Algebra and geometry

31 серпня 2022 р.

Зміст

Розділ 1

Векторна алгебра

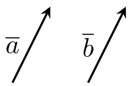
1.1 Вектори на прямій, на площині, у просторі

Означення 1.1. **Вектор** — це направлений відрізок прямої.

Вектор повністю задається довжиною та напрямком. Також вектор можна задати, вказавши його початок і кінець.

Вектори позначаються: $\overline{AB}, \overline{a}$, а їх довжини — $|\overline{AB}|$, $|\overline{a}|$.

Означення 1.2. Два **вектори рівні**, якщо їх довжини і напрямки співпадають.



$\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \upuparrows \overline{b}$ (напрямки співпадають) та $|\overline{a}| = |\overline{b}|$ (довжини співпадають).

Означення 1.3. **Колінеарні вектори** (паралельні вектори) ($\overline{a} \parallel \overline{b}$) — це вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Серед них будемо розрізняти вектори одного напрямку: $\overline{a} \upuparrows \overline{b}$, та протилежного напрямку: $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$.

Означення 1.4. **Нульовий вектор** (нуль - вектор) – це вектор нульової довжини, тобто вектор, кінець і початок якого співпадають, $|\overline{0}| = 0$. Буде зручно вважати нульовий вектор вектором довільного напрямку, тобто нульовий вектор є колінеарним будь-якому вектору.

Означення 1.5. Вектор $\overline{a}'$ — **протилежний вектор** до вектора $\overline{a}$, якщо $\overline{a}' \uparrow\downarrow \overline{a}$ і $|\overline{a}'| = |\overline{a}|$, тобто $\overline{a}' = -\overline{a}$.

Означення 1.6. Вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, ...$ — це **компланарні вектори**, якщо вони лежать в одній площині або паралельні одній площині.

1.2 Лінійні операції над векторами

Множення вектора на скаляр

Означення 1.7. Добуток вектора $\overline{a} \neq \overline{0}$ і числа $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha\overline{a})$ — це вектор $\overline{b} = \alpha\overline{a}$, який задовольняє такі умови:

1) $\overline{b}$ колінеарний вектору $\overline{a}$

2) $|\overline{b}| = |\alpha||\overline{a}|$

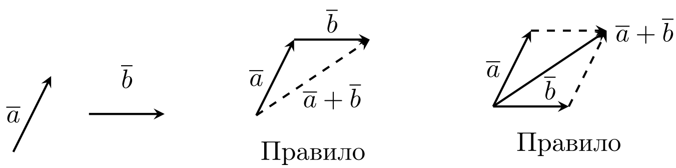
3) $\overline{b} \upuparrows \overline{a}$ — однаково направлені, якщо $\alpha > 0$, і $\overline{b} \uparrow\downarrow \overline{a}$ – протилежно направлені, якщо $\alpha < 0$.

Додавання векторів

Означення 1.8. Сума векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, $(\overline{a} + \overline{b})$ — це вектор, який з'єднує початок вектора $\overline{a}$ з кінцем вектора $\overline{b}$ за умови, що вектор $\overline{b}$ відкладено від кінця вектора $\overline{a}$.

Цей спосіб додавання векторів — це **правило трикутника**.

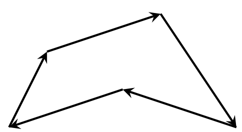
Два вектори можна додати і за іншим правилом, яке має назву — **правило паралелограма**: сумою двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, відкладених від спільного початку, є вектор, який збігається з діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$ як на сторонах. Початки векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ та $\overline{a} + \overline{b}$ співпадають.



Правило трикутника

Правило паралелограма

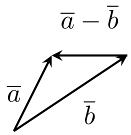
Використовуючи послідовно правило трикутника, можна побудувати суму скінченної кількості довільних векторів. Якщо кінець останнього вектора співпадає з початком першого, то сумою векторів є нульовий вектор: $\overline{0}$.



Віднімання векторів

Означення 1.9. Різниця векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, $(\overline{a}-\overline{b})$ — це вектор $\overline{c}$, який в сумі з вектором $\overline{b}$ дає вектор $\overline{a}$, тобто $\overline{b}+\overline{c}=\overline{a}$.

Очевидно, що $\overline{c}=\overline{a}+(-\overline{b})$.



