HEC PARIS

ORAL HEC 2016

MATHÉMATIQUES

EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES

Option économique

EXERCICE PRINCIPAL E 65

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On appelle *médiane* de X tout réel m qui vérifie les deux conditions : $P(X \leqslant m) \geqslant \frac{1}{2}$ et $P(X \geqslant m) \geqslant \frac{1}{2}\cdot$

On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Question de cours : Définition et propriétés de la loi exponentielle.

2.a) Montrer que X admet une unique médiane m que l'on calculera.

b) Soit M la fonction définie sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles, telle que : $\forall x \in \mathbf{R},\ M(x) = E(|X - x|)$.

Étudier les variations de la fonction M sur $\mathbf{R}$ et montrer que m est l'unique point en lequel M atteint son minimum.

3. On suppose que le paramètre λ est inconnu. Soit α un réel vérifiant $0 < \alpha < 1$.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Z_n = \min\ (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a) Quelle est la loi de Z_n ?

b) Établir l'existence de deux réels c et d tels que : $P\left(\left[Z_n \leqslant \frac{c}{\lambda}\right]\right) = \frac{\alpha}{2}$ et $P\left(\left[Z_n \geqslant \frac{d}{\lambda}\right]\right) = \frac{\alpha}{2}$.

c) En déduire un intervalle de confiance du paramètre m au niveau de confiance $1 - \alpha$.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL E 65

1. Cours.

2.a) On a : $\forall x \geqslant 0,\ P(X \leqslant x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$ et les réels m vérifient : $1 - \mathrm{e}^{-\lambda m} \geqslant \frac{1}{2}$ et $\mathrm{e}^{-\lambda m} \geqslant \frac{1}{2}$, donc $\mathrm{e}^{-\lambda m} = \frac{1}{2}\cdot$

Par suite, l'équation $\mathrm{e}^{-\lambda m} = \frac{1}{2}$ fournit l'unique solution : $m = \frac{1}{\lambda} \ln 2$.

b) $\forall x \in \mathbf{R},\ M(x) = E(|X - x|) = \int_0^{+\infty} |u - x| \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda u}\, \mathrm{d}u = \int_x^{+\infty} (u - x)\lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda u}\, \mathrm{d}u - \int_0^x (u - x)\lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda u}\, \mathrm{d}u.$

Des calculs (peut-être un peu longs) mais sans difficulté conduisent à : $\forall x \in \mathbf{R},\ M(x) = \frac{2}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x} + x - \frac{1}{\lambda}\cdot$

L'étude de la fonction M montre bien que $m = \frac{1}{\lambda} \ln 2$ est l'unique point en lequel M atteint son minimum.

3.a) Question classique : $Z_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n\lambda)$.

b) On note G_n la fonction de répartition de Z_n. On cherche c et d (qui sont non nuls) tels que $G_n\left(\frac{c}{\lambda}\right) = \frac{\alpha}{2}$ et $1 - G_n\left(\frac{d}{\lambda}\right) = \frac{\alpha}{2}$, c'est-à-dire $1 - \mathrm{e}^{-n\lambda c/\lambda} = \frac{\alpha}{2}$ et $1 - \mathrm{e}^{-n\lambda d/\lambda} = 1 - \frac{\alpha}{2}$, d'où :

$$c = -\frac{1}{n}\ln(1 - \alpha/2) \quad \text{et} \quad d = -\frac{1}{n}\ln(\alpha/2)\cdot$$

c) On a : $P\left(\frac{c}{\lambda} \leqslant Z_n \leqslant \frac{d}{\lambda}\right) = 1 - \alpha \Longrightarrow P\left(\frac{Z_n}{d} \leqslant \frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{Z_n}{c}\right) = 1 - \alpha$. Or, $m = \frac{\ln 2}{\lambda}$. Par suite,

$$P\left(\frac{\ln 2}{d} Z_n \leqslant m \leqslant \frac{\ln 2}{c} Z_n\right) = 1 - \alpha.$$

Avec les valeurs de c et d calculées précédemment, l'intervalle $\left[\frac{\ln 2}{d} Z_n, \frac{\ln 2}{c} Z_n\right]$ est un intervalle de confiance de la médiane m au niveau de confiance $1 - \alpha$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 65

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes. Montrer qu'un endomorphisme g de E vérifie $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si les vecteurs propres de f sont des vecteurs propres de g.

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION E 65

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres pour f associés aux valeurs propres respectives $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Le sous-espace propre de f associé à λ_i est la droite engendrée par e_i.

• Si $e_1, e_2, \dots, e_n$ sont des vecteurs propres de g associés aux valeurs propres $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ (non nécessairement deux à deux distinctes), on a : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ f \circ g(e_i) = f(\mu_i e_i) = \mu_i \lambda_i e_i = g(\lambda_i ei) = g \circ f(e_i)$.

