ORAUX HEC 2014

I. Annales 2014

Exercice 1 *(Exercice avec préparation)*

1. Deux variables aléatoires discrètes X et y sont indépendantes si pour tut $i \in X(\Omega)$ et tout $j \in Y(\Omega)$,

$$P[\,[X=i] \cap [Y=j]] = P\,[X=i]\,P\,[Y=j]\,.$$

De plus si X et Y sont indépendantes, leur covariance est nulle, mais la réciproque est fausse.
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes finies à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que $X(\Omega) \subset [\![0;n]\!]$ et $Y(\Omega) \subset [\![0;m]\!]$, où n et m sont deux entiers de $\mathbb{N}^*$.
Pour tout couple $(i,j) \in [\![0;n]\!] \times [\![0;m]\!]$, on pose : $p_{i,j} = P\big(\,[X=i] \cap [Y=j]\,\big)$.
Soit F_X et F_Y les deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par : $F_X(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \mathbb{P}\left([[X=i]]\right) x^i$ et $F_Y(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} \mathbb{P}\left([[Y=l]]\right) x^j$.
Soit $Z = (X,Y)$ et G_Z la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $G_Z(x,y) = \sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{m} p_{i,j} x^i y^j$.

2. $G_Z(1,1) = \sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{m} p_{i,j} = 1$ avec le système complet d'évènement associé au couple (X,Y).
De plus les dérivées partielles de G sont :

$$\partial_1(G)(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} i p_{i,j} x^{i-1} y^j \quad \partial_2(G)(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} j p_{i,j} x^i y^{j-1}$$

puis

$$\partial_{1,1}2(G)(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} i(i-1) p_{i,j} x^{i-2} y^j \quad \partial_{2,2}2(G)(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} j(j-1) p_{i,j} x^i y^{j-2}$$

et

$$\partial_{1,2}2(G)(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} ij p_{i,j} x^{i-1} y^{j-1}$$

et au point (1,1), en reconnaissant le théorème de transfert à deux variables, on obtient :

$$\partial_1(G)(1,1) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} i p_{i,j} = E(X) \quad \partial_2(G)(1,1) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} j p_{i,j} = E(Y)$$

et

$$\partial_{1,2}2(G)(1,1) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} ij p_{i,j} = E(XY)$$

et enfin :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \partial_{1,2}2(G)(1,1) - \partial_1(G)(1,1)\partial_2(G)(1,1).$$

3. Soit f une fonction polynômiale de deux variables définies sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{m} a_{i,j} x^i y^j$ avec $a_{i,j} \in \mathbb{R}$.
On suppose que pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x,y) = 0$.

a) Question difficile. Il faut penser à faire apparaître des polynômes un une variable.
On fixe $y \in \mathbb{R}$, on sait que

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_{i,j} y^j \right) x^i$$

qui est un polynôme nul en tout x, donc chacun de ses coefficients sont nuls. Donc pour tout $i \in [\![0;n]\!]$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, on sait que :

$$\sum_{j=0}^{m} a_{i,j} y^j = 0$$

et puisque c'est un polynôme, chaque coefficient est nul donc :

$$\forall i \in [\![0;n]\!], \forall j \in [\![0;m]\!],\ a_{i,j} = 0$$

b) Si X et Y sont indépendantes, $p_{i,j} = p_i pj$ pour tout (i,j) donc les deux fonctions sont égales.
Si les deux fonctions sont égales, la fonction

$$f(x) = G_Z(x,y) - F_X(x)F_Y(y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (p_{i,j} - p_i p_j) x^i y^j$$

est nulle pour tout (x,y), donc d'après la question a, pour tout (i,j) on a :

$$p_{i,j} - p_i p_j = 0 \Longleftrightarrow p_{i,j} = p_i p_j$$

et les variables sont indépendantes.

4. Une urne contient des jetons portant chacun une des lettres A, B ou C. La proportion des jetons portant la lettre A est p, celle des jetons portant la lettre B est q, et celle des jetons portant la lettre C est r, où p, q et r sont trois réels strictement positifs vérifiant $p+q+r=1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages d'un jeton avec remise dans cette urne. On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de jetons tirés portant la lettre A (resp. B) à l'issue de ces n tirages.

a) x et Y suivent des lois binomiales de paramètre n et p (resp. q). On calcule alors :

$$F_X(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} x^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (px)^i (1-p)^{n-i} = (px+1-p)^n = (px+q+r)^n$$

et par symétrie des rôles de (X,p) et (Y,q) :

$$F_Y(y) = (qy+p+r)^n.$$

b) Les supports de X et Y sont déjà connus, et $[\ [X=i] \cap [Y=j]]$ signifie qu'on a obtenu i jetons A, avec i places à choisir parmi n, j jetons B avec j places à choisir parmi $n-i$ restantes, et enfin $(n-i-j)$ jetons C dont les places sont les places sont imposées par les choix précédents donc :

$$p_{i,j} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{j} p^i q^j r^{n-i-j} = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} p^i q^j r^{n-i-j}.$$

Ceci est valable tant que $i+j \leqslant n$, et $p_{i,j}$ est nul dès que $i+j > n$ donc $j > n-i$ car l'évènement est alors impossible. On obtient alors

$$\begin{aligned}
G_Z(x,y) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-j}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}p^i q^j r^{n-i-j}x^i y^j \\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(\binom{n}{i}(px)^i\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n-i}{j}(qy)^j r^{n-i-j}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(px)^i(r+qy)^{n-i} \\
&= (px+qy+r)^n
\end{aligned}$$

c) On calcule le produit de F_X et F_Y :

$$F_X(x)F_Y(y) = \Big((px+q+r)(qy+p+r)\Big)^n = \Big(pqxy+p^2x+prx+q^2y+pq+qr+qry+pq+r^2\Big)^n$$

Si $F_XF_Y = G_Z$ pour tout (x,y) alors en composant par la racine n-ème on obtiendrait pour tout $(x,y) \geqslant 0$:

$$pqxy+p^2x+prx+q^2y+pq+qr+qry+pq+r^2 = px+qy+r$$

donc

$$pqxy+(p^2+pr)x+(q^2+qr)y+pq+qr++pq+r^2 = px+qy+r$$

et par question 3a, les coefficients devant xy, x, y et les constantes sont égales, donc avec les coefficients en xy :

$$pq = 0$$

qui est absurde car les deux sont non nuls. Les variables X et Y ne sont donc pas indépendantes.

d) On se sert des dérivées partielles de G_Z :

$$\partial_1(G_Z)(x,y) = np(px+qy+r)^{n-1} \quad \partial_2(G_Z)(x,y) = nq(px+qy+r)^{n-1}$$

puis

$$\partial_{1,2}(G_Z)(x,y) = n(n-1)pq(px+qy+r)^{n-2}$$

donc

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = n(n-1)pq(p+q+r)^{n-2} - np(p+q+r)^{n-1}nq(p+q+r)^{n-1} = [n(n-1)-n^2]pq = -npq$$

car $p+q+r=1$. Ce signe est prévisible car lorsque X augmente, Y aura tendance à baisser car le nombre de tirages restants pouvant donner des jetons B diminuent.

Exercice 1 *(Exercice sans préparation)*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AtAAtAA = I$, où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On remarque qu'on a une forme $AB = I$, donc A est inversible et :

$$A^{-1} = tAAtAA$$

qui est symétrique car :

$$t(A^{-1}) = t(tAAtAA) = tAt(tA)tAt(tA) = tAAtAA = A^{-1}.$$

Or on sait que l'inverse et la transposée sont commutatives donc :

$$(tA)^{-1} = A^{-1}$$

et en passant à l'inverse, $tA = A$ et A est symétrique.

2. On en déduit que $A^5 = I$, et que A est symétrique donc diagonalisable. Il existe donc P inversible et D diagonale telles que

$$A = PDP^{-1}$$

avec les valeurs diagonales de D qui sont les valeurs propres de A, donc racines du polynômes annulateurs. Elles vérifient donc $\lambda^5 - 1 = 0$, donc $\lambda^5 = 1$, donc l'unique solution (la fonction $f(x) = x^5$ est bijective) est $\lambda = 1$.
On en déduit que $D = I$, donc

$$A = PIP^{-1} = I.$$

Exercice 2 *(Exercice avec préparation)*

1. La partie entière d'un nombre réel x est l'unique entier k vérifiant :

$$k = \lfloor x \rfloor \leqslant x < k+1 = \lfloor x \rfloor + 1.$$

Sa représentation graphique est constituée de multiples segment horizontaux, avec le point à gauche du segment inclus et le point à droite exclus.

On note E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par les quatre fonctions f_0, f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = e^x,\ f_3(x) = xe^x$$

2. On note : $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$.

a) La famille est génératrice de e par définition, testons sa liberté. On suppose que $af_0 + bf_1 + cf_2 + df_3 = 0$, alors la limite en $+\infty$ donne :

$$\lim_{x\to+\infty} xe^x \left(d + \frac{c}{x} + be^{-x} + \frac{a}{x}e^{-x}\right) = \lim_{x\to+\infty} 0 = 0$$

et comme le facteur entre parenthèses tend vers d et l'autre vers $+\infty$, ce n'est possible que si $d = 0$. Mais on a alors a $af_0 + bf_1 + cf_2$ et la limite donne encore :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x \left(c + bxe^{-x} + ae^{-x}\right) = \lim_{x\to+\infty} 0 = 0$$

et de la même manière, ce n'est possible que si $c = 0$. On a alors $0f_0 + bf_1 = 0$, puis

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(b + \frac{a}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} 0 = 0$$

possible seulement si $b = 0$, et enfin $af_0 = 0$, avec $f_0 = 1$ donc $a = 0$.
La famille est donc libre, c'est une base de F.

b) Toutes les fonctions de f sont des combinaisons linéaires des f_i qui sont toutes de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc les élément de f sont tous de classe C^∞, et en particulier continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

3. Soit Φ l'application définie par : pour tout $f \in F$, $\Phi(f) = f'$, où f' est la dérivée de f.

a) On calcule $\Phi(f)$ pour chaque élément de la base :

$$\Phi(f_0) = 0 \quad \Phi(f_1) = f_0 \quad \Phi(f_2) = f_2 \quad \Phi(f_3) = f_2 + f_3$$

donc ils sont tous éléments de F. Par stabilité de f par combinaison linéaire, pour tout $f = af_0 + bf_1 + cf_2 + df_3 \in F$, on obtient :

$$\Phi(f) = a\Phi(f_0) + b\Phi(f_1) + c\Phi(f_2) + d\Phi(f_3) \in F$$

et Φ est à valeurs de F. De plus par linéarité de la dérivation Φ est linéaire, c'est un endomorphisme de F. Les images trouvées juste avant donnent alors :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) M est triangulaire, ses valeurs propres sont sur la diagonale : $\mathrm{Sp}(M) = \{0;1\}$.

De plus on trouve sans problème $E_0(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ et $E_1(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ donc la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut 2 et P est d'ordre 4, elle n'est pas diagonalisable, et Φ ne l'est donc pas non plus.

c) On remarque que

$$\mathrm{Im}\,\Phi = \mathrm{Vect}\,(f_0, f_2, f_2 + f_3) = \mathrm{Vect}\,(f_0, f_2, f_3)$$

avec le pivot $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$, donc $f_3 \in \mathrm{Im}\,\Phi$. De plus on résout :

$$MX = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}y\\0\\z+t\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \iff X = \begin{pmatrix}x\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

donc

$$\Phi(f) = f_3 \iff f = xf_0 + f_3 - f_2.$$

4. On note G l'ensemble des fonctions g de E telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x+1) - g(x) = 0.$$

a) G est inclus dans E et contient la fonction nulle puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0(x+1) - 0(x) = 0 - 0 = 0$ et si g_1 et g_2 sont dans G et λ est un réel :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\lambda g_1 + g_2)(x+1) - (\lambda g_1 + g_2)(x) = \lambda(g_1(x+1) - g(x)) + g_2(x+1) - g_2(x) = \lambda 0 + 0 = 0$$

donc $(\lambda g_1 + g_2) \in G$, qui est stable par combinaison linéaire : c'est un sous-espace vectoriel de E.

