Eto matanaaaaaliiiiis

6 листопада 2022 р.

Зміст

Розділ 1

Введення в математичний аналіз

1.1 Най простіші логічні символи, квантори

Для запису тверджень використовують вирази, зв'язані з логічними зв'язками:

— заперечення $\neg$, Наприклад, $\neg A$

A	$\neg A$
0	1
1	0

— конюкція (логічне "і") $\wedge, \&$, Наприклад, $A \wedge B$

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

— дизюнкція (логічне "або") $\vee$, Наприклад, $A \vee B$

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

— імплікація (логічне слідування) $\Rightarrow$, Наприклад, $A \Rightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

— рівносильність (еквівалентність) $\Leftrightarrow$, Наприклад, $A \Leftrightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

— ставиться у відповідність $\mapsto$, Наприклад, $A \mapsto B$

— "такий, що" :, Наприклад, $\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$

Логічні квантори

$\forall$ — квантор загальності (всі, кожний, для всіх, ...)

Приклад 1.1. $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + 1 > 0$

$\exists$ — квантор існування ("існує такий елемент, що", ...)

Приклад 1.2. $(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 - 1 = 0$

$\exists!$ — ("існує, і при чому єдиний", ...)

Приклад 1.3. $(\exists! x \in \mathbb{R}) : (x - 1)^2 = 0$

1.2 Поняття множини, операції над множинами

Означення 1.1. **Множина** — це об'єднання (клас, сімейство) деяких об'єктів, об'єднаних по певному признаку.

Цей признак повинен однозначно визначати об'єкти даної множини (наприклад: множина усіх студентів інститута, множина коренів рівняння $x^2+2x+2 = 0$, множина усіх натуральних чисел і тому подібне).

Означення 1.2. об'єкт, що належить множині — це **елемент множини**.

Множина, зазвичай позначається великою буквою латинського алфавіта: A, B, ... X, Y, ..., а їх елементи маленькими: a, b, ..., x, y, ...
Якщо елемент x належить множині X, то пишуть $x \in X$. Запис $x \notin X$ означає, що елемент x не належить множині X.

Означення 1.3. Множина, що не містить жодного елемента — це **порожня множина** ($\varnothing$)

Елементи множини записують в фігурних дужках, всередині яких вони перечислені (якщо це можливо) або вказано загальна властивість, що об'єднує всі елемети даної множини.

Приклад 1.4. $A = \{1; 3; 15\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x \leqslant 2\}$

Означення 1.4. Множина A — це **підмножина** множини B ($A \subset B$), якщо $(\forall x \in A) : x \in B$ (кожний елемент множини A є елементоммножини B)

$\forall A : A \subset A, \varnothing \subset A$

Означення 1.5. Множини A і B — **рівні множини** або ці **множини співпадають**, ($A = B$) якщо $A \subset B$ і $B \subset A$. Інакше кажучи, якщо вони складаються з ожних і тих самих елементів.

Означення 1.6. **Перетин множин** A і B ($A \cap B$) — це множина, що складається з елементів, що належать одночасно обом множинам: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.

Означення 1.7. **Різниця множин** A і B ($A \setminus B$) — це множина, що складається з елементів множини A, що не належать множині B: $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.

Означення 1.8. **Універсальна множина** U — це множина, що складається зусіх елементів у даному контексті, (наприклад, множина усіх чисел, множина усіх студентів).

Означення 1.9. **Доповнення множини** A ($\overline{A}$) — це множина, що складається зусіх елементів універсальної множини, крім тих, що належать множині A. $\overline{A} = \{x : x \notin A\}$

Означення 1.10. **Декартовий добуток множин** X та Y ($\overline{A}$) — це множина всіх упорядкованих пар $(x; y)$, де $x \in X$ та $y \in Y$

Наприклад, $X = \{\triangle\}$, $Y = \{1; 2\}$, $x \times Y = \{(\triangle; 1); (\triangle; 2)\}$.
Аналогічно визначемо декартів добуток n множин, $X^n = \underbrace{X \times X \times ... \times X}_{n \text{ раз}}$.

Зауваження. $X \times Y = \varnothing \Leftrightarrow (X = \varnothing) \vee (Y = \varnothing)$.

1.3 Поняття бінарного відношення. Відношення порядку. Функціональне відношення

Означення 1.11. **Бінарне відношення** — це деяка підмножина декартового добутку двох множин, тобто довільна множина упорядкованих пар:
$R \subset X \times Y$, $R \subset \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}$.