Donc, les endomorphismes $f \circ g$ et $g \circ f$ coïncident sur une base et sont donc égaux.

• Réciproquement, si $f \circ g = g \circ f$, on a : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ f \circ g(e_i) = g \circ f(e_i)$, soit $f\big(g(e_i)\big) = \lambda_i g(e_i)$.

Ainsi, $g(e_i)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_i : le sous-espace propre étant la droite engendrée par e_i, le vecteur $g(e_i)$ est colinéaire à e_i et par suite, e_i est un vecteur propre de g.

EXERCICE PRINCIPAL E 82

On suppose que toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : Loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$; définition, propriétés.

2. Pour tout x réel, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

a) Pour n entier de $\mathbf{N}^*$, montrer que pour tout x réel, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.

b) Établir pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, l'équivalence suivante : $\lfloor y \rfloor \leqslant x \Longleftrightarrow y < \lfloor x \rfloor + 1$.

c) Soit α et β deux réels vérifiant $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$ et soit $N_n(\alpha, \beta)$ le nombre d'entiers k qui vérifient $\alpha < \dfrac{k}{n} \leqslant \beta$.
Exprimer $N_n(\alpha, \beta)$ en fonction de $\lfloor n\,\alpha \rfloor$ et $\lfloor n\,\beta \rfloor$.

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note Y_n la variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par :

$$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!],\ P\Big(Y_n = \frac{k}{n}\Big) = \frac{1}{n}\cdot$$

Soit Z une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la variable aléatoire Z_n par : $Z_n = \dfrac{\lfloor n\,Z \rfloor}{n}\cdot$ Soit α et β deux réels vérifiant $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} P(\alpha < Y_n \leqslant \beta) = \beta - \alpha$.

b) Comparer les fonctions de répartition respectives de Y_n et Z_n. Conclusion.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL E 82

1. Cours.

2.a) Par définition, $\lfloor nx \rfloor \leqslant nx < \lfloor nx \rfloor + 1 \Longrightarrow x - 1/n < \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x \Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.

b) • $\lfloor y \rfloor \leqslant x \Longrightarrow \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor \Longrightarrow y < \lfloor y \rfloor + 1 \leqslant \lfloor x \rfloor + 1$.

• $y < \lfloor x \rfloor + 1 \Longrightarrow \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x$.

c) $\forall\, x > 0$, le nombre d'entiers $k \in]0, x]$ est $\lfloor x \rfloor$. Or, $\{k \in \mathbf{N} ; n\alpha < k \leqslant n\beta\} = \{k\,; 0 < k \leqslant n\beta\} / \{k\,; 0 < k \leqslant n\alpha\}$
Donc, $N_n(\alpha, \beta) = \lfloor n\,\beta \rfloor - \lfloor n\,\alpha \rfloor$.

3.a) On a : $[\alpha < Y_n \leqslant \beta] = \displaystyle\bigcup_{n\alpha < k \leqslant n\beta} \Big[Y_n = \frac{k}{n}\Big] \Longrightarrow P(\alpha < Y_n \leqslant \beta) = \sum_{n\alpha < k \leqslant n\beta} P\Big(Y_n = \frac{k}{n}\Big) = \frac{1}{n}\, N_n(\alpha, \beta)$.

Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(\alpha < Y_n \leqslant \beta) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\lfloor n\beta \rfloor - \lfloor n\alpha \rfloor}{n} = \beta - \alpha$.

b) On a : $P(Y_n \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \dfrac{1}{n} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$. D'autre part, $[Z_n \leqslant x] = \Big[\dfrac{\lfloor n\,Z \rfloor}{n} \leqslant x\Big] = \big[\lfloor n\,Z \rfloor \leqslant nx\big]$.

D'après 2.b), on a : $[Z_n \leqslant x] = [nZ < \lfloor nx \rfloor + 1] = \Big[Z < \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \dfrac{1}{n}\Big] \Longrightarrow P(Z_n \leqslant x) = P\Big(Z < \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \dfrac{1}{n}\Big)$.

Par suite, $P(Z_n \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \dfrac{1}{n} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Les variables aléatoires Y_n et Z_n ont la même fonction de répartition, donc elles ont la même loi.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 82

Soit x réel et $M(x)$ la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ définie par : $M(x) = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 2x & 2x \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de x la matrice $M(x)$ est-elle diagonalisable ?

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION E 82

Le réel λ est valeur propre de $M(x)$ ssi la matrice $A(\lambda) = M(x) - \lambda I = \begin{pmatrix} x-\lambda & -1 \\ 2x & 2x-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible c'est-à-dire ssi $P(\lambda) = (x-\lambda)(2x-\lambda) + 2x = \lambda^2 - 3x\lambda + 2x^2 + 2x = 0$. Son discriminant est $\Delta = x(x-8)$.

