

Theorver

6 листопада 2022 р.

Зміст

1	Вступ в теорію імовірності	3
1.1	Математична модель імовірнісного експерименту	3
1.2	Дискретний простір елементарних подій	3
1.3	Операції над подіями	4
1.4	Ймовірність випадкової події	5
1.5	Класична модель	5
2	Деякі класичні моделі і розподіли.	8
2.1	Біноміальний розподіл	8
2.2	Мультиполіноміальний розподіл	10
2.3	Гіпергеометричний розподіл	10
2.4	Статистика Больцмана, Бозе-Ейнштейна, Фермі-Дірака	11
3	Геометричний ймовірнісний експеримент	12
4	Симетричне випадкове блукання. принцип відбиття (віддзерняє- мня)	14
5	Умовні ймовірності. Незалежність подій. Формула повної ймовірно- сті та формула Байса	15

Розділ 1

Вступ в теорію імовірності

1.1 Математична модель імовірнісного експерименту

Означення 1.1. Ймовірнісним (статистичним) експериментом — називають експеримент, для якого:

- 1) Множин Ω можливих результатів наперед відома.
- 2) Наперед знати, яким саме результатом закінчиться експеримент, ми не можемо.
- 3) Експеримент можна повторювати як завгодно багато разів при однакових умовах.

Приклад: 1.1.

- 1) Підкидання монети.
- 2) Підкидання кубика.

Означення 1.2. Простором елементарних подій експерименту, називають множину Ω всіх можливих результатів експерименту.

Приклад: 1.2.

- 1) Монета підкидається 1 раз.
 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} = \{P, G\}; |\Omega| = 2$
- 2) Монета підкидається двічі.
 $\Omega = \{GG, GP, PG, PP\}; |\Omega| = 4$
- 3) Монету підкидають до першої появи герба.
 $\Omega = \{G, PG, PPG, \dots\}$
 $\omega_i = \underbrace{PP \dots P}_{i-1} G, i = 1, 2, 3, \dots$

$|\Omega| = \infty, \Omega$ — зліченна множина

- 4) Задача про зустріч.

Двоє людей домовились про зустріч в секретному місці між 12:00 і 13:00. Кожен з них вибирає час приходу на місце навмання.

$$\Omega = \{(t_1, t_2) : 0 \leq t_1 \leq 1, 0 \leq t_2 \leq 1\}$$

t_1 — час прибуття 1-ої людини

t_2 — час прибуття 2-ої людини

Ω має потужність континуума.

1.2 Дискретний простір елементарних подій

Вважаємо, що Ω — скінченна або зліченна множина.

Означення 1.3. Довільна підмножина $A \subseteq \Omega$ дискретного простору елементарних подій — це **випадкова подія**.

Зауваження. Якщо Ω — довільна (не обов'язково дискретна), то взагалі кажучи не кожна її підмножина є випадковою подією.

Кажуть, що подія A відбулася, якщо відбулася якась з елементарних подій $\omega \in A$.

Приклад: 1.3.

1) Підкидають 1 раз гральний кубик.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; |\Omega| = 6$$

$A = \{\text{Випала парна кількість очок}\}$

$$A = \{2, 4, 6\}, |A| = 3$$

2) Кидок 2-х гральних кубиків.

$$\Omega = \{(i, j), i = \overline{1, 6}; j = \overline{1, 6}\}; |\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$$

$A = \{\text{сума очок дорівнює 4}\}$

$$A = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}, |A| = 3$$

3) Підкидання монети до першого герба.

$$\Omega = \{\Gamma, P\Gamma, PP\Gamma, \dots\}$$

$A = \{\text{Було проведено непарну кількість підкидань}\}$

$$A = \{\Gamma, PP\Gamma, \dots, \underbrace{P \cdots P}_{2k} \Gamma, \dots\} \quad A - \text{зліченна.}$$

1.3 Операції над подіями

1) Об'єднання (сума) подій A і B — це подія $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \vee \omega \in B\}$

2) Перетин (добуток) подій A і B — це подія $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\}$ — відбулися обидві події.