Les éléments de $F \cap G$ sont les fonctions f combinaisons linéaires des f_i et vérifiant $f(x+1) - f(x) = 0$ pour tout x, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a + bx + ce^x + dxe^x \quad \text{et} \quad f(x+1) - f(x) = b(x+1-x) + c(e^{x+1} - e^x) + d((x+1)e^{x+1} - xe^x)) = 0$$

donc :

$$b + c(e-1)e^x + d(exe^x + ee^x - xe^x) = b + [c(e-1) + de]e^x + d(e-1)xe^x = 0$$

Par liberté de la famille $(f_i)_{0 \leqslant i \leqslant 3}$, on obtient $b = c(e-1) + de = d(e-1) = 0$ (avec $e = e^1$), donc $b = c = d = 0$, et enfin :

$$F \cap G = \{f = af_0, a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,(f_0)\,.$$

b) On cherche une fonction vérifiant $f(x+1) = f(x)$ pour tout x, c'est-à-dire périodique de période 1. Il suffit de créer une fonction sur $[0;1[$, puis de la reporter par périodicité. Par exemple la fonction $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ (pour utiliser la question de cours) fonctionne, et n'est pas élément de F.

5. On pose u l'application linéaire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u(f)(x) = f(x+1) - f(x) - (e-1)f'(x)$$

et on cherche sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. On obtient :

$$u(f_0) = 0 \quad u(f_1) = (2-e)f_0 \quad u(f_2) = 0 \quad u(f_3) = (2-e)f_2$$

donc

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 2-e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$$

donc on trouve sans difficulté que $\ker N = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, puis

$$\ker(u) = \{f \in F, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) - f(x) = (e-1)f'(x)\} = \text{Vect}\,(f_0, f_2)$$

Exercice 3 *(Exercice sans préparation)*
Soit p un réel de $]0;1[$ et $q = 1-p$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi de Bernouilli telle que :
$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P([X_k = 1]]) = p$ et $\mathbb{P}([X_k = 0]]) = q$. Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on définit pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la variable aléatoire $Y_k = X_k + X_{k+1}$.

1. a) Par bilinéarité de la covariance,

$$\text{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) = \text{Cov}(X_k, X_{k+1}) + \text{Cov}(X_k, X_{k+2}) + \text{Cov}(X_{k+1}, X_{k+1}) + \text{Cov}(X_{k+1}, X_{k+2})$$

et comme les X_i sont indépendantes, on obtient :

$$\text{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) = 0 + 0 + V(X_{k+1}) + 0 = p(1-p).$$

b) On étudie la fonction $f(p) = p(1-p) = p - p^2$ sur $[0,1]$: elle est dérivable et vérifie

$$f'(p) = 1 - 2p$$

qui s'annule en $\frac{1}{2}$, est positive avant et négative avant donc f admet un maximum en $\frac{1}{2}$ égal à $\frac{1}{4}$, et comme $f(0) = f(1) = 0$, elle admet un minimum égal à 0 atteint seulement en 0 et 1, donc est strictement supérieure ailleurs et :

$$0 < \text{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) = p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}.$$

2. Si $l = k+1$, on a déjà vu que $\text{Cov}(Y_k, Y_l) = 0$. Sinon avec la bilinéarité on fait apparaître 4 covariances nulles avec l'indépendance des X_i, et $\text{Cov}(Y_k, Y_l) = 0$.

3. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Y_k) = 2p$ puis $\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k\right) = 2p$ donc l'inégalité de B-T donne :

$$P\left(\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k - 2p\right| > \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{V\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k\right)}{\varepsilon^2} = \frac{V\left(\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k\right)}{n^2\varepsilon^2}.$$

On calcule cette variance par bilinéarité de la covariance :

$$\begin{aligned} V\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) &= \operatorname{Cov}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k, \sum_{j=1}^{n} Y_j\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Cov}(Y_k, Y_j) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Cov}(Y_k, Y_k) + \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) + \sum_{k=2}^{n} \operatorname{Cov}(Y_{k-1}, Y_k) + 0 \end{aligned}$$

et avec les questions précédentes :

$$V\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) = np(1-p) + (n-1)p(1-p) + (n-1)p(1-p) = (3n-2)p(1-p)$$

et enfin on peut conclure que :

$$0 \leqslant P\left(\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k - 2p\right| > \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{(3n-2)p(1-p)}{n^2\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc par encadrement la probabilité tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 *(Exercice avec préparation)*

1. Deux matrices carrées d'ordre n A et B sont dites semblables s'il existe une matrice P carrée d'ordre n, inversible, telle que :

$$A = PBP^{-1}$$

On sait de plus que deux matrice sont semblables si et seulement si elles sont deux matrices d'un même endomorphisme dans des bases différentes.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note D et T les deux applications suivantes :

$$D : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ A \mapsto ad - bc \quad \text{ et } \quad T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ A \mapsto a + d.$$

2. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, on a

$$D(A) = ad - bc \quad D(B) = xt - yz \quad AB = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{pmatrix}$$

puis

$$D(AB) \ = \ (ax + bz)(cy\ dt) - (ay + bt)(cx + dz) = acxy + adxt + bcyz + bdzt - acxy - adyz - bcxt - bd$$

$$adxt + bcyz - adyz - bcxt = ad(xt - yz) + bc(yz - xt) = (xt - yz)(ad - bc) = D(A)D(B).$$

D'autre part on a

$$BA = \begin{pmatrix} ax + cy & bx + dy \\ az + ct & bz + dt \end{pmatrix}$$

donc

$$T(AB) = ax + bz + cy\ dt = (ax + cy) + (bz\ dt) = T(BA).$$

b) Si a et b sont semblables, il existe P inversible tel que $B = PAP^{-1}$ puis :

$$D(B) = D(P)D(A)D(P^{-1}) = D(A)D(PP^{-1}) = D(A)D(I) = D(A)(1 \times 1 - 0 \times 0) = D(A).$$

D'autre part on a

$$T(B) = T([PA]P^{-1}) = T(P^{-1}[PA]) = T(P^{-1}PA) = T(A).$$

3. $D(A) = 0$ est vrai si et seulement si $ad = bc$, ce qui est vrai si les produits sont nuls ou si tous les coefficients sont non nuls et $d = \frac{bc}{a}$ donc

$$\ker D = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & \frac{c}{a}b \end{pmatrix} \right\}$$

et on remarque que toutes les matrices concernées ne sont pas inversible. Réciproquement si A n'est pas inversible, soit la première colonne est nulle et $D(A) = 0$, soit la deuxième est colinéaire à la première ce qui signifie qu'il existe λ tel que $b = \lambda a$ et $d = \lambda c$, et on a alors

$$D(A) = ad - bc = \lambda ac - \lambda ac = 0$$

donc on obtient la double-inclusion et finalement :

$$\ker(D) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tq } A \text{ n'est pas inversible } \}.$$

Pour T c'est plus simple, car on reconnaît une équation linéaire :

$$A \in \ker(T) \iff a + d = 0 \iff a = -d \iff A = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

donc

$$\ker T = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

et la famille est libre (système facile) donc $\ker T$ est un espace vectoriel de dimension 3.

Dorénavant, si $u \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A dans une base $\mathcal{B}$ de E, on note : $D(u) = D(A)$ et $T(u) = T(A)$.

4. On exprime A^2 en fonction de A et I :

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & d^2 + bc \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} a^2 + bc = \lambda a + \mu \\ b(a + d) = \lambda b \\ c(a + d) = \lambda c \\ d^2 + bc = \lambda d + b\mu \end{cases}$$

On remarque que $\lambda = a + d = T(A)$ résout les deux équations du milieu, et on obtient alors sur les deux autres :

$$\begin{cases} a^2 + bc = a^2 + ad + \mu \\ d^2 + bc = ad + d^2 + \mu \end{cases} \iff \begin{cases} bc - ad = \mu \\ bc - ad = \mu \end{cases} \iff \mu = bc - ad = -D(A)$$

donc pour toute matrice A on a

$$A^2 = T(A)A - D(A)I \quad \text{donc} \quad u^2 = T(A)u - D(A)\text{id} = T(u)u - D(u)\text{id}.$$

5. $\mathcal{S}_0$ est inclus dans l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ et contient l'endomorphisme nul car $u \circ 0 = 0 \circ u = 0$. De plus pour tous v_1, v_2 dans $\mathcal{S}_0$ et tout réel λ on a :

$$u \circ (\lambda v_1 + v_2) - (\lambda v_1 + v_2) \circ u = \lambda(u \circ v_1 - v_1 \circ u) + u \circ v_2 - v_2 \circ u = \lambda 0 + 0 = 0$$

donc $(\lambda v_1 + v_2) \in \mathcal{S}_0$ qui est donc stable par combinaison linéaire, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

De plus tout polynôme en u commute avec u donc $\{P\left([u]\right), P\left([u]\right) \in \mathbb{R}[X]\} \subset \mathcal{S}_0$.

6. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $u \neq 0$. On pose : $\mathcal{S} = \{v \in \mathcal{L}(E) | u \circ v - v \circ u = u\}$.

a) Si l'ensemble est non vide, il existe un endomorphisme v tel que

$$u \circ v - v \circ u = u.$$

On suppose que u est bijectif. Alors en passant aux matrices A et B de u dans la base $\mathcal{B}$ de E et en multipliant à gauche par A^{-1} on obtient :

$$AB - BA = A \quad \text{puis} \quad B - A^{-1}BA = I$$

On compose par T linéaire et comme $A^{-1}BA$ est semblable à b, on obtient :

$$T(B) - T(B) = T(I) \Longleftrightarrow 0 = 2$$

qui est absurde. On en déduit que si $\mathcal{S}$ est non vide, u n'est pas bijectif.

On peut alors appliquer l'application linéaire T à la relation de $\mathcal{S}$:

$$T(u \circ v) - T(v \circ u) = T(u) \quad \text{donc} \quad T(u) = 0$$

puisque $T(u \circ v) = T(AB) = T(BA) = T(v \circ u)$ avec A et B les matrices de u dans la base $\mathcal{B}$ de E.

On en déduit que $u^2 = T(u) - D(u)\text{id} = -D(u)\text{id} = 0$, puisque u n'est pas bijectif, donc A pas inversible, et enfin $D(u) = D(A) = 0$.