$\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$

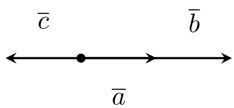
1.3 Властивості лінійних операцій, аксіоми векторної алгебри

1. $(\alpha\beta)\overline{a}=\alpha(\beta\overline{a})$ — асоціативність відносно множення на скаляр.
2. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ — комутативність додавання.
3. $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$ — асоціативність додавання.
4. $\left.\begin{array}{l}(\alpha+\beta)\overline{a}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}\\ \overline{a}(\alpha+\beta)=\overline{a}\alpha+\overline{a}\beta\end{array}\right\}$ — дистрибутивність.
5. $\exists!\overline{0}:\forall\overline{a}:\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$ — існування єдиного нуля.
6. $\forall\overline{a}\exists!\overline{a}':\overline{a}'+\overline{a}=\overline{0}$ — існування протилежного вектора.
7. $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$

1.4 Базис на прямій, на площині, у просторі

Розглянемо множину векторів, колінеарних вектору $\overline{a}\neq\overline{0}$. Позначимо її E^1.

Нехай $\overline{a},\overline{b},\overline{c}\in E^1$.



Теорема 1.1. $\forall\overline{b}\in E^1\exists$ *дійсне число* α *таке, що* $\overline{b}=\alpha\overline{a}$, *причому це представлення єдине.*

► Доведемо єдиність даного представлення методом від супротивного.
Нехай $\overline{b} = \tilde{\alpha}\overline{a}$
Тоді $\overline{0} = \overline{b} - \overline{b} = \tilde{\alpha}\overline{a} - \alpha\overline{a} = (\tilde{\alpha} - \alpha)\overline{a} \Rightarrow \tilde{\alpha} - \alpha = 0 \Rightarrow \tilde{\alpha} = \alpha$
Вкажемо значення коефіцієнта α.
Якщо $\overline{a} \upuparrows \overline{b}$, то $\alpha = \dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}$.
Дійсно: $|\alpha\overline{a}| = \left|\dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}\right| |\overline{a}| = \dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}|\overline{a}| = |\overline{b}|$, $\alpha\overline{a} \upuparrows \overline{b}$.
Якщо ж $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$, то $\alpha = -\dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}$ (доведення аналогічне).

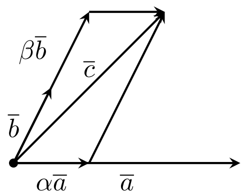
◄

Нехай $\overline{a} \nparallel \overline{b}$ (тому $\overline{a} \neq \overline{0}$, $\overline{b} \neq \overline{0}$). Розглянемо множину векторів, компланарних векторам $\overline{a}$ та $\overline{b}$, позначимо її E^2. Нехай $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in E^2$.

Теорема 1.2. $\forall \overline{c} \in E^2$ $\exists!$ *дійсні* α, β, *такі, що* $\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$.

► Проведемо доведення графічно.

З кінця вектору $\overline{c}$ проведемо дві прямі паралельно векторам $\overline{a}$ і $\overline{b}$ відповідно до перетину з цими векторами чи прямими, на яких вони лежать. Отримали паралелограм, дві сторони якого дорівнюють відповідно $\alpha\overline{a}$ і $\beta\overline{b}$ (за теоремою 1.1). Діагоналлю цього паралелограма є вектор $\overline{c}$, тобто $\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$. Єдиність коефіцієнтів α та β випливає з двох умов:



1) існує лише одна точка перетину непаралельних прямих,

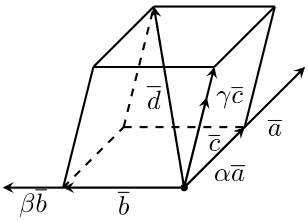
2) за теоремою 1.1 константи α і β визначаються однозначно.

◄

Нехай E^3 — множина всіх векторів у просторі, причому $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ — некомпланарні ($\overline{a} \neq \overline{0}, \overline{b} \neq \overline{0}, \overline{c} \neq \overline{0}$).

Теорема 1.3. $\forall \overline{d} \in E^3, \exists!\ \alpha, \beta, \gamma : \overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$.

