HEC 2016

Sujet E 65

Exercice avec préparation 1
Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On appelle *médiane* de X tout réel m qui vérifie les deux conditions :

$$\mathbb{P}([X \leqslant m]) \geqslant \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}([X \geqslant m]) \geqslant \frac{1}{2}$$

On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Question de cours : Définition et propriétés de la loi exponentielle.

Démonstration.

- Une v.a.r. X suit la loi exponentielle de paramètre λ (où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$), notée $\mathcal{E}(\lambda)$, si une densité de X est la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Sa fonction de répartition est la fonction F définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- La v.a.r. X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

- La v.a.r. X est une v.a.r. sans mémoire, c'est-à-dire :

$$\forall (t, h) \in \mathbb{R}_+^2,\ \mathbb{P}([X > t + h]) = \mathbb{P}([X > t])\, \mathbb{P}([X > h])$$

Remarque Cette question de cours est un peu vague, notamment à travers le terme « propriétés ». Le jour J, il faut donc énumérer toutes les propriétés connues sur la loi exponentielle. Si besoin, le jury stoppera dans l'énumération. □

2. ***a)*** Montrer que X admet une unique médiane m que l'on calculera.

Démonstration.

- On commence par chercher les réels m tel que : $\mathbb{P}([X \leqslant m]) \geqslant \frac{1}{2}$.
Tout d'abord : $\mathbb{P}([X \leqslant m]) = F_X(m)$. Donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X \leqslant m]) \geqslant \frac{1}{2} & \Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-\lambda m} \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda m} \\ & \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant -\lambda m \qquad \textit{(car la fonction } \ln \textit{ est strictement croissante sur }]0, +\infty[) \\ & \Leftrightarrow -\ln(2) \geqslant -\lambda m \Leftrightarrow \frac{\ln(2)}{\lambda} \leqslant m \end{aligned}$$

- On détermine ensuite les réels m tel que : $\mathbb{P}([X \geqslant m]) \geqslant \dfrac{1}{2}$.
  Tout d'abord, comme X est une v.a.r. à densité :

  $$\mathbb{P}([X \geqslant m]) \;=\; 1-\mathbb{P}([X < m]) \;=\; 1-\mathbb{P}([X \leqslant m]) \;=\; 1-F_X(m) \;=\; \cancel{1}-\left(\cancel{1}-\mathrm{e}^{-\lambda m}\right) \;=\; \mathrm{e}^{-\lambda m}$$

  On obtient alors :

  $$\begin{aligned} \mathbb{P}([X \geqslant m]) \geqslant \frac{1}{2} \quad & \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-\lambda m} \geqslant \frac{1}{2} \\ & \Leftrightarrow \quad -\lambda\, m \geqslant \ln\left(\frac{1}{2}\right) && \textit{(car la fonction } \ln \textit{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow \quad -\lambda\, m \geqslant -\ln(2) \;\Leftrightarrow\; m \leqslant \frac{\ln(2)}{\lambda} \end{aligned}$$

- Une médiane de X vérifie :

  $$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{P}([X \leqslant m]) \geqslant \dfrac{1}{2} \\[2ex] \mathbb{P}([X \geqslant m]) \geqslant \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} m \geqslant \dfrac{\ln(2)}{\lambda} \\[2ex] m \leqslant \dfrac{\ln(2)}{\lambda} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

  $$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet une unique médiane } m = \dfrac{\ln(2)}{\lambda}.}$$

□

b) Soit M la fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $M(x) = \mathbb{E}(|X - x|)$.
Étudier les variations de la fonction M sur $\mathbb{R}$ et montrer que m est l'unique point en lequel M atteint son minimum.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- La fonction f_X est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.
  Ainsi, d'après le théorème de transfert, la v.a.r. $Y = |X - x|$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} |t - x|\, f_X(t)\ dt$ est absolument convergente., ce qui équivaut à démontrer sa convergence car l'intégrance est positive :

  $$\forall t \in [0, +\infty[,\ \ |t - x|\, f_X(t) \geqslant 0$$

- Soit $A \geqslant x$.

