Algebra and geometry

31 серпня 2022 р.

Зміст

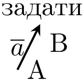
Розділ 1

Векторна алгебра

1.1 Вектори на прямій, на площині, у просторі

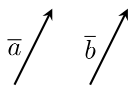
Означення 1.1. **Вектор** — це направлений відрізок прямої.

Вектор повністю задається довжиною та напрямком. Також вектор можна задати, вказавши його початок і кінець.



Вектори позначаються: $\overline{AB}, \overline{a}$, а їх довжини — $|\overline{AB}|$, $|\overline{a}|$.

Означення 1.2. Два **вектори рівні**, якщо їх довжини і напрямки співпадають.



$\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \upuparrows \overline{b}$ (напрямки співпадають) та $|\overline{a}| = |\overline{b}|$ (довжини співпадають).

Означення 1.3. **Колінеарні вектори** (паралельні вектори) ($\overline{a} \parallel \overline{b}$) — це вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Серед них будемо розрізняти вектори одного напрямку: $\overline{a} \upuparrows \overline{b}$, та протилежного напрямку: $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$.

Означення 1.4. **Нульовий вектор** (нуль - вектор) – це вектор нульової довжини, тобто вектор, кінець і початок якого співпадають, $|\overline{0}| = 0$. Буде зручно вважати нульовий вектор вектором довільного напрямку, тобто нульовий вектор є колінеарним будь-якому вектору.

Означення 1.5. Вектор $\overline{a}'$ — **протилежний вектор** до вектора $\overline{a}$, якщо $\overline{a}' \uparrow\downarrow \overline{a}$ і $|\overline{a}'| = |\overline{a}|$, тобто $\overline{a}' = -\overline{a}$.

Означення 1.6. Вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, ...$ — це **компланарні вектори**, якщо вони лежать в одній площині або паралельні одній площині.

1.2 Лінійні операції над векторами

Множення вектора на скаляр

Означення 1.7. **Добуток** вектора $\overline{a} \neq \overline{0}$ і числа $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha\overline{a})$ — це вектор $\overline{b} = \alpha\overline{a}$, який задовольняє такі умови:

1) $\overline{b}$ колінеарний вектору $\overline{a}$

2) $|\overline{b}| = |\alpha||\overline{a}|$

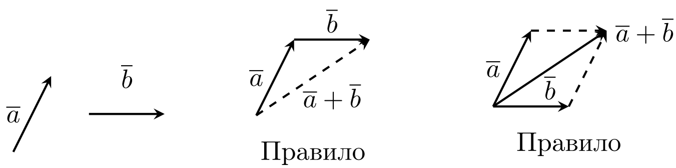
3) $\overline{b} \upuparrows \overline{a}$ — однаково направлені, якщо $\alpha > 0$, і $\overline{b} \uparrow\downarrow \overline{a}$ – протилежно направлені, якщо $\alpha < 0$.

Додавання векторів

Означення 1.8. **Сума векторів** $\overline{a}$ і $\overline{b}$, $(\overline{a} + \overline{b})$ — це вектор, який з'єднує початок вектора $\overline{a}$ з кінцем вектора $\overline{b}$ за умови, що вектор $\overline{b}$ відкладено від кінця вектора $\overline{a}$.

Цей спосіб додавання векторів — це **правило трикутника**.

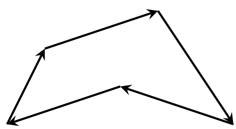
Два вектори можна додати і за іншим правилом, яке має назву — **правило паралелограма**: сумою двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, відкладених від спільного початку, є вектор, який збігається з діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$ як на сторонах. Початки векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ та $\overline{a} + \overline{b}$ співпадають.



Правило трикутника

Правило паралелограма

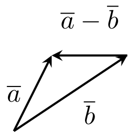
Використовуючи послідовно правило трикутника, можна побудувати суму скінченної кількості довільних векторів. Якщо кінець останнього вектора співпадає з початком першого, то сумою векторів є нульовий вектор: $\overline{0}$.



Віднімання векторів

Означення 1.9. Різниця векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, $(\overline{a}-\overline{b})$ — це вектор $\overline{c}$, який в сумі з вектором $\overline{b}$ дає вектор $\overline{a}$, тобто $\overline{b}+\overline{c}=\overline{a}$.

Очевидно, що $\overline{c}=\overline{a}+(-\overline{b})$.



$\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$

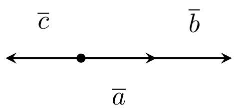
1.3 Властивості лінійних операцій, аксіоми векторної алгебри

1. $(\alpha\beta)\overline{a}=\alpha(\beta\overline{a})$ — асоціативність відносно множення на скаляр.
2. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ — комутативність додавання.
3. $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$ — асоціативність додавання.
4. $\left.\begin{matrix}(\alpha+\beta)\overline{a}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}\\ \overline{a}(\alpha+\beta)=\overline{a}\alpha+\overline{a}\beta\end{matrix}\right\}$ — дистрибутивність.
5. $\exists!\overline{0}:\forall\overline{a}:\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$ — існування єдиного нуля.
6. $\forall\overline{a}\exists!\overline{a}':\overline{a}'+\overline{a}=\overline{0}$ — існування протилежного вектора.
7. $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$

1.4 Базис на прямій, на площині, у просторі

Розглянемо множину векторів, колінеарних вектору $\overline{a}\neq\overline{0}$. Позначимо її E^1.