• Si $x \in]0, 8[$, le polynôme $P(\lambda)$ est toujours strictement positif et la matrice $A(\lambda)$ est inversible, donc M n'est pas diagonalisable.

• Si $x = 0$, alors $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable (0 est l'unique valeur propre).

• Si $x = 8$, alors $M = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 16 & 16 \end{pmatrix} \Longrightarrow P(\lambda) = (\lambda - 1)^2$. Donc, M n'a qu'une valeur propre $\lambda = 12$ et ne peut être diagonalisable.

• Si $x \notin]0, 8[$, le polynôme $P(\lambda)$ admet deux racines distinctes λ_1 et λ_2, donc M admet deux valeurs propres distinctes et est diagonalisable.

EXERCICE PRINCIPAL E 83

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à cœfficients réels de degré inférieur ou égal à n.

On définit l'application φ de $\mathbf{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbf{R}_n[X],\ \varphi(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

On pose $H_0(X) = 1$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $H_k(X) = \dfrac{X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)}{k\,!}$.

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.

2.a) Montrer que φ est un endomorphisme non bijectif de $\mathbf{R}_n[X]$.

b) Justifier que la famille $\mathcal{B}' = (H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

c) Déterminer la matrice M' de φ dans la base $\mathcal{B}'$.

d) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

3. Dans cette question, p est un entier fixé supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![0,p]\!]$, soit f_i l'application de $\mathbf{R}_p[X]$ dans $\mathbf{R}$ définie par : $\forall Q \in \mathbf{R}_p[X],\ f_i(Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}Q(k)$.

a) Justifier que pour tout $i \in [\![0,p]\!]$, l'application f_i est linéaire.

b) Soit $(i,j) \in [\![0,p]\!]^2$. Établir la relation : $f_i(H_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

c) Soit $a_0, a_1, \ldots, a_p$ les réels vérifiant : $X^p = a_0H_0 + a_1H_1 + \cdots + a_pH_p$.

Déduire de la question précédente, la relation : $\forall i \in [\![0,p]\!],\ a_i = \displaystyle\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}k^p$.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL E 83

1. Cours.

2.a) L'application φ est clairement un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$. La linéarité est évidente ainsi que le fait que le degré de $\varphi(P)$ est inférieur au degré de P. Cet endomorphisme n'est pas injectif (donc non bijectif) car son noyau est formé des polynômes constants.

b) La famille $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$ car c'est une famille de polynômes de degrés échelonnés.

c) Un calcul immédiat donne : $\varphi(H_k)(X) = H_k(X+1) - H_k(X) = H_{k-1}(X)$.

La matrice M' de φ dans la base $\mathcal{B}'$ est donc une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont tous nuls et les éléments de la sur-diagonale sont égaux à 1, les autres éléments étant nuls.

d) La matrice triangulaire M' n'admet que la valeur propre 0 ; par suite, elle n'est pas diagonalisable.

3.a) Soit Q et R deux polynômes de $\mathbf{R}_p[X]$ et α un réel. On a :

$$f_i(\alpha Q + R) = \sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}(\alpha Q + R)(k) = \alpha\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}Q(k) + \sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}R(k) = \alpha f_i(Q) + f_i(R).$$

b) Remarquons que si $j \in [\![0,p]\!]$, $H_j(j) = 1$ et pour tout $k \in [\![0,j[\![$, $H_j(k) = 0$.

On a alors : $\forall i \in [\![0,p]\!],\ f_i(H_i) = \displaystyle\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}H_i(k) = H_i(i) = 1$.

De plus, $\forall j \in [\![0,p]\!],\ f_i(H_j) = \displaystyle\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}H_j(k) = \sum_{k=j}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}H_j(k) = \sum_{k=j}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}\frac{1}{j!}\prod_{\ell=0}^{j-1}(k-\ell)$, soit encore, $\forall j \in [\![0,p]\!],\ f_i(H_j) = \sum_{k=j}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}\binom{k}{j} = \sum_{k=j}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}\binom{i-j}{k-j} = \binom{i}{j}\sum_{k=0}^{i-j}(-1)^{i-k-j}\binom{i-j}{k}$

soit encore, $\forall j \in [\![0,p]\!],\ f_i(H_j) = \binom{i}{j}(-1)^{i-j}\sum_{k=0}^{i-j}(-1)^{k}\binom{i-j}{k} = 0$ d'après la formule du binôme.

c) On a : $f_i(X^p) = \sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}k^p = a_0 f_i(H_0) + a_1 f_i(H_1) + \cdots + a_p f_i(H_p) = a_i$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 83

Les variables aléatoires de cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, on note Y_n une variable aléatoire à valeurs dans $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\}$ telle que $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ P\left(Y_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}$.
Soit f une fonction définie et continue sur $[0,1]$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} E\big(f(Y_n)\big) = E\big(f(Z)\big)$.