On en déduit que si $\mathcal{S}$ est non vide, alors $u^2 = 0$.

b) Comme $u \neq 0$, il existe $x \in E$ tel que $u(x) \neq 0$, et la famille $(x, u(x))$ est alors libre. En effet si $ax + bu(x) = 0$, alors

$$au(x) + bu^2(x) = 0 \quad \text{donc} \quad au(x) = 0$$

avec $u(x) \neq 0$, donc $a = 0$. On obtient alors $bu(x) = 0$, avec $u(x) \neq 0$ donc $b = 0$. Dans la base $(u(x), x)$ de E, on obtient alors

$$M_u = Mat_{(u(x),x)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans cette base, la matrice $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ de v vérifie :

$$M_u B - B M_u = M_u \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} z & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} z & t-x \\ 0 & -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $z = 0$ et $t = x + 1$, et enfin

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x+1 \end{pmatrix} = xI + yM_u + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) On déduit de la forme de B ci-dessus que

$$v = x\text{id} + yu + v_0$$

où v_0 est l'endomorphisme dont la matrice dans la base $(u(x), x)$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc vérifiant $v_0(u(x)) = 0$ et $v_0(x) = x$, et on obtient bien

$$\mathcal{S} = \{v_0 + \alpha \mathrm{id} + \beta u, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Bilan : un exercice totalement inadapté à l'ECE(même en voie S, il serait très difficile...) mais l'introduction de la trace et du déterminant est très intéressante, notamment dans l'optique de l'utilisation sur des matrices Hessiennes.

Exercice sans préparation

Soit k et λ deux réels et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles donnée par :

$$f(t) = \begin{cases} kte^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0, et positive sur $\mathbb{R}$ à condition que k soit positif. Enfin on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = \int_{-\infty}^{0} 0\ dt + \frac{k}{\lambda} \int_{0}^{+\infty} t \times \lambda e^{-\lambda t}\ dt.$$

La première intégrale converge et vau 0 (fonction nulle), la seconde converge et vaut $\frac{1}{\lambda}$ (espérance de la loi exponentielle), donc l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = \frac{k}{\lambda^2}$$

qui vaut 1 si et seulement si $k = \lambda^2$, qui est bien positif, et pour cette valeur f est bien une densité de probabilité.

On note X une variable aléatoire réelle ayant f pour densité.

2. On comparaison avec $\frac{1}{t^2}$ donne par croissances comparées :

$$t^n f(t) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

avec les fonctions qui sont positives et l'intégrale de $1/t^2$ qui converge en $+\infty$ (Riemann) donc par théorème de comparaison X^n admet une espérance et X admet un moment d'ordre n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus on effectue une IPP sur l'intégrale partielle avec

$$u = \lambda t^{n+1} \quad \text{et} \quad v = -e^{-\lambda t}$$

qui sont de classe C^1 avec

$$u' = (n+1)\lambda t^n \quad \text{et} \quad v' = \lambda e^{-\lambda t}$$

donc

$$\int_0^A \lambda^2 t^{n+1} e^{-\lambda t}\ dt = \left[-\lambda t^{n+1} e^{-\lambda t}\right]_0 A + \frac{(n+1)}{\lambda} \int_0^A \lambda^2 t^n e^{-\lambda t}\ dt$$

puis en faisant tendre A vers $+\infty$ (avec une croissance comparée) on obtient :

$$E(X^n) = \frac{n+1}{\lambda} E(X^{n-1})$$

donc par itération de la relation ou par récurrence on obtient :

$$E(X^n) = \frac{(n+1) \times \cdots \times 2}{\lambda^n} E(X^0) = \frac{(n+1)!}{\lambda^n} \times 1 = \frac{(n+1)!}{\lambda^n}.$$

Exercice 5 *(Exercice avec préparation)*

1. La loi d'un couple (X, Y) de variables discrètes est caractérisée par la donnée des supports de X et Y, et pour tout $i \in X(\Omega)$ et tout $j \in Y(\Omega)$, de la probabilité :

$$P([X = i] \cap [Y = j])$$

On appelle lois marginales les lois des variables X et Y, et loi conditionnelle de Y sachant $[X = i]$, pour i fixé dans $Y(\Omega)$, la donnée du support de Y sachant $[X = i]$ (car cet évènement peut rendre impossibles certaines valeurs de Y) et pour tout $j \in Y(\Omega)$, de la probabilité :

$$P_{[X=i]}[Y = j] = \frac{P([X = i] \cap [Y = j])}{P[X = i]}$$

et de même pour la loi conditionnelle de X sachant $[Y = j]$.

Soit c un réel strictement positif et soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = c\frac{i + j}{i!j!}.$$

2. ***a)*** Avec le système complet d'évènements $[Y = j]_{j\in\mathbb{N}}$, les probabilités totales donnent : pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
P[X = i] &= \sum_{j=0}^{+\infty} P([X = i] \cap [Y = j]) = \sum_{j=0}^{+\infty} c\frac{i + j}{i!j!} = \frac{c}{i!}\left(i\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!} + \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j}{j!}\right) \\
&= \frac{c}{i!}\left(ie^1 + 0 + \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{(j-1)!}\right) = \frac{c}{i!}\left(ie^1 + 0 + \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}\right) = \frac{c}{i!}\left(ie^1 + 0 + e^1\right) \\
&= c\frac{i+1}{i!}e.
\end{aligned}$$

De plus on sait que la somme des $P[X = i]$ doit faire 1 (système complet d'évènements) on la calcule :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{+\infty} P[X = i] &= ce\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{i}{i!} + \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}\right) = ce\left(0 + \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{(i-1)!} + e^1\right) = ce\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!} + e\right) \\
&= ce(2e) = 2ce^2
\end{aligned}$$

donc on en déduit que

$$2ce^2 = 1 \iff c = \frac{1}{2e^2}.$$

b) Pour l'espérance, on s'intéresse à la convergence absolue et à la valeur de

$$\sum_{i=0}^{+\infty} iP[x = i] = \frac{1}{2e}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{i(i+1)}{i!}$$

Après transformations, on reconnaît une série exponentielle, elle converge et elle est à terme positifs, donc elle converge absolument et X admet une espérance, qui vaut :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{2e}\left(0+\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{i+1}{(i-1)!}\right)=\frac{1}{2e}\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{i-1+2}{(i-1)!}=\frac{1}{2e}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{i-1}{(i-1)!}+\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{2}{(i-1)!}\right)\\
&= \frac{1}{2e}\left(0+\sum_{i=2}^{+\infty}\frac{1}{(i-2)!}+2\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{(i-1)!}\right)=\frac{1}{2e}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}+2\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}\right)\\
&= \frac{1}{2e}(e+2e)=\frac{3e}{2e}=\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

En faisant de même apparaitre des séries exponentielles et avec le théorème de transfert, on obtiendra une série absolument convergente et $\mathbb{E}(X^2)$ existe donc $\mathbb{V}(X)$ aussi. De plus :

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{i^2(i+1)}{i!}=\frac{1}{2e}\left(0+\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{i(i+1)}{(i-1)!}\right)=\frac{1}{2e}\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{(i-1+1)(i+1)}{(i-1)!}\\
&= \frac{1}{2e}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{(i-1)(i+1)}{(i-1)!}+\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{i+1}{(i-1)!}\right)=\frac{1}{2e}\left(0+\sum_{i=2}^{+\infty}\frac{i+1}{(i-2)!}+\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{i-1+2}{(i-1)!}\right)\\
&= \frac{1}{2e}\left(\sum_{i=2}^{+\infty}\frac{i-2+3}{(i-2)!}+\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{i-1}{(i-1)!}+\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{2}{(i-1)!}\right)\\
&= \frac{1}{2e}\left(\sum_{i=2}^{+\infty}\frac{i-2}{(i-2)!}+\sum_{i=2}^{+\infty}\frac{3}{(i-2)!}+0+\sum_{i=2}^{+\infty}\frac{1}{(i-2)!}+2\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{(i-1)!}\right)\\
&= \frac{1}{2e}\left(0+\sum_{i=3}^{+\infty}\frac{1}{(i-3)!}+4\sum_{i=2}^{+\infty}\frac{1}{(i-2)!}+2\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{(i-1)!}\right)=\frac{1}{2e}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}+4\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}+2\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}\right)\\
&= \frac{7}{2e}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}=\frac{7}{2e}\times e=\frac{7}{2}
\end{aligned}$$

et enfin

$$V(X)=\frac{7}{2}-\frac{9}{4}=\frac{14-9}{4}=\frac{5}{4}.$$

c) On sait que pour tous i et j dans $\mathbb{N}$ on a :

$$P([X=i]\cap[Y=j])=\frac{1}{i+j}2e^2i!j!=\frac{1}{2e^2i!j!}\times(i+j)$$

et comme les rôles de i et j sont symétriques dans la formule, la loi de Y est la même que celle de X donc :

$$P\left[X=i\right]P\left[Y=j\right]=\frac{(i+1)(j+1)}{4e^2i!j!}=\frac{1}{2e^2i!j!}\times\frac{(i+1)(j+1)}{2}$$

et par exemple pour $i=j=0$ on a :

$$\frac{1\times 1}{2}\neq(0+0)\quad\text{donc}\quad P([X=0]\cap[Y=0])\neq P\left[X=0\right]P\left[Y=0\right]$$

donc X et Y ne sont pas indépendantes.

3. a) Cette variable prend pour valeur minimale $(0+0-1)$ mais avec une probabilité nulle car $P[\,[X=0]\cap[Y=0]] = 0$, donc la plus petite valeur de probabilité non nulle est $(0+1-1=0)$ et toutes les valeurs entières supérieure à 0 sont possibles donc :

$$(X+Y-1)(\Omega) = \mathbb{N}$$

De plus pour tout $k \in \mathbb{N}$, avec le système complet $[X=i]_{i\in\mathbb{N}}$, on a :

$$(X+Y-1=k) = \bigcup_{i=0}^{+\infty} [\,[X=i]\cap(X+Y-1=k)] = \bigcup_{i=0}^{+\infty} [\,[X=i]\cap(Y=k+1-i)] = \bigcup_{i=0}^{k+1} [\,[X=i]\cap(Y=k+1-i$$

car pour $k+1-i<0 \iff i>k+1$, l'évènement $(Y=k+1-i)$ est impossible. On en déduit (union incompatible) que :

$$\begin{aligned}
P\left([X+Y-1=k]\right) &= \frac{1}{2e^2}\sum_{i=0}^{k+1}\frac{i+k+1-i}{i!(k+1-i)!} = \frac{1}{2e^2}\sum_{i=0}^{k+1}\frac{k+1}{i!(k+1-i)!}\\
&= \frac{1}{2e^2k!}\sum_{i=0}^{k+1}\frac{(k+1)k!}{i!(k+1-i)!} = \frac{1}{2e^2k!}\sum_{i=0}^{k+1}\frac{(k+1)!}{i!(k+1-i)!}\\
&= \frac{1}{2e^2k!}\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i} = \frac{1}{2e^2k!}\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}1^i1^{k+1-i}\\
&= \frac{1}{2e^2k!}\times(1+1)^{k+1} = \frac{2^{k+1}}{2e^2k!} = \frac{2^ke^{-2}}{k!}
\end{aligned}$$

donc $X+Y-1 \hookrightarrow \mathcal{P}(2)$.

b) On sait par quadracité de la variance que

$$V(X+Y) = V(X+Y+1) = 2.$$

c) On peut alors calculer :

$$\text{Cov}(X, X+5Y) = \text{Cov}(X,X) + 5\text{Cov}(X,Y) = V(X) + 5\text{Cov}(X,Y).$$

Or on sait que

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X,Y)$$

donc

$$\text{Cov}(X,Y) = \frac{V(X+Y)-V(X)-V(Y)}{2} = \frac{2-\frac{5}{4}-\frac{5}{4}}{2} = 1-\frac{5}{4} = -\frac{1}{4}$$

et enfin :

$$\text{Cov}(X, X+5Y) = \frac{5}{4} + 5\times\frac{-1}{4} = 0.$$

La covariance nulle n'implique pas l'indépendance, elle ne permet pas de conclure. Par contre on a

$$[X=0]\cap(X+5Y=1) = [\,[X=0]\cap[5Y=1]] = \varnothing \quad \text{donc} \quad P([X=0]\cap(X+5Y=1)) = 0 \neq P\,[X=0]\,P\,([X$$

(car $[X+5Y=1] = [X=1] \cap [Y=0]$ a une probabilité non nulle). On en déduit que X et $X+5Y$ ne sont pas indépendantes.