►



Із кінця вектора $\overline{d}$ проведемо три площини, паралельні парам векторів $(\overline{b}, \overline{c})$, $(\overline{a}, \overline{c})$, $(\overline{a}, \overline{b})$. Ці площини перетнуть прямі, на яких лежать $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ в єдиних точках. За теоремою 1.1 отримаємо нові вектори $\alpha\overline{a}, \beta\overline{b}, \gamma\overline{c}$, а вектор $\overline{d}$ – це діагональ паралелепіпеда, на них побудованого, тобто $\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$, що і треба було довести.

◄

Зауваження. Базисом у множині E^1 може слугувати довільний ненульовий вектор, базисом у E^2 – впорядкована пара неколінеарних векторів, а в E^3 — впорядкована трійка некомпланарних векторів. Вектору $\overline{b}$ було поставлено у відповідність число α; вектору $\overline{c}$ – числа α і β; вектору $\overline{d}$ – числа α, β, γ. Ці числа називаються — коефіцієнти розкладу векторів $\overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ за базисами $\overline{a}$; $\overline{a}, \overline{b}$; $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ просторів E^1, E^2 і E^3 відповідно.

Означення 1.10. Коефіцієнти розкладу вектора $\overline{a}$ за базисом $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ...$ — це числа $\alpha_1, \alpha_2, ... \in \mathbb{R}$, такі, що $\overline{a} = \alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ...$

1.5 Декартів прямокутний базис

Означення 1.11. Впорядкована трійка некомпланарних векторів $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ називається правою (**права трійка векторів**), якщо з кінця вектора $\overline{c}$ поворот від $\overline{a}$ до $\overline{b}$, менший за $180°$, тобто відбувається проти годинникової стрілки.

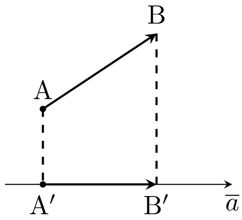
Означення 1.12. Трійка векторів $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ утворює **декартів правий прямокутний базис**, якщо:

1. $\overline{i} \perp \overline{j}, \overline{j} \perp \overline{k}, \overline{k} \perp \overline{i}$
2. $|\overline{i}| = |\overline{j}| = |\overline{k}| = 1$
3. $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ — права трійка

1.6 Проекція вектора на вектор (або на вісь)

Нехай задано $\overline{a} \neq \overline{0}$.

Означення 1.13. Проекція вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{a}$ називається довжина відрізка $A'B'$ між основами перпендикулярів, опущених з точок A та B на вектор $\overline{a}$ (або напряму, на якій він лежить):



$$\text{пр}_{\overline{a}}\overline{AB} = \begin{cases} |\overline{A'B'}|, \text{ якщо } \overline{A'B'} \uparrow\uparrow \overline{a} \\ -|\overline{A'B'}|, \text{ якщо } \overline{A'B'} \uparrow\downarrow \overline{a} \end{cases}$$

Властивості проекції:

1. $\text{пр}_{\overline{a}}\alpha\overline{b} = \alpha\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b}$
2. $\text{пр}_{\overline{a}}(\overline{a} + \overline{b}) = \text{пр}_{\overline{a}}\overline{a} + \text{пр}_{\overline{a}}\overline{b}$

1.7 Множення векторів. Скалярний добуток двох векторів

Означення 1.14. Скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (позначається $\overline{a} \cdot \overline{b}$, $\overline{a}\overline{b}$ чи $(\overline{a}, \overline{b})$) — це число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними: $(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}| \cos\varphi$, де $\varphi = \widehat{(\overline{a}, \overline{b})}$.

Алгебраїчні властивості скалярного добутку:

1. $(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$ — комутативність.
2. $\left.\begin{matrix} (\alpha\overline{a}, \overline{b}) = \alpha(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{a}, \alpha\overline{b}) \\ (\overline{a} + \overline{a}', \overline{b}) = (\overline{a}, \overline{b}) + (\overline{a}', \overline{b}) \\ (\overline{a}, \overline{b} + \overline{b}') = (\overline{a}, \overline{b}) + (\overline{a}, \overline{b}') \end{matrix}\right\}$ — лінійність.

Геометричні властивості скалярного добутку:

1. $(\overline{a}, \overline{b}) = 0 \Leftrightarrow \overline{a} \perp \overline{b}$.
2. $(\overline{a}, \overline{a}) = |\overline{a}|^2 \Rightarrow |\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})}$.

