_x(Y_{n-1}) \text{ admet une espérance et :}\\ \mathbb{E}(\varphi_x(Y_{n-1})) = \displaystyle\int_0^x t\, g_{n-1}(t)\, dt.\end{array}}$$

- De plus, par définition de G_{n-1} : $G_{n-1}(x) = \mathbb{P}([Y_{n-1} \leqslant x])$.
- On en déduit, d'après l'expression $(*)$:

$$\frac{\mathbb{E}(\varphi_x(Y_{n-1}))}{\mathbb{P}([Y_{n-1} \leqslant x])} \;=\; \frac{1}{G_{n-1}(x)}\, \mathbb{E}(\varphi_x(Y_{n-1})) \;=\; \frac{1}{G_{n-1}(x)} \int_0^x t\, g_{n-1}(t)\, dt \;=\; \sigma(x)$$

$$\boxed{\sigma(x) \;=\; \frac{\mathbb{E}(\varphi_x(Y_{n-1}))}{\mathbb{P}([Y_{n-1} \leqslant x])}}$$ □

b) En déduire une fonction **Scilab** `function s = sigma(x,n)` qui retourne une valeur approchée de $\sigma(x)$ obtenue comme quotient d'une estimation de $\mathbb{E}(\varphi_x(Y_{n-1}))$ et de $\mathbb{P}([Y_{n-1} \leqslant x])$.
On utilisera la fonction `simulX` pour simuler des échantillons de la loi de X, et on rappelle que si `v` est un vecteur, `max(v)` est égal au plus grand élément de `v`.

Démonstration.

- On commence par écrire une fonction qui retourne une réalisation de la v.a.r. Y_n.

```
function y = simulY(n)
  X = simulX(n)
  y = max(X)
endfunction
```

La première commande `X = simulX(n)` permet de créer un vecteur `X` contenant la réalisation d'un n-échantillon de même loi que X.
On sait de plus : $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. D'où la commande : `y = max(X)`.

- On code ensuite la fonction φ_x.

```
function v = phi(t,x)
  if t <= x then
    v = t
  else
    v = 0
  end
endfunction
```

- On finit par la fonction permettant d'obtenir une valeur approchée de $\sigma(x)$.

```
function s = sigma(x,n)
  N = 10000
  V = zeros(1,N)
  W = zeros(1,N)
  for k = 1:N
    z = simulY(n)
    V(k) = phi(z,x)
    if z <= x then
      W(k) = 1
    else
      W(k) = 0
    end
  end
  esp = mean(V)
  prob = mean(W)
  s = esp/prob
endfunction
```

Détaillons ce programme.

- La fonction `sigma` a pour but de produire une approximation :
  × d'une part de $\mathbb{E}(\varphi_x(Y_{n-1}))$,
  × d'autre part de $\mathbb{P}([Y_{n-1} \leqslant x])$.

  pour en déduire une valeur approchée de $\sigma(x) = \dfrac{\mathbb{E}(\varphi_x(Y_{n-1}))}{\mathbb{P}([Y_{n-1} \leqslant x])}$.

- Pour obtenir une valeur approchée de $\mathbb{E}(\varphi_x(Y_{n-1}))$, l'idée est :
  - × de simuler un grand nombre de fois ($N = 10000$ est ce grand nombre) la v.a.r. $\varphi_x(Y_{n-1})$.
    Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(v_1, \dots, v_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(V_1, \dots, V_N)$ de la v.a.r. $V = \varphi_x(Y_{n-1})$.
    (cela signifie que les v.a.r. V_1, …, V_N sont indépendantes et sont de même loi que la v.a.r. $V = \varphi_x(Y_{n-1})$)
  - × d'effectuer la moyenne de ces N observations.

  Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i \ \simeq\ \mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(\varphi_x(Y_{n-1}))$$

- Dans le programme, les valeurs $(v_1, \dots, v_N)$ sont obtenues par des appels successifs (à l'aide d'une structure itérative, ici une boucle `for`) aux fonctions `simulY` et `phi`, et stockées les unes après les autres dans le vecteur `V`.

```
for k = 1:N
  z = simulY(n)
  V(k) = phi(z,x)
```

  Une fois cette boucle terminée, l'approximation formulée par la LfGN est obtenue en effectuant la moyenne de ces observations :

```
esp = mean(V)
```

- Pour obtenir une valeur approchée de $\mathbb{P}([Y_{n-1} \leqslant x])$, l'idée est :
  - × de simuler un grand nombre de fois (toujours N fois) la v.a.r. Y_{n-1}.
    Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(z_1, \dots, z_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(Z_1, \dots, Z_N)$ de la v.a.r. Y_{n-1}.
  - × de compter le nombre de réalisations inférieures ou égales à x dans cette observation.

  Cette idée est toujours guidée par la LfGN qui affirme :

$$\frac{\text{nombre de } z_i \text{ inférieurs à } x}{\text{taille } (N) \text{ de l'observation}} \ \simeq\ \mathbb{P}([Y_{n-1} \leqslant x])$$

- Dans le programme, on stocke, à l'aide d'une structure itérative (la même boucle `for` que précédemment), dans chaque coordonnée d'un vecteur `W` :
  - × la valeur 1 si z_i est inférieur à x,
  - × la valeur 0 si z_i est strictement supérieur à x.

```
    if z <= x then
      W(k) = 1
    else
      W(k) = 0
    end
```

  Une fois cette boucle terminée, l'approximation formulée par la LfGN est obtenue en effectuant la moyenne des coordonnées de `W` :

```
prob = mean(W)
```

- À ce stade, le programme fournit :
  - × une valeur approchée de $\mathbb{E}(\varphi_x(Y_{n-1})$ stockée dans `esp`,
  - × une valeur approchée de $\mathbb{P}([Y_{n-1} \leqslant x])$ stockée dans `prob`.

  Enfin, pour approcher le réel $\sigma(x)$, on effectue le quotient de ces deux approximations :

```
s = esp/prob
```

Commentaire

- Un tel niveau d'explication n'est pas attendu aux concours : l'écriture du programme démontre la compréhension de toutes les commandes en question.
  On décrit ici de manière précise les instructions afin d'aider le lecteur un peu moins habile en **Scilab**.
- L'énoncé suggérait d'écrire une seule fonction, ce qui est tout à fait faisable en définissant `simulY` et `phi` à l'intérieur de la fonction `sigma`.
  Cependant, l'utilisation de sous-fonctions favorise la clarté d'un programme en le structurant. On privilégiera donc, lorsque c'est possible, l'écriture d'un programme à l'aide de sous-fonctions.
- On pouvait également utiliser la commande `find` pour obtenir une valeur approchée de $\mathbb{P}([Y_{n-1} \leqslant x])$:

```
function s = sigma(x,n)
  N = 10000
  Z = zeros(1,N)
  V = zeros(1,N)
  for k = 1:N
    Z(k) = simulY(n)
    V(k) = phi(Z(k),x)
  end
  esp = mean(V)
  indices = find(Z <= x)
  prob = length(indices)/N
  s = esp/prob
endfunction
```

  Dans le programme, le vecteur `Z` contient N réalisations de la v.a.r. Y_{n-1}.
  La commande `(Z <= x)` fournit un vecteur de taille N de $i^{\text{ème}}$ coordonnée :
  - × le booléen « vrai » si la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de `Z` est inférieure à x,
  - × le booléen « faux » sinon.

  La commande `find(Z <= x)` permet alors d'obtenir le vecteur des indices pour lesquels le booléen est « vrai ».
  Ainsi, `length(indices)` renvoie la longueur du vecteur `indices`, c'est-à-dire le nombre de booléens « vrai » dans le vecteur `(Z <= x)`. Autrement dit, `length(indices)` renvoie le nombre de réalisations de Y_{n-1} inférieures à x parmi les N observations.
  Par loi faible des grands nombres : $\dfrac{\text{nombre de } z_i \text{ inférieurs à } x}{\text{taille } (N) \text{ de l'observation}} \ \simeq\ \mathbb{P}([Y_{n-1} \leqslant x])$.

  Donc la variable `prob` est bien une valeur approchée de $\mathbb{P}([Y_{n-1} \leqslant x])$.

□

9. Exemples.

Donner une expression de $\sigma(x)$ pour tout $x \in \,]0, \alpha[$ dans les cas suivants :

a) X suit la loi uniforme sur $]0, \alpha[$.

Démonstration.

- D'après la question ***4.a)*** :

$$g_n : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{n}{\alpha^n}\, x^{n-1} & \text{si } x \in \,]0, \alpha[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \quad G_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, 0] \\ \left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^n & \text{si } x \in \,]0, \alpha[\\ 1 & \text{si } x \in [\alpha, +\infty[\end{cases}$$

- Soit $x \in \,]0, \alpha[$.
  Avec le même raisonnement qu'en question ***8.a)***, d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\varphi_x(Y_{n-1})) &= \int_0^x t\, g_{n-1}(t)\, dt \ = \ \int_0^x t\, \frac{n-1}{\alpha^{n-1}}\, t^{n-2}\, dt \\ &= \frac{n-1}{\alpha^{n-1}} \int_0^x t^{n-1}\, dt \ = \ \frac{n-1}{\alpha^{n-1}} \left[\frac{t^n}{n} \right]_0^x \\ &= \frac{n-1}{\alpha^{n-1}}\, \frac{x^n}{n} \ = \ \frac{(n-1)\, x^n}{n\, \alpha^{n-1}} \end{aligned}$$

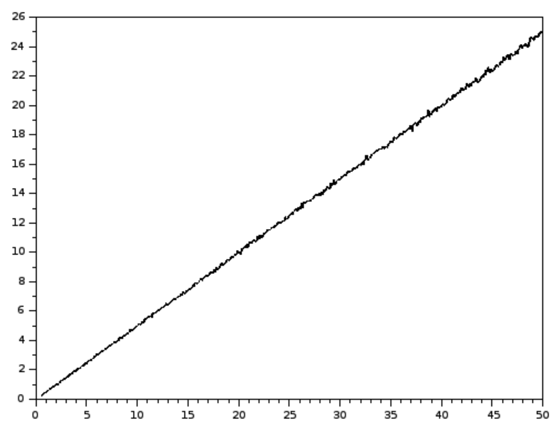
- On en déduit :

$$\sigma(x) \ = \ \frac{\mathbb{E}(\varphi_x(Y_{n-1}))}{G_{n-1}(x)} \ = \ \frac{\frac{(n-1)\, x^{\cancel{n}}}{n\, \cancel{\alpha^{n-1}}}}{\frac{\cancel{x^{n-1}}}{\cancel{\alpha^{n-1}}}} \ = \ \frac{n-1}{n}\, x$$

$$\boxed{\forall x \in \,]0, \alpha[, \ \sigma(x) = \frac{n-1}{n}\, x}$$

□

b) X suit la loi puissance de paramètres α et λ. Votre résultat est-il en accord avec la courbe ci-dessous obtenue sous cette hypothèse, en utilisant la fonction `sigma` de la question précédente lorsque $n = 6$, $\lambda = 0,2$ et $\alpha = 50$? Justifier votre réponse.



Démonstration.

- D'après la question ***5.b)(i)*** :

$$g_n : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{n\,\lambda\, x^{n\lambda-1}}{\alpha^{n\lambda}} & \text{si } x \in \,]0,\alpha[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \quad G_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, 0] \\ \dfrac{x^{n\lambda}}{\alpha^{n\lambda}} & \text{si } x \in \,]0,\alpha[\\ 1 & \text{si } x \in [\alpha, +\infty[\end{cases}$$

- Soit $x \in \,]0,\alpha[$.
  D'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\varphi_x(Y_{n-1})) &= \int_0^x t\, g_{n-1}(t)\; dt \;=\; \int_0^x t\, \frac{(n-1)\lambda}{\alpha^{(n-1)\lambda}}\, t^{(n-1)\lambda-1}\; dt \\ &= \frac{(n-1)\lambda}{\alpha^{(n-1)\lambda}} \int_0^x t^{(n-1)\lambda}\; dt \;=\; \frac{(n-1)\lambda}{\alpha^{(n-1)\lambda}} \left[\frac{t^{(n-1)\lambda+1}}{(n-1)\lambda+1} \right]_0^x \\ &= \frac{(n-1)\lambda}{\alpha^{(n-1)\lambda}}\, \frac{x^{(n-1)\lambda+1}}{(n-1)\lambda+1} \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\sigma(x) \;=\; \frac{\mathbb{E}(\varphi_x(Y_{n-1})}{G_{n-1}(x)} \;=\; \frac{\frac{(n-1)\lambda\, x^{\cancel{(n-1)\lambda}+1}}{((n-1)\lambda+1)\cancel{\alpha^{(n-1)\lambda}}}}{\frac{\cancel{x^{(n-1)\lambda}}}{\cancel{\alpha^{(n-1)\lambda}}}} \;=\; \frac{(n-1)\lambda}{(n-1)\lambda+1}\, x$$

$$\boxed{\forall x \in \,]0,\alpha[,\; \sigma(x) = \frac{(n-1)\lambda}{(n-1)\lambda+1}\, x}$$

- On a ainsi prouvé que la fonction σ est linéaire (de la forme $x \mapsto a\,x$).

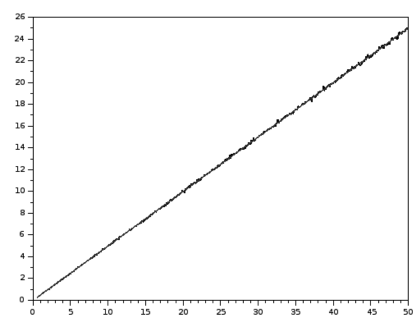
> Sa courbe représentative est donc une droite passant par l'origine, ce qui est en accord avec la courbe fournie par l'énoncé.

Commentaire

En remplaçant n, λ et α par les valeurs données par l'énoncé, on obtient :

$$\forall x \in \,]0,\alpha[,\;\; \sigma(x) = \frac{(6-1)\,0,2}{(6-1)\,0,2+1}\, x = \frac{1}{2}\, x$$

Ce qui donne la courbe représentative suivante :



□

Partie III - Modélisation d'enchères

Un bien est mis en vente aux enchères et n acheteurs A_1, …, A_n sont intéressés. Chaque acheteur A_k attribue une valeur x_k à ce bien, appelée *valeur privée*, qui n'est pas connue des autres acheteurs. Afin de se procurer ce bien, A_k propose ensuite, de façon secrète, une *mise* (on dit aussi une *offre*) y_k. Toutes les mises sont alors révélées simultanément et l'acheteur qui remporte le bien est celui qui a proposé la plus grande mise. En cas d'égalité, le gagnant est tiré au sort parmi ceux qui ont la mise la plus importante.
Le prix à payer par le gagnant au vendeur dépend du type d'enchère organisé. On étudie ici deux formats d'enchères :

- l'*enchère au premier prix*, ou enchère hollandaise : l'acheteur gagnant paye la mise qu'il a lui-même proposée. Ce type d'enchère correspond aux enchères dynamiques « descendantes » : la vente commence avec un prix très élevé et baisse progressivement. Le premier qui accepte le prix remporte le bien.
- l'*enchère au second prix*, ou enchère anglaise : l'acheteur gagnant paye le prix correspondant à la deuxième meilleure mise.
  Ce type d'enchère est presque équivalent aux enchères dynamiques « montantes » bien connues : le prix monte progressivement jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul acheteur : celui qui est prêt à mettre le plus haut prix, et qui paye (à peu de chose près) le prix de la deuxième offre après la sienne.

Pour chaque acheteur A_k, on appelle *résultat net* ou simplement *résultat* de l'enchère, et on note r_k, le bénéfice ou le perte résultant de l'opération. Pour l'acheteur qui a remporté l'enchère, le résultat est la différence entre la valeur privée et le prix payé. Pour les autres acheteurs, le résultat est considéré comme nul.
À titre d'exemple, considérons quatre acheteurs, dont les mises en euros sont $y_1 = 50$, $y_2 = 100$, $y_3 = 80$ et $y_4 = 40$, alors l'acheteur A_2 gagne l'enchère. Si sa valeur privée x_2 vaut 90 euros, il paye 100 euros au vendeur pour un résultat de $r_2 = -10$ euros s'il s'agit d'une enchère au premier prix, et 80 euros pour un résultat de $r_2 = 10$ euros si c'est une enchère au second prix.
On s'intéresse au problème suivant : à partir de l'information dont dispose l'acheteur k, notamment à partir de sa valeur privée x_k, comment doit-il choisir sa mise y_k afin d'optimiser son résultat net ? On appelle *stratégie* de l'acheteur k une fonction σ_k telle que $y_k = \sigma_k(x_k)$.

1- Enchère au premier prix

On suppose que chaque acheteur A_k a une valeur privée $x_k = X_k(\omega)$ qui est une réalisation de la variable aléatoire X_k.
Soit σ la fonction définie à la partie II.
Le problème étant symétrique, on se met par exemple à la place de l'acheteur n, et on suppose que les $n-1$ premiers acheteurs appliquent la stratégie σ, c'est-à-dire : pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, l'acheteur k mise $\sigma(X_k)$.
L'acheteur n a une valeur privée x_n et choisit une mise y_n.
On note E_n l'événement « l'acheteur A_n remporte l'enchère ».

10. En remarquant que $\mathbb{P}(\big[Y_{n-1} = \sigma^{-1}(y_n)\big]) = 0$, montrer que $\mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(\big[Y_{n-1} < \sigma^{-1}(y_n)\big])$.
On note R_n la variable aléatoire donnant le résultat net de l'enchère pour l'acheteur A_n.
Justifier que $R_n = (x_n - y_n)\,\mathbb{1}_{E_n}$ et en déduire que le résultat espéré de l'acheteur A_n en fonction de sa valeur privée $x_n \in \,]0, \alpha[$ et de l'offre $y_n \in \,]0, \beta[$ est donné par :

$$\mathbb{E}(R_n) \; = \; (x_n - y_n)\, G_{n-1}(\sigma^{-1}(y_n))$$

Démonstration.

- L'événement E_n est réalisé si et seulement si l'acheteur A_n remporte l'enchère, c'est-à-dire si sa mise $y_n = \sigma(x_n)$ est :
  × ou bien strictement supérieure aux mises des $n-1$ autres acheteurs : $\sigma(x_1)$, …, $\sigma(x_n)$.
  Cet événement s'écrit :
  $$\bigcap_{k=1}^{n-1} [\sigma(X_k) < y_n] \; = \; \big[\max\big(\sigma(X_1), \ldots, \sigma(X_{n-1})\big) < y_n\big]$$

Commentaire

On utilise généralement cette égalité d'événements pour une lecture de droite à gauche.
Plus précisément, en notant $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$[M_n \leqslant x] \; = \; [\max(X_1, \ldots, X_n) \leqslant x] \; = \; \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]$$

  × ou bien égale à une ou plusieurs mises (la plus haute) des $n-1$ autres acheteurs, puis est tirée au sort parmi celles-ci.
  Cet événement s'écrit :
  $$\big[\max\big(\sigma(X_1), \ldots, \sigma(X_n)\big) = y_n\big] \cap E_n$$

  Finalement :
  $$E_n = [\max(\sigma(X_1), \ldots, \sigma(X_n)) \leqslant y_n] \cap E_n$$

- D'après la question ***7.b)***, la fonction σ est strictement croissante sur $]0, \alpha[$, donc :
  $$\max(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_{n-1})) \; = \; \sigma(\max(x_1, \ldots, x_{n-1}))$$
  En effet :
  × d'une part, par définition de $\max(x_1, \ldots, x_{n-1})$:
  $$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \; x_i \leqslant \max(x_1, \ldots, x_{n-1})$$
  Donc, par croissance de σ sur $]0, \alpha[$:
  $$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \; \sigma(x_i) \leqslant \sigma\big(\max(x_1, \ldots, x_{n-1})\big)$$
  Ceci est valable pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, donc :
  $$\max\big(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)\big) \leqslant \sigma\big(\max(x_1, \ldots, x_n)\big)$$
  × d'autre part, par définition de $\max\big(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_{n-1})\big)$:
  $$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \; \sigma(x_i) \leqslant \max\big(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_{n-1})\big)$$
  Donc, en particulier :
  $$\sigma\big(\max(x_1, \ldots, x_{n-1})\big) \leqslant \max\big(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_{n-1})\big)$$
  Finalement, on a bien : $\sigma\big(\max(x_1, \ldots, x_n)\big) \; = \; \max\big(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)\big)$.

- On en déduit :
  $$\begin{aligned} E_n &= \big[\max\big(\sigma(X_1), \ldots, \sigma(X_{n-1})\big) \leqslant y_n\big] \cap E_n \\ &= \big[\sigma\big(\max(X_1, \ldots, X_{n-1})\big) \leqslant y_n\big] \cap E_n \\ &= [\sigma(Y_{n-1}) \leqslant y_n] \cap E_n \\ &= \big[Y_{n-1} \leqslant \sigma^{-1}(y_n)\big] \cap E_n && \textit{(par stricte croissance de } \sigma^{-1} \textit{ sur }]0, \beta[) \\ &= \big[Y_{n-1} < \sigma^{-1}(y_n)\big] \cup \big(\big[Y_{n-1} = \sigma^{-1}(y_n)\big] \cap E_n\big) \end{aligned}$$

- Par incompatibilité de ces deux événements :

$$\mathbb{P}(E_n) \;=\; \mathbb{P}(\big[Y_{n-1} < \sigma^{-1}(y_n)\big]) + \mathbb{P}(\big[Y_{n-1} = \sigma^{-1}(y_n)\big] \cap E_n)$$

De plus, d'après la question ***1.b)***, la v.a.r. Y_{n-1} est une variable aléatoire à densité, donc :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([Y_{n-1} = a]) = 0$$

En particulier : $\mathbb{P}(\big[Y_{n-1} = \sigma^{-1}(y_n)\big]) = 0$.
Or $\big[Y_{n-1} = \sigma^{-1}(y_n)\big] \cap E_n \;\subset\; \big[Y_{n-1} = \sigma^{-1}(y_n)\big]$. Donc :

$$0 \leqslant \mathbb{P}\big(\,\big[Y_{n-1} = \sigma^{-1}(y_n)\big] \cap E_n\big) \leqslant \mathbb{P}\big(\,\big[Y_{n-1} = \sigma^{-1}(y_n)\big]\,\big) = 0$$

Ainsi : $\mathbb{P}\big(\,\big[Y_{n-1} = \sigma^{-1}(y_n)\big] \cap E_n\big) = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(\big[Y_{n-1} < \sigma^{-1}(y_n)\big]).}$$

- D'après l'énoncé :
  - × si l'acheteur A_n remporte l'enchère, alors le résultat r_n de l'enchère est la différence entre la valeur privée x_n et le prix payé y_n (car c'est une enchère au premier prix).
    Donc, si l'acheteur A_n remporte l'enchère : $r_n = x_n - y_n$.
  - × si l'acheteur A_n ne remporte pas l'enchère, le résultat r_n est nul : $r_n = 0$.
- La variable aléatoire $\mathbb{1}_{E_n}$ est définie par :

$$\mathbb{1}_{E_n} : \omega \mapsto \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } \omega \in E_n \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right.$$

Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent :
  - × si $\omega \in E_n$, c'est-à-dire si E_n est réalisé, alors on a montré précédemment : $R_n(\omega) = x_n - y_n$.
    De plus, par définition de $\mathbb{1}_{E_n}$: $\mathbb{1}_{E_n}(\omega) = 1$. Donc :

$$(x_n - y_n)\,\mathbb{1}_{E_n}(\omega) \;=\; x_n - y_n \;=\; R_n(\omega)$$

  - × si $\omega \in \overline{E_n}$, c'est-à-dire si $\overline{E_n}$ est réalisé (l'acheteur A_n ne remporte pas l'enchère), alors on a montré : $R_n(\omega) = 0$.
    De plus, par définition de $\mathbb{1}_{E_n}$: $\mathbb{1}_{E_n}(\omega) = 0$ (car $\omega \notin E_n$). Donc :

$$(x_n - y_n)\,\mathbb{1}_{E_n}(\omega) \;=\; 0 \;=\; R_n(\omega)$$

Finalement : $\forall \omega \in \Omega,\ R_n(\omega) = (x_n - y_n)\,\mathbb{1}_{E_n}(\omega)$.

$$\boxed{\text{D'où : } R_n = (x_n - y_n)\,\mathbb{1}_{E_n}.}$$

- La v.a.r. $\mathbb{1}_{E_n}$ admet une espérance car c'est une v.a.r. finie. En effet : $\mathbb{1}_{E_n}(\Omega) = \{0, 1\}$.
  Donc la v.a.r. R_n admet une espérance en tant que multiple de $\mathbb{1}_{E_n}$.
- Par définition de l'espérance :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{E_n}) & = & \cancel{0 \times \mathbb{P}([\mathbb{1}_{E_n} = 0])} + 1 \times \mathbb{P}([\mathbb{1}_{E_n} = 1]) \\ & = & \mathbb{P}([\mathbb{1}_{E_n} = 1]) \end{array}$$

Soit $\omega \in \Omega$.

$$\omega \in [\mathbb{1}_{E_n} = 1] \;\Leftrightarrow\; \mathbb{1}_{E_n}(\omega) = 1 \;\Leftrightarrow\; \omega \in E_n$$

Donc : $[\mathbb{1}_{E_n} = 1] \;=\; E_n$. Ainsi :

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{E_n}) \;=\; \mathbb{P}([\mathbb{1}_{E_n} = 1]) \;=\; \mathbb{P}(E_n)$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(R_n) & = & \mathbb{E}\big((x_n - y_n)\,\mathbb{1}_{E_n}\big) & \\
& = & (x_n - y_n)\,\mathbb{E}(\mathbb{1}_{E_n}) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
& = & (x_n - y_n)\,\mathbb{P}(E_n) & \\
& = & (x_n - y_n)\,\mathbb{P}(\big[Y_{n-1} < \sigma^{-1}(y_n)\big]) & \\
& = & (x_n - y_n)\,G_{n-1}(\sigma^{-1}(y_n)) & \textit{(car } G_{n-1} \textit{ est la fonction de répartition de } Y_{n-1}\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(R_n) \ = \ (x_n - y_n)\,G_{n-1}(\sigma^{-1}(y_n))}$$

Commentaire

Les variables aléatoires indicatrices ne font pas partie du programme d'ECE. Donnons néanmoins certaines de leurs propriétés.
Soit A un événement. On note $\mathbb{1}_A$ la v.a.r. telle que :

$$\mathbb{1}_A : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Loi de $\mathbb{1}_A$.
  - × Par définition de $\mathbb{1}_A$, cette v.a.r. ne prend comme valeur que 0 et 1.
    Donc $\mathbb{1}_A(\Omega) = \{0, 1\}$.
  - × Soit $\omega \in \Omega$.
    $$\omega \in [\mathbb{1}_A = 1] \ \Leftrightarrow \ \mathbb{1}_A(\omega) = 1 \ \Leftrightarrow \ \omega \in A$$
    D'où : $[\mathbb{1}_A = 1] = A$. Ainsi : $\mathbb{P}([\mathbb{1}_A = 1]) = \mathbb{P}(A)$.

  On en déduit : $\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\mathbb{P}(A)\right)$.
- En particulier :
  $$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A))$$
- On peut aussi garder en tête les deux propriétés suivantes.
  Soient A et B deux événements.
  - × $\mathbb{1}_{A\cap B} \ = \ \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$
  - × $\mathbb{1}_{A\cup B} \ = \ \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$

□

11. En déduire que pour optimiser son espérance de résultat, l'acheteur A_n a intérêt à appliquer lui aussi la stratégie σ.
Il s'agit de ce que l'on appelle un *équilibre de Nash* en théorie des jeux : si tous les acheteurs appliquent cette stratégie d'équilibre σ, alors aucun n'a intérêt à changer de stratégie.

Démonstration.

- Pour optimiser l'espérance du résultat de A_n, il faut maximiser la fonction $y_n \mapsto \mathbb{E}(R_n)$, c'est-à-dire la fonction :
  $$y \ \mapsto \ (x - y)\,G_{n-1}(\sigma^{-1}(y)) = \gamma(x, y)$$
- Or, d'après la question ***7.b)(iii)***, la fonction $y \mapsto \gamma(x, y)$ est maximale en $\sigma(x)$.
  Donc, pour maximiser $\mathbb{E}(R_n)$, l'acheteur A_n doit choisir $y_n = \sigma(x_n)$.

$$\boxed{\text{Pour optimiser son espérance de résultat, l'acheteur } A_n \text{ doit donc appliquer la stratégie } \sigma.}$$ □

2- Enchère au second prix

On se met à nouveau à la place de l'acheteur n. Soit $m = \max(y_1, \dots, y_{n-1})$ la meilleure offre faite par les acheteurs A_1, ..., A_{n-1} (que A_n ne connaît pas).

12. a) Si on suppose que $m \geqslant x_n$, montrer que quelle que soit la mise y_n, le résultat net r_n pour A_n est négatif ou nul. Que vaut r_n pour le choix $y_n = x_n$?

Démonstration.

- L'acheteur A_n remporte l'enchère si et seulement si sa mise est supérieure à celle des autres acheteurs, c'est-à-dire : $y_n > m$ ou, $y_n = m$ et il est tiré au sort.
  Quatre cas se présentent donc :
  - × si $y_n > m$, alors l'acheteur A_n remporte l'enchère. Donc r_n est la différence entre la valeur privée x_n et le prix payé m (car c'est une enchère au second prix).
    Donc, si A_n remporte l'enchère : $r_n = x_n - m$.
    Or on suppose : $m \geqslant x_n$. Donc $r_n \leqslant 0$.
  - × si $y_n = m$ et A_n est tiré au sort, alors l'acheteur A_n remporte l'enchère.
    Donc on a toujours : $r_n \leqslant 0$.
  - × si $y_n = m$ et A_n n'est pas tiré au sort, alors il ne remporte pas l'enchère. Donc $r_n = 0$.
  - × si $y_n < m$, alors l'acheteur A_n ne remporte pas l'enchère. Donc $r_n = 0$.

  $$\boxed{\text{Finalement, quelle que soit la mise } y_n \text{, on obtient : } r_n \leqslant 0.}$$

- Si $y_n = x_n$, quatre cas se présentent :
  - × si $y_n > m$:
  $$r_n \;=\; x_n - m \;=\; y_n - m \;\geqslant\; 0$$
    Or, d'après précédemment : $r_n \leqslant 0$. Donc : $r_n = 0$.
  - × si $y_n = m$ et A_n est tiré au sort, on obtient de même : $r_n = 0$.
  - × si $y_n = m$ et A_n n'est pas tiré au sort, alors : $r_n = 0$.
  - × si $y_n < m$, alors : $r_n = 0$.

  $$\boxed{\text{Finalement, si } y_n = x_n \text{, alors } r_n = 0.}$$

□

b) Si on suppose que $m < x_n$, quel est le résultat pour A_n dans les cas $y_n < m$ et $y_n \geqslant m$?

Démonstration.
Dans cette question, on suppose : $m < x_n$. Deux cas se présentent :

- × si $y_n < m$, alors l'acheteur A_n ne remporte pas l'enchère.
  Donc : $r_n = 0$.
- × si $y_n \geqslant m$, alors l'acheteur A_n remporte l'enchère.
  Donc : $r_n = x_n - m$.

$$\boxed{\text{Si } m < x_n \text{, alors : } r_n = \begin{cases} 0 & \text{si } y_n < m \\ x_n - m & \text{si } y_n \geqslant m \end{cases}.}$$

Commentaire

Dans ce cas ($m < x_n$), si l'acheteur A_n remporte l'enchère, alors son résultat $r_n = x_n - m$ est strictement positif.

□

c) En déduire que la meilleure stratégie pour A_n consiste à prendre $y_n = x_n$.

Démonstration.
Deux cas se présentent :

- si $m \geqslant x_n$.
  D'après la question ***12.a)*** : $r_n \leqslant 0$.
  De plus, si $y_n = x_n$, alors $r_n = 0$.
  Ainsi, la meilleure stratégie pour l'acheteur A_n est de choisir $y_n = x_n$.
- si $m < x_n$.
  - D'après la question ***12.b)*** : $r_n = \begin{cases} 0 & \text{si } y_n < m \\ x_n - m & \text{si } y_n \geqslant m \end{cases}$
    Or $x_n - m > 0$. Donc, si $y_n \geqslant m$, alors $r_n > 0$.
  - Ainsi, la meilleure stratégie pour l'acheteur A_n est donc de choisir une mise y_n telle que $y_n \geqslant m$.
    Dans ce cas, quelle que soit la mise y_n, $r_n = x_n - m$.
  - Or : $x_n > m$. Donc, en choisissant $y_n = x_n$, on est dans le cas $y_n \geqslant m$. Ainsi : $r_n = x_n - m > 0$.

  On en déduit qu'une stratégie optimale pour A_n est de choisir $y_n = x_n$.

$$\boxed{\text{Finalement, dans tous les cas, une stratégie optimale pour } A_n \text{ est de choisir } y_n = x_n.}$$ □

Par symétrie, chaque acheteur a également intérêt à miser le montant de sa valeur privée. On parle de *stratégie dominante* : chaque acheteur a une stratégie optimale indépendamment du comportement des autres acheteurs.

3- Équivalence des revenus

On se met maintenant à la place du vendeur.
Les valeurs privées des acheteurs sont données par les variables aléatoires X_1, ..., X_n.

13. Enchère au premier prix.
On suppose que le vendeur organise une enchère au premier prix, et que les acheteurs adoptent la stratégie d'équilibre σ donnée à la partie III-1.
On note B_n la variable aléatoire donnant le *bénéfice*, ou *revenu*, du vendeur. Il s'agit du montant que paye l'acheteur qui a remporté l'enchère.

a) Justifier que $B_n = \sigma(Y_n)$.

Démonstration.

- L'acheteur ayant la mise maximale remporte l'enchère et paye donc $\max(y_1, \ldots, y_n)$ (car c'est une enchère au premier prix).
- Or, chaque acheteur adopte la stratégie σ. Donc : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $y_i = \sigma(x_i)$.
  L'acheteur gagnant paye donc $\max\big(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)\big)$.
- De plus, par croissance de σ sur $]0, \alpha[$:
$$\max\big(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)\big) \ = \ \sigma\big(\max(x_1, \ldots, x_n)\big)$$
  *(la démonstration de cette égalité est détaillée en question **10.**)*
- On en déduit que l'acheteur gagnant paye $\sigma\big(\max(x_1, \ldots, x_n)\big)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } B_n = \sigma\big(\max(X_1, \ldots, X_n)\big) = \sigma(Y_n).}$$ □

b) En déduire :

$$\mathbb{E}(B_n) \;=\; n \int_0^{\alpha} \sigma(x)\, G_{n-1}(x)\, f(x)\ dx \;=\; n \int_0^{\alpha} \left(\int_0^{x} t\, g_{n-1}(t)\ dt \right) f(x)\ dx$$

Démonstration.

- La fonction g_n est nulle en dehors de $]0,\alpha[$.
  Donc, d'après le théorème de transfert, la v.a.r. $B_n = \sigma(Y_n)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\alpha} \sigma(x)\, g_n(x)\ dx$ est absolument convergente.
  Les fonctions σ et g_n étant à valeurs positives sur $]0,\alpha[$, cela revient à démontrer que cette intégrale est convergente.
- La fonction $x \mapsto \sigma(x)\, g_n(x)$ est continue par morceaux sur $[0,\alpha]$ (d'après la question ***6.d)***), donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\alpha} \sigma(x)\, g_n(x)\ dx$ est bien définie.