Нехай $\overline{a},\overline{b},\overline{c}\in E^1$.



Теорема 1.1. $\forall\overline{b}\in E^1\exists$ *дійсне число* α *таке, що* $\overline{b}=\alpha\overline{a}$, *причому це представлення єдине.*

► Доведемо єдиність даного представлення методом від супротивного.
Нехай $\overline{b} = \tilde{\alpha}\overline{a}$
Тоді $\overline{0} = \overline{b} - \overline{b} = \tilde{\alpha}\overline{a} - \alpha\overline{a} = (\tilde{\alpha} - \alpha)\overline{a} \Rightarrow \tilde{\alpha} - \alpha = 0 \Rightarrow \tilde{\alpha} = \alpha$
Вкажемо значення коефіцієнта α.
Якщо $\overline{a} \upuparrows \overline{b}$, то $\alpha = \dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}$.
Дійсно: $|\alpha\overline{a}| = \left|\dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}\right| |\overline{a}| = \dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}|\overline{a}| = |\overline{b}|$, $\alpha\overline{a} \upuparrows \overline{b}$.
Якщо ж $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$, то $\alpha = -\dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}$ (доведення аналогічне).

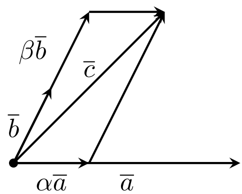
◄

Нехай $\overline{a} \nparallel \overline{b}$ (тому $\overline{a} \neq \overline{0}$, $\overline{b} \neq \overline{0}$). Розглянемо множину векторів, компланарних векторам $\overline{a}$ та $\overline{b}$, позначимо її E^2. Нехай $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in E^2$.

Теорема 1.2. $\forall \overline{c} \in E^2$ $\exists!$ *дійсні* α, β, *такі, що* $\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$.

► Проведемо доведення графічно.

З кінця вектору $\overline{c}$ проведемо дві прямі паралельно векторам $\overline{a}$ і $\overline{b}$ відповідно до перетину з цими векторами чи прямими, на яких вони лежать. Отримали паралелограм, дві сторони якого дорівнюють відповідно $\alpha\overline{a}$ і $\beta\overline{b}$ (за теоремою 1.1). Діагоналлю цього паралелограма є вектор $\overline{c}$, тобто $\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$. Єдиність коефіцієнтів α та β випливає з двох умов:



1) існує лише одна точка перетину непаралельних прямих,

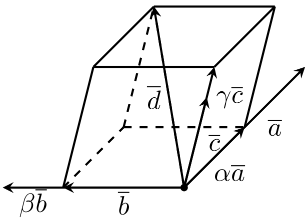
2) за теоремою 1.1 константи α і β визначаються однозначно.

◄

Нехай E^3 — множина всіх векторів у просторі, причому $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ — некомпланарні ($\overline{a} \neq \overline{0}, \overline{b} \neq \overline{0}, \overline{c} \neq \overline{0}$).

Теорема 1.3. $\forall \overline{d} \in E^3, \exists!\ \alpha, \beta, \gamma : \overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$.

►



Із кінця вектора $\overline{d}$ проведемо три площини, паралельні парам векторів $(\overline{b}, \overline{c})$, $(\overline{a}, \overline{c})$, $(\overline{a}, \overline{b})$. Ці площини перетнуть прямі, на яких лежать $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ в єдиних точках. За теоремою 1.1 отримаємо нові вектори $\alpha\overline{a}, \beta\overline{b}, \gamma\overline{c}$, а вектор $\overline{d}$ – це діагональ паралелепіпеда, на них побудованого, тобто $\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$, що і треба було довести.

◄

Зауваження. Базисом у множині E^1 може слугувати довільний ненульовий вектор, базисом у E^2 – впорядкована пара неколінеарних векторів, а в E^3 — впорядкована трійка некомпланарних векторів. Вектору $\overline{b}$ було поставлено у відповідність число α; вектору $\overline{c}$ – числа α і β; вектору $\overline{d}$ – числа α, β, γ. Ці числа називаються — коефіцієнти розкладу векторів $\overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ за базисами $\overline{a}$; $\overline{a}, \overline{b}$; $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ просторів E^1, E^2 і E^3 відповідно.

Означення 1.10. Коефіцієнти розкладу вектора $\overline{a}$ за базисом $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ...$ — це числа $\alpha_1, \alpha_2, ... \in \mathbb{R}$, такі, що $\overline{a} = \alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ...$

1.5 Декартів прямокутний базис

Означення 1.11. Впорядкована трійка некомпланарних векторів $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ називається правою (**права трійка векторів**), якщо з кінця вектора $\overline{c}$ поворот від $\overline{a}$ до $\overline{b}$, менший за $180°$, тобто відбувається проти годинникової стрілки.

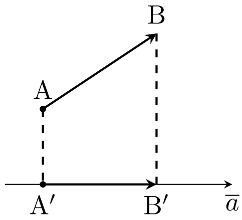
Означення 1.12. Трійка векторів $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ утворює **декартів правий прямокутний базис**, якщо:

1. $\overline{i} \perp \overline{j}, \overline{j} \perp \overline{k}, \overline{k} \perp \overline{i}$
2. $|\overline{i}| = |\overline{j}| = |\overline{k}| = 1$
3. $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ — права трійка

1.6 Проекція вектора на вектор (або на вісь)

Нехай задано $\overline{a} \neq \overline{0}$.

