# HEC 2016

## Sujet E 65

**Exercice avec préparation 1**
Soit $X$ une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On appelle *médiane* de $X$ tout réel $m$ qui vérifie les deux conditions :

$$\mathbb{P}([X \leqslant m]) \geqslant \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}([X \geqslant m]) \geqslant \frac{1}{2}$$

On suppose que $X$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

*1.* Question de cours : Définition et propriétés de la loi exponentielle.

*2.* ***a)*** Montrer que $X$ admet une unique médiane $m$ que l'on calculera.

***b)*** Soit $M$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $M(x) = \mathbb{E}(|X - x|)$.
Étudier les variations de la fonction $M$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que $m$ est l'unique point en lequel $M$ atteint son minimum.

*3.* On suppose que le paramètre $\lambda$ est inconnu. Soit $\alpha$ un réel vérifiant $0 < \alpha < 1$.
Pour $n$ entier de $\mathbb{N}^*$, soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un $n$-échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même loi que $X$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $Z_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

***a)*** Quelle est la loi de $Z_n$ ?

***b)*** Établir l'existence de deux réels $c$ et $d$ tels que : $\mathbb{P}\left(\left[Z_n \leqslant \dfrac{c}{\lambda}\right]\right) = \dfrac{\alpha}{2}$ et $\mathbb{P}\left(\left[Z_n \geqslant \dfrac{d}{\lambda}\right]\right) = \dfrac{\alpha}{2}$.

***c)*** En déduire un intervalle de confiance du paramètre $m$ au niveau de confiance $1 - \alpha$.

**Exercice sans préparation 1**
Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $f$ un endomorphisme de $E$ admettant $n$ valeurs propres distinctes.
Montrer qu'un endomorphisme $g$ de $E$ vérifie $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si les vecteurs propres de $f$ sont des vecteurs propres de $g$.

## Sujet E 82

**Exercice avec préparation 2**
On suppose que toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

*1.* Question de cours : Loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$ ; définition, propriétés.

*2.* Pour tout $x$ réel, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de $x$.

***a)*** Pour $n$ entier de $\mathbb{N}^*$, montrer que pour tout $x$ réel, on a : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.

***b)*** Établir pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ l'équivalence suivante : $\lfloor y \rfloor \leqslant x \iff y < \lfloor x \rfloor + 1$.

***c)*** Soit $\alpha$ et $\beta$ deux réels vérifiant $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$ et soit $N_n(\alpha, \beta)$ le nombre d'entiers $k$ qui vérifient $\alpha < \dfrac{k}{n} \leqslant \beta$. Exprimer $N_n(\alpha, \beta)$ en fonction de $\lfloor n\alpha \rfloor$ et $\lfloor n\beta \rfloor$.

*3.* Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $Y_n$ la variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \ \mathbb{P}\left(\left[Y_n = \frac{k}{n}\right]\right) = \frac{1}{n}.$$

Soit $Z$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la variable aléatoire $Z_n$ par : $Z_n = \dfrac{\lfloor nZ \rfloor}{n}$. Soit $\alpha$ et $\beta$ deux réels vérifiant $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$.

***a)*** Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([\alpha < Y_n \leqslant \beta]) = \beta - \alpha$.

***b)*** Comparer les fonctions de répartition respectives de $Y_n$ et $Z_n$. Conclusion.

**Exercice sans préparation 2**

Soit $x$ réel et $M(x)$ la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par : $M(x) = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 2x & 2x \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de $x$ la matrice $M(x)$ est-elle diagonalisable ?

## Sujet E 83

**Exercice avec préparation 3**

Pour tout entier naturel $n$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n$.

On définit l'application $\varphi$ de $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

On pose $H_0(X) = 1$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $H_k(X) = \dfrac{X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)}{k!}$.

On note $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

*1.* Question de cours : Définition de deux matrices semblables.

*2.* ***a)*** Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme non bijectif de $\mathbb{R}_n[X]$.

***b)*** Justifier que la famille $\mathscr{B}' = (H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

***c)*** Déterminer la matrice $M'$ de $\varphi$ dans la base $\mathscr{B}'$.

***d)*** L'endomorphisme $\varphi$ est-il diagonalisable ?

*3.* Dans cette question, $p$ est un entier fixé supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, soit $f_i$ l'application de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall Q \in \mathbb{R}_p[X]$, $f_i(Q) = \sum\limits_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \dbinom{i}{k} Q(k)$.