3) $A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$ — відбулась подія A , але не відбулася подія B .

$$A \setminus B = A \cap \underline{B}$$

4) $A \subset B$ — з події A випливає подія B .

Означення 1.4.

1) Подія Ω називається достовірною подією.

2) Подія $\emptyset \subset \Omega$ називається неможливою подією.

3) Подія $\overline{A} = \Omega \setminus A$ називається протилежною до події A .

4) Події A і B називаються несумісними, якщо $A \cap B = \emptyset$

Приклад: 1.4. Підкидають два гральних кубика.

$$\Omega = \{(i, j), i = \overline{1, 6}, j = \overline{1, 6}\}$$

$A = \{\text{сума очок дорівнює 4}\}$

$$A = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$

$B = \{\text{на першому кубіку 6 очок}\}$

$$B = \{(6, j), j = \overline{1, 6}\}$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \text{ і } B \text{ несумісні.}$$

Зауваження. До подій, як до множини, можна застосувати правила де моргана:

$$\text{а) } \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$$

$$\text{б) } \bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$$

1.4 Ймовірність випадкової події

Вважаємо, що Ω — дискретна множина. Кажуть, що на Ω задано розподіл ймовірностей, якщо кожній елементарній події $\omega \in \Omega$ ставиться у відповідність число $P(\omega)$ так, що:

- 1) $\forall \omega \in \Omega : P(\omega) \geq 0$
- 2) $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$ — умова нормування.

Тоді для довільної випадкової події $A \subseteq \Omega$:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$$

$P(A)$ називається ймовірністю події A .

Властивості ймовірності:

- 1) $P(\Omega) = 1$ — випливає з умови нормування, (2)
 - 2) $P(\emptyset) = 0$
 - 3) $P(A \cup B) = \sum_{\omega \in A \cup B} P(\omega) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) + \sum_{\omega \in B} P(\omega) - \sum_{\omega \in A \cap B} P(\omega) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Для несумісних подій ($A \cap B = \emptyset$) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- 4) $P(\bar{A}) = \sum_{\omega \in \bar{A}} P(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega \setminus A} P(\omega) = 1 - P(A)$

1.5 Класична модель

Якщо $|\Omega| = N$ і всі елементарні події вважаються рівноімовірними, тобто

$$P(\omega_1) = \dots = P(\omega_N) = \frac{1}{N},$$

то $\forall A \subseteq \Omega$:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{N} = \frac{1}{N} |A| = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

— відношення кількості сприятливих елементарних подій для A до загальної кількості елементарних подій.

Приклад: 1.5.

- 1) Підкидаємо симетричну монету

$$\Omega = \{P, \Gamma\}$$

Нехай $P(P) = \frac{1}{2}$, $P(\Gamma) = \frac{1}{2}$ — припущення що до симетричності монети.

Якщо $P(P) = p$, $P(\Gamma) = (1 - p)$, де $p \neq \frac{1}{2}$, то монета несиметрична.

- 2) Монету підкидають n разів, фіксована кількість.

$\Omega = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_i = 0, 1\}$, де $\varepsilon_i = 0$, якщо випала решка в i -тому підкиданні, $\varepsilon_i = 1$, якщо випав герб.

$$|\Omega| = 2^n$$

Покладемо: $P(\omega) = \frac{1}{2^n}$ — припущення рівноможливості елементарних подій.

Зауваження. $\sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} 2^n = 1$

$A = \{\text{герб випав } k \text{ разів в } n \text{ випробуваннях}\}$

$$A = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \Omega : \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = k\}$$

$|A| = C_n^k$ — кількість способів вибрати k -елементну підмножину n -елементної множини

Таким чином: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_n^k}{2^n}$

3) Два гравці по черзі підкидають монету. Виграє той, в кого раніше випаде герб.

$A = \{\text{виграв 1-ший гравець}\}$

$B = \overline{A} = \{\text{виграв 2-гий гравець}\}$

$\Omega = \{\Gamma, P\Gamma, PP\Gamma, \dots\}$

$A = \{\Gamma, PP\Gamma, PPPP\Gamma, \dots\}$

$B = \{P\Gamma, PPP\Gamma, \dots\}$

Покажимо: $\omega_i = \underbrace{PPP\dots P}_{i-1}\Gamma, i = 1, 2, \dots$

Нехай $P(\omega_i) = \frac{1}{2^i}$

Маємо: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$ — умова нормування виконується.

