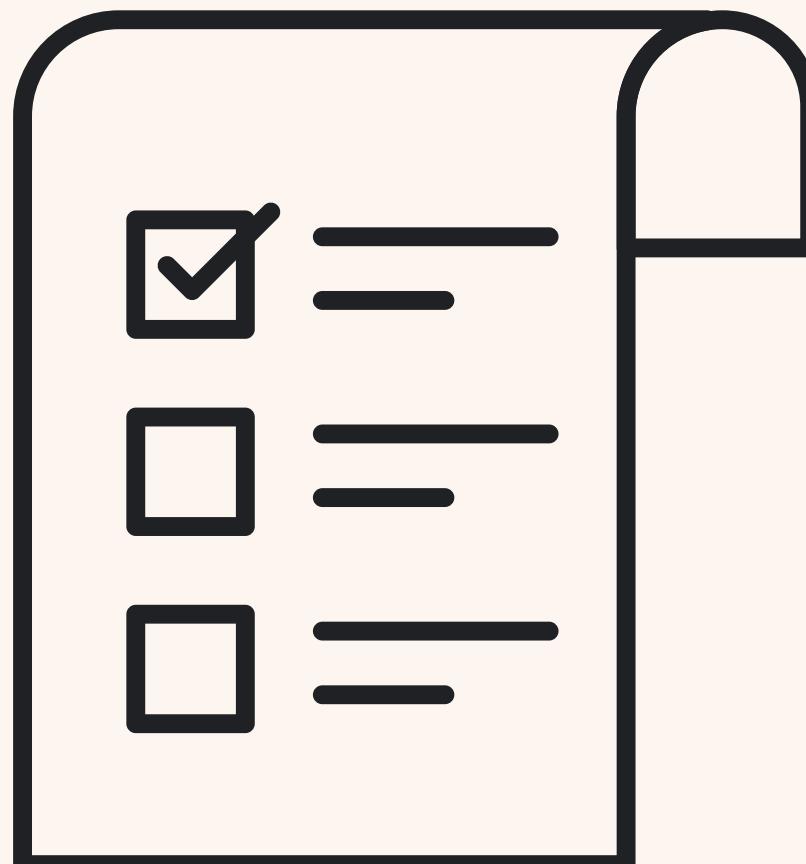


PROJET KNAPSACK

Par Ayoub | Mohamed | Simon | Quentin

SOMMAIRE



Introduction + Formulation

1 À 7

Modèle

8

Gorubi & D-Wave

13

Application

16

Résultat & Analyse

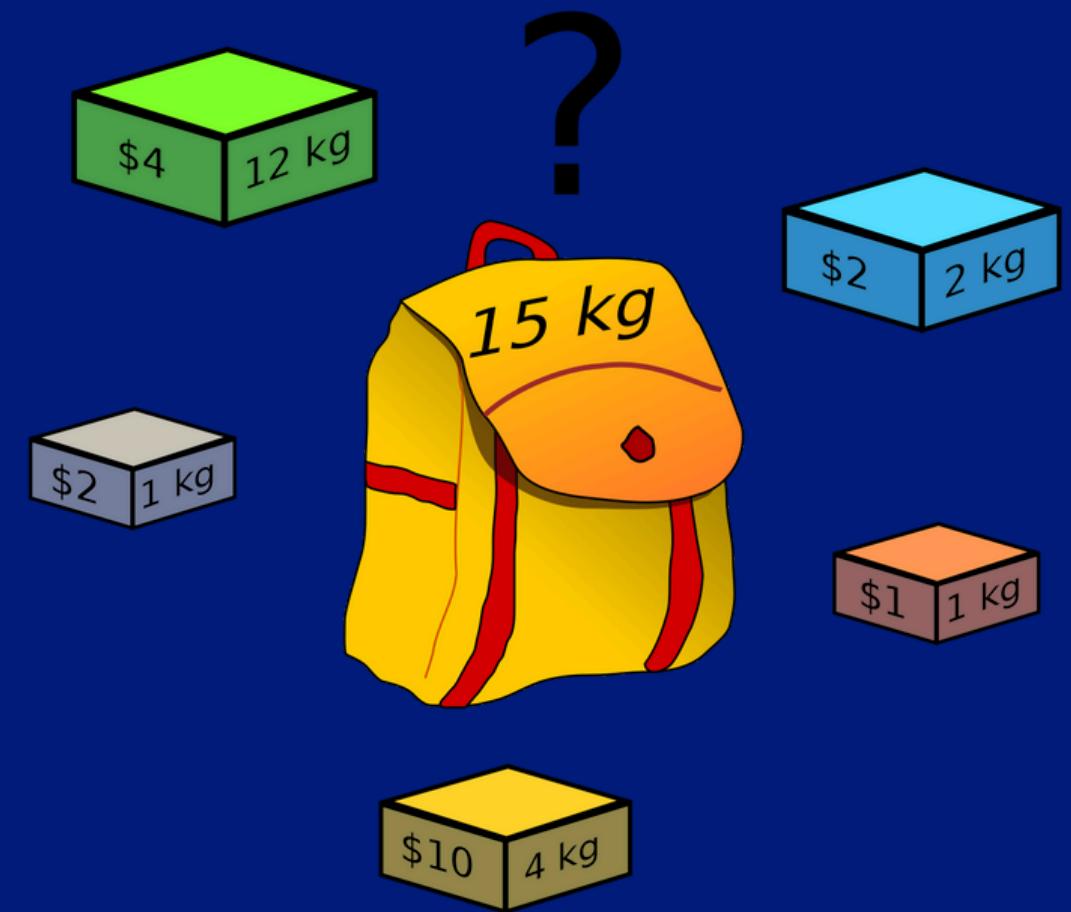
19

Conclusion

22

INTRODUCTION

Le Problème du sac à dos



N? ? ?

