# Colles - Semaine 16

**Exercice 1.** *EML 2015*
Dans cet exercice, on pourra utiliser l'encadrement $2 < \mathrm{e} < 3$.

*1.* On considère l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2\mathrm{e}^x - 1 \end{array} \right.$

*a)* Dresser le tableau de variations de $\varphi$, en précisant les limites de $\varphi$ en $-\infty$ et $+\infty$ et sa valeur en 0.

*b)* Établir que l'équation $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in ]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée $\alpha$, et que $\alpha$ appartient à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

On considère l'ouvert $U = ]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et l'application $g$ de classe $\mathcal{C}^2$ suivante :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \dfrac{1}{x} + \mathrm{e}^x - y^2\mathrm{e}^y \end{array} \right.$$

*2.* Représenter graphiquement l'ensemble $U$.

*3.* Calculer, pour tout $(x, y)$ de $U$, les dérivées partielles premières de $g$ en $(x, y)$.

*4.* Montrer que $g$ admet deux points critiques et deux seulement et que ceux-ci sont $(\alpha, 0)$ et $(\alpha, -2)$, où $\alpha$ est le réel défini à la question 2.

*5.* Est-ce que $g$ admet un extremum local en $(\alpha, 0)$ ?

*6.* Est-ce que $g$ admet un extremum local en $(\alpha, -2)$ ?

*7.* Est-ce que $g$ admet un extremum global sur $U$ ?

**Exercice 2.** *ESCP 2002*
Soit $a$ un paramètre réel et $F_a$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F_a(x, y) = \begin{pmatrix} x & y & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ a \end{pmatrix}$$

*1.* Déterminer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'expression de $F_a(x, y)$ en fonction de $x, y$ et $a$.

*2.* Vérifier que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 en tout point $(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$.

*3.* Montrer qu'il existe un unique point $(x_0, y_0)$ de $\mathbb{R}^2$, que l'on précisera, en lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de $F_a$ sont nulles. Calculer $F_a(x_0, y_0)$.

*4.* Calculer, pour tout couple $(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$, le nombre :

$$G_a(x, y) = F_a(x, y) + \frac{1}{3}(3x - y - a)^2 + 2a^2,$$

et préciser son signe.

*5.* En déduire que la fonction $F_a$ admet un unique extremum sur $\mathbb{R}^2$. Préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum global et donner sa valeur notée $M(a)$.

*6.* Montrer que la fonction $M$ qui, à tout réel $a$ associe le nombre $M(a)$, admet un unique extremum que l'on précisera. Que peut-on en conclure ?

**Exercice 3.** *INSEEC 2002*
On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ g(x,y,z) = 4x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 4xz - 4yz$$

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = g(x,y,y^2)$.
On dit alors qu'on étudie la fonction $g$ **sous la contrainte** $z = y^2$.

*1.* Expliciter $f(x,y)$, et calculer $\partial_1(f)(x,y)$, $\partial_2(f)(x,y)$, $\partial^2_{1,1}(f)(x,y)$, $\partial^2_{1,2}(f)(x,y)$ et $\partial^2_{2,2}(f)(x,y)$.

*2.* Déterminer les extrema éventuels de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.

*3.* Montrer, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ :

$$g(x,y,z) = 4\left(x + \frac{1}{2}z\right)^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}z\right)^2$$

En déduire que $f$ admet un minimum global en $(0,0)$.

*4.* Montrer que $f$ présente un minimum local en $(-2,2)$.

*5.* Déterminer le développement limité d'ordre 2 de $f$ en $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$. En déduire le développement limité d'ordre 2 de $f\left(-\frac{1}{2} + h, 1 + h\right)$ et de $f\left(-\frac{1}{2} + h, 1 - h\right)$, lorsque $h$ est au voisinage de 0. En déduire que $f$ ne présente pas d'extremum local en $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

**Exercice 4.** *HEC 2017*
Soit $f$ la fonction de deux variables définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f : (x,y) \mapsto x^3 + y^3 - 9xy + 1$$

*1.* ***a)*** Donner le développement limité à l'ordre 2 de $f$ au voisinage de $(0,0)$.

***b)*** En déduire que $(0,0)$ est un point col de $f$.

*2.* ***a)*** Montrer que $f$ admet un extremum local.

***b)*** Cet extremum est-il global ?