Згідно значення:

$$P(A) = \sum_{i-\text{непарне}} P(\omega_i), P(B) = 1 - P(A) = \sum_{i-\text{парне}} P(\omega_i)$$

$$P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

Тоді: $P(B) = 1 - P(A) = \frac{1}{3}$.

4) Задача про секретаря

Написано n листів різним адресатам. Ці листи навмання вкладаються в конверти з адресами.

$A = \{\text{Принаймі один лист прийде за призначенням}\}$.

Опишемо простір елементарних подій.

$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}, i_j = \overline{1, n}; i_j - \text{різні} \right\}$ — множина перестановок множини $(1, 2, \dots, n)$.

Подія A зображається у вигляді

$$A = A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n,$$

де $A_i = \{i\text{-тий лист прийшов за призначенням}\}$

A -відбулася принаймі одна з подій A_1, \dots, A_n .

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n) = ?$$

Лема 1.1 (Формула включень-виключень). *Нехай A_1, \dots, A_n — випадкові події а Ω . Тоді $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$*

Розглянемо подію

$$A_1 = \{\text{Лист з номером 1 прийшов за призначенням}\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix} \in \Omega \right\}, |A_1| = (n-1)!$$

Зрозуміло, що $|A_2| = \dots = |A_n| = (n-1)!$

$$A_1 \cap A_2 = \{ \text{Листи з номерами 1 і 2 прийшли за призначенням} \} = \\ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix} \in \Omega \right\}, |A_1 \cap A_2| = (n-2)!$$

і так далі...

$$|A_1 \cap A_3 \cap \dots \cap A_k| = (n-k)!$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)!}{n!} - \sum_{i < j} \frac{(n-2)!}{n!} + \sum_{i < j < k} \frac{(n-3)!}{n!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} = \\ = n \frac{(n-1)!}{n!} - C_n^2 \frac{(n-2)!}{n!} + C_n^3 \frac{(n-3)!}{n!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} = \\ = \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{2!(n-2)!} \frac{(n-2)!}{n!} + \frac{n!}{23(n-3)!} \frac{(n-3)!}{n!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} = \\ = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

Якщо $n \rightarrow \infty$, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1}$$

Розділ 2

Деякі класичні моделі і розподіли.

2.1 Біноміальний розподіл

Припустимо, що деякий ймовірнісний експеримент повторюється n разів, в кожному з яких може відбутись або дуюка подія A — ”успіх”, або подія \bar{A} — ”невдача”. Простір всіх можливих результатів можна описати так:

$\Omega = \{\omega : \omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_i \in \{0, 1\}\}$, де $\varepsilon_i = 0$, якщо в i -тому експерименті сталася невдача, $\varepsilon_i = 1$, якщо в i -тому експерименті стався успіх.

Припишемо кожній елементарній події $\omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ ймовірність

$$P(\omega) = p^{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n \varepsilon_i},$$

де $p \in (0, 1)$ - деяке число.

Переконаймося, що означення коректне, тобто, що $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$, маємо

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) &= \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n} p^{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n \varepsilon_i} = \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \sum \varepsilon_i = k} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^n p^k (1-p)^{n-k} \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \sum \varepsilon_i = k} 1 = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= (p + (1-p))^n = 1. \end{aligned}$$

При $n = 1$ отримаємо:

$$\Omega = \{0, 1\}$$

$$p(0) = 1 - p$$

$$p(1) = p$$

p — це ймовірність ”успіху” в одному випробуванні.

Розглянемо події

$A_n(k) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \Omega : \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = k\} = \{\text{В } n \text{ випробуваннях сталося рівно } k \text{ успіхів}\}, k = \overline{0, n}.$

Тоді $P(A_n(k)) = \sum_{\omega \in A_n(k)} p(\omega) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = \overline{0, n}.$

Означення 2.1. Набір ймовірностей $\{P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = \overline{0, n}\}$ — цей **біноміальний розподіл** з параметрами n (кількість випробувань), і p (ймовірність успіху в одному випробуванні); $Bin(n, p)$.

