Algebra and geometry

5 вересня 2022 р.

Зміст

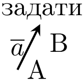
Розділ 1

Векторна алгебра

1.1 Вектори на прямій, на площині, у просторі

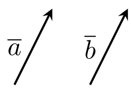
Означення 1.1. **Вектор** — це направлений відрізок прямої.

Вектор повністю задається довжиною та напрямком. Також вектор можна задати, вказавши його початок і кінець.



Вектори позначаються: $\overline{AB}, \overline{a}$, а їх довжини — $|\overline{AB}|$, $|\overline{a}|$.

Означення 1.2. Два **вектори рівні**, якщо їх довжини і напрямки співпадають.



$\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \upuparrows \overline{b}$ (напрямки співпадають) та $|\overline{a}| = |\overline{b}|$ (довжини співпадають).

Означення 1.3. **Колінеарні вектори** (паралельні вектори) ($\overline{a} \parallel \overline{b}$) — це вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Серед них будемо розрізняти вектори одного напрямку: $\overline{a} \upuparrows \overline{b}$, та протилежного напрямку: $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$.

Означення 1.4. **Нульовий вектор** (нуль - вектор) – це вектор нульової довжини, тобто вектор, кінець і початок якого співпадають, $|\overline{0}| = 0$. Буде зручно вважати нульовий вектор вектором довільного напрямку, тобто нульовий вектор є колінеарним будь-якому вектору.

Означення 1.5. Вектор $\overline{a}'$ — **протилежний вектор** до вектора $\overline{a}$, якщо $\overline{a}' \uparrow\downarrow \overline{a}$ і $|\overline{a}'| = |\overline{a}|$, тобто $\overline{a}' = -\overline{a}$.

Означення 1.6. Вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, ...$ — це **компланарні вектори**, якщо вони лежать в одній площині або паралельні одній площині.

1.2 Лінійні операції над векторами

Множення вектора на скаляр

Означення 1.7. Добуток вектора $\overline{a} \neq \overline{0}$ і числа $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha\overline{a})$ — це вектор $\overline{b} = \alpha\overline{a}$, який задовольняє такі умови:

1) $\overline{b}$ колінеарний вектору $\overline{a}$

2) $|\overline{b}| = |\alpha||\overline{a}|$

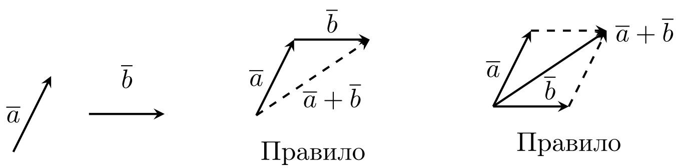
3) $\overline{b} \upuparrows \overline{a}$ — однаково направлені, якщо $\alpha > 0$, і $\overline{b} \uparrow\downarrow \overline{a}$ – протилежно направлені, якщо $\alpha < 0$.

Додавання векторів

Означення 1.8. Сума векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, $(\overline{a} + \overline{b})$ — це вектор, який з'єднує початок вектора $\overline{a}$ з кінцем вектора $\overline{b}$ за умови, що вектор $\overline{b}$ відкладено від кінця вектора $\overline{a}$.

Цей спосіб додавання векторів — це **правило трикутника**.

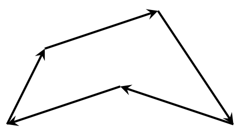
Два вектори можна додати і за іншим правилом, яке має назву — **правило паралелограма**: сумою двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, відкладених від спільного початку, є вектор, який збігається з діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$ як на сторонах. Початки векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ та $\overline{a} + \overline{b}$ співпадають.



Правило трикутника

Правило паралелограма

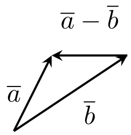
Використовуючи послідовно правило трикутника, можна побудувати суму скінченної кількості довільних векторів. Якщо кінець останнього вектора співпадає з початком першого, то сумою векторів є нульовий вектор: $\overline{0}$.



Віднімання векторів

Означення 1.9. Різниця векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, $(\overline{a}-\overline{b})$ — це вектор $\overline{c}$, який в сумі з вектором $\overline{b}$ дає вектор $\overline{a}$, тобто $\overline{b}+\overline{c}=\overline{a}$.

Очевидно, що $\overline{c}=\overline{a}+(-\overline{b})$.



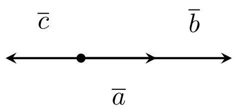
$\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$

1.3 Властивості лінійних операцій, аксіоми векторної алгебри

1. $(\alpha\beta)\overline{a}=\alpha(\beta\overline{a})$ — асоціативність відносно множення на скаляр.
2. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ — комутативність додавання.
3. $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$ — асоціативність додавання.
4. $\left.\begin{array}{c}(\alpha+\beta)\overline{a}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}\\ \overline{a}(\alpha+\beta)=\overline{a}\alpha+\overline{a}\beta\end{array}\right\}$ — дистрибутивність.
5. $\exists!\overline{0}:\forall\overline{a}:\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$ — існування єдиного нуля.
6. $\forall\overline{a}\exists!\overline{a}':\overline{a}'+\overline{a}=\overline{0}$ — існування протилежного вектора.
7. $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$

1.4 Базис на прямій, на площині, у просторі

Розглянемо множину векторів, колінеарних вектору $\overline{a}\neq\overline{0}$. Позначимо її E^1.
Нехай $\overline{a},\overline{b},\overline{c}\in E^1$.



Теорема 1.1. $\forall\overline{b}\in E^1\exists$ *дійсне число* α *таке, що* $\overline{b}=\alpha\overline{a}$, *причому це представлення єдине.*

► Доведемо єдиність даного представлення методом від супротивного.
Нехай $\overline{b} = \tilde{\alpha}\overline{a}$
Тоді $\overline{0} = \overline{b} - \overline{b} = \tilde{\alpha}\overline{a} - \alpha\overline{a} = (\tilde{\alpha} - \alpha)\overline{a} \Rightarrow \tilde{\alpha} - \alpha = 0 \Rightarrow \tilde{\alpha} = \alpha$
Вкажемо значення коефіцієнта α.
Якщо $\overline{a} \upuparrows \overline{b}$, то $\alpha = \dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}$.
Дійсно: $|\alpha\overline{a}| = \left|\dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}\right| |\overline{a}| = \dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}|\overline{a}| = |\overline{b}|$, $\alpha\overline{a} \upuparrows \overline{b}$.
Якщо ж $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$, то $\alpha = -\dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}$ (доведення аналогічне).

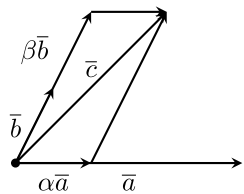
◄

Нехай $\overline{a} \nparallel \overline{b}$ (тому $\overline{a} \neq \overline{0}$, $\overline{b} \neq \overline{0}$). Розглянемо множину векторів, компланарних векторам $\overline{a}$ та $\overline{b}$, позначимо її E^2. Нехай $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in E^2$.

Теорема 1.2. $\forall \overline{c} \in E^2$ $\exists!$ *дійсні* α, β, *такі, що* $\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$.

► Проведемо доведення графічно.

З кінця вектору $\overline{c}$ проведемо дві прямі паралельно векторам $\overline{a}$ і $\overline{b}$ відповідно до перетину з цими векторами чи прямими, на яких вони лежать. Отримали паралелограм, дві сторони якого дорівнюють відповідно $\alpha\overline{a}$ і $\beta\overline{b}$ (за теоремою 1.1). Діагоналлю цього паралелограма є вектор $\overline{c}$, тобто $\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$. Єдиність коефіцієнтів α та β випливає з двох умов:



1) існує лише одна точка перетину непаралельних прямих,

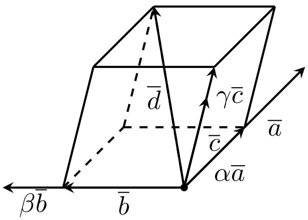
2) за теоремою 1.1 константи α і β визначаються однозначно.

◄

Нехай E^3 — множина всіх векторів у просторі, причому $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ — некомпланарні ($\overline{a} \neq \overline{0}, \overline{b} \neq \overline{0}, \overline{c} \neq \overline{0}$).

Теорема 1.3. $\forall \overline{d} \in E^3, \exists!\ \alpha, \beta, \gamma : \overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$.

►



Із кінця вектора $\overline{d}$ проведемо три площини, паралельні парам векторів $(\overline{b}, \overline{c})$, $(\overline{a}, \overline{c})$, $(\overline{a}, \overline{b})$. Ці площини перетнуть прямі, на яких лежать $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ в єдиних точках. За теоремою 1.1 отримаємо нові вектори $\alpha\overline{a}, \beta\overline{b}, \gamma\overline{c}$, а вектор $\overline{d}$ – це діагональ паралелепіпеда, на них побудованого, тобто $\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$, що і треба було довести.

◄

Зауваження. Базисом у множині E^1 може слугувати довільний ненульовий вектор, базисом у E^2 – впорядкована пара неколінеарних векторів, а в E^3 — впорядкована трійка некомпланарних векторів. Вектору $\overline{b}$ було поставлено у відповідність число α; вектору $\overline{c}$ – числа α і β; вектору $\overline{d}$ – числа α, β, γ. Ці числа називаються — коефіцієнти розкладу векторів $\overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ за базисами $\overline{a}$; $\overline{a}, \overline{b}$; $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ просторів E^1, E^2 і E^3 відповідно.

Означення 1.10. Коефіцієнти розкладу вектора $\overline{a}$ за базисом $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ...$ — це числа $\alpha_1, \alpha_2, ... \in \mathbb{R}$, такі, що $\overline{a} = \alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ...$.

1.5 Декартів прямокутний базис

Означення 1.11. Впорядкована трійка некомпланарних векторів $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ називається правою (**права трійка векторів**), якщо з кінця вектора $\overline{c}$ поворот від $\overline{a}$ до $\overline{b}$, менший за $180°$, тобто відбувається проти годинникової стрілки.

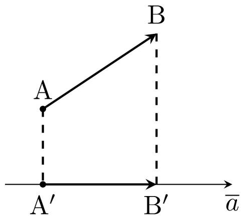
Означення 1.12. Трійка векторів $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ утворює **декартів правий прямокутний базис**, якщо:

1. $\overline{i} \perp \overline{j}, \overline{j} \perp \overline{k}, \overline{k} \perp \overline{i}$
2. $|\overline{i}| = |\overline{j}| = |\overline{k}| = 1$
3. $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ — права трійка

1.6 Проекція вектора на вектор (або на вісь)

Нехай задано $\overline{a} \neq \overline{0}$.

