EML 2011

Exercice 1

On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = (x+\ln(x))\,\mathrm{e}^{x-1}. \end{array} \right.$$

Partie I : Étude et représentation graphique de f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$. On note f' sa fonction dérivée.
Pour tout $x \in \,]0,+\infty[$, calculer $f'(x)$.

2. Établir :

$$\forall x \in \,]0,+\infty[, \quad \ln(x) + \frac{1}{x} > 0$$

3. En déduire :

$$\forall x \in \,]0,+\infty[, \quad x + \ln(x) + 1 + \frac{1}{x} > 0.$$

4. En déduire le sens de variation de f.

5. Dresser le tableau de variation de f, comprenant la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$.
Calculer $f\,(1)$ et $f'\,(1)$.

6. Préciser la nature des branches infinies de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f dans un repère du plan.
Cette question est hors programme, pour notre programme actuel. Je vous laisse cependant la question si vous souhaitez y réfléchir.

7. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$. On précisera la tangente au point d'abscisse 1.

Il n'est demandé ni l'étude de la convexité, ni la recherche d'éventuels points d'inflexion.

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à f.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f\,(u_n)$.

8. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

9. Établir, par récurrence : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant \mathrm{e}^n$.
Quelle est la limite de (u_n) lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

10. Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^{20}$.

Partie III : Étude d'extremums locaux pour une fonction de deux variables associée à f

On considère l'application

$$F : \left\{ \begin{array}{ccl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\ dt \end{array} \right.$$

11. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $F'(x)$, pour tout $x \in]0,+\infty[$, à l'aide de $f(x)$.
On considère l'application de classe $\mathcal{C}^2$

$$G : \left\{ \begin{array}{ccl}]0,+\infty[^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & G(x,y) = F(x) + F(y) - 2\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}. \end{array} \right.$$

12. Exprimer les dérivées partielles premières $\partial_1(G)(x,y)$ et $\partial_2(G)(x,y)$, pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$ à l'aide de $f(x)$, $f(y)$ et $\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}$.

13. ***a)*** Montrer que f est bijective.

b) Établir que, pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$, (x,y) est un point critique de G si et seulement si :

$$x = y \quad \text{et} \quad x + \ln x = \mathrm{e}.$$

14. Montrer que l'équation $x + \ln x = \mathrm{e}$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$ admet une solution et une seule, que l'on notera α, et montrer que : $1 < \alpha < \mathrm{e}$.

15. Montrer que G admet un extremum local. Préciser sa nature.

Exercice 2

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Partie I : Détermination d'une racine carrée de A

1. Sans calcul, justifier que A est diagonalisable et non inversible. Déterminer le rang de A.

2. Montrer que 0, 1 et 4 sont les trois valeurs propres de A et déterminer les sous-espaces propres associés.

3. En déduire une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, telles que : $A = PDP^{-1}$.

4. Calculer P^{-1}.

5. Montrer qu'il existe une matrice diagonale Δ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, telle que $\Delta^2 = D$, et déterminer Δ.

6. On note $R = P\Delta P^{-1}$. Montrer $R^2 = A$ et calculer R.

Partie II : Étude d'endomorphismes

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et on considère les endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans $\mathcal{B}$ sont respectivement A et R.
On note $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ telle que P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

1. Déterminer les matrices de f et g dans la base $\mathcal{C}$.

2. ***a)*** Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker}(f)$.

b) Déterminer une base et la dimension de $\text{Im}(f)$.

3. ***a)*** Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker}(g)$.

b) Déterminer une base et la dimension de $\text{Im}(g)$.

4. Trouver au moins un automorphisme h de $\mathbb{R}^3$ tel que $g = f \circ h$.
On déterminera h par sa matrice H dans la base $\mathcal{C}$, puis on exprimera la matrice de h dans la base $\mathcal{B}$ à l'aide de H et de P.

Exercice 3

Les deux parties sont indépendantes.
Soit $p \in \,]0,1[$. On note $q = 1 - p$.

Partie I : Différence de deux variables aléatoires.

Soit n un entier naturel non nul. On considère n joueurs qui visent une cible. Chaque joueur effectue deux tirs. À chaque tir, chaque joueur a la probabilité p d'atteindre la cible. Les tirs sont indépendants les uns des autres.
On définit la variable aléatoire X égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au premier tir et la variable aléatoire Z égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue des deux tirs.

1. Déterminer la loi de X. Rappeler son espérance et sa variance.

2. Montrer que Z suit une loi binomiale. Donner son espérance et sa variance.
On note $Y = Z - X$.

3. Que représente la variable aléatoire Y ? Déterminer la loi de Y.

4. ***a)*** Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

b) Calculer la covariance du couple (X, Y).

Partie II : Variable aléatoire à densité conditionnée par une variable aléatoire discrète

Dans cette partie, on note U une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

1. Rappeler la loi de U, son espérance et sa variance.
On considère une variable aléatoire T telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0, +\infty[\,,\ \mathbb{P}_{[U=n]}([T > t]) = \mathrm{e}^{-nt}$.

2. ***a)*** Montrer : $\forall t \in [0, +\infty[\,, \quad \mathbb{P}([T > t]) = \dfrac{p\ \mathrm{e}^{-t}}{1 - q\ \mathrm{e}^{-t}}$.

b) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire T.

c) En déduire que T est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.

3. On note $Z = U\,T$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall z \in [0, +\infty[\,, \quad \mathbb{P}_{[U=n]}([Z > z]) = \mathrm{e}^{-z}$.

b) En déduire que la variable aléatoire Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in [0, +\infty[\,, \quad \mathbb{P}([U = n] \cap [Z > z]) = \mathbb{P}([U = n])\,([Z > z])$.