4. On pose : $Z = \frac{1}{X+1}$.

a) Par théorème de transfert, on s'intéresse à la convergence absolue de

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i+1} \times \frac{i+1}{2ei!} = \frac{1}{2e} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!}$$

On reconnaît une série exponentielle qui converge absolument donc Z admet une espérance et

$$E(Z) = \frac{1}{2e} \times e = \frac{1}{2}.$$

b) Pour tout i fixé dans $\mathbb{N}$, le support de Y sachant $[X=i]$ est $\mathbb{N}$ et :

$$P_{[X=i]}[Y=j] = \frac{P[\,[X=i] \cap [Y=j]}{P[X=i]} = \frac{\frac{i+j}{2e^2 i! j!}}{\frac{i+1}{2ei!}} = \frac{i+j}{e(i+1)j!}.$$

c) On calcule d'abord pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
g_{[X=i]}(Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k P_{[X=i]}[Y=k] = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty} k \times \frac{i+k}{(i+1)k!} = \frac{1}{e(i+1)}\left(i\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2}{k!}\right) \\
&= \frac{1}{e(i+1)}\left(0 + i\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} + 0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{(k-1)!}\right) = \frac{1}{e(i+1)}\left(i\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1+1}{(k-1)!}\right) \\
&= \frac{1}{e(i+1)}\left(ie + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!}\right) = \frac{1}{e(i+1)}\left(ie + 0 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right) \\
&= \frac{1}{e(i+1)}\left(ie + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + e\right) = \frac{e(i+2)}{e(i+1)} = \frac{i+2}{i+1}
\end{aligned}$$

donc pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) = i$ on a :

$$g_{[X=X(\omega)]}(Y) = g_{[X=i]}(Y) = \frac{i+2}{i+1} \quad \text{et} \quad Z(\omega) = \frac{1}{X(\omega)+1} = \frac{1}{i+1}$$

donc la fonction f doit vérifier : pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$f\left(\frac{1}{i+1}\right) = \frac{i+2}{i+1} = \frac{i+1+1}{i+1} = 1 + \frac{1}{i+1}$$

et en posant $f(x) = 1 + x$, on a bien pour tout $\omega \in \Omega$,

$$g_{[X=X(\omega)]}(Y) = 1 + \frac{1}{X(\omega)+1} = 1 + Z(\omega) = f(Z(\omega)).$$

Exercice sans préparation

1. Pas toujours. Par exemple, en posant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{on a} \quad A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec A et B diagonalisables (deux valeurs propres distinctes) et $A+B$ qui ne l'est pas (seule valeur propre 1, si elle l'était on aurait $A+B = PIP^{-1} = I$, absurde).

2. Pas forcément non plus. Par exemple en posant A inversible et $B = -A$ qui est aussi inversible (d'inverse $-A^{-1}$), leur somme est la matrice nulle qui n'est pas inversible.

3. Il faut penser à décomposer A en une somme de deux matrices triangulaires :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{2,1} & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

L'idée est ensuite de rajouter un nombre $a > 0$ sur chaque terme de la diagonale de la première matrice (ce qui la rendra inversible) et de retirer $-a$ sur la diagonale de la seconde matrice pour compenser. Il faut que $a_{i,i} - a$ soit différent de 0 pour tout i, mais comme $\{a_{i,i} \text{ tq } 1 \leqslant i \leqslant n\}$ est fini, il existe forcément un nombre a non nul qui vérifiera $a_{i,i} - a \neq 0$ pour tout i (il suffit qu'il soit différent de chacun des $a_{i,i}$), et on obtient

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{2,1} & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n-1} & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,1} - a & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n,n} - a \end{pmatrix}$$

qui est bien la somme de deux matrices inversibles.

Exercice 6 *(Exercice avec préparation)*
On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.

Dans tout l'exercice, A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant trois valeurs propres distinctes, notées λ_1, λ_2 et λ_3.

1. Un polynôme P est dit annulateur d'une matrice A si $P([A]) = 0$. On sait alors que toutes les valeurs propres de A sont racines de P, ou encore :

$$\text{Sp}(A) \subset \{ \text{ racines de } P\}$$

2. ***a)*** A est une matrice d'ordre 3 qui admet trois valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable et plus exactement semblable à la matrice

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

qui vérifie facilement que $(D - \lambda_1 I)(D - \lambda_2 I)(D - \lambda_3 I) = 0$ et par similitude de A et D, on a alors

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I) = 0$$

donc le polynôme $P([X]) = ([X - \lambda_1])(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)$, de degré 3, est annulateur de A.

b) Ce polynôme admettrait au plus 1 ou deux racines, ce qui est absurde puisque, annulateur de A, il devrait admettre chacune des valeurs propres de A pour racines, donc au minimum 3 racines. Il ne peut donc pas exister de polynôme annulateur de A de degré 1 ou 2.

3. Soit φ l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, associe le triplet $\Big(P([\lambda_1 5]), P([\lambda_2 5]), P([$

a) On se donne P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ et λ un réel, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + Q) &= \Big((\lambda P + Q)(\lambda_1 5), (\lambda P + Q)(\lambda_2 5), (\lambda P + Q)(\lambda_3 5)\Big) \\ &= \Big(\lambda P([\lambda_1 5]) + Q(\lambda_1 5), \lambda P([\lambda_2 5]) + Q(\lambda_2 5), \lambda P([\lambda_3 5]) + Q(\lambda_3 5)\Big) \\ &= \lambda\Big(P([\lambda_1 5]), P([\lambda_2 5]), P([\lambda_3 5])\Big) + \Big(Q(\lambda_1 5), Q(\lambda_2 5), Q(\lambda_3 5)\Big) \\ &= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q) \end{aligned}$$

donc φ est bien linéaire.

b) On résout l'équation $\varphi(P) = 0$:

$$\varphi(P) = 0 \iff P([\lambda_1 5]) = P([\lambda_2 5]) = P([\lambda_3 5]) = 0$$

Or les λ_i sont distincts et la fonction x $\mapsto x^5$ est bijective, avec une dérivée $5x^4$ strictement positive (sauf en 0 où elle est nulle) donc elle est continue et strictement croissante.

On en déduit que les $\lambda_i 5$ sont distincts, donc P admet trois racines distinctes et il est de degré inférieur ou égal à 2 : c'est impossible à moins que P soit nul donc :

$$\varphi(P) = 0 \Longleftrightarrow P = 0$$

et $\ker(\varphi) = \{0\}$.

c) Cette application est injective, et le théorème du rang assure que :

$$\dim(\operatorname{Im}\varphi) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim(\ker\varphi) = 3 - 0 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

donc φ est surjective, c'est donc une application linéaire bijective, soit un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.

d) φ est bijective et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, ensemble d'arrivée de φ. On en déduit qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que :

$$\varphi(Q) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q(\lambda_1 5) = Q(\lambda_1) \\ Q(\lambda_2 5) = Q(\lambda_2) \\ Q(\lambda_3 5) = Q(\lambda_3) \end{array} \right.$$

e) On sait que A est semblable à D, donc il suffit de prouver que T est annulateur de D. Or un polynôme en une matrice diagonale se calcule en calculant les images des chaque valeur diagonale par le polynôme, donc :

$$T(D) = \begin{pmatrix} T(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & T(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & T(\lambda_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(\lambda_1 5) - \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & Q(\lambda_2 5) - \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & Q(\lambda_3 5) - \lambda_3 \end{pmatrix} = 0$$

d'après la définition de Q dans la question 3d.

On en déduit que $T(A) = 0$, donc T est annulateur de A.

4. Montrons la double-inclusion : si $N \in \mathcal{E}$, alors $AN = NA$ donc :

$$A^5 N = AAAAAN = AAAANA = AAANAA = \cdots)NAAAAA = NA^5$$

donc $N \in \mathcal{F}$, donc $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$.

Supposons à présente que $N \in \mathcal{F}$, donc que $A^5 N = NA^5$, et on veut prouver que $AN = NA$.

Or la question 3e montre que $T(A) = Q(A^5) - A = 0$, donc $A = Q(A^5)$.

Alors en posant $Q(X) = a + bX + cX^2$ (il est de degré inférieur ou égal à 2), montrons que $Q(A^5)N = NAQ(A^5)$:

$$\begin{aligned} Q(A^5)N &= (aI + bA^5 + c(A^5)^2)N = (aI + bA^5 + cA^5A^5)N = aN + bA^5N + cA^5A^5N = aN + bNA^5 + cA^5 N \\ &= aN + bNA^5 + cNA^5A^5 = N(aI + bA^5 + c(A^5)^2) = NQ(A^5) \end{aligned}$$

donc on obtient bien $AN = NA$, et $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$, et finalement par double-inclusion :

$$\mathcal{E} = \mathcal{F}$$

Exercice sans préparation

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Le maximum de n variables est inférieur ou égal à x si et seulement si elles le sont toutes, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, par indépendance des X_i :

$$[M_n \leqslant x] = \bigcap_{i=1} n\,[X_i \leqslant x] \qquad \text{puis} \qquad F_{M_n}(x) = [F(x)]^n$$

où F est la fonction de répartition commune des X_i qui suivent la même loi. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf en 0 car F l'est (les X_i sont à densité), donc M_n admet une densité qu'on obtient en dérivant sa fonction de répartition sauf en 0, valeur arbitraire :

$$f_{M_n}(x) = nf(x)[F(x)]^{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ n\lambda e^{-\lambda x}\left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{n-1} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

2. Cette fonction est positive et continue sur $\mathbb{R}$ par opérations élémentaires, et on calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\ dt$:

$$\int_a^0 g(t)\ dt = \left[e^{-e^{-t}}\right]_a 0 = e^{-e^0} - e^{-e^{-a}} = e^{-1} - e^{-e^{-a}}$$

$$\xrightarrow[a\to-\infty]{} e^{-1} - 0 = e^{-1}$$

d'une part, et d'autre part

$$\int_0^b g(t)\ dt = \left[e^{-e^{-t}}\right]_0 b = e^{-e^{-b}} - e^{-e^0} = e^{-e^{-b}} - e^{-1}$$

$$\xrightarrow[b\to-\infty]{} 1 - e^{-1} = 1 - e^{-1}$$

donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\ dt$ et vaut 1, et g est une densité de probabilité.

3. On cherche les fonctions de répartitions de Y et $Y_n = \lambda M_n - \ln n$, puis on montre que la seconde converge vers la première quand n tend vers $+\infty$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car F_Y est continue sur $\mathbb{R}$) : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^x g(t)\ dt = \left[e^{-e^{-t}}\right]_a x = e^{-e^{-x}} - e^{-e^{-a}}$$

$$\xrightarrow[a\to-\infty]{} e^{-e^{-x}} - 0 = e^{-1} = \int_{-\infty}^x g(t)\ dt = F_Y(x).$$

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$[Y_n \leqslant x] = (\lambda M_n - \ln n \leqslant x) = (\lambda M_n \leqslant x + \ln n) = \left(M_n \leqslant \frac{x + \ln n}{\lambda}\right)$$

donc

$$F_{Y_n}(x) = F_{M_n}\left(\frac{x+\ln n}{\lambda}\right) = \left[F\left(\frac{x+\ln n}{\lambda}\right)\right]^n.$$

On cherche la limite quand n tend vers $+\infty$ de cette fonction, avec x fixé.