Означення 1.13. Проекція вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{a}$ називається довжина відрізка $A'B'$ між основами перпендикулярів, опущених з точок A та B на вектор $\overline{a}$ (або напряму, на якій він лежить):



$$\text{пр}_{\overline{a}}\overline{AB} = \begin{cases} |\overline{A'B'}|, \text{ якщо } \overline{A'B'} \uparrow\uparrow \overline{a} \\ -|\overline{A'B'}|, \text{ якщо } \overline{A'B'} \uparrow\downarrow \overline{a} \end{cases}$$

Властивості проекції:

1. $\text{пр}_{\overline{a}}\alpha\overline{b} = \alpha\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b}$
2. $\text{пр}_{\overline{a}}(\overline{a}+\overline{b}) = \text{пр}_{\overline{a}}\overline{a} + \text{пр}_{\overline{a}}\overline{b}$

1.7 Множення векторів. Скалярний добуток двох векторів

Означення 1.14. Скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (позначається $\overline{a}\cdot\overline{b}$, $\overline{a}\overline{b}$ чи $(\overline{a},\overline{b})$) — це число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними: $(\overline{a},\overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi$, де $\varphi = \widehat{(\overline{a},\overline{b})}$.

Алгебраїчні властивості скалярного добутку:

1. $(\overline{a},\overline{b}) = (\overline{b},\overline{a})$ — комутативність.
2. $\left.\begin{array}{l} (\alpha\overline{a},\overline{b}) = \alpha(\overline{a},\overline{b}) = (\overline{a},\alpha\overline{b}) \\ (\overline{a}+\overline{a}',\overline{b}) = (\overline{a},\overline{b}) + (\overline{a}',\overline{b}) \\ (\overline{a},\overline{b}+\overline{b}') = (\overline{a},\overline{b}) + (\overline{a},\overline{b}') \end{array}\right\}$ — лінійність.

Геометричні властивості скалярного добутку:

1. $(\overline{a},\overline{b}) = 0 \Leftrightarrow \overline{a}\perp\overline{b}$.
2. $(\overline{a},\overline{a}) = |\overline{a}|^2 \Rightarrow |\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a},\overline{a})}$.

1.8 Скалярний добуток в координатах

Нехай $\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}$ – це фіксований базис в просторі E^3, $\overline{x},\overline{y}\in E^3$. Тоді:

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3$$
$$\overline{y} = y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + y_3\overline{e}_3$$

Обчислимо скалярний добуток цих векторів:
$(\overline{x},\overline{y}) = (x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3, \overline{y}) = (x_1\overline{e}_1, \overline{y}) + (x_2\overline{e}_2, \overline{y}) + (x_3\overline{e}_3, \overline{y}) =$
$x_1(\overline{e}_1, y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + y_3\overline{e}_3) + x_2(\overline{e}_2, y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + y_3\overline{e}_3) + x_3(\overline{e}_3, y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + y_3\overline{e}_3) =$
$x_1y_1(\overline{e}_1,\overline{e}_1) + x_1y_2(\overline{e}_1,\overline{e}_2) + x_1y_3(\overline{e}_1,\overline{e}_3) + x_2y_1(\overline{e}_2,\overline{e}_1) + x_2y_2(\overline{e}_2,\overline{e}_2) + x_2y_3(\overline{e}_2,\overline{e}_3) +$
$x_3y_1(\overline{e}_3,\overline{e}_1) + x_3y_2(\overline{e}_3,\overline{e}_2) + x_3y_3(\overline{e}_3,\overline{e}_3) = x_1y_1(\overline{e}_1,\overline{e}_1) + (x_1y_2 + x_2y_1)(\overline{e}_1,\overline{e}_2) +$
$(x_1y_3 + x_3y_1)(\overline{e}_1,\overline{e}_3) + x_2y_2(\overline{e}_2,\overline{e}_2) + (x_2y_3 + x_3y_2)(\overline{e}_2,\overline{e}_3) + x_3y_3(\overline{e}_3,\overline{e}_3)$.

У частковому випадку, коли $\overline{e}_1 = \overline{i}, \overline{e}_2 = \overline{j}, \overline{e}_3 = \overline{k}$, маємо: $(\overline{e}_1,\overline{e}_2) = (\overline{e}_2,\overline{e}_3) = (\overline{e}_3,\overline{e}_1), (\overline{e}_i,\overline{e}_j) = 1$, де $i = 1, 2, 3$.

$$(\overline{x},\overline{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Якщо $\overline{a} = (x, y, z)$, то $|\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a},\overline{a})} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1.9 Нормування вектора

Означення 1.15. Нехай $\overline{a} \neq \overline{0}$. **Орт-вектор** вектора $\overline{a}$ — це вектор $\overline{a}_o$, такий, що $\overline{a}_o \uparrow\uparrow \overline{a}$ і $|\overline{a}_o| = 1$.