FORMULATION

Considérons le Problème du Sac à Dos (KP) avec N objets, chacun caractérisé par un poids w_i et une valeur v_i . Soit x_i une variable binaire indiquant si l'objet est inclus ($x_i=1$) ou non ($x_i=0$) dans le sac à dos. La capacité maximale du sac est W .
On peut représenter par un vecteur X :

Fonction Objectif

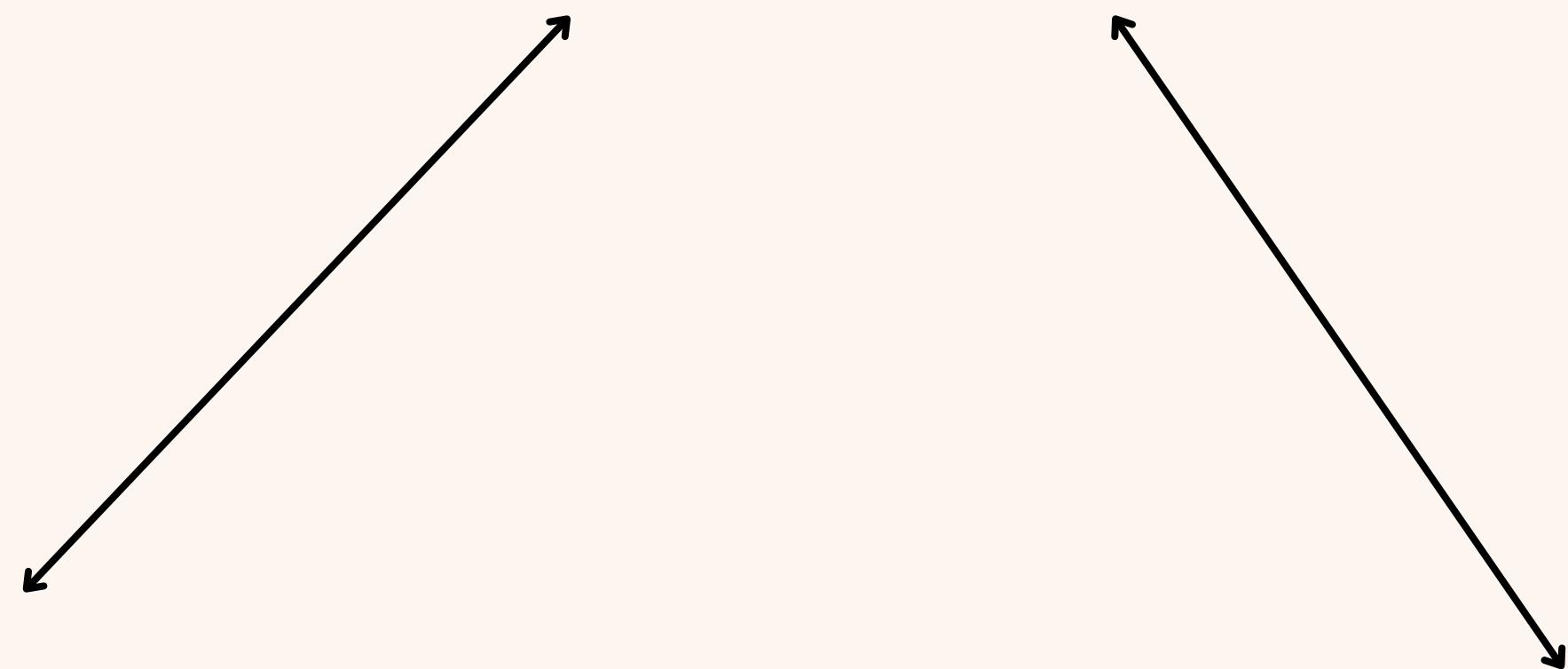
Contrainte de Poids :

$$z(X) = \sum_{\{i, x_i=1\}} p_i = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

$$w(X) = \sum_{i=1}^n x_i w_i \leq W$$

OBJECTIF

Utiliser les fonctions de la manière
la plus efficace en termes de temps



Négliger légèrement la qualité pour
avoir un temps plus performant

Complexité qui va varier

FORMULATION MATHÉMATIQUE

La formulation mathématique complète du KP est donnée par le problème d'optimisation suivant :

MAXIMISER $z(X)$:

SOUS LA CONTRAINTE DE POIDS $w(X)$:

où X_i est une variable binaire indiquant si l'objet est inclus ($X_i=1$) ou non ($X_i=0$).

$$z(X) = \sum_{\{i, x_i=1\}} p_i = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