Означення 1.13. Проекція вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{a}$ називається довжина відрізка $A'B'$ між основами перпендикулярів, опущених з точок A та B на вектор $\overline{a}$ (або напряму, на якій він лежить):



$$\text{пр}_{\overline{a}}\overline{AB} = \begin{cases} |\overline{A'B'}|, \text{ якщо } \overline{A'B'} \uparrow\uparrow \overline{a} \\ -|\overline{A'B'}|, \text{ якщо } \overline{A'B'} \uparrow\downarrow \overline{a} \end{cases}$$

Властивості проекції:

1. $\text{пр}_{\overline{a}}\alpha\overline{b} = \alpha\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b}$
2. $\text{пр}_{\overline{a}}(\overline{a} + \overline{b}) = \text{пр}_{\overline{a}}\overline{a} + \text{пр}_{\overline{a}}\overline{b}$

1.7 Множення векторів. Скалярний добуток двох векторів

Означення 1.14. Скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (позначається $\overline{a} \cdot \overline{b}$, $\overline{a}\overline{b}$ чи $(\overline{a}, \overline{b})$) — це число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними: $(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}| \cos\varphi$, де $\varphi = \widehat{(\overline{a}, \overline{b})}$.

Алгебраїчні властивості скалярного добутку:

1. $(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$ — комутативність.
2. $\left.\begin{array}{l} (\alpha\overline{a}, \overline{b}) = \alpha(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{a}, \alpha\overline{b}) \\ (\overline{a} + \overline{a}', \overline{b}) = (\overline{a}, \overline{b}) + (\overline{a}', \overline{b}) \\ (\overline{a}, \overline{b} + \overline{b}') = (\overline{a}, \overline{b}) + (\overline{a}, \overline{b}') \end{array}\right\}$ — лінійність.

Геометричні властивості скалярного добутку:

1. $(\overline{a}, \overline{b}) = 0 \Leftrightarrow \overline{a} \perp \overline{b}$.
2. $(\overline{a}, \overline{a}) = |\overline{a}|^2 \Rightarrow |\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})}$.

1.8 Скалярний добуток в координатах

Нехай $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ – це фіксований базис в просторі E^3, $\overline{x}, \overline{y} \in E^3$. Тоді:

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3$$
$$\overline{y} = y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + y_3\overline{e}_3$$

Обчислимо скалярний добуток цих векторів:
$(\overline{x}, \overline{y}) = (x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3, \overline{y}) = (x_1\overline{e}_1, \overline{y}) + (x_2\overline{e}_2, \overline{y}) + (x_3\overline{e}_3, \overline{y}) =$
$x_1(\overline{e}_1, y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + y_3\overline{e}_3) + x_2(\overline{e}_2, y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + y_3\overline{e}_3) + x_3(\overline{e}_3, y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + y_3\overline{e}_3) =$
$x_1y_1(\overline{e}_1, \overline{e}_1) + x_1y_2(\overline{e}_1, \overline{e}_2) + x_1y_3(\overline{e}_1, \overline{e}_3) + x_2y_1(\overline{e}_2, \overline{e}_1) + x_2y_2(\overline{e}_2, \overline{e}_2) + x_2y_3(\overline{e}_2, \overline{e}_3) +$
$x_3y_1(\overline{e}_3, \overline{e}_1) + x_3y_2(\overline{e}_3, \overline{e}_2) + x_3y_3(\overline{e}_3, \overline{e}_3) = x_1y_1(\overline{e}_1, \overline{e}_1) + (x_1y_2 + x_2y_1)(\overline{e}_1, \overline{e}_2) +$
$(x_1y_3 + x_3y_1)(\overline{e}_1, \overline{e}_3) + x_2y_2(\overline{e}_2, \overline{e}_2) + (x_2y_3 + x_3y_2)(\overline{e}_2, \overline{e}_3) + x_3y_3(\overline{e}_3, \overline{e}_3)$.

У частковому випадку, коли $\overline{e}_1 = \overline{i}, \overline{e}_2 = \overline{j}, \overline{e}_3 = \overline{k}$, маємо: $(\overline{e}_1, \overline{e}_2) = (\overline{e}_2, \overline{e}_3) = (\overline{e}_3, \overline{e}_1), (\overline{e}_i, \overline{e}_j) = 1$, де $i = 1, 2, 3$.

$$(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Якщо $\overline{a} = (x, y, z)$, то $|\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1.9 Нормування вектора

Означення 1.15. Нехай $\overline{a} \neq \overline{0}$. **Орт-вектор** вектора $\overline{a}$ — це вектор $\overline{a}_o$, такий, що $\overline{a}_o \uparrow\uparrow \overline{a}$ і $|\overline{a}_o| = 1$.

Означення 1.16. Нормування вектора $\overline{a}$ — це процес отримання орт-вектора $\overline{a}_o$, $\overline{a}_o = \dfrac{1}{|\overline{a}|}\overline{a}$

Якщо $\overline{a} = (x, y, z)$, то

$$\overline{a}_o = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right).$$

Геометричний сенс координат орт-вектора $\overline{a}_o$ у декартовій системі координат: $\overline{a}_o = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ де, $\alpha = (\widehat{\overline{a}, OX}) = (\widehat{\overline{a}_o, OX})$, $\beta = (\widehat{\overline{a}, OY}) = (\widehat{\overline{a}_o, OY})$, $\gamma = (\widehat{\overline{a}, OZ}) = (\widehat{\overline{a}_o, OZ})$.

Означення 1.17. Косинуси кутів, які утворює вектор (або його орт) з осями координат — це **напрямні косинуси**.

Знайдемо косинус кута α:

$$\cos\alpha = \frac{(\overline{a}, \overline{i})}{|\overline{a}||\overline{i}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Твердження 1.1. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Формула для довжини проекції вектора:

$$x = |\overline{a}|\cos\alpha = \text{пр}_{\overline{i}}\overline{a}$$

1.10 Векторний добуток двох векторів

Означення 1.18. Векторний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ $[\overline{a}, \overline{b}]$ — це вектор $\overline{c}$, що задовольняє умови:

1. $\overline{c} \perp \overline{a}$, $\overline{c} \perp \overline{b}$
2. $|\overline{a}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi$, $\varphi = (\widehat{\overline{a}, \overline{b}})$
3. $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — права трійка

Зауваження. Оскільки $\overline{c} \perp \overline{a}$, $\overline{c} \perp \overline{b}$, то $\overline{c}$ перпендикулярний площині векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

Алгебраїчні властивості векторного добутку:

1) $[\overline{a}, \overline{b}] = -[\overline{b}, \overline{a}]$
2) $[\alpha\overline{a}, \overline{b}] = \alpha[\overline{a}, \overline{b}] = [\overline{a}, \alpha\overline{b}]$
3) $[\overline{a} + \overline{b}, \overline{c}] = [\overline{a}, \overline{c}] + [\overline{b}, \overline{c}]$
4) $[\overline{a}, \overline{b} + \overline{c}] = [\overline{a}, \overline{b}] + [\overline{a}, \overline{c}]$

Доведення:

► 1) Нехай $[\overline{a}, \overline{b}] = \overline{c}$, $[\overline{b}, \overline{a}] = \overline{d}$. Тоді: $\overline{c} \perp \overline{a}$ і $\overline{c} \perp \overline{b}$, $\overline{d} \perp \overline{b}$ і $\overline{d} \perp \overline{a}$, тобто вектори $\overline{c}$ і $\overline{d}$ перпендикулярні до площини, в якій лежать вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$, отже, $\overline{c} \parallel \overline{d}$.

$|\overline{c}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi = |\overline{d}|$, де $\varphi = (\widehat{\overline{a}, \overline{b}})$.

$\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — права трійка; $\overline{b}$, $\overline{a}$, $\overline{d}$ — також права трійка $\Rightarrow$ $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{d}$ — ліва трійка, тому вектори $\overline{c}$ та $\overline{d}$ протилежно направлені.

Отже, вектори $\overline{c}$ та $\overline{d}$ колінеарні, мають однакову довжину та протилежно направлені. Тому $\overline{c} = -\overline{d}$.

2) Якщо $\alpha = 0$ або $\overline{a} \parallel \overline{b}$, то рівності очевидні: $[\alpha\overline{a}, \overline{b}] = \alpha[\overline{a}, \overline{b}] = \overline{0}$. Нехай $\alpha < 0$, $[\overline{a}, \overline{b}] = \overline{c}$, $\varphi = (\widehat{\overline{a}, \overline{b}})$, $[\alpha\overline{a}, \overline{b}] = \overline{d}$. Тоді:

$|\alpha\overline{c}| = |\alpha[\overline{a}, \overline{b}]| = |\alpha||[\overline{a}, \overline{b}]| = -\alpha|\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi$.

$|[\alpha\overline{a}, \overline{b}]| = |\alpha\overline{a}||\overline{b}|\sin(\widehat{\alpha\overline{a}, \overline{b}}) = |\alpha||\overline{a}||\overline{b}|\sin(\pi - \varphi) = -\alpha|\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi$.

$\overline{c} \perp$ площині, в якій лежать $\overline{a}$ і $\overline{b}$ $\Rightarrow$ $\overline{c} \perp$ площині, в якій лежать $\alpha\overline{a}$ і $\overline{b}$.

$\overline{d} \perp$ площині, в якій лежать $\alpha\overline{a}$ і $\overline{b}$, отже, $\overline{c} \parallel \overline{d}$.

$\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — права трійка $\alpha\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — ліва трійка, $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\alpha\overline{c}$ — ліва трійка.

$\alpha\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{d}$ — права трійка $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{d}$ — ліва трійка; отже, вектори $\alpha\overline{c}$ та $\overline{d}$. однаково направлені.

Враховуючи однакову довжину векторів $\alpha\overline{c}$ та $\overline{d}$, маємо $\alpha\overline{c} = \overline{d}$ або $[\alpha\overline{a}, \overline{b}] = \alpha[\overline{a}, \overline{b}]$.

3), 4) — очевидно.

