Algebra and geometry

5 вересня 2022 р.

Зміст

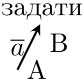
Розділ 1

Векторна алгебра

1.1 Вектори на прямій, на площині, у просторі

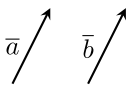
Означення 1.1. **Вектор** — це направлений відрізок прямої.

Вектор повністю задається довжиною та напрямком. Також вектор можна задати, вказавши його початок і кінець.



Вектори позначаються: $\overline{AB}, \overline{a}$, а їх довжини — $|\overline{AB}|$, $|\overline{a}|$.

Означення 1.2. Два **вектори рівні**, якщо їх довжини і напрямки співпадають.



$\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \upuparrows \overline{b}$ (напрямки співпадають) та $|\overline{a}| = |\overline{b}|$ (довжини співпадають).

Означення 1.3. **Колінеарні вектори** (паралельні вектори) ($\overline{a} \parallel \overline{b}$) — це вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Серед них будемо розрізняти вектори одного напрямку: $\overline{a} \upuparrows \overline{b}$, та протилежного напрямку: $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$.

Означення 1.4. **Нульовий вектор** (нуль - вектор) – це вектор нульової довжини, тобто вектор, кінець і початок якого співпадають, $|\overline{0}| = 0$. Буде зручно вважати нульовий вектор вектором довільного напрямку, тобто нульовий вектор є колінеарним будь-якому вектору.

Означення 1.5. Вектор $\overline{a}'$ — **протилежний вектор** до вектора $\overline{a}$, якщо $\overline{a}' \uparrow\downarrow \overline{a}$ і $|\overline{a}'| = |\overline{a}|$, тобто $\overline{a}' = -\overline{a}$.

Означення 1.6. Вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots$ — це **компланарні вектори**, якщо вони лежать в одній площині або паралельні одній площині.

1.2 Лінійні операції над векторами

Множення вектора на скаляр

Означення 1.7. **Добуток** вектора $\overline{a} \neq \overline{0}$ і числа $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha\overline{a})$ — це вектор $\overline{b} = \alpha\overline{a}$, який задовольняє такі умови:

1) $\overline{b}$ колінеарний вектору $\overline{a}$

2) $|\overline{b}| = |\alpha||\overline{a}|$

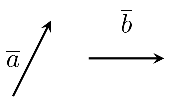
3) $\overline{b} \upuparrows \overline{a}$ — однаково направлені, якщо $\alpha > 0$, і $\overline{b} \uparrow\downarrow \overline{a}$ – протилежно направлені, якщо $\alpha < 0$.

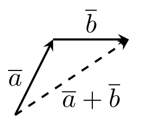
Додавання векторів

Означення 1.8. **Сума векторів** $\overline{a}$ і $\overline{b}$, $(\overline{a} + \overline{b})$ — це вектор, який з'єднує початок вектора $\overline{a}$ з кінцем вектора $\overline{b}$ за умови, що вектор $\overline{b}$ відкладено від кінця вектора $\overline{a}$.

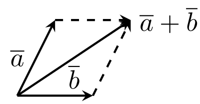
Цей спосіб додавання векторів — це **правило трикутника**.

Два вектори можна додати і за іншим правилом, яке має назву — **правило паралелограма**: сумою двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, відкладених від спільного початку, є вектор, який збігається з діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$ як на сторонах. Початки векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ та $\overline{a} + \overline{b}$ співпадають.



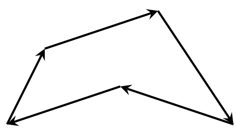


Правило трикутника



Правило паралелограма

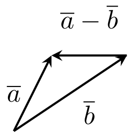
Використовуючи послідовно правило трикутника, можна побудувати суму скінченної кількості довільних векторів. Якщо кінець останнього вектора співпадає з початком першого, то сумою векторів є нульовий вектор: $\overline{0}$.



Віднімання векторів

Означення 1.9. Різниця векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, $(\overline{a}-\overline{b})$ — це вектор $\overline{c}$, який в сумі з вектором $\overline{b}$ дає вектор $\overline{a}$, тобто $\overline{b}+\overline{c}=\overline{a}$.

Очевидно, що $\overline{c}=\overline{a}+(-\overline{b})$.



$\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$

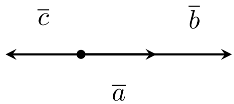
1.3 Властивості лінійних операцій, аксіоми векторної алгебри

1. $(\alpha\beta)\overline{a}=\alpha(\beta\overline{a})$ — асоціативність відносно множення на скаляр.
2. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ — комутативність додавання.
3. $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$ — асоціативність додавання.
4. $\left.\begin{array}{c}(\alpha+\beta)\overline{a}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}\\ \overline{a}(\alpha+\beta)=\overline{a}\alpha+\overline{a}\beta\end{array}\right\}$ — дистрибутивність.
5. $\exists!\overline{0}:\forall\overline{a}:\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$ — існування єдиного нуля.
6. $\forall\overline{a}\exists!\overline{a}':\overline{a}'+\overline{a}=\overline{0}$ — існування протилежного вектора.
7. $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$

1.4 Базис на прямій, на площині, у просторі

Розглянемо множину векторів, колінеарних вектору $\overline{a}\neq\overline{0}$. Позначимо її E^1.

Нехай $\overline{a},\overline{b},\overline{c}\in E^1$.



Теорема 1.1. $\forall\overline{b}\in E^1\exists$ *дійсне число* α *таке, що* $\overline{b}=\alpha\overline{a}$, *причому це представлення єдине.*

► Доведемо єдиність даного представлення методом від супротивного.
Нехай $\overline{b} = \tilde{\alpha}\overline{a}$
Тоді $\overline{0} = \overline{b} - \overline{b} = \tilde{\alpha}\overline{a} - \alpha\overline{a} = (\tilde{\alpha} - \alpha)\overline{a} \Rightarrow \tilde{\alpha} - \alpha = 0 \Rightarrow \tilde{\alpha} = \alpha$
Вкажемо значення коефіцієнта α.
Якщо $\overline{a} \upuparrows \overline{b}$, то $\alpha = \dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}$.
Дійсно: $|\alpha\overline{a}| = \left|\dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}\right| |\overline{a}| = \dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}|\overline{a}| = |\overline{b}|$, $\alpha\overline{a} \upuparrows \overline{b}$.
Якщо ж $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$, то $\alpha = -\dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}$ (доведення аналогічне).

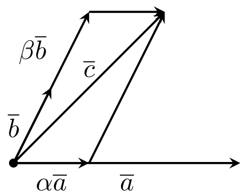
◄

Нехай $\overline{a} \not\parallel \overline{b}$ (тому $\overline{a} \neq \overline{0}$, $\overline{b} \neq \overline{0}$). Розглянемо множину векторів, компланарних векторам $\overline{a}$ та $\overline{b}$, позначимо її E^2. Нехай $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in E^2$.

Теорема 1.2. $\forall \overline{c} \in E^2$ $\exists!$ *дійсні* α, β, *такі, що* $\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$.

► Проведемо доведення графічно.

З кінця вектору $\overline{c}$ проведемо дві прямі паралельно векторам $\overline{a}$ і $\overline{b}$ відповідно до перетину з цими векторами чи прямими, на яких вони лежать. Отримали паралелограм, дві сторони якого дорівнюють відповідно $\alpha\overline{a}$ і $\beta\overline{b}$ (за теоремою 1.1). Діагоналлю цього паралелограма є вектор $\overline{c}$, тобто $\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$. Єдиність коефіцієнтів α та β випливає з двох умов:



1) існує лише одна точка перетину непаралельних прямих,

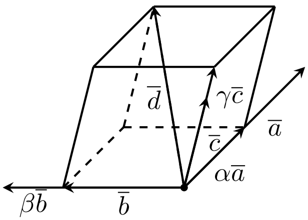
2) за теоремою 1.1 константи α і β визначаються однозначно.

◄

Нехай E^3 — множина всіх векторів у просторі, причому $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ — некомпланарні ($\overline{a} \neq \overline{0}, \overline{b} \neq \overline{0}, \overline{c} \neq \overline{0}$).

Теорема 1.3. $\forall \overline{d} \in E^3, \exists!\ \alpha, \beta, \gamma : \overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$.

▶



Із кінця вектора $\overline{d}$ проведемо три площини, паралельні парам векторів $(\overline{b}, \overline{c})$, $(\overline{a}, \overline{c})$, $(\overline{a}, \overline{b})$. Ці площини перетнуть прямі, на яких лежать $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ в єдиних точках. За теоремою 1.1 отримаємо нові вектори $\alpha\overline{a}, \beta\overline{b}, \gamma\overline{c}$, а вектор $\overline{d}$ – це діагональ паралелепіпеда, на них побудованого, тобто $\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$, що і треба було довести.

◀

Зауваження. Базисом у множині E^1 може слугувати довільний ненульовий вектор, базисом у E^2 – впорядкована пара неколінеарних векторів, а в E^3 — впорядкована трійка некомпланарних векторів. Вектору $\overline{b}$ було поставлено у відповідність число α; вектору $\overline{c}$ – числа α і β; вектору $\overline{d}$ – числа α, β, γ. Ці числа називаються — коефіцієнти розкладу векторів $\overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ за базисами $\overline{a}$; $\overline{a}, \overline{b}$; $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ просторів E^1, E^2 і E^3 відповідно.

