Discrette math

28 жовтня 2022 р.

Зміст

Розділ 1

Введення в дискретну математику

1.1 Метод математичної індукції.

Аксіоматика Парно:

1) $1 \in \mathbb{N}$
2) $a \in \mathbb{N} \Rightarrow S(a) \in \mathbb{N}$
3) $\nexists a \in \mathbb{N} : S(a) = 1$
4) $S(a) = C \wedge S(b) = c \Leftrightarrow a = b$
5) $P(1) \wedge P(k) \Rightarrow P(S(k)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : P(n)$

де S — функція наступного числа ($S(x) = x + 1$), Р — предикат, $P(1)$ — база індукції, $P(S(k))$ — перехід.

Метод математичної індукції:

1) Перевірии, що твердження виконується для 1. 2) Припустити, що твердження виконується для деякого k, довести, що воно виконується для $k + 1$.

Приклад 1.1.

1. $n^3 + 5n \vdots 6$ для будь якгого n.
   (а) $n = 1, 1^3 + 5 = 6 \vdots 6$.
   (б) Нехай вірно для k, тоді $k^3 + 5k \vdots 6$. Доведемо, що $(k + 1)^3 + 5(k + 1) \vdots 6$. ► $k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 = (k^3 + 5k) + (1 + 5) + 3k(k + 1)$, де $(k^3 + 5k) \vdots 6$, $(1 + 5) \vdots 6$, $3k(k + 1) \vdots 6$

◄

2. Довести, що $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$.
   (а) $n = 1, 1^2 = \dfrac{1(1 + 1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$.
   (б) Нехай вірно для k, тоді $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = \dfrac{k(k + 1)(2k + 1)}{6}$. Доведемо, для $(k+1)$. ► $1^2+2^2+3^2+...+(k+1)^2 = \dfrac{(k + 1)((k + 1) + 1)(2(k + 1) + 1)}{6} = \dfrac{(k + 1)(k + 2)(2k + 3)}{6}$
   $\dfrac{k(k + 1)(2k + 1)}{6} + (k + 1) = \dfrac{(k + 1)(k + 2)(2k + 3)}{6}$

$(k+1)(k+2)(2k+3)+6k^2+12k+6 = (k^2+3k+2)(2k+3) = (k^2+k)(2k+1)+6k^2+12k+6 = 2k^3+3k^2+6k^2+9k+4k+6 = 2k^3+k^2+2k^2+k+6k^2+12k+6$

◄

3. Довести, що для довільного $n \geqslant 3 2^n > 2n+1$.

   (а) $n = 3, 2^3 > 7$.

   (б) Нехай вірно для k, тоді $2^k > 2k+1$. Доведемо, що $2^{k+1} > 2(k+1)+1$.
   ► $2^{k+1}+1 = 2k+3 = (2k+1)+2$
   $2^k+2 > (2k+1)+2, 2^{k+1} > 2^k+2, 2^k > 2, k \geqslant 3$

◄

1.2 Теорія множин

Означення 1.1. Множина (*set*) — це певна сукупність об'єктів, які ми можемо розрізнити між собою, які не повторюються, та об'єднані в одне ціле нашим бажанням.

Способи подання множин:

1. Явний, $A = \{a, b, ..., z\}$.

2. Не явний, нехай $P(x)$ — певна властивість (предикат), $X = \{x : P(x)\} = \{x \mid P(x)\}$.

3. Графічний (діаграма Ойлера Венна)

Стандартні множини:

- $\varnothing$ — порожня множина.
- $\mathbb{U}$ — універсум (всі об'єкти).
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ —натуральні числа (не 0).
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ — усі невід'ємні цілі числа.
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, ...\}$ — усі цілі числа.
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ — раціональні числа.
- $\mathbb{R}$ — дійсні числа.
- $\mathbb{C}$ — комплексні числа.

Деякі позначення:

- Належність $a \in A$.
- Не належність $a \notin A$.
- Включення $A \subseteq B$ (всі елементи A належать B).
  $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (\forall a \quad a \in A \Rightarrow a \in B)$.
- Строге включення $A \subset B$ (всі елементи A належать B).
  $(A \subset B) \Leftrightarrow (A \subseteq B)\&(\exists b \in B : b \notin A)$.
- Рівність $A = B$, якщо A і B складається з однакових елементів.
  $(A = B) \Leftrightarrow (A \subseteq B)\&(B \subseteq A)$.

Операції над множинами:

1. Об'єднання:
   $C = A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$.
2. Перетин:
   $D = A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$.
3. Різниця:
   $E = A \setminus B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$.
4. Симетрична різниця:
   $F = A\delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$.
5. Доповнення (до універсуму $\mathbb{U}$):
   $\overline{A} = \{x : x \notin A\}$.

Парадокс Бертрана:

Нехай $Y = \{X : X \notin X\}$, де X — це множина множин і/чи елементів, що не належить собі. Тоді, з'являється питання $Y \in Y$?

1.3 Алгебраїчні властивості операцій над множинами

1. Інволютивність
2. Комутативність
3. Асоціативність
4. Дистрибутивність
5. Правило поглинання
6. Закон Деморгана
7. Інші