Colles - Semaine 2

Exercice 1

1. ***a)*** Rappeler la définition de « la suite (u_n) converge vers a ».

b) Supposons que (u_n) est une suite réelle convergente de limite $a \in \mathbb{R}_+^*$.
Démontrer qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant \dfrac{a}{2}$.

2. On considère la fonction $f\ :\ x \mapsto x(1-x)$, et la suite (u_n) définie par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 \in]0,1[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$.

a) Étudier les variations de f.

b) ***i.*** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < \dfrac{1}{n+1}$.
En déduire la limite de la suite (u_n).

ii. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = n u_n$.
Montrer que la suite (v_n) est croissante. En déduire qu'elle converge et que sa limite L vérifie $L \in\ ]0,1]$.

iii. Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$.
Montrer que la suite (w_n) est convergente et que sa limite vaut $L(1-L)$.

3. On suppose que $L \neq 1$.
Montrer en utilisant le préliminaire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ v_{n+1} - v_n \geqslant \frac{L(1-L)}{2n}.$$

En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

4. En déduire que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Exercice 2

On considère la fonction $f\ :\ x \mapsto 2\,x\,\mathrm{e}^x$.

1. ***a)*** Montrer que f réalise une bijection de $[0,1]$ sur un ensemble que l'on déterminera.

b) Donner les tableaux de variations de f et de f^{-1}.

2. ***a)*** Vérifier qu'il existe un et un seul réel α dans $[0,1]$, tel que $\alpha \mathrm{e}^{\alpha} = 1$.

b) Montrer que $\alpha \neq 0$.

3. On définit la suite (u_n) par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{array}\right.$.
Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n \in]0,1]$.

4. ***a)*** Montrer que pour tout réel x de $[0,1]$, $f(x) - x \geqslant 0$.

b) En déduite déduire que la suite (u_n) est décroissante.

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente et qu'elle a pour limite 0.

Exercice 3

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) = x + \mathrm{e}^x.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \mathrm{e}^x = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$ notée u_n. Préciser la valeur de u_1.

3. ***a)*** Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

b) La suite (u_n) est-elle majorée ? En déduire la limite de (u_n).

4. ***a)*** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n - \ln(n) \leqslant \mathrm{e}^{u_n} \leqslant n$.

b) en déduire que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_n = u_n - \ln(n)$.

a) démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{e}^{v_n} = 1 - \dfrac{u_n}{n}$.

b) En déduire un équivalent simple de v_n.