Означення 1.10. Коефіцієнти розкладу вектора $\overline{a}$ за базисом $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ...$ — це числа $\alpha_1, \alpha_2, ... \in \mathbb{R}$, такі, що $\overline{a} = \alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ...$

1.5 Декартів прямокутний базис

Означення 1.11. Впорядкована трійка некомпланарних векторів $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ називається правою (**права трійка векторів**), якщо з кінця вектора $\overline{c}$ поворот від $\overline{a}$ до $\overline{b}$, менший за 180°, тобто відбувається проти годинникової стрілки.

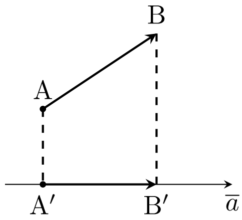
Означення 1.12. Трійка векторів $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ утворює **декартів правий прямокутний базис**, якщо:

1. $\overline{i} \perp \overline{j}, \overline{j} \perp \overline{k}, \overline{k} \perp \overline{i}$
2. $|\overline{i}| = |\overline{j}| = |\overline{k}| = 1$
3. $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ — права трійка

1.6 Проекція вектора на вектор (або на вісь)

Нехай задано $\overline{a} \neq \overline{0}$.

Означення 1.13. Проекція вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{a}$ називається довжина відрізка $A'B'$ між основами перпендикулярів, опущених з точок A та B на вектор $\overline{a}$ (або напряму, на якій він лежить):



$$\text{пр}_{\overline{a}}\overline{AB} = \begin{cases} |\overline{A'B'}|, \text{ якщо } \overline{A'B'} \uparrow\uparrow \overline{a} \\ -|\overline{A'B'}|, \text{ якщо } \overline{A'B'} \uparrow\downarrow \overline{a} \end{cases}$$

Властивості проекції:

1. $\text{пр}_{\overline{a}}\alpha\overline{b} = \alpha\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b}$

2. $\text{пр}_{\overline{a}}(\overline{a} + \overline{b}) = \text{пр}_{\overline{a}}\overline{a} + \text{пр}_{\overline{a}}\overline{b}$

1.7 Множення векторів. Скалярний добуток двох векторів

Означення 1.14. Скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (позначається $\overline{a} \cdot \overline{b}$, $\overline{a}\overline{b}$ чи $(\overline{a}, \overline{b})$) — це число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними: $(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}| \cos\varphi$, де $\varphi = \widehat{(\overline{a}, \overline{b})}$.

Алгебраїчні властивості скалярного добутку:

1. $(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$ — комутативність.

2. $\left.\begin{array}{l} (\alpha\overline{a}, \overline{b}) = \alpha(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{a}, \alpha\overline{b}) \\ (\overline{a} + \overline{a}', \overline{b}) = (\overline{a}, \overline{b}) + (\overline{a}', \overline{b}) \\ (\overline{a}, \overline{b} + \overline{b}') = (\overline{a}, \overline{b}) + (\overline{a}, \overline{b}') \end{array}\right\}$ — лінійність.

Геометричні властивості скалярного добутку:

1. $(\overline{a}, \overline{b}) = 0 \Leftrightarrow \overline{a} \perp \overline{b}$.

2. $(\overline{a}, \overline{a}) = |\overline{a}|^2 \Rightarrow |\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})}$.

1.8 Скалярний добуток в координатах

Нехай $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ – це фіксований базис в просторі E^3, $\overline{x}, \overline{y} \in E^3$. Тоді:

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3$$
$$\overline{y} = y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + y_3\overline{e}_3$$

Обчислимо скалярний добуток цих векторів:
$(\overline{x}, \overline{y}) = (x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3, \overline{y}) = (x_1\overline{e}_1, \overline{y}) + (x_2\overline{e}_2, \overline{y}) + (x_3\overline{e}_3, \overline{y}) =$
$x_1(\overline{e}_1, y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + y_3\overline{e}_3) + x_2(\overline{e}_2, y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + y_3\overline{e}_3) + x_3(\overline{e}_3, y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + y_3\overline{e}_3) =$
$x_1y_1(\overline{e}_1, \overline{e}_1) + x_1y_2(\overline{e}_1, \overline{e}_2) + x_1y_3(\overline{e}_1, \overline{e}_3) + x_2y_1(\overline{e}_2, \overline{e}_1) + x_2y_2(\overline{e}_2, \overline{e}_2) + x_2y_3(\overline{e}_2, \overline{e}_3) +$
$x_3y_1(\overline{e}_3, \overline{e}_1) + x_3y_2(\overline{e}_3, \overline{e}_2) + x_3y_3(\overline{e}_3, \overline{e}_3) = x_1y_1(\overline{e}_1, \overline{e}_1) + (x_1y_2 + x_2y_1)(\overline{e}_1, \overline{e}_2) +$
$(x_1y_3 + x_3y_1)(\overline{e}_1, \overline{e}_3) + x_2y_2(\overline{e}_2, \overline{e}_2) + (x_2y_3 + x_3y_2)(\overline{e}_2, \overline{e}_3) + x_3y_3(\overline{e}_3, \overline{e}_3)$.

У частковому випадку, коли $\overline{e}_1 = \overline{i}, \overline{e}_2 = \overline{j}, \overline{e}_3 = \overline{k}$, маємо: $(\overline{e}_1, \overline{e}_2) = (\overline{e}_2, \overline{e}_3) = (\overline{e}_3, \overline{e}_1), (\overline{e}_i, \overline{e}_j) = 1$, де $i = 1, 2, 3$.

$$(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Якщо $\overline{a} = (x, y, z)$, то $|\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1.9 Нормування вектора

Означення 1.15. Нехай $\overline{a} \neq \overline{0}$. **Орт-вектор** вектора $\overline{a}$ — це вектор $\overline{a}_o$, такий, що $\overline{a}_o \uparrow\uparrow \overline{a}$ і $|\overline{a}_o| = 1$.

Означення 1.16. Нормування вектора $\overline{a}$ — це процес отримання орт-вектора $\overline{a}_o$, $\overline{a}_o = \dfrac{1}{|\overline{a}|}\overline{a}$

Якщо $\overline{a} = (x, y, z)$, то

$$\overline{a}_o = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right).$$

Геометричний сенс координат орт-вектора $\overline{a}_o$ у декартовій системі координат: $\overline{a}_o = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ де, $\alpha = (\widehat{\overline{a}, OX}) = (\widehat{\overline{a}_o, OX})$, $\beta = (\widehat{\overline{a}, OY}) = (\widehat{\overline{a}_o, OY})$, $\gamma = (\widehat{\overline{a}, OZ}) = (\widehat{\overline{a}_o, OZ})$.

Означення 1.17. Косинуси кутів, які утворює вектор (або його орт) з осями координат — це **напрямні косинуси**.

Знайдемо косинус кута α:

$$\cos\alpha = \frac{(\overline{a}, \overline{i})}{|\overline{a}||\overline{i}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Твердження 1.1. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

Формула для довжини проекції вектора:

$$x = |\overline{a}|\cos\alpha = \text{пр}_{\overline{i}}\overline{a}$$

1.10 Векторний добуток двох векторів

Означення 1.18. Векторний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ $[\overline{a},\overline{b}]$ — це вектор $\overline{c}$, що задовольняє умови:

1. $\overline{c}\perp\overline{a}$, $\overline{c}\perp\overline{b}$
2. $|\overline{a}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi$, $\varphi = (\widehat{\overline{a},\overline{b}})$
3. $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — права трійка

Зауваження. Оскільки $\overline{c}\perp\overline{a}$, $\overline{c}\perp\overline{b}$, то $\overline{c}$ перпендикулярний площині векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

Алгебраїчні властивості векторного добутку:

1) $[\overline{a},\overline{b}] = -[\overline{b},\overline{a}]$

2) $[\alpha\overline{a},\overline{b}] = \alpha[\overline{a},\overline{b}] = [\overline{a},\alpha\overline{b}]$

3) $[\overline{a}+\overline{b},\overline{c}] = [\overline{a},\overline{c}] + [\overline{b},\overline{c}]$

4) $[\overline{a},\overline{b}+\overline{c}] = [\overline{a},\overline{b}] + [\overline{a},\overline{c}]$

Доведення:

► 1) Нехай $[\overline{a},\overline{b}] = \overline{c}$, $[\overline{b},\overline{a}] = \overline{d}$. Тоді: $\overline{c}\perp\overline{a}$ і $\overline{c}\perp\overline{b}$, $\overline{d}\perp\overline{b}$ і $\overline{d}\perp\overline{a}$, тобто вектори $\overline{c}$ і $\overline{d}$ перпендикулярні до площини, в якій лежать вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$, отже, $\overline{c}\parallel\overline{d}$.

$|\overline{c}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi = |\overline{d}|$, де $\varphi = (\widehat{\overline{a},\overline{b}})$.

$\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — права трійка; $\overline{b}$, $\overline{a}$, $\overline{d}$ — також права трійка $\Rightarrow$ $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{d}$ — ліва трійка, тому вектори $\overline{c}$ та $\overline{d}$ протилежно направлені.

Отже, вектори $\overline{c}$ та $\overline{d}$ колінеарні, мають однакову довжину та протилежно направлені. Тому $\overline{c} = -\overline{d}$.

2) Якщо $\alpha = 0$ або $\overline{a}\parallel\overline{b}$, то рівності очевидні: $[\alpha\overline{a},\overline{b}] = \alpha[\overline{a},\overline{b}] = \overline{0}$. Нехай $\alpha < 0$, $[\overline{a},\overline{b}] = \overline{c}$, $\varphi = (\widehat{\overline{a},\overline{b}})$, $[\alpha\overline{a},\overline{b}] = \overline{d}$. Тоді:

$|\alpha\overline{c}| = |\alpha[\overline{a},\overline{b}]| = |\alpha||[\overline{a},\overline{b}]| = -\alpha|\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi$.