◀

Геометричні властивості векторного добутку:

1) $[\overline{a}, \overline{b}] = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{a} \parallel \overline{b}$

2) $|[\overline{a}, \overline{b}]| = S_{\Diamond\overline{a}\overline{b}}$, де $S_{\Diamond\overline{a}\overline{b}}$ — площа паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$, як на сторонах

Доведення:

▶ 1) $|[\overline{a}, \overline{b}]| = |\overline{a}||\overline{b}| \sin\varphi = 0 \Rightarrow \overline{a} = \overline{0}$ або $\overline{b} = \overline{0}$, або $\sin\varphi = 0 \Rightarrow \overline{a} \parallel \overline{b}$.

Якщо $\overline{a} \parallel \overline{b}$, то $\sin\varphi = 0$, і $|[\overline{a}, \overline{b}]| = 0 \Rightarrow [\overline{a}, \overline{b}] = \overline{0}$.

2) $|[\overline{a}, \overline{b}]| = |\overline{a}||\overline{b}| \sin\varphi = |\overline{a}|h = S_{\Diamond\overline{a}\overline{b}}$.

◀

Твердження 1.2. $[\overline{a}, \overline{a}] = 0$.

1.11 Векторний добуток в координатах

Нехай в просторі E^3 зафіксовано базис $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$, $\overline{x}, \overline{y} \in E^3$, тоді

$$\overline{x} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}$$

$$\overline{y} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}$$

Знайдемо координати вектору $[\overline{x}, \overline{y}]$.

Зауважимо, що $[\overline{i}, \overline{j}] = \overline{k}$, $[\overline{j}, \overline{k}] = \overline{i}$, $[\overline{k}, \overline{i}] = \overline{j}$. Тоді:

$[\overline{i}, \overline{j}] = [x_1\overline{i}+y_1\overline{j}+z_1\overline{k}, x_2\overline{i}+y_2\overline{j}+z_2\overline{k}] = x_1x_2[\overline{i}, \overline{i}]+x_1y_2[\overline{i}, \overline{j}]+x_1z_2[\overline{i}, \overline{k}]+y_1x_2[\overline{j}, \overline{i}]+y_1y_2[\overline{j}, \overline{j}]+y_1z_2[\overline{j}, \overline{k}]+z_1x_2[\overline{k}, \overline{i}]+z_1y_2[\overline{k}, \overline{j}]+z_1z_2[\overline{k}, \overline{k}] = (x_1y_2-x_2y_1)[\overline{i}, \overline{j}]+(x_1z_2-x_2z_1)[\overline{i}, \overline{k}] + (y_1z_2 - y_2z_1)[\overline{j}, \overline{k}] = (x_1y_2 - x_2y_1)\overline{k} + (x_1z_2 - x_2z_1)\overline{j} + (y_1z_2 - y_2z_1)\overline{i} = (y_1z_2 - y_2z_1)\overline{i} + (x_1z_2 - x_2z_1)\overline{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\overline{k}$.

Задача 1.1. Знайти площу трикутника з вершинами $A(3,0,-1)$, $B(-2,4,1)$, $C(2,1,-3)$.

Розв'язання. $S = \dfrac{1}{2}|[\overline{AB},\overline{AC}]|$. Оскільки $\overline{AB} = (-5,4,2), \overline{AC} = (-1,1,-2)$, то $[\overline{AB},\overline{AC}] = -10\overline{i} - 12\overline{j} - \overline{k}$. Тоді $|[\overline{AB},\overline{AC}]| = \sqrt{(-10)^2 + (-12)^2 + (-1)^2} = \sqrt{100+144+1} = \sqrt{245}$, і $S = \dfrac{1}{2}\sqrt{245}$

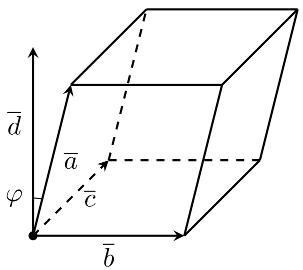
1.12 Мішаний добуток трьох векторів

Означення 1.19. Мішаний добуток векторів $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ — це скалярний добуток $\overline{a}$ з векторним добутком векторів $\overline{b}$ і $\overline{c}$, тобто $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a},[\overline{b},\overline{c}])$.

Теорема 1.4. *Мішаний добуток векторів $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда $V_{пар}$, побудованого на цих векторах, якщо вони складають праву трійку і дорівнює $-V_{пар}$, якщо $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ – ліва трійка:*

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{cases} V_{пар}, & \text{якщо } \overline{a},\overline{b},\overline{c} \text{ — права трійка} \\ -V_{пар}, & \text{якщо } \overline{a},\overline{b},\overline{c} \text{ — ліва трійка} \end{cases}$$

► Розглянемо випадок, коли $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ — права трійка.



Нехай $[\overline{b},\overline{c}] = \overline{d}$. Тоді $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ – права трійка. Позначимо $\varphi = \widehat{(\overline{a},\overline{d})}$.

Тоді $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a},[\overline{b},\overline{c}]) = (\overline{a},\overline{d}) = |\overline{a}||\overline{d}|\cos\varphi = S_{\Diamond\overline{c}\overline{b}}|\overline{a}|\cos\varphi = S_{\Diamond\overline{c}\overline{b}}h = V_{\text{пар}}$, оскільки висота паралелепіпеда $h = |\overline{a}|\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right) = |\overline{a}|\cos\varphi$. У випадку, коли $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ — ліва трійка, доведення аналогічне.

◄

Алгебраїчні властивості:

1. $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{c}\overline{a}\overline{b} = \overline{b}\overline{c}\overline{a} = -\overline{b}\overline{a}\overline{c} = -\overline{c}\overline{b}\overline{a} = -\overline{a}\overline{c}\overline{b}$

2. $(\alpha\overline{a})\overline{b}\overline{c} = \alpha\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{a}(\alpha\overline{b})\overline{c} = \overline{a}\overline{b}(\alpha\overline{c})$

3. $$\begin{aligned} &(\overline{a}+\overline{a}')\overline{b}\overline{c} = \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}'\overline{b}\overline{c} \\ &\overline{a}(\overline{b}+\overline{b}')\overline{c} = \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}\overline{b}'\overline{c} \\ &\overline{a}\overline{b}(\overline{c}+\overline{c}') = \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}\overline{b}\overline{c}' \end{aligned}$$

Доведення:

► 1) випливає з того факту, що при циклічній перестановці векторів їх орієнтація не змінюється. А якщо в трійці векторів деякі два з них поміняти місцями, то її орієнтація змінюється.

2) випливає з лінійності скалярного і векторного добутків відносно множення на скаляр.

3) $(\overline{a}+\overline{a}')\overline{b}\overline{c} = (\overline{a}+\overline{a}', [\overline{b}, \overline{c}]) = (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]) + (\overline{a}', [\overline{b}, \overline{c}]) = \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}'\overline{b}\overline{c}$

$\overline{a}(\overline{b}+\overline{b}')\overline{c} = (\overline{b}+\overline{b}')\overline{c}\overline{a} = \overline{b}\overline{c}\overline{a} + \overline{b}'\overline{c}\overline{a} = \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}\overline{b}'\overline{c}$.

Але $\overline{a}(\overline{b}+\overline{b}')\overline{a} = (\overline{a}, [\overline{b}+\overline{b}', \overline{c}]) = (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}] + [\overline{b}', \overline{c}])$.

Ця рівність справедлива $\forall \overline{a}$. Тому $[\overline{b}+\overline{b}', \overline{c}] = [\overline{b}, \overline{c}] + [\overline{b}', \overline{c}]$, що доводить властивість 3 векторного добутку.

◄

Твердження 1.3. $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]) = ([\overline{a}, \overline{b}], \overline{c})$.

1.13 Мішаний добуток в координатах

Нехай в просторі E^3 зафіксовано базис $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ і задано три вектори:

$\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\overline{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

Тоді $[\overline{b}, \overline{c}] = (b_2c_3 - b_3c_2)\overline{i} - (b_1c_3 - b_3c_1)\overline{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\overline{k}$ та $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$.

Задача 1.2. Чи можуть вектори $\overline{e}_1 = (1, -1, 0)$, $\overline{e}_2 = (2, 0, -2)$, $\overline{e}_3 = (3, 1, 6)$ слугувати базисом в просторі E^3?

Розв'язання. Якщо $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ — базис, то вони некомпланарні і об'єм паралелепіпеда, на них побудованого, не дорівнює нулю. Тобто, $\overline{e}_1\overline{e}_2\overline{e}_3 \neq 0$. Знайдемо мішаний добуток $\overline{e}_1\overline{e}_2\overline{e}_3$: $\overline{e}_1\overline{e}_2\overline{e}_3 = 0 + 0 + 6 + 0 + 2 + 12 = 20 \neq 0$. Це означає, що дані вектори можуть слугувати базисом в E^3.

Розділ 2

Визначники і лінійна залежність

2.1 Визначники другого і третього порядків

Означення 2.1. Матриця A, розміром $m \times n$ — це прямокутна таблицю чисел з m рядків та n стовпчиків:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Позначають матриці і в такий спосіб: $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m,\, j=1,\dots,n}$, де a_{ij} — це елемент матриці, що стоїть в i-му рядку та j-му стовпчику.

Нехай A – квадратна матриця другого порядку (тобто 2×2).

Означення 2.2. Визначник матриці (детермінант матриці) A другого порядку — це число, яке знаходиться за формулою:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Означення 2.3. Визначник матриці (детермінант матриці) A третього порядку — це число, яке знаходиться за формулою (правило "зірочки"):

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 + x_3 y_1 z_2 + x_2 y_3 z_1 - x_3 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_3 - x_1 y_3 z_2$$

Ця формула нам вже відома, адже саме так ми шукали мішаний добуток векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, які в базисі $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ мають координати $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1), \overline{b} = (x_2, y_2, z_2), \overline{c} = (x_3, y_3, z_3)$

2.2 Властивості визначників

Усі властивості будемо формулювати і доводити для визначників 3-го порядку. Але, як ми побачимо пізніше, усі наведені властивості будуть виконуватися і для визначників довільного порядку.

Нехай A квадратна матриця третього порядку, тоді $\det A = \overline{a}\overline{b}\overline{c}$, де $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1), \overline{b} = (x_2, y_2, z_2), \overline{c} = (x_3, y_3, z_3)$.