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } B_n = \sigma(Y_n) \text{ admet une espérance.}}$$

- Soit $x \in\,]0,\alpha[$.

$$\begin{array}{rcll} \sigma(x)\, g_n(x) & = & n\, \sigma(x)\, f(x)\, (F(x))^{n-1} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.b)}}\textit{)} \\ & = & n\, \sigma(x)\, f(x)\, G_{n-1}(x) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.a)}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Donc : } \mathbb{E}(B_n) \;=\; \mathbb{E}(\sigma(Y_n)) \;=\; \int_0^{\alpha} \sigma(x)\, g_n(x)\ dx \;=\; n \int_0^{\alpha} \sigma(x)\, f(x)\, G_{n-1}(x)\ dx.}$$

- D'après l'expression $(*)$ en question ***6.d)*** :

$$\forall x \in\,]0,\alpha[,\ \sigma(x) = \frac{1}{G_{n-1}(x)} \int_0^{x} t\, g_{n-1}(t)\ dt$$

  D'où : $\forall x \in\,]0,\alpha[$, $\sigma(x)\, G_{n-1}(x) = \displaystyle\int_0^{x} t\, g_{n-1}(t)\ dt$.

  Ainsi : $\displaystyle\int_0^{\alpha} \sigma(x)\, G_{n-1}(x)\, f(x)\ dx \;=\; \int_0^{\alpha} \left(\int_0^{x} t\, g_{n-1}(t)\ dt \right) f(x)\ dx.$

$$\boxed{\mathbb{E}(B_n) \;=\; n \int_0^{\alpha} \sigma(x)\, G_{n-1}(x)\, f(x)\ dx \;=\; n \int_0^{\alpha} \left(\int_0^{x} t\, g_{n-1}(t)\ dt \right) f(x)\ dx} \qquad \square$$

c) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\mathbb{E}(B_n) \;=\; n \int_0^{\alpha} x\, (1 - F(x))\, g_{n-1}(x)\ dx$$

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\mathbb{E}(B_n) \;=\; n \int_0^{\alpha} \left(\int_0^{x} t\, g_{n-1}(t)\ dt \right) f(x)\ dx$$

- Soit $(a,b) \in\,]0,\alpha[^2$ tels que $a \leqslant b$. On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & \displaystyle\int_0^{x} t\, g_{n-1}(t)\ dt & \quad & u'(x) & = & x\, g_{n-1}(x) \\ v'(x) & = & f(x) & & v(x) & = & -(1 - F(x)) \end{array} \right.$$

  Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}&\int_a^b \left(\int_0^x t\, g_{n-1}(t)\ dt\right) f(x)\ dx \\ = \ & \left[-\left(\int_0^x t\, g_{n-1}(t)\ dt\right)(1-F(x))\right]_a^b + \int_a^b x\, g_{n-1}(x)\,(1-F(x))\ dx\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}&\left[-\left(\int_0^x t\, g_{n-1}(t)\ dt\right)(1-F(x))\right]_a^b \\ = \ & -\left(\int_0^b t\, g_{n-1}(t)\ dt\right)(1-F(b)) + \left(\int_0^a t\, g_{n-1}(t)\ dt\right)(1-F(a))\end{aligned}$$

De plus, comme la densité f est nulle en dehors de $]0,\alpha[$:

× d'une part $\lim\limits_{a\to 0} F(a) \ = \ F(0) \ = \ \displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)\ dt \ = \ 0$,

× d'autre part $\lim\limits_{b\to \alpha} F(b) \ = \ F(\alpha) \ = \ \displaystyle\int_{-\infty}^\alpha f(t)\ dt \ = \ \int_0^\alpha f(t)\ dt \ = \ 1$

Enfin :

$$\lim_{a\to 0} \int_0^a t\, g_{n-1}(t)\ dt = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{b\to\alpha} \int_0^b t\, g_{n-1}(t)\ dt = \int_0^\alpha t\, g_{n-1}(t)\ dt = \mathbb{E}(Y_{n-1})$$

- Ainsi :

$$\int_0^\alpha \left(\int_0^x t\, g_{n-1}(t)\ dt\right) f(x)\ dx \ = \ -\cancel{\mathbb{E}(Y_{n-1}) \times (1-1)} + \cancel{0 \times (1-0)} + \int_0^\alpha x\,(1-F(x))\, g_{n-1}(x)\ dx$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{E}(B_n) \ = \ n \int_0^\alpha x\,(1-F(x))\, g_{n-1}(x)\ dx.}$$

Commentaire

- On remarque le choix non usuel d'une primitive de $v' : x \mapsto f(x)$.
  On choisit ici $v : x \mapsto -(1-F(x))$ plutôt que $v : x \mapsto F(x)$ afin d'obtenir plus rapidement le résultat voulu. Néanmoins les calculs ne sont pas rendus plus complexes par le choix de $v : t \mapsto F(t)$.
- Le programme officiel stipule que « les techniques de calculs (**intégration par parties**, changement de variables) seront pratiquées sur des intégrales sur un segment ». C'est pourquoi on se place ici sur le segment $[a, b]$ pour effectuer l'IPP (et non sur $]0, \alpha[$).

□

14. Enchère au second prix.
On suppose que le vendeur organise une enchère au second prix, et que les acheteurs adoptent la stratégie dominante de la partie III-2 : chacun mise autant que sa valeur privée.
On note B'_n la variable aléatoire donnant le revenu du vendeur dans cette enchère.
Justifier que $\mathbb{E}(B'_n) = \mathbb{E}(Z_n)$.

Démonstration.

- L'acheteur ayant la mise maximale emporte l'enchère. Dans une enchère au second prix, il paye la deuxième mise la plus élevée parmi $y_1, \ldots, y_n$.

- Or, avec la stratégie de la question ***12.c)*** : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $y_i = x_i$.

  Donc l'acheteur gagnant paye la deuxième plus grande valeur parmi $x_1, \ldots, x_n$.

  $$\boxed{\text{Ainsi : } B'_n = Z_n.}$$

- La v.a.r. Z_n admet une espérance par critère de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives (même démonstration qu'en question ***1.c)***).

  $$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } B'_n \text{ admet une espérance et : } \mathbb{E}(B'_n) = \mathbb{E}(Z_n).}$$

□

15. Établir : $\mathbb{E}(B_n) = \mathbb{E}(B'_n)$.

Démonstration.

- D'après la question ***2.b)*** :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_n) &= \int_0^\alpha x\, h_n(x)\, dx \;=\; \int_0^\alpha x\, n(n-1)\, f(x)\, (1 - F(x))\, (F(x))^{n-2}\, dx \\ &= n \int_0^\alpha x\, (1 - F(x))\, (n-1)\, f(x)\, (F(x))^{n-2}\, dx \end{aligned}$$

- D'autre part, d'après la question ***1.b)*** :

$$\forall x \in\,]0, \alpha[,\;\; g_{n-1}(x) = (n-1)\, f(x)\, (F(x))^{n-2}$$

  D'où :

$$\mathbb{E}(Z_n) \;=\; n \int_0^\alpha x\, (1 - F(x))\, g_{n-1}(x)\, dx \;=\; \mathbb{E}(B_n)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(B'_n) \;=\; \mathbb{E}(Z_n) \;=\; \mathbb{E}(B_n).}$$

□

Ainsi, le revenu moyen pour le vendeur est le même pour les enchères au premier ou au second prix lorsque les acheteurs adoptent tous la stratégie optimale. Plus généralement, on peut montrer que ce revenu moyen est encore le même dans une très grande classe de formats d'enchères, ce résultat portant le nom de *principe d'équivalence du revenu*.

ESSEC-II 2018 : le sujet

On s'intéresse à l'évolution d'une population de petits organismes (typiquement des insectes) pendant une « saison » reproductrice de durée maximale T oû $T \in \mathbb{N}^*$. Les insectes sont supposés vivre une unité de temps, au bout de laquelle ils meurent en pondant un certain nombre d'œufs. Au moment du dépôt d'un œuf, un processus chimique, la diapause, est susceptible de se mettre en marche qui entraîne l'arrêt de maturation de l'œuf jusqu'à la saison suivante. Ainsi, à chaque t de la saison, une génération d'insectes s'éteint, en déposant des œufs. Immédiatement, une proportion $p(t)$ de ces œufs se mettent en diapause. Les œufs qui ne sont pas entrés en diapause éclosent avant la date $t+1$, donnant naissance à une nouvelle génération d'insectes, qui s'éteindra à la date $t+1$ en déposant des œufs, etc. Comme, à la fin de la saison, tous les organismes vivants de la population meurent, hormis les œufs qui sont en diapause, ce sont ces derniers qui seront à l'origine d'une nouvelle population qui éclora à la saison suivante. Il est donc fondamental pour la survie de la lignée que les organismes adoptent une stratégie maximisant le nombre d'œufs en diapause accumulés jusqu'à la date oû la saison s'achève.

Au cours du problème, on s'intéressera plus particulièrement au cas oû la durée de la saison est une variable aléatoire τ pouvant prendre des valeurs entières entre 1 et T. Pour $t \in \{1, 2, \ldots, T\}$, l'événement $[\tau = t]$ signifiera donc que la saison s'arrête à la date t.

Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Pour toute variable aléatoire Y, on notera $\mathbb{E}(Y)$ son espérance lorsqu'elle existe.

Partie I - Modèle de population saisonnière

Dans cette question, on définit l'évolution formelle du nombre d'œufs en diapause entre les dates 0 et T. On note $D(t)$ = nombre d'œufs en diapause à la date t. Les œufs pondus à la date t qui entrent en diapause sont comptabilisés à la date $t+1$.

$$\begin{aligned} N(t) &= \text{nombre moyen d'œufs produits à la date } t \\ p(t) &= \text{proportion des œufs produits à la date } t \text{ qui entrent en diapause} \end{aligned}$$

Par convention, la date 0 d'une saison est celle oû les insectes nés des œufs en diapause de la saison précédente pondent $N(0)$ œufs. On suppose pour simplifier :

- que $N(0)$ est un entier naturel non nul.
- que tous les œufs issus de la saison précédente ont éclos et donc que $D(0) = 0$.
- que pour tout $t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$, $0 < p(t) \leqslant 1$

Enfin, on suppose qu'à chaque date t de la saison, un individu produit en moyenne α œufs (α étant un réel strictement positif). **Par simplicité, on supposera que α reste constant pendant toute la saison.**

1. a) Montrer que $D(t+1) = D(t) + p(t)\,N(t)$ pour tout entier t tel que $0 \leqslant t \leqslant T-1$.

b) Montrer que $N(t+1) = \alpha(1-p(t))\,N(t)$ pour tout entier t tel que $0 \leqslant t \leqslant T-1$.

2. On suppose dans cette question que $\alpha \leqslant 1$.

a) Montrer que pour tout entier t tel que $0 \leqslant t \leqslant T-1$, $N(t+1) \leqslant N(t)$.

b) Montrer que pour tout entier t tel que $0 \leqslant t \leqslant T-1$:

$$D(t+1) + N(t+1) \leqslant D(t) + N(t)$$

c) Montrer que pour tout entier t tel que $0 \leqslant t \leqslant T$:

$$D(t) + N(t) \leqslant N(0)$$

d) Montrer que pour tout entier t tel que $0 \leqslant t \leqslant T$, $D(t) \leqslant N(0)$.

e) On suppose que $p(0) = 1$.

(i) Montrer que pour tout entier t tel que $1 \leqslant t \leqslant T$, $N(t) = 0$.

(ii) Montrer que pour tout entier t tel que $1 \leqslant t \leqslant T$, $D(t) = N(0)$.

(iii) En déduire que si $\alpha \leqslant 1$, la meilleure stratégie adaptée à la saison est que les $N(0)$ œufs produits à la date 0 entrent en diapause immédiatement.

3. **On suppose désormais $\alpha > 1$ jusqu'à la fin du problème.**
On introduit maintenant τ une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, \ldots, T\}$ qui représente la date oû s'achève la saison. On suppose que pour tout $t \in \{1, 2, \ldots, T\}$, $\mathbb{P}([\tau = t]) > 0$.

a) Montrer que pour tout $t \in \{1, 2, \ldots, T\}$, $\mathbb{P}([\tau \geqslant t]) > 0$. On définit alors $H(t) = \mathbb{P}_{[\tau \geqslant t]}([\tau = t])$.

b) Montrer que : $H(t) = \dfrac{\mathbb{P}([\tau = t])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant t])}$.

c) Montrer que : $H(T) = 1$.

d) Calculer $H(t)$ pour $t \in \{1, 2, \ldots, T\}$ si τ suit une loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, T\}$.

e) (i) Soient T réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_T$ tels que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_T = 1$. Par convention, on pose $\lambda_0 = 0$. Soient $q_1 = \lambda_1$, $q_2 = \lambda_2 - \lambda_1$, $\ldots$, $q_T = \lambda_T - \lambda_{T-1}$.
Montrer que $(q_i)_{1 \leqslant i \leqslant T}$ définit une loi de probabilité sur $\{1, 2, \ldots, T\}$.

(ii) Calculer $H(t)$ si τ suit la loi précédente.

(iii) On suppose que $T \geqslant 2$ et de plus que pour tout entier n tel que $1 \leqslant n \leqslant T - 1$, on a $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant \lambda_n - \lambda_{n-1}$. Montrer que $t \mapsto H(t)$ est croissante sur $\{1, 2, \ldots, T\}$.

On suppose désormais que $t \mapsto H(t)$ est croissante. Le but est maintenant de trouver une stratégie adéquate pour maximiser la quantité $\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big)$. On va commencer par regarder un exemple simple.

4. On suppose ici que $T = 2$, que H est donnée par $H(1) = \dfrac{1}{2}$ et $H(2) = 1$ et que $\alpha = 4$.

a) (i) Déterminer $\mathbb{P}([\tau = 1])$.

(ii) Quelle est la loi de τ ?

b) Montrer que pour $D(1)$ et $N(1)$ donnés, $D(2)$ est maximum pour $p(1) = 1$.

c) On suppose $p(1) = 1$. Montrer que :

$$\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau)\big) \;=\; \frac{1}{2}\ln\big((4 - 3\,p(0))\,N(0)\big) + \frac{1}{2}\ln\big(p(0)\,N(0)\big)$$

d) Construire le tableau de variations sur $]0, 1]$ de la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) \;=\; \frac{1}{2}\ln\big((4 - 3x)\,N(0)\big) + \frac{1}{2}\ln\big(N(0)\,x\big)$$

e) Déterminer $p^*(0)$ qui maximise $\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big)$.

Partie II - Transformation du problème

Par convention, on conviendra que si h est une fonction numérique définie sur $\{0, 1, 2, \ldots, T\}$, on a

$$\sum_{t=1}^{0} h(t) = 0$$

5. Montrer que pour tout $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T\}$, $D(t) + N(t) > 0$.
On pose

$$X(t) \;=\; \frac{D(t)}{D(t) + N(t)}$$

6. Montrer que pour tout $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T-1\}$:

$$X(t+1) \;=\; \frac{p(t) + (1 - p(t))\,X(t)}{p(t) + \alpha\,(1 - p(t)) + (1-\alpha)(1 - p(t))\,X(t)}$$

7. Soit $\xi \in [0, 1]$ fixé. Pour $x \in [0, 1]$, on pose :

$$\psi_\xi(x) \;=\; \frac{x + (1-x)\xi}{x + \alpha\,(1-x) + (1-\alpha)(1-x)\xi}$$

a) Montrer que ψ_ξ est croissante sur $[0, 1]$.

b) Calculer $\psi_\xi(1)$.

c) (i) Calculer $\psi_\xi(0)$. On pose désormais $A(\xi) \;=\; \psi_\xi(0)$

(ii) Montrer que pour tout $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T-1\}$, $A(X(t)) \leqslant X(t+1) \leqslant 1$.

(iii) Montrer que $\xi \mapsto A(\xi)$ est croissante sur $[0, 1]$.

8. Justifier l'égalité de variables aléatoires :

$$D(\tau) \;=\; \frac{D(\tau)}{D(\tau-1)} \cdot \frac{D(\tau-1)}{D(\tau-2)} \cdot \cdots \cdot \frac{D(2)}{D(1)} \cdot \frac{D(1)}{N(0)} \cdot N(0)$$

On pose $\hat{R}(0) = \ln\left(\dfrac{D(1)}{N(0)}\right)$ et $\hat{R}(t) = \ln\left(\dfrac{D(t+1)}{D(t)}\right)$ pour $1 \leqslant t \leqslant T-1$.

9. a) Montrer que :

$$\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big) \;=\; \ln(N(0)) + \mathbb{E}\left(\hat{R}(0) + \sum_{t=1}^{\tau-1} \hat{R}(t)\right)$$

b) Montrer que : $\dfrac{D(1)}{N(0)} = \dfrac{\alpha\,X(1)}{1 + (\alpha-1)\,X(1)}$.

c) Montrer que : $\dfrac{D(t+1)}{D(t)} = \dfrac{\alpha\,X(t+1)}{X(t)\big(1 + (\alpha-1)\,X(t+1)\big)}$ pour $1 \leqslant t \leqslant T-1$.

Pour x et y deux réels strictement positifs, on pose $u(x, y) = \ln(\alpha) - \ln(x) + \ln(y) - \ln(1 + (\alpha-1)y)$.

d) Montrer que : $\hat{R}(0) = u(1, X(1))$.

e) Montrer que : $\hat{R}(t) = u(X(t), X(t+1))$ pour $1 \leqslant t \leqslant T-1$.

f) Conclure que :

$$\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big) \;=\; \ln(N(0)) + \mathbb{E}\left(u(1, X(1)) + \sum_{t=1}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)$$

On voit donc que maximiser $\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big)$ revient à choisir, à chaque date t telle que $1 \leqslant t \leqslant \tau - 1$, la valeur $X(t+1)$ vérifiant la contrainte $A(X(t)) \leqslant X(t+1) \leqslant 1$ de façon à rendre maximale l'expression

$$\mathbb{E}\left(u(1, X(1)) + \sum_{t=1}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)$$

Partie III - Programmation dynamique

On expose dans cette partie les deux premières étapes de la méthode de la programmation dynamique pour résoudre le problème.

10. Soit B un événement. On note $\mathbb{1}_B$ la variable aléatoire telle que

$$\mathbb{1}_B(\omega) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Déterminer la loi de $\mathbb{1}_B$.

b) Soient B et C deux événements. Montrer l'égalité de variables aléatoires : $\mathbb{1}_{B\cap C} = \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C$.

c) On suppose que $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Si Y est une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs, on définit la **variable aléatoire** notée $\mathbb{E}_B(Y)$ par :

$$\mathbb{E}_B(Y) \;=\; \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B)\,\mathbb{1}_B + \frac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}})\,\mathbb{1}_{\bar{B}}$$

où $\bar{B}$ désigne l'événement contraire de B.

(i) Soient Y et Z deux variables aléatoires prenant un nombre fini de valeurs. Montrer que :

$$\mathbb{E}_B(Y+Z) \;=\; \mathbb{E}_B(Y) + \mathbb{E}_B(Z)$$

(ii) Montrer que : $\mathbb{E}(\mathbb{E}_B(Y)) = \mathbb{E}(Y)$.

(iii) Montrer que : $\mathbb{E}_B(Y\,\mathbb{1}_B) = \mathbb{E}_B(Y)\,\mathbb{1}_B$.

11. On suppose dans cette question que, quand l'événement $[\tau = T]$ est réalisé, $X(1), \ldots, X(T-1)$ sont connus. Comme on l'a vu précédemment, si on pose $x = X(T-1)$, le meilleur choix à faire est alors de prendre pour $X(T)$ la valeur $y^*(x, T-1) \in [A(x), 1]$ qui maximise $u(x, y)$.

a) Montrer que : $y^*(x, T-1) = 1$.

b) Montrer que : $u(x, 1) = -\ln(x)$.

12. On suppose maintenant que, quand l'événement $[\tau \geqslant T-1]$ est réalisé, les réels $X(1), \ldots, X(T-2)$ sont connus.

La stratégie reste donc de choisir $X(T-1)$ et $X(T)$ de façon à maximiser $\mathbb{E}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)$.

La variable aléatoire τ prend les deux valeurs $T-1$ et T avec les probabilités respectives

$$\mathbb{P}_{[\tau\geqslant T-1]}([\tau = T-1]) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{[\tau\geqslant T-1]}([\tau = T])$$

a) Montrer que :

$$\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} \sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1)) \;=\; \mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\, u(X(T-2), X(T-1)) + \mathbb{1}_{[\tau=T]}\, u(X(T-1), X(T))$$

b) Montrer que :

$$\begin{aligned} & \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}\ \mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t),X(t+1))\right) \\ = \ & \mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\Big(u(X(T-2),X(T-1)) \cdot \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} + u(X(T-1),X(T)) \cdot \mathbb{1}_{[\tau = T]}\Big) \end{aligned}$$

c) Montrer que :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\left(\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}\, u(X(T-2),X(T-1)) + \mathbb{1}_{[\tau = T]}\, u(X(T-1),X(T))\right) \\ = \ & u(X(T-2),X(T-1))\,\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} + \frac{\mathbb{P}([\tau = T])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])}\, u(X(T-1),X(T))\,\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} \end{aligned}$$

d) On suppose que $X(T-1)$ est donné.

(i) Montrer que le meilleur choix pour $X(T)$ est 1.

(ii) Montrer que pour un tel choix $u(X(T-1),X(T)) = -\ln(X(T-1))$.

e) Montrer que : $\mathbb{P}_{[\tau \geqslant T-1]}([\tau = T]) = 1 - H(T-1)$.
On veut maintenant choisir la stratégie optimale à la date $T-2$.

f) Montrer qu'on doit choisir pour $X(T-1)$ la valeur $y^*(X(T-2),T-2) \in [A(X(T-2)),1]$ de telle sorte que

$$\phi(y) \ = \ u(X(T-2),y) - (1 - H(T-1))\,\ln(y)$$

soit maximal.

g) Calculer $\phi'(y)$.

h) Construire le tableau de variation de ϕ dans le cas $\dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \leqslant 1$.

i) Construire le tableau de variation de ϕ dans le cas $\dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \geqslant 1$.

j) Donner la valeur de $y^*(X(T-2),T-2)$.

ESSEC-II 2018 : le corrigé

On s'intéresse à l'évolution d'une population de petits organismes (typiquement des insectes) pendant une « saison » reproductrice de durée maximale T où $T \in \mathbb{N}^*$. Les insectes sont supposés vivre une unité de temps, au bout de laquelle ils meurent en pondant un certain nombre d'œufs. Au moment du dépôt d'un œuf, un processus chimique, la diapause, est susceptible de se mettre en marche qui entraîne l'arrêt de maturation de l'œuf jusqu'à la saison suivante. Ainsi, à chaque t de la saison, une génération d'insectes s'éteint, en déposant des œufs. Immédiatement, une proportion $p(t)$ de ces œufs se mettent en diapause. Les œufs qui ne sont pas entrés en diapause éclosent avant la date $t+1$, donnant naissance à une nouvelle génération d'insectes, qui s'éteindra à la date $t+1$ en déposant des œufs, etc. Comme, à la fin de la saison, tous les organismes vivants de la population meurent, hormis les œufs qui sont en diapause, ce sont ces derniers qui seront à l'origine d'une nouvelle population qui éclora à la saison suivante. Il est donc fondamental pour la survie de la lignée que les organismes adoptent une stratégie maximisant le nombre d'œufs en diapause accumulés jusqu'à la date où la saison s'achève.

Au cours du problème, on s'intéressera plus particulièrement au cas où la durée de la saison est une variable aléatoire τ pouvant prendre des valeurs entières entre 1 et T. Pour $t \in \{1, 2, \dots, T\}$, l'événement $[\tau = t]$ signifiera donc que la saison s'arrête à la date t.

Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Pour toute variable aléatoire Y, on notera $\mathbb{E}(Y)$ son espérance lorsqu'elle existe.

Partie I - Modèle de population saisonnière

Dans cette question, on définit l'évolution formelle du nombre d'œufs en diapause entre les dates 0 et T. On note $D(t)$ = nombre d'œufs en diapause à la date t. Les œufs pondus à la date t qui entrent en diapause sont comptabilisés à la date $t+1$.

$$\begin{aligned} N(t) &= \text{nombre moyen d'œufs produits à la date } t \\ p(t) &= \text{proportion des œufs produits à la date } t \text{ qui entrent en diapause} \end{aligned}$$

Par convention, la date 0 d'une saison est celle où les insectes nés des œufs en diapause de la saison précédente pondent $N(0)$ œufs. On suppose pour simplifier :

– que $N(0)$ est un entier naturel non nul.

– que tous les œufs issus de la saison précédente ont éclos et donc que $D(0) = 0$.

– que pour tout $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$, $0 < p(t) \leqslant 1$

Enfin, on suppose qu'à chaque date t de la saison, un individu produit en moyenne α œufs (α étant un réel strictement positif). **Par simplicité, on supposera que α reste constant pendant toute la saison.**

1. a) Montrer que $D(t+1) = D(t) + p(t)\,N(t)$ pour tout entier t tel que $0 \leqslant t \leqslant T-1$.

Démonstration.
Soit $t \in \{0, \dots, T-1\}$.
Le nombre d'œufs en diapause à l'instant $(t+1)$, $D(t+1)$, est la somme :

× du nombre d'œufs qui étaient déjà en diapause à l'instant t : $D(t)$,

× et du nombre d'œufs pondus à l'instant t entrant tout de suite en diapause.
Or le nombre d'œufs pondus à l'instant t est $N(t)$, et la proportion d'entre eux entrant en diapause est $p(t)$.
Ainsi le nombre d'œufs pondus à l'instant t entrant immédiatement en diapause est : $p(t)\,N(t)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in \{0, \dots, T-1\},\ D(t+1) = D(t) + p(t)\,N(t).}$$

□

b) Montrer que $N(t+1) = \alpha(1-p(t))\,N(t)$ pour tout entier t tel que $0 \leqslant t \leqslant T-1$.

Démonstration.
Soit $t \in \{0, \ldots, T-1\}$.
À l'instant t, $N(t)$ œufs sont pondus. Parmi ceux-ci :

× $p(t)\,N(t)$ entrent immédiatement en diapause,

× $(1-p(t))\,N(t)$ n'entrent pas en diapause.

Seuls les œufs qui ne sont pas entrés en diapause à l'instant t produisent des œufs à l'instant $(t+1)$. Donc $(1-p(t))\,N(t)$ individus produisent des œufs à l'instant $(t+1)$.
D'après l'énoncé, chaque individu produit α œufs.
Ainsi, le nombre d'œufs produits à l'instant $(t+1)$ est $\alpha\,(1-p(t))\,N(t)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in \{0, \ldots, T-1\},\ N(t+1) = \alpha\,(1-p(t))\,N(t).}$$

□

2. On suppose dans cette question que $\alpha \leqslant 1$.

a) Montrer que pour tout entier t tel que $0 \leqslant t \leqslant T-1$, $N(t+1) \leqslant N(t)$.

Démonstration.
Soit $t \in \{0, \ldots, T-1\}$.

- D'après la question précédente : $N(t+1) = \alpha\,(1-p(t))\,N(t)$.
- Or, dans cette question : $\alpha \leqslant 1$.
- De plus, d'après l'énoncé : $0 < p(t) \leqslant 1$. D'où : $0 \leqslant 1 - p(t) < 1$.

On en déduit : $\alpha\,(1-p(t)) \leqslant 1$. Ainsi :

$$\underbrace{\alpha\,(1-p(t))\,N(t)}_{=\,N(t+1)} \leqslant N(t)$$

$$\boxed{\forall t \in \{0, \ldots, T-1\},\ N(t+1) \leqslant N(t)}$$

□

b) Montrer que pour tout entier t tel que $0 \leqslant t \leqslant T-1$:

$$D(t+1) + N(t+1) \leqslant D(t) + N(t)$$

Démonstration.
Soit $t \in \{0, \ldots, T-1\}$.
D'après les questions ***1.a)*** et ***1.b)*** :

$$D(t+1) + N(t+1) = \big(D(t) + p(t)\,N(t)\big) + \alpha\,(1-p(t))\,N(t)$$

Or $\alpha \leqslant 1$. On obtient donc : $\alpha\,(1-p(t))\,N(t) \leqslant (1-p(t))\,N(t)$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} D(t+1) + N(t+1) &\leqslant D(t) + p(t)\,N(t) + (1-p(t))\,N(t) \\ &= D(t) + (\cancel{p(t)} + 1 - \cancel{p(t)})\,N(t) \\ &= D(t) + N(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \{0, \ldots, T-1\},\ D(t+1) + N(t+1) \leqslant D(t) + N(t).}$$

□

9782340-026636_001_784.indd 700 30/07/2018 09:53

c) Montrer que pour tout entier t tel que $0 \leqslant t \leqslant T$:

$$D(t) + N(t) \leqslant N(0)$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence que pour tout $t \in \{0, \ldots, T\}$, $\mathcal{P}(t)$ où $\mathcal{P}(t) : D(t)+N(t) \leqslant N(0)$.

- **Initialisation** :
  $D(0) + N(0) = 0 + N(0) = N(0) \leqslant N(0)$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : Soit $t \in \{0, \ldots, T-1\}$.
  Supposons $\mathcal{P}(t)$ et démontrons $\mathcal{P}(t+1)$ (*i.e.* $D(t+1) + N(t+1) \leqslant N(0)$)

$$\begin{array}{rcll} D(t+1) + N(t+1) & \leqslant & D(t) + N(t) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.b)}}\textit{)} \\ & \leqslant & N(0) & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \end{array}$$

  D'où $\mathcal{P}(t+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall t \in \{0, \ldots, T\},\ D(t) + N(t) \leqslant N(0).}$$

Commentaire

On pouvait sans doute obtenir la quasi-totalité des points alloués à cette question sans effectuer proprement la récurrence. Cela donnerait la rédaction suivante.
Soit $t \in \{0, \ldots, T-1\}$.

- D'après la question précédente : $D(t+1) + N(t+1) \leqslant D(t) + N(t)$.
- En appliquant cette inégalité à $t-1$, on obtient : $D(t) + N(t) \leqslant D(t-1) + N(t-1)$.
- Si on itère ce procédé, on en déduit :

$$D(t{+}1){+}N(t{+}1) \leqslant D(t){+}N(t) \leqslant D(t{-}1){+}N(t{-}1) \leqslant \cdots \leqslant D(1){+}N(1) \leqslant D(0){+}N(0)$$

- Or, d'après l'énoncé, $D(0) = N(0)$. D'où : $D(t) + N(t) \leqslant N(0)$.

$\square$

d) Montrer que pour tout entier t tel que $0 \leqslant t \leqslant T$, $D(t) \leqslant N(0)$.

Démonstration.
Soit $t \in \{0, \ldots, T\}$.
D'après la question précédente : $D(t) + N(t) \leqslant N(0)$.
Or $N(t)$ est un entier naturel. En particulier : $N(t) \geqslant 0$.
Ainsi : $D(t) \leqslant D(t) + N(t) \leqslant N(0)$.

$$\boxed{\forall t \in \{0, \ldots, T\},\ D(t) \leqslant N(0)}$$

$\square$

e) On suppose que $p(0) = 1$.

(i) Montrer que pour tout entier t tel que $1 \leqslant t \leqslant T$, $N(t) = 0$.

Démonstration.
Démontrons pas récurrence que pour tout $t \in \{1, \ldots, T\}$, $\mathcal{P}(t)$ où $\mathcal{P}(t) : N(t) = 0$.

- **Initialisation** :
  D'après la question ***1.b)*** : $N(1) = \alpha\,(1 - p(0))\,N(0) = \alpha\,(\cancel{1} - \cancel{1})\,N(0) = 0$.
  D'où $\mathcal{P}(1)$.

- **Hérédité** : Soit $t \in \{1, \dots, T-1\}$.
Supposons $\mathcal{P}(t)$ et démontrons $\mathcal{P}(t+1)$ (*i.e.* $N(t+1) = 0$).

$$\begin{aligned} N(t+1) &= \alpha\,(1-p(t))\,N(t) && \textit{(d'après la question \textbf{1.b)})} \\ &= \alpha\,(1-p(t)) \times 0 && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(t+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall t \in \{1, \dots, T\},\ N(t) = 0.}$$

Commentaire

Comme pour la question ***2.c)***, on pouvait sans doute obtenir la quasi-totalité des points alloués à cette question sans effectuer proprement la récurrence. Cela donnerait la rédaction suivante.
Soit $t \in \{0, \dots, T-1\}$.
- D'après la question ***1.b)*** : $N(t+1) = \alpha\,(1-p(t))\,N(t)$.
- En appliquant cette inégalité à $t-1$, on obtient : $N(t) = \alpha\,(1-p(t-1))\,N(t-1)$.
- Si on itère ce procédé, on en déduit :

$$\begin{aligned} N(t+1) &= \alpha\,(1-p(t))\,N(t) \\ &= \alpha^2\,(1-p(t))\,(1-p(t-1))\,N(t-1) \\ &= \cdots \\ &= \alpha^{t+1}\,(1-p(t))\,(1-p(t-1))\,\cdots\,(1-p(0))\,N(0) \end{aligned}$$

- Or, d'après l'énoncé, $p(0) = 1$. D'où : $1 - p(0) = 0$.
Ainsi : $N(t) = 0$.

□

(ii) Montrer que pour tout entier t tel que $1 \leqslant t \leqslant T$, $D(t) = N(0)$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que pour tout $t \in \{1, \dots, T\}$, $\mathcal{P}(t)$ où $\mathcal{P}(t) : D(t) = N(0)$.

- **Initialisation** :
D'après la question ***1.a)*** : $D(1) = D(0) + p(0)\,N(0) = 0 + 1 \times N(0) = N(0)$.
D'où $\mathcal{P}(1)$.
- **Hérédité** : Soit $t \in \{1, \dots, T-1\}$.
Supposons $\mathcal{P}(t)$ et démontrons $\mathcal{P}(t+1)$ (*i.e.* $D(t+1) = N(0)$).

$$\begin{aligned} D(t+1) &= D(t) + p(t)\,N(t) && \textit{(d'après la question \textbf{1.a)})} \\ &= D(t) + \cancel{p(t) \times 0} && \textit{(d'après la question \textbf{2.e)(ii)}, car } t \geqslant 1\textit{)} \\ &= N(0) && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(t+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall t \in \{1, \dots, T\},\ D(t) = N(0).}$$

□

(iii) En déduire que si $\alpha \leqslant 1$, la meilleure stratégie adaptée à la saison est que les $N(0)$ œufs produits à la date 0 entrent en diapause immédiatement.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, la stratégie optimale est la stratégie qui maximise le nombre d'œufs en diapause accumulés jusqu'à la date T (date de fin de saison).
- Si $\alpha \leqslant 1$, d'après la question ***2.d)*** : $D(t) \leqslant N(0)$.
- Or, d'après la question ***2.e)(ii)***, si $p(0) = 1$, alors $D(t) = N(0)$.
  Le nombre d'œufs en diapause à chaque instant $t \in \{1, \dots, T\}$ est donc maximal si $p(0) = 1$, c'est-à-dire si la proportion d'œufs entrant en diapause à l'instant 0 parmi les $N(0)$ vaut 1.

$$\boxed{\text{Autrement dit, la stratégie optimale est que les } N(0) \text{ œufs produits à la date 0 entrent en diapause immédiatement.}}$$

□

3. **On suppose désormais $\alpha > 1$ jusqu'à la fin du problème.**
On introduit maintenant τ une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, \dots, T\}$ qui représente la date où s'achève la saison. On suppose que pour tout $t \in \{1, 2, \dots, T\}$, $\mathbb{P}([\tau = t]) > 0$.

a) Montrer que pour tout $t \in \{1, 2, \dots, T\}$, $\mathbb{P}([\tau \geqslant t]) > 0$. On définit alors $H(t) = \mathbb{P}_{[\tau \geqslant t]}([\tau = t])$.