$|[\alpha\overline{a},\overline{b}]| = |\alpha\overline{a}||\overline{b}|\sin(\widehat{\alpha\overline{a},\overline{b}}) = |\alpha||\overline{a}||\overline{b}|\sin(\pi-\varphi) = -\alpha|\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi$.

$\overline{c}\perp$ площині, в якій лежать $\overline{a}$ і $\overline{b}$ $\Rightarrow$ $\overline{c}\perp$ площині, в якій лежать $\alpha\overline{a}$ і $\overline{b}$.

$\overline{d} \perp$ площині, в якій лежать $\alpha\overline{a}$ і $\overline{b}$, отже, $\overline{c} \parallel \overline{d}$.

$\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — права трійка $\alpha\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — ліва трійка, $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\alpha\overline{c}$ — ліва трійка.

$\alpha\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{d}$ — права трійка $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{d}$ — ліва трійка; отже, вектори $\alpha\overline{c}$ та $\overline{d}$. однаково направлені.

Враховуючи однакову довжину векторів $\alpha\overline{c}$ та $\overline{d}$, маємо $\alpha\overline{c} = \overline{d}$ або $[\alpha\overline{a}, \overline{b}] = \alpha[\overline{a}, \overline{b}]$.

3), 4) — очевидно.

◀

Геометричні властивості векторного добутку:

1) $[\overline{a}, \overline{b}] = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{a} \parallel \overline{b}$

2) $|[\overline{a}, \overline{b}]| = S_{\Diamond\overline{a}\overline{b}}$, де $S_{\Diamond\overline{a}\overline{b}}$ — площа паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$, як на сторонах

Доведення:

▶ 1) $|[\overline{a}, \overline{b}]| = |\overline{a}||\overline{b}| \sin\varphi = 0 \Rightarrow \overline{a} = \overline{0}$ або $\overline{b} = \overline{0}$, або $\sin\varphi = 0 \Rightarrow \overline{a} \parallel \overline{b}$.

Якщо $\overline{a} \parallel \overline{b}$, то $\sin\varphi = 0$, і $|[\overline{a}, \overline{b}]| = 0 \Rightarrow [\overline{a}, \overline{b}] = \overline{0}$.

2) $|[\overline{a}, \overline{b}]| = |\overline{a}||\overline{b}| \sin\varphi = |\overline{a}|h = S_{\Diamond\overline{a}\overline{b}}$.

◀

Твердження 1.2. $[\overline{a}, \overline{a}] = 0$.

1.11 Векторний добуток в координатах

Нехай в просторі E^3 зафіксовано базис $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$, $\overline{x}, \overline{y} \in E^3$, тоді

$$\overline{x} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}$$

$$\overline{y} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}$$

Знайдемо координати вектору $[\overline{x}, \overline{y}]$.

Зауважимо, що $[\overline{i}, \overline{j}] = \overline{k}$, $[\overline{j}, \overline{k}] = \overline{i}$, $[\overline{k}, \overline{i}] = \overline{j}$. Тоді:
$[\overline{i}, \overline{j}] = [x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}, x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}] = x_1x_2[\overline{i}, \overline{i}] + x_1y_2[\overline{i}, \overline{j}] + x_1z_2[\overline{i}, \overline{k}] + y_1x_2[\overline{j}, \overline{i}] + y_1y_2[\overline{j}, \overline{j}] + y_1z_2[\overline{j}, \overline{k}] + z_1x_2[\overline{k}, \overline{i}] + z_1y_2[\overline{k}, \overline{j}] + z_1z_2[\overline{k}, \overline{k}] = (x_1y_2 - x_2y_1)[\overline{i}, \overline{j}] + (x_1z_2 - x_2z_1)[\overline{i}, \overline{k}] + (y_1z_2 - y_2z_1)[\overline{j}, \overline{k}] = (x_1y_2 - x_2y_1)\overline{k} + (x_1z_2 - x_2z_1)\overline{j} + (y_1z_2 - y_2z_1)\overline{i} = (y_1z_2 - y_2z_1)\overline{i} + (x_1z_2 - x_2z_1)\overline{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\overline{k}$.

Задача 1.1. Знайти площу трикутника з вершинами $A(3,0,-1)$, $B(-2,4,1)$, $C(2,1,-3)$.

Розв'язання. $S = \dfrac{1}{2}|[\overline{AB}, \overline{AC}]|$. Оскільки $\overline{AB} = (-5,4,2), \overline{AC} = (-1,1,-2)$, то $[\overline{AB}, \overline{AC}] = -10\overline{i} - 12\overline{j} - \overline{k}$. Тоді $|[\overline{AB}, \overline{AC}]| = \sqrt{(-10)^2 + (-12)^2 + (-1)^2} = \sqrt{100+144+1} = \sqrt{245}$, і $S = \dfrac{1}{2}\sqrt{245}$

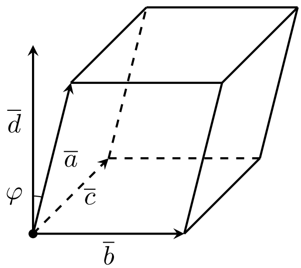
1.12 Мішаний добуток трьох векторів

Означення 1.19. Мішаний добуток векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ — це скалярний добуток $\overline{a}$ з векторним добутком векторів $\overline{b}$ і $\overline{c}$, тобто $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}])$.

Теорема 1.4. *Мішаний добуток векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда V_{nap}, побудованого на цих векторах, якщо вони складають праву трійку і дорівнює $-V_{nap}$, якщо $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – ліва трійка:*

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{cases} V_{nap}, & \text{якщо } \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \text{ — права трійка} \\ -V_{nap}, & \text{якщо } \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \text{ — ліва трійка} \end{cases}$$

► Розглянемо випадок, коли $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ — права трійка.



Нехай $[\overline{b}, \overline{c}] = \overline{d}$. Тоді $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ – права трійка. Позначимо $\varphi = \widehat{(\overline{a}, \overline{d})}$.

Тоді $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]) = (\overline{a}, \overline{d}) = |\overline{a}||\overline{d}|\cos\varphi = S_{\Diamond\overline{c}\overline{b}}|\overline{a}|\cos\varphi = S_{\Diamond\overline{c}\overline{b}}h = V_{\text{пар}}$, оскільки висота паралелепіпеда $h = |\overline{a}|\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right) = |\overline{a}|\cos\varphi$. У випадку, коли $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ — ліва трійка, доведення аналогічне.

◄

Алгебраїчні властивості:

1. $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{c}\overline{a}\overline{b} = \overline{b}\overline{c}\overline{a} = -\overline{b}\overline{a}\overline{c} = -\overline{c}\overline{b}\overline{a} = -\overline{a}\overline{c}\overline{b}$

2. $(\alpha\overline{a})\overline{b}\overline{c} = \alpha\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{a}(\alpha\overline{b})\overline{c} = \overline{a}\overline{b}(\alpha\overline{c})$

3. $$\begin{aligned} (\overline{a} + \overline{a}')\overline{b}\overline{c} &= \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}'\overline{b}\overline{c} \\ \overline{a}(\overline{b} + \overline{b}')\overline{c} &= \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}\overline{b}'\overline{c} \\ \overline{a}\overline{b}(\overline{c} + \overline{c}') &= \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}\overline{b}\overline{c}' \end{aligned}$$

Доведення:

► 1) випливає з того факту, що при циклічній перестановці векторів їх орієнтація не змінюється. А якщо в трійці векторів деякі два з них поміняти місцями, то її орієнтація змінюється.

2) випливає з лінійності скалярного і векторного добутків відносно множення на скаляр.

3) $(\overline{a}+\overline{a}')\overline{b}\overline{c} = (\overline{a}+\overline{a}', [\overline{b},\overline{c}]) = (\overline{a}, [\overline{b},\overline{c}]) + (\overline{a}', [\overline{b},\overline{c}]) = \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}'\overline{b}\overline{c}$

$\overline{a}(\overline{b}+\overline{b}')\overline{c} = (\overline{b}+\overline{b}')\overline{c}\overline{a} = \overline{b}\overline{c}\overline{a} + \overline{b}'\overline{c}\overline{a} = \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}\overline{b}'\overline{c}$.

Але $\overline{a}(\overline{b}+\overline{b}')\overline{a} = (\overline{a}, [\overline{b}+\overline{b}', \overline{c}]) = (\overline{a}, [\overline{b},\overline{c}] + [\overline{b}', \overline{c}])$.

Ця рівність справедлива $\forall \overline{a}$. Тому $[\overline{b}+\overline{b}', \overline{c}] = [\overline{b},\overline{c}] + [\overline{b}', \overline{c}]$, що доводить властивість 3 векторного добутку.

◄

Твердження 1.3. $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a}, [\overline{b},\overline{c}]) = ([\overline{a},\overline{b}], \overline{c})$.

1.13 Мішаний добуток в координатах

Нехай в просторі E^3 зафіксовано базис $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ і задано три вектори:

$\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\overline{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

Тоді $[\overline{b},\overline{c}] = (b_2c_3 - b_3c_2)\overline{i} - (b_1c_3 - b_3c_1)\overline{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\overline{k}$ та $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a}, [\overline{b},\overline{c}]) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$.

Задача 1.2. Чи можуть вектори $\overline{e}_1 = (1, -1, 0)$, $\overline{e}_2 = (2, 0, -2)$, $\overline{e}_3 = (3, 1, 6)$ слугувати базисом в просторі E^3?