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION E 83

On sait que (transfert) $E\big(f(Y_n)\big) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)P\left(Y_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, et d'après les "sommes de Riemann" et la continuité de f sur $[0,1]$: $\lim\limits_{n\to+\infty} E\big(f(Y_n)\big) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = E\big(f(Z)\big)$.

EXERCICE PRINCIPAL E 85

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : Définition et propriétés de la covariance de deux variables aléatoires discrètes.

Soit p, q et r des réels fixés de l'intervalle $]0,1[$ tels que $p+q+r=1$. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,0,1\}$, indépendantes et de même loi donnée par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \ P(X_n = 1) = p, \ P(X_n = -1) = q, \ P(X_n = 0) = r.$$

On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $Y_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} X_k$.

2.a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, préciser $Y_n(\Omega)$ et calculer $P(Y_n = 0)$.

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer $E(X_n)$ et $E(Y_n)$.

3. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = P(Y_n = 1)$.

a) Calculer p_1 et p_2.

b) Établir une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.

c) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $p_n = \dfrac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2}$.

d) Pouvait-on à l'aide de la question 2, trouver directement la loi de Y_n ?

4.a) Établir l'inégalité : $(p+q)^n > (p-q)^{2n}$. Calculer $V(Y_n)$.

b) Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$ des deux variables aléatoires Y_n et Y_{n+1}.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL E 85

1. Cours.

2.a) $Y_n(\Omega) = \{-1,0,1\}$. Par indépendance et incompatibilité : $P(Y_n \neq 0) = (p+q)^n \Longrightarrow P(Y_n = 0) = 1-(p+q)^n$.

b) On a : $E(X_n) = p - q$ et par indépendance du produit de variables aléatoires, $E(Y_n) = (p-q)^n$.

3.a) On a clairement : $p_1 = p = \dfrac{(p+q)+(p-q)}{2}$ et $p_2 = p^2 + q^2 = \dfrac{(p+q)^2 + (p-q)^2}{2}$.

b) On a : $p_{n+1} = P(Y_{n+1} = 1) = P([Y_{n+1} = 1] \cap [Y_n = 1]) + P([Y_{n+1} = 1] \cap [Y_n = -1]) + P([Y_{n+1} = 1] \cap [Y_n = 0])$.
Or, $[Y_{n+1} = 1] \cap [Y_n = 0] = \emptyset \Longrightarrow P([Y_{n+1} = 1] \cap [Y_n = 0]) = 0$, $[Y_{n+1} = 1] \cap [Y_n = 1] = [X_{n+1} = 1] \cap [Y_n = 1]$ et $[Y_{n+1} = 1] \cap [Y_n = -1] = [X_{n+1} = -1] \cap [Y_n = -1]$. D'après le lemme des coalitions, X_{n+1} et Y_n sont indépendantes $\Longrightarrow p_{n+1} = P(X_{n+1} = 1)P(Y_n = 1) + P(X_{n+1} = -1)P(Y_n = -1) = p\,p_n + q\,P(Y_n = -1)$.
Or, $P(Y_n = -1) = 1 - p_n - P(Y_n = 0) = -p_n + (p+q)^n \Longrightarrow p_{n+1} = (p-q)p_n + q(p+q)^n$.

c) Les valeurs initiales p_1 et p_2, l'hypothèse de récurrence $p_n = \dfrac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2}$ pour un certain n et la relation de récurrence de la question b) $\Longrightarrow \forall n \in \mathbf{N}^*, \ p_n = \dfrac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2}$.

d) Puisque $P(Y_n = 0) = 1 - (p+q)^n$ et que $E(Y_n) = P(Y_n = 1) - P(Y_n = -1) = (p-q)^n$, on a les équations suivantes : $\begin{cases} P(Y_n = 1) + P(Y_n = -1) = (p+q)^n \\ P(Y_n = 1) - P(Y_n = -1) = (p-q)^n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} P(Y_n = 1) = \dfrac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2} \\ P(Y_n = -1) = \dfrac{(p+q)^n - (p-q)^n}{2} \end{cases}$.

4.a) Puisque $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$, on a : $0 \leqslant (p-q)^2 = p^2 + q^2 - 2pq < p^2 + q^2 < p + q$.

EXERCICE PRINCIPAL E 86

1. Question de cours : Fonctions équivalentes au voisinage de $+\infty$.

Pour tout entier naturel n, soit f_n la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par : $\forall x \geqslant 0,\ f_n(x) = \displaystyle\int_0^1 t^n \,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t$.