Démonstration.
Soit $t \in \{1, \dots, T\}$.
Tout d'abord : $[\tau = t] \subset [\tau \geqslant t]$. Donc : $\mathbb{P}([\tau = t]) \leqslant \mathbb{P}([\tau \geqslant t])$.
Or, d'après l'énoncé : $\mathbb{P}([\tau = t]) > 0$. D'où :

$$\mathbb{P}([\tau \geqslant t]) \ \geqslant \ \mathbb{P}([\tau = t]) \ > \ 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall t \in \{1, \dots, T\},\ \mathbb{P}([\tau \geqslant t]) > 0.}$$

□

b) Montrer que : $H(t) = \dfrac{\mathbb{P}([\tau = t])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant t])}$.

Démonstration.
Soit $t \in \{1, \dots, T\}$.

$$\begin{aligned} H(t) &= \mathbb{P}_{[\tau \geqslant t]}([\tau = t]) \\ &= \frac{\mathbb{P}([\tau \geqslant t] \cap [\tau = t])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant t])} \\ &= \frac{\mathbb{P}([\tau = t])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant t])} \qquad \textit{(car } [\tau = t] \subset [\tau \geqslant t]\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \{1, \dots, T\},\ H(t) = \frac{\mathbb{P}([\tau = t])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant t])}}$$

□

c) Montrer que : $H(T) = 1$.

Démonstration.
La v.a.r. τ est à valeurs dans $\{1, \dots, T\}$. En particulier, τ ne prend pas de valeurs strictement supérieures à T. Donc : $[\tau \geqslant T] = [\tau = T]$.

D'où : $H(t) \ = \ \dfrac{\mathbb{P}([\tau = T])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant T])} \ = \ \dfrac{\cancel{\mathbb{P}([\tau = T])}}{\cancel{\mathbb{P}([\tau = T])}} \ = \ 1.$

$$\boxed{\text{Ainsi : } H(T) = 1.}$$

□

d) Calculer $H(t)$ pour $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ si τ suit une loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, T\}$.

Démonstration.

- Comme $\tau \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, T \rrbracket)$, alors :
  - × $\tau(\Omega) = \llbracket 1, T \rrbracket$.
  - × $\forall t \in \llbracket 1, T \rrbracket$, $\mathbb{P}([\tau = t]) = \dfrac{1}{T}$.
- Soit $t \in \llbracket 1, T \rrbracket$.
$$[\tau \geqslant t] \; = \; \bigcup_{k=t}^{T} \; [\tau = k]$$
De plus, les événements $[\tau = t]$, …, $[\tau = T]$ sont incompatibles. Donc :
$$\mathbb{P}([\tau \geqslant t]) \; = \; \sum_{k=t}^{T} \mathbb{P}([\tau = k]) \; = \; \sum_{k=t}^{T} \frac{1}{T} \; = \; \frac{T - t + 1}{T}$$
- On en déduit :
$$H(t) \; = \; \frac{\mathbb{P}([\tau = t])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant t])} \; = \; \frac{\frac{1}{\cancel{T}}}{\frac{T-t+1}{\cancel{T}}} \; = \; \frac{1}{T - t + 1}$$

$$\boxed{\forall t \in \{1, \dots, T\},\, H(t) = \frac{1}{T - t + 1}}$$

□

e) (i) Soient T réels λ_1, λ_2, …, λ_T tels que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_T = 1$. Par convention, on pose $\lambda_0 = 0$. Soient $q_1 = \lambda_1$, $q_2 = \lambda_2 - \lambda_1$, …, $q_T = \lambda_T - \lambda_{T-1}$.
Montrer que $(q_i)_{1 \leqslant i \leqslant T}$ définit une loi de probabilité sur $\{1, 2, \dots, T\}$.

Démonstration.

- Soit $i \in \llbracket 1, T \rrbracket$.
D'après l'énoncé : $\lambda_i > \lambda_{i-1}$. Donc $q_i = \lambda_i - \lambda_{i-1} > 0$.
- De plus :
$$\sum_{i=1}^{T} q_i \; = \; \sum_{i=1}^{T} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) \; = \; \lambda_T - \lambda_0 \; = \; 1 - 0 \; = \; 1$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } (q_i)_{i \in \llbracket 1, T \rrbracket} \text{ définit une loi de probabilité.}}$$

□

(ii) Calculer $H(t)$ si τ suit la loi précédente.

Démonstration.

- Si la v.a.r. τ suit la loi $(q_i)_{i \in \llbracket 1, T \rrbracket}$, alors :
$$\forall t \in \llbracket 1, T \rrbracket,\; \mathbb{P}([\tau = t]) = q_t$$
- Soit $t \in \llbracket 1, T \rrbracket$. Avec le même raisonnement qu'en question ***3.d)*** :
$$\mathbb{P}([\tau \geqslant t]) \; = \; \sum_{i=t}^{T} \mathbb{P}([\tau = i]) \; = \; \sum_{i=t}^{T} q_i \; = \; \sum_{i=t}^{T} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) \; = \; \lambda_T - \lambda_{t-1}$$
- Ainsi : $H(t) \; = \; \dfrac{\mathbb{P}([\tau = t])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant t])} \; = \; \dfrac{q_t}{\lambda_T - \lambda_{t-1}} \; = \; \dfrac{\lambda_t - \lambda_{t-1}}{\lambda_T - \lambda_{t-1}}$.

$$\boxed{\forall t \in \llbracket 1, T \rrbracket,\, H(t) \; = \; \frac{q_t}{\lambda_T - \lambda_{t-1}} \; = \; \frac{\lambda_t - \lambda_{t-1}}{\lambda_T - \lambda_{t-1}}}$$

□

(iii) On suppose que $T \geqslant 2$ et de plus que pour tout entier n tel que $1 \leqslant n \leqslant T-1$, on a $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant \lambda_n - \lambda_{n-1}$. Montrer que $t \mapsto H(t)$ est croissante sur $\{1, 2, \ldots, T\}$.

Démonstration.
Soit $t \in [\![1, T-1]\!]$. D'après la question ***3.e)(ii)*** :

$$H(t+1) \geqslant H(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda_{t+1} - \lambda_t}{\lambda_T - \lambda_t} \geqslant \frac{\lambda_t - \lambda_{t-1}}{\lambda_T - \lambda_{t-1}}$$

- On sait déjà, d'après l'énoncé : $\lambda_{t+1} - \lambda_t \ \geqslant\ \lambda_t - \lambda_{t-1} \ \geqslant\ 0 \qquad (\star)$.
- De plus :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_T - \lambda_t} \geqslant \frac{1}{\lambda_T - \lambda_{t-1}} \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda_T - \lambda_t \leqslant \lambda_T - \lambda_{t-1} \qquad \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0, +\infty[\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda_{t-1} \leqslant \lambda_t \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie. Donc, par équivalence, la première également. On a donc :

$$\frac{1}{\lambda_T - \lambda_t} \ \geqslant\ \frac{1}{\lambda_T - \lambda_{t-1}} \ \geqslant\ 0$$

- On multiplie cette inégalité et l'inégalité $(\star)$ membre à membre (ce qui ne change pas leurs sens car les termes en présence sont positifs). On obtient alors :

$$\underbrace{\frac{\lambda_{t+1} - \lambda_t}{\lambda_T - \lambda_t}}_{= H(t+1)} \ \geqslant\ \underbrace{\frac{\lambda_t - \lambda_{t-1}}{\lambda_T - \lambda_{t-1}}}_{= H(t)}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } t \mapsto H(t) \text{ est croissante sur } \{1, \ldots, T\}.}$$

□

On suppose désormais que $t \mapsto H(t)$ est croissante. Le but est maintenant de trouver une stratégie adéquate pour maximiser la quantité $\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big)$. On va commencer par regarder un exemple simple.

4. On suppose ici que $T = 2$, que H est donnée par $H(1) = \dfrac{1}{2}$ et $H(2) = 1$ et que $\alpha = 4$.

a) (i) Déterminer $\mathbb{P}([\tau = 1])$.

Démonstration.

- D'après la question ***3.b)*** : $H(1) = \dfrac{\mathbb{P}([\tau = 1])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant 1])}$. Donc :

$$\mathbb{P}([\tau = 1]) \ = \ H(1)\, \mathbb{P}([\tau \geqslant 1]) \ = \ \frac{1}{2}\, \mathbb{P}([\tau \geqslant 1])$$

- De plus, comme $T = 2$: $\tau(\Omega) = \{1, 2\}$.
On en déduit : $[\tau \geqslant 1] = \Omega$. Donc :

$$\mathbb{P}([\tau \geqslant 1]) \ = \ \mathbb{P}(\Omega) \ = \ 1$$

- Ainsi : $\mathbb{P}([\tau = 1]) \ = \ \dfrac{1}{2}\, \mathbb{P}([\tau \geqslant 1]) \ = \ \dfrac{1}{2} \times 1 \ = \ \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\mathbb{P}([\tau = 1]) = \frac{1}{2}}$$

□

(ii) Quelle est la loi de τ ?

Démonstration.

- D'après les résultats de la question précédente : $\tau(\Omega) = \{1, 2\}$ et $\mathbb{P}([\tau = 1]) = \dfrac{1}{2}$.
- La famille $([\tau = 1], [\tau = 2])$ est un système complet d'événements. Donc :

$$\mathbb{P}([\tau = 2]) \;=\; 1 - \mathbb{P}([\tau = 1]) \;=\; 1 - \frac{1}{2} \;=\; \frac{1}{2}$$

- On reconnaît les caractéristiques d'une v.a.r. de loi uniforme sur $\{1, 2\}$.

$$\boxed{\tau \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 2 \rrbracket)}$$

□

b) Montrer que pour $D(1)$ et $N(1)$ donnés, $D(2)$ est maximum pour $p(1) = 1$.

Démonstration.

- D'après la question ***1.a)*** : $D(2) = D(1) + p(1)\, N(1)$.
  Donc l'entier $D(2)$ est maximal si $D(1) + p(1)\, N(1)$ l'est.
- Or, si $D(1)$ et $N(1)$ sont fixés, alors $D(1) + p(1)\, N(1)$ est maximal si $p(1)$ l'est.
- De plus : $0 < p(1) \leqslant 1$. Donc $p(1)$ est maximal lorsque $p(1) = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } D(2) \text{ est maximal lorsque } p(1) = 1.}$$

□

c) On suppose $p(1) = 1$. Montrer que :

$$\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau)\big) \;=\; \frac{1}{2}\, \ln\big((4 - 3\, p(0))\, N(0)\big) + \frac{1}{2}\, \ln\big(p(0)\, N(0)\big)$$

Démonstration.

- La v.a.r. τ est une v.a.r. finie, donc la v.a.r. $\ln(D(\tau))$ l'est aussi.

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } \ln(D(\tau)) \text{ admet une espérance.}}$$

- D'après le théorème de transfert :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big) & = & \ln(D(1))\, \mathbb{P}([\tau = 1]) + \ln(D(2))\, \mathbb{P}([\tau = 2]) \\ & = & \dfrac{1}{2}\, \ln(D(1)) + \dfrac{1}{2}\, \ln(D(2)) \end{array}$$

- Or : $D(1) \;=\; D(0) + p(0)\, N(0) \;=\; p(0)\, N(0)$.
- De plus :

$$\begin{array}{rcl} D(2) & = & D(1) + p(1)\, N(1) \;=\; D(1) + N(1) \\ & = & D(0) + p(0)\, N(0) + \alpha\, (1 - p(0))\, N(0) \\ & = & p(0)\, N(0) + 4(1 - p(0))\, N(0) \\ & = & (4 - 3\, p(0))\, N(0) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big) = \frac{1}{2}\, \ln\big(p(0)\, N(0)\big) + \frac{1}{2}\, \ln\big((4 - 3\, p(0))\, N(0)\big).}$$

□

d) Construire le tableau de variations sur $]0,1]$ de la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) \;=\; \frac{1}{2}\ln\big((4-3x)\,N(0)\big) + \frac{1}{2}\ln\big(N(0)\,x\big)$$

Démonstration.

- La fonction φ est dérivable sur $]0,1]$ en tant que composée et somme de fonctions dérivables sur $]0,1]$. En effet, $N(0)>0$, donc : $N(0)\,x \in\,]0, N(0)]$ et $(4-3x)\,N(0) \in [N(0), 4\,N(0)[$.
- Soit $x \in\,]0,1]$.

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{1}{2}\,\frac{-3\,\cancel{N(0)}}{(4-3x)\,\cancel{N(0)}} + \frac{1}{2}\,\frac{\cancel{N(0)}}{\cancel{N(0)}\,x}\\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4-3x}+\frac{1}{x}\right) \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{-3x+4-3x}{x\,(4-3x)}\\ &= \frac{1}{2}\,\frac{4-6x}{x(4-3x)} \;=\; \frac{2-3x}{x(4-3x)}\end{aligned}$$

- Comme $x\in\,]0,1]$: $x>0$ et $4-3x>0$. Donc :

$$\varphi'(x)\geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; 2-3x\geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; 2\geqslant 3x \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{3}\geqslant x$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{2}{3}$		1
Signe de $\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de φ	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi\big(\frac{2}{3}\big)$	$\searrow$	$\ln(N(0))$

Détaillons les éléments de ce tableau :

× Tout d'abord : $\lim\limits_{x\to 0} \ln\big((4-3x)\,N(0)\big) = \ln\big(4\,N(0)\big)$. De plus : $\lim\limits_{x\to 0} \ln\big(N(0)\,x\big) = -\infty$.
D'où : $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = -\infty$.

× Ensuite :

$$\varphi(1) \;=\; \frac{1}{2}\ln\big((4-3\times 1)\,N(0)\big) + \frac{1}{2}\ln(N(0)\times 1) \;=\; \frac{1}{2}\ln(N(0)) + \frac{1}{2}\ln(N(0)) \;=\; \ln(N(0))$$

Commentaire

On pouvait également essayer de simplifier l'expression de $\varphi\big(\frac{2}{2}\big)$:

$$\begin{aligned}\varphi\Big(\frac{2}{3}\Big) &= \frac{1}{2}\ln\left(\left(4-\cancel{3}\times\frac{2}{\cancel{3}}\right)N(0)\right)+\frac{1}{2}\ln\left(N(0)\times\frac{2}{3}\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln(2\,N(0))+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\,N(0)\right) \;=\; \frac{1}{2}\left(\ln(2\,N(0))+\ln\left(\frac{2}{3}\,N(0)\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\ln(2)+\ln(N(0))+\ln(2)-\ln(3)+\ln(N(0))\right)\\ &= \ln(N(0))+\ln(2)-\frac{1}{2}\ln(3) \;=\; \ln\left(\frac{2\,N(0)}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

□

e) Déterminer $p^*(0)$ qui maximise $\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big)$.

Démonstration.
D'après les questions ***4.c)*** et ***4.d)*** : $\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big) = \varphi(p(0))$.

Or, d'après la question ***4.d)***, la fonction φ admet un unique maximum en $\dfrac{2}{3}$.

$$\boxed{\text{Donc } \mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big) \text{ est maximal pour } p^*(0) = \frac{2}{3}.}$$

□

Partie II - Transformation du problème

Par convention, on conviendra que si h est une fonction numérique définie sur $\{0, 1, 2, \dots, T\}$, on a

$$\sum_{t=1}^{0} h(t) = 0$$

5. Montrer que pour tout $t \in \{0, 1, 2, \dots, T\}$, $D(t) + N(t) > 0$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que pour tout $t \in \{0, \dots, T\}$, $\mathcal{P}(t)$ où $\mathcal{P}(t) : D(t) + N(t) > 0$.

- **Initialisation** :
D'après l'énoncé, $N(0)$ est un entier naturel non nul. Donc : $D(0) + N(0) = 0 + N(0) > 0$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.

- **Hérédité** : Soit $t \in \{0, \dots, T-1\}$.
Supposons $\mathcal{P}(t)$ et démontrons $\mathcal{P}(t+1)$ (*i.e.* $D(t+1) + N(t+1) > 0$).

$$\begin{aligned} D(t+1) + N(t+1) &= D(t) + p(t)\, N(t) + \alpha\, (1 - p(t))\, N(t) \\ &= D(t) + \big(p(t) + \alpha(1 - p(t))\big)\, N(t) \\ &= D(t) + N(t) + \big(p(t) + \alpha(1 - p(t)) - 1\big) N(t) \\ &= D(t) + N(t) + (1 - p(t))(\alpha - 1) N(t) \end{aligned}$$

Or :

× par hypothèse de récurrence : $D(t) + N(t) > 0$,

× $1 - p(t) \geqslant 0$, car $0 < p(t) \leqslant 1$,

× $\alpha - 1 > 0$, car $\alpha > 1$,

× $N(t) \geqslant 0$, car $N(t)$ est un entier naturel.

On en déduit : $D(t+1) + N(t+1) > 0$.
D'où $\mathcal{P}(t+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall t \in \{0, \dots, T\},\ D(t) + N(t) > 0.}$$

□

On pose
$$X(t) \;=\; \frac{D(t)}{D(t)+N(t)}$$

6. Montrer que pour tout $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T-1\}$:
$$X(t+1) \;=\; \frac{p(t) + (1-p(t))\, X(t)}{p(t) + \alpha\,(1-p(t)) + (1-\alpha)(1-p(t))\, X(t)}$$

Démonstration.
Soit $t \in \{0, \ldots, T-1\}$.

- D'une part : $X(t+1) \;=\; \dfrac{D(t+1)}{D(t+1)+N(t+1)} \;=\; \dfrac{D(t) + p(t)\, N(t)}{D(t) + p(t)\, N(t) + \alpha\,(1-p(t))\, N(t)}$.
- D'autre part :

$$\begin{aligned}
&\frac{p(t) + (1-p(t))\, X(t)}{p(t) + \alpha\,(1-p(t)) + (1-\alpha)(1-p(t))X(t)} \\
=\;& \frac{p(t) + (1-p(t))\, \frac{D(t)}{D(t)+N(t)}}{p(t) + \alpha\,(1-p(t)) + (1-\alpha)(1-p(t))\frac{D(t)}{D(t)+N(t)}} \\
=\;& \frac{\frac{p(t)(D(t)+N(t)) + (1-p(t))D(t)}{\cancel{D(t)+N(t)}}}{\frac{(p(t)+\alpha(1-p(t))(D(t)+N(t)) + (1-\alpha)(1-p(t))D(t)}{\cancel{D(t)+N(t)}}} \\
=\;& \frac{\cancel{p(t)\, D(t)} + p(t)\, N(t) + D(t) - \cancel{p(t)\, D(t)}}{\big(p(t) + \alpha(1-p(t)) + (1-\alpha)(1-p(t))\big) D(t) + p(t)\, N(t) + \alpha(1-p(t))N(t)}
\end{aligned}$$

Or :
$$p(t) + \alpha(1-p(t)) + (1-\alpha)(1-p(t)) \;=\; p(t)\big(\cancel{1-\alpha} - \cancel{(1-\alpha)}\big) + \cancel{\alpha} + 1 - \cancel{\alpha} \;=\; 1$$

D'où :
$$\frac{p(t) + (1-p(t))\, X(t)}{p(t) + \alpha\,(1-p(t)) + (1-\alpha)(1-p(t))X(t)} \;=\; \frac{D(t) + p(t)\, N(t)}{D(t) + p(t)\, N(t) + \alpha\,(1-p(t))\, N(t)} \;=\; X(t+1)$$

$$\boxed{\forall t \in \{0, \ldots, T-1\},\; X(t+1) \;=\; \frac{p(t) + (1-p(t))\, X(t)}{p(t) + \alpha\,(1-p(t)) + (1-\alpha)(1-p(t))\, X(t)}}$$ □

7. Soit $\xi \in [0,1]$ fixé. Pour $x \in [0,1]$, on pose :
$$\psi_\xi(x) \;=\; \frac{x + (1-x)\xi}{x + \alpha\,(1-x) + (1-\alpha)(1-x)\xi}$$

a) Montrer que ψ_ξ est croissante sur $[0,1]$.

Démonstration.

- La fonction ψ_ξ est dérivable sur $[0,1]$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[0,1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
  Démontrons que le dénominateur ne s'annule effectivement pas.
  Soit $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
x + \alpha(1-x) + (1-\alpha)(1-x)\,\xi \;&=\; \big(1 - \alpha - (1-\alpha)\,\xi\big)\, x + \alpha + (1-\alpha)\,\xi \\
&=\; (1-\alpha)(1-\xi)\, x + \alpha + (1-\alpha)\,\xi
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} x+\alpha(1-x)+(1-\alpha)(1-x)\,\xi=0 \quad &\Leftrightarrow \quad (1-\alpha)(1-\xi)\,x+\alpha+(1-\alpha)\,\xi=0 \\ &\Leftrightarrow \quad (1-\alpha)(1-\xi)\,x=-\big(\alpha+(1-\alpha)\,\xi\big) \\ &\Leftrightarrow \quad x=-\frac{\alpha+(1-\alpha)\,\xi}{(1-\alpha)(1-\xi)}=\frac{\alpha+(1-\alpha)\,\xi}{(\alpha-1)(1-\xi)} \qquad \textit{(si } \xi \neq 1\textit{)} \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{\alpha+(1-\alpha)\,\xi}{(\alpha-1)(1-\xi)} \;=\; \frac{1+(\alpha-1)+(1-\alpha)\,\xi}{(\alpha-1)(1-\xi)} \;=\; \frac{1+(\alpha-1)(1-\xi)}{(\alpha-1)(1-\xi)} \;>\; 1$$

De plus $x \in [0,1]$. Donc $x \neq \dfrac{\alpha+(1-\alpha)\,\xi}{(\alpha-1)(1-\xi)}$.
Par équivalence, on en déduit bien : $x+\alpha(1-x)+(1-\alpha)(1-x)\,\xi \neq 0$, c'est-à-dire que le dénominateur de ψ_ξ ne s'annule pas sur $[0,1]$ si $\xi \neq 1$.
Soit $x \in [0,1]$. Si $\xi = 1$:

$$x+\alpha(1-x)+(1-\alpha)(1-x) \;=\; x+(1-x)\big(\cancel{\alpha}+(1-\cancel{\alpha})\big) \;=\; \cancel{x}+1-\cancel{x} \;=\; 1$$

Donc le dénominateur de ψ_1 est toujours non nul sur $[0,1]$.

Commentaire

On détaille ici précisément la dérivabilité de ψ_ξ. Les correcteurs n'en attendaient sans doute pas tant.

- Soit $x \in [0,1]$.

$$\psi_\xi(x) \;=\; \frac{x+(1-x)\xi}{x+\alpha\,(1-x)+(1-\alpha)(1-x)\xi} \;=\; \frac{(1-\xi)\,x+\xi}{(1-\alpha)(1-\xi)\,x+\alpha+(1-\alpha)\,\xi}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \psi_\xi'(x) \;&=\; \frac{(1-\xi)\big((1-\alpha)(1-\xi)\,x+\alpha+(1-\alpha)\,\xi\big)-\big((1-\xi)\,x+\xi\big)(1-\alpha)(1-\xi)}{\big((1-\alpha)(1-\xi)\,x+\alpha+(1-\alpha)\,\xi\big)^2} \\ &=\; \frac{\cancel{(1-\alpha)(1-\xi)^2\,x}+(1-\xi)\big(\alpha+(1-\alpha)\,\xi\big)-\cancel{(1-\alpha)(1-\xi)^2\,x}-(1-\alpha)(1-\xi)\,\xi}{\big((1-\alpha)(1-\xi)\,x+\alpha+(1-\alpha)\,\xi\big)^2} \\ &=\; \frac{(1-\xi)\big(\alpha+\cancel{(1-\alpha)\,\xi}-\cancel{(1-\alpha)\,\xi}\big)}{\big((1-\alpha)(1-\xi)\,x+\alpha+(1-\alpha)\,\xi\big)^2} \\ &=\; \frac{\alpha(1-\xi)}{\big((1-\alpha)(1-\xi)\,x+\alpha+(1-\alpha)\,\xi\big)^2} \end{aligned}$$

Or $\alpha > 1 > 0$ et $1-\xi \geqslant 0$ car $\xi \in [0,1]$. Donc : $\psi_\xi(x) \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \psi_\xi \text{ est croissante sur } [0,1].}$$

Commentaire

On pouvait aussi démontrer la croissance de ψ_ξ sur $[0,1]$ en utilisant la définition de la croissance.

- Soit $x \in [0,1]$. On rappelle :
$$\psi_\xi(x) \;=\; \frac{(1-\xi)\,x+\xi}{(1-\alpha)(1-\xi)\,x+\alpha+(1-\alpha)\,\xi}$$
- Comme $\xi \in [0,1]$, alors $1-\xi \geqslant 0$.
Donc la fonction affine $h_1 : x \mapsto (1-\xi)\,x+\xi$ est croissante sur $[0,1]$.
- Comme $\alpha > 1$, alors $1-\alpha < 0$.
Donc la fonction affine $h_2 : x \mapsto (1-\alpha)(1-\xi)\,x+\alpha+(1-\alpha)\,\xi$ est décroissante sur l'intervalle $[0,1]$.
On démontre de plus :
$$\forall x \in [0,1],\ \ h_2(x) = (1-\alpha)(1-\xi)\,x+\alpha+(1-\alpha)\,\xi > 0$$
(La démonstration est similaire à celle de « $(1-\alpha)(1-\xi)\,x+\alpha+(1-\alpha)\,\xi \neq 0$ »)
- Soit $(x,y) \in [0,1]^2$ tel que $x \leqslant y$. On obtient alors :
  - × par croissance de h_1 sur $[0,1]$: $h_1(x) \leqslant h_2(x)$.
  - × par décroissance de h_2 sur $[0,1]$: $h_2(x) \geqslant h_2(y)$.

  De plus : $h_2(x) \geqslant h_2(y) > 0$.
  Donc, par décroissance de la fonction inverse sur $[0,+\infty[$: $\dfrac{1}{h_2(x)} \leqslant \dfrac{1}{h_2(y)}$.
  On en déduit :
$$\begin{array}{ccc} \dfrac{h_1(x)}{h_2(x)} & \leqslant & \dfrac{h_1(y)}{h_2(y)} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \psi_\xi(x) & & \psi_\xi(y) \end{array}$$
  (On conserve le sens de l'inégalité tous les réels en présence sont positifs)
  Ainsi, on a bien démontré que la fonction ψ_ξ est croissante sur $[0,1]$.

□

b) Calculer $\psi_\xi(1)$.

Démonstration.
On applique la définition de ψ_ξ :
$$\psi_\xi(1) \;=\; \frac{1+(\cancel{1}-\cancel{1})\,\xi}{1+\alpha(\cancel{1}-\cancel{1})+(1-\alpha)(\cancel{1}-\cancel{1})\,\xi} \;=\; \frac{1}{1} \;=\; 1$$
$$\boxed{\psi_\xi(1)=1}$$
□

c) (i) Calculer $\psi_\xi(0)$. On pose désormais $A(\xi) \;=\; \psi_\xi(0)$

Démonstration.
On calcule :
$$\psi_\xi(0) \;=\; \frac{0+(1-0)\,\xi}{0+\alpha(1-0)+(1-\alpha)(1-0)\,\xi} \;=\; \frac{\xi}{\alpha+(1-\alpha)\,\xi}$$
$$\boxed{A(\xi) \;=\; \psi_\xi(0) \;=\; \frac{\xi}{\alpha+(1-\alpha)\,\xi}}$$
□

(ii) Montrer que pour tout $t \in \{0, 1, 2, \dots, T-1\}$, $A(X(t)) \leqslant X(t+1) \leqslant 1$.

Démonstration.
Soit $t \in \{0, \dots, T-1\}$.

- D'après la question ***6.*** : $X(t+1) = \psi_{X(t)}(p(t))$.
- D'après la question ***7.a)***, la fonction ψ_ξ est croissante sur $[0,1]$. Donc :

$$\forall x \in [0,1],\ \psi_\xi(0) \leqslant \psi_\xi(x) \leqslant \psi_\xi(1)$$

- Or d'après la question ***7.b)***, $\psi_\xi(1) = 1$, et d'après la question ***7.c)(i)***, $\psi_\xi(0) = A(\xi)$. D'où :

$$\forall x \in [0,1],\ A(\xi) \leqslant \psi_\xi(x) \leqslant 1$$

- L'encadrement précédent est valable pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $\xi \in [0,1]$.
  On l'applique alors à $x = p(t) \in \,]0,1]$ et $\xi = X(t) \in [0,1]$ (par définition de $X(t)$).
  On obtient alors :

$$A(X(t)) \ \leqslant\ X(t+1) \ \leqslant\ 1$$

$$\boxed{\forall t \in \{0, \dots, T-1\},\ A(X(t)) \leqslant X(t+1) \leqslant 1}$$

Commentaire

On pouvait aussi utiliser la définition de X pour montrer que :

$$\forall t \in [\![0, T-1]\!],\ X(t+1) \leqslant 1$$

En effet, soit $t \in [\![0, T-1]\!]$:
- × d'une part, $D(t+1) \geqslant 0$ et $N(t+1) \geqslant 0$. Donc $D(t+1) \leqslant D(t+1) + N(t+1)$.
- × d'autre part, $X(t+1) = \dfrac{D(t+1)}{D(t+1) + N(t+1)}$

Finalement, on a bien : $X(t+1) \leqslant 1$.

□

(iii) Montrer que $\xi \mapsto A(\xi)$ est croissante sur $[0,1]$.

Démonstration.

- On rappelle que, d'après la question ***7.c)(i)*** : $\forall \xi \in [0,1]$, $A(\xi) = \dfrac{\xi}{\alpha + (1-\alpha)\,\xi}$.
- La fonction A est dérivable sur $[0,1]$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[0,1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas (même raisonnement qu'en question ***7.a)***).
- Soit $\xi \in [0,1]$.

$$A'(\xi) \ = \ \frac{\alpha + \cancel{(1-\alpha)\,\xi} - \cancel{\xi(1-\alpha)}}{\big(\alpha + (1-\alpha)\,\xi\big)^2} \ > \ 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } A \text{ est strictement croissante sur } [0,1].}$$

□

8. Justifier l'égalité de variables aléatoires :

$$D(\tau) \ = \ \frac{D(\tau)}{D(\tau-1)} \cdot \frac{D(\tau-1)}{D(\tau-2)} \cdot \dots \cdot \frac{D(2)}{D(1)} \cdot \frac{D(1)}{N(0)} \cdot N(0)$$

Démonstration.

- Par récurrence : $\forall t \in \{1, \dots, T\}$, $D(t) > 0$.
  De plus : $N(0) > 0$.

- Par simplification de fractions :

$$\frac{D(\tau)}{\cancel{D(\tau-1)}} \, \frac{\cancel{D(\tau-1)}}{\cancel{D(\tau-2)}} \cdot \cdots \cdot \frac{\cancel{D(2)}}{\cancel{D(1)}} \cdot \frac{\cancel{D(1)}}{\cancel{N(0)}} \cdot \cancel{N(0)} \;=\; D(\tau)$$

$$\boxed{D(\tau) = \frac{D(\tau)}{D(\tau-1)} \cdot \frac{D(\tau-1)}{D(\tau-2)} \cdot \cdots \cdot \frac{D(2)}{D(1)} \cdot \frac{D(1)}{N(0)} \cdot N(0)}$$

Commentaire

On peut démontrer proprement la propriété « $\forall t \in \{1, \dots, T\}$, $D(t) > 0$ par récurrence.
Elle n'était sans doute pas nécessaire ici puisque l'intitulé de la question commence par un « justifier ».
Détaillons cependant cette récurrence ci-après.
Démontrons par récurrence que pour tout $t \in \{1, \dots, T\}$, $\mathcal{P}(t)$: $D(t) > 0$.

- **Initialisation** :
  D'après la question ***1.a)***, $D(1) = p(0)\, N(0)$.
  Or, d'après l'énoncé, $N(0) > 0$ et $p(0) > 0$. Donc $D(1) > 0$.
  D'où $\mathcal{P}(1)$.
- **Hérédité** : Soit $t \in \{1, \dots, T-1\}$.
  Supposons $\mathcal{P}(t)$ et démontrons $\mathcal{P}(t+1)$ (*i.e.* $D(t+1) > 0$).
  D'après la question ***1.a)*** : $D(t+1) = D(t) + p(t)\, N(t)$.
  Or :
  - $\times$ $D(t) > 0$ par hypothèse de récurrence,
  - $\times$ $p(t) > 0$ d'après l'énoncé,
  - $\times$ $N(t) \geqslant 0$ car $N(t)$ est un entier naturel.

  Ainsi, on a bien : $D(t+1) > 0$.
  D'où $\mathcal{P}(t+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall t \in \{1, \dots, T\}$, $D(t) > 0$.

□

On pose $\hat{R}(0) = \ln\left(\dfrac{D(1)}{N(0)}\right)$ et $\hat{R}(t) = \ln\left(\dfrac{D(t+1)}{D(t)}\right)$ pour $1 \leqslant t \leqslant T-1$.

9. a) Montrer que :

$$\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big) \;=\; \ln(N(0)) + \mathbb{E}\left(\hat{R}(0) + \sum_{t=1}^{\tau-1} \hat{R}(t)\right)$$

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\ln(D(\tau)) &= \ln\left(\frac{D(\tau)}{D(\tau-1)} \cdot \frac{D(\tau-1)}{D(\tau-2)} \cdot \cdots \cdot \frac{D(2)}{D(1)} \cdot \frac{D(1)}{N(0)} \cdot N(0)\right) \\
&= \ln\left(\frac{D(\tau)}{D(\tau-1)}\right) + \ln\left(\frac{D(\tau-1)}{D(\tau-2)}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{D(2)}{D(1)}\right) + \ln\left(\frac{D(1)}{N(0)}\right) + \ln(N(0)) \\
&= \sum_{t=1}^{\tau-1} \ln\left(\frac{D(t+1)}{D(t)}\right) + \hat{R}(0) + \ln(N(0)) \\
&= \sum_{t=1}^{\tau-1} \hat{R}(t) + \hat{R}(0) + \ln(N(0))
\end{aligned}$$

- La v.a.r. $\ln(D(\tau))$ admet une espérance en tant que variable aléatoire finie.
  Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big) \;=\; \mathbb{E}\left(\ln(N(0))) + \hat{R}(0) + \sum_{t=1}^{\tau-1} \hat{R}(t)\right) \;=\; \ln(N(0)) + \mathbb{E}\left(\hat{R}[0) + \sum_{t=1}^{\tau-1} \hat{R}(t)\right)$$

$$\boxed{\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big) \;=\; \ln(N(0)) + \mathbb{E}\left(\hat{R}(0) + \sum_{t=1}^{\tau-1} \hat{R}(t)\right)}$$

□

b) Montrer que : $\dfrac{D(1)}{N(0)} = \dfrac{\alpha\, X(1)}{1 + (\alpha - 1)\, X(1)}$.

Démonstration.
On calcule :

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha\, X(1)}{1+(\alpha-1)X(1)} &= \frac{\alpha\,\frac{D(1)}{D(1)+N(1)}}{1+(\alpha-1)\,\frac{D(1)}{D(1)+N(1)}} && \textit{(par définition de } X(1)\textit{)}\\
&= \frac{\frac{\alpha\, D(1)}{\cancel{D(1)+N(1)}}}{\frac{D(1)+N(1)+(\alpha-1)\,D(1)}{\cancel{D(1)+N(1)}}} = \frac{\alpha\, D(1)}{\cancel{D(1)} + N(1) + (\alpha - \cancel{1})\, D(1)}\\
&= \frac{\alpha\, D(1)}{N(1)+\alpha\, D(1)} = \frac{\cancel{\alpha}\, D(1)}{\cancel{\alpha}(1-p(0))\, N(0) + \cancel{\alpha}\, p(0)\, N(0)} && \textit{(d'après les questions } \textbf{\textit{1.a)}} \textit{ et } \textbf{\textit{1.b)}}\textit{)}\\
&= \frac{D(1)}{(1-\cancel{p(0)}+\cancel{p(0)})\, N(0)} = \frac{D(1)}{N(0)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{D(1)}{N(0)} \;=\; \frac{\alpha\, X(1)}{1+(\alpha-1)\, X(1)}}$$

□

c) Montrer que : $\dfrac{D(t+1)}{D(t)} = \dfrac{\alpha\, X(t+1)}{X(t)\big(1 + (\alpha - 1)\, X(t+1)\big)}$ pour $1 \leqslant t \leqslant T-1$.