Означення 1.16. Нормування вектора $\overline{a}$ — це процес отримання орт-вектора $\overline{a}_o$, $\overline{a}_o = \dfrac{1}{|\overline{a}|}\overline{a}$

Якщо $\overline{a} = (x, y, z)$, то

$$\overline{a}_o = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right).$$

Геометричний сенс координат орт-вектора $\overline{a}_o$ у декартовій системі координат: $\overline{a}_o = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ де, $\alpha = (\widehat{\overline{a}, OX}) = (\widehat{\overline{a}_o, OX})$, $\beta = (\widehat{\overline{a}, OY}) = (\widehat{\overline{a}_o, OY})$, $\gamma = (\widehat{\overline{a}, OZ}) = (\widehat{\overline{a}_o, OZ})$.

Означення 1.17. Косинуси кутів, які утворює вектор (або його орт) з осями координат — це **напрямні косинуси**.

Знайдемо косинус кута α:

$$\cos\alpha = \frac{(\overline{a}, \overline{i})}{|\overline{a}||\overline{i}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Твердження 1.1. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Формула для довжини проекції вектора:

$$x = |\overline{a}|\cos\alpha = \text{пр}_{\overline{i}}\overline{a}$$

1.10 Векторний добуток двох векторів

Означення 1.18. Векторний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ $[\overline{a}, \overline{b}]$ — це вектор $\overline{c}$, що задовольняє умови:

1. $\overline{c} \perp \overline{a}$, $\overline{c} \perp \overline{b}$
2. $|\overline{a}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi$, $\varphi = (\widehat{\overline{a}, \overline{b}})$
3. $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — права трійка

Зауваження. Оскільки $\overline{c} \perp \overline{a}$, $\overline{c} \perp \overline{b}$, то $\overline{c}$ перпендикулярний площині векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

Алгебраїчні властивості векторного добутку:

1) $[\overline{a}, \overline{b}] = -[\overline{b}, \overline{a}]$
2) $[\alpha\overline{a}, \overline{b}] = \alpha[\overline{a}, \overline{b}] = [\overline{a}, \alpha\overline{b}]$
3) $[\overline{a} + \overline{b}, \overline{c}] = [\overline{a}, \overline{c}] + [\overline{b}, \overline{c}]$
4) $[\overline{a}, \overline{b} + \overline{c}] = [\overline{a}, \overline{b}] + [\overline{a}, \overline{c}]$

Доведення:

► 1) Нехай $[\overline{a}, \overline{b}] = \overline{c}$, $[\overline{b}, \overline{a}] = \overline{d}$. Тоді: $\overline{c} \perp \overline{a}$ і $\overline{c} \perp \overline{b}$, $\overline{d} \perp \overline{b}$ і $\overline{d} \perp \overline{a}$, тобто вектори $\overline{c}$ і $\overline{d}$ перпендикулярні до площини, в якій лежать вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$, отже, $\overline{c} \parallel \overline{d}$.

$|\overline{c}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi = |\overline{d}|$, де $\varphi = (\widehat{\overline{a}, \overline{b}})$.

$\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — права трійка; $\overline{b}$, $\overline{a}$, $\overline{d}$ — також права трійка $\Rightarrow$ $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{d}$ — ліва трійка, тому вектори $\overline{c}$ та $\overline{d}$ протилежно направлені.

Отже, вектори $\overline{c}$ та $\overline{d}$ колінеарні, мають однакову довжину та протилежно направлені. Тому $\overline{c} = -\overline{d}$.

2) Якщо $\alpha = 0$ або $\overline{a} \parallel \overline{b}$, то рівності очевидні: $[\alpha\overline{a}, \overline{b}] = \alpha[\overline{a}, \overline{b}] = \overline{0}$. Нехай $\alpha < 0$, $[\overline{a}, \overline{b}] = \overline{c}$, $\varphi = (\widehat{\overline{a}, \overline{b}})$, $[\alpha\overline{a}, \overline{b}] = \overline{d}$. Тоді:

$|\alpha\overline{c}| = |\alpha[\overline{a}, \overline{b}]| = |\alpha||[\overline{a}, \overline{b}]| = -\alpha|\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi$.

$|[\alpha\overline{a}, \overline{b}]| = |\alpha\overline{a}||\overline{b}|\sin(\widehat{\alpha\overline{a}, \overline{b}}) = |\alpha||\overline{a}||\overline{b}|\sin(\pi - \varphi) = -\alpha|\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi$.

$\overline{c} \perp$ площині, в якій лежать $\overline{a}$ і $\overline{b}$ $\Rightarrow$ $\overline{c} \perp$ площині, в якій лежать $\alpha\overline{a}$ і $\overline{b}$.

$\overline{d} \perp$ площині, в якій лежать $\alpha\overline{a}$ і $\overline{b}$, отже, $\overline{c} \parallel \overline{d}$.

$\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — права трійка $\alpha\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — ліва трійка, $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\alpha\overline{c}$ — ліва трійка.

$\alpha\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{d}$ — права трійка $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{d}$ — ліва трійка; отже, вектори $\alpha\overline{c}$ та $\overline{d}$. однаково направлені.

Враховуючи однакову довжину векторів $\alpha\overline{c}$ та $\overline{d}$, маємо $\alpha\overline{c} = \overline{d}$ або $[\alpha\overline{a}, \overline{b}] = \alpha[\overline{a}, \overline{b}]$.

3), 4) — очевидно.