2.a) Montrer que pour tout entier naturel n, la fonction f_n est décroissante sur $\mathbf{R}_+$.

b) Étudier la suite $\big(f_n(0)\big)_{n\geqslant 0}$. En déduire pour tout réel $x \geqslant 0$ fixé, la limite de la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\geqslant 0}$.

3.a) Soit x un réel strictement positif. Établir pour tout entier $n \geqslant 1$, la relation : $f_{n+1}(x) = \dfrac{n+1}{x} f_n(x) - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\cdot$

b) Expliciter les fonctions f_0 et f_1.

c) Montrer que pour tout entier naturel n, $f_n(x)$ est équivalent à $\dfrac{n!}{x^{n+1}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4.a) Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$, on a : $f_n(x) = \dfrac{1}{x^{n+1}} \displaystyle\int_0^x u^n \,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$.

b) En déduire que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée f_n'.

c) Comparer pour tout réel $y \geqslant 0$, les deux réels y et $1 - \mathrm{e}^{-y}$.

En déduire que pour tout entier naturel n, la fonction f_n est continue en 0.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL E 86

1.Cours.

2.a) Pour $0 \leqslant x \leqslant y$, la croissance de l'exponentielle et les bornes "bien rangées"$\Longrightarrow f_n(x) \geqslant f_n(y)$.

b) Le calcul donne $f_n(0) = \dfrac{1}{n+1}\cdot$ et la décroissance de f_n sur $\mathbf{R}_+ \Longrightarrow 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(0) = \dfrac{1}{n+1}\cdot$

Par encadrement, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

3.a) Une IPP $\Longrightarrow f_{n+1}(x) = \left[-\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{-tx} t^{n+1}\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 -\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{-tx}(n+1)\,t^n\,\mathrm{d}t = \dfrac{n+1}{x} f_n(x) - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\cdot$

b) On a pour tout $x \geqslant 0$, $f_0(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$ et $f_1(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x}}{x^2}\cdot$

c) Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(1 - \mathrm{e}^{-x} = 1$, on a bien $f_0(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$ équivalent à $\dfrac{1}{x} = \dfrac{0!}{x^{0+1}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Soit un entier n tel que $f_n(x)$ est équivalent à $\dfrac{n!}{x^{n+1}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

À l'aide de la question 3.a), on a : $\dfrac{x^{n+2}}{(n+1)!} f_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n!} f_n(x) - \dfrac{x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}}{(n+1)!}\cdot$ Le second membre tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$ d'après l'hypothèse de récurrence.

4.a) Le changement de variable linéaire $u = tx \Longrightarrow f_n(x) = \dfrac{1}{x^{n+1}}\displaystyle\int_0^x u^n\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$. Le théorème fondamental de l'intégration permet de dire que $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x u^n\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et finalement, on obtient :

$\forall x > 0,\ f_n'(x) = -\dfrac{n+1}{x^{n+2}}\displaystyle\int_0^x u^n\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u + \dfrac{1}{x^{n+1}}\,x^n\mathrm{e}^{-x} = -\dfrac{n+1}{x}\,f_n(x) + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = -f_{n+1}(x)$.

b) Un argument de convexité, par exemple, montre que $\forall y \geqslant 0$, on a $: 0 \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-y} \leqslant y$.

On a : $0 \leqslant |f_n(0) - f_n(x)| = \left|\displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t - \int_0^1 t^n\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 t^n(1 - \mathrm{e}^{-tx})\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n tx\,\mathrm{d}t = \dfrac{x}{n+2}$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Par encadrement, on a : $\displaystyle\lim_{x\to 0} f_n(x) = f_n(0)$ et f_n est continue en 0.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 86

Soit c et r deux réels strictement positifs.

1. Justifier que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{r\,c^r}{x^{r+1}} & \text{si } x > c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Identifier la loi de la variable aléatoire $Y = \ln X - \ln c$.

3. Compléter les lignes du code *Scilab* suivant pour que V soit un vecteur ligne contenant cent réalisations de la loi de la variable aléatoire X.

```
c=input("c=")
r=input("r=")
U=grand( ?, ?, ?, ?)
V=c*exp(U)
```

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION E 86

1. La fonction f est continue sur $\mathbf{R}\backslash\{c\}$, positive et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r\,c^r}{x^{r+1}}\,\mathrm{d}x = 1$

2. $F_X(x) = 0$ si $x \leqslant c$ et $F_X(x) = 1 - \left(\dfrac{c}{x}\right)^r$ si $x > c$. Or, $X(\Omega) =]c, +\infty[\Longrightarrow Y(\Omega) = \mathbf{R}_+^*$.