Démonstration.
Soit $t \in \{1, \dots, T-1\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha\, X(t+1)}{X(t)\big(1+(\alpha-1)\, X(t+1)\big)} &= \frac{\alpha\,\frac{D(t+1)}{D(t+1)+N(t+1)}}{\frac{D(t)}{D(t)+N(t)}\left(1+(\alpha-1)\frac{D(t+1)}{D(t+1)+N(t+1)}\right)} && \textit{(par définition de } X(t+1)\textit{)}\\
&= \frac{\alpha\, D(t+1)(D(t)+N(t))}{D(t)\big(\cancel{D(t+1)} + N(t+1) + (\alpha-\cancel{1})\, D(t+1)\big)}\\
&= \frac{\alpha\, D(t+1)(D(t)+N(t))}{D(t)\big(\alpha\,(1-p(t))\, N(t) + \alpha(D(t)+p(t)\, N(t))\big)}\\
&= \frac{\cancel{\alpha}\, D(t+1)(D(t)+N(t))}{\cancel{\alpha}\, D(t)\big((1-\cancel{p(t)}+\cancel{p(t)})\, N(t) + D(t)\big)}\\
&= \frac{D(t+1)\,\cancel{(D(t)+N(t))}}{D(t)\cancel{(N(t)+D(t))}} = \frac{D(t+1)}{D(t)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \{1,\dots,T-1\},\ \frac{D(t+1)}{D(t)} = \frac{\alpha\, X(t+1)}{X(t)(1+(\alpha-1)\, X(t+1))}}$$

□

Pour x et y deux réels strictement positifs, on pose $u(x,y) = \ln(\alpha) - \ln(x) + \ln(y) - \ln(1+(\alpha-1)y)$.

d) Montrer que : $\hat{R}(0) = u(1, X(1))$.

Démonstration.
Par définition de la fonction u :

$$\begin{aligned} u(1, X(1)) &= \ln(\alpha) - \cancel{\ln(1)} + \ln(X(1)) - \ln\big(1 + (\alpha-1)\, X(1)\big) \\ &= \ln\left(\frac{\alpha\, X(1)}{1 + (\alpha-1)\, X(1)}\right) = \ln\left(\frac{D(1)}{N(0)}\right) \qquad \textit{(d'après la question \textbf{9.b)})} \\ &= \hat{R}(0) \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{R}(0) = u(1, X(1))}$$

□

e) Montrer que : $\hat{R}(t) = u(X(t), X(t+1))$ pour $1 \leqslant t \leqslant T-1$.

Démonstration.
Soit $t \in \{1, \ldots, T-1\}$.

$$\begin{aligned} u(X(t), X(t+1)) &= \ln(\alpha) - \ln(X(t)) + \ln(X(t+1)) - \ln\big(1 + (\alpha-1) X(t+1)\big) \\ &= \ln\left(\frac{\alpha\, X(t+1)}{X(t)\big(1 + (\alpha-1)\, X(t+1)\big)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{D(t+1)}{D(t)}\right) \qquad \textit{(d'après la question \textbf{9.c)})} \\ &= \hat{R}(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \{1, \ldots, T-1\},\ \hat{R}(t) = u(X(t), X(t+1))}$$

□

f) Conclure que :

$$\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big) = \ln(N(0)) + \mathbb{E}\left(u(1, X(1)) + \sum_{t=1}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)$$

Démonstration. On utilise les questions précédentes :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big) &= \ln(N(0)) + \mathbb{E}\left(\hat{R}(0) + \sum_{t=1}^{\tau-1} \hat{R}(t)\right) \qquad \textit{(d'après la question \textbf{9.a)})} \\ &= \ln(N(0)) + \mathbb{E}\left(u(1, X(1)) + \sum_{t=1}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right) \qquad \textit{(d'après les questions \textbf{9.d)} et \textbf{9.e)})} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big) = \ln(N(0)) + \mathbb{E}\left(u(1, X(1)) + \sum_{t=1}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)}$$

□

On voit donc que maximiser $\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big)$ revient à choisir, à chaque date t telle que $1 \leqslant t \leqslant \tau - 1$, la valeur $X(t+1)$ vérifiant la contrainte $A(X(t)) \leqslant X(t+1) \leqslant 1$ de façon à rendre maximale l'expression

$$\mathbb{E}\left(u(1, X(1)) + \sum_{t=1}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)$$

Partie III - Programmation dynamique

On expose dans cette partie les deux premières étapes de la méthode de la programmation dynamique pour résoudre le problème.

10. Soit B un événement. On note $\mathbb{1}_B$ la variable aléatoire telle que

$$\mathbb{1}_B(\omega) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Déterminer la loi de $\mathbb{1}_B$.

Démonstration.

- Par définition de $\mathbb{1}_B$, cette v.a.r. ne prend comme valeur que 0 ou 1.

$$\boxed{\mathbb{1}_B(\Omega) = \{0,1\}}$$

- Soit $\omega \in \Omega$.

$$\omega \in [\mathbb{1}_B = 1] \;\Leftrightarrow\; \mathbb{1}_B(\omega) = 1 \;\Leftrightarrow\; \omega \in B$$

D'où : $[\mathbb{1}_B = 1] = B$. Ainsi : $\mathbb{P}([\mathbb{1}_B = 1]) = \mathbb{P}(B)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{1}_B \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\mathbb{P}(B)\right).}$$

Commentaire

Les variables aléatoires indicatrices sont des variables aléatoires régulièrement manipulées dans les sujets de concours. Il faut savoir déterminer leur loi.
Il peut aussi être utile de savoir démontrer les propriétés :
× $\mathbb{1}_{B\cap C} = \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C$ (c'est l'objet de la question suivante),
× $\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_{\bar{B}} = 1$ (démontré en question ***10.c)(ii)***).

□

b) Soient B et C deux événements. Montrer l'égalité de variables aléatoires : $\mathbb{1}_{B\cap C} = \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C$.

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.

- Si $\omega \in B \cap C$, alors :
  × par définition de $\mathbb{1}_{B\cap C}$: $\mathbb{1}_{B\cap C}(\omega) = 1$,
  × comme $\omega \in B \cap C$, alors $\omega \in B$ `ET` $\omega \in C$.
  Donc, par définition de $\mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_C$: $\mathbb{1}_B(\omega) = 1$ `ET` $\mathbb{1}_C(\omega) = 1$.
  D'où : $\mathbb{1}_B(\omega) \times \mathbb{1}_C(\omega) = 1 \times 1 = 1$.

  On en déduit : $\mathbb{1}_{B\cap C}(\omega) = 1 = \mathbb{1}_B(\omega) \times \mathbb{1}_C(\omega)$.
- Si $\omega \in \overline{B \cap C} = \overline{B} \cup \overline{C}$, alors :
  × par définition de $\mathbb{1}_{B\cap C}$: $\mathbb{1}_{B\cap C}(\omega) = 0$.
  × comme $\omega \in \overline{B} \cup \overline{C}$, alors : $\omega \in \overline{B}$ `OU` $\omega \in \overline{C}$.
  Donc, par définition de $\mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_C$: $\mathbb{1}_B(\omega) = 0$ `OU` $\mathbb{1}_C(\omega) = 0$.
  D'où : $\mathbb{1}_B(\omega) \times \mathbb{1}_C(\omega) = 0$.

  On en déduit : $\mathbb{1}_{B\cap C}(\omega) = 0 = \mathbb{1}_B(\omega) \cdot \mathbb{1}_C(\omega)$.

Finalement : $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{1}_{B\cap C}(\omega) = \mathbb{1}_B(\omega) \times \mathbb{1}_C(\omega)$.

$$\boxed{\mathbb{1}_{B\cap C} = \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C}$$

Commentaire

L'énoncé original demandait de démontrer l'égalité « $\mathbb{1}_{B\cap C} = \mathbb{1}_B \cdot \mathbb{1}_C$ » plutôt que « $\mathbb{1}_{B\cap C} = \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C$ ».
Il s'agit ici d'un léger abus puisque :

× la notation $\cdot$ correspond à la multiplication par un scalaire (appelée multiplication externe). On écrit par exemple : $\lambda \cdot M$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, ou encore $\lambda \cdot X$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et une v.a.r. X.

× la notation $\times$ correspond à la multiplication entre deux objets mathématiques de même nature (appelée multiplication interne). On écrit par exemple : $M \times N$ pour deux matrices $(M, N) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$, ou encore $X \times Y$ pour deux v.a.r. X et Y.

Ici, $\mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_C$ sont toutes les deux des variables aléatoires. La notation standard pour la multiplication est donc $\mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C$.

□

c) On suppose que $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Si Y est une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs, on définit la **variable aléatoire** notée $\mathbb{E}_B(Y)$ par :

$$\mathbb{E}_B(Y) \;=\; \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\, \mathbb{E}(Y\, \mathbb{1}_B)\, \mathbb{1}_B + \frac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\, \mathbb{E}(Y\, \mathbb{1}_{\bar{B}})\, \mathbb{1}_{\bar{B}}$$

où $\bar{B}$ désigne l'événement contraire de B.

Commentaire

Explicitons l'objet $\mathbb{E}_B(Y)$.

- Tout d'abord, le réel $\dfrac{1}{\mathbb{P}(B)}\, \mathbb{E}(Y\, \mathbb{1}_B)$ peut s'interpréter comme la valeur moyenne de Y quand l'événement B est réalisé.
  De même, le réel $\dfrac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\, \mathbb{E}(Y\, \mathbb{1}_{\bar{B}})$ peut s'interpréter comme la valeur moyenne de Y quand l'événement $\bar{B}$ est réalisé.
- De plus, par définition des variables aléatoires indicatrices $\mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_{\bar{B}}$, on obtient :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \big(\mathbb{E}_B(Y)\big)(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathbb{P}(B)}\, \mathbb{E}(Y\, \mathbb{1}_B) & \text{si } \omega \in B \\[2ex] \dfrac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\, \mathbb{E}(Y\, \mathbb{1}_{\bar{B}}) & \text{si } \omega \in \bar{B} \end{cases}$$

  Cette présentation avec accolades permet de repérer facilement que la v.a.r. $\mathbb{E}_B(Y)$ ne peut prendre que deux valeurs (d'une part, la valeur moyenne de Y quand B est réalisé ; d'autre part, celle de Y quand $\bar{B}$ est réalisé).
  L'énoncé choisit ici une notation plus condensée avec des v.a.r. indicatrices. Cela permet une plus grande aisance dans les démonstrations des propriétés sur $\mathbb{E}_B(Y)$ (comme on peut le constater dans les questions suivantes).
- On insiste enfin sur le fait que l'objet $\mathbb{E}_B(Y)$ est bien une **variable aléatoire** (comme le précise l'énoncé), et non un réel (comme peut le laisser croire la notation $\mathbb{E}$).

(i) Soient Y et Z deux variables aléatoires prenant un nombre fini de valeurs. Montrer que :

$$\mathbb{E}_B(Y+Z) \; = \; \mathbb{E}_B(Y) + \mathbb{E}_B(Z)$$

Démonstration.

- Si Y et Z sont des v.a.r. finies, alors $Y+Z$ est aussi une v.a.r. finie.
  Donc $\mathbb{E}_B(Y+Z)$ est bien définie.
- Par définition de $\mathbb{E}_B(Y)$:

$$\begin{array}{cl} & \mathbb{E}_B(Y+Z) \\ = & \dfrac{1}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{E}\big((Y+Z)\,\mathbb{1}_B\big)\,\mathbb{1}_B + \dfrac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\,\mathbb{E}\big((Y+Z)\,\mathbb{1}_{\bar{B}}\big)\,\mathbb{1}_{\bar{B}} \\ = & \dfrac{1}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{E}\big(Y\,\mathbb{1}_B + Z\,\mathbb{1}_B\big)\,\mathbb{1}_B + \dfrac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\,\mathbb{E}\big(Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}} + Z\,\mathbb{1}_{\bar{B}}\big)\,\mathbb{1}_{\bar{B}} \\ = & \dfrac{1}{\mathbb{P}(B)}\big(\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B) + \mathbb{E}(Z\,\mathbb{1}_B)\big)\,\mathbb{1}_B + \dfrac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\big(\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}} + \mathbb{E}(Z\,\mathbb{1}_{\bar{B}})\big)\,\mathbb{1}_{\bar{B}} \\ = & \dfrac{1}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B)\,\mathbb{1}_B + \dfrac{1}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{E}(Z\,\mathbb{1}_B)\,\mathbb{1}_B + \dfrac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}})\,\mathbb{1}_{\bar{B}} + \dfrac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\,\mathbb{E}(Z\,\mathbb{1}_{\bar{B}})\,\mathbb{1}_{\bar{B}} \\ = & \mathbb{E}_B(Y) + \mathbb{E}_B(Z) \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}_B(Y+Z) = \mathbb{E}_B(Y) + \mathbb{E}_B(Z)}$$

□

(ii) Montrer que : $\mathbb{E}(\mathbb{E}_B(Y)) = \mathbb{E}(Y)$.

Démonstration.

- D'après la question ***10.a)***, les v.a.r. $\mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_{\bar{B}}$ sont des v.a.r. finies.
  Donc $\mathbb{E}_B(Y)$ est une v.a.r. finie en tant que combinaison linéaire de v.a.r. finies.

$$\boxed{\text{Ainsi la v.a.r. } \mathbb{E}_B(Y) \text{ admet une espérance.}}$$

- Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}\big(\mathbb{E}_B(Y)\big) & = & \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B)\,\mathbb{1}_B + \dfrac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}})\,\mathbb{1}_{\bar{B}}\right) \\ & = & \dfrac{1}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B)\,\mathbb{E}(\mathbb{1}_B) + \dfrac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}})\,\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\bar{B}}) \end{array}$$

  Or, d'après la question ***10.a)***, $\mathbb{1}_B \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\mathbb{P}(B)\right)$ et $\mathbb{1}_{\bar{B}} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\mathbb{P}(\bar{B})\right)$.
  On en déduit : $\mathbb{E}(\mathbb{1}_B) = \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\bar{B}}) = \mathbb{P}(\bar{B})$. D'où :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}\big(\mathbb{E}_b(Y)\big) & = & \dfrac{1}{\cancel{\mathbb{P}(B)}}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B)\,\cancel{\mathbb{P}(B)} + \dfrac{1}{\cancel{\mathbb{P}(\bar{B})}}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}})\,\cancel{\mathbb{P}(\bar{B})} \\ & = & \mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B) + \mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}}) \; = \; \mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B + Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}}) \\ & = & \mathbb{E}\big(Y(\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_{\bar{B}})\big) \end{array}$$

- Montrons la relation : $\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_{\bar{B}} = 1$.
  Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent :

  × si $\omega \in B$, alors : $\mathbb{1}_B(\omega) = 1$.
    Comme de plus $B \cap \bar{B} = \varnothing$, alors $\omega \notin \bar{B}$. Donc : $\mathbb{1}_{\bar{B}}(\omega) = 0$.
    D'où : $\mathbb{1}_B(\omega) + \mathbb{1}_{\bar{B}}(\omega) = 1 + 0 = 1$.

× si $\omega \in \bar{B}$, alors : $\mathbb{1}_{\bar{B}}(\omega) = 1$.
Avec le même raisonnement que précédemment : $\mathbb{1}_B(\omega) = 0$.
D'où : $\mathbb{1}_B(\omega) + \mathbb{1}_{\bar{B}}(\omega) = 0 + 1 = 1$.

Finalement : $\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{1}_B(\omega) + \mathbb{1}_{\bar{B}}(\omega) = 1$. Donc : $\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_{\bar{B}} = 1$ (où 1 désigne la variable aléatoire certaine égalé à 1).

- On en déduit : $\mathbb{E}\big(\mathbb{E}_B(Y)\big) = \mathbb{E}\big(Y(\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_{\bar{B}})\big) = \mathbb{E}(Y \times 1) = \mathbb{E}(Y)$.

$$\boxed{\mathbb{E}\big(\mathbb{E}_B(Y)\big) = \mathbb{E}(Y)}$$

□

(iii) Montrer que : $\mathbb{E}_B(Y\,\mathbb{1}_B) = \mathbb{E}_B(Y)\,\mathbb{1}_B$.

Démonstration.

- D'une part :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_B(Y\,\mathbb{1}_B) &= \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{E}\big((Y\,\mathbb{1}_B)\,\mathbb{1}_B\big)\,\mathbb{1}_B + \frac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\,\mathbb{E}\big((Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}})\,\mathbb{1}_{\bar{B}}\big)\mathbb{1}_{\bar{B}} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_{B\cap B})\,\mathbb{1}_B + \frac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_{B\cap\bar{B}})\,\mathbb{1}_{\bar{B}} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{10.b)}}\textit{)} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B)\,\mathbb{1}_B + \frac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_\varnothing)\,\mathbb{1}_{\bar{B}}
\end{aligned}$$

Or, par définition d'une variable aléatoire indicatrice : $\mathbb{1}_\varnothing = 0$ (où 0 désigne la variable aléatoire certaine égale à 0).
Ainsi : $\mathbb{E}_B(Y\,\mathbb{1}_B) = \dfrac{1}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B)\,\mathbb{1}_B$.

- D'autre part :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_B(Y) &= \left(\frac{1}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B)\,\mathbb{1}_B + \frac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}})\,\mathbb{1}_{\bar{B}}\right)\mathbb{1}_B \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B)\,\mathbb{1}_{B\cap B} + \frac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}})\,\mathbb{1}_{B\cap\bar{B}} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B)\,\mathbb{1}_B + \cancel{\frac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}})\,\mathbb{1}_\varnothing} \\
&= \mathbb{E}_B(Y\,\mathbb{1}_B)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}_B(Y\,\mathbb{1}_B) = \mathbb{E}_B(Y)\,\mathbb{1}_B}$$

□

11. On suppose dans cette question que, quand l'événement $[\tau = T]$ est réalisé, $X(1), \ldots, X(T-1)$ sont connus. Comme on l'a vu précédemment, si on pose $x = X(T-1)$, le meilleur choix à faire est alors de prendre pour $X(T)$ la valeur $y^*(x, T-1) \in [A(x), 1]$ qui maximise $u(x,y)$.

a) Montrer que : $y^*(x, T-1) = 1$.

Démonstration.

- On cherche à maximiser la fonction $f : y \mapsto u(x,y)$ sur $]0,1]$.
La fonction f est dérivable sur $]0,1]$ en tant que composée et somme de fonctions dérivables sur $]0,1]$. En effet : $1 + (\alpha - 1)y \in\ ]1, \alpha]$.

- Soit $y \in \,]0,1]$.

$$f'(y) \;=\; \frac{1}{y} - \frac{\alpha-1}{1+(\alpha-1)y} \;=\; \frac{1+\cancel{(\alpha-1)y}-\cancel{(\alpha-1)y}}{y(1+(\alpha-1)y)} \;=\; \frac{1}{y(1+(\alpha-1)y)}$$

Or $\alpha - 1 > 0$, car $\alpha > 1$. De plus $y > 0$. Donc $f'(y) > 0$.
On obtient le tableau de variations suivant :

y	0 $\qquad\qquad$ 1
Signe de $f'(y)$	$+$
Variations de f	$-\infty \nearrow f(1)$

Donc f atteint son unique maximum pour $y = 1$.

$$\boxed{\text{Autrement dit : } y^*(x, T-1) = 1.}$$

Commentaire

L'énoncé de cette question ***11.*** comporte une confusion entre les objets « réel » et « fonction ». En effet, l'énoncé parle de « maximiser $u(x,y)$ ». Cependant $u(x,y)$ est un réel et « maximiser un réel » n'a pas de sens. Il fallait ici comprendre « maximiser la fonction $y \mapsto u(x,y)$ ». □

b) Montrer que : $u(x,1) = -\ln(x)$.

Démonstration.
On calcule :

$$\begin{aligned} u(x,1) &= \ln(\alpha) - \ln(x) + \cancel{\ln(1)} - \ln(1+(\alpha-1)\times 1) \\ &= \ln(\alpha) - \ln(x) - \ln(\cancel{1} + \alpha - \cancel{1}) \\ &= \cancel{\ln(\alpha)} - \ln(x) - \cancel{\ln(\alpha)} \\ &= -\ln(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{u(x,1) = -\ln(x)}$$

□

12. On suppose maintenant que, quand l'événement $[\tau \geqslant T-1]$ est réalisé, les réels $X(1)$, …, $X(T-2)$ sont connus.

La stratégie reste donc de choisir $X(T-1)$ et $X(T)$ de façon à maximiser $\mathbb{E}\left(\sum\limits_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)$.

La variable aléatoire τ prend les deux valeurs $T-1$ et T avec les probabilités respectives

$$\mathbb{P}_{[\tau \geqslant T-1]}([\tau = T-1]) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{[\tau \geqslant T-1]}([\tau = T])$$

a) Montrer que :

$$\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} \sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1)) \;=\; \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}\, u(X(T-2), X(T-1)) + \mathbb{1}_{[\tau = T]}\, u(X(T-1), X(T))$$

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.

- Soit $\omega \in [\tau \geqslant T-1]$, alors $\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}(\omega) = 1$.
  Comme la v.a.r. τ est à valeurs dans $\{1, \dots, T\}$, deux cas se présentent :
  - × soit $\omega \in [\tau = T-1]$. Dans ce cas : $\mathbb{1}_{[\tau = T]}(\omega) = 0$.
    De plus : $\omega \in [\tau = T-1] \;\Leftrightarrow\; \tau(\omega) = T-1$. Donc, d'une part :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau(\omega)-1} u(X(t), X(t+1))\right) \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}(\omega) &= \left(\sum_{t=T-2}^{(T-1)-1} u(X(t), X(t+1))\right) \times 1 \\ &= \sum_{t=T-2}^{T-2} u(X(t), X(t+1)) \\ &= u(X(T-2), X(T-1))\end{aligned}$$

    D'autre part :

$$\begin{aligned}& u(X(T-2), X(T-1))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}(\omega) + u(X(T-1), X(T))\, \mathbb{1}_{[\tau = T]}(\omega) \\ = \;& u(X(T-2), X(T-1)) \times 1 + \cancel{u(X(T-1), X(T)) \times 0} \\ = \;& u(X(T-2), X(T-1))\end{aligned}$$

    On en déduit :

$$\begin{aligned}& \left(\sum_{t=T-2}^{\tau(\omega)-1} u(X(t), X(t+1))\right) \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}(\omega) \\ = \;& u(X(T-2), X(T-1))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}(\omega) + u(X(T-1), X(T))\, \mathbb{1}_{[\tau = T]}(\omega)\end{aligned}$$

  - × soit $\omega \in [\tau = T]$. Dans ce cas : $\mathbb{1}_{[\tau = T]}(\omega) = 1$.
    De plus : $\omega \in [\tau = T] \;\Leftrightarrow\; \tau(\omega) = T$. Donc, d'une part :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau(\omega)-1} u(X(t), X(t+1))\right) \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}(\omega) &= \left(\sum_{t=T-2}^{T-1} u(X(t), X(t+1))\right) \times 1 \\ &= u(X(T-2), X(T-1)) + u(X(T-1), X(T))\end{aligned}$$

    D'autre part :

$$\begin{aligned}& u(X(T-2), X(T-1))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}(\omega) + u(X(T-1), X(T))\, \mathbb{1}_{[\tau = T]}(\omega) \\ = \;& u(X(T-2), X(T-1)) \times 1 + u(X(T-1), X(T)) \times 1 \\ = \;& u(X(T-2), X(T-1)) + u(X(T-1), X(T))\end{aligned}$$

    On en déduit :

$$\begin{aligned}& \left(\sum_{t=T-2}^{\tau(\omega)-1} u(X(t), X(t+1))\right) \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}(\omega) \\ = \;& u(X(T-2), X(T-1))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}(\omega) + u(X(T-1), X(T))\, \mathbb{1}_{[\tau = T]}(\omega)\end{aligned}$$

- Soit $\omega \in \overline{[\tau \geqslant T-1]}$. Comme la v.a.r. τ est à valeurs entières :
$$\overline{[\tau \geqslant T-1]} \ = \ [\tau < T-1] \ = \ [\tau \leqslant T-2]$$
Donc $\omega \notin [\tau \geqslant T-1]$ et $\omega \notin [\tau = T]$. Ainsi : $\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}(\omega) = 0$ et $\mathbb{1}_{[\tau = T]}(\omega) = 0$.
On a donc bien :
$$\left(\sum_{t=T-2}^{\tau(\omega)-1} u(X(t), X(t+1)) \right) \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}(\omega)$$
$$\shortparallel$$
$$0$$
$$\shortparallel$$
$$u(X(T-2), X(T-1))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}(\omega) + u(X(T-1), X(T))\, \mathbb{1}_{[\tau = T]}(\omega)$$

Finalement, pour tout $\omega \in \Omega$:
$$\left(\sum_{t=T-2}^{\tau(\omega)-1} u(X(t), X(t+1)) \right) \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}(\omega)$$
$$= \ u(X(T-2), X(T-1))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}(\omega) + u(X(T-1), X(T))\, \mathbb{1}_{[\tau = T]}(\omega)$$

$$\boxed{\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} \sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1)) \ = \ \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}\, u(X(T-2), X(T-1)) + \mathbb{1}_{[\tau = T]}\, u(X(T-1), X(T)).}$$

Commentaire

Avec un peu plus d'aisance sur les variables aléatoires indicatrices, on pouvait utiliser le résultat suivant :
$$\text{pour tous événements } B \text{ et } C \text{ incompatibles, } \mathbb{1}_{B \cup C} = \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C \qquad (\star)$$

On obtient la rédaction qui suit.

– Tout d'abord : $[\tau \geqslant T-1] = [\tau = T-1] \cup [\tau = T]$.
De plus, ces deux événements sont incompatibles. Donc : $\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} = \mathbb{1}_{[\tau = T-1]} + \mathbb{1}_{[\tau = T]}$.
– On en déduit les égalités entre variables aléatoires suivantes :
$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1)) \right) \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} \\
= \ & \left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1)) \right) \left(\mathbb{1}_{[\tau = T-1]} + \mathbb{1}_{[\tau = T]} \right) \\
= \ & \left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1)) \right) \mathbb{1}_{[\tau = T-1]} + \left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1)) \right) \mathbb{1}_{[\tau = T]} \\
= \ & \left(\sum_{t=T-2}^{(T-1)-1} u(X(t), X(t+1)) \right) \mathbb{1}_{[\tau = T-1]} + \left(\sum_{t=T-2}^{T-1} u(X(t), X(t+1)) \right) \mathbb{1}_{[\tau = T]} \\
= \ & u(X(T-2), X(T-1))\, \mathbb{1}_{[\tau = T-1]} + \left(u(X(T-2), X(T-1)) + u(X(T-1), X(T)) \right) \mathbb{1}_{[\tau = T]} \\
= \ & u(X(T-2), X(T-1)) \left(\mathbb{1}_{[\tau = T-1]} + \mathbb{1}_{[\tau = T]} \right) + u(X(T-1), X(T))\, \mathbb{1}_{[\tau = T]} \\
= \ & u(X(T-2), X(T-1))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} + u(X(T-1), X(T))\, \mathbb{1}_{[\tau = T]}
\end{aligned}$$

Commentaire

Démontrons maintenant le résultat ($\star$).
Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent :

× si $\omega \in B \cup C$, alors $\mathbb{1}_{B\cup C}(\omega) = 1$.
De plus, si $\omega \in B \cup C$, alors $\omega \in B$ `OU` $\omega \in C$.
 – Si $\omega \in B$, alors $\omega \notin C$ car les événements B et C sont incompatibles.
 D'où $\mathbb{1}_B(\omega) = 1$ et $\mathbb{1}_C(\omega) = 0$.
 Ainsi : $\mathbb{1}_B(\omega) + \mathbb{1}_C(\omega) = 1 + 0 = 1$.
 – Si $\omega \in C$, alors $\omega \notin B$ car les événements B et C sont incompatibles.
 D'où $\mathbb{1}_B(\omega) = 0$ et $\mathbb{1}_C(\omega) = 1$.
 Ainsi : $\mathbb{1}_B(\omega) + \mathbb{1}_C(\omega) = 0 + 1 = 1$.
Finalement, si $\omega \in B \cup C$, alors : $\mathbb{1}_{B\cup C}(\omega) = 1 = \mathbb{1}_B(\omega) + \mathbb{1}_C(\omega)$.

× si $\omega \in \overline{B \cup C} = \bar{B} \cap \bar{C}$, alors $\mathbb{1}_{B\cup C}(\omega) = 0$.
De plus, si $\omega \in \bar{B} \cap \bar{C}$, alors $\omega \in \bar{B}$ `ET` $\omega \in \bar{C}$. Donc : $\mathbb{1}_B(\omega) = 0$ `ET` $\mathbb{1}_C(\omega) = 0$.
D'où : $\mathbb{1}_{B\cup C}(\omega) = 0 = \mathbb{1}_B(\omega) + \mathbb{1}_C(\omega)$.

Finalement : $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{1}_{B\cup C}(\omega) = \mathbb{1}_B(\omega) + \mathbb{1}_C(\omega)$.
Ainsi : $\mathbb{1}_{B\cup C} = \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C$.

□

b) Montrer que :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}\ \mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right) \\
= \quad & \mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\Big(u(X(T-2), X(T-1)) \cdot \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} + u(X(T-1), X(T)) \cdot \mathbb{1}_{[\tau = T]}\Big)
\end{aligned}$$

Démonstration.
On note $Y = \sum\limits_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))$ et $B = [\tau \geqslant T-1]$.
D'après la question ***10.c)(iii)*** :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)\ \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} \quad &= \quad \mathbb{E}_B(Y)\, \mathbb{1}_B \ = \ \mathbb{E}_B(Y\, \mathbb{1}_B) \ = \ \mathbb{E}_B(\mathbb{1}_B\ Y) \\
&= \quad \mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\left(\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} \sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la question ***12.a)*** :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)\ \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} \\
= \quad & \mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\Big(u(X(T-2), X(T-1)) \cdot \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} + u(X(T-1), X(T)) \cdot \mathbb{1}_{[\tau = T]}\Big)
\end{aligned}.$$

□

c) Montrer que :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{[\tau\geqslant T-1]}\left(\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\, u(X(T-2),X(T-1)) + \mathbb{1}_{[\tau=T]}\, u(X(T-1),X(T))\right) \\ = \ & u(X(T-2),X(T-1))\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} + \frac{\mathbb{P}([\tau=T])}{\mathbb{P}([\tau\geqslant T-1])}\, u(X(T-1),X(T))\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} \end{aligned}$$

Démonstration.

- D'après la question ***10.c)(i)*** :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{[\tau\geqslant T-1]}\left(u(X(T-2),X(T-1))\ \mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} + u(X(T-1),X(T))\,\mathbb{1}_{[\tau=T]}\right) \\ = \ & \mathbb{E}_{[\tau\geqslant T-1]}\left(u(X(T-2),X(T-1))\ \mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\right) + \mathbb{E}_{[\tau\geqslant T-1]}\left(u(X(T-1),X(T))\,\mathbb{1}_{[\tau=T]}\right) \end{aligned}$$

- Déterminons $\mathbb{E}_{[\tau\geqslant T-1]}\left(u(X(T-2),X(T-1))\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\right)$.
  Tout d'abord, d'après la question ***10.c)(iii)*** :

$$\mathbb{E}_{[\tau\geqslant T-1]}\left(u(X(T-2),X(T-1))\ \mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\right) \ = \ \mathbb{E}_{[\tau\geqslant T-1]}\big(u(X(T-2),X(T-1))\big)\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}$$

  Notons que $\lambda = u(X(T-2),X(T-1))$ est un réel (et non une v.a.r.) et rappelons que $\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\mathbb{P}([\tau\geqslant T-1])\right)$. On en déduit, d'après la définition donnée au ***10.c)*** :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{[\tau\geqslant T-1]}\big(u(X(T-2),X(T-1))\big) \ = \ \mathbb{E}_{[\tau\geqslant T-1]}(\lambda) \\ = \ & \frac{1}{\mathbb{P}([\tau\geqslant T-1])}\,\mathbb{E}\big(\lambda\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\big)\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} + \frac{1}{\mathbb{P}(\overline{[\tau\geqslant T-1]})}\,\mathbb{E}\big(\lambda\,\mathbb{1}_{\overline{[\tau\geqslant T-1]}}\big)\,\mathbb{1}_{\overline{[\tau\geqslant T-1]}} \\ = \ & \frac{\lambda}{\mathbb{P}([\tau\geqslant T-1])}\,\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\big)\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} + \frac{\lambda}{\mathbb{P}(\overline{[\tau\geqslant T-1]})}\,\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\overline{[\tau\geqslant T-1]}}\big)\,\mathbb{1}_{\overline{[\tau\geqslant T-1]}} \\ = \ & \frac{\lambda}{\cancel{\mathbb{P}([\tau\geqslant T-1])}}\,\cancel{\mathbb{P}([\tau\geqslant T-1])}\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} + \frac{\lambda}{\cancel{\mathbb{P}(\overline{[\tau\geqslant T-1]})}}\,\cancel{\mathbb{P}(\overline{[\tau\geqslant T-1]})}\,\mathbb{1}_{\overline{[\tau\geqslant T-1]}} \\ = \ & \lambda\left(\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} + \mathbb{1}_{\overline{[\tau\geqslant T-1]}}\right) \ = \ \lambda\times 1 \\ = \ & u(X(T-2),X(T-1)) \end{aligned}$$

  D'où :

$$\mathbb{E}_{[\tau\geqslant T-1]}\left(u(X(T-2),X(T-1))\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\right) \ = \ u(X(T-2),X(T-1))\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}$$

- Déterminons $\mathbb{E}_{[\tau\geqslant T-1]}\left(u(X(T-1),X(T))\,\mathbb{1}_{[\tau=T]}\right)$.
  On note $\mu = u(X(T-1),X(T)) \in \mathbb{R}$.
  Par définition de $\mathbb{E}_{[\tau\geqslant T-1]}\left(\mu\,\mathbb{1}_{[\tau=T]}\right)$ et toujours d'après ***10.c)*** :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{[\tau\geqslant T-1]}\left(\mu\,\mathbb{1}_{[\tau=T]}\right) \\ = \ & \frac{1}{\mathbb{P}([\tau\geqslant T-1])}\,\mathbb{E}\left(\mu\,\mathbb{1}_{[\tau=T]}\times\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\right)\ \mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} + \frac{1}{\mathbb{P}(\overline{[\tau\geqslant T-1]})}\,\mathbb{E}\left(\mu\,\mathbb{1}_{[\tau=T]}\times\mathbb{1}_{\overline{[\tau\geqslant T-1]}}\right)\ \mathbb{1}_{\overline{[\tau\geqslant T-1]}} \end{aligned}$$

  Or, d'après la question ***10.b)*** :
  × $\mathbb{1}_{[\tau=T]}\times\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} \ = \ \mathbb{1}_{[\tau=T]\cap[\tau\geqslant T-1]} \ = \ \mathbb{1}_{[\tau=T]}$ car $[\tau=T]\subset[\tau\geqslant T-1]$.
  × $\mathbb{1}_{[\tau=T]}\times\mathbb{1}_{\overline{[\tau\geqslant T-1]}} \ = \ \mathbb{1}_{[\tau=T]}\times\mathbb{1}_{[\tau<T-1]} \ = \ \mathbb{1}_{[\tau=T]\cap[\tau<T-1]} \ = \ \mathbb{1}_{\varnothing} \ = \ 0.$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\left(\mu\, \mathbb{1}_{[\tau=T]}\right) &= \frac{1}{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])}\, \mathbb{E}\left(\mu\, \mathbb{1}_{[\tau=T]}\right)\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} \\
&= \frac{\mu}{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])}\, \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[\tau=T]}\right)\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} \\
&= \frac{\mu}{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])}\, \mathbb{P}([\tau = T])\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} \\
&= \frac{\mathbb{P}([\tau = T])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])}\, u(X(T-1), X(T))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}
\end{aligned}$$

On en déduit : $\mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\left(\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}\, u(X(T-2), X(T-1)) + \mathbb{1}_{[\tau=T]}\, u(X(T-1), X(T))\right)$.

$$= u(X(T-2), X(T-1))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} + \frac{\mathbb{P}([\tau = T])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])}\, u(X(T-1), X(T))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}$$

□

d) On suppose que $X(T-1)$ est donné.