Означення 2.4. Транспонована матриця — це матриця A^T, отримана шляхом транспонування (транспоновки) елементів матриці A, тобто стовпчики і рядки, міняються місцями: $A^T = (a_{ij}^T)$, де $a_{ij}^T = a_{ji}$.

Нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Означення 2.5. Мінор M_{ij}, елемента a_{ij} — це визначник матриці, яка отримана з матриці А викреслюванням i-го рядка та j-го стовпчика.

Наприклад: $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}$.

Означення 2.6. Алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} — це добуток $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Властивості визначників:

1) При транспонуванні матриці значення її визначника не зміниться:

$$\det A = \det A^T$$

► Доведення випливає безпосередньо з правила "зірочки"
$\det A^T = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_3y_1z_2 + x_2y_3z_1 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2 =$
$\det A$

Ця властивість урівнює в "правах" стовпчики і рядки. Тому далі всі властивості будемо формулювати для рядків.

◀

2) Знак визначника змінюється, якщо будь-які два рядки поміняти місцями:

$$D(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = -D(\overline{b},\overline{a},\overline{c}) = -D(\overline{a},\overline{c},\overline{b}) = -D(\overline{c},\overline{b},\overline{a})$$

3) Спільний множник можна винести з довільного рядка за визначник:

$$D(\alpha\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = D(\overline{a},\alpha\overline{b},\overline{c}) = D(\overline{a},\overline{b},\alpha\overline{c}) = \alpha D(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$$

4) $D(\overline{a}+\overline{a}',\overline{b},\overline{c}) = D(\alpha\overline{a},\overline{b},\overline{c}) + D(\alpha\overline{a}',\overline{b},\overline{c})$

5) Визначник, рядки якого пропорційні, дорівнює нулю:

$$D(\overline{a},\alpha\overline{a},\overline{c}) = 0$$

6) Визначник, який має два однакових рядки, дорівнює нулю:

$$D(\overline{a},\overline{a},\overline{c}) = 0$$

7) Визначник матриці з нульовим рядком дорівнює нулю:

$$D(\overline{a},\overline{0},\overline{c}) = 0$$

8) Визначник не змінюється, якщо до якогось його рядка додати лінійну комбінацію інших рядків:

$$D(\overline{a},\overline{b},\overline{c}+\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}) = D(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$$

► $D(\overline{a},\overline{b},\overline{c}+\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}) = D(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) + D(\overline{a},\overline{b},\alpha\overline{a}) + D(\overline{a},\overline{b},\beta\overline{b}) = D(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$

◀

9) Визначник матриці A дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка на їх алгебраїчні доповнення.

Наприклад: $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$.

Будемо казати, що в цьому прикладі ми розклали визначник за першим рядком.

► $\sum\limits_{i=1}^{3} a_{1i}A_{1i} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{22}a_{31} = \det A$.

◀

Задача 2.1. З'ясувати, чи можуть вектори $\overline{a} = (2, -1, 2), \overline{b} = (1, 2, -3), \overline{c} = (3, -4, 7)$ утворювати базис у просторі E^3?

Розв'язання. Вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ будуть утворювати базис, якщо вони некомпланарні. Тобто об'єм паралелепіпеда, на них побудованого, не повинен дорівнювати нулю. Знайдемо мішаний добуток даних векторів:

$$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} = d(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ -5 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Для обчислення цього визначника ми спочатку 2-й стовпчик помножили на 2 і додали його до 1-го та 3-го стовпчиків, а потім скористались властивістю 9. Таким чином, об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a}, \overline{b}$ і $\overline{c}$ дорівнює нулю, тобто ці вектори лежать в одній площині і слугувати базисом не можуть.

2.3 Лінійна залежність векторів

Розглянемо систему векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$.

Означення 2.7. Лінійна комбінація векторів — це вираз $\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_1 + ... + \alpha_n\overline{a}_n$, де $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Означення 2.8. Лінійна комбінація векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ — це **тривіальна лінійна комбінація**, якщо всі $\alpha_i = 0$, і це **нетривіальна лінійна комбінація**, в протилежному випадку.

Означення 2.9. Лінійно залежні вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ є такими ,якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ що виконується рівність $\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_n\overline{a}_n = \overline{0}$, причому $|\alpha_1| + |\alpha_2| + ... + |\alpha_n| \neq 0$.

Означення 2.10. Лінійно незалежні вектори — це вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$, такі, що їх лінійна комбінація дорівнює нулю лише за умови, коли всі $\alpha_i = 0$.

Інакше кажучи, вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ є лінійно незалежними, якщо ніяка їх нетривіальна лінійна комбінація не дорівнює нульовому вектору.

Властивості:

Твердження 2.1. *Вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ – лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли хоча б один з них лінійно виражається через інші.*

► 1) Нехай $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ — це лінійно залежні вектори. Тоді $\alpha_1\overline{a}_1 + ... + \alpha_i\overline{a}_i + ... + \alpha_n\overline{a}_n = \overline{0}$ та $\alpha_i \neq 0$ для деякого i . Звідси випливає, що $\overline{a}_i = -\dfrac{1}{\alpha_i}(\alpha_1\overline{a}_1 +$

$... + \alpha_{i-1}\overline{a}_{i-1} + \alpha_{i+1}\overline{a}_{i+1} + ... + \alpha_n\overline{a}_n)$, тобто вектор $\overline{a}_i$ лінійно виражається через інші вектори системи.

2) Нехай $\overline{a}_i = \beta_1\overline{a}_1 + ... + \beta i - 1\overline{a}_{i-1} + \beta i + 1\overline{a}_{i+1} + ... + \beta_n\overline{a}_n)$ для деякого i. Тоді $\beta_1\overline{a}_1 + ... + \beta_{i-1}\overline{a}_{i-1} + (-1)\overline{a}_i + \beta_{i+1}\overline{a}_{i+1} + ... + \beta_n\overline{a}_n = \overline{0}$, тобто отримано нульову лінійну комбінацію, в якій коефіцієнт при векторі і а є ненульовим.

◀

Твердження 2.2. *Якщо один з векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ є нульовим, то система цих векторів є лінійно залежною.*

▶ Припустимо, що $\overline{a}_1 = \overline{0}$. Тоді очевидно, що $1\overline{a}_1 + 0\overline{a}_2 + ... + 0\overline{a}_n = \overline{0}$, тобто за означенням дана система векторів є лінійно залежною $(\alpha_1 = 1 \neq 0)$.

◀

Твердження 2.3. *Якщо серед векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ є два однакових, то система векторів є лінійно залежною.*

▶ Доведення є очевидним.

◀

Твердження 2.4. *Якщо серед n векторів існує k лінійно залежних векторів, то і всі n векторів є лінійно залежними.*

▶ Розглянемо лінійну комбінацію даних n векторів $\alpha_1\overline{a}_1 + ... + \alpha_k\overline{a}_k + 0\overline{a}_{k+1} + ... + 0\overline{a}_n = \overline{0}$,при умові, що $\alpha_1\overline{a}_1 + ... + \alpha_k\overline{a}_k = \overline{0}$ і константи $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}$ не всі рівні нулю. Ця комбінація є нетривіальною, що і доводить потрібний факт.

◀

Твердження 2.5. *Якщо вектор $\overline{a}$ лінійно виражається через лінійно незалежні вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$, то таке представлення єдине.*

▶ (від супротивного). Припустимо, що вектор $\overline{a}$ лінійно виражається через дані вектори не єдиним чином, тобто $\overline{a} = \alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_n\overline{a}_n$ і $\overline{a} = \beta_1\overline{a}_1 + \beta_2\overline{a}_2 + ... + \beta_n\overline{a}_n$. Віднявши другу рівність від першої, маємо: $\overline{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\overline{a}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\overline{a}_2 + ... + (\alpha_n - \beta_n)\overline{a}_n$. Оскільки $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ є лінійно незалежними, то $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, ..., \alpha_n = \beta_n$, що суперечить припущенню про неєдиність представлення вектора $\overline{a}$.

◀

Твердження 2.6. *Довільна підсистема лінійно незалежних векторів $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_n$ є лінійно незалежною.*

▶ Застосуємо метод від супротивного. Нехай існує підсистема $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n, k < n$, лінійно залежних векторів. Це означає, що $\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_k\overline{a}_k = \overline{0}$, причому $|\alpha_1| + |\alpha_2| + ... + |\alpha_k| \neq 0$. Додамо до обох частин рівності нуль-вектор: $0\overline{a}_{k+1} + ... + 0\overline{a}_n$. В результаті отримаємо: $\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_k\overline{a}_k + 0\overline{a}_{k+1} + ... + 0\overline{a}_n = \overline{0}$ і $|\alpha_1| + |\alpha_2| + ... + |\alpha_k| \neq 0$. Це означає лінійну залежність векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$, що протирічить припущенню. Отже, підсистема $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$, є лінійно незалежною.

◀

Твердження 2.7. *Якщо після доповнення системи $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ лінійно незалежних векторів вектором $\overline{a}$, отримали лінійно залежну систему, то вектор $\overline{a}$ лінійно виражається через вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$.*

▶ Оскільки вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n, \overline{a}$ є лінійно залежними, то існують такі константи $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}$, не всі рівні нулю, що

$\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_n\overline{a}_n + \alpha_{n+1}\overline{a} = \overline{0}$. (*)

При цьому саме $\alpha_{n+1} \neq 0$. Доведемо цей факт методом від супротивного. Якщо $\alpha_{n+1} = 0$, то $\alpha_{n+1}\overline{a} = \overline{0}$ і $\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_n\overline{a}_n = \overline{0}$, причому серед чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ існують ненульові. Але в цьому випадку вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ є лінійно залежними, що суперечить умові твердження. Отже, $\alpha_{n+1} \neq 0$, тому з рівності (*) випливає, що $\overline{a} = \left(-\dfrac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}}\right)\overline{a}_1 + ... + \left(-\dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right)\overline{a}_n$.

◀

Геометричний сенс лінійної залежності

Твердження 2.8. *Два вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ є лінійно залежними тоді і тільки тоді, коли $\overline{a} \parallel \overline{b}$.*

Твердження 2.9. *Три вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ є лінійно залежними тоді і тільки тоді, коли $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ є компланарними.*

Твердження 2.10. *Довільні чотири вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d} \in E^3$ є завжди лінійно залежними.*

Розділ 3

Пряма на площині

3.1 Різні способи задання ліній на площині

Одним із найважливіших завдань аналітичної геометрії є представлення лінії на площині за допомогою рівняння, що зв'язує координати кожної точки цієї лінії. Нехай маємо на площині P декартову прямокутну систему координат та деяку лінію L.