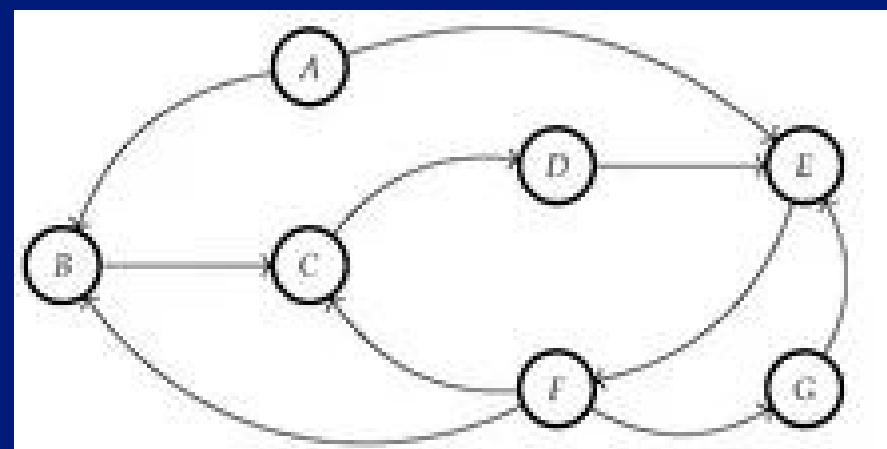
$$: w(X) = \sum_{\{i, x_i=1\}} w_i = \sum_{i=1}^n x_i w_i$$

CONTRAINTES

FORMULATION

MILP

Mixed Integer Linear
Programming (MILP)

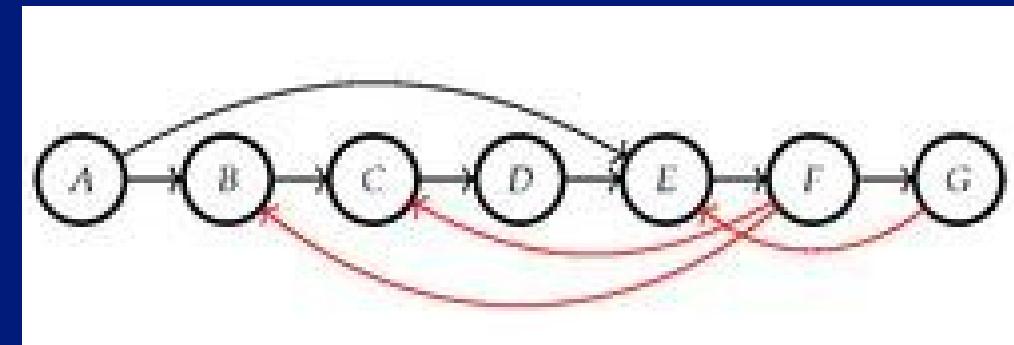


PASSAGE ENTRE
LES DEUX

Incorporation de la fonction
contrainte dans la fonction
objectif

QUBO

Quadratic Unconstrained
Binary Optimization



MILP

- méthode d'optimisation utilisée pour résoudre des problèmes qui impliquent à la fois des variables continues et discrètes.
- Il vise à maximiser ou minimiser une fonction objectif tout en respectant un ensemble de contraintes linéaires.
- L'objectif du MILP : Trouver les valeurs des variables qui optimisent une fonction objectif sous des contraintes données.

Minimiser $\mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{d}^T \mathbf{y}$
sous contraintes:
 $\mathbf{Ax} + \mathbf{By} \leq \mathbf{b}$
 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^m$

MILP

Exemple d'un fichier sous la forme MILP :

```
1 maximize
2   4 x0 + 6 x1 + 8 x2 + 3 x3 + 1 x4 + 4 x5 + 6 x6 + 8 x7 + 7 x8 + 6 x9 + 5 x10 + 6 x11 + 9 x12 + 8 x13 + 2 x14 + 3 x15 + 1 x16 + 4 x17 + 8 x18 + 5 x19
3 subject to
4   8 x0 + 6 x1 + 9 x2 + 8 x3 + 2 x4 + 8 x5 + 10 x6 + 8 x7 + 3 x8 + 2 x9 + 2 x10 + 3 x11 + 2 x12 + 4 x13 + 9 x14 + 10 x15 + 10 x16 + 2 x17 + 9 x18 + 5 x19 + 0 <= 30
5 binary
6   x0 x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 x9 x10 x11 x12 x13 x14 x15 x16 x17 x18 x19
7 end
8
```

QUBO

- Formalisme mathématique utilisé pour résoudre des problèmes d'optimisation
- Se concentre sur la minimisation d'une fonction objectif qui est exprimée de manière quadratique et basée sur des variables binaires.
- Variables prennent des valeurs de 0 ou 1, ce qui représente souvent des états ou des décisions dans diverses applications.

QUBO

Le problème QUBO (Quadratic Unconstrained Binary Optimization) est un problème NP-difficiles.

Le problème QUBO vise à trouver un vecteur binaire qui minimise la fonction f_Q parmi tous les vecteurs binaires possibles.

La complexité du QUBO réside dans le nombre exponentiel de vecteurs binaires à évaluer, car

$$|\mathbb{B}^n| = 2^n \quad \text{croît exponentiellement avec } n.$$

Parfois, le QUBO est formulé comme un problème de maximisation $f_Q = -f_Q$, ce qui revient à maximiser la fonction f_Q plutôt que de la minimiser.