Розв'язання. Якщо $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ — базис, то вони некомпланарні і об'єм паралелепіпеда, на них побудованого, не дорівнює нулю. Тобто, $\overline{e}_1\overline{e}_2\overline{e}_3 \neq 0$. Знайдемо мішаний добуток $\overline{e}_1\overline{e}_2\overline{e}_3$: $\overline{e}_1\overline{e}_2\overline{e}_3 = 0 + 0 + 6 + 0 + 2 + 12 = 20 \neq 0$. Це означає, що дані вектори можуть слугувати базисом в E^3.

Розділ 2

Визначники і лінійна залежність

2.1 Визначники другого і третього порядків

Означення 2.1. Матриця A, розміром $m \times n$ — це прямокутна таблицю чисел з m рядків та n стовпчиків:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Позначають матриці і в такий спосіб: $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m,\, j=1,\dots,n}$, де a_{ij} — це елемент матриці, що стоїть в i-му рядку та j-му стовпчику.

Нехай A – квадратна матриця другого порядку (тобто 2×2).

Означення 2.2. Визначник матриці (детермінант матриці) A другого порядку — це число, яке знаходиться за формулою:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1$$

Означення 2.3. Визначник матриці (детермінант матриці) A третього порядку — це число, яке знаходиться за формулою (правило "зірочки"):

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_3y_1z_2 + x_2y_3z_1 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2$$

Ця формула нам вже відома, адже саме так ми шукали мішаний добуток векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, які в базисі $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ мають координати $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1), \overline{b} = (x_2, y_2, z_2), \overline{c} = (x_3, y_3, z_3)$

2.2 Властивості визначників

Усі властивості будемо формулювати і доводити для визначників 3-го порядку. Але, як ми побачимо пізніше, усі наведені властивості будуть виконуватися і для визначників довільного порядку.

Нехай A квадратна матриця третього порядку, тоді $\det A = \overline{a}\overline{b}\overline{c}$, де $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1), \overline{b} = (x_2, y_2, z_2), \overline{c} = (x_3, y_3, z_3)$.

Означення 2.4. Транспонована матриця — це матриця A^T, отримана шляхом транспонування (транспоновки) елементів матриці A, тобто стовпчики і рядки, міняються місцями: $A^T = (a^T_{ij})$, де $a^T_{ij} = a_{ji}$.

Нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Означення 2.5. Мінор M_{ij}, елемента a_{ij} — це визначник матриці, яка отримана з матриці А викреслюванням i-го рядка та j-го стовпчика.

Наприклад: $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}$.

Означення 2.6. Алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} — це добуток $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Властивості визначників:

1) При транспонуванні матриці значення її визначника не зміниться:

$$\det A = \det A^T$$

► Доведення випливає безпосередньо з правила "зірочки"

$\det A^T = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_3y_1z_2 + x_2y_3z_1 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2 = \det A$

Ця властивість урівнює в "правах" стовпчики і рядки. Тому далі всі властивості будемо формулювати для рядків.

◀

2) Знак визначника змінюється, якщо будь-які два рядки поміняти місцями:

$$D(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = -D(\overline{b},\overline{a},\overline{c}) = -D(\overline{a},\overline{c},\overline{b}) = -D(\overline{c},\overline{b},\overline{a})$$

3) Спільний множник можна винести з довільного рядка за визначник:

$$D(\alpha\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = D(\overline{a},\alpha\overline{b},\overline{c}) = D(\overline{a},\overline{b},\alpha\overline{c}) = \alpha D(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$$

4) $D(\overline{a}+\overline{a}',\overline{b},\overline{c}) = D(\alpha\overline{a},\overline{b},\overline{c}) + D(\alpha\overline{a}',\overline{b},\overline{c})$

5) Визначник, рядки якого пропорційні, дорівнює нулю:

$$D(\overline{a},\alpha\overline{a},\overline{c}) = 0$$

6) Визначник, який має два однакових рядки, дорівнює нулю:

$$D(\overline{a},\overline{a},\overline{c}) = 0$$

7) Визначник матриці з нульовим рядком дорівнює нулю:

$$D(\overline{a},\overline{0},\overline{c}) = 0$$

8) Визначник не змінюється, якщо до якогось його рядка додати лінійну комбінацію інших рядків:

$$D(\overline{a},\overline{b},\overline{c}+\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}) = D(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$$

► $D(\overline{a},\overline{b},\overline{c}+\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}) = D(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) + D(\overline{a},\overline{b},\alpha\overline{a}) + D(\overline{a},\overline{b},\beta\overline{b}) = D(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$

◀

9) Визначник матриці A дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка на їх алгебраїчні доповнення.

Наприклад: $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$.

Будемо казати, що в цьому прикладі ми розклали визначник за першим рядком.

► $\sum\limits_{i=1}^{3} a_{1i}A_{1i} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{22}a_{31} = \det A.$

◀

Задача 2.1. З'ясувати, чи можуть вектори $\overline{a} = (2, -1, 2), \overline{b} = (1, 2, -3), \overline{c} = (3, -4, 7)$ утворювати базис у просторі E^3?

Розв'язання. Вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ будуть утворювати базис, якщо вони некомпланарні. Тобто об'єм паралелепіпеда, на них побудованого, не повинен дорівнювати нулю. Знайдемо мішаний добуток даних векторів:

$$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} = d(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ -5 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Для обчислення цього визначника ми спочатку 2-й стовпчик помножили на 2 і додали його до 1-го та 3-го стовпчиків, а потім скористались властивістю 9. Таким чином, об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a}, \overline{b}$ і $\overline{c}$ дорівнює нулю, тобто ці вектори лежать в одній площині і слугувати базисом не можуть.

2.3 Лінійна залежність векторів

Розглянемо систему векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$.

Означення 2.7. Лінійна комбінація векторів — це вираз $\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_1 + ... + \alpha_n\overline{a}_n$, де $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Означення 2.8. Лінійна комбінація векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ — це **тривіальна лінійна комбінація**, якщо всі $\alpha_i = 0$, і це **нетривіальна лінійна комбінація**, в протилежному випадку.

Означення 2.9. Лінійно залежні вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ є такими ,якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ що виконується рівність $\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_n\overline{a}_n = \overline{0}$, причому $|\alpha_1| + |\alpha_2| + ... + |\alpha_n| \neq 0$.

Означення 2.10. Лінійно незалежні вектори — це вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$, такі, що їх лінійна комбінація дорівнює нулю лише за умови, коли всі $\alpha_i = 0$.

Інакше кажучи, вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ є лінійно незалежними, якщо ніяка їх нетривіальна лінійна комбінація не дорівнює нульовому вектору.

Властивості:

Твердження 2.1. *Вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ – лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли хоча б один з них лінійно виражається через інші.*

► 1) Нехай $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ — це лінійно залежні вектори. Тоді $\alpha_1\overline{a}_1 + ... + \alpha_i\overline{a}_i + ... + \alpha_n\overline{a}_n = \overline{0}$ та $\alpha_i \neq 0$ для деякого i . Звідси випливає, що $\overline{a}_i = -\dfrac{1}{\alpha_i}(\alpha_1\overline{a}_1 +$

$... + \alpha_{i-1}\overline{a}_{i-1} + \alpha_{i+1}\overline{a}_{i+1} + ... + \alpha_n\overline{a}_n)$, тобто вектор $\overline{a}_i$ лінійно виражається через інші вектори системи.

2) Нехай $\overline{a}_i = \beta_1\overline{a}_1 + ... + \beta i - 1\overline{a}_{i-1} + \beta i + 1\overline{a}_{i+1} + ... + \beta_n\overline{a}_n)$ для деякого i. Тоді $\beta_1\overline{a}_1 + ... + \beta_{i-1}\overline{a}_{i-1} + (-1)\overline{a}_i + \beta_{i+1}\overline{a}_{i+1} + ... + \beta_n\overline{a}_n = \overline{0}$, тобто отримано нульову лінійну комбінацію, в якій коефіцієнт при векторі і а є ненульовим.

◀

Твердження 2.2. *Якщо один з векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ є нульовим, то система цих векторів є лінійно залежною.*

► Припустимо, що $\overline{a}_1 = \overline{0}$. Тоді очевидно, що $1\overline{a}_1 + 0\overline{a}_2 + ... + 0\overline{a}_n = \overline{0}$, тобто за означенням дана система векторів є лінійно залежною ($\alpha_1 = 1 \neq 0$).

◀

Твердження 2.3. *Якщо серед векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ є два однакових, то система векторів є лінійно залежною.*

► Доведення є очевидним.

◀

Твердження 2.4. *Якщо серед n векторів існує k лінійно залежних векторів, то і всі n векторів є лінійно залежними.*

► Розглянемо лінійну комбінацію даних n векторів $\alpha_1\overline{a}_1 + ... + \alpha_k\overline{a}_k + 0\overline{a}_{k+1} + ... + 0\overline{a}_n = \overline{0}$,при умові, що $\alpha_1\overline{a}_1 + ... + \alpha_k\overline{a}_k = \overline{0}$ і константи $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}$ не всі рівні нулю. Ця комбінація є нетривіальною, що і доводить потрібний факт.

◀

Твердження 2.5. *Якщо вектор $\overline{a}$ лінійно виражається через лінійно незалежні вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$, то таке представлення єдине.*

► (від супротивного). Припустимо, що вектор $\overline{a}$ лінійно виражається через дані вектори не єдиним чином, тобто $\overline{a} = \alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_n\overline{a}_n$ і $\overline{a} = \beta_1\overline{a}_1 + \beta_2\overline{a}_2 + ... + \beta_n\overline{a}_n$. Віднявши другу рівність від першої, маємо: $\overline{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\overline{a}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\overline{a}_2 + ... + (\alpha_n - \beta_n)\overline{a}_n$. Оскільки $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ є лінійно незалежними, то $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, ..., \alpha_n = \beta_n$, що суперечить припущенню про неєдиність представлення вектора $\overline{a}$.