◀

Геометричні властивості векторного добутку:

1) $[\overline{a}, \overline{b}] = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{a} \parallel \overline{b}$

2) $|[\overline{a}, \overline{b}]| = S_{\Diamond\overline{a}\overline{b}}$, де $S_{\Diamond\overline{a}\overline{b}}$ — площа паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$, як на сторонах

Доведення:

▶ 1) $|[\overline{a}, \overline{b}]| = |\overline{a}||\overline{b}| \sin\varphi = 0 \Rightarrow \overline{a} = \overline{0}$ або $\overline{b} = \overline{0}$, або $\sin\varphi = 0 \Rightarrow \overline{a} \parallel \overline{b}$.

Якщо $\overline{a} \parallel \overline{b}$, то $\sin\varphi = 0$, і $|[\overline{a}, \overline{b}]| = 0 \Rightarrow [\overline{a}, \overline{b}] = \overline{0}$.

2) $|[\overline{a}, \overline{b}]| = |\overline{a}||\overline{b}| \sin\varphi = |\overline{a}|h = S_{\Diamond\overline{a}\overline{b}}$.

◀

Твердження 1.2. $[\overline{a}, \overline{a}] = 0$.

1.11 Векторний добуток в координатах

Нехай в просторі E^3 зафіксовано базис $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$, $\overline{x}, \overline{y} \in E^3$, тоді

$$\overline{x} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}$$

$$\overline{y} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}$$

Знайдемо координати вектору $[\overline{x}, \overline{y}]$.

Зауважимо, що $[\overline{i}, \overline{j}] = \overline{k}$, $[\overline{j}, \overline{k}] = \overline{i}$, $[\overline{k}, \overline{i}] = \overline{j}$. Тоді:
$[\overline{i}, \overline{j}] = [x_1\overline{i}+y_1\overline{j}+z_1\overline{k}, x_2\overline{i}+y_2\overline{j}+z_2\overline{k}] = x_1x_2[\overline{i}, \overline{i}]+x_1y_2[\overline{i}, \overline{j}]+x_1z_2[\overline{i}, \overline{k}]+y_1x_2[\overline{j}, \overline{i}]+y_1y_2[\overline{j}, \overline{j}]+y_1z_2[\overline{j}, \overline{k}]+z_1x_2[\overline{k}, \overline{i}]+z_1y_2[\overline{k}, \overline{j}]+z_1z_2[\overline{k}, \overline{k}] = (x_1y_2-x_2y_1)[\overline{i}, \overline{j}]+(x_1z_2-x_2z_1)[\overline{i}, \overline{k}]+(y_1z_2-y_2z_1)[\overline{j}, \overline{k}] = (x_1y_2-x_2y_1)\overline{k}+(x_1z_2-x_2z_1)\overline{j}+(y_1z_2-y_2z_1)\overline{i} = (y_1z_2-y_2z_1)\overline{i}+(x_1z_2-x_2z_1)\overline{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\overline{k}$.

Задача 1.1. Знайти площу трикутника з вершинами $A(3,0,-1)$, $B(-2,4,1)$, $C(2,1,-3)$.

Розв'язання. $S = \dfrac{1}{2}|[\overline{AB},\overline{AC}]|$. Оскільки $\overline{AB} = (-5,4,2), \overline{AC} = (-1,1,-2)$, то $[\overline{AB},\overline{AC}] = -10\overline{i} - 12\overline{j} - \overline{k}$. Тоді $|[\overline{AB},\overline{AC}]| = \sqrt{(-10)^2 + (-12)^2 + (-1)^2} = \sqrt{100+144+1} = \sqrt{245}$, і $S = \dfrac{1}{2}\sqrt{245}$

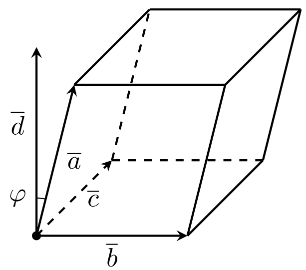
1.12 Мішаний добуток трьох векторів

Означення 1.19. Мішаний добуток векторів $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ — це скалярний добуток $\overline{a}$ з векторним добутком векторів $\overline{b}$ і $\overline{c}$, тобто $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a},[\overline{b},\overline{c}])$.

Теорема 1.4. *Мішаний добуток векторів $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда $V_{пар}$, побудованого на цих векторах, якщо вони складають праву трійку і дорівнює $-V_{пар}$, якщо $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ – ліва трійка:*

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{cases} V_{пар}, & \text{якщо } \overline{a},\overline{b},\overline{c} \text{ — права трійка} \\ -V_{пар}, & \text{якщо } \overline{a},\overline{b},\overline{c} \text{ — ліва трійка} \end{cases}$$

► Розглянемо випадок, коли $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ — права трійка.



Нехай $[\overline{b},\overline{c}] = \overline{d}$. Тоді $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ – права трійка. Позначимо $\varphi = \widehat{(\overline{a},\overline{d})}$.

Тоді $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a},[\overline{b},\overline{c}]) = (\overline{a},\overline{d}) = |\overline{a}||\overline{d}|\cos\varphi = S_{\Diamond\overline{c}\overline{b}}|\overline{a}|\cos\varphi = S_{\Diamond\overline{c}\overline{b}}h = V_{\text{пар}}$, оскільки висота паралелепіпеда $h = |\overline{a}|\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right) = |\overline{a}|\cos\varphi$. У випадку, коли $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ — ліва трійка, доведення аналогічне.