GUROBI

SOLVEURS

D-Wave

Un solveur est un logiciel qui calcule la solution à un problème explicité sur un support informatique.

Les différents solveurs utilisés:

- Excel
- Gurobi
- D-Wave (Quantique)

NOTRE MODÈLE EXEMPLE

Application du Problème du Sac à Dos à la Sélection de Films pour une Clé USB :

Considérons le cas où nous avons une clé USB de 8 Go et une collection de 31 films, chacun avec un poids W_i (la taille du fichier en Go), une valeur V_i (Comprise entre 1 et 10) et X_i le choix de prendre ou non le film.

L'objectif est de maximiser la valeur totale des films que nous pouvons stocker sur la clé USB, en respectant la contrainte de poids imposée par la capacité maximale de la clé.

Données du Problème :

- LA CONTRAINTE : Capacité de la clé USB (W) : 8 Go
- Nombre de films (N) : 31
- Le choix en binaire (X_i) : 0 ou 1
- Poids de chaque film (W_i) : donné en Go
- Valeur de chaque film (V_i) : peut être subjective, représentant par exemple la popularité ou le plaisir personnel

APPLICATION DU PROBLEME

Numéro du film	Films (X)	Valeur (Vi) sur 10	Poids (Wi) en Go	Valeur / Poids (efficacité)	Valeur ligne (X*Vi)	Valeur sac à dos (Somme des X*Vi)	poids ligne(X*Wi)	poids sac à dos(somme des X*Wi)
	1	1	10	1	10	10	66	1
2	1	7	1,1	6,363636364	7			1,1
3	1	5	0,5	10	5			0,5
4	1	8	1,2	6,666666667	8			1,2
5	1	6	0,6	7,5	6			0,6
6	0	2	1,4	1,428571429	0			0
7	0	3	1,8	1,666666667	0			0
8	0	4	1	4	0			0
9	1	10	0,3	33,333333333	10			0,3
10	0	8	2	4	0			0
11	0	7	5	1,4	0			0
12	0	6	2,4	2,5	0			0
13	0	5	1	5	0			0
14	0	5	1,4	3,571428571	0			0
15	0	1	1,5	0,666666667	0			0
16	0	5	1,6	3,125	0			0
17	0	4	2,1	2,857142857	0			0
18	1	2	0,2	10	2			0,2
19	0	10	4	2,5	0			0
20	0	8	2,7	2,942942943	0			0
21	1	7	1,6	4,375	7			1,6
22	0	2	1	2	0			0
23	0	5	1	5	0			0
24	1	7	0,6	11,66666667	7			0,6
25	0	1	1,1	0,909090909	0			0
26	0	9	2,5	2,571428571	0			0
27	0	3	1,8	1,666666667	0			0
28	0	1	1,5	0,666666667	0			0
29	1	4	0,5	8	4			0,5
30	0	6	2	3	0			0
31	0	8	2,4	3,333333333	0			0

APPLICATION GUROBI

```
Optimize a model with 1 rows, 31 columns and 31 nonzeros
Model fingerprint: 0x6ce0f9c0
Variable types: 0 continuous, 31 integer (31 binary)
Coefficient statistics:
    Matrix range [2e-01, 5e+00]
    Objective range [1e+00, 1e+01]
    Bounds range [1e+00, 1e+00]
    RHS range [8e+00, 8e+00]
Found heuristic solution: objective 43.000000
Presolve removed 0 rows and 2 columns
Presolve time: 0.00s
Presolved: 1 rows, 29 columns, 29 nonzeros
Variable types: 0 continuous, 29 integer (27 binary)
Found heuristic solution: objective 66.000000
```

```
Root relaxation: objective 6.750000e+01, 1 iterations, 0.00 seconds (0.00 work units)
...
x27 = 0.00
x28 = 1.00
x29 = 0.00
x30 = 0.00
```

```
Optimize a model with 1 rows, 5000 columns and 5000 nonzeros
Model fingerprint: 0x94b341ae
Variable types: 0 continuous, 5000 integer (5000 binary)
Coefficient statistics:
    Matrix range [9e-04, 5e+00]
    Objective range [1e+00, 1e+01]
    Bounds range [1e+00, 1e+00]
    RHS range [8e+00, 8e+00]
Found heuristic solution: objective 67.000000
Presolve time: 0.04s
Presolved: 1 rows, 5000 columns, 5000 nonzeros
Variable types: 0 continuous, 5000 integer (5000 binary)
Found heuristic solution: objective 124.000000
```

```
Root relaxation: objective 7.640099e+02, 1 iterations, 0.00 seconds (0.00 work units)
```