◀

Твердження 2.6. *Довільна підсистема лінійно незалежних векторів $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_n$ є лінійно незалежною.*

▶ Застосуємо метод від супротивного. Нехай існує підсистема $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n, k < n$, лінійно залежних векторів. Це означає, що $\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_k\overline{a}_k = \overline{0}$, причому $|\alpha_1| + |\alpha_2| + ... + |\alpha_k| \neq 0$. Додамо до обох частин рівності нуль-вектор: $0\overline{a}_{k+1} + ... + 0\overline{a}_n$. В результаті отримаємо: $\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_k\overline{a}_k + 0\overline{a}_{k+1} + ... + 0\overline{a}_n = \overline{0}$ і $|\alpha_1| + |\alpha_2| + ... + |\alpha_k| \neq 0$. Це означає лінійну залежність векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$, що протирічить припущенню. Отже, підсистема $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$, є лінійно незалежною.

◀

Твердження 2.7. *Якщо після доповнення системи $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ лінійно незалежних векторів вектором $\overline{a}$, отримали лінійно залежну систему, то вектор $\overline{a}$ лінійно виражається через вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$.*

▶ Оскільки вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n, \overline{a}$ є лінійно залежними, то існують такі константи $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}$, не всі рівні нулю, що

$\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_n\overline{a}_n + \alpha_{n+1}\overline{a} = \overline{0}$. (*)

При цьому саме $\alpha_{n+1} \neq 0$. Доведемо цей факт методом від супротивного. Якщо $\alpha_{n+1} = 0$, то $\alpha_{n+1}\overline{a} = \overline{0}$ і $\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_n\overline{a}_n = \overline{0}$, причому серед чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ існують ненульові. Але в цьому випадку вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ є лінійно залежними, що суперечить умові твердження. Отже, $\alpha_{n+1} \neq 0$, тому з рівності (*) випливає, що $\overline{a} = \left(-\dfrac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}}\right)\overline{a}_1 + ... + \left(-\dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right)\overline{a}_n$.

◀

Геометричний сенс лінійної залежності

Твердження 2.8. *Два вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ є лінійно залежними тоді і тільки тоді, коли $\overline{a} \parallel \overline{b}$.*

Твердження 2.9. *Три вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ є лінійно залежними тоді і тільки тоді, коли $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ є компланарними.*

Твердження 2.10. *Довільні чотири вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d} \in E^3$ є завжди лінійно залежними.*

Розділ 3

Пряма на площині

3.1 Різні способи задання ліній на площині

Одним із найважливіших завдань аналітичної геометрії є представлення лінії на площині за допомогою рівняння, що зв'язує координати кожної точки цієї лінії. Нехай маємо на площині P декартову прямокутну систему координат та деяку лінію L.

Означення 3.1. Рівняння лінії L — це рівняння $F(x, y) = 0$, якому задовольняють координати x та y кожної точки цієї лінії.

Інакше кажучи, лінія – це геометричне місце точок, координати яких задовольняють рівняння. Лінію L можна задавати таким чином.

1) **Неявний спосіб:** $F(x, y) = 0$. Функція y від x (чи x від y) задана неявно. Приклад: $x^2 + y^2 = R^2$ — рівняння кола радіуса R з центром у початку координат.

2) **Явний спосіб:** $y = f(x)$. Функція y від x задана явно. Для побудови графіка цієї функції складається таблиця значень x та $f(x)$, ці пари точок позначаються на площині та з'єднуються плавною лінією. Приклад: $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$.

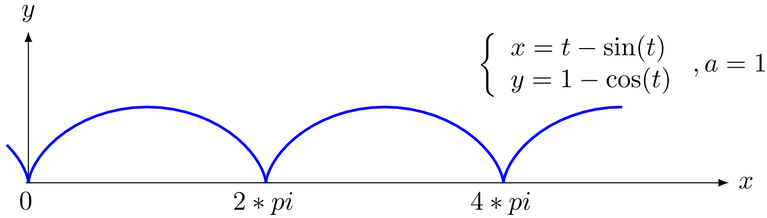
3) **Параметричне представлення:** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in D.$

Щоб побудувати графік такої функції треба скласти таблицю для $x(t)$ і $y(t)$ для однакових значень параметра t , що пробігає числову множину D . Виключення з двох рівнянь параметра t приводить до неявного способу задання даної лінії L. Приклад: $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$

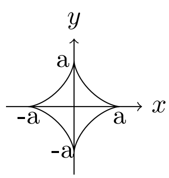
Приклади графіків параметричних функцій:

Приклад 1: циклоїда $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, t \in [-\infty, +\infty], a > 0.$

Таку лінію описує фіксована точка кола радіуса а, що котиться по всій осі Ox. Очевидно, що $y \in [0, 2a]$, а $y = 0$ при $1 - \cos t = 0 \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi$.



Приклад 2: астроїда $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$

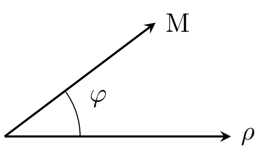


Запишемо рівняння астроїди в неявному вигляді:
$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$
$\Rightarrow x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

4) Представлення лінії у полярній системі координат. На площині задана полярна система координат, якщо задано:

1. точка O полюс;

2. полярна вісь ρ промінь, що виходить з точки O.

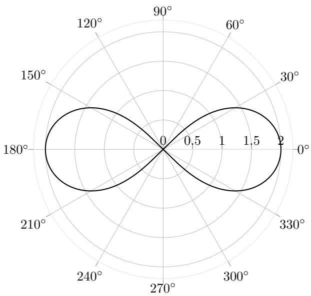


Тоді положення будь-якої точки M на площині визначається парою чисел (ρ, φ), де полярний радіус $\rho \geqslant 0$ — довжина вектора $\overline{OM}$, а полярний кут φ це кут між віссю ρ і $\overline{OM}$, який відраховується проти годинникової стрілки. Якщо точка M має декартові координати (x, y) і цій парі чисел відповідає пара (ρ, φ), то ця відповідність буде взаємно однозначною, якщо $\varphi \in [0, 2\pi]$ або $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Легко вивести наступні співвідношення (перехід від полярної системи координат до декартової, і навпаки):

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \tag{3.1}$$

$$
\begin{cases}
\rho = \sqrt{x^2+y^2} \\
\begin{cases}
\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}
\end{cases}
\end{cases}
\tag{3.2}
$$

Приклад: Лемніската Бернуллі $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2), a > 0$.

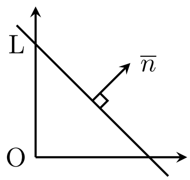


З формул 3.2 випливає, що $\rho^4 = a^2\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$, тобто $\rho^2 = a\cos 2\varphi$ або $\rho = \sqrt{a\cos 2\varphi}$. Область визначення: $\cos 2\varphi \geqslant 0$, тобто $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

3.2 Пряма на площині

Нехай дано пряму L.

Означення 3.2. Нормальний вектор прямої L — це довільний ненульовий вектор $\overline{n}$, перпендикулярний прямій L.



$\overline{n} \perp L; \overline{n} \neq \overline{0}$ — нормальний вектор прямої. Зауважимо, що нормальних векторів існує безліч — з точністю до ненульової константи.

Нехай задано точку $M_0(x_0, y_0)$. Складемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно до вектора $\overline{n}(A, B)$.

Для довільної точки $M(x, y)$ шуканої прямої вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ є перпендикулярним вектору $\overline{n}$: $\overline{M_0M} \perp \overline{n}$, тобто $(\overline{M_0M}, \overline{n}) = 0$. Отримали: $A(x-x_0)+B(y-y_0) = 0$ — рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0)$ та нормальний вектор $\overline{n}(A, B)$.

Побудуємо загальне рівняння прямої. Розкривши дужки, маємо $Ax + By - (Ax_0 + By_0) = 0$, де A і $B \neq 0$ одночасно. Позначивши $C = -(Ax_0 + By_0)$, отримуємо

$Ax + By + C = 0$ — **загальний вигляд прямої**.

3.3 Неповні рівняння прямої

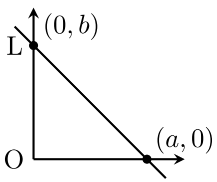
Означення 3.3. Загальне рівняння $Ax + By + C = 0$ — це **повне рівняння прямої**, якщо всі його коефіцієнти $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$ (тобто $ABC \neq 0$). Якщо ж хоча б один коефіцієнт дорівнює нулю, то це **неповне рівняння прямої**.

Розглянемо можливі випадки неповних рівнянь.

1. $C = 0; L : Ax + By = 0$ — пряма L проходить через точку $O(0, 0)$.
2. $B = 0; L : Ax + C = 0$; $\overline{n}(A, 0) \perp Oy, L \parallel Oy$.
3. $A = 0; L : By + C = 0$; $\overline{n}(0, B) \perp Ox, L \parallel Ox$.
4. $B = 0, C = 0; L : Ax = 0$ — пряма L співпадає з віссю Oy.
5. $A = 0, C = 0; L : By = 0$ — пряма L співпадає з віссю Ox.