(i) Montrer que le meilleur choix pour $X(T)$ est 1.

Démonstration.
Comme $[\tau \geqslant T-1]$ est réalisé, $X(1)$, ..., $X(T-2)$ sont connus.
On suppose de plus ici que $X(T-1)$ est connu.
D'après la question ***11.***, si $X(1)$, ..., $X(T-1)$ sont connus, alors le meilleur choix pour $X(T)$ est $y^*(X(T-1), T-1)$.

D'après la question ***11.a)***, on en déduit que le meilleur choix pour $X(T)$ est 1.

Commentaire

Ce résultat est parfaitement logique dans le contexte de la diapause. En effet, on rappelle que l'objectif est de maximiser le nombre d'œufs en diapause accumulés à la fin de la saison.
Si la fin de la saison a lieu à l'instant T, alors tous les organismes **sauf ceux en diapause** meurent après cet instant T. La meilleure stratégie à cet instant est donc que tous les œufs pondus à l'instant $(T-1)$ entrent en diapause pour ne pas mourir.
Autrement dit la proportion d'œufs entrant en diapause à l'instant T doit être égale à 1, ce qui se traduit par : $X(T) = 1$.

□

(ii) Montrer que pour un tel choix $u(X(T-1), X(T)) = -\ln(X(T-1))$.

Démonstration.
Si $X(T) = 1$, alors, d'après la question ***11.b)*** :

$$u(X(T-1), X(T)) = u(X(T-1), 1) = -\ln(X(T-1))$$

Pour $X(T) = 1$, $u(X(T-1), X(T)) = -\ln(X(T-1))$

□

e) Montrer que : $\mathbb{P}_{[\tau \geqslant T-1]}([\tau = T]) = 1 - H(T-1)$.

Démonstration.

- D'une part, comme $[\tau = T] \subset [\tau \geqslant T-1]$:

$$\mathbb{P}_{[\tau \geqslant T-1]}([\tau = T]) = \frac{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1] \cap [\tau = T])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])} = \frac{\mathbb{P}([\tau = T])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])}$$

- D'autre part, par définition de H (question ***3.a)***) :

$$\begin{aligned} 1 - H(T-1) &= 1 - \mathbb{P}_{[\tau \geqslant T-1]}([\tau = T-1]) = \mathbb{P}_{[\tau \geqslant T-1]}(\overline{[\tau = T-1]}) \\ &= \mathbb{P}_{[\tau \geqslant T-1]}([\tau \neq T-1]) = \frac{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1] \cap [\tau \neq T-1])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])} \\ &= \frac{\mathbb{P}([\tau = T])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}_{[\tau \geqslant T-1]}([\tau = T]) = 1 - H(T-1).}$$

□

On veut maintenant choisir la stratégie optimale à la date $T-2$.

f) Montrer qu'on doit choisir pour $X(T-1)$ la valeur $y^*(X(T-2), T-2) \in [A(X(T-2)), 1]$ de telle sorte que

$$\phi(y) = u(X(T-2), y) - (1 - H(T-1)) \ln(y)$$

soit maximal.

Démonstration.

- D'après l'énoncé du début de la question ***12.***, on souhaite choisir le réel $X(T-1)$ qui rend maximal $\mathbb{E}\left(\sum\limits_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)$.
- On note $Y = \sum\limits_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))$ et $B = [\tau \geqslant T-1]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}\left(Y\left(\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_{\bar{B}}\right)\right) && \textit{(car } \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_{\bar{B}} = 1\textit{)} \\ &= \mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B) + \mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}}) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \end{aligned}$$

- Or, comme τ est à valeurs entières :

$$\overline{[\tau \geqslant T-1]} = [\tau < T-1] = [\tau \leqslant T-2]$$

On en déduit que, si l'événement $\overline{[\tau \geqslant T-1]}$ est réalisé, alors l'ensemble d'indices de la somme $\sum\limits_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))$ est vide.

Ainsi, d'après l'énoncé : $Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}} = \left(\sum\limits_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right) \mathbb{1}_{\overline{[\tau \geqslant T-1]}} = 0.$

- On en déduit :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t),X(t+1))\right) = \mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}_B(Y\,\mathbb{1}_B)\Big) \qquad \textit{(d'après \textbf{10.c)(ii)})}$$

$$= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}_B(Y)\,\mathbb{1}_B\Big) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}_{[\tau\geqslant T-1]}\Big(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t),X(t+1))\Big)\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\right)$$

$$= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}_{[\tau\geqslant T-1]}\Big(u(X(T-2),X(T-1))\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} + u(X(T-1),X(T))\,\mathbb{1}_{[\tau=T]}\Big)\Big) \qquad \textit{(d'après \textbf{12.b)})}$$

$$= \mathbb{E}\left(u(X(T-2),X(T-1))\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} + \frac{\mathbb{P}([\tau=T])}{\mathbb{P}([\tau\geqslant T-1])}\,u(X(T-1),X(T))\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\right) \qquad \textit{(d'après \textbf{12.c)})}$$

$$= \mathbb{E}\Big(u(X(T-2),X(T-1))\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} + (1-H(T-1))\,u(X(T-1),X(T))\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\Big) \qquad \textit{(d'après \textbf{12.e)})}$$

De là, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t),X(t+1))\right)\\
=\ & u(X(T-2),X(T-1))\,\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\right) + (1-H(T-1))\,u(X(T-1),X(T))\,\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\right)\\
=\ & \Big(u(X(T-2),X(T-1)) + (1-H(T-1))\,u(X(T-1),X(T))\Big)\,\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\right)
\end{aligned}$$

- On rappelle que $\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\mathbb{P}([\tau\geqslant T-1])\right)$.
  Donc $\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\right) = \mathbb{P}([\tau\geqslant T-1])$ est une constante strictement positive.
  Or, si λ est un réel **strictement positif**, maximiser la fonction $x\mapsto \lambda\, f(x)$ est équivalent à maximiser $x\mapsto f(x)$.
  On en déduit que maximiser $\mathbb{E}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t),X(t+1))\right)$ est équivalent à maximiser :
  $$u(X(T-2),X(T-1)) + (1-H(T-1))\,u(X(T-1),X(T))$$

- On rappelle maintenant que, dans cette partie, on suppose connus $X(1)$, …, $X(T-2)$ et que l'on cherche à déterminer $X(T-1)$ et $X(T)$ maximisant $\mathbb{E}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t),X(t+1))\right)$.
  Dans cette question, on cherche plus particulièrement à déterminer $X(T-1)$.
  Or, d'après la question ***12.d)(i)***, si $X(T-1)$ est connu, alors le meilleur choix pour $X(T)$ est 1, **peu importe la valeur de** $X(T-1)$.
  Pour déterminer le meilleur choix pour $X(T-1)$, on fixe donc dès à présent $X(T)=1$.
  On en déduit que l'on souhaite maximiser :
  $$u(X(T-2),X(T-1)) + (1-H(T-1))\,u(X(T-1),1)$$
  Or, d'après la question ***12.d)(ii)*** : $u(X(T-1),1) = -\ln(X(T-1))$. On souhaite donc maximiser :
  $$u(X(T-2),X(T-1)) - (1-H(T-1))\,\ln(X(T-1))$$

- Ainsi, choisir $X(T-1)$ pour maximiser $\mathbb{E}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t),X(t+1))\right)$ revient à maximiser la fonction :
  $$\phi : y\mapsto u(X(T-2),y) - (1-H(T-1))\,\ln(y)$$

> Finalement, le meilleur choix pour $X(T-1)$ est le réel maximisant la fonction $\phi : y\mapsto u(X(T-2),y) - (1-H(T-1))\,\ln(y)$.

Commentaire

Rappelons que l'idée générale de ce sujet est de déterminer les réels $X(1)$, $X(2)$, …, $X(T-1)$, $X(T)$ pour que $\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big)$ soit maximale.
Dans le contexte, on souhaite déterminer la proportion optimale d'œufs en diapause à chaque instant $t \in \{1, \ldots, T\}$.
On pourrait tout d'abord penser à déterminer dans l'ordre le réel $X(1)$ optimal, puis $X(2)$, …, pour finir par $X(T-1)$ et $X(T)$.
L'énoncé indique cependant qu'il traite de l'étude des deux premières étapes de la résolution du problème : « On expose dans cette partie les deux premières étapes de la méthode de la programmation dynamique pour résoudre le problème ». Donc les deux premières étapes de résolution sont en fait ici, non pas la détermination de $X(1)$ puis $X(2)$, mais celle de $X(T)$ puis $X(T-1)$.

□

g) Calculer $\phi'(y)$.

Démonstration.

- Soit $y \in \,]0,1]$.

$$\begin{array}{rcl} \phi(y) & = & u(X(T-2), y) - (1 - H(T-1))\ \ln(y) \\ & = & \ln(\alpha) - \ln(X(T-2)) + \ln(y) - \ln(1 + (\alpha - 1)\, y) - (1 - H(T-1))\ \ln(y) \\ & = & \ln(\alpha) - \ln(X(T-2)) + H(T-1)\ \ln(y) - \ln(1 + (\alpha - 1)\, y) \end{array}$$

On en déduit que la fonction ϕ est dérivable sur $]0,1]$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,1]$.

- Soit $y \in \,]0,1]$.

$$\begin{array}{rcl} \phi'(y) & = & \dfrac{H(T-1)}{y} - \dfrac{\alpha - 1}{1 + (\alpha - 1)\, y} \ = \ \dfrac{H(T-1)\,\big(1 + (\alpha-1)\, y\big) - (\alpha - 1)\, y}{y\,\big(1 + (\alpha - 1)\, y\big)} \\ & = & \dfrac{H(T-1) + (\alpha - 1)(H(T-1) - 1)\, y}{y\,\big(1 + (\alpha - 1)\, y\big)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall y \in \,]0,1],\ \phi'(y) = \dfrac{H(T-1) + (\alpha - 1)(H(T-1) - 1)\, y}{y\,\big(1 + (\alpha - 1)\, y\big)}}$$

□

h) Construire le tableau de variation de ϕ dans le cas $\dfrac{H(T-1)}{(\alpha - 1)(1 - H(T-1))} \leqslant 1$.

Démonstration.

- Avec le même raisonnement qu'à la question ***11.a)*** : $y\,\big(1 + (\alpha - 1)\, y\big) > 0$. Donc :

$$\begin{array}{rcl} \phi'(y) \geqslant 0 & \Leftrightarrow & H(T-1) + (\alpha - 1)(H(T-1) - 1)\, y \geqslant 0 \\ & \Leftrightarrow & (\alpha - 1)(H(T-1) - 1)\, y \geqslant -H(T-1) \\ & \Leftrightarrow & y \leqslant -\dfrac{H(T-1)}{(\alpha - 1)(H(T-1) - 1)} \end{array}$$

En effet :

× $\alpha - 1 > 0$, car $\alpha > 1$.

× $1 - H(T-1) \geqslant 0$, car $H(T-1)$ est une probabilité, donc en particulier $H(T-1) \leqslant 1$.

De plus : $-\dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(H(T-1)-1)} = \dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))}$. Donc :

$$\phi'(y) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; y \leqslant \frac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))}$$

- Comme $\beta = \dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \leqslant 1$, alors on obtient le tableau de variations suivant :

y	0		β		1
Signe de $\phi'(y)$		$+$	0	$-$	
Variations de ϕ	$-\infty$	$\nearrow$	$\phi(\beta)$	$\searrow$	$\phi(1)$

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - × Tout d'abord : $\lim\limits_{y\to 0} \ln\big(1+(\alpha-1)\,y\big) = \ln(1) = 0$.
    De plus : $H(T-1) \geqslant 0$ et $\lim\limits_{y\to 0} \ln(y) = -\infty$.
    On en déduit : $\lim\limits_{y\to 0} \phi(y) = -\infty$.
  - × Ensuite :

$$\begin{array}{rcl}\phi(1) & = & \ln(\alpha) - \ln(X(T-2)) + \cancel{H(T-1)\ln(1)} - \ln(1+(\alpha-1)\times 1) \\ & = & \cancel{\ln(\alpha)} - \ln(X(T-2)) - \cancel{\ln(\alpha)} \\ & = & -\ln(X(T-2))\end{array}$$

□

i) Construire le tableau de variation de ϕ dans le cas $\dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \geqslant 1$.

Démonstration.
Soit $y \in \,]0,1]$.
On a toujours : $\phi'(y) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; y \leqslant \dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} = \beta$.
Comme $\beta \geqslant 1$, avec les mêmes calculs qu'en question ***12.h)***, on obtient le tableau de variations suivant :

y	0		1
Signe de $\phi'(y)$		$+$	
Variations de ϕ	$-\infty$	$\nearrow$	$\phi(1)$

□

j) Donner la valeur de $y^*(X(T-2), T-2)$.

Démonstration.
Deux cas se présentent :
× si $\beta \leqslant 1$, alors d'après la question ***12.h)***, la fonction ϕ atteint son maximum en β.

$$\boxed{\text{Si } \dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \leqslant 1, \text{ alors } y^*(X(T-2),T-2) = \dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))}.}$$

× si $\beta \geqslant 1$, alors d'après la question ***12.i)***, la fonction ϕ atteint son maximum en 1.

$$\boxed{\text{Si } \dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \geqslant 1, \text{ alors } y^*(X(T-2),T-2) = 1.}$$

□

HEC 2018 : le sujet

Exercice

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

- On note $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$ et $0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}$ l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$.
- On pose $f^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ et : $\forall j \in \mathbb{N},\ f^{j+1} = f \circ f^j$.
- On suppose que f^n est l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$: $\boxed{f^n = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}}$

1. Soit M la matrice définie par : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le spectre de M. La matrice M est-elle diagonalisable ?

b) Préciser le rang des matrices M et M^2 respectivement.

c) Quels sont les polynômes annulateurs de M dont le degré est égal à 3 ?

2. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on note F_j l'image de l'endomorphisme f^j et r_j son rang :

$$F_j = \mathrm{Im}(f^j) \quad \text{et} \quad r_j = \dim(F_j)$$

Pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, on note g_j la restriction de f à F_j, c'est à dire l'application linéaire de F_j dans $\mathbb{R}^n$ définie par : $\forall x \in F_j,\ g_j(x) = f(x)$.

a) Calculer r_0 et r_n.

b) Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$.

(i) Déterminer le rang de g_j.

(ii) Justifier l'égalité : $r_j - r_{j+1} = \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap F_j)$.

c) Établir les inégalités : $n \geqslant r_0 - r_1 \geqslant r_1 - r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_{n-1} - r_n \geqslant 0$.

On rappelle que le cardinal d'un ensemble fini H, noté $\mathrm{Card}(H)$*, est le nombre de ses éléments.*
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $P(k)$ l'ensemble des k-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ d'entiers naturels tels que :

$$\sum_{i=1}^{k} i\ x_i = k$$

c'est à dire : $P(k) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid x_1 + 2x_2 + \ldots + kx_k = k\}$.
On pose $p(k) = \mathrm{Card}\big(P(k)\big)$.

3. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose : $x_i = \mathrm{Card}\left(\{j \in [\![0, n-1]\!] \mid r_j - r_{j+1} = i\}\right) \qquad (*)$.

a) Montrer que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un élément de $P(n)$.

b) Dans cette question, on suppose que n est égal à 4.

(i) Déterminer (x_1, x_2, x_3, x_4) lorsque f est l'endomorphisme de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

(ii) Trouver l'ensemble $P(4)$ et vérifier que $p(4) = 5$.

(iii) Montrer que pour tout $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in P(4)$, il existe un endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ vérifiant $(*)$.

4. Pour tout couple $(\ell, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose : $Q(\ell, k) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in P(k) \mid x_1+x_2+\ldots+x_k \leqslant \ell\}$ et $q(\ell, k) = \mathrm{Card}(Q(\ell, k))$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

(i) Trouver l'ensemble $Q(1, k)$.

(ii) Pour tout entier $\ell \geqslant k$, justifier l'égalité : $Q(\ell, k) = P(k)$.

b) Pour tout couple (ℓ, k) d'entiers tels que $k > \ell \geqslant 2$, établir la relation :

$$q(\ell, k-\ell) = \mathrm{Card}\left(\{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in P(k) \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_k = \ell\}\right)$$

c) Soit ℓ un entier supérieur ou égal à 2.

(i) Pour tout entier $k > \ell$, montrer l'égalité : $q(\ell, k) = q(\ell-1, k) + q(\ell, k-\ell)$.

(ii) Que vaut $q(\ell, \ell) - q(\ell-1, \ell)$?

5. La fonction **Scilab** suivante dont le script est incomplet (lignes 5 et 6), calcule une matrice `qmatrix(n)` telle que pour chaque couple $(\ell, k) \in [\![1, n]\!]^2$, le coefficient situé à l'intersection de la ligne ℓ et de la colonne k est égal à $q(\ell, k)$.

```
1  function q = qmatrix(n)
2      q = ones(n, n)
3      for L = 2:n
4          for K = 2:n
5              if (K<L) then
6                  q(L,K) = ................
7              elseif (K==L) then
8                  q(L,K) = .............
9              else
10                 q(L,K) = q(L-1,K) + q(L,K-L)
11             end
12         end
13     end
14 endfunction
```

L'application de la fonction `qmatrix` à l'entier $n = 9$ fournit la sortie suivante :

```
--> qmatrix(9)
    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.
    1.    2.    2.    3.    3.    4.    4.    5.    5.
    1.    2.    3.    4.    5.    7.    8.   10.   12.
    1.    2.    3.    5.    6.    9.   11.   15.   18.
    1.    2.    3.    5.    7.   10.   13.   18.   23.
    1.    2.    3.    5.    7.   11.   14.   20.   26.
    1.    2.    3.    5.    7.   11.   15.   21.   28.
    1.    2.    3.    5.    7.   11.   15.   22.   29.
    1.    2.    3.    5.    7.   11.   15.   22.   30.
```

a) Compléter les lignes 5 et 6 du script de la fonction `qmatrix`.

b) Donner un script **Scilab** permettant de calculer $p(n)$ à partir d'une valeur de n entrée au clavier.

c) Conjecturer une formule générale pour $q(2, k)$ applicable à tout entier $k \geqslant 1$, puis la démontrer.

Problème

Dans tout le problème :

- toutes les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$;
- on note n un entier supérieur ou égal à 2.

L'objet du problème est l'étude de sommes de variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli de même paramètre, mais qui ne sont pas nécessairement indépendantes.
Les parties II et III sont indépendantes de la partie I.

Partie I. Valeurs possibles du coefficient de corrélation linéaire dans divers schémas de Bernoulli

Dans cette partie, on considère des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ suivant chacune la même loi de Bernoulli de paramètre p avec $0 < p < 1$, c'est à dire :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}([X_k = 1]) = p \quad et \quad \mathbb{P}([X_k = 0]) = 1 - p$$

On suppose que pour tout couple $(k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $k \neq \ell$, le coefficient de corrélation linéaire des variables X_k et X_ℓ est le même ; on note r ce coefficient. On a donc :

$$\forall (k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2,\ \frac{\operatorname{Cov}(X_k, X_\ell)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_k)\mathbb{V}(X_\ell)}} = \begin{cases} 1 & si\ k = \ell \\ r & si\ k \neq \ell \end{cases}$$

1. a) Dans les cas (i) et (ii) suivants, calculer la valeur de r et exprimer la variance de la variable aléatoire $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ en fonction de n et p.

(i) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

(ii) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont toutes égales.

De plus, préciser la loi de $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ dans chacun des deux cas précédents.

b) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la variance de la variable aléatoire $\sum\limits_{i=1}^{k} X_i$ est donnée par la formule :

$$\mathbb{V}\Big(\sum_{i=1}^{k} X_i\Big) \ = \ k\,p\,(1-p)\,(1 + (k-1)r)$$

c) En déduire que le coefficient r est au moins égal à $-\dfrac{1}{n-1}$.

2. On suppose dans cette question que n est au moins égal à 2.

a) Montrer que r est égal à -1 si et seulement si on a : $\mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = p(2p - 1)$.

b) Que vaut alors $\mathbb{P}\big(\,[X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\,\big)$?

c) En déduire que le coefficient r ne peut-être égal à -1 que lorsque $p = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}([X_1 + X_2 = 1]) = 1$.

3. On suppose dans cette question que n est supérieur ou égal à 3 et que $\mathbb{P}\left(\left[\sum\limits_{k=1}^{n} X_k = 1\right]\right) = 1$.

a) Exprimer les valeurs de p et r en fonction de n.

b) Déterminer les n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ pour lesquels la probabilité $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} [X_k = x_k]\right)$ est strictement positive et la calculer.

Partie II. Lois bêta-binomiales

4. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt$ est convergente si seulement si $x > 0$.

b) Pour tout réel ε tel que $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$, établir à l'aide d'un changement de variable affine, l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt \;=\; \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} t^{y-1}\,(1-t)^{x-1}\,dt$$

c) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

Dans toute la suite du problème, on pose : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ B(x, y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt.$

5. Soit x et y des réels strictement positifs.

a) À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation : $B(x+1, y) = \dfrac{x}{y} \times B(x, y+1)$.

b) En déduire l'égalité : $B(x, y+1) = \dfrac{y}{x+y} \times B(x, y)$.

6. Pour tout réel z, soit $\big((z)^{[m]}\big)_{m\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$(z)^{[0]} = 1 \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{N},\ (z)^{[m+1]} = (z+m) \times (z)^{[m]}$$

(par exemple, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $(1)^{[m]} = m!$)

Établir pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et pour tout couple (k, ℓ) d'entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant \ell$, la relation :

$$B(x+k, y+\ell-k) \;=\; \frac{(x)^{[k]} \times (y)^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x, y)$$

7. Soit a et b des réels strictement positifs.

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on pose : $p_k = \dbinom{n}{k} \dfrac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$.

a) À l'aide de la relation obtenue dans la question ***6***, montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k = 1$.

On dit qu'une variable aléatoire S suit une loi bêta-binomiale $\mathbf{B}(n; a, b)$ si $S(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et si :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}([S = k]) = \binom{n}{k} \frac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$$

b) Reconnaître la loi $\mathbf{B}(n; 1, 1)$.

c) Montrer que l'espérance d'une variable aléatoire S qui suit la loi $\mathbf{B}(n; a, b)$ est égale à $\dfrac{na}{a+b}$.

9782340-026636_001_784.indd 734 30/07/2018 09:53

Partie III. Un possible dans le cas où $n = 2$

Soit a et b des réels strictement positifs et X_1 et X_2 deux variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}$ telles que :

$$\forall (x_1, x_2) \in \{0,1\}^2,\ \mathbb{P}\left([X_1 = x_1] \cap [X_2 = x_2]\right) \ = \ \frac{B(a + x_1 + x_2, b + 2 - x_1 - x_2)}{B(a,b)}$$

8. ***a)*** Montrer que les deux variables X_1 et X_2 suivent la même loi de Bernoulli.

b) Montrer que la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit la loi bêta-binomiale $\mathbf{B}(2; a, b)$.

c) Établir la relation : $\mathbb{P}_{[X_1=1]}([X_2 = 1]) = \dfrac{a+1}{a+b+1}$.

9. La fonction **Scilab** suivante dont le script est incomplet (lignes 7 et 11), effectue une simulation des deux variables X_1 et X_2 qu'elle place dans un vecteur ligne à deux composantes.

```
1  function x = randbetabin(a, b)
2      x = zeros(1,2)
3      u = (a + b) * rand()
4      v = (a + b + 1) * rand()
5      if (u < a) then
6          x(1,1) = 1
7          if ............. then
8              x(1,2) = 1
9          end
10     else
11         if ............ then
12             x(1,2) = 1
13         end
14     end
15 endfunction
```

a) Préciser la loi simulée par la variable `u` de la ligne 3.

b) Compléter les lignes 7 et 11.

10. ***a)*** Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X_1 et X_2.

b) Soit (p, r) un couple de réels vérifiant $0 < p < 1$ et $0 < r < 1$.
Expliquer comment utiliser la fonction `randbetabin` pour simuler deux variables aléatoires suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p et dont le coefficient de corrélation linéaire est égal à r.

HEC 2018 : le corrigé

Exercice

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

- On note $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$ et $0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}$ l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$.
- On pose $f^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ et : $\forall j \in \mathbb{N},\ f^{j+1} = f \circ f^j$.
- On suppose que f^n est l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$: $\boxed{f^n = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}}$

1. Soit M la matrice définie par : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le spectre de M. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Démonstration.

- La matrice M est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{0_{\mathbb{R}}\}}$$

- Raisonnons par l'absurde. On suppose que la matrice M est diagonalisable.
Alors il existe $P \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et $D \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale contenant les valeurs propres de M telles que $M = PDP^{-1}$.
Or $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$. Donc :

$$M \ = \ PDP^{-1} \ = \ P\,0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}\,P^{-1} = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$$

ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{On en déduit que } M \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Commentaire

Il faut prendre le réflexe de penser à un raisonnement par l'absurde lorsque le résultat à démontrer est formulé sous forme de négation ou d'interrogation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général). À titre d'illustration, il faut penser à ce type de raisonnement pour :

× montrer qu'une suite `N`'est `PAS` majorée,

× montrer qu'une matrice admettant une seule valeur propre `N`'est `PAS` diagonalisable.

□

b) Préciser le rang des matrices M et M^2 respectivement.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\mathrm{rg}(M) \ = \ \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \ = \ \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \ = \ \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est libre car constituée de 2 vecteurs non colinéaires.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathrm{rg}(M) = 2.}$$

- Ensuite :

$$M^2 = M \times M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\text{rg}(M^2) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est libre car constituée d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \text{rg}(M^2) = 1.}$$

□

c) Quels sont les polynômes annulateurs de M dont le degré est égal à 3 ?

Démonstration.
On cherche à déterminer $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^3$ tel que $P(X) = a\,X^3 + b\,X^2 + c\,X + d$ est un polynôme annulateur de M.
(insistons sur l'hypothèse $a \neq 0$: elle est nécessaire car on cherche les polynômes annulateurs de degré 3)

- On a déjà calculé M^2. Calculons maintenant M^3.

$$M^3 = M \times M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$$

- Ainsi, P est un polynôme annulateur de M si et seulement si :

$$\begin{aligned} & P(M) = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})} \\ \Leftrightarrow\quad & a \cdot M^3 + b \cdot M^2 + c \cdot M + d \cdot I_4 = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})} \\ \Leftrightarrow\quad & a \cdot 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})} \\ \Leftrightarrow\quad & \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & c & b \\ 0 & 0 & d & c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})} \\ \Leftrightarrow\quad & \{ b = c = d = 0 \end{aligned}$$

- On obtient donc que l'ensemble des polynômes annulateurs de M de degré 3 est :

$$\{\, a \cdot X^3 + b \cdot X^2 + c \cdot X + d \mid a \in \mathbb{R}^* \ \text{ et } \ b = c = d = 0\} = \{a \cdot X^3 \mid a \in \mathbb{R}^*\}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Finalement, } \{a \cdot X^3 \mid a \in \mathbb{R}^*\} \text{ est l'ensemble des polynômes annulateurs de } M \\ \text{de degré égal à 3.}\end{array}}$$

□

2. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on note F_j l'image de l'endomorphisme f^j et r_j son rang :

$$F_j = \mathrm{Im}(f^j) \quad \text{et} \quad r_j = \dim(F_j)$$

Pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, on note g_j la restriction de f à F_j, c'est à dire l'application linéaire de F_j dans $\mathbb{R}^n$ définie par : $\forall x \in F_j,\ g_j(x) = f(x)$.

a) Calculer r_0 et r_n.

Démonstration.
On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

- Tout d'abord : $r_0 = \mathrm{rg}(f^0) = \mathrm{rg}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$.
  Or $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) = I_n$. De plus : $\mathrm{rg}(I_n) = n$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } r_0 = n.}$$

- Ensuite, d'après l'énoncé : $r_n = \mathrm{rg}(f^n) = \mathrm{rg}(0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)})$.
  Or $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$. De plus : $\mathrm{rg}(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}) = 0$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } r_n = 0.}$$

□

b) Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$.

(i) Déterminer le rang de g_j.

Démonstration.
Dans la suite, on note $f_{|F_j}$ la restriction de f à l'ensemble F_j.
Le but de la question est de déterminer : $\mathrm{rg}(g_j) = \dim(\mathrm{Im}(g_j))$.

- Tout d'abord :

$$\mathrm{Im}(g_j) \ = \ \mathrm{Im}\left(f_{|F_j}\right) \ = \ f(F_j)$$

Commentaire

- Considérons une application f d'un ensemble E vers un ensemble F et notons $A \subset E$. Rappelons que $f(A)$, image de l'ensemble A par l'application f est définie par :

$$\begin{array}{rcl} f(A) & = & \{y \in F \mid \exists\, x \in E,\ y = f(x)\} \\ & = & \{f(x) \in F \mid x \in E\} \end{array}$$

- Ici, comme f est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ on a :

$$f(F_j) \ = \ \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in F_j, y = f(x)\} \ = \ \{f(x) \in \mathbb{R}^n \mid x \in F_j\}$$

- Ainsi, par définition de F_j : $f(F_j) \ = \ f\big(\mathrm{Im}(f^j)\big)$.
- Démontrons alors : $f\big(\mathrm{Im}(f^j)\big) \ = \ \mathrm{Im}\left(f^{j+1}\right)$.

$$\begin{array}{rcll} f\big(\mathrm{Im}\left(f^j\right)\big) & = & \{f(v) \in \mathbb{R}^n \mid v \in \mathrm{Im}\left(f^j\right)\} & \\ & = & \{f(v) \in \mathbb{R}^n \mid \exists u \in \mathbb{R}^n,\ v = f^j(u)\} & \textit{(par définition de } \mathrm{Im}\left(f^j\right)\textit{)} \\ & = & \{f\big(f^j(u)\big) \in \mathbb{R}^n \mid u \in \mathbb{R}^n\} & \\ & = & \{f^{j+1}(u) \in \mathbb{R}^n \mid u \in \mathbb{R}^n\} \ = \ \mathrm{Im}\left(f^{j+1}\right) & \end{array}$$

En combinant tous ces résultats, on obtient :

$$\mathrm{Im}(g_j) \ = \ \mathrm{Im}\left(f_{|F_j}\right) \ = \ f(F_j) \ = \ f\big(\mathrm{Im}(f^j)\big) \ = \ \mathrm{Im}\left(f^{j+1}\right) \ = \ F_{j+1}$$

$$\boxed{\text{Et ainsi : } \mathrm{rg}(g_j) = \dim(\mathrm{Im}(g_j)) = \dim(F_{j+1}) = r_{j+1}.}$$

Commentaire

- Au vu de l'énoncé, il est difficile de comprendre le niveau de connaissance attendu sur la notion de restriction. La restriction d'une application f à un ensemble A est généralement introduite en première année lors du chapitre *Ensembles et applications*. Cependant, lorsque l'on se réfère au programme officiel ECE, on ne voit pas apparaître le terme *restriction* dans ce chapitre. Il convient donc de détailler certains points de la démonstration précédente.
- Commençons par définir la notion de restriction.
On considère une application f d'un ensemble E vers un ensemble F.
La **restriction** de f à A, notée $f_{|A}$, est l'application de A dans F définie par :

$$f_{|A} \;:\; \begin{array}{rcl} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Autrement dit, $f_{|A}$ est l'application définie par : $\forall x \in A,\ f_{|A}(x) \;=\; f(x)$.
- On a alors : $\boxed{\mathrm{Im}\,(f_{|A}) = f(A)}$ où $f(A)$ est l'image de l'ensemble A par l'application f :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Im}\,(f_{|A}) & = & \{y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f_{|A}(x)\} & \\ & = & \{y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x)\} & \textit{(par définition de } f_{|A}\textit{)} \\ & = & f(A) & \end{array}$$

□

(ii) Justifier l'égalité : $r_j - r_{j+1} = \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap F_j)$.

Démonstration.

- On applique le théorème du rang à l'application linéaire g_j (on rappelle : $g_j \in \mathscr{L}(F_j, \mathbb{R}^n)$).

$$\underset{\displaystyle r_j}{\underset{\shortparallel}{\dim(F_j)}} \;=\; \dim(\mathrm{Ker}(g_j)) \;+\; \underset{\displaystyle r_{j+1}}{\underset{\shortparallel}{\mathrm{rg}(g_j)}}$$

On en déduit : $r_j - r_{j+1} \;=\; \dim(\mathrm{Ker}(g_j))$.
- Rappelons : $g_j \;=\; f_{|F_j}$. Montrons alors : $\mathrm{Ker}\left(f_{|F_j}\right) \;=\; \mathrm{Ker}(f) \cap F_j$.
Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{rcl} x \in \mathrm{Ker}\left(f_{|F_j}\right) & \Leftrightarrow & x \in F_j \;\texttt{ ET }\; f_{|F_j}(x) = 0_{\mathbb{R}^n} \\ & \Leftrightarrow & x \in F_j \;\texttt{ ET }\; f(x) = 0_{\mathbb{R}^n} \\ & \Leftrightarrow & x \in F_j \;\texttt{ ET }\; x \in \mathrm{Ker}(f) \\ & \Leftrightarrow & x \in F_j \cap \mathrm{Ker}(f) \end{array}$$

On a bien : $\mathrm{Ker}\left(f_{|F_j}\right) \;=\; \mathrm{Ker}(f) \cap F_j$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } r_j - r_{j+1} = \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap F_j).}$$

Commentaire

Cette question illustre une autre propriété classique sur les restrictions d'une application à un ensemble. Si on considère, comme dans la remarque précédente, une application linéaire f d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F et $A \subset E$, on pourra retenir :

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(f_{|A}) = f(A)} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{Ker}\,(f_{|A}) = \mathrm{Ker}(f) \cap A}$$

□

c) Établir les inégalités : $n \geqslant r_0 - r_1 \geqslant r_1 - r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_{n-1} - r_n \geqslant 0$.

Démonstration.
Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$.