$\forall\, y \in \mathbf{R}_+^*,\ P(Y \leqslant y) = P(X \leqslant c\,\mathrm{e}^y) = 1 - \left(\dfrac{c}{c\,\mathrm{e}^y}\right)^r = 1 - \mathrm{e}^{-ry}$, donc $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(r)$.

3.
```
c=input("c=")
r=input("r=")
U=grand(1,n,"exp",1/r)
```
car $E(Y) = 1/r$.
```
V=c*exp(U)
```

EXERCICE PRINCIPAL E 88

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : Convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

Dans tout l'exercice, X désigne une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

2.a) On pose : $T = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X). Montrer que la loi de T est donnée par :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ P(T = k) = \left(1 - e^{-\lambda}\right)\left(e^{-\lambda}\right)^k.$$

b) Quelle est la loi de $T + 1$? En déduire l'espérance et la variance de T.

3. On pose : $Z = X - \lfloor X \rfloor$.

Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z.

4. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, X_n suit une loi exponentielle de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}\cdot$ On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $Z_n = X_n - \lfloor X_n \rfloor$.

Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL E 88

1. Cours.

2.a) $T(\Omega) = \mathbf{N} \Longrightarrow \forall k \in \mathbf{N},\ [T = k] = [k \leqslant X < k+1] \Longrightarrow P(T = k) = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} = \left(1 - e^{-\lambda}\right)\left(e^{-\lambda}\right)^k.$

b) $T+1$ suit la loi géométrique (classique) de paramètre $1 - e^{-\lambda} \Longrightarrow E(T+1) = \dfrac{1}{1 - e^{-\lambda}} \Longrightarrow E(T) = \dfrac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}.$

On a : $V(T+1) = V(T) = \dfrac{e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^2}\cdot$

3. $Z(\Omega) = [0, 1[$, donc, $F_Z(z) = 0$ si $z < 0$ et $F_Z(z) = 1$ si $z \geqslant 1$. D'autre part, $\{T = k\}_{k\in\mathbf{N}}$ est un sce, d'où,

$$\forall z \in [0,1[,\ F_Z(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} P\big([Z \leqslant z] \cap [T = k]\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(k \leqslant X \leqslant k + z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \big(F_X(k+z) - F_X(k)\big), \text{ soit encore,}$$

$$\forall z \in [0,1[,\ F_Z(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+z)}\right) = (1 - e^{-\lambda z}) \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-\lambda})^k = \frac{1 - e^{-\lambda z}}{1 - e^{-\lambda}}\cdot$$

La fonction F_Z est continue sur $\mathbf{R}$, de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ sauf éventuellement en 0 et 1. Donc, Z est une variable aléatoire réelle à densité.

Une densité f_Z de Z est par exemple : $f_Z(z) = \dfrac{\lambda\, e^{-\lambda z}}{1 - e^{-\lambda}}$ si $0 \leqslant z \leqslant 1$ et $f_Z(z) = 0$ sinon.

4. D'après la question 3, $F_{Z_n}(z) = 0$ si $z < 0$, $F_{Z_n}(z) = 1$ si $z > 1$ et $F_{Z_n}(z) = \dfrac{1 - e^{-\frac{\lambda z}{n}}}{1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}}$ si $0 \leqslant z \leqslant 1$.

On sait que $1 - e^{-u}$ est équivalent à u lorsque u tend vers 0. Par suite, pour $z \neq 0$, $\dfrac{1 - e^{-\frac{\lambda z}{n}}}{1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}}$ est équivalent à z lorsque n tend vers $+\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} F_{Z_n}(z) = z$.

En conséquence, la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 88

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f^4 = f^2$ et $\text{rg}(f^2) = 1$. Montrer que le spectre de f est $\{0\}$ ou $\{0,1\}$ ou $\{-1,0\}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION E 88

Le polynôme $X^4 - X^2 = X^2(X^2-1)$ est annulateur de $f \Longrightarrow \text{Sp}(f) \subset \{-1,0,1\}$.

- Si 0 n'est pas valeur propre de $f \Longrightarrow f$ est bijective $\Longrightarrow f^2 = \text{id}$ est bijective $\Longleftrightarrow \text{rg}(f^2) = 3$, ce qui est contraire à l'hypothèse.
- Si 1 et -1 sont valeurs propres de $f \Longrightarrow f$ est diagonalisable $\Longrightarrow f^2$ est diagonalisable et semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{rg}(f^2) = 2$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Bilan : le spectre de f est $\{0\}$ ou $\{0,1\}$ ou $\{-1,0\}$.

EXERCICE PRINCIPAL E 89

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f_n(x) = \begin{cases} x^n \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

2.a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. On pose : $\forall n \in \mathbf{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Déterminer pour tout $n \in \mathbf{N}$, une relation entre I_n et I_{n+2}.

c) Calculer I_0 et I_1.