◄

Алгебраїчні властивості:

1. $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{c}\overline{a}\overline{b} = \overline{b}\overline{c}\overline{a} = -\overline{b}\overline{a}\overline{c} = -\overline{c}\overline{b}\overline{a} = -\overline{a}\overline{c}\overline{b}$

2. $(\alpha\overline{a})\overline{b}\overline{c} = \alpha\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{a}(\alpha\overline{b})\overline{c} = \overline{a}\overline{b}(\alpha\overline{c})$

3. $$\begin{aligned} (\overline{a}+\overline{a}')\overline{b}\overline{c} &= \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}'\overline{b}\overline{c} \\ \overline{a}(\overline{b}+\overline{b}')\overline{c} &= \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}\overline{b}'\overline{c} \\ \overline{a}\overline{b}(\overline{c}+\overline{c}') &= \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}\overline{b}\overline{c}' \end{aligned}$$

Доведення:

► 1) випливає з того факту, що при циклічній перестановці векторів їх орієнтація не змінюється. А якщо в трійці векторів деякі два з них поміняти місцями, то її орієнтація змінюється.

2) випливає з лінійності скалярного і векторного добутків відносно множення на скаляр.

3) $(\overline{a}+\overline{a}')\overline{b}\overline{c} = (\overline{a}+\overline{a}', [\overline{b},\overline{c}]) = (\overline{a}, [\overline{b},\overline{c}]) + (\overline{a}', [\overline{b},\overline{c}]) = \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}'\overline{b}\overline{c}$

$\overline{a}(\overline{b}+\overline{b}')\overline{c} = (\overline{b}+\overline{b}')\overline{c}\overline{a} = \overline{b}\overline{c}\overline{a} + \overline{b}'\overline{c}\overline{a} = \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}\overline{b}'\overline{c}$.

Але $\overline{a}(\overline{b}+\overline{b}')\overline{a} = (\overline{a}, [\overline{b}+\overline{b}', \overline{c}]) = (\overline{a}, [\overline{b},\overline{c}] + [\overline{b}', \overline{c}])$.

Ця рівність справедлива $\forall \overline{a}$. Тому $[\overline{b}+\overline{b}', \overline{c}] = [\overline{b},\overline{c}] + [\overline{b}', \overline{c}]$, що доводить властивість 3 векторного добутку.

◄

Твердження 1.3. $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a}, [\overline{b},\overline{c}]) = ([\overline{a},\overline{b}], \overline{c})$.

1.13 Мішаний добуток в координатах

Нехай в просторі E^3 зафіксовано базис $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ і задано три вектори:

$\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\overline{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

Тоді $[\overline{b},\overline{c}] = (b_2c_3 - b_3c_2)\overline{i} - (b_1c_3 - b_3c_1)\overline{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\overline{k}$ та $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a}, [\overline{b},\overline{c}]) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$.

Задача 1.2. Чи можуть вектори $\overline{e}_1 = (1, -1, 0)$, $\overline{e}_2 = (2, 0, -2)$, $\overline{e}_3 = (3, 1, 6)$ слугувати базисом в просторі E^3?

Розв'язання. Якщо $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ — базис, то вони некомпланарні і об'єм паралелепіпеда, на них побудованого, не дорівнює нулю. Тобто, $\overline{e}_1\overline{e}_2\overline{e}_3 \neq 0$. Знайдемо мішаний добуток $\overline{e}_1\overline{e}_2\overline{e}_3$: $\overline{e}_1\overline{e}_2\overline{e}_3 = 0 + 0 + 6 + 0 + 2 + 12 = 20 \neq 0$. Це означає, що дані вектори можуть слугувати базисом в E^3.

Розділ 2

Визначники і лінійна залежність

2.1 Визначники другого і третього порядків

Означення 2.1. Матриця A, розміром $m \times n$ — це прямокутна таблицю чисел з m рядків та n стовпчиків:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Позначають матриці і в такий спосіб: $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m,\, j=1,\ldots,n}$, де a_{ij} — це елемент матриці, що стоїть в i-му рядку та j-му стовпчику.

Нехай A – квадратна матриця другого порядку (тобто 2×2).

Означення 2.2. Визначник матриці (детермінант матриці) A другого порядку — це число, яке знаходиться за формулою:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Означення 2.3. Визначник матриці (детермінант матриці) A третього порядку — це число, яке знаходиться за формулою (правило "зірочки"):

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 + x_3 y_1 z_2 + x_2 y_3 z_1 - x_3 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_3 - x_1 y_3 z_2$$

Ця формула нам вже відома, адже саме так ми шукали мішаний добуток векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, які в базисі $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ мають координати $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1), \overline{b} = (x_2, y_2, z_2), \overline{c} = (x_3, y_3, z_3)$

2.2 Властивості визначників

Усі властивості будемо формулювати і доводити для визначників 3-го порядку. Але, як ми побачимо пізніше, усі наведені властивості будуть виконуватися і для визначників довільного порядку.

Нехай A квадратна матриця третього порядку, тоді $\det A = \overline{a}\overline{b}\overline{c}$, де $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1), \overline{b} = (x_2, y_2, z_2), \overline{c} = (x_3, y_3, z_3)$.