Comme $\frac{x+\ln n}{\lambda}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, pour n assez grand, il est toujours positif donc on peut utiliser l'expression sur $[0;+\infty[$ de F :

$$F_{Y_n}(x) = \left(1-e^{-\lambda\frac{x+\ln n}{\lambda}}\right)^n = \left(1-e^{-x-\ln n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-e^{-x-\ln n}\right)}$$

et avec $-e^{-x-\ln n}$ qui tend vers 0 en $+\infty$, on peut appliquer le DL de $\ln(1+u)$:

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(x) &= e^{n\ln\left(1-e^{-x-\ln n}\right)} = e^{n\left(-e^{-x-\ln n}+o(e^{-x-\ln n})\right)} = e^{-\frac{ne^{-x}}{e^{\ln n}}+o\left(\frac{ne^{-x}}{e^{\ln n}}\right)} = e^{-e^{-x}+o(1)} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-e^{-x}} = F_Y(x) \end{aligned}$$

et comme cette limite est vraie pour tout $x\in\mathbb{R}$, (Y_n) converge en loi vers Y.

Exercice 7 *(Exercice avec préparation)*

1. Une série numérique de terme général $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est dite convergente si la suite des sommes partielles $(S_p)_{p\geqslant n_0}$ définie par :

$$\forall p \geqslant n_0,\ S_p = \sum_{n=n_0}^{p} u_n$$

est convergente.

Dans tout l'exercice, a est un réel strictement supérieur à 1.

2. ***a)*** La fonction intégrée est continue et positive sur $[0;+\infty[$ donc l'intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$, et les théorèmes de comparaison s'appliquent.

On cherche un équivalent en $+\infty$ de la fonction intégrée :

$$\frac{1}{(1+t^a)^n} = \frac{1}{\left[t^a\left(1+\frac{1}{t^a}\right)\right]^n} = \frac{1}{t^{an}} \times \frac{1}{\left(1+\frac{1}{t^a}\right)^n}$$

et comme $a \geqslant 1$, la deuxième fraction tend vers 1 lorsque t tend vers $+\infty$, donc :

$$\frac{1}{(1+t^a)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{na}}$$

Les deux fonctions sont positives, et l'intégrale de la seconde converge en $+\infty$ (Riemann, avec $na > 1$ car $a > 1$ et $n \geqslant 1$) donc par théorème de comparaison, l'intégrale de la première converge en $+\infty$, et $u_n(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^a)^n}\, dt$ existe bien.

b) La suite est clairement minorée par 0 (intégrale d'une fonction positive avec des bornes dans l'ordre croissant). On cherche le sens de variation de $(u_n(a))_n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1}(a) - u_n(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1-(1+t^a)}{(1+t^a)^{n+1}}\, dt = -\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{(1+t^a)^{n+1}}\, dt \leqslant 0$$

car l'intégrale est positive (fonction intégrée positive et bornes dans l'ordre croissant).

Le suite $(u_n(a))_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente.

3. ***a)*** On part du côté droit, plus compliqué :

$$an(u_n(a) - u_{n+1}(a)) = an\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{(1+t^a)^{n+1}}\, dt = n\int_0^{+\infty} t \times \frac{at^{a-1}}{(1+t^a)^{n+1}}\, dt.$$

On réalise une intégration par parties sur l'intégrale partielle en posant

$$u = t \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{-n(1+t^a)^n}$$

qui sont de classe C^1, avec

$$u' = 1 \quad \text{et} \quad v' = \frac{at^{a-1}}{(1+t^a)^{n+1}}$$

donc on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^M t \times \frac{at^{a-1}}{(1+t^a)^{n+1}}\, dt &= \left[\frac{t}{-n(1+t^a)^n}\right]_0 M + \int_0^M \frac{1}{n(1+t^a)^n}\, dt \\
&= -\frac{M}{n(1+M^a)^n} + 0 + \frac{1}{n}\int_0^M \frac{1}{(1+t^a)^n}\, dt \\
&= -\frac{M}{M^{an}\left(1+\frac{1}{M^a}\right)^n} + \frac{1}{n}\int_0^M \frac{1}{(1+t^a)^n}\, dt \\
&= -\frac{1}{M^{an-1}\left(1+\frac{1}{M^a}\right)^n} + \frac{1}{n}\int_0^M \frac{1}{(1+t^a)^n}\, dt \\
&\xrightarrow[M\to+\infty]{} 0 + \frac{1}{n}u_n(a)
\end{aligned}$$

donc on en déduit que :

$$an(u_n(a) - u_{n+1}(a)) = n\int_0^{+\infty} t \times \frac{at^{a-1}}{(1+t^a)^{n+1}}\, dt = n \times \frac{1}{n}u_n(a) = u_n(a).$$

On isole alors $u_{n+1}(a)$ dans cette égalité pour obtenir une relation de récurrence :

$$u_n(a) - u_{n+1}(a) = \frac{u_n(a)}{an} \quad \text{donc} \quad u_{n+1}(a) = \left(1 - \frac{1}{an}\right)u_n(a).$$

On peut alors itérer cette relation :

$$\begin{aligned}
u_n(a) &= \left(1-\frac{1}{a(n-1)}\right)u_{n-1}(a) = \left(1-\frac{1}{a(n-1)}\right)\left(1-\frac{1}{a(n-2)}\right)u_{n-2}(a) = \dots \\
&= \left(1-\frac{1}{a(n-1)}\right)\left(1-\frac{1}{a(n-2)}\right)\dots\left(1-\frac{1}{a\times 1}\right)u_1(a) \\
&= \left(\prod_{i=1} n-1\frac{ai-1}{ai}\right)u_1 = \frac{u_1}{a^{n-1}(n-1)!}\prod_{i=1} n-1(ai-1).
\end{aligned}$$

b) On se sert d'une égalité vue plus haut :

$$\frac{u_n(a)}{a_n} = u_n(a) - u_{n+1}(a)$$

qu'on somme pour faire apparaître un télescopage sur la somme partielle :

$$\sum_{n=1}^{p}\frac{u_n(a)}{an} = \sum_{n=1}^{p}[u_n(a) - u_{n+1}(a)] = u_n(1) - u_{p+1}(a) \xrightarrow[p\to+\infty]{} u_n(1) - \lim_{k\to+\infty} u_k(a)$$

qui est une constante réelle puisque la suite $(u_n(a))_{n\geqslant 1}$ est convergente. On en déduit que la série de terme général $\left(\frac{u_n(a)}{an}\right)$ est convergente.

c) On sait que la suite $(u_n(a))_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel positif ℓ. Si $\ell \neq 0$, alors on en déduit que

$$\frac{u_n(a)}{an} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell}{a} \times \frac{1}{n}$$

et par théorème de comparaison, la série de terme général $\left(\frac{u_n(a)}{an}\right)$ diverge. C'est absurde avec ce qu'on vient de montrer, donc la limite de $(u_n(a))$ est forcément 0.

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n(a) = \ln\big(u_n(a)\big) + \frac{\ln n}{a}$.

a) On commence par calculer $w_{n+1}(a) - w_n(a)$:

$$\begin{aligned}
w_{n+1}(a) - w_n(a) &= \ln\big(u_{n+1}(a)\big) + \frac{\ln(n+1)}{a} - \ln\big(u_n(a)\big) - \frac{\ln n}{a} = \ln\left(\frac{u_{n+1}(a)}{u_n(a)}\right) + \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{a} \\
&= \ln\left(\frac{\frac{u_1}{a^n n!}\prod\limits_{i=1} n(ai-1)}{\frac{u_1}{a^{n-1}(n-1)!}\prod\limits_{i=1} n-1(ai-1)}\right) + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{a} \\
&= \ln\left(\frac{an-1}{an}\right) + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{a} = \ln\left(1-\frac{1}{an}\right) + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{a}.
\end{aligned}$$

Il faut alors penser à réaliser un DL pour retirer le logarithme et faire apparaitre des séries de Riemann :

$$\begin{aligned}
w_{n+1}(a) - w_n(a) &= -\frac{1}{an} + \frac{1}{2(an)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{a}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{an} + \frac{1}{2(an)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{an} - \frac{1}{2an^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= -\frac{1}{an} + \frac{1}{2a^2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{an} - \frac{1}{2an^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{1-a}{2a^2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\sim \frac{1-a}{2a^2n^2}
\end{aligned}$$

et comme l'équivalent est à termes négatifs (avec $a > 1$), au voisinage de l'infini, c'est aussi le cas de la suite de départ. Le théorème de comparaison s'applique et comme le deuxième terme général est celui d'une série convergente (Riemann, $2 > 1$), la série de terme général $(w_{n+1}(a) - w_n(a))$ est convergente.

b) On calcule la somme partielle de la série précédente (qui est donc convergente) :

$$\sum_{n=1}^{p} w_{n+1}(a) - w_n(a) = w_{p+1}(a) - w_1(a)$$

qui converge si et seulement si la suite (w_p) converge, donc celle-ci converge.

On en déduit qu'il un réel $\ell(a)$ tel que :

$$w_n(a) = \ln\big(u_n(a)\big) + \frac{\ln n}{a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} K$$

donc en isolant u_n :

$$\ln\big(u_n(a)\big) = w_n(a) - \frac{\ln n}{a} \quad \text{puis} \quad u_n(a) = e^{w_n(a) - \frac{\ln n}{a}} = \frac{e^{w_n(a)}}{n^{\frac{1}{a}}}$$

et avec $w_n(a)$ qui tend vers $\ell(a)$, le numérateur tend vers $K(a) = e^{\ell(a)} \neq 0$ donc il lui est équivalent, et enfin :

$$u_n(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K(a)}{n^{\frac{1}{a}}}.$$

Exercice sans préparation

Les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que : $Y(\Omega) = \{1; 2\}, P[Y = 1] = P[Y = 2] = \frac{1}{2}$. On pose $Z = XY$.

1. Lorsque $Y = 1$, $Z = XY$ prend toutes les valeurs de $\mathbb{N}$; lorsque $Y = 2$, $Z = XY$ prend toutes les valeurs paires de $\mathbb{N}$. Finalement on obtient :

$$Z(\Omega) = \mathbb{N}.$$

Si $k = 2j + 1$ est impair, il ne peut être atteint qu'avec $Y = 1$ donc (avec X et Y indépendantes) :

$$\forall j \in \mathbb{N},\ (Z = 2j+1) = (X = 2j+1) \cap [Y = 1] \quad \text{et} \quad P([Z = 2j + 1]) = \frac{1}{2} P([X = 2j + 1]) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{2j+1}}{2(2j + 1)!}$$

Si $k = 2j$ est pair, il peut être atteint avec $Y = 1$ ou 2, donc :

$$\forall j \in \mathbb{N},\ [Z = 2j] = [\, [X = 2j] \cap [Y = 1]] \cup [\, [X = j] \cap [Y = 2]]$$

et

$$P[Z = 2j] = \frac{P[X = 2j] + P[X = j]}{2} = \frac{e^{-\lambda}}{2} \left(\frac{\lambda^{2j}}{(2j)!} + \frac{\lambda^j}{j!} \right).$$

2. On décompose :

$$(Z \text{ est paire }) = \bigcup_{j=0}^{+\infty} [Z = 2j]$$

avec une union incompatible donc :

$$\begin{aligned} P([Z \text{ est paire }]) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \left[\frac{e^{-\lambda}}{2} \left(\frac{\lambda^{2j}}{(2j)!} + \frac{\lambda^j}{j!} \right) \right] \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{2} \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2j}}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \right] \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{2} \left[\frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} + e^{\lambda} \right] = \frac{1 + e^{-2\lambda} + 2}{4} = \frac{3 + e^{-2\lambda}}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 8 *(Exercice avec préparation)*

1. Une intégrale impropre en un point est dite convergente si l'intégrale partielle admet une limite finie. Si elle est impropre en ses deux bornes, elle est dit convergente si, en posant c un point situé entre les deux bornes a et b, les intégrales $\int_a^c f$ et $\int_b^c f$ sont convergentes.