3.a) Montrer que f_1 est une densité de probabilité.

b) Tracer la courbe représentative de f_1 dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

Dans la suite, on note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant f_1 pour densité.

c) Déterminer la fonction de répartition F de X.

d) Justifier l'existence de l'espérance $E(X)$ et de la variance $V(X)$ de X. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

4. On pose : $Y = X^2$.

a) Montrer que Y est une variable aléatoire à densité.

b) Quelle est la loi de Y ?

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL E 89

1. Cours.

2.a) On a : $0 \leqslant x^2 f_n(x) = x^{n+2}\exp(-x^2/2)$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, donc $f_n(x)$ est négligeable devant $1/x^2$ et la règle de Riemann permet de conclure à la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

b) On dérive x^{n+1} et on intègre $x\exp(-x^2/2)$ en $-\exp(x^2/2)$. Une IPP sur $[0, A]$ et un passage à la limite lorsque A tend vers $+\infty \Longrightarrow \forall n \in \mathbf{N},\ I_{n+2} = (n+1)I_n$.

c) Par référence à la loi normale centrée réduite et à la parité de $x \longmapsto \exp(-x^2/2)$ sur $\mathbf{R}$, on a : $I_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Une primitive de $x \longmapsto x\exp(-x^2/2)$ est $x \longmapsto -\exp(-x^2/2) \Longrightarrow I_1 = 1$.

3.a) On a : $f_1 \geqslant 0$, continue sur $\mathbf{R}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_1(x)\,\mathrm{d}x = I_1 = 1 \Longrightarrow f_1$ est une densité de probabilité.

b) On a : $f'(x) = (1-x^2)\exp(-x^2/2)$ et $f''(x) = x(x^2-3)\exp(-x^2/2)$.

La fonction f_1 est nulle sur $\mathbf{R}_-$, croissante et concave sur $[0, 1]$ et prenant ses valeurs dans $[0, 1/\sqrt{e}]$, puis décroît sur $[1, +\infty[$ en restant concave sur $[1, \sqrt{3}]$ puis convexe au-delà de $\sqrt{3}$.

c) $F(x) = 0$ si $x < 0$ et $F(x) = 1 - \exp(-x^2/2)$ si $x \geqslant 0$.

d) La justication de l'existence de $E(X)$ et $E(X^2)$ a été établie en 2.a).

La relation de récurrence de 2.b) $\Longrightarrow I_2 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ et $I_3 = 2 \Longrightarrow E(X) = I_2 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ et $V(X) = 2 - \pi/2$.

4.a)b) On trouve classiquement : $G(x) = 0$ si $x < 0$ et $G(x) = 1 - \exp(-x/2)$ si $x \geqslant 0$.

La fonction de répartition G de Y est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, donc Y est à densité et plus précisément, on reconnaît en Y une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $1/2$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 89

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ est : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$ et une base de $\mathrm{Im} f$.

2. On admet sans démonstration que $A^3 = 0$. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ définie par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Quelles sont les valeurs propres de M ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

b) Justifier que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de A et I (matrice identité de $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$).

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION E 89

1. Les deux premières colonnes de A sont opposées : le rang de A est égal à 2.
On a : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\big((-1,0,1),(1,2,1)\big)$ et $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\big((1,1,0)\big)$.

2.a) On a : $M = A + I$. La matrice A est nilpotente et sa seule valeur propre est 0, donc la seule valeur propre de M est 1. Or, M n'est pas semblable (égale) à I, donc M n'est pas diagonalisable.

b) Le réel 0 n'est pas valeur propre de M, donc M est inversible.
On utilise l'identité remarquable : $A^3 + I^3 = (A+I)(A^2 - A + I) \Longrightarrow M(A^2 - A + I) = I \Longrightarrow M^{-1} = A^2 - A + I$.

EXERCICE PRINCIPAL

Toutes les variables aléatoires utilisées dans cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : loi faible des grands nombres

   Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. de loi uniforme sur $[0, 1]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n la variable aléatoire $\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

   a) Calculer la fonction de répartition de U_n.

   b) Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, la probabilité $P([U_n \geq \varepsilon])$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

3. Compléter la deuxième ligne du code *Scilab* suivant pour que la fonction "minu" simule la variable U_k pour la valeur k du paramètre.

```
function u=minu(k)
  x= ...
  u=min(x)
endfunction
```

4. Soit $p \in]0, 1[$ et Z une variable aléatoire telle que, pour tout réel x :

$$P([Z \leq x]) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} P([U_k \leq x])$$

   (on admet qu'il existe une telle variable aléatoire et qu'elle possède une densité).

   a) Justifier, pour tout $x \in [0, 1]$, l'égalité : $P([Z \leq x]) = 1 - \dfrac{p(1-x)}{p + (1-p)x}$.

   b) En déduire une densité de Z.