1.8 Скалярний добуток в координатах

Нехай $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ – це фіксований базис в просторі E^3, $\overline{x}, \overline{y} \in E^3$. Тоді:

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3$$
$$\overline{y} = y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + y_3\overline{e}_3$$

Обчислимо скалярний добуток цих векторів:
$(\overline{x}, \overline{y}) = (x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3, \overline{y}) = (x_1\overline{e}_1, \overline{y}) + (x_2\overline{e}_2, \overline{y}) + (x_3\overline{e}_3, \overline{y}) =$
$x_1(\overline{e}_1, y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + y_3\overline{e}_3) + x_2(\overline{e}_2, y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + y_3\overline{e}_3) + x_3(\overline{e}_3, y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + y_3\overline{e}_3) =$
$x_1y_1(\overline{e}_1, \overline{e}_1) + x_1y_2(\overline{e}_1, \overline{e}_2) + x_1y_3(\overline{e}_1, \overline{e}_3) + x_2y_1(\overline{e}_2, \overline{e}_1) + x_2y_2(\overline{e}_2, \overline{e}_2) + x_2y_3(\overline{e}_2, \overline{e}_3) +$
$x_3y_1(\overline{e}_3, \overline{e}_1) + x_3y_2(\overline{e}_3, \overline{e}_2) + x_3y_3(\overline{e}_3, \overline{e}_3) = x_1y_1(\overline{e}_1, \overline{e}_1) + (x_1y_2 + x_2y_1)(\overline{e}_1, \overline{e}_2) +$
$(x_1y_3 + x_3y_1)(\overline{e}_1, \overline{e}_3) + x_2y_2(\overline{e}_2, \overline{e}_2) + (x_2y_3 + x_3y_2)(\overline{e}_2, \overline{e}_3) + x_3y_3(\overline{e}_3, \overline{e}_3)$.

У частковому випадку, коли $\overline{e}_1 = \overline{i}, \overline{e}_2 = \overline{j}, \overline{e}_3 = \overline{k}$, маємо: $(\overline{e}_1, \overline{e}_2) = (\overline{e}_2, \overline{e}_3) = (\overline{e}_3, \overline{e}_1), (\overline{e}_i, \overline{e}_j) = 1$, де $i = 1, 2, 3$.

$$(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Якщо $\overline{a} = (x, y, z)$, то $|\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1.9 Нормування вектора

Означення 1.15. Нехай $\overline{a} \neq \overline{0}$. **Орт-вектор** вектора $\overline{a}$ — це вектор $\overline{a}_o$, такий, що $\overline{a}_o \uparrow\uparrow \overline{a}$ і $|\overline{a}_o| = 1$.

Означення 1.16. Нормування вектора $\overline{a}$ — це процес отримання орт-вектора $\overline{a}_o$, $\overline{a}_o = \dfrac{1}{|\overline{a}|}\overline{a}$

Якщо $\overline{a} = (x, y, z)$, то

$$\overline{a}_o = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right).$$

Геометричний сенс координат орт-вектора $\overline{a}_o$ у декартовій системі координат: $\overline{a}_o = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ де, $\alpha = (\widehat{\overline{a}, OX}) = (\widehat{\overline{a}_o, OX})$, $\beta = (\widehat{\overline{a}, OY}) = (\widehat{\overline{a}_o, OY})$, $\gamma = (\widehat{\overline{a}, OZ}) = (\widehat{\overline{a}_o, OZ})$.

Означення 1.17. Косинуси кутів, які утворює вектор (або його орт) з осями координат — це **напрямні косинуси**.