Test de rapidité pour 5000 variables

Résolution du problème avec Gurobi

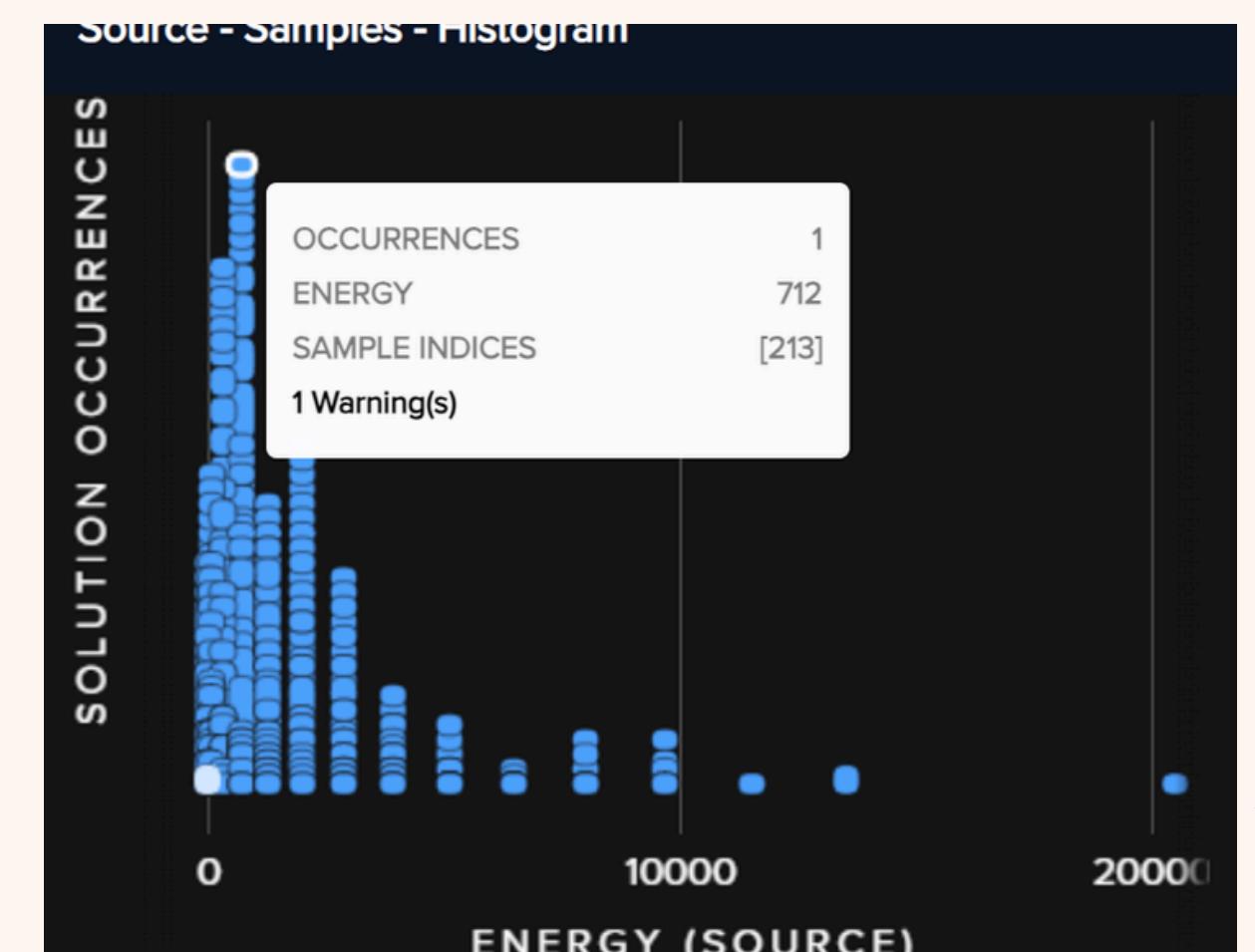
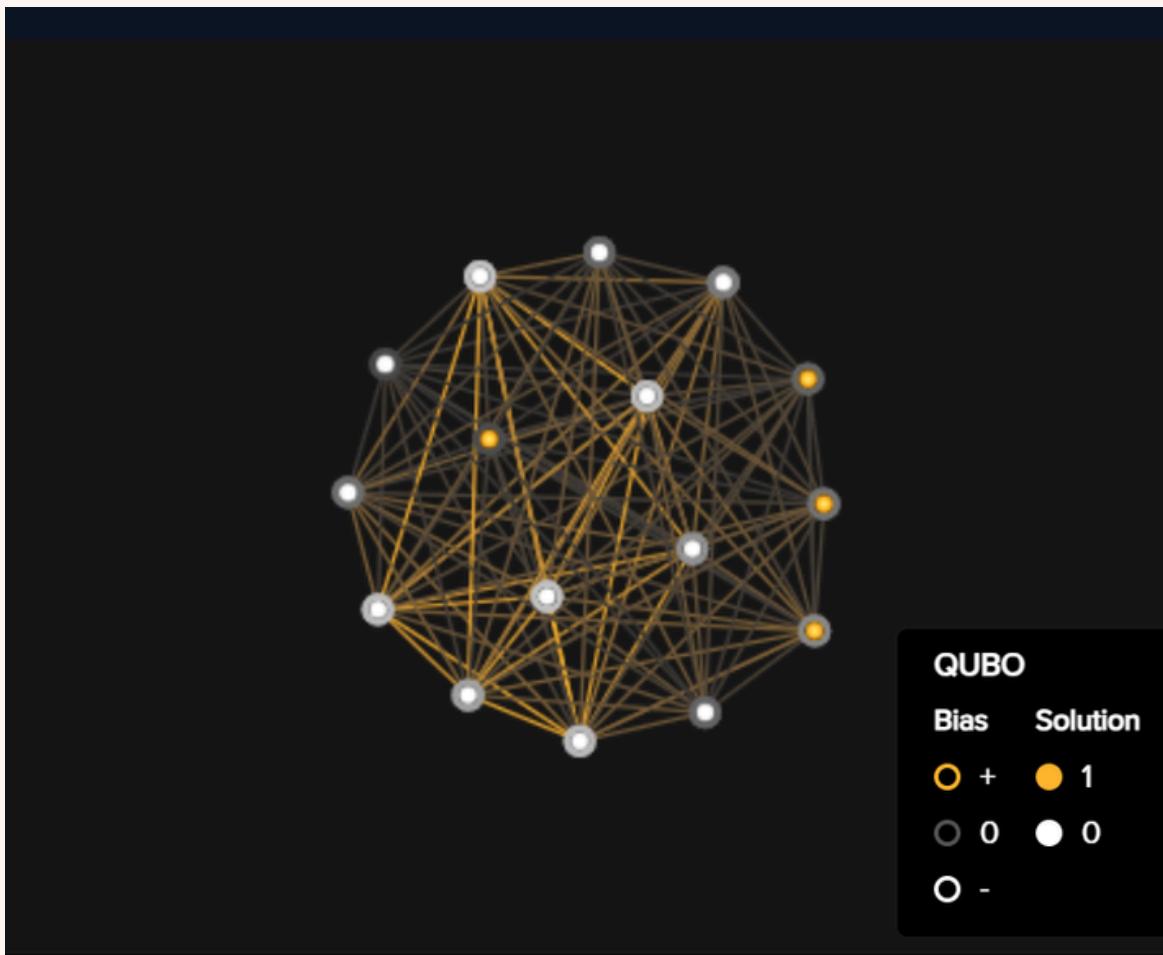
APPLICATION SUR D-WAVE