- On veut montrer : $r_j - r_{j+1} \geqslant r_{j+1} - r_{j+2}$.
  - Or, d'après la question précédente :
  $$r_j - r_{j+1} \geqslant r_{j+1} - r_{j+2} \;\Leftrightarrow\; \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap F_j) \geqslant \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap F_{j+1})$$
  - L'inégalité des dimensions peut être obtenue en démontrant :
  $$\mathrm{Ker}(f) \cap F_{j+1} \subset \mathrm{Ker}(f) \cap F_j$$
  Cette inclusion peut elle-même être obtenue en démontrant :
  $$F_{j+1} \subset F_j$$
  car il suffit alors de réaliser l'intersection, de part et d'autre, par $\mathrm{Ker}(f)$.
  - Démontrons : $F_{j+1} \subset F_j$.
  Par définition de F_j et F_{j+1}, il s'agit de démontrer : $\mathrm{Im}\left(f^{j+1}\right) \subset \mathrm{Im}\left(f^j\right)$.
  Soit $y \in \mathrm{Im}\left(f^{j+1}\right)$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que :
  $$y \;=\; f^{j+1}(x) \;=\; f^j(f(x))$$
  En notant $z = f(x)$, on obtient $y = f^j(z) \in \mathrm{Im}(f^j)$.
  $$\boxed{\text{Finalement : } F_{j+1} \subset F_j.}$$
  - On obtient donc : $\mathrm{Ker}(f) \cap F_{j+1} \subset \mathrm{Ker}(f) \cap F_j$.
  Puis : $\dim(\mathrm{Ker}(f) \cap F_{j+1}) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap F_j)$.
  $$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, pour tout } j \in [\![0, n-1]\!],\ \ r_{j+1} - r_{j+2} \leqslant r_j - r_{j+1}. \text{ Autrement dit :} \\ r_0 - r_1 \geqslant r_1 - r_2 \geqslant \cdots \geqslant r_{n-1} - r_n\end{array}}$$
- D'après la question ***2.a)*** : $r_0 = n$.
Or $r_1 = \dim(F_1) \geqslant 0$ car une dimension est un entier positif.
$$\boxed{\text{On en déduit : } r_0 - r_1 \leqslant n.}$$
- Toujours d'après la question ***2.a)***, $r_n = 0$: $r_{n-1} - r_n = r_{n-1} - 0 \geqslant 0$.
$$\boxed{r_{n-1} - r_n \geqslant 0}$$
□

On rappelle que le cardinal d'un ensemble fini H, noté $\mathrm{Card}(H)$, est le nombre de ses éléments.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $P(k)$ l'ensemble des k-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ d'entiers naturels tels que :
$$\sum_{i=1}^{k} i\ x_i = k$$
c'est à dire : $P(k) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid x_1 + 2x_2 + \ldots + kx_k = k\}$.
On pose $p(k) = \mathrm{Card}\big(P(k)\big)$.

Commentaire

On ne peut noter $\mathrm{Card}\big(P(k)\big)$ que si l'ensemble $P(k)$ est fini. C'est le cas : si l'égalité $\sum\limits_{i=1}^{k} i\ x_i = k$ est vérifiée, alors, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $x_i \in [\![0, k]\!]$ (s'il existe i_0 tel que $x_{i_0} > k$ alors $\sum\limits_{i=1}^{k} i\ x_i \geqslant i_0\ x_{i_0} > k$). Ainsi, $P(k) \subset [\![0, k]\!]^k$ et comme $[\![0, k]\!]^k$ est un ensemble fini (de cardinal $(k+1)^k$), $P(k)$ est aussi fini (de cardinal inférieur ou égal à $(k+1)^k$).

9782340-026636_001_784.indd 741 30/07/2018 09:53

3. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose : $x_i = \text{Card}\left(\{j \in [\![0, n-1]\!] \mid r_j - r_{j+1} = i\}\right) \quad (*)$.

a) Montrer que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un élément de $P(n)$.

Démonstration.
Tout d'abord, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \in \mathbb{N}$ car x_i est le cardinal d'un ensemble.
Par définition de $P(n)$, il reste à démontrer l'égalité : $\sum\limits_{i=1}^{n} i\ x_i \ = \ n$.

Considérons alors la quantité $\sum\limits_{j=0}^{n-1} (r_j - r_{j+1})$. Il y a deux manières de procéder à son calcul.

- Par télescopage :

$$\sum_{j=0}^{n-1} (r_j - r_{j+1}) \ = \ r_0 - r_n \ = \ n - 0 \ = \ n \qquad \textit{(d'après la question précédente)}$$

- Par sommation par paquets :

  D'après la question précédente : $\forall j \in [\![0, n-1]\!]$, $r_j - r_{j+1} \in [\![0, n]\!]$.
  L'idée est alors de regrouper les écarts $r_j - r_{j+1}$ suivant leurs valeurs.
  On note alors, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$: $I_i = \{j \in [\![0, n-1]\!] \mid r_j - r_{j+1} = i\}$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n-1} (r_j - r_{j+1}) \\
= \ & \sum_{\substack{j=0 \\ j \in I_0}}^{n-1} (r_j - r_{j+1}) \ + \ \sum_{\substack{j=0 \\ j \in I_1}}^{n-1} (r_j - r_{j+1}) \ + \ \ldots \ + \ \sum_{\substack{j=0 \\ j \in I_n}}^{n-1} (r_j - r_{j+1}) \\
= \ & \sum_{\substack{j=0 \\ j \in I_0}}^{n-1} 0 \ + \ \sum_{\substack{j=0 \\ j \in I_1}}^{n-1} 1 \ + \ \ldots \ + \ \sum_{\substack{j=0 \\ j \in I_n}}^{n-1} n \qquad \textit{(par définition des ensembles } I_i\textit{)} \\
= \ & 0 \times \text{Card}(I_0) \ + \ 1 \times \text{Card}(I_1) \ + \ \ldots \ + \ n \times \text{Card}(I_n) \\
= \ & 0 \ + \ 1 \times x_1 \ + \ \ldots \ + \ n \times x_n \qquad \textit{(par définition des nombres } x_i\textit{)} \\
= \ & \sum_{i=0}^{n} i\ x_i
\end{aligned}$$

Les deux méthodes de calcul aboutissant évidemment au même résultat, on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n} i\ x_i \ = \ n$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } (x_1, \ldots, x_n) \text{ est bien un élément de } P(n).}$$

Commentaire

Cette démonstration semble un peu sortie du chapeau. Pour comprendre sa provenance, il faut analyser de plus près la quantité $\sum\limits_{i=1}^{n} i\ x_i$. Par définition, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = \text{Card}\left(\{j \in [\![0, n-1]\!] \mid r_j - r_{j+1} = i\}\right)$. Ainsi, x_i est le nombre d'indices $j \in [\![0, n-1]\!]$ pour lesquels l'écart $r_j - r_{j+1}$ vaut i. En calculant $i\ x_i$, on multiplie l'écart i par le nombre de fois pour lequel il est réalisé. Ainsi, en calculant la somme $\sum\limits_{i=1}^{n} i\ x_i$, on obtient la mesure de tous les écarts $r_j - r_{j+1}$ pour j variant dans $[\![0, n-1]\!]$.
Ce qui revient à calculer : $\sum\limits_{j=0}^{n-1} (r_j - r_{j+1})$.

□

b) Dans cette question, on suppose que n est égal à 4.

(i) Déterminer (x_1, x_2, x_3, x_4) lorsque f est l'endomorphisme de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Démonstration.

- Soit $j \in [\![0, 4]\!]$. Comme M est la matrice représentative de f dans la base canonique :

$$r_j \ = \ \text{rg}\left(f^j\right) \ = \ \text{rg}\left(M^j\right)$$

- D'après la question ***2.a)*** : $r_0 = 4$ et $r_4 = 0$.
  D'après les calculs en ***1.b)*** et ***1.c)*** :

$$r_1 = \text{rg}(M) = 2, \qquad r_2 = \text{rg}\left(M^2\right) = 1, \qquad r_3 = \text{rg}\left(M^3\right) = \text{rg}\left(0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}\right) = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi : } r_0 - r_1 = 2,\ r_1 - r_2 = 1,\ r_2 - r_3 = 1 \text{ et } r_3 - r_4 = 0.\\ \text{Et } x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0 \text{ et } x_4 = 0.\end{array}}$$

□

(ii) Trouver l'ensemble $P(4)$ et vérifier que $p(4) = 5$.

Démonstration.
Par définition : $P(4) \ = \ \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{N}^4 \mid x_1 + 2\ x_2 + 3\ x_3 + 4\ x_4 = 4\}$.
Il s'agit donc de trouver les 4-uplets d'entiers naturels (x_1, x_2, x_3, x_4) tels que :

$$x_1 + 2\ x_2 + 3\ x_3 + 4\ x_4 = 4$$

Deux cas se présentent.

- Si $x_4 = 1$ alors $x_1 + 2\ x_2 + 3\ x_3 = 0$.
  Cette somme nulle étant constituée de nombres positifs, on en déduit :

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

  Et ainsi, le seul 4-uplet (x_1, x_2, x_3, x_4) élément de $P(4)$ tel que $x_4 = 0$ est : $(0, 0, 0, 1)$.
- Si $x_4 \neq 1$ alors on a forcément $x_4 = 0$. Sinon, comme $x_4 \in \mathbb{N}$ on aurait $x_4 \geqslant 2$ et ainsi :

$$x_1 + 2\ x_2 + 3\ x_3 + 4\ x_4 \geqslant 4\ x_4 \geqslant 8 > 6$$

  ce qui est impossible.
  Deux nouveaux cas se présentent.
  × Si $x_3 = 1$ alors $x_1 + 2\ x_2 + 3\ x_3 + 4\ x_4 = x_1 + 2\ x_2 + 3 = 4$ donc $x_1 + 2\ x_2 = 1$.
  On a alors forcément $x_1 = 1$ et $x_2 = 0$ (sinon cette somme dépasserait 2).
  Et ainsi, le seul 4-uplet élément de $P(4)$ vérifiant toutes ces conditions est : $(1, 0, 1, 0)$.
  × Si $x_3 \neq 1$ alors $x_3 = 0$ sinon on aurait $x_3 \geqslant 2$ et $x_1 + 2\ x_2 + 3\ x_3 + 4\ x_4 \geqslant 3\ x_3 \geqslant 6 > 4$.
  Trois nouveaux cas se présentent :
    - Si $x_2 = 2$ alors $x_1 = 0$.
      Et le seul 4-uplet élément de $P(4)$ vérifiant toutes ces conditions est : $(0, 2, 0, 0)$.
    - Si $x_2 = 1$ alors $x_1 = 2$.
      Et le seul 4-uplet élément de $P(4)$ vérifiant toutes ces conditions est : $(2, 1, 0, 0)$.
    - Si $x_2 \notin \{1, 2\}$ alors $x_2 = 0$ sinon $x_2 \geqslant 3$ et $x_1 + 2\ x_2 + 3\ x_3 + 4\ x_4 \geqslant 2\ x_2 \geqslant 6 > 4$.
      Et le seul 4-uplet élément de $P(4)$ vérifiant toutes ces conditions est : $(4, 0, 0, 0)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Finalement, } P(4) = \{(0,0,0,1), (1,0,1,0), (0,2,0,0), (2,1,0,0), (4,0,0,0)\} \text{ et}\\ p(4) = \text{Card}(P(4)) = 5.\end{array}}$$

□

9782340-026636_001_784.indd 743 30/07/2018 09:53

(iii) Montrer que pour tout $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in P(4)$, il existe un endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ vérifiant $(*)$.

Démonstration.
Remarquons tout d'abord que pour tout endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$:

$$r_0 = \text{rg}(f^0) = \text{rg}(\text{id}_{\mathbb{R}^4}) = 4$$

Il s'agit alors, pour chaque 4-uplet (x_1, x_2, x_3, x_4) de $P(4)$, d'exhiber un endomorphisme f ayant les caractéristiques de ce 4-uplet. Étudions tous les cas qui se présentent.

- Si $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 1)$. Ce 4-uplet est réalisé pour les valeurs de r_i suivantes :

$$\begin{array}{lcl} r_0 = 4 & \to & \text{rg}(f^0) = 4 \\ r_1 = 0 & \to & \text{rg}(f^1) = 0 \\ r_2 = 0 & \to & \text{rg}(f^2) = 0 \\ r_3 = 0 & \to & \text{rg}(f^3) = 0 \\ r_4 = 0 & \to & \text{rg}(f^4) = 0 \end{array}$$

  Comme $\text{rg}(f) = 0$ alors f est l'endomorphisme nul $0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)}$. Cet endomorphisme réalise bien les conditions précisées.

- Si $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0)$. Ce 4-uplet est réalisé pour les valeurs de r_i suivantes :

$$\begin{array}{lcl} r_0 = 4 & \to & \text{rg}(f^0) = 4 \\ r_1 = 1 & \to & \text{rg}(f^1) = 1 \\ r_2 = 0 & \to & \text{rg}(f^2) = 0 \\ r_3 = 0 & \to & \text{rg}(f^3) = 0 \\ r_4 = 0 & \to & \text{rg}(f^4) = 0 \end{array}$$

  On cherche donc un endomorphisme f de rang 1 tel que $f^2 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)}$. On peut (par exemple) proposer l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est :

$$\text{Mat}_{bc}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 2, 0, 0)$. Ce 4-uplet est réalisé pour les valeurs de r_i suivantes :

$$\begin{array}{lcl} r_0 = 4 & \to & \text{rg}(f^0) = 4 \\ r_1 = 2 & \to & \text{rg}(f^1) = 2 \\ r_2 = 0 & \to & \text{rg}(f^2) = 0 \\ r_3 = 0 & \to & \text{rg}(f^3) = 0 \\ r_4 = 0 & \to & \text{rg}(f^4) = 0 \end{array}$$

  On cherche donc un endomorphisme f de rang 2 tel que $f^2 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)}$. On peut alors proposer l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est :

$$\text{Mat}_{bc}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 1, 0, 0)$. Ce 4-uplet est réalisé pour les valeurs de r_i suivantes :

$$\begin{array}{lcl} r_0 = 4 & \to & \mathrm{rg}(f^0) = 4 \\ r_1 = 2 & \to & \mathrm{rg}(f^1) = 2 \\ r_2 = 1 & \to & \mathrm{rg}(f^2) = 1 \\ r_3 = 0 & \to & \mathrm{rg}(f^3) = 0 \\ r_4 = 0 & \to & \mathrm{rg}(f^4) = 0 \end{array}$$

On cherche donc un endomorphisme f de rang 2 tel que $f^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)}$ et $\mathrm{rg}(f^2) = 1$. D'après la question ***1.***, on peut alors proposer l'endomorphisme fourni par l'énoncé, dont la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est :

$$\mathrm{Mat}_{bc}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 0, 0, 0)$. Ce 4-uplet est réalisé pour les valeurs de r_i suivantes :

$$\begin{array}{lcl} r_0 = 4 & \to & \mathrm{rg}(f^0) = 4 \\ r_1 = 3 & \to & \mathrm{rg}(f^1) = 3 \\ r_2 = 2 & \to & \mathrm{rg}(f^2) = 2 \\ r_3 = 1 & \to & \mathrm{rg}(f^3) = 1 \\ r_4 = 0 & \to & \mathrm{rg}(f^4) = 0 \end{array}$$

On cherche donc un endomorphisme f dont le rang décroît de 1 à chaque fois nouvelle composition avec lui-même.

$$M = \mathrm{Mat}_{bc}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet, dans ce cas on a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M^4 = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } (x_1, x_2, x_3, x_4) \in P(4), \text{ il existe bien } f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4) \text{ vérifiant } (*).}$$

Commentaire

Cette dernière matrice (dont tous les coefficients sont nuls hormis sur la « surdiagonale » dont les coefficients sont tous des 1) est plutôt classique. Les puissances successives ont pour effet de décaler cette « surdiagonale » vers le haut.

□

4. Pour tout couple $(\ell, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose : $Q(\ell, k) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in P(k) \mid x_1+x_2+\ldots+x_k \leqslant \ell\}$ et $q(\ell, k) = \text{Card}(Q(\ell, k))$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

(i) Trouver l'ensemble $Q(1, k)$.

Démonstration.
Par définition :

$$\begin{array}{rcl} Q(1,k) & = & \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in P(k) \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leqslant 1\} \\ & = & \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid \sum\limits_{i=1}^{k} i\ x_i = k \ \texttt{ET} \ x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leqslant 1\} \end{array}$$

- Comme les éléments x_i sont des entiers naturels, l'inégalité $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leqslant 1$ n'est vérifiée que si au plus un élément x_{i_0} est non nul (égal alors à 1).
- Dans ce cas, on obtient $\sum\limits_{i=1}^{k} i\ x_i = i_0$.
  L'égalité $\sum\limits_{i=1}^{k} i\ x_i = k$ est alors vérifiée si et seulement si $i_0 = k$.

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} Q(1,k) & = & \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in P(k) \mid x_1 = x_2 = \ldots = x_{k-1} = 0 \ \texttt{ET} \ x_k = 1\} \\ & = & \{(0, \ldots, 0, 1)\} \end{array}$$

$$\boxed{Q(1,k) = \{(0, \ldots, 0, 1)\}}$$ □

(ii) Pour tout entier $\ell \geqslant k$, justifier l'égalité : $Q(\ell, k) = P(k)$.

Démonstration.
Soit $\ell \geqslant k$. On procède par double inclusion.

($\subset$) $Q(\ell, k) \subset P(k)$ par définition.

($\supset$) Soit $(x_1, \ldots, x_k) \in P(k)$. Alors $\sum\limits_{i=1}^{k} i\ x_i = k$.
Or, comme pour tout $i \in \mathbb{N}^*$: $x_i \leqslant i\ x_i$ on a, par sommation :

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \ \leqslant \ \sum_{i=1}^{k} i\ x_i \ = \ k$$

Et comme $k \leqslant \ell$, on obtient par transitivité : $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \ \leqslant \ \ell$.
On en déduit que $(x_1, \ldots, x_k)$ est un élément de $Q(\ell, k)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } Q(\ell, k) = P(k).}$$ □

b) Pour tout couple (ℓ, k) d'entiers tels que $k > \ell \geqslant 2$, établir la relation :

$$q(\ell, k - \ell) = \text{Card}\left(\{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in P(k) \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_k = \ell\}\right)$$

Démonstration.
Soit $(\ell, k) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k > \ell \geqslant 2$.

- Dans la suite, nous notons :

$$\begin{array}{rcl} R(\ell,k) & = & \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in P(k) \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_k = \ell\} \\ & = & \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid \sum\limits_{i=1}^{k} i\ x_i = k \ \texttt{ET} \ x_1 + \ldots + x_k = \ell\} \end{array}$$

- Par définition :

$$\begin{aligned} Q(\ell, k-\ell) &= \{(x_1, \dots, x_{k-\ell}) \in P(k-\ell) \mid x_1 + \ldots + x_{k-\ell} \leqslant \ell\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_{k-\ell}) \in \mathbb{N}^{k-\ell} \mid \sum_{i=1}^{k-\ell} i\ x_i = k-\ell \ \texttt{ET} \ x_1 + \ldots + x_{k-\ell} \leqslant \ell\} \end{aligned}$$

Le but de la question est de démontrer : Card $\big(R(\ell,k)\big) = $ Card $\big(Q(\ell,k-\ell)\big)$.
Visiblement, ces ensembles ne sont pas égaux ($R(\ell,k) \subset \mathbb{N}^k$ et $Q(\ell,k-\ell) \subset N^{k-\ell}$).
Ainsi, pour démontrer qu'ils ont même cardinal, il faut démontrer qu'il existe une bijection de $Q(\ell,k-\ell)$ sur $R(\ell,k)$. Exhibons cette bijection.

- Considérons tout d'abord un élément $(x_1, \dots, x_{k-\ell}) \in Q(\ell,k-\ell)$. Alors :

$$x_1 + \ldots + x_{k-\ell} \leqslant \ell$$

En ajoutant à cette somme son écart à ℓ, on obtient :

$$\left(\ell - \sum_{i=1}^{k-\ell} x_i\right) + x_1 + \ldots + x_{k-\ell} \ = \ \ell$$

Notons alors :

$$\left|\begin{array}{lcl} y_1 &=& \ell - \sum\limits_{i=1}^{k-\ell} x_i \\ y_2 &=& x_1 \\ \vdots && \vdots \\ y_{k-\ell+1} &=& x_{k-\ell} \\ \forall i \in [\![k-\ell+2, k]\!],\ y_i &=& 0 \end{array}\right.$$

Par définition des éléments y_i, on a les propriétés suivantes.

(1) Tout d'abord :

$$\sum_{i=1}^{k} y_i \ = \ \left(\ell - \sum_{i=1}^{k-\ell} x_i\right) + x_1 + \ldots + x_{k-\ell} + 0 \ = \ \ell$$

(2) Ensuite :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} i\ y_i &= y_1 + \left(\sum_{i=2}^{k-\ell+1} i\ y_i\right) + \cancel{\sum_{k-\ell+2}^{k} i\ y_i} && \textit{(rappelons que pour } i \geqslant k-\ell+2,\ y_i = 0\textit{)} \\ &= \left(\ell - \sum_{i=1}^{k-\ell} x_i\right) + \sum_{i=2}^{k-\ell+1} i\ x_{i-1} && \textit{(par définition des } y_i\textit{)} \\ &= \left(\ell - \sum_{i=1}^{k-\ell} x_i\right) + \sum_{i=1}^{k-\ell} (i+1)\ x_i && \textit{(par décalage d'indice)} \\ &= \ell + \sum_{i=1}^{k-\ell} \big((i+\cancel{1}) - \cancel{1}\big)\ x_i \\ &= \ell + \sum_{i=1}^{k-\ell} i\ x_i \ = \ \ell + (k-\ell) \ = \ k \end{aligned}$$

Ainsi, $(y_1, \dots, y_k) \in R(\ell,k)$. On a donc construit une application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi \ : & Q(\ell,k-\ell) & \to & R(\ell,k) \\ & (x_1, \dots, x_{k-\ell}) & \mapsto & (y_1, \dots, y_k) = \left(\ell - \sum\limits_{i=1}^{k-\ell} x_i, x_1, \dots, x_{k-\ell}, 0, \dots, 0\right) \end{array}$$

- Inversement, considérons $(x_1, \ldots, x_k) \in R(\ell, k)$. Alors :

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = \ell \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{k} i\ x_i = k$$

On obtient, par différence : $\sum\limits_{i=2}^{k} (i-1)\ x_i = k - \ell$.
(cette somme commence à 2 *car* $(i-1)\ x_i = 0$ *si* $i = 1$*)*
Ainsi, par décalage d'indice : $\sum\limits_{i=1}^{k-1} i\ x_{i+1} = k - \ell$, ce qu'on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^{k-\ell} i\ x_{i+1} \ + \sum_{i=k-\ell+1}^{k-1} i\ x_{i+1} \ = \ k - \ell$$

On déduit de cette égalité : $\forall i \in [\![k-\ell+1, k]\!],\ x_{i+1} = 0 \qquad (*)$
(s'il existe $i_0 \in [\![k-\ell+1, k]\!]$ *tel que* $x_{i_0+1} \neq 0$ *alors* $\sum\limits_{i=k-\ell+1}^{k-1} i\ x_{i+1} \geqslant i_0\ x_{i_0+1} \geqslant i_0 > k-\ell+1$*)*
Notons alors :

$$\left|\begin{array}{lcl} y_1 & = & x_2 \\ y_2 & = & x_3 \\ \vdots & & \vdots \\ y_{k-\ell} & = & x_{k-\ell+1} \\ \forall i \in [\![k-\ell+2, k]\!],\ y_i & = & 0 \end{array}\right.$$

Par définition des y_i, on a les propriétés suivantes.
(1) Tout d'abord :

$$\sum_{i=1}^{k-\ell} i\ y_i \ = \ \sum_{i=1}^{k-\ell} i\ x_{i+1} \ = \ k - \ell$$

(2) Ensuite, comme $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i = \ell$ alors :

$$\begin{array}{rrcl} & x_1 + \left(\sum\limits_{i=2}^{k-\ell+1} x_i\right) + \left(\sum\limits_{i=k-\ell+2}^{k} x_i\right) & = & \ell \\ \text{donc} & x_1 + \left(\sum\limits_{i=1}^{k-\ell} x_{i+1}\right) + \left(\sum\limits_{i=k-\ell+1}^{k-1} x_{i+1}\right) & = & \ell \quad \textit{(par décalage d'indice)} \\ \text{enfin} & x_1 + \left(\sum\limits_{i=1}^{k-\ell} y_i\right) + \cancel{\left(\sum\limits_{i=k-\ell+1}^{k-1} x_{i+1}\right)} & = & \ell \quad \textit{(d'après la proposition } (*)\textit{)} \end{array}$$

Ainsi, $\sum\limits_{i=1}^{k-\ell} y_i \ = \ \ell - x_1 \ \leqslant \ \ell$.

Ainsi, $(y_1, \ldots, y_{k-\ell}) \in Q(\ell, k-\ell)$. On a donc construit une application :

$$\begin{array}{rccl} \psi \ : & R(\ell, k) & \to & Q(\ell, k-\ell) \\ & (x_1, \ldots, x_k) & \mapsto & (y_1, \ldots, y_{k-\ell}) = (x_2, \ldots, x_{k-\ell+1}) \end{array}$$

- On peut alors démontrer : $\boxed{\varphi \circ \psi \ = \ \mathrm{id}_{R(\ell,k)}}$
  En effet, si $(x_1, \dots, x_k) \in R(\ell, k)$ alors :

$$\begin{aligned}
\varphi\big(\psi(x_1, \dots, x_k)\big) &= \varphi\big(x_2, \dots, x_{k-\ell+1}\big) \\
&= \big(\ell - (x_2 + \dots + x_{k-\ell+1}), x_2, \dots, x_{k-\ell+1}, 0, \dots, 0\big) \\
&= \left(\ell - \Big(\cancel{\sum_{i=1}^{k-\ell+1}} x_i - x_1\Big), x_2, \dots, x_{k-\ell+1}, 0, \dots, 0\right) \qquad \textit{(car } \sum_{i=1}^{k-\ell+1} x_i = \ell\textit{)} \\
&= (x_1, x_2, \dots, x_{k-\ell+1}, 0, \dots, 0) \\
&= (x_1, x_2, \dots, x_{k-\ell+1}, x_{k-\ell+2}, \dots, x_k) \qquad \textit{(pour } i \in [\![k-\ell+2, k]\!]\textit{, on a : } x_i = 0\textit{)} \\
&= (x_1, \dots, x_k)
\end{aligned}$$

- On démontre de même : $\boxed{\psi \circ \varphi \ = \ \mathrm{id}_{Q(\ell,k-\ell)}}$

On en déduit que φ et ψ sont des applications bijectives, réciproques l'une de l'autre. Ainsi, on a bien : $\mathrm{Card}\,\big(Q(\ell, k-\ell)\big) = \mathrm{Card}\,\big(R(\ell, k)\big)$, ce qui était l'objectif de la question.

Commentaire

- Dans la démonstration, on a explicité φ, bijection entre $Q(\ell, k-\ell)$ et $R(\ell, k)$ ainsi que sa bijection réciproque ψ. Expliciter ses deux applications permet de bien comprendre les mécanismes en jeu. Cependant, on pouvait présenter les choses différemment en exhibant seulement l'une des ces deux applications et en démontrant qu'elle réalise une bijection (de $Q(\ell, k-\ell)$ sur $R(\ell, k)$ ou inversement).

Par ailleurs, on est en droit de s'interroger sur la pertinence d'une telle question.

- Notons tout d'abord que la notion de dénombrement est souvent abordée lors du chapitre de première année *Probabilités sur un univers fini* et particulièrement lors de l'étude des coefficients binomiaux. Cependant, le terme « dénombrement » n'apparaît pas dans le programme officiel. La notion de cardinal (et la notation associée Card) d'un ensemble fini est elle aussi absente du programme officiel.
- Si chaque étape de la démonstration est à portée d'un bon élève de classe ECE, la prise d'initiative est beaucoup trop importante pour espérer qu'un élève en vienne à bout. Un découpage en sous-questions aurait permis de rendre cette question accessible, au moins en partie. Ce n'est cependant pas le choix fait dans l'énoncé. Cette question n'a donc pas le rôle discriminant qu'ont généralement les questions de concours : classer les élèves selon s'ils ont traité de manière satisfaisante ou non la question.

La présence d'une telle question permet de comprendre la stratégie à adopter lors des concours :

- il est essentiel de savoir repérer les questions les plus difficiles. Elles permettent de discriminer les candidats puisqu'il faut avoir du recul pour juger du niveau d'une question.
- il faut aborder ces questions en ayant en tête que le correcteur sera plus indulgent pour les candidats qui s'y aventurent. Cependant, il ne faut pas perdre du temps à essayer de les traiter jusqu'au bout : le nombre de points alloués ne sera certainement pas à hauteur du temps investi pour traiter une telle question.

Il ne faut donc pas hésiter à passer les questions les plus difficiles et aller chercher les points où ils sont, à savoir sur les questions plus abordables du sujet. □

c) Soit ℓ un entier supérieur ou égal à 2.

(i) Pour tout entier $k > \ell$, montrer l'égalité : $q(\ell, k) = q(\ell-1, k) + q(\ell, k-\ell)$.

Démonstration.
Soit k entier tel que $k > \ell$.

- Rappelons tout d'abord :

$$Q(\ell, k) \ = \ \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid \sum_{i=1}^{k} i\ x_i = k \quad \texttt{ET} \quad x_1 + \dots + x_k \leqslant \ell\}$$

- Si u est un entier naturel, alors :

$$\begin{aligned} u \leqslant \ell \ &\Leftrightarrow \ u = \ell \quad \texttt{OU} \quad u < \ell \\ &\Leftrightarrow \ u = \ell \quad \texttt{OU} \quad u \leqslant \ell - 1 \end{aligned}$$

Ceci permet d'écrire :

$$\begin{aligned} Q(\ell, k) \ &= \qquad \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid \sum_{i=1}^{k} i\ x_i = k \quad \texttt{ET} \quad x_1 + \dots + x_k = \ell\} \\ &\qquad \cup \ \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid \sum_{i=1}^{k} i\ x_i = k \quad \texttt{ET} \quad x_1 + \dots + x_k \leqslant \ell - 1\} \\ &= \ R(\ell, k) \ \cup \ Q(\ell-1, k) \end{aligned}$$

Ces deux ensembles étant disjoints, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Card}\left(Q(\ell, k)\right) \ &= \ \text{Card}\left(R(\ell, k)\right) \ + \ \text{Card}\left(Q(\ell-1, k)\right) \\ &= \ q(\ell, k-\ell) \ + \ q(\ell-1, k) \qquad \textit{(d'après la question précédente avec } k > \ell \geqslant 2\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier } k > \ell, \ q(\ell, k) = q(\ell-1, k) + q(\ell, k-\ell).}$$ □

(ii) Que vaut $q(\ell, \ell) - q(\ell-1, \ell)$?

Démonstration.

- On reprend la démonstration précédente :

$$\begin{aligned} Q(\ell, \ell) \ &= \qquad \{(x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{N}^\ell \mid \sum_{i=1}^{\ell} i\ x_i = \ell \quad \texttt{ET} \quad x_1 + \dots + x_\ell = \ell\} \\ &\qquad \cup \ \{(x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{N}^\ell \mid \sum_{i=1}^{\ell} i\ x_i = \ell \quad \texttt{ET} \quad x_1 + \dots + x_\ell \leqslant \ell - 1\} \end{aligned}$$

Le deuxième ensemble n'est autre que $Q(\ell-1, \ell)$.

- Intéressons-nous au premier ensemble.
Soit $(x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{\ell} i\ x_i = \ell$ et $x_1 + \dots + x_\ell = \ell$. Alors, par différence :

$$\sum_{i=2}^{\ell} (i-1)\ x_i = 0 \qquad \textit{(la somme commence à 2 car } i-1=0 \textit{ lorsque } i=1\textit{)}$$

Cette somme nulle étant constituée de nombres positifs, on en déduit :

$$x_2 = \dots = x_\ell = 0$$

Comme $\sum_{i=1}^{\ell} i\ x_i = \ell$, on obtient $x_1 = \ell$. On en déduit :

$$\left\{(x_1, \ldots, x_\ell) \in \mathbb{N}^\ell \mid \sum_{i=1}^{\ell} i\ x_i = \ell \quad \texttt{ET} \quad x_1 + \ldots + x_\ell = \ell\right\} \ = \ \{(\ell, 0, \ldots, 0)\}$$

Comme $(\ell, 0, \ldots, 0)$ n'est pas un élément de $Q(\ell - 1, \ell)$ (car $\ell + 0 + \ldots + 0 = \ell > \ell - 1$), on a écrit $Q(\ell, \ell)$ comme réunion de deux ensembles disjoints.

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcccc} \text{Card}\big(Q(\ell,\ell)\big) & = & \text{Card}\big(Q(\ell-1,\ell)\big) & + & \text{Card}\big(\{(\ell,0,\ldots,0)\}\big) \\ & = & q(\ell-1,\ell) & + & 1 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } q(\ell,\ell) - q(\ell-1,\ell) = 1.}$$ □

5. La fonction **Scilab** suivante dont le script est incomplet (lignes 5 et 6), calcule une matrice `qmatrix(n)` telle que pour chaque couple $(\ell, k) \in [\![1, n]\!]^2$, le coefficient situé à l'intersection de la ligne ℓ et de la colonne k est égal à $q(\ell, k)$.

```
1  function q = qmatrix(n)
2      q = ones(n, n)
3      for L = 2:n
4          for K = 2:n
5              if (K<L) then
6                  q(L,K) = ................
7              elseif (K==L) then
8                  q(L,K) = .............
9              else
10                 q(L,K) = q(L-1,K) + q(L,K-L)
11             end
12         end
13     end
14 endfunction
```

Commentaire

Dans le sujet original, l'indentation était légèrement différente, notamment en ce qui concerne les structures conditionnelles (pas de saut de ligne après les `then` et `else`). On présente ici le programme avec une indentation plus classique qui correspond à la présentation retenue dans les autres épreuves.

L'application de la fonction `qmatrix` à l'entier $n = 9$ fournit la sortie suivante :

```
--> qmatrix(9)
    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.
    1.    2.    2.    3.    3.    4.    4.    5.    5.
    1.    2.    3.    4.    5.    7.    8.   10.   12.
    1.    2.    3.    5.    6.    9.   11.   15.   18.
    1.    2.    3.    5.    7.   10.   13.   18.   23.
    1.    2.    3.    5.    7.   11.   14.   20.   26.
    1.    2.    3.    5.    7.   11.   15.   21.   28.
    1.    2.    3.    5.    7.   11.   15.   22.   29.
    1.    2.    3.    5.    7.   11.   15.   22.   30.
```

a) Compléter les lignes 5 et 6 du script de la fonction `qmatrix`.

Démonstration.
Le but de cette question est d'obtenir la matrice $\big(q(\ell,k)\big)_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant n}}$.
Pour ce faire, il faut se servir des résultats précédents.

- D'après la question ***4.a)(i)***, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $q(1,k) = 1$.

  $\boxed{\text{On en déduit que la première ligne de la matrice recherchée ne contient que des 1.}}$

- D'après la question ***4.a)(ii)***, pour tout entier $\ell \geqslant k$, $q(\ell,k) = p(k) = q(k,k)$. Cette propriété est notamment vérifiée pour $k = 1$. Ainsi :

  $$\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ q(\ell,1) = q(1,1) = 1$$

  $\boxed{\text{On en déduit que la première colonne de la matrice recherchée ne contient que des 1.}}$

- La stratégie du programme consiste à créer initialement une matrice carrée d'ordre `n` remplie de 1 et stockée dans une variable `q`.

```
2      q = ones(n, n)
```

  La première ligne et première colonne de cette matrice est, de fait, constituée de 1.
  Le reste du programme consiste à remplir cette matrice ligne par ligne (de la $2^{\text{ème}}$ à la $n^{\text{ème}}$).
  D'où la présence de la structure itérative suivante :

```
3      for L = 2:n
```

- La ligne ℓ de la matrice est mise à jour en procédant comme suit.