Запис: $(x, y) \in R$, або xRy, означає, що x зв'язаний з y відношенням R.
Множини перших та других елементів упорядкованих пар, що утворюють деяке відношення, це — **область визначення** і **область значень** цього відношення відповідно.
Якщо $R \subset X^2$ (тобто $R \subset X \times X$), то говорять, що відношення R *задано на множині* X.

Означення 1.12. Відношення $R \subset X^2$ — це **відношення часткового порядку**, якщо виконуються наступні властивості:

1. $\forall x \in X \; xRx$ (рефлексивність)
2. $(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$ (антисиметричність)
3. $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$ (транзитивність)

Множина X, на якій введено відношення часткового порядку $R \subset x^2$ є частково упорядкованою.
Для такого відношення, запис xRy означає, що y слідує за x, або x передує y (де x та y — елементи множини X).

Приклад 1.5. Відношення частково порядку на N:

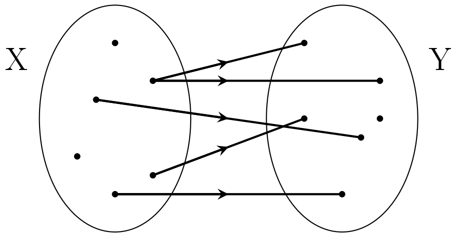
1. R: "a є дільником b".
2. R: "a менше рівно b".

Нехай $R \subset X^2$ — відношення часткового порядку на X. Якщо будь які два елементи x та y множини X при цьому порівнюємі (тобто xRy або yRx), то таке відношення — це **відношення порядку**, а множина X — **упорядкована множина**.

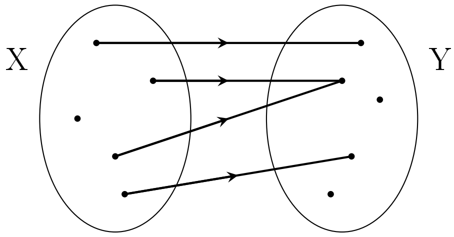
Приклад 1.6.

1. R: "a менше рівно b".
2. R: "a є дільником b— не відношення порядку, бо наприклад числа 2 та 3 не є порівнюваними.

Відношення $R \subset X \times Y$ — це **функціональне відношення**, якщо $(xRy_1 \wedge xRy_2) \Rightarrow y_1 = y_2$, тобто якщо воно не містить різних пар з однаковими першими елементами.



відношення не функціональне



відношення функціональне

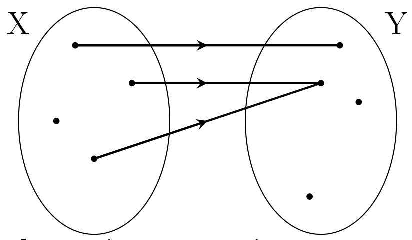
1.4 Відображення(функція). Образ та прообраз множини. Класифікація відображень

Нехай $R \subset X \times Y$ — функціональне відношення. Якщо множина X співпадає з областю візначення цього відношення (тобто X утворено першими елементами тільки тих упорядкованих пар, які утворюють відношення R), то це функціональне відношення — це *відображення функції із X в y*

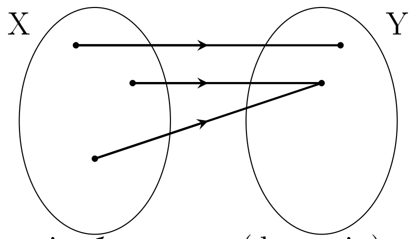
Таким чином, якщо відношення $R \subset X \times Y$ це функція, то для кожного елемента x із X існує, щей при тому єдиний, елемент y із Y, такий, що xRy.

$$R \subset X \times Y \text{ - функція } \Rightarrow \forall x \in X \quad \exists! y \in Y : xRy$$

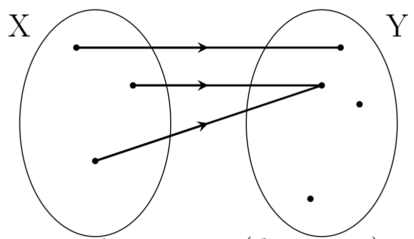
Якщо не тільки X співпадає з областю визначення, а й Y співпадає з множиною значень, то це відображення — це *відображення із X на y*



функціональне відношення
не функція



відображення (функція)
із X на y



відображення (функція)
із X в y

Зауваження. Довільне відображення із X на Y одночасно є відображенням із X в Y, але не навпаки.

Означення 1.13. Відображення множини в себе, тобто із X в X — це **оператор**.