Enfin l'intégrale d'une fonction positive impropre au point a est convergente lorsque :

- l'intégrale partielle est majorée (condition nécessaire et suffisante).

- $f \leqslant g$ au voisinage du point a, et l'intégrale de g est convergente (condition suffisante).

- $f = o(g)$ au voisinage du point a, où g est positive et l'intégrale de g est convergente (condition suffisante).

- $\sim g$ su voisinage du point a, où g est positive et l'intégrale de g est convergente (condition nécessaire et suffisante).

Enfin lorsque f n'est pas de signe constant, on a un dernier critère : si l'intégrale est absolument convergente (avec possibilité d'utiliser les théorèmes de comparaison ci-dessus), elle est convergente (condition suffisante).

Soir T une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi normale centrée réduite. On note Φ et φ respectivement, la fonction de répartition et une densité de T.

2. *a)* L'inégalité de Bienaymé-Chebychev donne, pour X une variable aléatoire qui admet une variance et a un nombre strictement positif :

$$P\left([|X - E(X)| > a]\right)\left([X])\,| > a\right) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}.$$

En l'appliquant à la variable X, on obtient :

$$P\left([|X - 0| > a]\right) \leqslant \frac{1}{a^2} \quad \text{donc} \quad P\left([|X| > a]\right) \leqslant \frac{1}{a^2}.$$

On calcule alors cette probabilité en faisant apparaitre Φ :

$$\begin{aligned} P\left([|X| > a]\right) &= P\left[X > a\right] + P\left[X < -a\right] = 1 - P\left[X \leqslant a\right] + P\left[X \leqslant -a\right] = 1 - \Phi(a) + \Phi(-a) \\ &= 1 - \Phi(a) + 1 - \Phi(a) = 2[1 - \Phi(a)]. \end{aligned}$$

On remplace a par x et on divise l'inégalité par $2 > 0$:

$$\frac{P\left([|X| > a]\right)}{2} = 1 - \Phi(x) \leqslant \frac{1}{2x^2}.$$

Enfin l'autre côté est immédiat, puisque :

$$1 - \Phi(x) = 1 - P\left[X \leqslant x\right] = P\left[X > x\right] > 0.$$

On obtient finalement :

$$0 < 1 - \Phi(x) < \frac{1}{x^2}.$$

b) C'est l'intégrale d'une fonction positive, et la fonction est majorée par $\frac{1}{x^2}$. Enfin l'intégrale de $\frac{1}{x^2}$ converge (Riemann avec $\alpha > 1$) en $+\infty$, donc par théorème de comparaison $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(x))\ dx$ converge.

Pour calculer sa valeur, on revient à l'intégrale partielle, mais on ne sait pas primitiver Φ : on va donc procéder à une intégration par parties pour la faire disparaître : on pose

$$u = 1 - \Phi(x) \quad \text{et} \quad v = x$$

qui sont de classe C^1 (Φ car sa dérivée φ est continue sur $\mathbb{R}$) avec :

$$u' = -\varphi(x) \quad \text{et} \quad v' = 1.$$

On obtient :

$$\int_0^A (1 - \Phi(x))\ dx = \Big[\ x(1 - \Phi(x))\Big]_0 A + \int_0^A\ x\varphi(x)\ dx = A(1 - \Phi(A)) + \int_0^A\ x\varphi(x)\ dx.$$

Pour la première partie, on se sert de la question a pour l'encadrer :

$$0 \leqslant 1 - \varphi(A) \leqslant \frac{1}{A^2} \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant A(1 - \varphi(A)) \leqslant \frac{1}{A}$$

et par théorème d'encadrement, avec les deux termes extrémaux qui tendent vers 0,

$$\lim_{A \to +\infty} A(1 - \varphi(A)) = 0.$$

L'autre terme est une intégrale qu'on sait calculer :

$$\int_0^A\ x\varphi(x)\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^A\ xe^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0 A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - e^{-\frac{A^2}{2}}\right) \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Enfin on en déduit que :

$$\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(x))\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

3. On note φ' la dérivée de φ.

a) On calcule sans difficulté :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right) = -x\varphi(x).$$

b) L'énoncé parle d'IPP, il faut donc faire apparaître une intégrale : c'est Φ qui va nous le permettre :

$$1 - \Phi(x) = 1 - P\left[X \leqslant x\right] = P\left[X > x\right] = \int_x^{+\infty}\ \varphi(t)\ dt.$$

Pour faire apparaitre des $\frac{1}{x}$, on pense à utiliser la question précédente en remplaçant $\varphi(t) = -\frac{1}{t}\varphi'(t)$:

$$1 - \Phi(x) = \int_x^{+\infty}\ -\frac{1}{t}\varphi'(t)\ dt.$$

On intègre par parties avec :

$$u = -\frac{1}{t} \quad \text{et} \quad v = \varphi(t)$$

de classe C^1, avec

$$u' = \frac{1}{t^2} \quad \text{et} \quad v' = \varphi'(t).$$

On obtient :

$$\int_x^M -\frac{1}{t}\varphi'(t)\ dt = -\frac{\varphi(M)}{M} + \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^M \frac{\varphi(t)}{t^2}\ dt.$$

On fait tendre M vers $+\infty$, on obtient :

$$1 - \Phi(x) = 0 + \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\ dt.$$

Enfin comme l'intégrale est positive (fonction positive et bornes dans l'ordre croissant) :

$$1 - \Phi(x) \leqslant \frac{\varphi(x)}{x} \quad \text{donc} \quad \frac{1 - \Phi(x)}{\varphi(x)} \leqslant \frac{1}{x}.$$

Pour l'autre inégalité, on va de nouveau remplacer $\varphi(t) = -\frac{1}{t}\varphi'(t)$:

$$1 - \Phi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} + \int_x^{+\infty} \frac{\varphi'(t)}{t^3}\ dt$$

Une nouvelle IPP donne :

$$u = \frac{1}{t^3} \quad \text{et} \quad v = \varphi(t)$$

de classe C^1, avec

$$u' = -\frac{3}{t^2} \quad \text{et} \quad v' = \varphi'(t).$$

On obtient :

$$\int_x^M \frac{1}{t^3}\varphi'(t)\ dt = \frac{\varphi(M)}{M^3} - \frac{\varphi(x)}{x^3} + \int_x^M \frac{3\varphi(t)}{t^2}\ dt.$$

On passe à la limite et on obtient :

$$1 - \Phi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} + 0 - \frac{\varphi(x)}{x^3} + \int_x^{+\infty} \frac{3\varphi(t)}{t^2}\ dt.$$

De nouveau l'intégrale est positive et on obtient :

$$1 - \Phi(x) \geqslant \frac{\varphi(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^3} \quad \text{donc} \quad \frac{1 - \Phi(x)}{\varphi(x)} \geqslant \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$$

et enfin :

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \leqslant \frac{1 - \Phi(x)}{\varphi(x)} \leqslant \frac{1}{x}.$$

c) On multiplie par $x > 0$ et on obtient :

$$1 - \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1 - \Phi(x)}{\frac{\varphi(x)}{x}} \leqslant 1$$

et par théorème d'encadrement,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \Phi(x)}{\frac{\varphi(x)}{x}} = 1 \quad \text{donc} \quad 1 - \Phi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}.$$

4. On calcule cette probabilité à l'aide de Φ :

$$P_{[T>x]}\left[T > x + \frac{a}{x}\right] = \frac{P\left[\ [T > x] \cap \left(T > x + \frac{a}{x}\right)\right]}{P\left[T > x\right]}$$

et comme $a > 0$ et $x > 0$, on a $x + \frac{a}{x} > x$ donc :

$$\left(T > x + \frac{a}{x}\right) \subset [T > x] \quad \text{puis} \quad \left(T > x + \frac{a}{x}\right) \cap [T > x] = \left(T > x + \frac{a}{x}\right)$$

et enfin :

$$P_{[T>x]}\left[T > x + \frac{a}{x}\right] = \frac{P\left[T > x + \frac{a}{x}\right]}{P\left[T > x\right]} = \frac{1 - \Phi\left[x + \frac{a}{x}\right]}{1 - \Phi(x)}.$$

Comme x et $x + \frac{a}{x}$ tendent vers $+\infty$, on peut utiliser l'équivalent de la question 3c au numérateur et au dénominateur :

$$P_{[T>x]}\left[T > x + \frac{a}{x}\right] \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\varphi\left[x + \frac{a}{x}\right] \times x}{\varphi(x) \times \left(x + \frac{a}{x}\right)}$$

et on a de plus :

$$\frac{x}{x + \frac{a}{x}} = \frac{1}{1 + \frac{a}{x^2}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

donc

$$P_{[T>x]}\left[T > x + \frac{a}{x}\right] \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\varphi\left[x + \frac{a}{x}\right]}{\varphi(x)}$$

Enfin on remplace φ par son expression :

$$P_{[T>x]}\left[T > x + \frac{a}{x}\right] \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^{-\frac{(x + \frac{a}{x})^2}{2}} \times \sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi} \times e^{-\frac{x^2}{2}}} = e^{\frac{-(x + \frac{a}{x})^2 + x^2}{2}}.$$

Enfin remarque une identité remarquable :

$$\begin{aligned} P_{[T>x]}\left[T > x + \frac{a}{x}\right] &\underset{x \to +\infty}{\sim} e^{\frac{(x + x + \frac{a}{x}) \times (x - x - \frac{a}{x})}{2}} = e^{\frac{-\frac{a}{x}(2x + \frac{a}{x})}{2}} \\ &\underset{x \to +\infty}{\sim} e^{\frac{-2a\left(1 + \frac{a}{2x^2}\right)}{2}} \\ &\xrightarrow[x \to +\infty]{} e^{-a} = \frac{1}{e^a}. \end{aligned}$$

Exercice sans préparation

Soit D la matrice définie par : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1. On résout sans difficulté, avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AD = DA \iff \begin{pmatrix} -a & 4b \\ -c & 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 4c & 4d \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{ll} -a = -a & 4b = -b \\ -c = 4c & 4d = 4d \end{array} \right. \iff b = c = 0 \iff A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

donc les solutions sont toutes les matrices diagonales.