Приклад: 2.1. (Випадкове блукання)

Деяка частинка виходить з нуля і через одиницю часу, робить або крок вгору, або вниз. За n кроків, де n фіксоване, частинка може переміститись що найбільше на n кроків вгору або вниз.

Beautiful image.

Простір елементарних подій:

$\Omega = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_i = \pm 1\}$, де $\varepsilon_i = -1$, якщо на i -тому кроці частинка зробила крок вниз, $\varepsilon_i = 1$, якщо на i -тому кроці частинка зробила крок вгору.

Покладемо

$$P(\omega) = p^{\nu(\omega)} (1-p)^{n-\nu(\omega)},$$

де $\nu(\omega)$ — це кількість одиниць в $\omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i = \mu(\omega) - (n - \mu(\omega)) = 2\mu(\omega) - n \Rightarrow$$

$$\mu(\omega) = \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i + n}{2}$$

Оскільки $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$, то простір Ω разом з розподілом ймовірностей $p(\omega)$ визначає деяку ймовірнісну модель руху частинки за n кроків.

Розглянемо події

$A_n(k) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \Omega : \mu(\omega) - (n - \mu(\omega)) = k\} = \{\text{за } n \text{ кроків частинка опиниться в точці з координатою } k\}.$

Beautiful image.

Червоний прямокутник — це область де "живуть" шляхи з $(0, 0)$ в (n, k)

$$P(A_n(k)) = C_n^{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}}$$

Умова досяжності: n і k мають однакову парність.

2.2 Мультиполіноміальний розподіл

Проведемо n випробувань, в кожному з яких може спостерігатись один з r несумісних результатів. Опишемо Ω :

$\Omega = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_i = \overline{1, r}\}$, де $\varepsilon_i = j$ в j -му випроуванні спостерігали результат номер j , $j = \overline{1, r}$, $i = \overline{1, n}$.

Нехай:

$\nu_1(\omega)$ — це кількість одиничок в $\omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

$\nu_2(\omega)$ — це кількість двійок в $\omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

$\nu_r(\omega)$ — це кількість координат які дорівнюють r в $\omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

Покладемо:

$$P(\omega) = p_1^{\nu_1(\omega)} p_2^{\nu_2(\omega)} \dots p_r^{\nu_r(\omega)}, \text{ де } p_i \geq 0, \sum_{i=1}^r p_i = 1.$$

Покажемо, що $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$. Маємо:

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) &= \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \Omega} p_1^{\nu_1(\omega)} p_2^{\nu_2(\omega)} \dots p_r^{\nu_r(\omega)} = \sum_{\substack{n_1 \geq 0, \dots, n_r \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_r = n}} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r} = \\ &= \sum_{n_1 + \dots + n_r = n} C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \dots C_{n-(n_1+\dots+n_{r-1})}^{n_r} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r} = (p_1 + \dots + p_r)^n = 1. \end{aligned}$$

Розглянемо події

$A_n(K_1, \dots, K_r) = \{\omega \in \Omega : \nu_1(\omega) = K_1, \dots, \nu_r(\omega) = K_r\} = \{ \text{в } n \text{ випробуваннях результат } N_1 \text{ відбувся } K_1 \text{ раз, результат } N_2 \text{ відбувся } K_2 \text{ разів, } \dots, \text{ результат } N_r \text{ відбувся } K_r \text{ разів} \}, k_1 + \dots + K_r = n$.

Тоді

$$P(A_n(K_1, \dots, K_r)) = \frac{n!}{K_1! \dots K_r!} p_1^{K_1} \dots p_r^{K_r}.$$

Означення 2.2. Набір ймовірностей $\{\frac{n!}{K_1! \dots K_r!} p_1^{K_1} \dots p_r^{K_r}, K_i \geq 0, K_1 + \dots + K_r = n\}$ — це **мультиполіноміальний (поліноміальний) розподіл** з параметрами n і p_1, \dots, p_r , де $\sum_{i=1}^r p_i = 1$.

Зауваження. І біноміальний і поліноміальний розподіли пов'язані з вибором без повторень.