  $$\begin{aligned} \int_0^A |t-x|\, f_X(t)\ dt &= \int_0^x |t-x|\, f_X(t)\ dt + \int_x^A |t-x|\, f_X(t)\ dt \\ &= \int_0^x -(t-x)\, f_X(t)\ dt + \int_x^A (t-x)\, f_X(t)\ dt \end{aligned}$$

- D'une part :

  $$\begin{aligned} \int_0^x (t-x)\, f_X(t)\ dt &= \int_0^x t\,\lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\ dt - x \int_0^x \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\ dt \\ &= \int_0^x t\,\lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\ dt - x \left[\ -\mathrm{e}^{-\lambda t}\ \right]_0^x \\ &= \int_0^x t\,\lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\ dt - x\,(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}) \end{aligned}$$

On calcule l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,t}\,dt$ grâce à une intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t & \quad & u'(t) & = & 1 \\[2ex] v'(t) & = & \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,t} & \quad & v(t) & = & -\mathrm{e}^{-\lambda\,t} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,x]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^x t\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,dt &= \Big[\,-t\,\mathrm{e}^{-\lambda\,t}\,\Big]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda\,t}\,dt \;=\; -x\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x} + \left[\,-\frac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\lambda\,t}\,\right]_0^x \\ &= -x\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda\,x} + \frac{1}{\lambda} \;=\; \frac{1}{\lambda} - \left(x+\frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda\,x} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\int_0^x (t-x)\,f_X(t)\,dt \;=\; \frac{1}{\lambda} - \left(\cancel{x}+\frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda\,x} - x + \cancel{x\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}} \;=\; \frac{1}{\lambda} - x - \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}$$

•

□

3. On suppose que le paramètre λ est inconnu. Soit α un réel vérifiant $0 < \alpha < 1$.
Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Z_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a) Quelle est la loi de Z_n ?

b) Établir l'existence de deux réels c et d tels que : $\mathbb{P}\left(\left[Z_n \leqslant \dfrac{c}{\lambda}\right]\right) = \dfrac{\alpha}{2}$ et $\mathbb{P}\left(\left[Z_n \geqslant \dfrac{d}{\lambda}\right]\right) = \dfrac{\alpha}{2}$.

c) En déduire un intervalle de confiance du paramètre m au niveau de confiance $1-\alpha$.

Exercice sans préparation 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes.
Montrer qu'un endomorphisme g de E vérifie $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si les vecteurs propres de f sont des vecteurs propres de g.

Sujet E 82

Exercice avec préparation 2

On suppose que toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Question de cours : Loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$; définition, propriétés.

2. Pour tout x réel, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

a) Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, montrer que pour tout x réel, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.

b) Établir pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ l'équivalence suivante : $\lfloor y \rfloor \leqslant x \iff y < \lfloor x \rfloor + 1$.

c) Soit α et β deux réels vérifiant $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$ et soit $N_n(\alpha, \beta)$ le nombre d'entiers k qui vérifient $\alpha < \dfrac{k}{n} \leqslant \beta$. Exprimer $N_n(\alpha, \beta)$ en fonction de $\lfloor n\alpha \rfloor$ et $\lfloor n\beta \rfloor$.

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note Y_n la variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathbb{P}\left(\left[Y_n = \frac{k}{n}\right]\right) = \frac{1}{n}.$$

Soit Z une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la variable aléatoire Z_n par : $Z_n = \dfrac{\lfloor nZ \rfloor}{n}$. Soit α et β deux réels vérifiant $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$.

a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([\alpha < Y_n \leqslant \beta]) = \beta - \alpha$.

b) Comparer les fonctions de répartition respectives de Y_n et Z_n. Conclusion.

Exercice sans préparation 2

Soit x réel et $M(x)$ la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par : $M(x) = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 2x & 2x \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de x la matrice $M(x)$ est-elle diagonalisable ?

Sujet E 83

Exercice avec préparation 3

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
On définit l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.
On pose $H_0(X) = 1$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $H_k(X) = \dfrac{X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)}{k!}$.
On note $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.

