Colles - Semaine 15

Planche 1

1. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \exp\left(-e^{-x}\right)$.

a) Justifier que F est une fonction de répartition.

b) Soit X une v.a.r. de fonction de répartition F. Déterminer une densité f de X.

On suppose désormais que X est une v.a.r. sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et que toutes les v.a.r. citées sont définies sur ce même espace.

2. ***a)*** Soit $Z = e^{-X}$. Justifier que Z est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et déterminer sa loi.

b) On rappelle que `grand(1,1,'exp',1)` simule une variable aléatoire et suivant une loi exponentielle de paramètre 1. Écrire une fonction `Scilab` qui simule la variable aléatoire X.

c) Soient x et y deux réels strictement positifs. Établir une relation entre la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X \leqslant -\ln(X)]}([X \leqslant -\ln(x+y)])$ et $\mathbb{P}([X \leqslant -\ln(y)])$.

3. Soit $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1.
Soit d'autre part L une v.a.r. de loi de Poisson de paramètre 1 indépendante des variables aléatoires de la suite $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.
On définit S par :

× si $L(\omega) = 0$, alors $S(\omega) = 0$.

× si $L(\omega) = k$, avec $k \in \mathbb{N}^*$, alors $S(\omega) = \max(Y_1(\omega), \ldots, Y_k(\omega))$.

a) Soit k un entier naturel non nul.
Déterminer la loi de la variable aléatoire $S_k = \max(Y_1, \ldots, Y_k)$.

b) Démontrer que pour tous réels a et b tels que $0 < a < b$, on a :

$$\mathbb{P}([a \leqslant S \leqslant b]) = \mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b])$$

c) Calculer $\mathbb{P}([S = 0])$.

Planche 2

Soit α un réel strictement positif et $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On suppose de plus que pour tout i, Y_i suit la loi exponentielle de paramètre $i\,\alpha$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ et on note g_n la densité de Z_n nulle sur $\mathbb{R}_-$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. ***a)*** Déterminer la fonction g_2.

b) Montrer que pour $n \geqslant 1$ et $x > 0$, on a : $g_n(x) = n\,\alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha\,x}\,(1-\mathrm{e}^{-\alpha\,x})^{n-1}$

c) Calculer l'espérance de Z_n et en donner un équivalent simple lorsque n tend vers l'infini.

d) Calculer la variance de Z_n et montrer qu'elle admet une limite finie lorsqie n tend vers l'infini.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \dfrac{1}{n}\,Z_n$.

a) Déterminer la fonction de répartition H_n de U_n.

b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(F_{U_n}(x))$ converge vers un réel $F(x)$.
Montrer que F est la fonction de répartition d'une v.a.r. que l'on précisera.

c) Déterminer la limite quand n tend vers l'infini de $\mathbb{E}(U_n)$ et $\mathbb{V}(U_n)$.

Planche 3

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif.
On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, et suivant toutes deux la loi uniforme sur $[0, a[$.
On pose $Z = |X - Y|$ et on admet que $-Y$, $X - Y$ et Z sont des variables aléatoires à densité, elles aussi définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. ***a)*** Déterminer une densité de $-Y$.

b) En déduire que la variable aléatoire $X - Y$ admet pour densité la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{a - |x|}{a^2} & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note G la fonction de répartition de $X - Y$.

2. ***a)*** Exprimer la fonction de répartition H de la variable Z en fonction de G.

b) En déduire qu'une densité de Z est la fonction h définie par : $h(x) = \begin{cases} \dfrac{2(a - x)}{a^2} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

3. Montrer que Z possède une espérance et une variance et les déterminer.

4. Simulation informatique.
On rappelle qu'en **Scilab**, la commande `rand()` permet de simuler la loi uniforme sur $[0, 1[$.
Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle retourne à chaque appel un nombre réel choisi selon la loi de Z.

```
function v=z(a)
  x = ..........
  y = ..........
  v = ..........
endfunction
```