Означення 2.4. Транспонована матриця — це матриця A^T, отримана шляхом транспонування (транспоновки) елементів матриці A, тобто стовпчики і рядки, міняються місцями: $A^T = (a_{ij}^T)$, де $a_{ij}^T = a_{ji}$.

Нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Означення 2.5. Мінор M_{ij}, елемента a_{ij} — це визначник матриці, яка отримана з матриці А викреслюванням i-го рядка та j-го стовпчика.

Наприклад: $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}$.

Означення 2.6. Алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} — це добуток $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Властивості визначників:

1) При транспонуванні матриці значення її визначника не зміниться:

$$\det A = \det A^T$$

► Доведення випливає безпосередньо з правила "зірочки"

$\det A^T = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_3y_1z_2 + x_2y_3z_1 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2 = \det A$

Ця властивість урівнює в "правах" стовпчики і рядки. Тому далі всі властивості будемо формулювати для рядків.

◀

2) Знак визначника змінюється, якщо будь-які два рядки поміняти місцями:

$$D(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = -D(\overline{b},\overline{a},\overline{c}) = -D(\overline{a},\overline{c},\overline{b}) = -D(\overline{c},\overline{b},\overline{a})$$

3) Спільний множник можна винести з довільного рядка за визначник:

$$D(\alpha\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = D(\overline{a},\alpha\overline{b},\overline{c}) = D(\overline{a},\overline{b},\alpha\overline{c}) = \alpha D(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$$

4) $D(\overline{a}+\overline{a}',\overline{b},\overline{c}) = D(\alpha\overline{a},\overline{b},\overline{c}) + D(\alpha\overline{a}',\overline{b},\overline{c})$

5) Визначник, рядки якого пропорційні, дорівнює нулю:

$$D(\overline{a},\alpha\overline{a},\overline{c}) = 0$$

6) Визначник, який має два однакових рядки, дорівнює нулю:

$$D(\overline{a},\overline{a},\overline{c}) = 0$$

7) Визначник матриці з нульовим рядком дорівнює нулю:

$$D(\overline{a},\overline{0},\overline{c}) = 0$$

8) Визначник не змінюється, якщо до якогось його рядка додати лінійну комбінацію інших рядків:

$$D(\overline{a},\overline{b},\overline{c}+\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}) = D(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$$

► $D(\overline{a},\overline{b},\overline{c}+\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}) = D(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) + D(\overline{a},\overline{b},\alpha\overline{a}) + D(\overline{a},\overline{b},\beta\overline{b}) = D(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$

◀

9) Визначник матриці A дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка на їх алгебраїчні доповнення.

Наприклад: $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$.

Будемо казати, що в цьому прикладі ми розклали визначник за першим рядком.

► $\sum\limits_{i=1}^{3} a_{1i}A_{1i} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{22}a_{31} = \det A.$

◀

Задача 2.1. З'ясувати, чи можуть вектори $\overline{a} = (2, -1, 2), \overline{b} = (1, 2, -3), \overline{c} = (3, -4, 7)$ утворювати базис у просторі E^3?

Розв'язання. Вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ будуть утворювати базис, якщо вони некомпланарні. Тобто об'єм паралелепіпеда, на них побудованого, не повинен дорівнювати нулю. Знайдемо мішаний добуток даних векторів:

$$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} = d(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ -5 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Для обчислення цього визначника ми спочатку 2-й стовпчик помножили на 2 і додали його до 1-го та 3-го стовпчиків, а потім скористались властивістю 9. Таким чином, об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a}, \overline{b}$ і $\overline{c}$ дорівнює нулю, тобто ці вектори лежать в одній площині і слугувати базисом не можуть.

2.3 Лінійна залежність векторів

Розглянемо систему векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$.

Означення 2.7. Лінійна комбінація векторів — це вираз $\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_1 + ... + \alpha_n\overline{a}_n$, де $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Означення 2.8. Лінійна комбінація векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ — це **тривіальна лінійна комбінація**, якщо всі $\alpha_i = 0$, і це **нетривіальна лінійна комбінація**, в протилежному випадку.

Означення 2.9. Лінійно залежні вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ є такими ,якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ що виконується рівність $\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_n\overline{a}_n = \overline{0}$, причому $|\alpha_1| + |\alpha_2| + ... + |\alpha_n| \neq 0$.

Означення 2.10. Лінійно незалежні вектори — це вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$, такі, що їх лінійна комбінація дорівнює нулю лише за умови, коли всі $\alpha_i = 0$.

Інакше кажучи, вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ є лінійно незалежними, якщо ніяка їх нетривіальна лінійна комбінація не дорівнює нульовому вектору.

Властивості:

Твердження 2.1. *Вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ – лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли хоча б один з них лінійно виражається через інші.*

► 1) Нехай $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ — це лінійно залежні вектори. Тоді $\alpha_1\overline{a}_1 + ... + \alpha_i\overline{a}_i + ... + \alpha_n\overline{a}_n = \overline{0}$ та $\alpha_i \neq 0$ для деякого i . Звідси випливає, що $\overline{a}_i = -\dfrac{1}{\alpha_i}(\alpha_1\overline{a}_1 +$

$... + \alpha_{i-1}\overline{a}_{i-1} + \alpha_{i+1}\overline{a}_{i+1} + ... + \alpha_n\overline{a}_n)$, тобто вектор $\overline{a}_i$ лінійно виражається через інші вектори системи.