3.4 Рівняння прямої у відрізках

Розглянемо повне рівняння прямої $L : Ax + By + C = 0$, де $ABC \neq 0$.



$$Ax + By = -C;$$

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

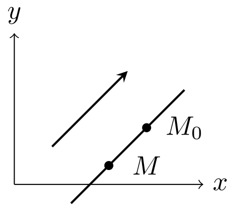
Позначимо $a = -\frac{C}{A}, b = -\frac{C}{B}$. Тоді маємо рівняння прямої "у відрізках":

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Геометричний зміст чисел a і b: вони дорівнюють величинам відрізків, які відсікає пряма L на осях Ox та Oy відповідно.

3.5 Канонічне рівняння

Означення 3.4. Напрямний вектор прямої L — це довільний ненульовий вектор $q \neq \overline{0}$, що паралельний прямій L.



Нехай задано точку $M_0(x_0, y_0)$. Складемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно до вектора $\overline{q}(l, m)$ (напрямний вектор). Якщо $M(x, y)$ — це довільна точка шуканої прямої, то вектор $\overline{M_0M}$ має координати $(x - x_0, y - y_0)$ і $\overline{M_0M} \parallel \overline{q}$, тобто координати цих векторів пропорційні. В результаті маємо **канонічне рівняння**

$$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}}$$

— рівняння прямої L через точку і напрямний вектор.

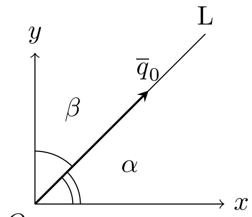
3.6 Параметричне рівняння прямої

Нехай $\overline{q}(l, m)$ — це напрямний вектор прямої L і $M_0(x_0, y_0) \in L$. У канонічному рівнянні даної прямої введемо параметр: $t = \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}, t \in (-\infty; +\infty)$. Тоді

$$\begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \end{cases}$$

— **параметричне рівняння прямої**.

3.7 Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом



Розглянемо довільну пряму $L \nparallel Ox$. Нехай α — це кут нахилу L до осі Ox (якщо $L \parallel Ox$, то $\alpha = 0$), β — це кут між прямою L та віссю Oy, $\overline{q}(l, m)$ — це напрямний вектор прямої L, $\overline{q}_0$ — це його орт-вектор. Тоді $\overline{q}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ (при цьому враховано, що $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$).

У цьому випадку канонічне рівняння прямої L буде мати вигляд:

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\sin\alpha}$$

Звідси $y - y_0 = \operatorname{tg}\alpha(x - x_0)$. Якщо позначити $k = \operatorname{tg}\alpha$ — кутовий коефіцієнт, то отримаємо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом: $y - y_0 = k(x - x_0)$, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$. Останнє рівняння можна переписати у вигляді:

$$y = kx + b,$$

де $b = y_0 - kx_0$ — величина відрізка, який відсікає L на осі Oy.

3.8 Кут між двома прямими

Кут між двома прямими дорівнює меншому з кутів між їх нормальними або напрямними векторами. Розглянемо три випадки.

1. Прямі задано загальними рівняннями:

$$L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, \overline{n}_1(A_1, B_1);$$
$$L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0, \overline{n}_2(A_2, B_2);$$

$$\cos(\widehat{L_1, L_2}) = \cos(\widehat{\overline{n}_1, \overline{n}_2}) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

2. Прямі задано у канонічному вигляді:

$$L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1}, \overline{q}_1(l_1, m_1);$$
$$L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2}, \overline{q}_2(l_2, m_2);$$

$$\cos(\widehat{L_1, L_2}) = \cos(\widehat{\overline{q}_1, \overline{q}_2}) = \frac{|l_1l_2 + m_1m_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}.$$

3. Прямі задано рівняннями з кутовими коефіцієнтами:

$$L_1 : y = k_1x + b_1, k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1;$$
$$L_2 : y = k_2x + b_2, k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2;$$

$$\operatorname{tg}(\widehat{L_1, L_2}) = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \left| \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} \right| = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

3.9 Умови перпендикулярності і паралельності прямих

Паралельність або перпендикулярність двох прямих рівнозначна паралельності або перпендикулярності нормальних або напрямних векторів. Тому відповідно до вигляду рівнянь, якими задані прямі (див. пункти 1 – 3 попереднього розділу), маємо:

Умови паралельності $L_1 \parallel L_2$:

1. $\overline{n}_1 \parallel \overline{n}_2$ або $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$;
2. $\overline{q}_1 \parallel \overline{q}_2$ або $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$;
3. $k_1 = k_2$.

Умови перпендикулярності $L_1 \perp L_2$:

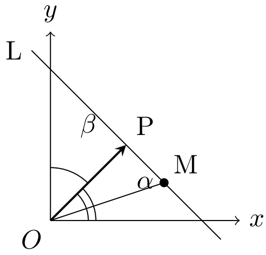
1. $\overline{n}_1 \perp \overline{n}_2$ або $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$;
2. $\overline{q}_1 \perp \overline{q}_2$ або $l_1l_2 + m_1m_2 = 0$;
3. $k_1k_2 = -1$.

3.10 Нормальне рівняння прямої

Нехай L — пряма, що не проходить через початок координат. Проведемо нормальний вектор $\overline{n}$ так:

1. його початок — в точці $(0, 0)$, а кінець лежить на прямій;
2. $|\overline{n}| = p > 0$ (такий вектор єдиний!).
3. Кут α — це кут між віссю OX і $\overline{n}$, який відраховується проти годинникової стрілки.

Нехай точка $M(x, y) \in L$. Тоді $\overline{OM}(x, y)$ — це її радіус-вектор, $\overline{n}_0$ — це ортвектор нормального вектора $\overline{n}$: $\overline{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. При цьому враховано, що $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$.



Мають місце наступні співвідношення:
$p = |OP| = \text{пр}_{\overline{n}}\overline{OM} = \text{пр}_{\overline{n}_0}\overline{OM} = |OM|\cos(\widehat{\overline{n}_0, \overline{OM}}) = |OM|\dfrac{(\overline{n}_0, \overline{OM})}{|\overline{n}_0||\overline{OM}|} = \dfrac{(\overline{n}_0, \overline{OM})}{|\overline{n}_0|} = x\cos\alpha + y\sin\alpha.$
Отримали рівняння $x\cos\alpha + y\sin\alpha = 0$, — це **нормальне рівняння прямої** L, де p — це відстань від початку координат до прямої L.

3.11 Зведення загального рівняння прямої до нормального вигляду

Розглянемо загальне рівняння прямої $L : Ax + By + C = 0$, та нормальне рівняння цієї прямої: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$.

Для того, щоб рівняння були рівносильними, достатньо, щоб їх коефіцієнти були пропорційними: $\dfrac{\cos\alpha}{A} = \dfrac{\sin\alpha}{b} = \dfrac{-p}{C} = \mu$, де μ — це **нормуючий множник**. Тоді $\cos\alpha = \mu A, \sin\alpha = \mu B, -p = \mu C$. Звідси визначимо μ:

$$\mu^2(A^2 + B^2) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

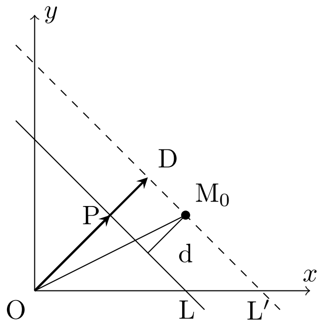
Знак μ визначається рівністю $\mu C = -p$. Оскільки $p \geq 0$, то знак нормуючого множника μ є протилежним до знаку C. Отже, **нормальне рівняння прямої** L буде мати вигляд

$\mu(Ax + By + C) = 0$, де $\mu = \dfrac{-\text{sign}C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ — нормуючий множник.

Приклад 3.1. Звести рівняння прямої $L : 3x - 4y + 25 = 0$ до нормального виду.

Розв'язання. Знайдемо нормуючий множник:
$\mu = -\dfrac{1}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$. Тоді $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 5 = 0$ — нормальне рівняння L, де $\cos\alpha = -\frac{3}{5}, \sin\alpha = \frac{4}{5}, p = 5$ — довжина перпендикуляра, опущеного з точки O на цю пряму.

3.12 Відхилення і відстань від точки до прямої



Нехай задано пряму L , точку $M_0(x_0, y_0) \notin L$, відстань від якої до даної прямої дорівнює $d = \rho(M_0, L) > 0$. Точка $O(0,0)$ — це початок координат.
Нехай пряма L задається нормальним рівнянням: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$.

Означення 3.5. Відхилення точки M_0 від прямої L — це число

$$\delta_{M_0,L} \begin{cases} d, \text{ якщо точки } M_0 \text{ і } O \text{ лежать по різні сторони прямої;} \\ -d, \text{ якщо точки } M_0 \text{ і } O \text{ лежать по один бік від прямої.} \end{cases}$$

Обчислимо відхилення $\delta_{M_0,L}$. Для цього через точку M_0 проведемо пряму L', паралельну L. Побудуємо $OD \perp L'$. Тоді рівняння L' має вигляд:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p - \delta_{M_0,L} = 0.$$

Але координати точки $M_0(x_0, y_0)$ задовольняють це рівняння, тому $x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p - \delta_{M_0,L} = 0$.

Таким чином, відхилення точки M_0 від прямої L обчислюється за формулою:

$$\delta_{M_0,L} = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p$$

(для того, щоб знайти відхилення точки M_0 від прямої L , потрібно підставити координати цієї точки в нормальне рівняння даної прямої).

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0) \notin L$ до прямої L обчислюється таким чином:

$$d = |\delta_{M_0,L}| = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|$$

.

Якщо ж пряма задається загальним рівнянням, то

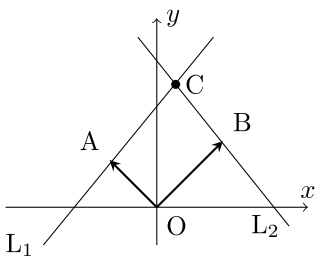
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

.