5. a) Justifier que la fonction *Scilab* suivante fournit une simulation de la variable aléatoire Z de la question précédente.

```
function z=geomin(p)
  z=minu(grand(1,1,'geom',p))
endfunction
```

   b) De quel nombre réel les instructions suivantes fournissent-elles une valeur approchée et pourquoi ?

```
p=0.5;
R=[];
for k=1:10000
  R=[R,geomin(p)]
end;
disp(mean(R))
```

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL E 90

1. Cours.

2.a) $\forall x \in [0,1[$, $P(U_n \leqslant x) = 1 - P(U_n > x) = 1 - P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i > x)\Big) = 1 - (1-x)^n$ par indépendance des X_i.

$\forall x < 0$, $P(U_n \leqslant x) = 0$ et $\forall x > 1$, $P(U_n \leqslant x) = 1$.

b) $P(U_n \geqslant \varepsilon) = (1-\varepsilon)^n \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} P(U_n \geqslant \varepsilon) = 0$ car $0 < 1 - \varepsilon < 1$.

3. On peut utiliser `x=grand(1,n,'def')` ou `x=rand(1,n)`.

4.a) $\forall x \in [0,1]$, $P(Z \leqslant x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}\big(1-(1-x)\big)^k = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}(1-x)^k$, soit encore,

$$P(Z \leqslant x) = 1 - p(1-x)\sum_{k=1}^{+\infty}\big(q(1-x)\big)^{k-1} = 1 - p(1-x)\frac{1}{1-q(1-x)} = 1 - \frac{p(1-x)}{p+qx} \text{ (avec } q = 1-p).$$

b) Par dérivation, on en déduit : $\forall x \in [0,1]$, $f_Z(x) = \dfrac{p}{(p+qx)^2}$.

5.a) Si N est une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p, alors Z est la variable aléatoire définie par : si $[N = k]$ est réalisé, alors $Z = U_k$ et $P(U_k \leqslant x) = P_{[N=k]}(Z \leqslant x)$.
La commande `grand(1,1,'geom',p)` génère une valeur prise par une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p.

b) Dans le programme, R est un vecteur ligne qui contient 10000 réalisations de Z pour la valeur p du paramètre et on affiche la moyenne de ces valeurs. Le résultat affiché est donc une valeur approchée de l'espérance de Z.

On a : $E(Z) = \displaystyle\int_0^1 \frac{px}{(p+qx)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{p}{q}\Big(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{p+qx} - \int_0^1 \frac{p\,\mathrm{d}x}{(p+qx)^2}\Big) = -\frac{p}{q^2}\ln p - \frac{p}{q}$.

Pour $p = 1/2$, on a $E(Z) = 2\ln 2 - 1$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 90

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit f_n la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \int_0^x e^{nt^2}\,dt - \int_x^1 e^{-nt^2}\,dt.$$

1. Montrer que la fonction f_n est strictement monotone sur $[0,1]$.

2.a) Établir l'existence d'un unique réel de $[0,1]$, noté c_n, tel que $\displaystyle\int_0^{c_n} e^{nt^2}\,dt = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2}\,dt$.

3.a) Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION 90

1. Le théorème fondamental du calcul intégral (continuité des intégrandes) permet de dire que f_n est dérivable et on a : $f_n'(x) = e^{nx^2} + e^{-nx^2} > 0 \Longrightarrow f_n$ est strictement croissante sur $[0,1]$.

2.a) La fonction f_n continue et strictement croissante sur $[0,1]$ réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[f_n(0), f_n(1)]$. Il est clair que $f_n(0) = -\displaystyle\int_0^1 e^{-nt^2}\,dt \leqslant 0$ et $f_n(1) = \displaystyle\int_0^1 e^{nt^2}\,dt \geqslant 0$. Par suite, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $c_n \in [0,1]$, c'est-à-dire : $\displaystyle\int_0^{c_n} e^{nt^2}\,dt - \int_{c_n}^1 e^{-nt^2}\,dt = 0$.

b) On a : $f_{n+1}(c_{n+1}) = 0$ et $f_{n+1}(c_n) = \displaystyle\int_0^{c_n} e^{(n+1)t^2}\,dt - \int_{c_n}^1 e^{-(n+1)t^2} \geqslant 0 = f_n(c_n) = f_{n+1}(c_{n+1})$ par croissance de la fonction exponentielle. Donc, $0 = f_{n+1}(c_{n+1}) \leqslant f_{n+1}(c_n)$ et puisque f_{n+1} est strictement croissante sur $[0,1]$, on a : $c_{n+1} \leqslant c_n$. La suite $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.