Означення 3.1. Рівняння лінії L — це рівняння $F(x, y) = 0$, якому задовольняють координати x та y кожної точки цієї лінії.

Інакше кажучи, лінія – це геометричне місце точок, координати яких задовольняють рівняння. Лінію L можна задавати таким чином.

1) **Неявний спосіб:** $F(x, y) = 0$. Функція y від x (чи x від y) задана неявно. Приклад: $x^2 + y^2 = R^2$ — рівняння кола радіуса R з центром у початку координат.

2) **Явний спосіб:** $y = f(x)$. Функція y від x задана явно. Для побудови графіка цієї функції складається таблиця значень x та $f(x)$, ці пари точок позначаються на площині та з'єднуються плавною лінією. Приклад: $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$.

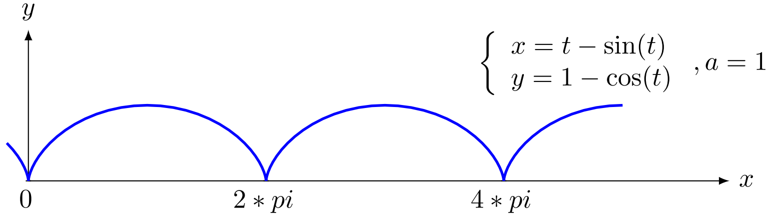
3) **Параметричне представлення:** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in D.$

Щоб побудувати графік такої функції треба скласти таблицю для $x(t)$ і $y(t)$ для однакових значень параметра t , що пробігає числову множину D . Виключення з двох рівнянь параметра t приводить до неявного способу задання даної лінії L. Приклад: $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$

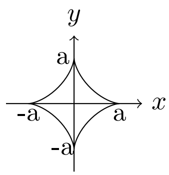
Приклади графіків параметричних функцій:

Приклад 1: циклоїда $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, t \in [-\infty, +\infty], a > 0.$

Таку лінію описує фіксована точка кола радіуса а, що котиться по всій осі Ox. Очевидно, що $y \in [0, 2a]$, а $y = 0$ при $1 - \cos t = 0 \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi$.



Приклад 2: астроїда $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$

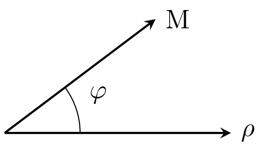


Запишемо рівняння астроїди в неявному вигляді:
$\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\dfrac{y}{a}\right)^{2/3} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$
$\Rightarrow x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

4) Представлення лінії у полярній системі координат. На площині задана полярна система координат, якщо задано:

1. точка O полюс;

2. полярна вісь ρ промінь, що виходить з точки O.

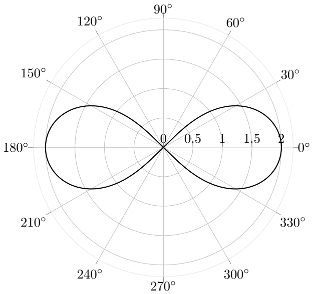


Тоді положення будь-якої точки M на площині визначається парою чисел (ρ, φ), де полярний радіус $\rho \geqslant 0$ — довжина вектора $\overline{OM}$, а полярний кут φ це кут між віссю ρ і $\overline{OM}$, який відраховується проти годинникової стрілки. Якщо точка M має декартові координати (x, y) і цій парі чисел відповідає пара (ρ, φ), то ця відповідність буде взаємно однозначною, якщо $\varphi \in [0, 2\pi]$ або $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Легко вивести наступні співвідношення (перехід від полярної системи координат до декартової, і навпаки):

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \tag{3.1}$$

$$
\begin{cases}
\rho = \sqrt{x^2+y^2} \\
\begin{cases}
\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}
\end{cases}
\end{cases}
\tag{3.2}
$$

Приклад: Лемніската Бернуллі $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2), a > 0$.

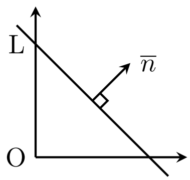


З формул 3.2 випливає, що $\rho^4 = a^2\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$, тобто $\rho^2 = a\cos 2\varphi$ або $\rho = \sqrt{a\cos 2\varphi}$. Область визначення: $\cos 2\varphi \geqslant 0$, тобто $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

3.2 Пряма на площині

Нехай дано пряму L.

Означення 3.2. Нормальний вектор прямої L — це довільний ненульовий вектор $\overline{n}$, перпендикулярний прямій L.



$\overline{n} \perp L; \overline{n} \neq \overline{0}$ — нормальний вектор прямої. Зауважимо, що нормальних векторів існує безліч — з точністю до ненульової константи.

Нехай задано точку $M_0(x_0, y_0)$. Складемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно до вектора $\overline{n}(A, B)$.

Для довільної точки $M(x, y)$ шуканої прямої вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ є перпендикулярним вектору $\overline{n}$: $\overline{M_0M} \perp \overline{n}$, тобто $(\overline{M_0M}, \overline{n}) = 0$. Отримали: $A(x-x_0)+B(y-y_0) = 0$ — рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0)$ та нормальний вектор $\overline{n}(A, B)$.

Побудуємо загальне рівняння прямої. Розкривши дужки, маємо $Ax + By - (Ax_0 + By_0) = 0$, де A і $B \neq 0$ одночасно. Позначивши $C = -(Ax_0 + By_0)$, отримуємо

$Ax + By + C = 0$ — **загальний вигляд прямої**.

3.3 Неповні рівняння прямої

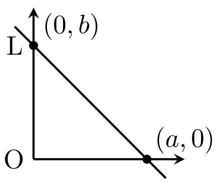
Означення 3.3. Загальне рівняння $Ax+By+C=0$ — це **повне рівняння прямої**, якщо всі його коефіцієнти $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$ (тобто $ABC \neq 0$). Якщо ж хоча б один коефіцієнт дорівнює нулю, то це **неповне рівняння прямої**.

Розглянемо можливі випадки неповних рівнянь.

1. $C = 0; L : Ax + By = 0$ — пряма L проходить через точку $O(0,0)$.
2. $B = 0; L : Ax + C = 0$; $\overline{n}(A,0) \perp Oy, L \parallel Oy$.
3. $A = 0; L : By + C = 0$; $\overline{n}(0,B) \perp Ox, L \parallel Ox$.
4. $B = 0, C = 0; L : Ax = 0$ — пряма L співпадає з віссю Oy.
5. $A = 0, C = 0; L : By = 0$ — пряма L співпадає з віссю Ox.

3.4 Рівняння прямої у відрізках

Розглянемо повне рівняння прямої $L : Ax + By + C = 0$, де $ABC \neq 0$.



$$Ax + By = -C;$$

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

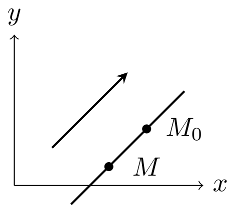
Позначимо $a = -\dfrac{C}{A}, b = -\dfrac{C}{B}$. Тоді маємо рівняння прямої "у відрізках":

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Геометричний зміст чисел a і b: вони дорівнюють величинам відрізків, які відсікає пряма L на осях Ox та Oy відповідно.

3.5 Канонічне рівняння

Означення 3.4. Напрямний вектор прямої L — це довільний ненульовий вектор $q \neq \overline{0}$, що паралельний прямій L.



Нехай задано точку $M_0(x_0, y_0)$. Складемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно до вектора $\overline{q}(l, m)$ (напрямний вектор). Якщо $M(x, y)$ — це довільна точка шуканої прямої, то вектор $\overline{M_0M}$ має координати $(x - x_0, y - y_0)$ і $\overline{M_0M} \parallel \overline{q}$, тобто координати цих векторів пропорційні. В результаті маємо **канонічне рівняння**

$$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}}$$

— рівняння прямої L через точку і напрямний вектор.

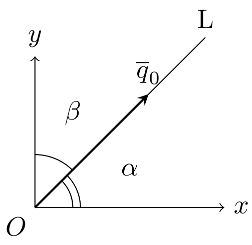
3.6 Параметричне рівняння прямої

Нехай $\overline{q}(l, m)$ — це напрямний вектор прямої L і $M_0(x_0, y_0) \in L$. У канонічному рівнянні даної прямої введемо параметр: $t = \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}, t \in (-\infty; +\infty)$. Тоді

$$\begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \end{cases}$$

— **параметричне рівняння прямої**.

3.7 Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом



Розглянемо довільну пряму $L \nparallel Ox$. Нехай α — це кут нахилу L до осі Ox (якщо $L \parallel Ox$, то $\alpha = 0$), β — це кут між прямою L та віссю Oy, $\overline{q}(l, m)$ — це напрямний вектор прямої L, $\overline{q}_0$ — це його орт-вектор. Тоді $\overline{q}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ (при цьому враховано, що $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$).

У цьому випадку канонічне рівняння прямої L буде мати вигляд:

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\sin\alpha}$$

Звідси $y - y_0 = \operatorname{tg}\alpha(x - x_0)$. Якщо позначити $k = \operatorname{tg}\alpha$ — кутовий коефіцієнт, то отримаємо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом: $y - y_0 = k(x - x_0)$, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$. Останнє рівняння можна переписати у вигляді:

$$y = kx + b,$$

де $b = y_0 - kx_0$ — величина відрізка, який відсікає L на осі Oy.

3.8 Кут між двома прямими

Кут між двома прямими дорівнює меншому з кутів між їх нормальними або напрямними векторами. Розглянемо три випадки.