- D-Wave systems a été fondée en 1999
- Nous utilisons la machine advantage 2
- 1200 qubits (record)

APPLICATION SUR D-WAVE

Test pour un problème à 8 variables (1000 lectures)

```
[35] ✓ 8.8s Python
...
Meilleure solution: {0: 0, 1: 0, 2: 0, 3: 1, 4: 0, 5: 1, 6: 0, 7: 1, 'slack_0': 0, 'slack_1': 0, 'slack_2': 0, 'slack_3': 0}
Meilleure énergie: -26.0
Valeur totale: 26
Poids total: 10
```



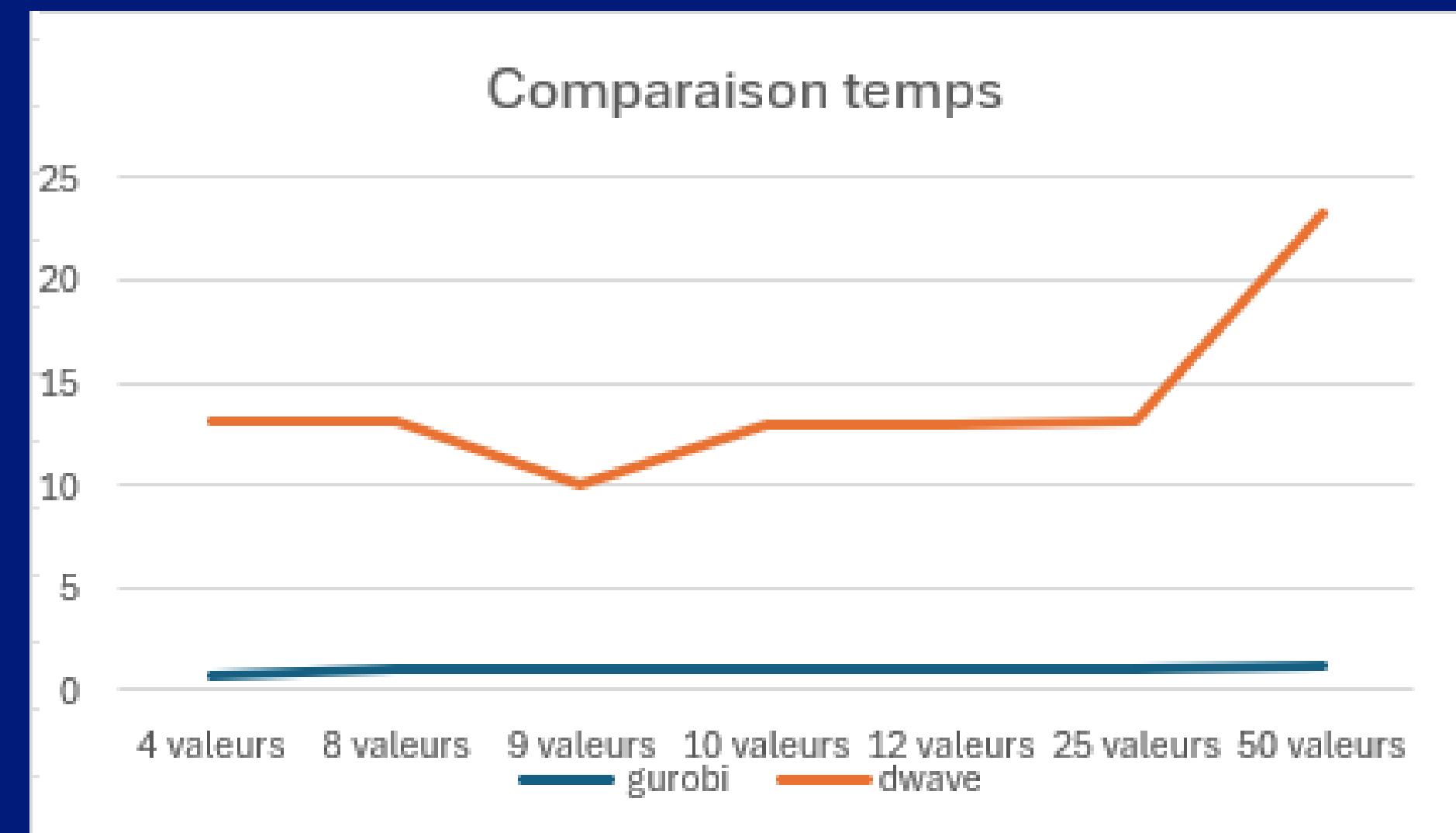


GUROBI

RÉSULTAT

D:wave

TEMPS_DE_REPONSE(10^-2s)	gurobi	dwave
4 valeurs	0,8	13,13
8 valeurs	1	13,12
9 valeurs	1	10,09
10 valeurs	1,1	13,02
12 valeurs	1,1	13,01
25 valeurs	1,1	13,2
50 valeurs	1,2	23,3