2.3 Гіпергеометричний роподіл

Нехай в урні міститься N куль, занумерованих від 1 до N . З них M є білими, $N - M$ чорними. Припустимо, що проводиться вибір без повернення n куль, $n < N$. Простір елементарних подій:

$$\Omega = \{\omega : \omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_i = \overline{1, N}, \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \dots \neq \varepsilon_n\}$$

$$|\Omega| = N(N-1)\dots(N-n+1) = A_N^n$$

$$\text{Покладемо: } \forall \omega \in \Omega : P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{A_N^n}$$

Розглянемо події:

$A_n(k) = \{\text{Серед вийнятих куль рівно } k \text{ виявились білими}\}$

$$|A_n(k)| = \frac{n!}{k!(n-k)!} A_M^k A_{N-M}^{n-k}$$

і тоді

$$P(A_n(k)) = \frac{|A_n(k)|}{|\Omega|} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k! C_M^k (n-k)! C_{N-M}^{n-k}}{n! C_N^n} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

Означення 2.3. Набір ймовірностей $\left\{ \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, k : \begin{array}{l} 0 \leq k \leq M \\ 0 \leq n-k \leq N-M \end{array} \right\}$ — це **гіпергеометричний розподіл** з параметрами N, M, n .

Можна показати, що при $N \rightarrow \infty, M \rightarrow \infty$ так, що $\frac{M}{N} \rightarrow p$:

$$\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{M \rightarrow \infty, \frac{M}{N} \rightarrow p} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

2.4 Статистика Больцмана, Бозе-Ейнштейна, Фермі-Дірака

Задача 2.1. Є n частинок, кожна з яких може знаходитися з однаковою ймовірністю $\frac{1}{N}$ в кожній з N комірок ($N > n$). Потрібно знайти, наприклад, ймовірність того, що певна комірка виявиться порожньою, всі частинки потрапляють в різні комірки, тощо.

1. В статистиці Больцмана рівноімовірними є довільні розміщення, що відрізняються не лише кількістю, а й набором частинок в комірці.

$$\Omega_1 = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_i \in \{1, \dots, N\}\},$$

ε_i — це номер комірки, яку "вибрала" собі i -та частинка.

$$|\Omega_1| = N^n, P(\omega) = \frac{1}{N^n} \quad \forall \omega \in \Omega_1$$

2. В статистиці Бозе-Ейнштейна вважаються тотожними випадки, коли частинки міняються місцями між комірками: важлива лише кількість частинок в комірці. Тоді

$$\Omega_2 = \{\omega : \omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = n\},$$

ε_i — кількість частинок в i -тій урні.

$$|\Omega_2| = C_{N+n-1}^n, P(\omega) = \frac{1}{C_{N+n-1}^n}.$$

3. Згідно статистики Фермі-Дірака в кожній комірці може знаходитись не більше однієї частинки.

$$\Omega_3 = \{\omega : \omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \dots \neq \varepsilon_n, \varepsilon_i \in \{1, \dots, N\}\},$$

$$|\Omega_3| = N(N-1)\dots(N-n+1) = A_N^n,$$

$$\forall \omega \in \Omega_3 : P(\omega) = \frac{1}{A_N^n}.$$

Розділ 3

Геометричний ймовірнісний експеримент

Задача 3.1. Нехай — деяка область скінченної міри (довжина в , площа в , об'єм в ,). В цій області ми навмання вибираємо деяку точку . Питання: чому дорівнює ймовірність того, що вибрана точка буде належати деякій області ?

Припущення:

1. Вибрати можна довільну точку .
2. Ймовірність потрапляння точки в область має бути пропорційно мірі (довжині, площі, об'єму,)
3. Ймовірність не має залежати від розміщення і форми області .

При виконанні припущень 1) – 3) покладають де — це міра у відповідному просторі.

Приклади:

1) Задача про зустріч.

Двоє осіб домовилися про зустріч між 12:00 і 13:00. Кожний вибирає час приходу навмання, чакає не більше 15хв. і йде. Яка ймовірність, того, що ці дві особи зустрінуться?

— час прибуття -щі особи.