1. Прямі задано загальними рівняннями:

$$\begin{gathered} L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, \overline{n}_1(A_1, B_1); \\ L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0, \overline{n}_2(A_2, B_2); \end{gathered}$$

$$\cos(\widehat{L_1, L_2}) = \cos(\widehat{\overline{n}_1, \overline{n}_2}) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

2. Прямі задано у канонічному вигляді:

$$\begin{gathered} L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1}, \overline{q}_1(l_1, m_1); \\ L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2}, \overline{q}_2(l_2, m_2); \end{gathered}$$

$$\cos(\widehat{L_1, L_2}) = \cos(\widehat{\overline{q}_1, \overline{q}_2}) = \frac{|l_1l_2 + m_1m_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}.$$

3. Прямі задано рівняннями з кутовими коефіцієнтами:

$$\begin{gathered} L_1 : y = k_1x + b_1, k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1; \\ L_2 : y = k_2x + b_2, k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2; \end{gathered}$$

$$\operatorname{tg}(\widehat{L_1, L_2}) = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \left|\frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}\right| = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

3.9 Умови перпендикулярності і паралельності прямих

Паралельність або перпендикулярність двох прямих рівнозначна паралельності або перпендикулярності нормальних або напрямних векторів. Тому відповідно до вигляду рівнянь, якими задані прямі (див. пункти 1 – 3 попереднього розділу), маємо:

Умови паралельності $L_1 \parallel L_2$:

1. $\overline{n}_1 \parallel \overline{n}_2$ або $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$;
2. $\overline{q}_1 \parallel \overline{q}_2$ або $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$;
3. $k_1 = k_2$.

Умови перпендикулярності $L_1 \perp L_2$:

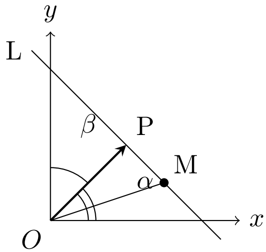
1. $\overline{n}_1 \perp \overline{n}_2$ або $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$;
2. $\overline{q}_1 \perp \overline{q}_2$ або $l_1l_2 + m_1m_2 = 0$;
3. $k_1k_2 = -1$.

3.10 Нормальне рівняння прямої

Нехай L — пряма, що не проходить через початок координат. Проведемо нормальний вектор $\overline{n}$ так:

1. його початок — в точці $(0, 0)$, а кінець лежить на прямій;
2. $|\overline{n}| = p > 0$ (такий вектор єдиний!).
3. Кут α — це кут між віссю OX і $\overline{n}$, який відраховується проти годинникової стрілки.

Нехай точка $M(x, y) \in L$. Тоді $\overline{OM}(x, y)$ — це її радіус-вектор, $\overline{n}_0$ — це ортвектор нормального вектора $\overline{n}$: $\overline{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. При цьому враховано, що $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$.



Мають місце наступні співвідношення:
$p = |OP| = \text{пр}_{\overline{n}}\overline{OM} = \text{пр}_{\overline{n}_0}\overline{OM} = |OM|\cos(\widehat{\overline{n}_0, \overline{OM}}) = |OM|\dfrac{(\overline{n}_0, \overline{OM})}{|\overline{n}_0||\overline{OM}|} = \dfrac{(\overline{n}_0, \overline{OM})}{|\overline{n}_0|} = x\cos\alpha + y\sin\alpha.$
Отримали рівняння $x\cos\alpha + y\sin\alpha = 0$, — це **нормальне рівняння прямої** L, де p — це відстань від початку координат до прямої L.

3.11 Зведення загального рівняння прямої до нормального вигляду

Розглянемо загальне рівняння прямої $L : Ax + By + C = 0$, та нормальне рівняння цієї прямої: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$.

Для того, щоб рівняння були рівносильними, достатньо, щоб їх коефіцієнти були пропорційними: $\dfrac{\cos\alpha}{A} = \dfrac{\sin\alpha}{b} = \dfrac{-p}{C} = \mu$, де μ — це **нормуючий множник**. Тоді $\cos\alpha = \mu A, \sin\alpha = \mu B, -p = \mu C$. Звідси визначимо μ:

$$\mu^2(A^2 + B^2) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

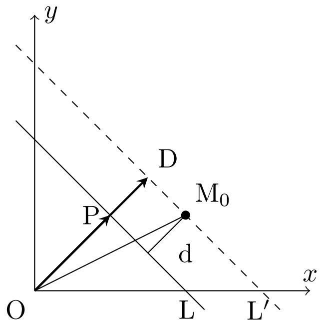
Знак μ визначається рівністю $\mu C = -p$. Оскільки $p \geq 0$, то знак нормуючого множника μ є протилежним до знаку C. Отже, **нормальне рівняння прямої** L буде мати вигляд

$\mu(Ax + By + C) = 0$, де $\mu = \dfrac{-\text{sign}C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ — нормуючий множник.

Приклад 3.1. Звести рівняння прямої $L : 3x - 4y + 25 = 0$ до нормального виду.

Розв'язання. Знайдемо нормуючий множник:
$\mu = -\dfrac{1}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$. Тоді $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 5 = 0$ — нормальне рівняння L, де $\cos\alpha = -\frac{3}{5}, \sin\alpha = \frac{4}{5}, p = 5$ — довжина перпендикуляра, опущеного з точки O на цю пряму.

3.12 Відхилення і відстань від точки до прямої



Нехай задано пряму L , точку $M_0(x_0, y_0) \notin L$, відстань від якої до даної прямої дорівнює $d = \rho(M_0, L) > 0$. Точка $O(0,0)$ — це початок координат.

Нехай пряма L задається нормальним рівнянням: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$.

Означення 3.5. Відхилення точки M_0 від прямої L — це число

$$\delta_{M_0,L} \begin{cases} d, \text{ якщо точки } M_0 \text{ і } O \text{ лежать по різні сторони прямої;} \\ -d, \text{ якщо точки } M_0 \text{ і } O \text{ лежать по один бік від прямої.} \end{cases}$$

Обчислимо відхилення $\delta_{M_0,L}$. Для цього через точку M_0 проведемо пряму L', паралельну L. Побудуємо $OD \perp L'$. Тоді рівняння L' має вигляд:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p - \delta_{M_0,L} = 0.$$

Але координати точки $M_0(x_0, y_0)$ задовольняють це рівняння, тому $x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p - \delta_{M_0,L} = 0$.

Таким чином, відхилення точки M_0 від прямої L обчислюється за формулою:

$$\delta_{M_0,L} = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p$$

(для того, щоб знайти відхилення точки M_0 від прямої L , потрібно підставити координати цієї точки в нормальне рівняння даної прямої).

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0) \notin L$ до прямої L обчислюється таким чином:

$$d = |\delta_{M_0,L}| = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|$$

.

Якщо ж пряма задається загальним рівнянням, то

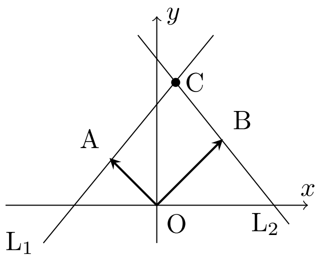
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

.

Задача 3.1. З'ясувати, в якому куті (гострому чи тупому), утвореному при перетині прямих L_1 та L_2, знаходиться точка $M_0(-2,2)$, якщо $L_1 : 2x-y+2=0$, $L_2 : 4x+y-4=0$. В яких кутах (суміжних чи вертикальних) знаходяться точка M_0 та початок координат $O(0,0)$?

Розв'язання. З'ясуємо, який кут (гострий чи тупий) утворюють орти нормальних векторів прямих L_1 та L_2. Спочатку запишемо рівняння даних прямих у нормальному вигляді:

$$L_1 : -\frac{1}{\sqrt{5}}(2x-y+2)=0; \quad \overline{n}_1^0 = -\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1);$$
$$L_1 : \frac{1}{\sqrt{17}}(4x+y-4)=0; \quad \overline{n}_2^0 = \frac{1}{\sqrt{17}}(4,1);$$



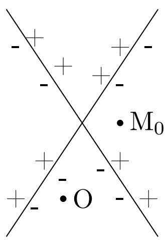
Оскільки скалярний добуток

$$(\overline{n}_1^0, \overline{n}_2^0) = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{17}}(-8+1) < 0,$$

то кут AOB між векторами $\overline{n}_1^0$ та $\overline{n}_2^0$ — тупий. У чотирикутнику $AOBC$ $\angle A$ та $\angle B$ — прямі, $\angle AOB$ — тупий, тому $\angle ACB$ — гострий.

Отже, початок координат $O(0,0)$ знаходиться в гострому куті, утвореному при перетині прямих L_1 та L_2.

Знайдемо відхилення точки $M_0(-2,2)$ від даних прямих.



$$\delta_{M_0,L_1} = -\frac{1}{\sqrt{5}}(-4-2+2) = \frac{4}{\sqrt{5}} > 0;$$
$$\delta_{M_0,L_2} = \frac{1}{\sqrt{17}}(-8+2-4) = -\frac{10}{\sqrt{17}} < 0;$$

Дві прямі, що перетинаються, ділять площину на чотири області. На рисунку зображено знаки відхилень точок, які лежать в кожній з чотирьох областей, при умові, що початок координат $O(0,0)$ знаходиться в гострому куті.

Враховуючи знаки відхилень точки M_0 від даних прямих, робимо висновок, що точка M_0 лежить в тупому куті, утвореному при перетині прямих L_1 та L_2.

Точки $O(0,0)$ та M_0 лежать в суміжних кутах.

3.13 Рівняння пучка (низки) прямих

Означення 3.6. Пучок прямих (низка прямих) на площині з центром у даній точці — це сукупність прямих, що проходить через цю точку.

Якщо задана точка $M_0(x_0, y_0)$, то рівняння $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ при змінних коефіцієнтах A і B, а також рівняння $y - y_0 = k(x - x_0)$ при змінному k є рівняннями пучка (низки) прямих з центром у точці M_0.

Пучок прямих можна задати довільними двома прямими, які перетинаються у точці M_0:

$$\begin{aligned} L_1 &: A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ L_2 &: A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{aligned}$$

Рівняння пучка прямих із центром у точці M_0 можна записати, не визначаючи координат M_0:

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

Щоб із пучка прямих виділити певну пряму, потрібно задати додаткову умову для знаходження параметра λ, що відповідає шуканій прямій.

Розділ 4

Криві другого порядку

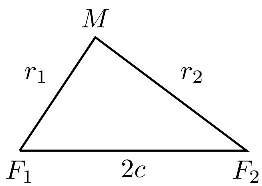
Загальне рівняння кривої другого порядку має такий вигляд:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

При різних значеннях коефіцієнтів можемо отримати вироджені випадки: прямі, точки, криві лінії. Ми ж будемо розглядати невироджені випадки кривих другого порядку – еліпс, гіперболу, параболу.