***a)*** Justifier que pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, l'application $f_i$ est linéaire.

***b)*** Soit $(i, j) \in [\![0, p]\!]^2$. Établir la relation : $f_i(H_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

***c)*** Soit $a_0$, $a_1$, …, $a_p$ les réels vérifiant : $X^p = a_0 H_0 + a_1 H_1 + \cdots + a_p H_p$.

Déduire de la question précédente, la relation : $\forall i \in [\![0, p]\!]$, $a_i = \sum\limits_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \dbinom{i}{k} k^p$.

**Exercice sans préparation 3**

Les variables aléatoires de cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Soit $Z$ une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $Y_n$ une variable aléatoire à valeurs dans $\left\{0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \dfrac{n-1}{n}\right\}$ telle que :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \ \mathbb{P}\left(\left[Y_n = \frac{k}{n}\right]\right) = \frac{1}{n}$$

Soit $f$ une fonction définie et continue sur $[0,1]$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(f(Y_n)) = \mathbb{E}(f(Z))$.

## Sujet E 85

**Exercice avec préparation 4**

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

*1.* Question de cours : Définition et propriétés de la covariance de deux variables aléatoires discrètes.
Soit $p$, $q$ et $r$ des réels fixés de l'intervalle $]0,1[$ tels que $p+q+r=1$.
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,0,1\}$, indépendantes et de même loi donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X_n=1])=p,\ \mathbb{P}([X_n=-1])=q,\ \mathbb{P}([X_n=0])=r.$$

On pose pour tout entier $n \geqslant 1$ : $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

*2.* ***a)*** Pour tout entier $n \geqslant 1$, préciser $Y_n(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}([Y_n=0])$.

***b)*** Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{E}(Y_n)$.

*3.* On pose pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $p_n = \mathbb{P}([Y_n=1])$.

***a)*** Calculer $p_1$ et $p_2$.

***b)*** Établir une relation de récurrence entre $p_{n+1}$ et $p_n$.

***c)*** En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $p_n = \dfrac{(p+q)^n+(p-q)^n}{2}$.

***d)*** Pouvait-on à l'aide de la question 2, trouver directement la loi de $Y_n$ ?

*4.* ***a)*** Établir l'inégalité : $(p+q)^n > (p-q)^{2n}$. Calculer $\mathbb{V}(Y_n)$.

***b)*** Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$ des deux variables aléatoires $Y_n$ et $Y_{n+1}$.

## Sujet E 86

**Exercice avec préparation 5**

*1.* Question de cours : Fonctions équivalentes au voisinage de $+\infty$.
Pour tout entier naturel $n$, soit $f_n$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \geqslant 0$, $f_n(x) = \displaystyle\int_0^1 t^n \mathrm{e}^{-tx}\, dt$.

*2.* ***a)*** Montrer que pour tout entier naturel $n$, la fonction $f_n$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

***b)*** Étudier la suite $(f_n(0))_{n\geqslant 0}$. En déduire pour tout réel $x \geqslant 0$ fixé, la limite de la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$.

*3.* ***a)*** Soit $x$ un réel strictement positif. Établir pour tout entier $n \geqslant 1$, la relation :

$$f_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} f_n(x) - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

***b)*** Expliciter les fonctions $f_0$ et $f_1$.

***c)*** Montrer que pour tout entier naturel $n$, $f_n(x)$ est équivalent à $\dfrac{n!}{x^{n+1}}$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

*4.* ***a)*** Montrer que pour tout entier naturel $n$ et tout réel $x > 0$, on a : $f_n(x) = \dfrac{1}{x^{n+1}} \displaystyle\int_0^x u^n \mathrm{e}^{-u}\, du$.

***b)*** En déduire que la fonction $f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer sa dérivée $f_n'$.

***c)*** Comparer pour tout réel $y \geqslant 0$, leq deux réels $y$ et $1-\mathrm{e}^{-y}$.
En déduire que pour tout entier naturel $n$, la fonction $f_n$ est continue en 0.

**Exercice sans préparation 4**

Soit $c$ et $r$ deux réels strictement positifs.

*1.* Justifier que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{rc^r}{x^{r+1}} & \text{si } x > c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

*2.* Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$. Identifier la loi de la variable aléatoire $Y = \ln(X) - \ln(c)$.