2) Розглянемо квадратне рівняння , де , вибираються навмання в , незалежно одне від одного.

Корені рівняння виявляються дійсними
необхідна і достатня умова того, що корені дійсні.

Задача 3.2 (парадока Бертрана). В крузі одиничного радіусу навмання вибирається хорда. Яка ймовірність того, що її довжина буде більшою за сторону правильного трикутника, вписаного в це коло.

Розв'язання. Варіант 1: Закріпимо один кінець хорди. Тоді другий кінець — це довільна точка на колі:

Варіант 2: Фіксуємо напрямок хорди. Проведемо діаметр, перпендикулярний до цього напрямку. Кожну хорду можна ототожнити з точкою цього діаметра

— точка відрізка.

Варіант 3: Через кожну точку круга проходить єдина хорда, для якої ця точка круга є серединою. Тому хорду можна ототожнити з її серединою. — середина хорди — множина точок круга, вписаного в правильний трикутник.

Приклад: 3.1. (Задача Бюффона) Голка довжини 2 навмання кидається на площину, розграфлену паралельними прямими на відстані 2 одна від одной. Знайти ймовірність того, що голка перетне якусь з прямих.

Розв'язання. Положення голки на площині опишемо парою (a, α) , де a — відстань від центра голки до ближчої з прямих; α — кут, утворений голкою з вказаною прямою.

Обчислення числа π методом Монте-Карло: n разів голку кинуто на площину. Нехай K разів голка перетнула пряму. Число K/n має бути близьким (при дуже великому n) до $\pi/2$. Отже — апроксимація для π .

Розділ 4

Симетричне випадкове блукання. принцип відбиття (віддзерняємия)

Нехай p - фіксований час спостереження \mathcal{L} - множина всіх можливих траєкторій частинки за час n

на n -тому кроці, крок був вгору

на n -тому кроці, крок був вниз

Покладемо: \mathcal{L}_n .

Траєкторія випадкового блукання називається шляхом з початку координат

Нехай \mathcal{L}_n -кількість шляхів з точки

Умови досяжності: \mathcal{L}_n і \mathcal{L}_{n+1} мають мати однакову парність

— кількість кроків вгору

— кількість кроків вниз

— кількість кроків (всього)

Множина шляхів, які ведуть з \mathcal{L}_n в \mathcal{L}_{n+1}

Зауваження. при $n=0$

Лема 4.1 (Принцип відбиття). *Нехай i — точки з цілочисельними координатами і відповідно, причому \mathcal{L}_n , \mathcal{L}_{n+1} .*

Нехай \mathcal{L}_n — точка з координатами (x, y) —симетрична точці відносно осі абсис.

Тоді кількість шляхів з \mathcal{L}_n в \mathcal{L}_{n+1} , які дотикаються або перетинають вісь абсис, дорівнює кількості всіх шляхів і в \mathcal{L}_{n+1} .

Кожному шляху з \mathcal{L}_n в \mathcal{L}_{n+1} , який дотикається або перетинає вісь абсис, поставимо у відповідність шлях з \mathcal{L}_n в наступним чином: якщо шлях з \mathcal{L}_n в попадне на вісь x вперше в точці C , то ділянку шляху з \mathcal{L}_n в будуємо як відображення з \mathcal{L}_n в без змін ділянку з \mathcal{L}_n в

Така відповідність є взаємооднозначною, що й доводить лему.

Приклади:

а) знайдемо кількість додатніх шляхів \mathcal{L}_n в \mathcal{L}_{n+1} (всі шляхи над віссю абсис)

б) Кількість невід'ємних шляхів з \mathcal{L}_n в \mathcal{L}_{n+1} — кількість невід'ємних шляхів, які ведуть з \mathcal{L}_n в \mathcal{L}_{n+1} .

Розділ 5

Умовні ймовірності. Незалежність подій. Формула повної ймовірності та формула Байса

Умовна ймовірність події в припущенні, що відбулася деяка подія визначається так:
де вважається, що .

Приклади

1) Підкидаємо два гральних кубика.

На першому кубіку випало 6 очок

сума всіх очок дорівнює 11

2) В сім'ї є двоє дітей. Відомо, що одне з дітей — це хлопчик. Яка ймовірність того, що в цій сім'ї є дівчинка?