Задача 3.1. З'ясувати, в якому куті (гострому чи тупому), утвореному при перетині прямих L_1 та L_2, знаходиться точка $M_0(-2,2)$, якщо $L_1 : 2x-y+2=0$, $L_2 : 4x+y-4=0$. В яких кутах (суміжних чи вертикальних) знаходяться точка M_0 та початок координат $O(0,0)$?

Розв'язання. З'ясуємо, який кут (гострий чи тупий) утворюють орти нормальних векторів прямих L_1 та L_2. Спочатку запишемо рівняння даних прямих у нормальному вигляді:

$$L_1 : -\frac{1}{\sqrt{5}}(2x-y+2)=0; \quad \overline{n}_1^0 = -\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1);$$
$$L_1 : \frac{1}{\sqrt{17}}(4x+y-4)=0; \quad \overline{n}_2^0 = \frac{1}{\sqrt{17}}(4,1);$$



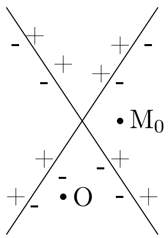
Оскільки скалярний добуток

$$(\overline{n}_1^0, \overline{n}_2^0) = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{17}}(-8+1) < 0,$$

то кут AOB між векторами $\overline{n}_1^0$ та $\overline{n}_2^0$ — тупий. У чотирикутнику $AOBC$ $\angle A$ та $\angle B$ — прямі, $\angle AOB$ — тупий, тому $\angle ACB$ — гострий.

Отже, початок координат $O(0,0)$ знаходиться в гострому куті, утвореному при перетині прямих L_1 та L_2.

Знайдемо відхилення точки $M_0(-2,2)$ від даних прямих.



$$\delta_{M_0,L_1} = -\frac{1}{\sqrt{5}}(-4-2+2) = \frac{4}{\sqrt{5}} > 0;$$
$$\delta_{M_0,L_2} = \frac{1}{\sqrt{17}}(-8+2-4) = -\frac{10}{\sqrt{17}} < 0;$$

Дві прямі, що перетинаються, ділять площину на чотири області. На рисунку зображено знаки відхилень точок, які лежать в кожній з чотирьох областей, при умові, що початок координат $O(0,0)$ знаходиться в гострому куті.

Враховуючи знаки відхилень точки M_0 від даних прямих, робимо висновок, що точка M_0 лежить в тупому куті, утвореному при перетині прямих L_1 та L_2.

Точки $O(0,0)$ та M_0 лежать в суміжних кутах.

3.13 Рівняння пучка (низки) прямих

Означення 3.6. Пучок прямих (низка прямих) на площині з центром у даній точці — це сукупність прямих, що проходить через цю точку.

Якщо задана точка $M_0(x_0, y_0)$, то рівняння $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ при змінних коефіцієнтах A і B, а також рівняння $y - y_0 = k(x - x_0)$ при змінному k є рівняннями пучка (низки) прямих з центром у точці M_0.

Пучок прямих можна задати довільними двома прямими, які перетинаються у точці M_0:

$$L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Рівняння пучка прямих із центром у точці M_0 можна записати, не визначаючи координат M_0:

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

Щоб із пучка прямих виділити певну пряму, потрібно задати додаткову умову для знаходження параметра λ, що відповідає шуканій прямій.

Розділ 4

Криві другого порядку

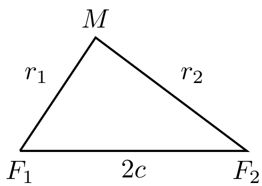
Загальне рівняння кривої другого порядку має такий вигляд:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

При різних значеннях коефіцієнтів можемо отримати вироджені випадки: прямі, точки, криві лінії. Ми ж будемо розглядати невироджені випадки кривих другого порядку – еліпс, гіперболу, параболу.

4.1 Канонічне рівняння еліпса

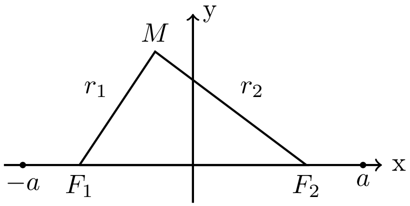
Означення 4.1. Еліпсом називається геометричне місце точок площини таких, що сума відстаней від кожної з яких до двох фіксованих точок (фокусів) є величина стала.



Отже, маємо два фокуси F_1 і F_2, відстань між ними $|F_1F_2| = 2c$. Нехай M – довільна точка еліпса. Відрізки $r_1 = |F_1M|$ та $r_2 = |F_2M|$ називаються фокальними радіусами точки M.

За означенням еліпса: $r_1 + r_2 = 2a$.

З трикутника F_1MF_2 маємо: $|F_1M| + |F_2M| > |F_1F_2|$, тобто $2a > 2c$, або $a > c$.



Побудуємо декартову систему координат. Нехай вісь OX пройде через фокуси F_1 і F_2 ,а вісь OY — через середину відрізка F_1F_2 . Відповідно до вибраної системи координат фокуси будуть мати такі координати: $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$.

Оскільки точка M — це довільна точка еліпса, то вона має координати (x, y). Тоді

$$r_1 = |F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, r_2 = |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Враховуючи умову $r_1 + r_2 = 2a$, маємо рівняння еліпса:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Піднесемо до квадрату обидві частини рівняння:

$$(x+c)^2 + y^2 + (x-c)^2 + y^2 + 2\sqrt{((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2)} = 4a^2.$$

Перегрупувавши доданки, маємо:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 - 4a^2 =$$

$$= -2\sqrt{((x^2 + y^2 + c^2) + 2xc)((x^2 + y^2 + c^2) - 2xc)}.$$

Виконавши елементарні перетворення, отримаємо:

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4x^2c^2} = 2a^2 - (x^2 + y^2 + c^2).$$

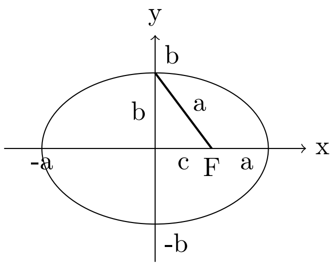
Знову піднесемо до квадрату та отримаємо:

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4x^2c^2 = (x^2 + y^2 + c^2)^2 + 4a^4 - 4a^2(x^2 + y^2 + c^2).$$

або

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 = a^4 - a^2c^2.$$

Позначивши $b^2 = a^2 - c^2$ (оскільки $a > c$), маємо: $x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2$. Поділивши обидві частини цієї рівності на a^2b^2, отримуємо **канонічне рівняння еліпса:**



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Дослідимо форму еліпса. З отриманого рівняння випливає, що для всіх точок еліпса $x^2 \leqslant a^2$, $y^2 \leqslant b^2$, або $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$, тобто це означає, що всі точки еліпса знаходяться всередині прямокутника, сторони якого паралельні осям координат і мають довжини $2a$ та $2b$, де a — це **велика піввісь**, b — **мала піввісь** ($a > b$). Кожна точка $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$, в якій еліпс перетинає осі координат, — це **полюс еліпса (або вершина еліпса)**. Якщо довільні значення (x, y), задовольняють канонічне рівняння еліпса, то очевидно, що значення $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$ теж будуть задовольняти рівняння еліпса. Це означає, що координатні осі, кожна з них — це **вісь симетрії**, а точка $O(0, 0)$ — **центр симетрії еліпса**.

4.2 Канонічне рівняння гіперболи

Означення 4.2. Гіпербола — це геометричне місце точок площини, для яких модуль різниці відстаней від двох фіксованих точок (фокусів) є сталою величиною.

Нехай F_1 і F_2 — фокуси, відстань між якими $|F_1F_2| = 2c$, M — довільна точка гіперболи, r_1 та r_2 — це фокальні радіуси точки M. Згідно з означенням гіперболи $|r_1 - r_2| = 2a$. З трикутника F_1MF_2 маємо: $2a < 2c$, тобто $a < c$. Побудову декартової системи координат і подальші викладки здійснюємо так само, як і при виведенні рівняння еліпса:

$$F_1(-c, 0), F_2(c, 0), M(x, y),$$

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$|r_1 - r_2| = 2a,$$

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| - 2a,$$

$$(x^2 + y^2 + c^2) + 2xc + (x^2 + y^2 + c^2) - 2xc-$$

$$-2\sqrt{((x^2+y^2+c^2)+2xc)((x^2+y^2+c^2)-2xc)} = 4a^2,$$

$$(x^2+y^2+c^2)-2a^2 = \sqrt{v^2-4x^2c^2},$$

$$(x^2+y^2+c^2)-4a^2(x^2+y^2+c^2)+4a^4 = (x^2+y^2+c^2)^2-4x^2c^2,$$

$$x^2c^2-x^2a^2-y^2a^2 = a^2c^2-a^4,$$

$$x^2(c^2-a^2)-y^2a^2 = a^2(c^2-a^2).$$

Позначимо $B^2C^2-A^2$ (враховуючи, що $c>a$). Тоді

$$x^2b^2-y^2a^2 = a^2b^2.$$

В результаті перетворень отримали **канонічне рівняння гіперболи**:

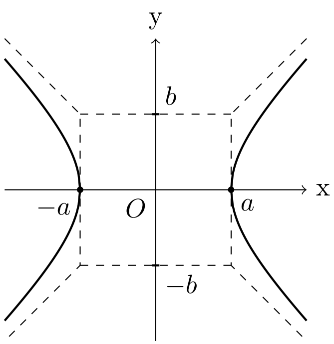
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

З отриманого рівняння випливає, що

$$x^2 = a^2\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right) \Rightarrow x \leqslant -a \text{ або } x \geqslant a.$$

Аналогічно,

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right) \Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \Rightarrow y \in (-\infty;+\infty).$$



Тобто гіпербола є необмеженою кривою, яка складається з двох гілок, які є симетричними відносно осі OY і лежать праворуч від прямої $x=a$ та ліворуч від прямої $x=-a$.