2. ***a)*** Montrer que φ est un endomorphisme non bijectif de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Justifier que la famille $\mathscr{B}' = (H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Déterminer la matrice M' de φ dans la base $\mathscr{B}'$.

d) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

3. Dans cette question, p est un entier fixé supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, soit f_i l'application de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall Q \in \mathbb{R}_p[X]$, $f_i(Q) = \sum\limits_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \dbinom{i}{k} Q(k)$.

a) Justifier que pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, l'application f_i est linéaire.

b) Soit $(i, j) \in [\![0, p]\!]^2$. Établir la relation : $f_i(H_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

c) Soit a_0, a_1, …, a_p les réels vérifiant : $X^p = a_0 H_0 + a_1 H_1 + \cdots + a_p H_p$.
Déduire de la question précédente, la relation : $\forall i \in [\![0, p]\!]$, $a_i = \sum\limits_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \dbinom{i}{k} k^p$.

Exercice sans préparation 3

Les variables aléatoires de cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, on note Y_n une variable aléatoire à valeurs dans $\left\{0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \dots, \dfrac{n-1}{n}\right\}$ telle que :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathbb{P}\left(\left[Y_n = \frac{k}{n}\right]\right) = \frac{1}{n}$$

Soit f une fonction définie et continue sur $[0, 1]$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(f(Y_n)) = \mathbb{E}(f(Z))$.

Sujet E 85

Exercice avec préparation 4
Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Question de cours : Définition et propriétés de la covariance de deux variables aléatoires discrètes.
Soit p, q et r des réels fixés de l'intervalle $]0,1[$ tels que $p+q+r=1$.
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,0,1\}$, indépendantes et de même loi donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X_n=1]) = p,\ \mathbb{P}([X_n=-1]) = q,\ \mathbb{P}([X_n=0]) = r.$$

On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

2. ***a)*** Pour tout entier $n \geqslant 1$, préciser $Y_n(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}([Y_n = 0])$.

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{E}(Y_n)$.

3. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $p_n = \mathbb{P}([Y_n = 1])$.

a) Calculer p_1 et p_2.

b) Établir une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.

c) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $p_n = \dfrac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2}$.

d) Pouvait-on à l'aide de la question 2, trouver directement la loi de Y_n ?

4. ***a)*** Établir l'inégalité : $(p+q)^n > (p-q)^{2n}$. Calculer $\mathbb{V}(Y_n)$.

b) Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$ des deux variables aléatoires Y_n et Y_{n+1}.

Sujet E 86

Exercice avec préparation 5

1. Question de cours : Fonctions équivalentes au voisinage de $+\infty$.

Pour tout entier naturel n, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \geqslant 0,\ f_n(x) = \displaystyle\int_0^1 t^n \mathrm{e}^{-tx}\, dt$.

2. ***a)*** Montrer que pour tout entier naturel n, la fonction f_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) Étudier la suite $(f_n(0))_{n\geqslant 0}$. En déduire pour tout réel $x \geqslant 0$ fixé, la limite de la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$.

3. ***a)*** Soit x un réel strictement positif. Établir pour tout entier $n \geqslant 1$, la relation :

$$f_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x}\, f_n(x) - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

b) Expliciter les fonctions f_0 et f_1.

c) Montrer que pour tout entier naturel n, $f_n(x)$ est équivalent à $\dfrac{n!}{x^{n+1}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4. ***a)*** Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$, on a : $f_n(x) = \dfrac{1}{x^{n+1}} \displaystyle\int_0^x u^n \mathrm{e}^{-u}\, du$.

b) En déduire que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer sa dérivée f_n'.

c) Comparer pour tout réel $y \geqslant 0$, leq deux réels y et $1 - \mathrm{e}^{-y}$.
En déduire que pour tout entier naturel n, la fonction f_n est continue en 0.

Exercice sans préparation 4

Soit c et r deux réels strictement positifs.

1. Justifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{rc^r}{x^{r+1}} & \text{si } x > c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Identifier la loi de la variable aléatoire $Y = \ln(X) - \ln(c)$.