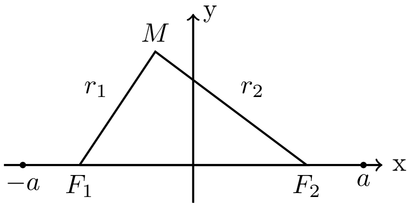
4.1 Канонічне рівняння еліпса

Означення 4.1. Еліпсом називається геометричне місце точок площини таких, що сума відстаней від кожної з яких до двох фіксованих точок (фокусів) є величина стала.



Отже, маємо два фокуси F_1 і F_2, відстань між ними $|F_1F_2| = 2c$. Нехай M – довільна точка еліпса. Відрізки $r_1 = |F_1M|$ та $r_2 = |F_2M|$ називаються фокальними радіусами точки M.
За означенням еліпса: $r_1 + r_2 = 2a$.

З трикутника F_1MF_2 маємо: $|F_1M| + |F_2M| > |F_1F_2|$, тобто $2a > 2c$, або $a > c$.



Побудуємо декартову систему координат. Нехай вісь OX пройде через фокуси F_1 і F_2 ,а вісь OY — через середину відрізка F_1F_2 . Відповідно до вибраної системи координат фокуси будуть мати такі координати: $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$.

Оскільки точка M — це довільна точка еліпса, то вона має координати (x, y). Тоді

$$r_1 = |F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, r_2 = |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Враховуючи умову $r_1 + r_2 = 2a$, маємо рівняння еліпса:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Піднесемо до квадрату обидві частини рівняння:

$$(x+c)^2 + y^2 + (x-c)^2 + y^2 + 2\sqrt{((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2)} = 4a^2.$$

Перегрупувавши доданки, маємо:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 - 4a^2 =$$

$$= -2\sqrt{((x^2 + y^2 + c^2) + 2xc)((x^2 + y^2 + c^2) - 2xc)}.$$

Виконавши елементарні перетворення, отримаємо:

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4x^2c^2} = 2a^2 - (x^2 + y^2 + c^2).$$

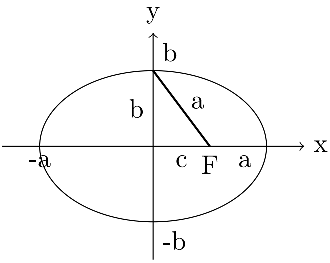
Знову піднесемо до квадрату та отримаємо:

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4x^2c^2 = (x^2 + y^2 + c^2)^2 + 4a^4 - 4a^2(x^2 + y^2 + c^2).$$

або

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 = a^4 - a^2c^2.$$

Позначивши $b^2 = a^2 - c^2$ (оскільки $a > c$), маємо: $x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2$. Поділивши обидві частини цієї рівності на a^2b^2, отримуємо **канонічне рівняння еліпса:**



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Дослідимо форму еліпса. З отриманого рівняння випливає, що для всіх точок еліпса $x^2 \leqslant a^2$, $y^2 \leqslant b^2$, або $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$, тобто це означає, що всі точки еліпса знаходяться всередині прямокутника, сторони якого паралельні осям координат і мають довжини $2a$ та $2b$, де a — це **велика піввісь**, b — **мала піввісь** ($a > b$). Кожна точка $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$, в якій еліпс перетинає осі координат, — це **полюс еліпса (або вершина еліпса)**. Якщо довільні значення (x, y), задовольняють канонічне рівняння еліпса, то очевидно, що значення $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$ теж будуть задовольняти рівняння еліпса. Це означає, що координатні осі, кожна з них — це **вісь симетрії**, а точка $O(0, 0)$ — **центр симетрії еліпса**.

4.2 Канонічне рівняння гіперболи

Означення 4.2. Гіпербола — це геометричне місце точок площини, для яких модуль різниці відстаней від двох фіксованих точок (фокусів) є сталою величиною.

Нехай F_1 і F_2 — фокуси, відстань між якими $|F_1F_2| = 2c$, M — довільна точка гіперболи, r_1 та r_2 — це фокальні радіуси точки M. Згідно з означенням гіперболи $|r_1 - r_2| = 2a$. З трикутника F_1MF_2 маємо: $2a < 2c$, тобто $a < c$. Побудову декартової системи координат і подальші викладки здійснюємо так само, як і при виведенні рівняння еліпса:

$$F_1(-c, 0), F_2(c, 0), M(x, y),$$

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$|r_1 - r_2| = 2a,$$

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| - 2a,$$

$$(x^2 + y^2 + c^2) + 2xc + (x^2 + y^2 + c^2) - 2xc-$$

$$-2\sqrt{((x^2+y^2+c^2)+2xc)((x^2+y^2+c^2)-2xc)} = 4a^2,$$

$$(x^2+y^2+c^2) - 2a^2 = \sqrt{v^2 - 4x^2c^2},$$

$$(x^2+y^2+c^2) - 4a^2(x^2+y^2+c^2) + 4a^4 = (x^2+y^2+c^2)^2 - 4x^2c^2,$$

$$x^2c^2 - x^2a^2 - y^2a^2 = a^2c^2 - a^4,$$

$$x^2(c^2-a^2) - y^2a^2 = a^2(c^2-a^2).$$

Позначимо $B^2C^2 - A^2$ (враховуючи, що $c > a$). Тоді

$$x^2b^2 - y^2a^2 = a^2b^2.$$

В результаті перетворень отримали **канонічне рівняння гіперболи**:

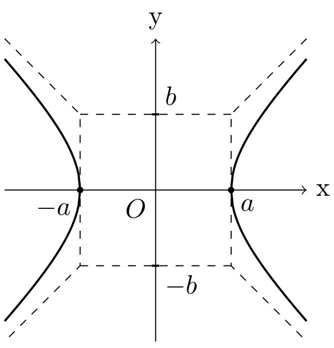
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

З отриманого рівняння випливає, що

$$x^2 = a^2\left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right) \Rightarrow x \leqslant -a \text{ або } x \geqslant a.$$

Аналогічно,

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) \Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \Rightarrow y \in (-\infty; +\infty).$$



Тобто гіпербола є необмеженою кривою, яка складається з двох гілок, які є симетричними відносно осі OY і лежать праворуч від прямої $x = a$ та ліворуч від прямої $x = -a$.

Координатні осі — це осі симетрії, точка O — центр симетрії гіперболи. Асимптотами гіперболи є прямі $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Доведемо це для гілки гіперболи, що лежить у першій чверті:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \Rightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

тобто

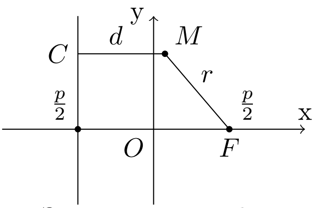
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{\frac{b}{a}x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} = 1.$$

Це означає, що чисельник наближається до знаменника, тобто крива при $x \to +\infty$ наближається до своєї асимптоти. Для трьох інших чвертей викладки аналогічні.

4.3 Канонічне рівняння параболи

Означення 4.3. Парабола — це геометричне місце точок площини, кожна з яких однаково віддалена від фіксованої точки (фокуса) і від даної прямої (директриси).

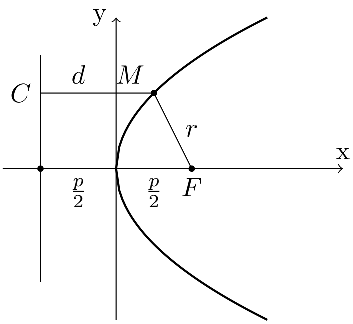
Відстань від фокуса F до директриси D позначимо p. Нехай M — довільна точка параболи. Тоді $r = |FM|$ — фокальний радіус точки M.



Декартову систему координат будуємо таким чином: вісь OX проходить через фокус F перпендикулярно директрисі D, а вісь OY — через середину відстані від F до D. Тоді $M(x, y)$, $F(\frac{p}{2}, 0)$, $d = \rho(M, D) = |MC| = x + \frac{p}{2}$, а фокальний радіус $r = |FM| = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2}$.

За означенням $d = r$, тобто

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2} \Rightarrow x^2 + xp + \frac{p^2}{4} = x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2.$$



Отримали **канонічне рівняння параболи**: $y = 2px$, де p — параметр, $p > 0$. Очевидно, що $x \geqslant 0$. Отже, парабола розташована праворуч від осі OY. З отриманого рівняння випливає, що для довільного значення x існує два протилежні значення y: $y = \pm\sqrt{2px}$, а це означає, що парабола симетрична відносно осі OX (осі параболи). Парабола проходить через точку $O(0, 0)$, яка називається її вершиною. Якщо $x \to +\infty$, то $y \to +\infty$, що означає, що вітки параболи простягаються в нескінченність.

4.4 Ексцентриситет і директриси еліпса і гіперболи

Означення 4.4. Величина $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ — це **ексцентриситет еліпса** і **ексцентриситет гіперболи**.

Для еліпса $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$, тому $\varepsilon \in [0; 1)$. Якщо $\varepsilon = 0$, то це означає, що $a = b$ і $c = 0$, тобто фокуси еліпса збігаються, і еліпс перетворюється в коло. Ексцентриситет характеризує форму даної кривої. Чим більше ε, тим більше еліпс "сплющується" по осі OY.

Для гіперболи $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \dfrac{b^2}{a^2}}$, тобто $\varepsilon \in (1; +\infty)$. Із зростанням ε гілки гіперболи "розпрямлюються".

Означення 4.5. Директриса еліпса (директриса гіперболи) — це дві прямі, які перпендикулярні фокальній осі (тобто до осі, на якій розміщені фокуси) і знаходяться на відстані $\dfrac{a}{\varepsilon}$ від центра кривої.

У вибраній системі координат директриси еліпса та гіперболи паралельні осі OY і не перетинають самі криві. Отже, рівняння директрис D_1 і D_2 для цих двох кривих мають вигляд: $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ або $x = \pm\dfrac{a^2}{c}$.

Для еліпса $a > c \Rightarrow \dfrac{a}{c} > 1$, тому $\dfrac{a^2}{c} = \dfrac{aa}{c} > a$ (враховано, що $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ і $0 \leqslant \varepsilon < 1$). Це означає, що директриси еліпса лежать поза його межами.

Аналогічно для гіперболи $a < c \Rightarrow \dfrac{a}{c} < 1$ і $\dfrac{a^2}{c} = \dfrac{aa}{c} < a$, тобто директриси гіперболи знаходяться між її гілками.

Для доведення теореми про зв'язок між поняттями ексцентриситет і директриса розв'яжемо наступну задачу.