Координатні осі — це осі симетрії, точка O — центр симетрії гіперболи. Асимптотами гіперболи є прямі $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Доведемо це для гілки гіперболи, що лежить у першій чверті:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2}-1 \Rightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

тобто

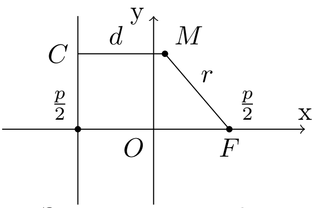
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{\dfrac{b}{a}x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}=1.$$

Це означає, що чисельник наближається до знаменника, тобто крива при $x\to+\infty$ наближається до своєї асимптоти. Для трьох інших чвертей викладки аналогічні.

4.3 Канонічне рівняння параболи

Означення 4.3. Парабола — це геометричне місце точок площини, кожна з яких однаково віддалена від фіксованої точки (фокуса) і від даної прямої (директриси).

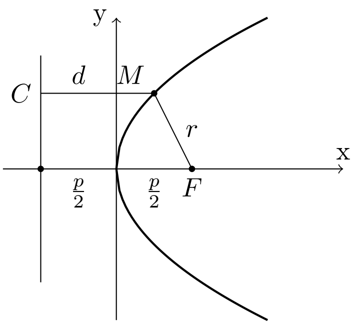
Відстань від фокуса F до директриси D позначимо p. Нехай M — довільна точка параболи. Тоді $r=|FM|$ — фокальний радіус точки M.



Декартову систему координат будуємо таким чином: вісь OX проходить через фокус F перпендикулярно директрисі D, а вісь OY — через середину відстані від F до D. Тоді $M(x,y)$, $F(\frac{p}{2},0)$, $d=\rho(M,D)=|MC|=x+\frac{p}{2}$, а фокальний радіус $r=|FM|=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}$.

За означенням $d=r$, тобто

$$x+\frac{p}{2}=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}\Rightarrow x^2+xp+\frac{p^2}{4}=x^2-xp+\frac{p^2}{4}+y^2.$$



Отримали **канонічне рівняння параболи**: $y=2px$, де p — параметр, $p>0$. Очевидно, що $x\geqslant 0$. Отже, парабола розташована праворуч від осі OY. З отриманого рівняння випливає, що для довільного значення x існує два протилежні значення y: $y=\pm\sqrt{2px}$, а це означає, що парабола симетрична відносно осі OX (осі параболи). Парабола проходить через точку $O(0,0)$, яка називається її вершиною. Якщо $x\to+\infty$, то $y\to+\infty$, що означає, що вітки параболи простягаються в нескінченність.

4.4 Ексцентриситет і директриси еліпса і гіперболи

Означення 4.4. Величина $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ — це **ексцентриситет еліпса** і **ексцентриситет гіперболи**.

Для еліпса $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$, тому $\varepsilon \in [0; 1)$. Якщо $\varepsilon = 0$, то це означає, що $a = b$ і $c = 0$, тобто фокуси еліпса збігаються, і еліпс перетворюється в коло. Ексцентриситет характеризує форму даної кривої. Чим більше ε, тим більше еліпс "сплющується" по осі OY.

Для гіперболи $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \dfrac{b^2}{a^2}}$, тобто $\varepsilon \in (1; +\infty)$. Із зростанням ε гілки гіперболи "розпрямлюються".

Означення 4.5. Директриса еліпса (директриса гіперболи) — це дві прямі, які перпендикулярні фокальній осі (тобто до осі, на якій розміщені фокуси) і знаходяться на відстані $\dfrac{a}{\varepsilon}$ від центра кривої.

У вибраній системі координат директриси еліпса та гіперболи паралельні осі OY і не перетинають самі криві. Отже, рівняння директрис D_1 і D_2 для цих двох кривих мають вигляд: $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ або $x = \pm\dfrac{a^2}{c}$.

Для еліпса $a > c \Rightarrow \dfrac{a}{c} > 1$, тому $\dfrac{a^2}{c} = \dfrac{aa}{c} > a$ (враховано, що $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ і $0 \leqslant \varepsilon < 1$). Це означає, що директриси еліпса лежать поза його межами.

Аналогічно для гіперболи $a < c \Rightarrow \dfrac{a}{c} < 1$ і $\dfrac{a^2}{c} = \dfrac{aa}{c} < a$, тобто директриси гіперболи знаходяться між її гілками.

Для доведення теореми про зв'язок між поняттями ексцентриситет і директриса розв'яжемо наступну задачу.

Задача 4.1. Довести, що фокальні радіуси r_1 і r_2 довільної точки еліпса мають вигляд: $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$.

Розв'язання. Нехай точка $M(x, y)$ — довільна точка еліпса. Тоді її координати задовольняють канонічне рівняння еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Звідси $y^2 = b^2(1 - \dfrac{x^2}{a^2})$ або $y^2 = \dfrac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Знайдемо фокальний радіус r_1:

$$r_1 = |F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} =$$

$$= \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2)} = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + (1 - \frac{c^2}{a^2})(a^2 - x^2)} =$$

$$\sqrt{a^2 + 2xc + \frac{c^2}{a^2}x^2} = \sqrt{(a + \frac{c}{a}x)^2} = |a + \frac{c}{a}x| = |a + \varepsilon x|.$$

Знайдемо знак виразу $a + \varepsilon x$. Оскільки $\frac{c}{a} < 1$ і $|x| \leqslant a$, то $|\frac{c}{a}x| < a$. Тому $a + \frac{c}{a}x > 0$, тобто $a + \varepsilon x > 0$ і $r_1 = a + \varepsilon x$, що і треба було довести. Фокальний радіус r_2 знаходиться аналогічно.

Зауважимо, що для гіперболи аналогічними міркуваннями можна отримати: $r_1 = \varepsilon x + a$, $r_2 = \varepsilon x - a$.

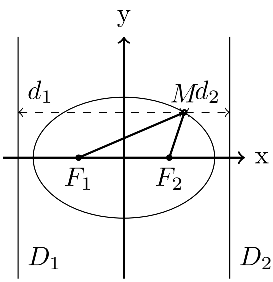
Теорема 4.1. *Якщо $M(x, y)$ — довільна точка еліпса чи гіперболи, r_1 і r_2 — її фокальні радіуси, $\rho(M, D_1)$ і $\rho(M, D_2)$ — відстані від точки M до відповідної директриси, то має місце співвідношення:*

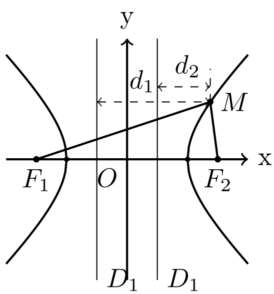
$$\frac{r_1}{\rho(M, D_1)} = \frac{r_2}{\rho(M, D_2)} = \varepsilon$$

► (проведемо для еліпса):

$$\frac{r_1}{\rho(M, D_1)} = \frac{r_1}{d_1} = \frac{a + \varepsilon x}{x + \dfrac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon \frac{a + \varepsilon x}{\varepsilon x + a} = \varepsilon,$$

$$\frac{r_2}{\rho(M, D_2)} = \frac{r_2}{d_2} = \frac{a - \varepsilon x}{x - \dfrac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon \frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon x - a} = \varepsilon,$$





◄

Зауваження. Для довільної точки параболи $\frac{r}{d} = 1$, тобто $\epsilon = 1$.

4.5 Рівняння дотичної до кривої другого порядку

Побудуємо рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точці $M_0(x_0, y_0)$. Нехай $y_0 \neq 0$, тобто точка M_0 не співпадає ні з однією з вершин еліпса $A_1(-a, 0)$ та $A_2(a, 0)$. У цьому випадку рівняння $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ неявно задає функцію $y = y(x)$, $-a < x < a$, графік якої проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і співпадає з верхньою (при $y_0 > 0$) чи нижньою (при $y_0 < 0$) половиною еліпса.

Скористаємось відомим із шкільного курсу рівнянням дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0, яке має вигляд: $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$.

Якщо продиференціювати за x тотожність $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2(x)}{b^2} = 1$, то отримаємо рівняння

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'(x)}{b^2} = 0,$$

або

$$b^2x + a^2yy'(x) = 0,$$

тобто

$$y'(x) = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Якщо підставити значення $y'(x_0) = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$ у рівняння дотичної, то отримаємо рівняння:

$$y = y_0 - \frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0).$$

Виконаємо нескладні перетворення:

$$y = y_0 - \frac{b^2x_0x}{a^2y_0} + \frac{b^2x_0^2}{a^2y_0}, a^2y_0y = a^2y_0^2 - b^2x_0x + b^2x_0^2.$$

Якщо поділити обидві частини рівняння на a^2b^2 та врахувати те, що $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ (точка $M_0(x_0, y_0)$ лежить на еліпсі), то отримаємо:

$$\frac{y_0 y}{b^2} = \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^2}.$$

Звідси рівняння дотичної до еліпса в точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Аналогічно можна вивести рівняння дотичної, проведеної до гіперболи та параболи в точці $M_0(x_0, y_0)$, відповідно:

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1,$$

$$y y_0 = p(x + x_0).$$