2. Une telle matrice M vérifie $MD = DM$, car :

$$MD = M(M^3 - 2M) = M^4 - 2M^2 = (M^3 - 2M)M = DM.$$

La matrice est donc forcément solution de l'équation précédente, elle est diagonale. On cherche donc les solutions de l'équation posée parmi les matrices diagonales. Avec $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, on a :

$$M^3 - 2M = D \iff \begin{pmatrix} a^3 - 2a & 0 \\ 0 & b^3 - 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{l} a^3 - 2a = -1 \\ b^3 - 2b = 4 \end{array} \right.$$

Il reste à résoudre ces deux équations du troisième degré, en trouvant à chaque fois une solution évidente pour factoriser :

$$1^3 - 2 \times 1 + 1 = 0$$

donc $a^3 - 2a + 1$ se factorise par $a - 1$. Par une division euclidienne ou une identification, on obtient :

$$a^3 - 2a + 1 = (a - 1)\left(a^2 + a - 1\right)$$

et l'équation $a^3 - 2a + 1 = 0$ a pour solution $a = 1$ et les solutions de $a^2 - a + 1 = 0$, de discriminant $1 + 4 = 5$, donc qui a pour solution :

$$a = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Enfin :

$$a^3 - 2a + 1 = 0 \iff a \in \left\{ 1; \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

De même

$$2^3 - 2 \times 2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$$

donc $b^3 - 2b - 4$ se factorise par $b - 2$. Par une division euclidienne ou une identification, on obtient :

$$b^3 - 2b - 4 = (b - 2)\left(b^2 + 2b + 2\right)$$

et l'équation $b^3 - 2b - 4 = 0$ a pour solution $b = 2$ et les solutions de $b^2 + 2b + 2 = 0$, de discriminant $4 - 8 = -4 < 0$, donc qui n'a pas de solution. Enfin :

$$b^3 - 2b - 4 = 0 \iff b = 2.$$

On en déduit que les seules matrices M vérifiant $M^3 - 2M = D$ sont

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 *(Exercice avec préparation)*

1. Deux matrices carrées d'ordre n A et B sont semblables s'il existe une matrice P carrée d'ordre n inversible telle que :

$$A = PBP^{-1}.$$

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on pose : $f^2 = f \circ f$.

2. ***a)*** On passe par les matrices dans la base canonique $\mathcal{B}$, on calcule :

$$\begin{aligned} Mat_{\mathcal{B}}(2f - f^2) &= 2Mat_{\mathcal{B}}(f) - [Mat_{\mathcal{B}}(f)]^2 = 2A - A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = Mat_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) \end{aligned}$$

donc on obtient bien :

$$2f - f^2 = \mathrm{id}.$$

b) On sait que f est un endormorphisme, et de plus :

$$2f - f^2 = f \circ (2\mathrm{id} - f) = \mathrm{id}$$

donc f est bijective et sa réciproque est $2f - \mathrm{id}$. On en déduit que f est un automorphisme et que son automorphisme réciproque est

$$f^{-1} = 2f - \mathrm{id}.$$

c) On déduit également de la relation de la question 2a que :

$$f^2 - 2f + \mathrm{id} = 0$$

donc le polynôme $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ est annulateur de f. Sa seule racine est 1, donc c'est la seule valeur propre possible de f.
On vérifie que 1 est valeur propre, il faut montrer que $f - \mathrm{id}$ n'est pas bijective. On passe par la matrice :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f - \mathrm{id}) = Mat_{\mathcal{B}}(f) - Mat_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = A - I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

qui n'est pas inversible (les deux première colonnes sont égales) donc $f - \mathrm{id}$ n'est pas bijective. On en déduit que 1 est bien valeur propre de f, et enfin :

$$\mathrm{Sp}(f) = \{1\}.$$

Supposons que f est diagonalisable, alors A l'est aussi et elle est semblable à une matrice diagonale ne comportant que les valeurs propres de A sur la diagonale. Comme $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A) = \{1\}$, on a alors :

$$A = PIP^{-1} = I$$

qui est absurde, donc f n'est pas diagonalisable.

d) On peut résoudre sans difficulté la système $(A - I)X = 0$, ou bien procéder astucieusement par l'image : on remarque que les trois colonnes de $A - I$ sont colinéaires, donc $\mathrm{Im}(A - I)$ est de dimension 1, puis $\ker(A - I)$ et $\ker(f - \mathrm{id})$ sont de dimension 2. De plus on remarque que :

$$C_1 = C_2 = -C_3 \quad \text{donc} \quad (f - \mathrm{id})(e_1) = (f - \mathrm{id})(e_2) = -(f - \mathrm{id})(e_3)$$

et donc :

$$(f - \mathrm{id})(e_1 - e_2) = (f - \mathrm{id})(e_1 + e_3) = 0$$

donc la famille $[(1, -1, 0), (1, 0, 1)]$ est une famille de $E_1(f)$, libre (deux vecteurs non colinéaires) et dont le cardinal est égal à la dimension de $E_1(f)$, c'en est une base et :

$$E_1(f) = \mathrm{Vect}\left((1, -1, 0), (1, 0, 1)\right)$$

3. a) Plusieurs approches sont possibles. Comme A n'est pas diagonalisable, on ne peut utiliser la diagonalisation. Sans autre indication, l'approche naturelle est de calculer les premières puissances pour essayer de conjecturer une formule à prouver ensuite par récurrence :

$$A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -6 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

ce qui permet de conjecturer :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1+2n & 2n & -2n \\ -n & 1-n & n \\ n & n & 1-n \end{pmatrix} = I + n\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = I + n(A - I)$$

qu'on prouve ensuite par récurrence sur n (sans difficulté).

Une autre possibilité était de se servir de la relation $A^2 = 2A - I$ pour conjecturer une écriture :

$$A^n = u_n A + v_n I$$

qu'on prouve par récurrence sur n, en obtenant au passage des relations de récurrences sur u_n et v_n :

$$A^{n+1} = AA^n = A(u_n A + v_n I) = u_n A^2 + v_n A = u_n(2A - I) + v_n A = (2u_n + v_n)A - u_n I$$

donc $u_{n+1} = 2u_n + v_n$ et $v_{n+1} = -u_n$ qu'on désimbriquent en passant à des relations de récurrence double :

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + v_{n+1} = 2u_{n+1} - u_n \quad \text{et} \quad v_{n+2} = -u_{n+1} = -2u_n - v_n = 2v_{n+1} - v_n$$

puis on cherche les valeurs de u_n et v_n avec leurs premiers termes et la méthode classique sur les suites récurrentes linéaires doubles.

b) Il existe plusieurs méthodes pour obtenir les puissances négatives : on peut calculer A^{-1} puis calculer ses puissances par récurrence (soit ne refaisant le travail de conjecture, soit en reprenant la formule précédente qui est celle qu'on est censé tester). Mais la méthode la plus habile est de remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^{-n} = (A^n)^{-1}$$

et que les puissances négatives sont donc les inverses des puissances positives. Plutôt que de calculer l'inverse avec Gauss-Jordan (pénible avec des coefficients qui dépendent de n), on se sert de la connaissance de A^n pour tester si la formule demandée fonctionne : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n \times \Big[\ I - n(A-I)\Big] = \Big[\ I + n(A-I)\Big] \times \Big[\ I - n(A-I)\Big] = I - n(A-I) + n(A-I) - n^2(A-I)^2 = I$$

car on a vu que $(A-I)^2 = A^2 - 2A + I = 0$, on en déduit que que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^{-n} = (A^n)^{-1} = I - n(A-I)$$

donc pour tout n négatif, on obtient bien :

$$A^n = A^{-(-n)} = I - (-n)(A-I) = I + n(A-I)$$

et la formule se généralise pour les entiers négatifs, donc elle est valable pour tout entier relatif.

4. Il faut donc obtenir (u, v, w) tels que :

$$f(u) = u \ f(v) = v \quad f(w) = v + w.$$

On en déduit que u et v sont des vecteurs propres de f associés à la valeur propre 1, ils doivent être pris dans $E_1(f)$, on choisit donc :

$$u = (1, -1, 0) \quad \text{et} \quad v = (1, 0, 1)$$

On cherche ensuite w sous la forme $w = (a, b, c)$ et on résout :

$$AW = V + W \iff \left\{ \begin{array}{c} 3a + 2b - 2c = 1 + a \\ -a + c = b \\ a + b = 1 + c \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} 2a + 2b - 2c = 1 \\ -a - b + c = 0 \\ a + b - c = 1 \end{array} \right.$$

qu'on résout avec les pivots $L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1$, $L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1$:

$$AW = V + W \iff \left\{ \begin{array}{c} 2a + 2b - 2c = 1 \\ 0 = 1 \\ 0 = 1 \end{array} \right.$$

qui est absurde. On peut essayer en échangeant l'ordre des vecteurs u et v, mais cela échoue encore. Il faut donc remplacer v par un autre vecteur propre associé à 1, donc sous la forme :

$$v = x(1, -1, 0) + y(1, 0, 1) = (x + y, -x, y)$$

et on résout de même l'équation :

$$AW = V + W \iff \left\{ \begin{array}{c} 3a + 2b - 2c = x + y + a \\ -a + c = -x + b \\ a + b = y + c \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} 2a + 2b - 2c = x + y \\ -a - b + c = -x \\ a + b - c = y \end{array} \right.$$

qu'on résout avec les pivots $L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1$, $L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1$:

$$AW = V + W \Longleftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b - 2c = x + y \\ 0 = y - x \\ 0 = y - x \end{cases}$$

qui a des solutions à condition que $y = x$. On prend donc par exemple $x = y = 1$, donc (on récapitule) :

$$u = (1, -1, 0) \quad v = (2, -1, 1)$$

et enfin $w = (a, b, c)$ avec

$$2a + 2b - 2c = 2 \Longleftrightarrow a + b - c = 1 \Longleftrightarrow a = 1 + c - b$$

et on peut prendre par exemple $b = c = 0$ et $a = 1$, qui donnent $w = (1, 0, 0)$. On peut alors vérifier que :

$$au + bv + xw = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ -a - b = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow a = b = c = 0$$

donc la famille est (u, v, w) est libre, et son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$, c'est bien une base de $\mathbb{R}^3$, et on calcule la matrice de f dans cette base :

$$AU = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = U \quad AV = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = V \quad AW = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = V + W$$

donc on a :

$$f(u) = u \quad f(v) = v \quad fw) = v + w \quad \text{et enfin} \quad C = Mat_{(u,v,w)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice sans préparation

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant toutes la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$.

1. Le plus grand des X_i est inférieur ou égal à x si et seulement si ils le sont tous, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$[Y_k \leqslant x] = \bigcap_{i=1} k\, [X_i \leqslant x]$$

et par indépendance des X_i, on obtient :

$$F_{Y_k}(x) = \prod_{i=1} k F_{X_i}(x) = [F_{X_1}(x)]^n$$

car les X_i suivent toutes les même loi.

De plus X_1 est à densité, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$, et elle est de classe C^1 sauf en 0 et 1, donc par opérations élémentaires (composition avec la puissante n-ème qui est C^∞), c'est aussi de cas de F_{Y_k}, et Y_k est à densité.

Enfin on obtient une densité de Y_k en dérivant F_{Y_k} sauf en 0 et 1, valeurs arbitraires :

$$f_{Y_k}(x) = kf_{X_1}(x)[F_{X_1}(x)]^{k-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ kx^{k-1} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

2. On commence par la fonction de répartition : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$[Z_k \leqslant x] = (-Y_k \leqslant x) = [Y_k \geqslant -x]$$

donc (avec Y_k à densité donc $\mathbb{P}\left([[Y_k <]]\right) = P\left[Y_k \leqslant x\right]$) :

$$F_{Z_k}(x) = 1 - P\left[Y_k < -x\right] = 1 - P\left[Y_k \leqslant -x\right] = 1 - F_{Y_k}(-x) = 1 - \begin{cases} 0 & \text{si } -x < 0 \\ (-x)^k & \text{si } 0 \leqslant -x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } -x > 1 \end{cases}$$

et en résolvant les conditions :

$$F_{Z_k}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 1 - (-x)^k & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

Enfin cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf en -1 et 0 par opérations élémentaires (avec l'expression $1 - F_{Y_k}(x)$), donc Z_k est à densité et une densité est donnée par (avec des valeurs arbitraires en -1 et 0) :

$$f_{Z_k}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ k(-x)^{k-1} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

Exercice 10 *(Exercice avec préparation)*

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, alors un endomorphisme de E est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à $\dim E$.