Функції будемо позначати наступним чином:

$$F : X \to Y, X \xrightarrow{f} Y, X \ni x \overset{f}{\mapsto} y \in Y,$$

а якщо із контексту зрозуміло про які X та Y ідеться, то позначають — $y = f(x)$ або прость символом f.

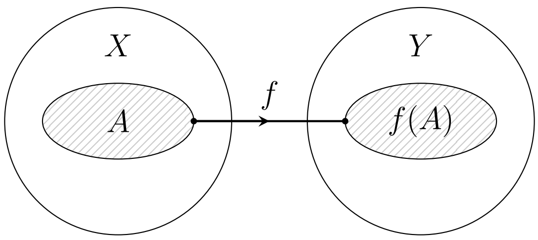
Приклад 1.7.

1. Тотожне відображення: $I : X \to X; \forall x \in X I(x) = x$
2. Постійне відображення (константа): $C : X \to Y \quad \exists! y \in Y \quad \forall x \in X \quad C(x) = y$
3. відношення $y = x^2$ — це функція, а $y^2 = x^2$ — не функція, бо наприклад при $x = 5$ отримаємо $y = \pm 5$, тобто порущується вимога функціональності.

Для функції $y = f(x)$, x — це **аргумент функції** f, або **незалежна змінна**, а елемент $y_0 \in Y$, що стоїть у відповідності з конкретним значенням $x_0 \in X$ — це **значення функції** в точці x_0, або **образ елемента** x_0 при відображенні f та позначається $f(x_0) = y_0$. При цьому x_0 — **праобраз** елемента y_0, що означає, що $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

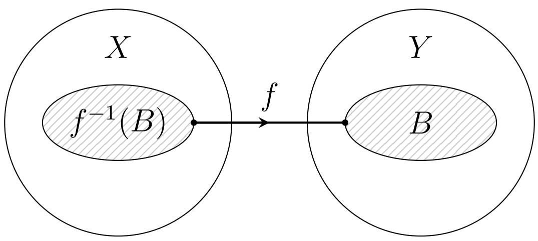
Означення 1.14. Образ множини $A \subset X$ при відображенні $f : x \to Y$ — це множина $f(A)$ тих елементів множини Y, які є відображенням множини A:

$$f(A) \equiv \{y \in Y \mid \exists x \quad (x \in A \wedge y = f(x))\}$$



Означення 1.15. Повний прообраз множини $B \subset Y$ при відображенні $f : X \to Y$ називається множина $f^{-1}(B)$ тих елементів X, образи яких містяться в B:

$$f^{-1}(B) \equiv \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$



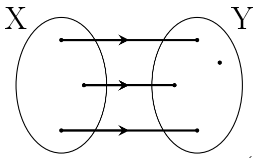
Зауваження. Нехай $f : X \to Y$, $A \subset X$, $B = f(A)$.

Легко помітити, що $A \subset f^{-1}(B)$, тобто $A \subset f^{-1}(f(A))$. Причому в загальному випадку буде саме строге відношення (хоча частина, можливо, є рівністю), тобто $A \neq f^{-1}(B)$. Як приклад, можна привести $f(x) = x^2$ $X = [-1; 1]$, $Y = [-1; 1]$, $A = [0; 1]$, $A \subset X$.

Існування таких прикладів пояснює чому в визначенні праобраз множини називають "повним". В наведеному прикладі множину A можна назвати "неповним" праобразом множини B.

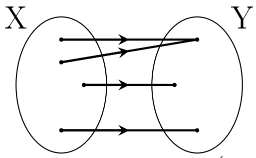
Відображення $f : X \to Y$ по характеру поведінки f класифікують на:

— інєктивне(інєкція), якщо $(\forall x_1, x_2 \in X) : (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$



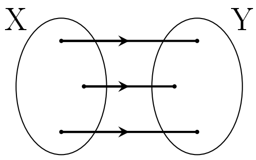
тобто різні елементи мають різні образи.

— сюрєктивне(сюрєкція), якщо $f(X) = Y$

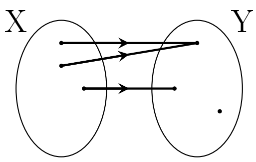


(повний образ всього X є в Y, тобто в Y немає вільних елементів)

— бієктивне(бієкція, взаємно однозначне відображення), якщо воно одночасно є сюрєкцією та інєкцією.



— загального виду – ні сюрєктивне ні інєктивне.



Означення 1.16. Перестановка або **перетворення** — це бієкція множини на саму себе, тобто бієктивний оператор.

1.5 Зворотнє відображення та композиція відображень.