  (1) On met à jour les coefficients à gauche du coefficient diagonal. Autrement dit, les valeurs $q(\ell,k)$ pour $k < \ell$. Pour ce faire, on se sert de nouveau du résultat de la question ***4.a)(ii)***, qui stipule que pour $k < \ell$: $q(\ell,k) = p(k) = q(k,k)$. Ce qui se traduit comme suit :

```
4          for K = 2:n
5              if (K<L) then
6                  q(L,K) = q(K,K)
```

  (le coefficient en position (ℓ,k) est donné par la valeur du coefficient diagonal situé dans la même colonne)

  (2) On met alors à jour le coefficient diagonal. Pour ce faire, on se sert du résultat de la question ***4.c)(ii)***, qui stipule que pour tout $\ell \in [\![1,n]\!]$: $q(\ell,\ell) = 1 + q(\ell-1,\ell)$.
  Ce qui se traduit comme suit :

```
7              elseif (K==L) then
8                  q(L,K) = 1 + q(L-1,L)
```

  (le coefficient en position (ℓ,ℓ) est donné par la valeur du coefficient directement situé au-dessus auquel on ajoute 1)

  (3) On met alors à jour les coefficients à droite du coefficient diagonal.
  Pour ce faire, on se sert du résultat de la question ***4.c)(i)***, qui stipule que pour tout $k > \ell$: $q(\ell,k) = q(\ell-1,k) + q(\ell,k-\ell)$. Ce qui se traduit comme suit :

```
9              else
10                 q(L,K) = q(L-1,K) + q(L,K-L)
```

> **Commentaire**
>
> Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.
> On procédera de même dans les autres questions **Scilab**.

$\square$

b) Donner un script **Scilab** permettant de calculer $p(n)$ à partir d'une valeur de n entrée au clavier.

Démonstration.

- D'après la question ***4.a)(ii)***, on a, pour tout $\ell \geqslant k$: $Q(\ell, k) = P(k)$.
  On a notamment : $Q(n, n) \ = \ P(n)$. Et ainsi :

$$p(n) \ = \ q(n, n)$$

- Ainsi, $p(n)$ est le coefficient en position (n, n) de la matrice $\big(q(\ell, k)\big)_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant n}}$.
  Pour obtenir ce coefficient on écrit un programme :
  (1) qui demande à l'utilisateur d'entrer au clavier une valeur pour n et la stocke dans une variable `n`.
  (2) qui génère la matrice `q` à l'aide de la fonction de la question précédente.
  (3) qui affiche la valeur contenu dans la variable `n`.
  On obtient le programme **Scilab** suivant :

```
n = input('Entrez une valeur entière non nulle n')
q = qmatrix(n)
disp(q(n,n))
```

$\square$

c) Conjecturer une formule générale pour $q(2, k)$ applicable à tout entier $k \geqslant 1$, puis la démontrer.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 1$. Afin de conjecturer une formule pour $q(2, k)$, on place en regard la valeur de k et les coefficients de la $2^{\text{ème}}$ ligne de la matrice fournie dans l'énoncé.

Valeur de k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Valeur de $q(2, k)$	1	2	2	3	3	4	4	5	5

La parité de k semble jouer un rôle dans la valeur de $q(2, k)$. Plus précisément :

× si k est pair alors on peut conjecturer :

$$q(2, k) \ = \ \frac{k}{2} + 1$$

(si $k = 2$, $\frac{k}{2} + 1 = 2$; si $k = 4$, $\frac{k}{2} + 1 = 3$; si $k = 6$, $\frac{k}{2} + 1 = 4$ ...)

× si k est impair alors on peut conjecturer :

$$q(2, k) \ = \ \frac{k-1}{2} + 1$$

(si $k = 1$, $\frac{k-1}{2} + 1 = 1$; si $k = 3$, $\frac{k-1}{2} + 1 = 2$; si $k = 5$, $\frac{k-1}{2} + 1 = 3$ ...)

Démontrons par récurrence double : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k) : q(2,k) = \begin{cases} \frac{k}{2}+1 & \text{si } k \text{ pair} \\ \frac{k-1}{2}+1 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$.

▸ **Initialisation** :

- D'une part, d'après la question ***4.a)(ii)*** : $q(2,1) = q(1,1) = 1$.
- D'autre part : $\dfrac{1-1}{2} + 1 = 1$.

D'où $\mathcal{P}(1)$.

- D'une part, d'après la question ***4.c)(ii)*** : $q(2,2) = 1 + q(1,2) = 1 + 1 = 2$.
- D'autre part : $\dfrac{2}{2} + 1 = 2$.

D'où $\mathcal{P}(2)$.

▸ **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}(k)$ et $\mathcal{P}(k{+}1)$, et démontrons $\mathcal{P}(k{+}2)$ $\left(i.e.\ q(2,k+2) = \begin{cases} \frac{k+2}{2}+1 & \text{si } k \text{ pair} \\ \frac{k+1}{2}+1 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases} \right)$.

Comme $k \in \mathbb{N}^*$, $k+2 > 2$. Ainsi, d'après la question ***4.c)(i)*** :

$$\begin{array}{rcccc} q(2,k+2) & = & q(1,k+2) & + & q(2,k) \\ & = & 1 & + & q(2,k) \end{array}$$

Deux cas se présentent :

× si k pair alors $q(2,k) = \frac{k}{2} + 1$ et :

$$q(2,k+2) \ = \ 1 + \frac{k}{2} + 1 \ = \ \frac{k+2}{2} + 1$$

× si k impair alors $q(2,k) = \frac{k-1}{2} + 1$ et :

$$q(2,k+2) \ = \ 1 + \frac{k-1}{2} + 1 \ = \ \frac{k+1}{2} + 1$$

D'où $\mathcal{P}(k+2)$.

$$\boxed{\text{On en déduit, par principe de récurrence double : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(k).}$$

Commentaire

- La valeur de $q(2,k)$ change tous les 2 rangs. Il est donc assez naturel d'utiliser une récurrence double pour démontrer la conjecture.
- On aurait pu présenter la conjecture à l'aide de la partie entière par défaut $\lfloor . \rfloor$. Par exemple :

$$q(2,k) \ = \ \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor$$

On a fait le choix dans la démonstration de ne pas introduire cet opérateur afin de faciliter les manipulations algébriques.

□

Problème

Dans tout le problème :

- toutes les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$;
- on note n un entier supérieur ou égal à 2.

L'objet du problème est l'étude de sommes de variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli de même paramètre, mais qui ne sont pas nécessairement indépendantes.
Les parties II et III sont indépendantes de la partie I.

Partie I. Valeurs possibles du coefficient de corrélation linéaire dans divers schémas de Bernoulli

Dans cette partie, on considère des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suivant chacune la même loi de Bernoulli de paramètre p avec $0 < p < 1$, c'est à dire :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}([X_k = 1]) = p \quad et \quad \mathbb{P}([X_k = 0]) = 1 - p$$

On suppose que pour tout couple $(k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $k \neq \ell$, le coefficient de corrélation linéaire des variables X_k et X_ℓ est le même ; on note r ce coefficient. On a donc :

$$\forall (k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2,\ \frac{\text{Cov}(X_k, X_\ell)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_k)\mathbb{V}(X_\ell)}} = \begin{cases} 1 & si\ k = \ell \\ r & si\ k \neq \ell \end{cases}$$

1. a) Dans les cas (i) et (ii) suivants, calculer la valeur de r et exprimer la variance de la variable aléatoire $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ en fonction de n et p.

(i) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

(ii) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont toutes égales.

De plus, préciser la loi de $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ dans chacun des deux cas précédents.

Démonstration.

(i) Si les v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors : $\forall k \neq \ell$, $\text{Cov}(X_k, X_\ell) = 0$.

Or : $\forall k \neq \ell$, $r = \dfrac{\text{Cov}(X_k, X_\ell)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_k)\,\mathbb{V}(X_\ell)}}$.

$$\boxed{\text{Donc } r = 0.}$$

La v.a.r. $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ admet une variance en tant que somme de v.a.r. discrètes qui en admettent une. On rappelle : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Par indépendance de $X_1, \ldots, X_n$:

$$\mathbb{V}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \Big(p(1-p)\Big) = n\,p\,(1-p)$$

$$\boxed{\mathbb{V}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) = n\,p\,(1-p)}$$

$$\boxed{\text{Enfin, comme } X_1, \ldots, X_n \text{ sont indépendantes, par stabilité des lois binomiales : } \sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).}$$

(ii) Si les v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$ sont égales, alors :

$$\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2, \ \mathrm{Cov}(X_k, X_\ell) = \mathrm{Cov}(X_1, X_1) = \mathbb{V}(X_1)$$

Donc, pour tout $k \neq \ell$:

$$r \ = \ \frac{\mathrm{Cov}(X_k, X_\ell)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_k)\,\mathbb{V}(X_\ell)}} \ = \ \frac{\mathbb{V}(X_1)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_1)\,\mathbb{V}(X_1)}} \ = \ \frac{\mathbb{V}(X_1)}{\mathbb{V}(X_1)} \ = \ 1$$

$$\boxed{r = 1}$$

On l'a précisé dans le point précédent : la v.a.r. $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ admet une variance en tant que somme de v.a.r. discrètes qui en admettent une.
Comme les v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$ sont égales :

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \ = \ \sum_{k=1}^{n} X_1 \ = \ n\,X_1$$

On en déduit :

$$\mathbb{V}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) \ = \ \mathbb{V}(n\,X_1) \ = \ n^2\,\mathbb{V}(X_1) \ = \ n^2\,p\,(1-p)$$

$$\boxed{\mathbb{V}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) = n^2\,p\,(1-p)}$$

- On note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k = n\,X_1$.

$$\boxed{\text{Comme } X_1(\Omega) = \{0,1\}, \text{ on obtient : } S_n(\Omega) = \{0,n\}.}$$

- De plus : $\mathbb{P}([S_n = 0]) \ = \ \mathbb{P}([n\,X_1 = 0]) \ = \ \mathbb{P}([X_1 = 0]) \ = \ 1-p$.
  Comme la famille $([S_n = 0], [S_n = n])$ est un système complet d'événements :

$$\mathbb{P}([S_n = n]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([S_n = 0]) \ = \ \cancel{1} - (\cancel{1} - p) \ = \ p$$

$$\boxed{\mathbb{P}([S_n = 0]) = 1-p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([S_n = n]) = p}$$

Commentaire

- Dans le programme ECE, les calculs de covariance ne sont introduits que pour les v.a.r. discrètes. On peut préciser la valeur de la variance d'une somme de v.a.r. discrètes à l'aide de l'opérateur de covariance. Plus précisément, si X_1 et X_2 sont deux v.a.r. **discrètes** qui admettent un moment d'ordre 2, alors $X_1 + X_2$ admet une variance donnée par :

$$\mathbb{V}(X_1 + X_2) \ = \ \mathbb{V}(X_1) + 2\ \mathrm{Cov}(X_1, X_2) + \mathbb{V}(X_2)$$

  Ce résultat justifie la rédaction « $\sum\limits_{i=1}^{k} X_i$ admet une variance comme somme de v.a.r. **discrètes** qui en admettent une ».
- Le résultat précédent n'est pas donné dans le cas de v.a.r. quelconques. Cela se justifie par le fait que la définition de $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ (qui requiert le calcul de l'espérance d'un produit) n'est défini, dans le programme ECE, que dans le cadre de v.a.r. discrètes. Rappelons que si X_1 et X_2 admettent une variance :

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) \ = \ \mathbb{E}\big(X_1 X_2\big) - \mathbb{E}\big(X_1 X_2\big)$$

  (par la formule de Kœnig-Huygens, on récupère alors : $\mathrm{Cov}(X_1, X_1) \ = \ \mathbb{V}(X_1)$).

□

b) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la variance de la variable aléatoire $\sum\limits_{i=1}^{k} X_i$ est donnée par la formule :

$$\mathbb{V}\Big(\sum_{i=1}^{k} X_i\Big) \;=\; k\, p\,(1-p)\,(1+(k-1)r)$$

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On l'a déjà précisé : $\sum\limits_{i=1}^{k} X_i$ admet une variance. De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\Big(\sum_{i=1}^{k} X_i\Big) &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{V}(X_i) + \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant k \\ i \neq j}} \mathrm{Cov}\big(X_i, X_j\big) \\
&= \sum_{i=1}^{k} p(1-p) + \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant k \\ i \neq j}} r\, \sqrt{\mathbb{V}(X_i)\ \mathbb{V}(X_j)} \qquad \textit{(par définition de } r\textit{)} \\
&= k\ p(1-p) + \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant k \\ i \neq j}} r\, \sqrt{p(1-p)\ p(1-p)} \\
&= k\ p(1-p) + k(k-1)\ r\ p(1-p)
\end{aligned}$$

En effet : $\mathrm{Card}\Big([\![1, k]\!]^2 \setminus \{(i,j) \in [\![1, k]\!]^2 \mid i = j\}\Big) \;=\; k^2 - k \;=\; k\ (k-1)$.

$$\boxed{\text{On obtient bien, en factorisant : } \mathbb{V}\Big(\sum_{i=1}^{k} X_i\Big) \;=\; k\, p\,(1-p)\,(1+(k-1)r).}$$

Commentaire

- La formule étant donnée dans l'énoncé, on pouvait procéder par récurrence sur k.
Pour l'étape d'hérédité, on remarque :

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{k+1} X_i\right) \;=\; \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i + X_{k+1}\right) \;=\; \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) + 2\ \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i,\ X_{k+1}\right) + \mathbb{V}(X_{k+1})$$

- On utilise dans cette question la généralisation, pour k v.a.r. , de la formule donnant la somme d'une variance de v.a.r. discrètes admettant un moment d'ordre 2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\Big(\sum_{i=1}^{k} X_i\Big) &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{V}(X_i) + \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant k \\ i \neq j}} \mathrm{Cov}\big(X_i, X_j\big) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{V}(X_i) + \ 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} \mathrm{Cov}\big(X_i, X_j\big)
\end{aligned}$$

La deuxième égalité se déduit de la première par symétrie de l'opérateur $\mathrm{Cov}(.,.)$.
Il est conseillé de connaître ces égalités, parfois présentes à l'écrit et fréquemment utilisés à l'oral de mathématiques de `HEC`.

Commentaire

La généralisation de la formule de la variance de la somme n'est pas explicitement donnée dans le programme. Nous donnons ci-dessous sa démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\Big(\sum_{i=1}^{k} X_i\Big) &= \mathrm{Cov}\Big(\sum_{i=1}^{k} X_i, \sum_{j=1}^{k} X_j\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Cov}\Big(X_i, \sum_{j=1}^{k} X_j\Big) && \textit{(par linéarité à gauche de l'opérateur } \mathrm{Cov}(.,.)\textit{)} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{j=1}^{k} \mathrm{Cov}\big(X_i, X_j\big)\Big) && \textit{(par linéarité à droite de l'opérateur } \mathrm{Cov}(.,.)\textit{)} \\
&= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant k} \mathrm{Cov}\big(X_i, X_j\big) \\
&= \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant k \\ i=j}} \mathrm{Cov}\big(X_i, X_j\big) + \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant k \\ i\neq j}} \mathrm{Cov}\big(X_i, X_j\big) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Cov}\big(X_i, X_i\big) + \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant k \\ i\neq j}} \mathrm{Cov}\big(X_i, X_j\big) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{V}(X_i) + \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant k \\ i\neq j}} \mathrm{Cov}\big(X_i, X_j\big)
\end{aligned}$$

□

c) En déduire que le coefficient r est au moins égal à $-\dfrac{1}{n-1}$.

Démonstration.
D'après la formule de la question précédente, appliquée avec $k = n$:

$$\mathbb{V}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = n\,p\,(1-p)\,(1+(n-1)r)$$

Une variance étant toujours positive : $\mathbb{V}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) \geqslant 0$.

Ainsi, en multipliant par $\dfrac{1}{n\,p\,(1-p)} > 0$, on obtient :

$$\begin{array}{lrcl}
 & 1+(n-1)\,r & \geqslant & 0 \\
\text{donc} & (n-1)\,r & \geqslant & -1 \\
\text{et ainsi} & r & \geqslant & -\dfrac{1}{n-1} \quad \textit{(car } n-1>0\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } r \geqslant -\frac{1}{n-1}.}$$

□

2. On suppose dans cette question que n est au moins égal à 2.

a) Montrer que r est égal à -1 si et seulement si on a : $\mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = p(2p-1)$.

Démonstration.

- Par définition :

$$\begin{aligned} r &= \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_1)\mathbb{V}(X_2)}} \\ &= \frac{\mathbb{E}\big(X_1X_2\big) - \mathbb{E}\big(X_1\big)\ \mathbb{E}\big(X_2\big)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_1)\mathbb{V}(X_2)}} \\ &= \frac{\mathbb{E}\big(X_1X_2\big) - p^2}{p(1-p)} \qquad \textit{(car } X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)\textit{)} \end{aligned}$$

- Les v.a.r. X_i suivant toutes la même loi de Bernoulli, $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{0, 1\}$.
  Ainsi, $\big(X_1X_2\big)\big(\Omega\big) = \{0, 1\}$. Plus précisément, si $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} (X_1X_2)(\omega) = 1 &\Leftrightarrow X_1(\omega)X_2(\omega) = 1 \\ &\Leftrightarrow X_1(\omega) = 1 \ \texttt{ET} \ X_2(\omega) = 1 \\ &\Leftrightarrow \omega \in [X_1 = 1] \cap [X_2 = 1] \end{aligned}$$

  En notant $u = \mathbb{P}\big(\,[X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\,\big)$, on obtient : $X_1X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(u)$.
- On en déduit que la v.a.r. X_1X_2 admet une espérance donnée par :

$$\mathbb{E}\big(X_1X_2\big) = u$$

- Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} r = -1 &\Leftrightarrow \frac{u - p^2}{p(1-p)} = -1 \\ &\Leftrightarrow u - p^2 = -p(1-p) \\ &\Leftrightarrow u = p^2 - p(1-p) \\ &\Leftrightarrow u = p\ \big(p - (1-p)\big) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } r = -1 \ \Leftrightarrow\ \mathbb{P}\big(\,[X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\,\big) = p\ \big(2p - 1\big).}$$

□

b) Que vaut alors $\mathbb{P}\big(\,[X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\,\big)$?

Démonstration.
On suppose dans cette question : $r = -1$.
Ainsi, d'après la question précédente : $\mathbb{P}\big(\,[X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\,\big) = p\ (2p - 1)$.

- La famille $([X_2 = 0]\,, [X_2 = 1])$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}\big(\,[X_1 = 0]\,\big) = \mathbb{P}\big(\,[X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\,\big) + \mathbb{P}\big(\,[X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]\,\big)$$

  De plus : $\mathbb{P}\big(\,[X_1 = 0]\,\big) = 1 - p$ car $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

- Il reste alors à déterminer $\mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]\big)$.
  On raisonne alors avec le système complet $([X_1 = 0], [X_1 = 1])$.
  D'après la formule des probabilités totales :

  $$\mathbb{P}\big([X_2 = 1]\big) = \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]\big) + \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\big)$$

  Ainsi, on en déduit :

  $$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]\big) &= \mathbb{P}\big([X_2 = 1]\big) - \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\big) \\ &= p - p\,(2p-1) \\ &= p\,\big(1 - (2p-1)\big) = p\,(2-2p) = 2p\,(1-p) \end{aligned}$$

  $$\boxed{\text{Si } r = -1, \text{ on a : } \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]\big) = 2p\,(1-p).}$$

- On obtient alors :

  $$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\big) &= \mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big) - \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]\big) \\ &= (1-p) - 2p\,(1-p) \\ &= (1-p)\,(1-2p) \end{aligned}$$

  $$\boxed{\text{Si } r = -1, \text{ alors } \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\big) = (1-p)\,(1-2p).}$$

Commentaire

- On a démontré dans cette question :

  $$\mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big) = \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\big) + \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]\big)$$

  En raisonnant de même, on démontre :

  $$\mathbb{P}\big([X_2 = 0]\big) = \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\big) + \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]\big)$$

  Comme X_1 et X_2 suivent la même loi : $\mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big) = \mathbb{P}\big([X_2 = 0]\big)$.
  On en déduit alors :

  $$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]\big) &= \mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big) - \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([X_2 = 0]\big) - \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]\big) \end{aligned}$$

  $$\boxed{\mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]\big) = \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]\big)}$$

  Cette propriété semble assez naturelle puisque les v.a.r. X_i semblent jouer un rôle symétrique. Pour autant, il n'y a pas lieu de l'affirmer sans démonstration.

- Il était aussi possible de faire une démonstration réutilisant la question précédente. Cette démonstration est plus subtile mais utilise des propriétés qu'il convient de maîtriser. On la présente dans la remarque suivante.

Commentaire

- Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note : $Y_i = 1 - X_i$. Alors : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(1-p)$.
En effet, $Y_i(\Omega) = \{0,1\}$ et :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([Y_i=0]\big) &= \mathbb{P}\big([1-X_i=0]\big) = \mathbb{P}\big([X_i=1]\big) = p \\ \mathbb{P}\big([Y_i=1]\big) &= 1-\mathbb{P}\big([Y_i=0]\big) = 1-p \end{aligned}$$

Dans la suite, on note $q = 1-p$, de sorte que : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(q)$.

- Les v.a.r. Y_1 et Y_2 admettent chacune un moment d'ordre 2.
Ainsi, Y_1 et Y_2 admettent un coefficient de corrélation linéaire. En appliquant le résultat de la question précédente à Y_1, Y_2, on obtient :

$$\begin{aligned} \rho(Y_1,Y_2) = -1 &\Leftrightarrow \mathbb{P}\big([Y_1=1]\cap[Y_2=1]\big) = q\ (2q-1) \\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}\big([X_1=0]\cap[X_2=0]\big) = (1-p)\ (2\ (1-p)-1) \\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}\big([X_1=0]\cap[X_2=0]\big) = (1-p)\ (1-2p) \end{aligned}$$

- Nous allons maintenant démontrer : $\rho(Y_1,Y_2) = \rho(X_1,X_2)$.
Remarquons tout d'abord que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\mathbb{V}(Y_i) = \mathbb{V}(1-X_i) = \mathbb{V}(X_i)$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(Y_1,Y_2) &= \mathrm{Cov}(1-X_1,1-X_2) \\ &= \mathrm{Cov}(1,1-X_2) - \mathrm{Cov}(X_1,1-X_2) && \textit{(par linéarité à gauche de l'opérateur } \mathrm{Cov}(.,.)\textit{)} \\ &= \mathrm{Cov}(1,1-X_2) - \mathrm{Cov}(X_1,1) + \mathrm{Cov}(X_1,X_2) && \textit{(par linéarité à droite de l'opérateur } \mathrm{Cov}(.,.)\textit{)} \\ &= \mathrm{Cov}(X_1,X_2) \end{aligned}$$

En effet, pour toute v.a.r. discrète V admettant un moment d'ordre 1 :

$$\mathrm{Cov}(1,V) = \mathrm{Cov}(V,1) = \mathbb{E}(1\ V) - \mathbb{E}(1)\ \mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(V) - \mathbb{E}(V) = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Finalement, } \rho(Y_1,Y_2) = \rho(X_1,X_2) = r. \\ \text{Et ainsi : } r=-1 \Leftrightarrow \mathbb{P}\big([X_1=0]\cap[X_2=0]\big) = (1-p)\ (1-2p). \end{array}}$$

□

c) En déduire que le coefficient r ne peut-être égal à -1 que lorsque $p = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}([X_1+X_2=1]) = 1$.

Démonstration.

- D'après la question ***1.b)*** :

$$\mathbb{V}(X_1+X_2) = 2\ p(1-p)\ (1+r)$$

- Comme $p \in\ ]0,1[$: $r=-1 \Leftrightarrow \mathbb{V}(X_1+X_2) = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} r=-1 &\Leftrightarrow X_1+X_2 \text{ est une v.a.r. presque sûrement égale à son espérance} \\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}([X_1+X_2=2p]) = 1 \end{aligned}$$

En effet, par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = 2p$.
La valeur $2p$ est alors obligatoirement une valeur prise par $X_1 + X_2$.
Or : $(X_1 + X_2)(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
Comme $p \in \,]0, 1[$, les cas $2p = 0$ et $2p = 2$ sont à exclure.

$$\boxed{\text{On en déduit que } r = -1 \text{ si et seulement si } p = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}([X_1 + X_2 = 1]) = 1.}$$

Commentaire

Revenons rapidement sur la propriété dont on se sert dans la démonstration :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}\left(\left[\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2 = 0\right]\right) = 1 \quad \textit{(car la v.a.r. } Y = \left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2 \textit{ est positive et d'espérance nulle)} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}([X = \mathbb{E}(X)]) = 1 \end{aligned}$$

En effet : $\left[(X - \mathbb{E}(X))^2 = 0\right] = [X - \mathbb{E}(X) = 0] = [X = \mathbb{E}(X)]$. □

3. On suppose dans cette question que n est supérieur ou égal à 3 et que $\mathbb{P}\left(\left[\sum\limits_{k=1}^{n} X_k = 1\right]\right) = 1$.

a) Exprimer les valeurs de p et r en fonction de n.

Démonstration.
On suppose dans l'énoncé que la v.a.r. $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ est presque-sûrement constante égale à 1.

- On en déduit qu'elle admet une espérance égale à 1.
  Or, par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}\big(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\big) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} p = np$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } np = 1 \text{ et donc } p = \frac{1}{n}.}$$

- La v.a.r. $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ étant presque-sûrement constante, elle admet une variance nulle.
  Or, d'après la question ***1.b)*** : $\mathbb{V}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\Big) = np(1-p)\ \big(1 + (n-1)\ r\big)$.
  Et comme $np(1-p) > 0$ alors : $1 + (n-1)\ r = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } (n-1)\ r = -1 \text{ ou encore : } r = -\frac{1}{n-1}.}$$

□

b) Déterminer les n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ pour lesquels la probabilité $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} [X_k = x_k]\right)$ est strictement positive et la calculer.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned} \left[\sum_{k=1}^{n} X_k = 1\right] \quad = \quad & \quad [X_1 = 1] \cap [X_2 = 0] \cap \ldots \cap [X_{n-1} = 0] \cap [X_n = 0] \\ & \cup \quad [X_1 = 0] \cap [X_2 = 1] \cap \ldots \cap [X_{n-1} = 0] \cap [X_n = 0] \\ & \ldots \quad \ldots \\ & \cup \quad [X_1 = 0] \cap [X_2 = 0] \cap \ldots \cap [X_{n-1} = 1] \cap [X_n = 0] \\ & \cup \quad [X_1 = 0] \cap [X_2 = 0] \cap \ldots \cap [X_{n-1} = 0] \cap [X_n = 1] \end{aligned}$$

- Les événements de cette réunion étant deux à deux incompatibles, on en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left[\sum_{k=1}^{n} X_k = 1\right]\right) \quad = \quad & \mathbb{P}\left([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0] \cap \ldots \cap [X_{n-1} = 0] \cap [X_n = 0]\right) \\ + \quad & \mathbb{P}\left([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1] \cap \ldots \cap [X_{n-1} = 0] \cap [X_n = 0]\right) \\ \ldots \quad & \ldots \\ + \quad & \mathbb{P}\left([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0] \cap \ldots \cap [X_{n-1} = 1] \cap [X_n = 0]\right) \\ + \quad & \mathbb{P}\left([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0] \cap \ldots \cap [X_{n-1} = 0] \cap [X_n = 1]\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Cette somme étant égale à 1, on en déduit que les seuls } n\text{-uplets } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n \\ \text{pour lesquels la probabilité } \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} [X_k = x_k]\right) \text{ est strictement positive sont ceux qui ne} \\ \text{contiennent que des coordonnées nulles mises à part l'une d'entre elles égale à 1.}\end{array}}$$

(s'il existait un autre tel n-uplet $(a_1, \ldots, a_n)$, l'événement $\left[\sum\limits_{k=1}^{n} X_k = 1\right] \cup [(X_1, \ldots, X_n) = (a_1, \ldots, a_n)]$ serait de probabilité strictement supérieure à 1, ce qui est impossible)

- Démontrons maintenant que toutes ces probabilités sont égales.
Pour ce faire, pour tout $i_0 \in [\![1, n]\!]$ on note :

$$B_n^{i_0} \;=\; \bigcap_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} [X_k = 0]$$

Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$. La famille $\left(B_n^{i_0}, \overline{B_n^{i_0}}\right)$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}\Big([X_{i_0} = 1]\Big) \;=\; \mathbb{P}\Big([X_{i_0} = 1] \cap B_n^{i_0}\Big) + \cancel{\mathbb{P}\Big([X_{i_0} = 1] \cap \overline{B_n^{i_0}}\Big)}$$

En effet, $\mathbb{P}\Big([X_{i_0} = 1] \cap \overline{B_n^{i_0}}\Big) = 0$ car :

$$[X_{i_0} = 1] \cap \overline{B_n^{i_0}} \;\subset\; \left[\sum_{k=1}^{n} X_k > 1\right]$$

et donc, par croissance de l'application probabilité $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}\Big([X_{i_0} = 1] \cap \overline{B_n^{i_0}}\Big) \;\leqslant\; \mathbb{P}\Big(\left[\sum_{k=1}^{n} X_k > 1\right]\Big) = 0$$

$$\boxed{\text{Pour tout } i_0 \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}\Big([X_{i_0} = 1] \cap B_n^{i_0}\Big) = p.}$$

- Toutes ces probabilités étant égales, on a :

$$\mathbb{P}\left(\left[\sum_{k=1}^{n} X_k = 1\right]\right) \;=\; n\,\mathbb{P}\left([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0] \cap \ldots \cap [X_{n-1} = 0] \cap [X_n = 0]\right) \;=\; np$$

et ainsi, $np = 1$ d'où $p = \dfrac{1}{n}$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les } n\text{-uplets } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n \text{ pour lesquels la probabilité } \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} [X_k = x_k]\right) \text{ est} \\ \text{strictement positive ont une probabilité égale à } p = \dfrac{1}{n}.\end{array}}$$

□

Partie II. Lois bêta-binomiales

4. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt$ est convergente si seulement si $x > 0$.

Démonstration.
La fonction $f : t \mapsto t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0, \frac{1}{2}]$.

× $f(t) = t^{x-1}\,(1-t)^{y-1} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ car $(1-t)^{y-1} \underset{t\to 0}{\sim} 1^{y-1} = 1$.

× $\forall t \in \,]0, \frac{1}{2}]$, $t^{x-1}\,(1-t)^{y-1} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^{1-x}} \geqslant 0$.

× En tant qu'intégrale de Riemann impropre en 0, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^{1-x}}\,dt$ est convergente si et seulement si $1 - x < 1$ c'est à dire $x > 0$.

Ainsi, par critère de convergence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$. □

b) Pour tout réel ε tel que $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$, établir à l'aide d'un changement de variable affine, l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt \;=\; \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} t^{y-1}\,(1-t)^{x-1}\,dt$$

Démonstration.
Soit $\varepsilon \in \,]0, \frac{1}{2}[$.

- La fonction f est continue sur $[\frac{1}{2}, 1-\varepsilon]$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt$ est bien définie.
- On effectue le changement de variable $\boxed{u = 1 - t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = 1 - t \quad \text{(et donc } t = 1 - u) \\ \hookrightarrow du = -dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \bullet\ t = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ u = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \bullet\ t = 1-\varepsilon \ \Rightarrow\ u = 1 - (1-\varepsilon) = \varepsilon \end{array}\right.$$

- Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto 1 - u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\frac{1}{2}, 1-\varepsilon]$.
  On obtient alors :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt \;=\; \int_{\frac{1}{2}}^{\varepsilon} (1-u)^{x-1}\,u^{y-1}\,(-du)$$

Enfin :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\varepsilon} (1-u)^{x-1}\,u^{y-1}\,(-du) \;=\; -\int_{\frac{1}{2}}^{\varepsilon} (1-u)^{x-1}\,u^{y-1}\,du \;=\; \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} (1-u)^{x-1}\,u^{y-1}\,du$$

On a bien : $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt \;=\; \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} u^{y-1}\,(1-u)^{x-1}\,du.$

□

c) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

Démonstration.

- On procède par équivalence.

$$\begin{aligned}
&\text{L'intégrale impropre } \int_0^{\frac{1}{2}} u^{y-1}\,(1-u)^{x-1}\,du \text{ est convergente} & \\
\Leftrightarrow\ &\text{La fonction } H : \varepsilon \mapsto \int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} u^{y-1}\,(1-u)^{x-1}\,du \text{ admet une limite finie en } 0 & \textit{(par définition)} \\
\Leftrightarrow\ &\text{La fonction } G : \varepsilon \mapsto \int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt \text{ admet une limite finie en } 0 & \textit{(d'après la question 4.b)} \\
\Leftrightarrow\ &\text{La fonction } F : \varepsilon \mapsto \int_{\frac{1}{2}}^{\varepsilon} t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt \text{ admet une limite finie en } 1 & (*) \\
\Leftrightarrow\ &\text{L'intégrale impropre } \int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt \text{ est convergente} & \textit{(par définition)}
\end{aligned}$$

L'équivalence $(*)$ est vérifiée grâce au théorème de composition des limites qui permet d'affirmer, lorsque l'une des deux limites suivantes existe, alors l'autre existe et :

$$\lim_{\varepsilon\to 1} F(\varepsilon) \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0} G(\varepsilon)$$

> On en déduit alors, par la question ***4.a)***, que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt$ est convergente si et seulement si $y > 0$.

- D'autre part :

$$\begin{aligned}
&\text{L'intégrale impropre } \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt \text{ est convergente} & \\
\Leftrightarrow\ &\text{Les intégrales impropres } \int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt \text{ et } \int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt \text{ sont convergentes} & \textit{(par définition)}
\end{aligned}$$

> Ainsi, d'après le point précédent et la question ***4.a)***, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$. □

Dans toute la suite du problème, on pose : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt.$

5. Soit x et y des réels strictement positifs.

a) À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation : $B(x+1,y) = \dfrac{x}{y} \times B(x,y+1)$.

Démonstration.
Soit $(c,d) \in \,]0,1[^2$ avec $c \leqslant d$. La fonction $t \mapsto t^x \, (1-t)^{y-1}$ est continue sur $[c,d]$.

- On détermine $\displaystyle\int_c^d t^x \, (1-t)^{y-1} \, dt$ en procédant par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t^x & \quad & u'(t) & = & x \, t^{x-1} \\ v'(t) & = & (1-t)^{y-1} & & v(t) & = & -\dfrac{(1-t)^y}{y} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[c,d]$.

On obtient finalement :

$$\int_c^d t^x \, (1-t)^{y-1} \, dt \;=\; \frac{-1}{y} \left[\, t^x \, (1-t)^y \, \right]_c^d + \frac{x}{y} \int_c^d t^{x-1} \, (1-t)^y \, dt$$

- Or : $\left[\, t^x \, (1-t)^y \, \right]_c^d \; = \; d^x \, (1-d)^y - c^x \, (1-c)^y$. Et :

$$\lim_{c \to 0} \, (d^x \, (1-d)^y - c^x \, (1-c)^y) = d^x \, (1-d)^y - 0^x \, (1-0)^y = d^x \, (1-d)^y$$

$$\text{puis} \quad \lim_{d \to 1} \, (d^x \, (1-d)^y) = 1^x \, (1-1)^y = 0$$

- Les intégrales $\displaystyle\int_0^1 t^x \, (1-t)^{y-1} \, dt$ et $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1} \, (1-t)^y \, dt$ sont convergentes.