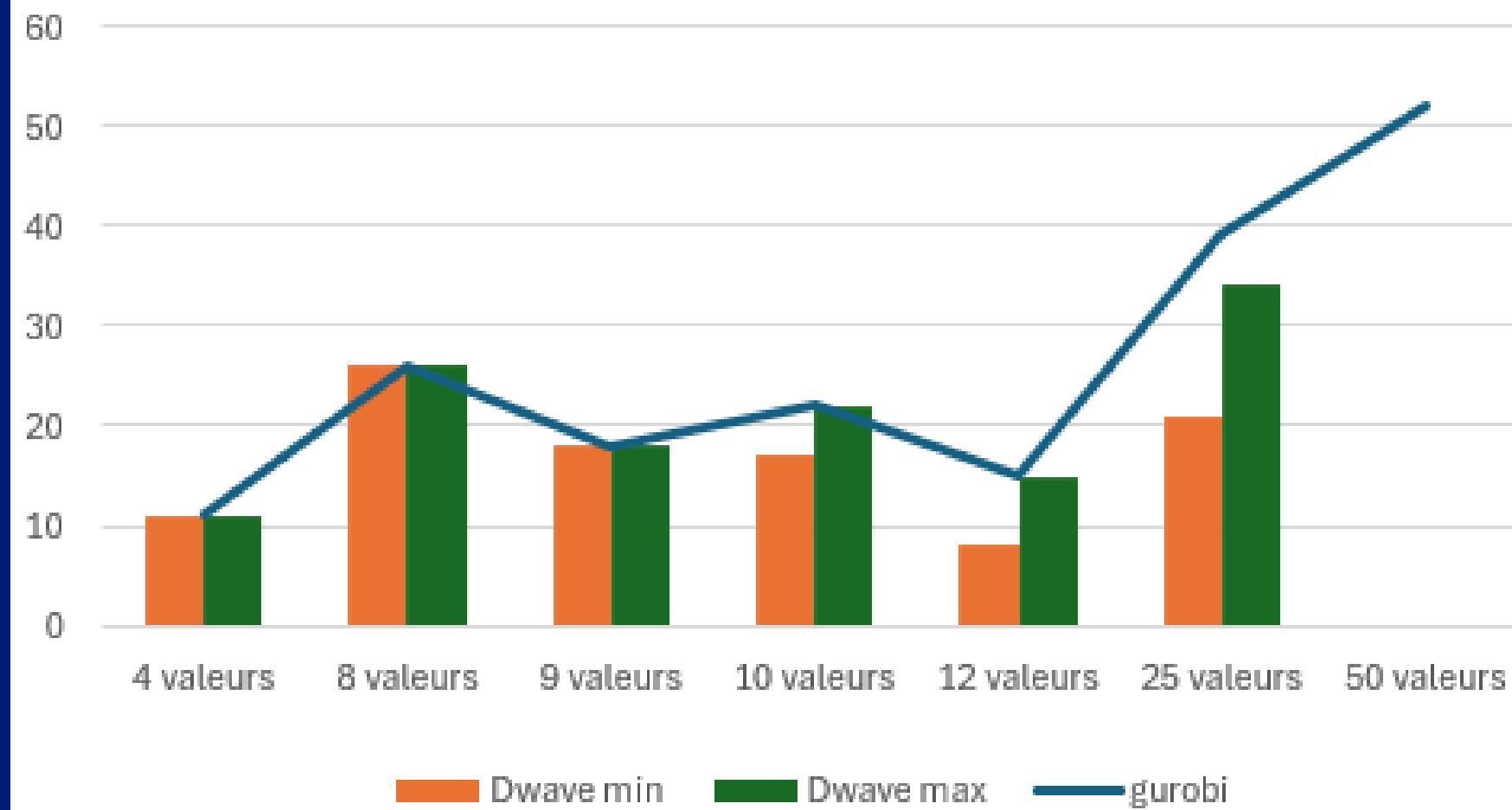
GUROBI

RÉSULTAT

D:wave

RESULTAT	gurobi	Dwave min	Dwave max	
4 valeurs	11		11	11
8 valeurs	26		26	26
9 valeurs	18		18	18
10 valeurs	22		17	22 2 essais
12 valeurs	15		8	15 3 essais
25 valeurs	39		21	34 6 essais
50 valeurs	52	resultat incoherent(depassemement du poids max)	aberrant	aberrant

Comparaison résultats