Задача 4.1. Довести, що фокальні радіуси r_1 і r_2 довільної точки еліпса мають вигляд: $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$.

Розв'язання. Нехай точка $M(x, y)$ — довільна точка еліпса. Тоді її координати задовольняють канонічне рівняння еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Звідси $y^2 = b^2(1 - \dfrac{x^2}{a^2})$ або $y^2 = \dfrac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Знайдемо фокальний радіус r_1:

$$r_1 = |F_1M| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} =$$

$$= \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2)} = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + (1 - \frac{c^2}{a^2})(a^2 - x^2)} =$$

$$\sqrt{a^2 + 2xc + \frac{c^2}{a^2}x^2} = \sqrt{(a + \frac{c}{a}x)^2} = |a + \frac{c}{a}x| = |a + \varepsilon x|.$$

Знайдемо знак виразу $a + \varepsilon x$. Оскільки $\frac{c}{a} < 1$ і $|x| \leqslant a$, то $|\frac{c}{a}x| < a$. Тому $a + \frac{c}{a}x > 0$, тобто $a + \varepsilon x > 0$ і $r_1 = a + \varepsilon x$, що і треба було довести. Фокальний радіус r_2 знаходиться аналогічно.

Зауважимо, що для гіперболи аналогічними міркуваннями можна отримати: $r_1 = \varepsilon x + a$, $r_2 = \varepsilon x - a$.

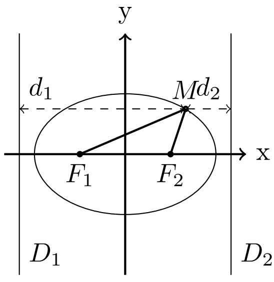
Теорема 4.1. *Якщо $M(x, y)$ — довільна точка еліпса чи гіперболи, r_1 і r_2 — її фокальні радіуси, $\rho(M, D_1)$ і $\rho(M, D_2)$ — відстані від точки M до відповідної директриси, то має місце співвідношення:*

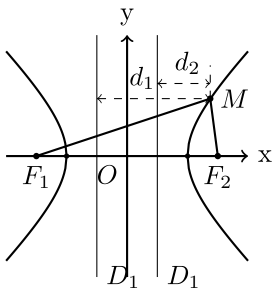
$$\frac{r_1}{\rho(M, D_1)} = \frac{r_2}{\rho(M, D_2)} = \varepsilon$$

► (проведемо для еліпса):

$$\frac{r_1}{\rho(M, D_1)} = \frac{r_1}{d_1} = \frac{a + \varepsilon x}{x + \frac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon \frac{a + \varepsilon x}{\varepsilon x + a} = \varepsilon,$$

$$\frac{r_2}{\rho(M, D_2)} = \frac{r_2}{d_2} = \frac{a - \varepsilon x}{x - \frac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon \frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon x - a} = \varepsilon,$$





◄

Зауваження. Для довільної точки параболи $\frac{r}{d} = 1$, тобто $\epsilon = 1$.

4.5 Рівняння дотичної до кривої другого порядку

Побудуємо рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точці $M_0(x_0, y_0)$. Нехай $y_0 \neq 0$, тобто точка M_0 не співпадає ні з однією з вершин еліпса $A_1(-a, 0)$ та $A_2(a, 0)$. У цьому випадку рівняння $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ неявно задає функцію $y = y(x)$, $-a < x < a$, графік якої проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і співпадає з верхньою (при $y_0 > 0$) чи нижньою (при $y_0 < 0$) половиною еліпса.

Скористаємось відомим із шкільного курсу рівнянням дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0, яке має вигляд: $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$.

Якщо продиференціювати за x тотожність $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2(x)}{b^2} = 1$, то отримаємо рівняння

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'(x)}{b^2} = 0,$$

або

$$b^2x + a^2yy'(x) = 0,$$

тобто

$$y'(x) = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Якщо підставити значення $y'(x_0) = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$ у рівняння дотичної, то отримаємо рівняння:

$$y = y_0 - \frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0).$$

Виконаємо нескладні перетворення:

$$y = y_0 - \frac{b^2x_0x}{a^2y_0} + \frac{b^2x_0^2}{a^2y_0}, a^2y_0y = a^2y_0^2 - b^2x_0x + b^2x_0^2.$$

Якщо поділити обидві частини рівняння на a^2b^2 та врахувати те, що $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ (точка $M_0(x_0, y_0)$ лежить на еліпсі), то отримаємо:

$$\frac{y_0 y}{b^2} = \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^2}.$$

Звідси рівняння дотичної до еліпса в точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Аналогічно можна вивести рівняння дотичної, проведеної до гіперболи та параболи в точці $M_0(x_0, y_0)$, відповідно:

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1,$$

$$y y_0 = p(x + x_0).$$

Розділ 5

Комплексні числа

5.1 Комплексні числа

Означення 5.1. Комплексне число — це впорядкована пара дійсних чисел (компонент), для яких поняття рівності, суми, добутку вводяться наступним чином.

1. Нехай $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$. Тоді $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$.
2. Сума комплексних чисел z_1 та z_2 — це впорядкована пара (x_1+x_2, y_1+y_2), тобто $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
3. Добуток комплексних чисел z_1 та z_2 — це впорядкована пара $(x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$, тобто $z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.
4. Пара $(x, 0)$ ототожнюється з дійсним числом x, тобто $(x, 0) = x$.

Легко перевірити, що всі властивості цих операцій (комутативність, асоціативність, дистрибутивність) виконуються.

Геометрична інтерпретація комплексних чисел.

Відомо, що дійсні числа відображаються точками числової осі. Встановимо взаємно однозначну відповідність між множиною комплексних чисел і множиною точок координатної площини. Комплексному числу $z = (x, y)$ поставимо у відповідність точку $M(x, y)$ координатної площини XOY. Сама координатна площина — це комплексна площина. Вісь абсцис — це дійсна вісь, вісь ординат – уявна вісь. Нехай $z = (x, y)$ — комплексне число, x — це його дійсна частина, y – уявна частина (позначають $x = \mathrm{Re} z$, $y = \mathrm{Im} z$).

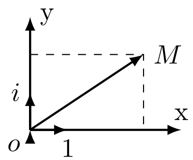
Комплексне число $z = (x, y)$ також можна інтерпретувати як вектор, початком якого є точка $O(0, 0)$, а кінцем точка $M(x, y)$. Зображення комплексних чисел векторами дозволяє дати наочну геометричну інтерпретацію операцій над комплексними числами (додавання, віднімання, множення на константу).

Аналогічно, як у векторній алгебрі, вводиться поняття модуля комплексного числа $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, операція множення z на константу: $\alpha z = (\alpha x, \alpha y)$ для будь-якого $\alpha \in \mathbb{R}$. Модуль числа z дорівнює відстані від початку координат до точки M, яка зображає дане число.

Із визначення комплексного числа випливає, що довільне комплексне число $z = (x, y)$ може бути записане таким чином:

$$(x, y) = z = (x, 0) + (0, 1)(0, y).$$

Комплексне число $(x, 0)$ ототожнюється з дійсним числом x, число $(0, 1)$ позначають символом i (його називають уявною одиницею). Тоді вищенаведена рівність має вигляд $z = x + iy$. та називається алгебраїчною формою комплексного числа z. Також за означенням $i^2 = ii = (0, 1)(0, 1) = -1$.



Згідно з теорією векторів на площині вектори $1 = (1, 0)$ та $i = (0, 1)$ можуть слугувати базисом, тоді алгебраїчна форма комплексного числа z є саме розкладом z за цим базисом: $z = x1 + yi$, де $i^2 = -1$.

Означення 5.2. Комплексне число $x - iy$ називається спряженим до комплексного числа $z = x + iy$. та позначається символом $\overline{z}$, тобто $\overline{z} = x - iy$.

Зазначимо, що числу $\overline{z}$ на координатній площині відповідає точка, симетрична точці z відносно дійсної осі.

Властивості спряжених чисел

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
2. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}z$.
3. $|\overline{z}| = |z|$.
4. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1 z_2}$.
5. $z\overline{z} = |z|^2$.
6. $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

Поділити одне комплексне число z_1 на інше комплексне число z_2 означає, що потрібно знайти таке комплексне число z, що $z_1 = z_2 z$. На практиці ділення комплексних чисел виконують за допомогою операції множення: домножують чисельник і знаменник на число, спряжене знаменнику.

$$\text{Приклад: } \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} = -\frac{2i}{2} = -i.$$

Асоціативний закон множення дозволяє ввести поняття натурального степеня комплексного числа: $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot ... \cdot z}_{n}$. За угодою $z^0 = 1$.

Запишемо степені уявної одиниці: $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.

Останню рівність використовуємо при обчисленні довільних степенів уявної одиниці.

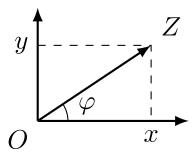
Приклад: $i^{19} = i^{16+3} = i^{16} i^3 = (i^4)^4 i^3 = i^3$.

Множина комплексних чисел позначається $\mathbb{C}$. Очевидно, що множина дійсних чисел є підмножиною $\mathbb{C}$.

5.2 Тригонометрична форма комплексного числа

Нехай $z \in \mathbb{C}$ і $z \neq 0$.

Означення 5.3. Озн. Кут φ між вектором z і ортом дійсної осі називається аргументом комплексного числа z і позначається $\mathrm{Arg} z = \varphi$.



Аргумент визначається неоднозначно з точністю до 2π. Приймаючи до уваги зв'язок між декартовими і полярними координатами площини $\mathbb{R}^2$, маємо:

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\varphi &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned} \quad \text{і } |z| = \sqrt{x^2+y^2} \text{ або } \quad \begin{aligned} x &= |z|\cos\varphi \\ y &= |z|\sin\varphi \end{aligned}$$

Тоді комплексне число $z = x + iy$. можна записати таким чином: $z = x = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Ця рівність і називається тригонометричною формою комплексного числа z.

Задача 5.1. Записати в тригонометричній формі комплексне число $z = 1+i$.

Розв'язання. $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{1} = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, оскільки число z лежить у першій чверті. Отже, $z = 1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

Зауважимо, що дійсні числа теж можна представити як комплексні числа в тригонометричній формі: $2 = 2(\cos 0 + i \sin 0)$, $-1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi)$.