On en déduit que toutes les quantités présentes dans l'égalité admettent des limites finies.
Par passage à la limite ($c \to 0$ puis $d \to 0$) dans l'égalité, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_0^1 t^x \, (1-t)^{y-1} \, dt & = & \displaystyle\frac{x}{y} \int_0^1 t^{x-1} \, (1-t)^y \, dt \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ B(x+1,y) & & \dfrac{x}{y} \, B(x,y+1) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } B(x+1,y) = \frac{x}{y} \times B(x,y+1).}$$

Commentaire

Le programme officiel stipule que « les techniques de calculs (**intégration par parties**, changement de variables) seront pratiquées sur des intégrales sur un segment ».
On ne peut donc rédiger cette question en travaillant directement sur l'intervalle $]0,1[$.
C'est pourquoi on introduit les réels c et d qui permettent d'effectuer l'IPP sur une intégrale sur le segment $[c,d]$.

$\square$

b) En déduire l'égalité : $B(x, y+1) = \dfrac{y}{x+y} \times B(x, y)$.

Démonstration.

- On raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{rrcl} & B(x,y+1) & = & \dfrac{y}{x+y}\ B(x,y) \\[2mm] \Leftrightarrow & \dfrac{x+y}{y}\ B(x,y+1) & = & B(x,y) \\[2mm] \Leftrightarrow & \left(\dfrac{x}{y}+1\right)\ B(x,y+1) & = & B(x,y) \\[2mm] \Leftrightarrow & \dfrac{x}{y}\ B(x,y+1) + B(x,y+1) & = & B(x,y) \\[2mm] \Leftrightarrow & B(x+1,y) + B(x,y+1) & = & B(x,y) \qquad \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

- Calculons :

$$\begin{array}{rcl} B(x+1,y) + B(x,y+1) & = & \displaystyle\int_0^1 t^x\ (1-t)^{y-1}\ dt + \int_0^1 t^{x-1}\ (1-t)^y\ dt \quad \textit{(par définition)} \\[2mm] & = & \displaystyle\int_0^1 \left(t^x\ (1-t)^{y-1} + t^{x-1}\ (1-t)^y\right)\ dt \\[2mm] & = & \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\ (1-t)^{y-1}\ \left(\cancel{t} + (1-\cancel{t})\right)\ dt \\[2mm] & = & \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\ (1-t)^{y-1}\ dt \\[2mm] & = & B(x,y) \end{array}$$

Ainsi, la dernière égalité du raisonnement par équivalence est vérifiée.
Il en est donc de même de la première.

$$\boxed{B(x,y+1) = \dfrac{x}{x+y}\ B(x,y)}$$

□

6. Pour tout réel z, soit $\left((z)^{[m]}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$(z)^{[0]} = 1 \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{N},\ (z)^{[m+1]} = (z+m) \times (z)^{[m]}$$

(par exemple, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $(1)^{[m]} = m!$)
Établir pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et pour tout couple (k, ℓ) d'entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant \ell$, la relation :

$$B(x+k, y+\ell-k) \ = \ \frac{(x)^{[k]} \times (y)^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y)$$

Démonstration.
Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On souhaite démontrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \ell \in [\![k, +\infty[\![,\ B(x+k, y+\ell-k) \ = \ \frac{(x)^{[k]} \times (y)^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y)$$

On démontre par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(k)$

où $\mathcal{P}(k) : \forall \ell \in [\![k, +\infty[\![,\ B(x+k, y+\ell-k) \ = \ \dfrac{(x)^{[k]} \times (y)^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y)$

▶ **Initialisation** :

Il s'agit de démontrer $\mathcal{P}(0) : \forall \ell \in [\![0, +\infty[\![,\ B(x, y+\ell) \ = \ \dfrac{(x)^{[0]} \times (y)^{[\ell]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y)$,

ce qui s'écrit, par définition de $(x)^{[0]}$, $\mathcal{P}(0) : \forall \ell \in \mathbb{N},\ B(x, y+\ell) \ = \ \dfrac{(y)^{[\ell]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y)$.

Démontrons alors par récurrence : $\forall \ell \in \mathbb{N}, \mathcal{H}(\ell)$ où $\mathcal{H}(\ell) : B(x, y+\ell) \ = \ \dfrac{(y)^{[\ell]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y)$.

- **Initialisation** :
  - D'une part : $B(x, y+0) = B(x,y)$.
  - D'autre part : $\dfrac{(y)^{[0]}}{(x+y)^{[0]}} \times B(x,y) = \dfrac{1}{1}\ B(x,y) = B(x,y)$.

  D'où $\mathcal{H}(0)$.
- **Hérédité** : soit $\ell \in \mathbb{N}$.

  Supposons $\mathcal{H}(\ell)$ et démontrons $\mathcal{H}(\ell+1)$ $\left(\ \textit{i.e.}\ B(x, y+\ell+1) \ = \ \dfrac{(y)^{[\ell+1]}}{(x+y)^{[\ell+1]}} \times B(x,y) \ \right)$.

  On a :

$$\begin{aligned}
B(x, y+\ell+1) &= B(x, (y+\ell)+1) \\
&= \frac{y+\ell}{x+(y+\ell)}\ B(x, y+\ell) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{5.b)}}\textit{)} \\
&= \frac{y+\ell}{x+(y+\ell)}\ \frac{(y)^{[\ell]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y) && \textit{(par hypothèse de récurrence } \mathcal{H}(\ell)\textit{)} \\
&= \frac{(y+\ell)\ (y)^{[\ell]}}{\big((x+y)+\ell\big)\ (x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y) \\
&= \frac{(y)^{[\ell+1]}}{(x+y)^{[\ell+1]}} \times B(x,y)
\end{aligned}$$

  D'où $\mathcal{H}(\ell+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall \ell \in \mathbb{N},\ \mathcal{H}(\ell).}$$

D'où $\mathcal{P}(0)$.

(rappelons que cette récurrence n'avait d'autre but que de démontrer l'étape d'initialisation de la récurrence englobante)

Commentaire

Il faut bien comprendre que la propriété démontrée en ***5.b)*** est vérifiée pour tout couple de réels strictement positifs. On peut d'ailleurs l'écrire :

$$\forall u > 0,\ \forall v > 0,\ B(u, v+1) \ = \ \frac{u}{u+v}\ B(u,v)$$

Dans la démonstration ci-dessus, on utilise cette propriété pour $u = x > 0$ et $v = y + \ell > 0$.

▸ **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$

$$\left(\textit{i.e. } \forall \ell \in [\![k+1, +\infty[\![, \ B\big(x+k+1, y+\ell-(k+1)\big) \ = \ \frac{(x)^{[k+1]} \times (y)^{[\ell-(k+1)]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y) \right)$$

Soit $\ell \geqslant k+1$. On a :

$$\begin{aligned}
& B\big(x+k+1, y+\ell-(k+1)\big) \\
= \ & B\big((x+k)+1, y+\ell-k-1\big) \\
= \ & \frac{x+k}{y+\ell-k-1} \ B\big(x+k, (y+\ell-k-\cancel{1})+\cancel{1}\big) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{5.a)}}\textit{)} \\
= \ & \frac{x+k}{y+\ell-k-1} \ \frac{(x)^{[k]} \times (y)^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y) && \textit{(par hypothèse de récurrence } \mathcal{P}(k)\textit{)} \\
= \ & (x+k) \ (x)^{[k]} \ \frac{(y)^{[\ell-k]}}{y+\ell-k-1} \ \frac{1}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y) \\
= \ & (x)^{[k+1]} \ (y)^{[\ell-k-1]} \ \frac{1}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y) && (*) \\
= \ & \frac{(x)^{[k+1]} \ (y)^{[\ell-(k+1)]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y)
\end{aligned}$$

L'étape $(*)$ est justifiée par la définition de l'opérateur $.^{[m]}$:

$$(x+k) \ (x)^{[k]} \ = \ (x)^{[k+1]} \quad \text{et} \quad \big(y+(\ell-k-1)\big) \ (y)^{[\ell-k-1]} \ = \ (y)^{[\ell-k]}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall k \in \mathbb{N}, \ \mathcal{P}(k).}$$

Commentaire

Nous avons opté ici pour la présentation rigoureuse de la démonstration. On aurait pu raisonner autrement.

- Tout d'abord, pour $x > 0$, $v > 0$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
B(x+k, v) \ &= \ B\big(\big(x+(k-1)\big)+1, v\big) \\
&= \ \frac{x+k-1}{x+k-1+v} \ B(x+(k-1), v) \\
&= \ \frac{x+k-1}{x+k-1+v} \ \frac{x+k-2}{x+k-2+v} \ B(x+(k-2), v) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{5.b)}}\textit{)} \\
&= \ \dots \\
&= \ \frac{x+k-1}{x+k-1+v} \ \frac{x+k-2}{x+k-2+v} \ \dots \ \frac{x}{x+v} \ B(x,v) \\
&= \ \frac{(x)^{[k]}}{(x+v)^{[k]}} \ B(x,v)
\end{aligned}$$

- D'autre part, on démontre, en combinant les résultats des questions ***5.a)*** et ***5.b)***, que pour tout $x > 0$ et $y > 0$:

$$B(x, y+1) \;=\; \frac{y}{x}\, B(x+1, y) \;=\; \frac{y}{x}\, \frac{x}{x+y}\, B(x, y) \;=\; \frac{y}{x+y}\, B(x, y)$$

- À l'aide de cette propriété, en procédant comme dans le premier point de cette remarque, on a pour tout $x > 0$, $y > 0$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} B(x, y+n) &= B(x, (y+n-1)+1) \\ &= \frac{y+n-1}{x+y+n-1}\, B(x, y+n-1) \\ &= \frac{y+n-1}{x+y+n-1}\, \frac{y+n-2}{x+y+n-2}\, B(x, y+n-2) \\ &= \ldots \\ &= \frac{y+n-1}{x+y+n-1}\, \frac{y+n-2}{x+y+n-2} \;\cdots\; \frac{y}{x+y}\, B(x, y) \\ &= \frac{(y)^{[n]}}{(x+y)^{[n]}} \end{aligned}$$

- On a alors :

$$\begin{aligned} B(x+k, y+\ell-k) &= \frac{(x)^{[k]}}{(x+y+\ell-k)^{[k]}}\, B(x, y+\ell-k) \qquad \textit{(avec } v = y+\ell-k\textit{)} \\ &= \frac{(x)^{[k]}}{(x+y+\ell-k)^{[k]}}\, \frac{(y)^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell-k]}}\, B(x, y) \quad \textit{(avec } n = \ell-k\textit{)} \end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} (x+y+\ell-k)^{[k]} &= (x+y+\ell-1)(x+y+\ell-2)\ldots(x+y+\ell-k) \\ (x+y)^{[\ell-k]} &= (x+y+\ell-k-1)(x+y+\ell-k-2)\ldots(x+y) \end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} (x+y+\ell-k)^{[k]}\;(x+y)^{[\ell-k]} &= (x+y+\ell-1)(x+y+\ell-2)\ldots(x+y) \\ &= (x+y)^{[\ell]} \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure :

$$B(x+k, y+\ell-k) \;=\; \frac{(x)^{[k]}\;(y)^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell]}}\, B(x, y)$$

$\square$

7. Soit a et b des réels strictement positifs.

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on pose : $p_k = \dbinom{n}{k}\, \dfrac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$.

9782340-026636_001_784.indd 770 30/07/2018 09:53

a) À l'aide de la relation obtenue dans la question ***6***, montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k = 1$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} p_k &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{B(a+k, b+n-k)}{B(a,b)} && \textit{(d'après la question précédente avec } x = a > 0 \textit{ et } y = b > 0\textit{)} \\
&= \frac{1}{B(a,b)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(a+k, b+n-k)
\end{aligned}$$

(cette écriture est valide car $B(a,b) > 0$ en tant qu'intégrale sur $]0,1[$ d'une fonction continue et strictement positive sur $]0,1[$)

- Remarquons alors :

$$\begin{aligned}
B(a+k, b+n-k) &= \int_0^1 t^{a+k-1} \, (1-t)^{b+n-k-1} \, dt \\
&= \int_0^1 t^{a-1} \, (1-t)^{b-1} \, t^k \, (1-t)^{n-k} \, dt
\end{aligned}$$

Et ainsi, par linéarité de l'intégration :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} B(a+k, b+n-k) \\
= \ &\int_0^1 t^{a-1} \, (1-t)^{b-1} \, \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} t^k \, (1-t)^{n-k} \right) \, dt \\
= \ &\int_0^1 t^{a-1} \, (1-t)^{b-1} \, (\cancel{t} + (1-\cancel{t}))^n \, dt && \textit{(en reconnaissant la formule du binôme de Newton)} \\
= \ &\int_0^1 t^{a-1} \, (1-t)^{b-1} \, dt \ = \ B(a,b)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En combinant ces résultats, on obtient : } \sum_{k=0}^{n} p_k \ = \ \frac{1}{B(a,b)} \, B(a,b) \ = \ 1.}$$

□

On dit qu'une variable aléatoire S suit une loi bêta-binomiale $\mathbf{B}(n; a, b)$ si $S(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et si :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \ \mathbb{P}([S = k]) = \binom{n}{k} \frac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$$

b) Reconnaître la loi $\mathbf{B}(n;1,1)$.

Démonstration.
Soit S une v.a.r. qui suit la loi $\mathbf{B}(n;1,1)$.
Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Par définition :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([S=k]\big) &= \binom{n}{k} \frac{(1)^{[k]} \times (1)^{[n-k]}}{(2)^{[n]}} \\ &= \binom{n}{k} \frac{k! \times (n-k)!}{(n+1)!} \qquad (*) \\ &= \binom{n}{k} \frac{k! \times (n-k)!}{n!} \, \frac{1}{n+1} \;=\; \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

L'étape $(*)$ est justifiée par la définition de l'opérateur $.^{[n]}$:

$$\begin{aligned}2^{[n]} \;=\; 2^{[(n-1)+1]} &= (2+(n-1))\; 2^{[n-1]} \\ &= (n+1)\; (2+(n-2))\; (2)^{[n-2]} \\ &= (n+1)\; n\; (n-1) \ldots 2^{[0]} \;=\; (n+1)!\end{aligned}$$

(en toute rigueur, il faudrait faire une récurrence ; l'étape d'hérédité est immédiate :
$2^{[n+1]} = (n+2)\; 2^{[n]} = (n+2)\; (n+1)! = (n+2)!$*)*

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, } S(\Omega) = [\![0,n]\!] \text{ et : } \forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}\big([S=k]\big) = \dfrac{1}{n+1}. \\ \text{Ainsi : } S \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0,n]\!]).\end{array}}$$

□

c) Montrer que l'espérance d'une variable aléatoire S qui suit la loi $\mathbf{B}(n;a,b)$ est égale à $\dfrac{na}{a+b}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, S admet une espérance car c'est une v.a.r. finie.
- Cette espérance est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S) &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \frac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}} \\ &= \frac{1}{B(a,b)} \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} B(a+k, b+n-k) \qquad \textit{(comme dans la question } \textbf{\textit{7.a)}}\textit{)}\end{aligned}$$

- On procède alors comme en question ***7.a)***. Par linéarité de l'intégration :

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n} k \binom{k}{n} B(a+k, b+n-k) \\ =\;& \int_0^1 t^{a-1}\,(1-t)^{b-1} \left(\sum_{k=0}^{n} k \binom{k}{n} t^k\,(1-t)^{n-k}\right) dt \\ =\;& \int_0^1 t^{a-1}\,(1-t)^{b-1}\,(nt)\; dt \qquad \textit{(en reconnaissant l'espérance d'une v.a.r. } Y \textit{ telle que } Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,t) \textit{ avec } t \in\,]0,1[\textit{)} \\ =\;& n \int_0^1 t^a\,(1-t)^{b-1}\; dt \;=\; n\; B(a+1, b)\end{aligned}$$

- On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S) &= \frac{1}{B(a,b)}\ n\ B(a+1,b) \ = \ \frac{n}{B(a,b)}\ \frac{a}{b}\ B(a,b+1) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{5.a)}}\textit{)} \\
&= \frac{n}{B(a,b)}\ \frac{a}{\cancel{b}}\ \frac{\cancel{b}}{a+b}\ B(a,b) \ = \ n\ \frac{a}{a+b} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{5.b)}}\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{E}(S) = n\ \frac{a}{a+b}.}$$

Commentaire

- Il faut s'habituer à repérer les sommes classiques issues du chapitre de probabilité traitant des lois usuelles. Ici, on a utilisé :

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{k}{n}\ t^k\ (1-t)^{n-k} \ = \ n\ t$$

car l'on reconnaît $\mathbb{E}(Y)$ où Y est une v.a.r. telle que $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,t)$.

- Si l'énoncé avait demandé le calcul de la variance de S, on aurait été amené à déterminer son moment d'ordre 2. On aurait alors eu à considérer :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{k}{n}\ t^k\ (1-t)^{n-k} \ = \ \mathbb{E}\big(Y^2\big)$$

et par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y^2) &= \mathbb{V}(Y) + \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2 \\
&= nt\ (1-t) + (nt)^2 \ = \ n\ t(1-t) + n^2\ t^2 \\
&= nt\ \big((1-t) + nt\big) \ = \ nt\ \big(1 + (n-1)\ t\big)
\end{aligned}$$

- Il est aussi possible de remarquer : $k \binom{n}{k} \ = \ n \binom{n-1}{k-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S) &= \frac{1}{B(a,b)} \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}\ B(a+k, b+n-k) \\
&= \frac{1}{B(a,b)} \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}\ B(a+k, b+n-k) && \textit{(car le premier élément de cette somme est nulle)} \\
&= \frac{n}{B(a,b)} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}\ B(a+k, b+n-k) \\
&= \frac{n}{B(a,b)} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}\ B(a+(k+1), b+n-(k+1)) && \textit{(par décalage d'indice)}
\end{aligned}$$

On procède alors comme en question ***7.a)***.
L'écriture intégrale de $B(.,.)$ fait alors apparaître $\big(1+(1-t)\big)^{n-1} = 1^{n-1} = 1$.

- Cette dernière rédaction est évidemment acceptée mais pénalisante à terme du fait de la perte de temps qu'elle implique.

□

Partie III. Un possible dans le cas où $n = 2$

Soit a et b des réels strictement positifs et X_1 et X_2 deux variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}$ telles que :

$$\forall (x_1, x_2) \in \{0,1\}^2,\ \mathbb{P}([X_1 = x_1] \cap [X_2 = x_2]) = \frac{B(a + x_1 + x_2, b + 2 - x_1 - x_2)}{B(a,b)}$$

8. a) Montrer que les deux variables X_1 et X_2 suivent la même loi de Bernoulli.

Démonstration.
La loi du couple (X_1, X_2) est fournie dans la question.
Il s'agit donc de déterminer les lois marginales de ce couple.

- D'après l'énoncé : $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{0,1\}$.
- La famille $\big([X_2 = 0], [X_2 = 1]\big)$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big) &= \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\big) + \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]\big) \\ &= \frac{B(a, b+2)}{B(a,b)} + \frac{B(a+1, b+1)}{B(a,b)}\end{aligned}$$

Or, par les formules des questions ***5.a)*** et ***5.b)*** :

$$B(a, b+2) = B(a, (b+1)+1) = \frac{b+1}{a+(b+1)}\, B(a, b+1) = \frac{b+1}{a+b+1}\, \frac{b}{a+b}\, B(a,b)$$

$$B(a+1, b+1) = \frac{b}{(a+1)+b}\, B(a+1, b) = \frac{b}{(a+1)+b}\, \frac{a}{a+b}\, B(a,b)$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big) &= \frac{b}{(a+b)\ (a+b+1)}\, (b+1) + \frac{b}{(a+b)\ (a+b+1)}\, a \\ &= \frac{b}{(a+b)\ (a+b+1)}\, ((b+1)+a) = \frac{b}{a+b}\end{aligned}$$

  et donc :

$$\mathbb{P}\big([X_1 = 1]\big) = 1 - \mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big) = 1 - \frac{b}{a+b} = \frac{a}{a+b}$$

- On procède de même pour déterminer la loi de la v.a.r. X_2. On obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X_2 = 0]\big) &= \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\big) + \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]\big) \\ &= \frac{B(a, b+2)}{B(a,b)} + \frac{B(a+1, b+1)}{B(a,b)} = \mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } X_1 \text{ et } X_2 \text{ suivent la même loi de Bernoulli } \mathcal{B}\left(\frac{a}{a+b}\right).}$$

Commentaire

- Il n'est pas demandé, dans l'énoncé, d'expliciter le paramètre de la loi de Bernoulli commune à X_1 et X_2. Ainsi, comme l'on sait que X_1 et X_2 suivent chacune une loi de Bernoulli ($X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{0,1\}$), l'égalité $\mathbb{P}\big([X_2 = 0]\big) = \mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big)$ permet de conclure que X_1 et X_2 suivent la même loi de Bernoulli.
- On a préféré explicité tous les calculs ici car ils serviront dans les questions suivantes. □

b) Montrer que la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit la loi bêta-binomiale $\mathbf{B}(2; a, b)$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $(X_1 + X_2)(\Omega) = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in X_1(\Omega) \ \texttt{ET} \ x_2 \in X_2(\Omega)\} = \{0, 1, 2\}$.
- Soit $i \in \{0, 1, 2\}$.
  La famille $\big([X_1 = 0], [X_1 = 1]\big)$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X_1 + X_2 = i]\big) &= \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_1 + X_2 = i]\big) + \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_1 + X_2 = i]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = i]\big) + \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = i - 1]\big)\end{aligned}$$

  Il s'agit alors d'envisager les différentes valeurs de i.

  - Si $i = 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X_1 + X_2 = 0]\big) &= \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\big) + \cancel{\mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = -1]\big)} \\ &= \frac{B(a, b+2)}{B(a, b)} = \frac{(b+1)\ b}{(a+b+1)(a+b)} \\ &= \frac{(a)^{[0]} \times b^{[2]}}{(a+b)^{[2]}} = \binom{2}{0} \frac{(a)^{[0]} \times b^{[2-0]}}{(a+b)^{[2]}}\end{aligned}$$

  - Si $i = 1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X_1 + X_2 = 1]\big) &= \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]\big) + \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]\big) \\ &= \frac{B(a+1, b+1)}{B(a, b)} + \frac{B(a+1, b+1)}{B(a, b)} = 2\ \frac{a\ b}{(a+b+1)(a+b)} \\ &= 2\ \frac{(a)^{[1]} \times b^{[1]}}{(a+b)^{[2]}} = \binom{2}{1} \frac{(a)^{[1]} \times b^{[1]}}{(a+b)^{[2]}}\end{aligned}$$

  - Si $i = 2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X_1 + X_2 = 2]\big) &= \cancel{\mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 2]\big)} + \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\big) \\ &= \frac{B(a+2, b)}{B(a, b)} = \frac{(a+1)\ a}{(a+b+1)(a+b)}\end{aligned}$$

    Ce résultat est une nouvelle fois obtenu par les formules des questions ***5.a)*** et ***5.b)***.
    On obtient alors :

$$\mathbb{P}\big([X_1 + X_2 = 2]\big) = \binom{2}{0} \frac{(a)^{[2]} \times b^{[2-2]}}{(a+b)^{[2]}}$$

    en remplaçant les rôles joués par a et b dans la formule obtenue dans le cas $i = 0$.

$$\boxed{X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathbf{B}(2; a, b)}$$

□

c) Établir la relation : $\mathbb{P}_{[X_1=1]}([X_2=1]) = \dfrac{a+1}{a+b+1}$.

Démonstration.
Par définition :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[X_1=1]}([X_2=1]) &= \frac{\mathbb{P}\big([X_1=1]\cap[X_2=1]\big)}{\mathbb{P}\big([X_1=1]\big)} \\
&= \frac{\frac{(a+1)\ a}{(a+b+1)(a+b)}}{\frac{a}{a+b}} = \frac{(a+1)\ a}{(a+b+1)\cancel{(a+b)}}\ \frac{\cancel{a+b}}{a} = \frac{a+1}{a+b+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}_{[X_1=1]}([X_2=1]) = \frac{a+1}{a+b+1}.}$$

□

9. La fonction **Scilab** suivante dont le script est incomplet (lignes 7 et 11), effectue une simulation des deux variables X_1 et X_2 qu'elle place dans un vecteur ligne à deux composantes.

Commentaire

- Avant de fournir le programme **Scilab** associé à cette question, rappelons que lors de l'écriture d'un programme, on se soumet généralement à quelques règles de bonne conduite :
  - ***(1)*** utilisation de commentaires indiquant le but de chaque fonction,
  - ***(2)*** réflexion autour du découpage en sous-fonctions pouvant être réutilisées,
  - ***(3)*** utilisation de nom explicites pour les fonctions et le variables,
  - ***(4)*** indentation du code (utilisation correcte d'espaces et sauts de lignes).

  Le but de ces règles est de produire un code lisible, intelligible et facilement modifiable à l'avenir. Évidemment, on ne s'attend pas, dans un sujet de concours, à ce que soit commentée la fonction dont on il est demandé d'expliciter le calcul. Par contre, on s'attend à ce que les autres règles de bonne conduite soient respectées. Ne pas le faire correspond à ce que l'on nomme de l'**obfuscation** (pas forcément volontaire) de code. Sous ce terme, on désigne les méthodes permettant de rendre un code difficile à déchiffrer. Le but de telles techniques est de protéger son code. Typiquement, une entreprise ayant investi afin de développer un algorithme pourra procéder à une obfuscation de code afin que ses concurrents industriels ne puissent comprendre la manière dont procède cet algorithme.
- Dans l'énoncé original, le programme était présenté sous la forme suivante.

```
function x = randbetabin(a, b)
    x = zeros(1,2) ;
    u = (a + b) * rand() ;
    v = (a + b + 1) * rand() ;
        if (u < a) then x(1,1) = 1 ; if ............. then x(1,2) = 1 ; end ;
                else if ............ then x(1,2) = 1 ; end ;
        end ;
endfunction
```

  On peut regretter cette indentation qui rend le code difficile à lire : il est en effet difficile de percevoir l'imbrication des structures conditionnelles.
- On se permet ici de fournir le programme dans une version plus classique de l'indentation.

```
1  function x = randbetabin(a, b)
2      x = zeros(1,2)
3      u = (a + b) * rand()
4      v = (a + b + 1) * rand()
5      if (u < a) then
6          x(1,1) = 1
7          if ............. then
8              x(1,2) = 1
9          end
10     else
11         if ............ then
12             x(1,2) = 1
13         end
14     end
15 endfunction
```

a) Préciser la loi simulée par la variable `u` de la ligne 3.

Démonstration.
L'instruction `rand` permet de simuler une v.a.r. qui suit la loi $\mathcal{U}([0,1[)$.
En ligne 3, on multiplie le résultat fourni par `rand()` (valeur dans $[0,1[$) par `(a + b)`.
Cela permet de transporter le résultat dans l'intervalle $[0, a+b[$.

$$\boxed{\text{La variable } \texttt{u} \text{ est une simulation d'une v.a.r. } U \text{ telle que } U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,a+b[).}$$

□

b) Compléter les lignes 7 et 11.

Démonstration.

- Commençons par rappeler que les v.a.r. X_1 et X_2 suivent toutes les deux la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\dfrac{a}{a+b}\right)$. Pour simuler le couple (X_1, X_2), l'énoncé propose une fonction `randbetabin` qui renvoie une matrice réelle $(\texttt{x}_1 \ \ \texttt{x}_2)$. Plus précisément :
  - × $\texttt{x}_1$ doit prendre la valeur 1 avec probabilité $\dfrac{a}{a+b}$,
  - × $\texttt{x}_1$ doit prendre la valeur 0 avec probabilité $\dfrac{b}{a+b}$.

  Il en est de même de $\texttt{x}_2$.
- Le programme commence par créer la matrice ligne `x` à 2 colonnes remplie de 0, puis va mettre à jour ces coefficients afin de respecter les objectifs énoncés dans le point précédent.
- Il y a ici une subtilité puisque les v.a.r. X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.
  En effet, d'après la question ***8.c)*** :

$$\mathbb{P}_{[X_1=1]}\big([X_2=1]\big) \;=\; \frac{a+1}{a+b+1} \;\neq\; \frac{a}{a+b} \;=\; \mathbb{P}\big([X_2=1]\big)$$

  Ainsi, le programme opère en 2 temps :
  - × on simule d'abord la v.a.r. X_1.
    On a vu que l'appel `(a+b) * rand()` simule une v.a.r. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,a+b[)$. Plus précisément cet appel renvoie un réel `u` choisit aléatoirement dans $[0, \texttt{a}+\texttt{b}[$:

Le réel u appartient à l'intervalle $[0, \mathtt{a}[$ avec probabilité :

$$\mathbb{P}([U \in [0, \mathtt{a}[\,]) = \mathbb{P}([U < \mathtt{a}]) = \frac{\mathtt{a}}{\mathtt{a} + \mathtt{b}} = \mathbb{P}([X_1 = 1])$$

Le réel u appartient à l'intervalle $[\mathtt{a}, \mathtt{a} + \mathtt{b}[$ avec probabilité :

$$\mathbb{P}([U \in [\mathtt{a}, \mathtt{a} + \mathtt{b}[\,]) = \mathbb{P}([U \geqslant \mathtt{a}]) = \frac{\mathtt{b}}{\mathtt{a} + \mathtt{b}} = \mathbb{P}([X_1 = 0])$$

C'est ce que réalise le programme en ligne 6 :

```
5      if (u < a) then
6          x(1,1) = 1
```

Dans le cas où la condition n'est pas réalisée (ce qui se produit avec probabilité $\frac{\mathtt{b}}{\mathtt{a}+\mathtt{b}}$) le premier coefficient de la matrice x n'est pas mis à jour.

× on simule ensuite la v.a.r. X_2.
Pour ce faire, on regarde la valeur x(1,1) simulée pour X_1 :

- Si x(1,1) vaut 1 alors X_2 doit prendre la valeur 1 avec probabilité $\dfrac{\mathtt{a} + 1}{\mathtt{a} + \mathtt{b} + 1}$.
  *(d'après la question **8.c)** :* $\mathbb{P}_{[X_1=1]}\big([X_2 = 1]\big) = \dfrac{a+1}{a+b+1}$*)*
  Pour affecter à x(1,2) la bonne valeur, on procède comme pour x(1,1).
  Le schéma est le suivant :

  On complète donc comme suit la ligne 7 :

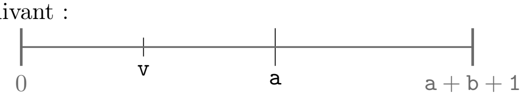
```
7          if (v < a + 1) then
8              x(1,2) = 1
```

- Si x(1,1) vaut 0 alors X_2 doit prendre la valeur 1 avec probabilité :

$$\mathbb{P}_{[X_1=0]}\big([X_2 = 1]\big) = \frac{\mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]\big)}{\mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big)}$$

$$= \frac{\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)}}{\frac{b}{a+b}} = \frac{ab}{(a+b+1)\cancel{(a+b)}} \; \frac{\cancel{a+b}}{b} = \frac{a}{a+b+1}$$

  Pour affecter à x(1,2) la bonne valeur, on procède comme précédent.
  Le schéma est le suivant :



  On complète donc comme suit la ligne 11 :

```
7          if (v < a) then
8              x(1,2) = 1
```

Commentaire

Rappelons qu'on détaille la réponse à cette question afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question. □

10. a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X_1 et X_2.

Démonstration.

- Les v.a.r. Y_1 et Y_2 sont finies donc elles admettent chacune un moment d'ordre 2. Ainsi, Y_1 et Y_2 admettent un coefficient de corrélation linéaire donné par :

$$\rho(X_1, X_2) \;=\; \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_1)\mathbb{V}(X_2)}} \;=\; \frac{\mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_1)\mathbb{V}(X_2)}}$$

Or X_1 et X_2 suivent la même loi $\mathcal{B}\left(\frac{a}{a+b}\right)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_1) &= \frac{a}{a+b} = \mathbb{E}(X_2) \\
\mathbb{V}(X_1) &= \frac{a}{a+b}\left(1 - \frac{a}{a+b}\right) = \frac{a}{a+b}\,\frac{b}{a+b} = \mathbb{V}(X_2)
\end{aligned}$$

- L'espérance $\mathbb{E}(X_1X_2)$ est définie par :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_1X_2) &= \sum_{i=0}^{1}\left(\sum_{j=0}^{1} i\ j\ \mathbb{P}\big([X_1 = i] \cap [X_2 = j]\big)\right) \\
&= \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\big) \\
&= \frac{(a+1)\ a}{(a+b+1)(a+b)}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) &= \frac{(a+1)\ a}{(a+b+1)(a+b)} - \frac{a}{a+b}\,\frac{a}{a+b} \\
&= \frac{a}{a+b}\left(\frac{a+1}{a+b+1} - \frac{a}{a+b}\right) \\
&= \frac{a}{a+b}\left(\frac{(a+1)(a+b) - a(a+b+1)}{(a+b+1)(a+b)}\right) \\
&= \frac{a}{a+b}\left(\frac{(a^2+ab+a+b) - (a^2+ab+a)}{(a+b+1)(a+b)}\right) \\
&= \frac{a}{a+b}\,\frac{b}{(a+b+1)(a+b)} = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}
\end{aligned}$$

- On peut alors finir le calcul :

$$\begin{aligned}
\rho(X_1, X_2) &= \frac{1}{\sqrt{\mathbb{V}(X_1)\mathbb{V}(X_2)}}\big(\mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)\big) \\
&= \frac{(a+b)^2}{\cancel{ab}}\,\frac{\cancel{ab}}{(a+b+1)(a+b)^2} = \frac{1}{a+b+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\rho(X_1, X_2) = \frac{1}{a+b+1}}$$

□

b) Soit (p, r) un couple de réels vérifiant $0 < p < 1$ et $0 < r < 1$.
Expliquer comment utiliser la fonction `randbetabin` pour simuler deux variables aléatoires suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p et dont le coefficient de corrélation linéaire est égal à r.

Démonstration.

- La fonction `randbetabin` prend pour paramètres les variables `a` et `b` et renvoie la simulation du couple (X_1, X_2), où X_1 et X_2 suivent toutes les deux la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\dfrac{\mathtt{a}}{\mathtt{a}+\mathtt{b}}\right)$.
- Ainsi, si on souhaite utiliser la fonction `randbetabin` pour simuler deux variables aléatoires suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p et dont le coefficient de corrélation linéaire est égal à r, il suffit de trouver `a` et `b` solutions du système (S) suivant :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} p & = & \dfrac{a}{a+b} \\ r & = & \dfrac{1}{a+b+1} \end{array} \right.$$

- Résolvons ce système :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} (p-1)\ a & + & p\ b & = & 0 \\ r\ a & + & r\ b & = & 1-r \end{array} \right. \quad \textit{(en multipliant } L_1 \textit{ par } a+b \textit{ et } L_2 \textit{ par } a+b+1 \textit{ et en réordonnant)}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow (p-1)\ L_2 - r\ L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcl} (p-1)\ a & + & p\ b & = & 0 \\ & - & r\ b & = & (p-1)(1-r) \end{array} \right. \quad \textit{(avec } p-1 \neq 0 \textit{ car } p \neq 1\textit{)}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow r\ L_1 + p\ L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcl} r(p-1)\ a & & & = & p(p-1)(1-r) \\ & - & r\ b & = & (p-1)(1-r) \end{array} \right. \quad \textit{(avec } r \neq 0\textit{)}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{r(p-1)}\ L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{r}\ L_2}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & p\ \dfrac{1-r}{r} \\ b & = & (1-p)\ \dfrac{1-r}{r} \end{array} \right. \quad \textit{(avec } r(p-1) \neq 0\textit{)}$$

> Pour `p` et `r` donnés, l'appel `randbetabin(p*(1-r)/r, (1-p)*(1-r)/r)` permet d'obtenir la simulation de v.a.r. X_1 et X_2 qui vérifient les propriétés énoncées dans la question.

□