3. Compléter les lignes du code **Scilab** suivant pour que V soit un vecteur ligne contenant 100 réalisations de la loi de la variable aléatoire X.

```
c = input('c=')
r = input('r=')
U = grand( ?, ?, ?, ?)
V = c ⋆ exp(U)
```

Sujet E 88

Exercice avec préparation 6

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Question de cours : Convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.
Dans tout l'exercice, X désigne une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

2. ***a)*** On pose : $T = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X). Montrer que la loi de T est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([T = k]) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right) \left(\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^k$$

b) Quelle est la loi de $T + 1$? En déduire l'espérance et la variance de T.

3. On pose : $Z = X - \lfloor X \rfloor$.
Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z.

4. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit une loi exponentielle de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Z_n = X_n - \lfloor X_n \rfloor$.
Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice sans préparation 5

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f^4 = f^2$ et $\mathrm{rg}(f^2) = 1$.
Montrer que le spectre de f est $\{0\}$ ou $\{0, 1\}$ ou $\{-1, 0\}$.

Sujet E 89

Exercice avec préparation 7

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} x^n \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. ***a)*** Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx$.

b) Calculer I_0 et I_1.

3. ***a)*** Montrer que f_1 est une densité de probabilité.

b) Tracer la courbe représentative de f_1 dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
Dans la suite, on note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ admettant f_1 pour densité.

c) Déterminer la fonction de répartition F de X.

d) Justifier l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et de la variance $\mathbb{V}(X)$ de X. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

4. On pose : $Y = X^2$.

a) Montrer que Y est une variable aléatoire à densité.

b) Quelle est la loi de Y ?

Exercice sans préparation 6

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. On admet sans démonstration que $A^3 = 0$. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Quelles sont les valeurs propres de M ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

b) Justifier que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de A et I (matrice identité de $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$).

Sujet E 90

Exercice avec préparation 8

Toutes les variables aléatoires utilisées dans cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Question de cours : loi faible des grands nombres.
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, de loi uniforme sur $[0,1]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n la variable aléatoire $\min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a) Calculer la fonction de répartition de U_n.

b) Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, la probabilité $\mathbb{P}([U_n \geqslant \varepsilon])$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

3. Compléter la deuxième ligne du code **Scilab** suivant pour que la fonction `minu` simule la variable U_k pour la valeur k du paramètre.

```
1 function u = minu(k)
2     x = ..........
3     u = min(x)
4 endfunction
```

4. Soit $p \in]0,1[$ et Z une variable aléatoire telle que, pour tout réel x :

$$\mathbb{P}([Z \leqslant x]) = \sum_{k=1}^{+\infty} p\,(1-p)^{k-1}\,\mathbb{P}([U_k \leqslant x])$$

(on admet qu'il existe une telle variable aléatoire et qu'elle possède une densité).

a) Justifier, pour tout $x \in [0,1]$, l'égalité : $\mathbb{P}([Z \leqslant x]) = 1 - \dfrac{p(1-x)}{p+(1-p)x}$.

b) En déduire une densité de Z.

5. *a)* Justifier que la fonction **Scilab** suivante fournit une simulation de la variable aléatoire Z de la question précédente.

```
function z = geomin(p)
    z = minu(grand(1, 1, 'geom', p))
endfunction
```

b) De quel nombre réel les instructions suivantes fournissent-elles une valeur approchée et pourquoi ?

```
p = 0.5 ;
R = [] ;
for k = 1:10000
    R = [R, geomin(p)]
end ;
disp(mean(R))
```

Exercice sans préparation 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit f_n la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ \ f_n(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{nt^2}\,dt - \int_x^1 \mathrm{e}^{-nt^2}\,dt.$$

1. Montrer que la fonction f_n est strictement monotone sur $[0,1]$.

2. Établir l'existence d'un unique réel de $[0,1]$, noté c_n, tel que $\displaystyle\int_0^{c_n} \mathrm{e}^{nt^2}\ dt = \int_{c_n}^1 \mathrm{e}^{-nt^2}\ dt$.

3. Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.