Знайдемо косинус кута α:

$$\cos\alpha = \frac{(\overline{a}, \overline{i})}{|\overline{a}||\overline{i}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Твердження 1.1. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Формула для довжини проекції вектора:

$$x = |\overline{a}|\cos\alpha = \text{пр}_{\overline{i}}\overline{a}$$

1.10 Векторний добуток двох векторів

Означення 1.18. **Векторний добуток** векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ $[\overline{a},\overline{b}]$ — це вектор $\overline{c}$, що задовольняє умови:

1. $\overline{c}\perp\overline{a}$, $\overline{c}\perp\overline{b}$
2. $|\overline{a}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi$, $\varphi = (\widehat{\overline{a},\overline{b}})$
3. $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — права трійка

Зауваження. Оскільки $\overline{c}\perp\overline{a}$, $\overline{c}\perp\overline{b}$, то $\overline{c}$ перпендикулярний площині векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

Алгебраїчні властивості векторного добутку:

1) $[\overline{a},\overline{b}] = -[\overline{b},\overline{a}]$
2) $[\alpha\overline{a},\overline{b}] = \alpha[\overline{a},\overline{b}] = [\overline{a},\alpha\overline{b}]$
3) $[\overline{a}+\overline{b},\overline{c}] = [\overline{a},\overline{c}] + [\overline{b},\overline{c}]$
4) $[\overline{a},\overline{b}+\overline{c}] = [\overline{a},\overline{b}] + [\overline{a},\overline{c}]$

Доведення:

► 1) Нехай $[\overline{a},\overline{b}] = \overline{c}$, $[\overline{b},\overline{a}] = \overline{d}$. Тоді: $\overline{c}\perp\overline{a}$ і $\overline{c}\perp\overline{b}$, $\overline{d}\perp\overline{b}$ і $\overline{d}\perp\overline{a}$, тобто вектори $\overline{c}$ і $\overline{d}$ перпендикулярні до площини, в якій лежать вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$, отже, $\overline{c}\parallel\overline{d}$.

$|\overline{c}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi = |\overline{d}|$, де $\varphi = (\widehat{\overline{a},\overline{b}})$.

$\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — права трійка; $\overline{b}$, $\overline{a}$, $\overline{d}$ — також права трійка $\Rightarrow$ $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{d}$ — ліва трійка, тому вектори $\overline{c}$ та $\overline{d}$ протилежно направлені.

Отже, вектори $\overline{c}$ та $\overline{d}$ колінеарні, мають однакову довжину та протилежно направлені. Тому $\overline{c} = -\overline{d}$.

2) Якщо $\alpha = 0$ або $\overline{a}\parallel\overline{b}$, то рівності очевидні: $[\alpha\overline{a},\overline{b}] = \alpha[\overline{a},\overline{b}] = \overline{0}$. Нехай $\alpha < 0$, $[\overline{a},\overline{b}] = \overline{c}$, $\varphi = (\widehat{\overline{a},\overline{b}})$, $[\alpha\overline{a},\overline{b}] = \overline{d}$. Тоді:

$|\alpha\overline{c}| = |\alpha[\overline{a},\overline{b}]| = |\alpha||[\overline{a},\overline{b}]| = -\alpha|\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi$.

$|[\alpha\overline{a},\overline{b}]| = |\alpha\overline{a}||\overline{b}]|\sin(\widehat{\alpha\overline{a},\overline{b}}) = |\alpha||\overline{a}||\overline{b}]|\sin(\pi-\varphi) = -\alpha|\overline{a}||\overline{b}]|\sin\varphi$.

$\overline{c}\perp$ площині, в якій лежать $\overline{a}$ і $\overline{b}$ $\Rightarrow$ $\overline{c}\perp$ площині, в якій лежать $\alpha\overline{a}$ і $\overline{b}$.

$\overline{d} \perp$ площині, в якій лежать $\alpha\overline{a}$ і $\overline{b}$, отже, $\overline{c} \parallel \overline{d}$.

$\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — права трійка $\alpha\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — ліва трійка, $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\alpha\overline{c}$ — ліва трійка.

$\alpha\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{d}$ — права трійка $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{d}$ — ліва трійка; отже, вектори $\alpha\overline{c}$ та $\overline{d}$. однаково направлені.

Враховуючи однакову довжину векторів $\alpha\overline{c}$ та $\overline{d}$, маємо $\alpha\overline{c} = \overline{d}$ або $[\alpha\overline{a}, \overline{b}] = \alpha[\overline{a}, \overline{b}]$.

3), 4) — очевидно.