Вважаємо, що всі елементарні події є рівноможливими.

В сім'ї є дівчинка

В сім'ї є хлопчик

Таким чином:

Твердження Властивості умовної ймовірності

зауваження: що події і є несумісними

Тому

Отже

2) Запишемоправу частину

Випадкові події і — це незалежні події, якщо

Приклади

Монета підкидається двічі

При першому підкиданні випав герб

При другому підкиданні випав герб

В обох підкиданнях випав герб

Таким чином

Отже події є незалежними

Події — це незалежні в сукупності події,якщо

для довільного набору випадкових подій

Приклад Піраміда Бернштейна

Правильна чотирикутна піраміда пофарбована наступним чином: є червона, синя , зелена грані і одна грань, що пофарбована у всі три кольори. При підкиданні кожна грань випадає з ймовірністю

Випала грань, яка має червоний колір

Випала грань, яка має зелений колір

Випала грань, яка має синій колір

Отже i і i є незалежними

розглянемо :

Отже події , i не є незалежними в сукупності

Твердження: 1) Якщо i незалежні i то 2) Якщо i є несумісними i , то i не є незалежними.

1) Якщо i незалежні, то

тоді

2) Якщо i несумісні, то . Тому . В той же час . Значить , а отже i не є незалежними.

Набір подій — це повна група подій, якщо: 1) при i є несумісними 2) 3) для довільного .

Кажуть, що визначають розбиття .

Теорема формула повної ймовірності

Нехай — повна група подій на i нехай . тоді

Оскільки є попарно неперетинними, то при . Тому

Теорема формула Байеса

Нехай — це повна група подій на i . тоді

Оскільки , то .

Ймовірності , — апіорні ймовірності, — апостеріорні ймовірності гіпотез.

Приклад:

1) маємо 4 кулі: 2 білих, 2 чорних кулі, розкладають довільним чином по двом вазам.

Правитель навмання вибирає вазу, з якої навмання виймає кулю. Яка ймовірність того, що куля виявиться білою.

вийняли білу кулю

вибрали 1-шу вазу , вибрали 2-гу вазу

1-й спосіб

2-й спосіб

3-й спосіб

2) Підкидається гральний кубик, а потім монета підкидається стільки разів, скільки очок випало на кубику. Відомо, що при підкиданні монети випали всі герби. Яка ймовірність того, що на кубику випало 5 очок?

При підкиданні монети випали всі герби

На кубику випало очок

Скористаємося формулою Байеса:

Обчислюємо:

при підкиданнях монети випали всі герби

Отже

3) Повернення в 0 випадкового симетричного блукання

Частинка стартує з 0, в дискретні моменти часу робить крок вгору, вниз з ймовірністю . Нехай — ймовірність того, що частинка коли-небудь повернеться у вихідну точку.

Зпишемо формулу повної ймовірності для , зробивши гіпотези про результат -го кроку.

введемо позначення

частина потрапить в 0, стартувавши з точки

тоді 1-ий крок вгору 1-ий крок вниз

Зпишемо формулу повної ймовірності для

Характеристичне рівняння арифметичної прогресії, а отже

Оскільки , то . Отже

Підставимо в рівняння для :

Таким чином і тоді

Висновок: з ймовірністю 1 частинка, стартувала з 0, повернеться коли небусть в 0.

4) Задача про розорення гравця.

Гравець починає гру в казино, маючи 1 грн.

За одну гру гравець виграє одну гривню з ймовірністю або програє 1 грн з ймовірністю .

Казано має гривень. Яка ймовірність розорення гравця?

Позначимо

— ймовірність розорення гравця, який має гривень.

Зрозуміло, що

Запишемо для формулу повної ймовірності

Отримали

Підсумуємо обидві частини від 0 довільним

Зліва

Справа

Прирівнюємо

Звідси

— ймовірність розорення гравця

— ймовірність розорення казино

Припустимо, що .Тоді

а) якщо . Тоді

б) . Тоді

Для того, щоб ймовірність розорення гравця була меншою за ймовірність розорення казино потрібно