*3.* Compléter les lignes du code **Scilab** suivant pour que $V$ soit un vecteur ligne contenant 100 réalisations de la loi de la variable aléatoire $X$.

```
c = input('c=')
r = input('r=')
U = grand(?,?,?,?)
V = c * exp(U)
```

## Sujet E 88

**Exercice avec préparation 6**

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

*1.* Question de cours : Convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.
Dans tout l'exercice, $X$ désigne une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

*2.* ***a)*** On pose : $T = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de $X$). Montrer que la loi de $T$ est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([T = k]) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right)\left(\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^k$$

***b)*** Quelle est la loi de $T+1$ ? En déduire l'espérance et la variance de $T$.

*3.* On pose : $Z = X - \lfloor X \rfloor$.
Montrer que $Z$ est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de $Z$.

*4.* Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n$ suit une loi exponentielle de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $Z_n = X_n - \lfloor X_n \rfloor$.
Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

**Exercice sans préparation 5**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 3 et $f$ un endomorphisme de $E$ tel que $f^4 = f^2$ et $\mathrm{rg}(f^2) = 1$.
Montrer que le spectre de $f$ est $\{0\}$ ou $\{0, 1\}$ ou $\{-1, 0\}$.

## Sujet E 89

**Exercice avec préparation 7**

*1.* Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} x^n \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

*2.* ***a)*** Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx$.

***b)*** Calculer $I_0$ et $I_1$.

*3.* ***a)*** Montrer que $f_1$ est une densité de probabilité.

***b)*** Tracer la courbe représentative de $f_1$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
Dans la suite, on note $X$ une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ admettant $f_1$ pour densité.

***c)*** Déterminer la fonction de répartition $F$ de $X$.

***d)*** Justifier l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et de la variance $\mathbb{V}(X)$ de $X$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

*4.* On pose : $Y = X^2$.

***a)*** Montrer que $Y$ est une variable aléatoire à densité.

***b)*** Quelle est la loi de $Y$ ?

**Exercice sans préparation 6**

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice $A$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

*1.* Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

*2.* On admet sans démonstration que $A^3 = 0$. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

***a)*** Quelles sont les valeurs propres de $M$ ? La matrice $M$ est-elle diagonalisable ?

***b)*** Justifier que $M$ est inversible et exprimer $M^{-1}$ en fonction de $A$ et $I$ (matrice identité de $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$).

## Sujet E 90

**Exercice avec préparation 8**

Toutes les variables aléatoires utilisées dans cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

*1.* Question de cours : loi faible des grands nombres.
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, de loi uniforme sur $[0, 1]$.

*2.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $U_n$ la variable aléatoire $\min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

***a)*** Calculer la fonction de répartition de $U_n$.

***b)*** Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, la probabilité $\mathbb{P}([U_n \geqslant \varepsilon])$ tend vers $0$ quand $n$ tend vers l'infini.

*3.* Compléter la deuxième ligne du code **Scilab** suivant pour que la fonction `minu` simule la variable $U_k$ pour la valeur $k$ du paramètre.

```
1 function u = minu(k)
2     x = ..........
3     u = min(x)
4 endfunction
```

***4.*** Soit $p \in ]0,1[$ et $Z$ une variable aléatoire telle que, pour tout réel $x$ :

$$\mathbb{P}([Z \leqslant x]) = \sum_{k=1}^{+\infty} p\,(1-p)^{k-1}\,\mathbb{P}([U_k \leqslant x])$$

(on admet qu'il existe une telle variable aléatoire et qu'elle possède une densité).

***a)*** Justifier, pour tout $x \in [0,1]$, l'égalité : $\mathbb{P}([Z \leqslant x]) = 1 - \dfrac{p(1-x)}{p+(1-p)x}$.

***b)*** En déduire une densité de $Z$.

***5.*** ***a)*** Justifier que la fonction **Scilab** suivante fournit une simulation de la variable aléatoire $Z$ de la question précédente.

```
function z = geomin(p)
    z = minu(grand(1, 1, 'geom', p))
endfunction
```

***b)*** De quel nombre réel les instructions suivantes fournissent-elles une valeur approchée et pourquoi ?

```
p = 0.5 ;
R = [] ;
for k = 1:10000
    R = [R, geomin(p)]
end ;
disp(mean(R))
```

**Exercice sans préparation 7**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n$ la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ \ f_n(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{nt^2}\,dt - \int_x^1 \mathrm{e}^{-nt^2}\,dt.$$

***1.*** Montrer que la fonction $f_n$ est strictement monotone sur $[0,1]$.

***2.*** Établir l'existence d'un unique réel de $[0,1]$, noté $c_n$, tel que $\displaystyle\int_0^{c_n} \mathrm{e}^{nt^2}\,dt = \int_{c_n}^1 \mathrm{e}^{-nt^2}\,dt$.

***3.*** Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.