◀

Геометричні властивості векторного добутку:

1) $[\overline{a}, \overline{b}] = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{a} \parallel \overline{b}$

2) $|[\overline{a}, \overline{b}]| = S_{\Diamond \overline{a}\overline{b}}$, де $S_{\Diamond \overline{a}\overline{b}}$ — площа паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$, як на сторонах

Доведення:

▶ 1) $|[\overline{a}, \overline{b}]| = |\overline{a}||\overline{b}| \sin\varphi = 0 \Rightarrow \overline{a} = \overline{0}$ або $\overline{b} = \overline{0}$, або $\sin\varphi = 0 \Rightarrow \overline{a} \parallel \overline{b}$.

Якщо $\overline{a} \parallel \overline{b}$, то $\sin\varphi = 0$, і $|[\overline{a}, \overline{b}]| = 0 \Rightarrow [\overline{a}, \overline{b}] = \overline{0}$.

2) $|[\overline{a}, \overline{b}]| = |\overline{a}||\overline{b}| \sin\varphi = |\overline{a}|h = S_{\Diamond \overline{a}\overline{b}}$.

◀

Твердження 1.2. $[\overline{a}, \overline{a}] = 0$.

1.11 Векторний добуток в координатах

Нехай в просторі E^3 зафіксовано базис $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$, $\overline{x}, \overline{y} \in E^3$, тоді

$$\overline{x} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}$$

$$\overline{y} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}$$

Знайдемо координати вектору $[\overline{x}, \overline{y}]$.

Зауважимо, що $[\overline{i}, \overline{j}] = \overline{k}$, $[\overline{j}, \overline{k}] = \overline{i}$, $[\overline{k}, \overline{i}] = \overline{j}$. Тоді:

$[\overline{i}, \overline{j}] = [x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}, x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}] = x_1x_2[\overline{i}, \overline{i}] + x_1y_2[\overline{i}, \overline{j}] + x_1z_2[\overline{i}, \overline{k}] + y_1x_2[\overline{j}, \overline{i}] + y_1y_2[\overline{j}, \overline{j}] + y_1z_2[\overline{j}, \overline{k}] + z_1x_2[\overline{k}, \overline{i}] + z_1y_2[\overline{k}, \overline{j}] + z_1z_2[\overline{k}, \overline{k}] = (x_1y_2 - x_2y_1)[\overline{i}, \overline{j}] + (x_1z_2 - x_2z_1)[\overline{i}, \overline{k}] + (y_1z_2 - y_2z_1)[\overline{j}, \overline{k}] = (x_1y_2 - x_2y_1)\overline{k} + (x_1z_2 - x_2z_1)\overline{j} + (y_1z_2 - y_2z_1)\overline{i} = (y_1z_2 - y_2z_1)\overline{i} + (x_1z_2 - x_2z_1)\overline{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\overline{k}$.

Задача 1.1. Знайти площу трикутника з вершинами $A(3,0,-1)$, $B(-2,4,1)$, $C(2,1,-3)$.

Розв'язання. $S = \dfrac{1}{2}|[\overline{AB}, \overline{AC}]|$. Оскільки $\overline{AB} = (-5,4,2), \overline{AC} = (-1,1,-2)$, то $[\overline{AB}, \overline{AC}] = -10\overline{i} - 12\overline{j} - \overline{k}$. Тоді $|[\overline{AB}, \overline{AC}]| = \sqrt{(-10)^2 + (-12)^2 + (-1)^2} = \sqrt{100 + 144 + 1} = \sqrt{245}$, і $S = \dfrac{1}{2}\sqrt{245}$

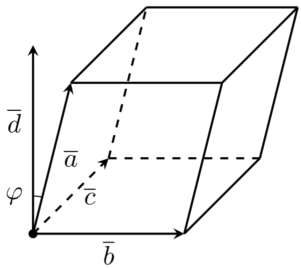
1.12 Мішаний добуток трьох векторів

Означення 1.19. Мішаний добуток векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ — це скалярний добуток $\overline{a}$ з векторним добутком векторів $\overline{b}$ і $\overline{c}$, тобто $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}])$.

Теорема 1.4. *Мішаний добуток векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда $V_{пар}$, побудованого на цих векторах, якщо вони складають праву трійку і дорівнює $-V_{пар}$, якщо $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – ліва трійка:*

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{cases} V_{пар}, & \text{якщо } \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \text{ — права трійка} \\ -V_{пар}, & \text{якщо } \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \text{ — ліва трійка} \end{cases}$$

► Розглянемо випадок, коли $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ — права трійка.