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. On note $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à 2 lignes et 1 colonne à coefficients réels.
Soit u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ défini par : pour tout $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $u(X) = AX$.

a) On commence par $\mathrm{Im}(u)$, on a :

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

car les deux colonnes sont colinéaires, puis la famille génératrice obtenue est libre (1 vecteur non nul) donc c'est une base de $\mathrm{Im}(u)$, et $\dim(\mathrm{Im}(u)) = 1$. On en déduit par théorème du rang, avec $\dim(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})) = 2$, que $\dim(\ker u) = 1$.

On cherche alors un vecteur non nul de $\ker u$: il constituera une famille libre (1 vecteur non nul) de $\ker u$, avec le bon cardinal, c'en sera donc une base, et donc une famille génératrice. Or on a vu que :

$$C_2 = 2C_1 \quad \text{donc} \quad u(e_2) = 2u(e_1) \quad \text{et enfin} \quad u(e_2 - 2e_1) = 0$$

Avec $e_2 - 2e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$, c'est un vecteur non nul de $\ker u$, donc libre, donc c'en est un base car $\dim(\ker u) = 1$, et enfin on obtient :

$$\ker u = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

b) On pourrait chercher (c'est un peu lourd mais faisable en un temps raisonnable avec une matrice d'ordre 2) les valeurs propres de u, puis chercher les sous-espaces propres associés. Mais on va ici mener une méthode plus originale et beaucoup plus efficace, qui ne fonctionne qu'avec les matrices de rang 1.

On a déjà vu que 0 est valeur propre, et que le sous-espace propre associé est de dimension 1.

Soit alors λ une valeur propre non nulle et x un vecteur propre associé de u ; montrons que $x \in \mathrm{Im}(u)$. En effet, on a $\lambda \neq 0$ et :

$$u(x) = \lambda x \quad \text{donc} \quad x = \frac{1}{\lambda} u(x) \quad \text{et enfin} \quad x = u\left(\frac{1}{\lambda} x\right)$$

donc x est l'image d'un vecteur par u, c'est donc un vecteur de $\mathrm{Im}(u)$. On en déduit alors que :

$$x \in \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{donc} \quad \exists \mu \in \mathbb{R}, \text{ tq } x = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule alors $u(x)$:

$$u(x) = A\mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4x.$$

On en déduit que 4 est valeur propre de u, et que le sous-espace propre associé est $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right) = \text{Im}(u)$, de dimension 1 : la somme des dimensions des sous-espaces propres de u vaut 2, et u est diagonalisable.

Remarque : si l'exercice était plus théorique, on aurait pu s'en sortir sans calculer $u(x)$: en effet on prend a une base de $\text{Im}(u)$, on a alors :

$$u(a) \in \text{Im}(u) = \text{Vect}\,(a) \iff \exists\lambda \in \mathbb{R},\ \text{tq } u(a) = \lambda a.$$

On en déduit que a est vecteur propre de u, et comme $a \notin \ker u$, la valeur propre associée ne peut pas être 0. On en déduit qu'il existe une autre valeur propre, et que la dimension du sous-espace propre associé est 1 (on a vu que tous les vecteurs propres associés sont colinéaires à a, donc cet espace propre est $\text{Vect}\,(a)$), et la somme des dimensions des sous-espaces propres de u vaut 2, u est diagonalisable.

c) On a vu que u, donc A, est diagonalisable. On obtient une base de vecteurs propres en concaténant les bases des sous-espaces propres, et ne posant :

$$P\begin{pmatrix}-2 & 2\\1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}$$

on a $A = PDP^{-1}$. On en déduit immédiatement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ($n = 0$ doit être écarté car $0^0 = 1$ donne une valeur différente de$0^n = 0$ pour $n \geqslant 1$), on a :

$$A^n = PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 4^n\end{pmatrix}P^{-1}.$$

On pourrait calculer P^{-1} pour conclure, mais on peut remarquer astucieusement que D^n est colinéaire à D et faire apparaître D :

$$A^n = P\left[4^{n-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}\right]P^{-1} = 4^{n-1}PDP^{-1} = 4^{n-1}A.$$

3. Soit v l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $v(M) = AM$.
On note $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on rappelle que :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\ E_{1,2} = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\ E_{2,1} = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\ E_{2,2} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

a) On calcule sans difficulté :

$$v(E_{1,1}) = AE_{1,1} = \begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = 2E_{1,1} + E_{2,1} \quad v(E_{1,2}) = AE_{1,2} = \begin{pmatrix}0 & 2\\0 & 1\end{pmatrix} = 2E_{1,2} + E_{2,2},$$

$$v(E_{2,1}) = AE_{2,1} = \begin{pmatrix}4 & 0\\2 & 0\end{pmatrix} = 4E_{1,1} + 2E_{2,1} \quad v(E_{2,2}) = AE_{2,2} = \begin{pmatrix}0 & 4\\0 & 2\end{pmatrix} = 4E_{1,2} + 2E_{2,2}$$

donc :

$$V = \begin{pmatrix}2 & 0 & 4 & 0\\0 & 2 & 0 & 4\\1 & 0 & 2 & 0\\0 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

b) En retirant les deux dernières colonnes égales aux deux premières, on obtient :

$$\mathrm{Im}(V) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right) \quad \text{donc} \quad \mathrm{Im}(v) = \mathrm{Vect}\left(2E_{1,1}+E_{2,1}, 2E_{1,2}+E_{2,2}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

(Remarque : on est passé par V car on venait de la faire trouver, mais c'est maladroit : il était plus rapide de conclure directement en écrivant à l'aide des images de la base $\mathcal{B}$)

qui est de dimension 2 car les 2 vecteurs générateurs ne sont pas colinéaires, donc la famille génératrice est libre, c'est une base de . On en déduit que $\ker v$ est de dimension 2 (théorème du rang, avec $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$), et puisque $C_1 = C_3$ et $C_2 = C_4$, on obtient :

$$v(E_{1,1}) = v(E_{2,1}) \quad \text{et} \quad v(E_{1,2} = v(E_{2,2}) \quad \text{donc} \quad v(E_{1,1}-E_{2,1}) = v(E_{1,2}-E_{2,2}) = 0$$

(Remarque : à nouveau on avait directement ces relations sans la matrice avec les images calculées à la question a)

donc la famille $(E_{1,1}-E_{2,1}, E_{1,2}-E_{2,2}) = \begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}$ est une famille de $\ker v$, libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires, et dont le cardinal est égal à la dimension de $\ker v$: c'est donc une base de $\ker v$ et on obtient :

$$\ker v = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}\right).$$

c) A nouveau on peut calculer valeurs propres et sous-espaces propres. Mais on va généraliser la méthode précédente avec cette fois-ci un en endomorphisme de rang 2 (c'est plus difficile mais possible, par contre au-delà du rang 2 ça reste faisable en théorie mais très compliqué en pratique).

La valeur propre 0 est déjà traitée : $\ker v = E_0(v)$ est de dimension 2, donc 0 est valeur propre.

Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de v et x un vecteur propre associé. Pour les mêmes raisons que précédemment, x est un vecteur de . On va alors s'intéresser à la restriction $\tilde{v}$ de v à , et on commence par prouver que c'est un endomorphisme :

$$\tilde{v} : \left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{Im}(v) & \to & ?? \\ x & \mapsto & v(x) \end{array}\right.$$

Cette application est immédiatement linéaire par linéarité de v : soient x et y dans et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x + y \in \mathrm{Im}(v)$ par stabilité d'un espace vectoriel et :

$$\tilde{v}(\lambda x + y) = v(\lambda x + y) = \lambda v(x) + v(y) = \lambda \tilde{v}(x) + \tilde{v}(y)$$

par linéarité de v, donc $\tilde{v}$ est linéaire et pour tout $x \in \mathrm{Im}(v)$, on a :

$$\tilde{v}(x) = v(x) \in \mathrm{Im}(v)$$

puisque c'est l'image d'un élément par v, donc $\tilde{v}$ est un endomorphisme. Enfin, toujours pour $\lambda \neq 0$, on a vu que les vecteurs propres de v associés à λ appartiennent à , donc vérifient :

$$v(x) = \tilde{v}(x) = \lambda x$$

donc ce sont exactement les vecteurs propres de $\tilde{v}$ associés à λ. Pour trouver les éléments propres de $\tilde{v}$, on cherche sa matrice dans la base de trouvée précédemment :

$$\tilde{v}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{v}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc la matrice $\tilde{V}$ de $\tilde{v}$ dans cette base est $4I$, dont la seule valeur propre est 4 avec un sous-espace propre de dimension 2, donc $\tilde{v}$ admet 4 pour unique valeur propre, avec un sous-espace propre de dimension 2 : on en déduit que 4 est valeur propre de v avec un sous-espace propre de dimension 2.

Enfin la somme des dimensions des sous-espaces propres de v vaut 4, qui est la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et v est diagonalisable.

Exercice sans préparation

Soit A_i l'évènement : "la boule rouge est dans l'urne i" et $B_{1,j}$ l'évènement : "on a tiré une boule bleue dans au j-ème tirage sans remise dans l'urne 1". On demande de calculer la probabilité :

$$P_{B_{1,1}\cap B_{1,2}}(A_2).$$

Mais comme l'évènement A_2 est antérieur aux tirages, on ne peut pas exprimer la condition. On revient alors à la définition de la probabilité conditionnelle, puis aux probabilités composées :

$$P_{B_{1,1}\cap B_{1,2}}(A_2) = \frac{P(A_2 \cap B_{1,1} \cap B_{1,2})}{P(B_{1,1} \cap B_{1,2})} = \frac{P([A_2])\, P_{A_2}(B_{1,1}) P_{A_2\cap B_{1,1}}(B_{1,2})}{P(B_{1,1} \cap B_{1,2})}$$

et on n'a pas appliqué les probabilités composées au dénominateur car il est impossible de connaître ces probabilités sans connaître la place de la boule rouge (urne 1 ou pas). On traite séparément le numérateur et le dénominateur :

$$P([A_2])\, P_{A_2}(B_{1,1}) P_{A_2\cap B_{1,1}}(B_{1,2}) = P([A_2]) \times 1 \times 1 = P([A_2])$$

Pour le dénominateur, comme $(A_1, \overline{A_1})$ est un sce, on obtient :

$$B_{1,1} \cap B_{1,2} = \left[\ A_1 \cap B_{1,1} \cap B_{1,2}\right] \cup \left[\ \overline{A_1} \cap B_{1,1} \cap B_{1,2}\right]$$

donc :

$$P(B_{1,1} \cap B_{1,2}) = P([A_1]) \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + [1 - P([A_1])] \times 1 \times 1 = \frac{1}{3}P([A_1]) + 1 - P([A_1]) = 1 - \frac{2}{3}P([A_1]).$$

On obtient finalement :

$$P_{B_{1,1}\cap B_{1,2}}(A_2) = \frac{P([A_2])}{1 - \frac{2}{3}P([A_1])}.$$

Pour continuer il faut connaître les probabilités des évènements A_i, qui dépendent de la manière dont les urnes ont été remplies. On suppose que la remplissage a été fait au hasard, toutes les urnes jouent alors le même rôle et on en déduit par symétrie que :

$$\forall i \in [\![1; n]\!],\ P([A_i]) = \frac{1}{n}$$

ce qui permet de conclure le calcul :

$$P_{B_{1,1}\cap B_{1,2}}(A_2) = \frac{1}{n\left(1 - \frac{2}{3n}\right)} = \frac{1}{n - \frac{2}{3}} = \frac{3}{3n-2}.$$