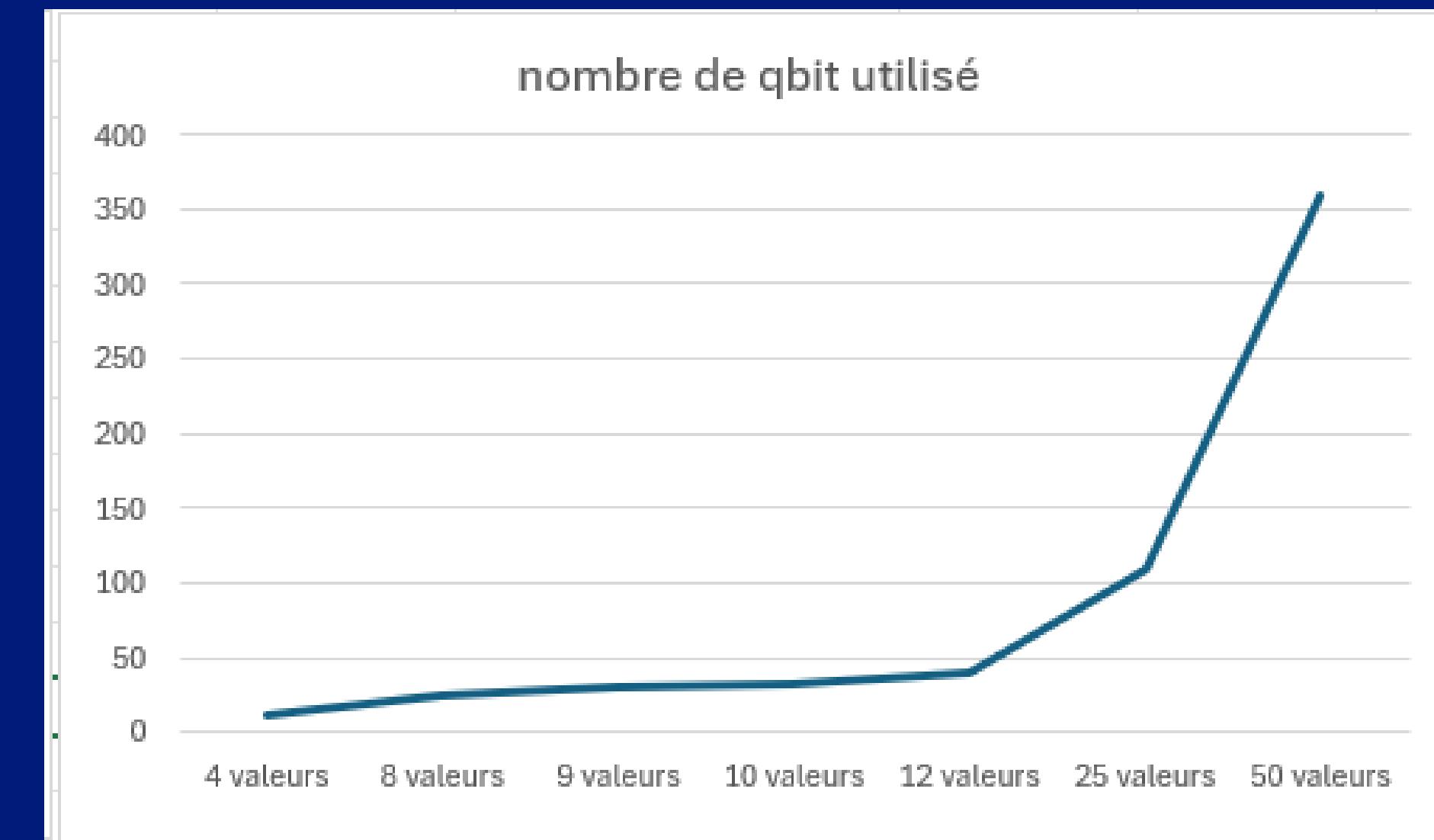


GUROBI

RÉSULTAT

D:wave

nombre de qbit utilisé	
4 valeurs	12
8 valeurs	25
9 valeurs	30
10 valeurs	32
12 valeurs	39
25 valeurs	109
50 valeurs	360



CONCLUSION

- Performances limitées mes résultats prometteurs
- Travail de recherche pour préparer les outils
- Complexité de compréhension du système D-Wave