Нехай $[\overline{b}, \overline{c}] = \overline{d}$. Тоді $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ – права трійка. Позначимо $\varphi = \widehat{(\overline{a}, \overline{d})}$.

Тоді $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]) = (\overline{a}, \overline{d}) = |\overline{a}||\overline{d}|\cos\varphi = S_{\Diamond \overline{c}\overline{b}}|\overline{a}|\cos\varphi = S_{\Diamond \overline{c}\overline{b}}h = V_{\text{пар}}$, оскільки висота паралелепіпеда $h = |\overline{a}|\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right) = |\overline{a}|\cos\varphi$. У випадку, коли $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ — ліва трійка, доведення аналогічне.

◄

Алгебраїчні властивості:

1. $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{c}\overline{a}\overline{b} = \overline{b}\overline{c}\overline{a} = -\overline{b}\overline{a}\overline{c} = -\overline{c}\overline{b}\overline{a} = -\overline{a}\overline{c}\overline{b}$

2. $(\alpha\overline{a})\overline{b}\overline{c} = \alpha\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{a}(\alpha\overline{b})\overline{c} = \overline{a}\overline{b}(\alpha\overline{c})$

3. $$\begin{array}{l} (\overline{a} + \overline{a}')\overline{b}\overline{c} = \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}'\overline{b}\overline{c} \\ \overline{a}(\overline{b} + \overline{b}')\overline{c} = \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}\overline{b}'\overline{c} \\ \overline{a}\overline{b}(\overline{c} + \overline{c}') = \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}\overline{b}\overline{c}' \end{array}$$

Доведення:

► 1) випливає з того факту, що при циклічній перестановці векторів їх орієнтація не змінюється. А якщо в трійці векторів деякі два з них поміняти місцями, то її орієнтація змінюється.

2) випливає з лінійності скалярного і векторного добутків відносно множення на скаляр.

3) $(\overline{a} + \overline{a}')\overline{b}\overline{c} = (\overline{a} + \overline{a}', [\overline{b}, \overline{c}]) = (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]) + (\overline{a}', [\overline{b}, \overline{c}]) = \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}'\overline{b}\overline{c}$
$\overline{a}(\overline{b} + \overline{b}^{'})\overline{c} = (\overline{b} + \overline{b}^{'})\overline{c}\overline{a} = \overline{b}\overline{c}\overline{a} + \overline{b}^{'}\overline{c}\overline{a} = \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}\overline{b}^{'}\overline{c}$.
Але $\overline{a}(\overline{b} + \overline{b}^{'})\overline{a} = (\overline{a}, [\overline{b} + \overline{b}^{'}, \overline{c}]) = (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}] + [\overline{b}^{'}, \overline{c}])$.

Ця рівність справедлива $\forall \overline{a}$. Тому $[\overline{b} + \overline{b}^{'}, \overline{c}] = [\overline{b}, \overline{c}] + [\overline{b}^{'}, \overline{c}]$, що доводить властивість 3 векторного добутку.

◄

Твердження 1.3. $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]) = ([\overline{a}, \overline{b}], \overline{c})$.

1.13 Мішаний добуток в координатах

Нехай в просторі E^3 зафіксовано базис $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ і задано три вектори:
$\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\overline{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

Тоді $[\overline{b}, \overline{c}] = (b_2c_3 - b_3c_2)\overline{i} - (b_1c_3 - b_3c_1)\overline{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\overline{k}$ та $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$.

Задача 1.2. Чи можуть вектори $\overline{e}_1 = (1, -1, 0)$, $\overline{e}_2 = (2, 0, -2)$, $\overline{e}_3 = (3, 1, 6)$ слугувати базисом в просторі E^3?

Розв'язання. Якщо $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ — базис, то вони некомпланарні і об'єм паралелепіпеда, на них побудованого, не дорівнює нулю. Тобто, $\overline{e}_1\overline{e}_2\overline{e}_3 \neq 0$. Знайдемо мішаний добуток $\overline{e}_1\overline{e}_2\overline{e}_3$: $\overline{e}_1\overline{e}_2\overline{e}_3 = 0 + 0 + 6 + 0 + 2 + 12 = 20 \neq 0$. Це означає, що дані вектори можуть слугувати базисом в E^3.