2) Нехай $\overline{a}_i = \beta_1\overline{a}_1 + ... + \beta i - 1\overline{a}_{i-1} + \beta i + 1\overline{a}_{i+1} + ... + \beta_n\overline{a}_n)$ для деякого i. Тоді $\beta_1\overline{a}_1 + ... + \beta_{i-1}\overline{a}_{i-1} + (-1)\overline{a}_i + \beta_{i+1}\overline{a}_{i+1} + ... + \beta_n\overline{a}_n = \overline{0}$, тобто отримано нульову лінійну комбінацію, в якій коефіцієнт при векторі і а є ненульовим.

◀

Твердження 2.2. *Якщо один з векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ є нульовим, то система цих векторів є лінійно залежною.*

► Припустимо, що $\overline{a}_1 = \overline{0}$. Тоді очевидно, що $1\overline{a}_1 + 0\overline{a}_2 + ... + 0\overline{a}_n = \overline{0}$, тобто за означенням дана система векторів є лінійно залежною ($\alpha_1 = 1 \neq 0$).

◀

Твердження 2.3. *Якщо серед векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ є два однакових, то система векторів є лінійно залежною.*

► Доведення є очевидним.

◀

Твердження 2.4. *Якщо серед n векторів існує k лінійно залежних векторів, то і всі n векторів є лінійно залежними.*

► Розглянемо лінійну комбінацію даних n векторів $\alpha_1\overline{a}_1 + ... + \alpha_k\overline{a}_k + 0\overline{a}_{k+1} + ... + 0\overline{a}_n = \overline{0}$,при умові, що $\alpha_1\overline{a}_1 + ... + \alpha_k\overline{a}_k = \overline{0}$ і константи $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}$ не всі рівні нулю. Ця комбінація є нетривіальною, що і доводить потрібний факт.

◀

Твердження 2.5. *Якщо вектор $\overline{a}$ лінійно виражається через лінійно незалежні вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$, то таке представлення єдине.*

► (від супротивного). Припустимо, що вектор $\overline{a}$ лінійно виражається через дані вектори не єдиним чином, тобто $\overline{a} = \alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_n\overline{a}_n$ і $\overline{a} = \beta_1\overline{a}_1 + \beta_2\overline{a}_2 + ... + \beta_n\overline{a}_n$. Віднявши другу рівність від першої, маємо: $\overline{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\overline{a}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\overline{a}_2 + ... + (\alpha_n - \beta_n)\overline{a}_n$. Оскільки $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ є лінійно незалежними, то $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, ..., \alpha_n = \beta_n$, що суперечить припущенню про неєдиність представлення вектора $\overline{a}$.

◀

Твердження 2.6. *Довільна підсистема лінійно незалежних векторів $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_n$ є лінійно незалежною.*

▶ Застосуємо метод від супротивного. Нехай існує підсистема $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n, k < n$, лінійно залежних векторів. Це означає, що $\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_k\overline{a}_k = \overline{0}$, причому $|\alpha_1| + |\alpha_2| + ... + |\alpha_k| \neq 0$. Додамо до обох частин рівності нуль-вектор: $0\overline{a}_{k+1} + ... + 0\overline{a}_n$. В результаті отримаємо: $\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_k\overline{a}_k + 0\overline{a}_{k+1} + ... + 0\overline{a}_n = \overline{0}$ і $|\alpha_1| + |\alpha_2| + ... + |\alpha_k| \neq 0$. Це означає лінійну залежність векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$, що протирічить припущенню. Отже, підсистема $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$, є лінійно незалежною.

◀

Твердження 2.7. *Якщо після доповнення системи $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ лінійно незалежних векторів вектором $\overline{a}$, отримали лінійно залежну систему, то вектор $\overline{a}$ лінійно виражається через вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$.*

▶ Оскільки вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n, \overline{a}$ є лінійно залежними, то існують такі константи $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}$, не всі рівні нулю, що

$\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_n\overline{a}_n + \alpha_{n+1}\overline{a} = \overline{0}$. (*)

При цьому саме $\alpha_{n+1} \neq 0$. Доведемо цей факт методом від супротивного. Якщо $\alpha_{n+1} = 0$, то $\alpha_{n+1}\overline{a} = \overline{0}$ і $\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_n\overline{a}_n = \overline{0}$, причому серед чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ існують ненульові. Але в цьому випадку вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ є лінійно залежними, що суперечить умові твердження. Отже, $\alpha_{n+1} \neq 0$, тому з рівності (*) випливає, що $\overline{a} = \left(-\dfrac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}}\right)\overline{a}_1 + ... + \left(-\dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right)\overline{a}_n$.

◀

Геометричний сенс лінійної залежності

Твердження 2.8. *Два вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ є лінійно залежними тоді і тільки тоді, коли $\overline{a} \parallel \overline{b}$.*

Твердження 2.9. *Три вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ є лінійно залежними тоді і тільки тоді, коли $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ є компланарними.*

Твердження 2.10. *Довільні чотири вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d} \in E^3$ є завжди лінійно залежними.*

Розділ 3

Пряма на площині

3.1 Різні способи задання ліній на площині

Одним із найважливіших завдань аналітичної геометрії є представлення лінії на площині за допомогою рівняння, що зв'язує координати кожної точки цієї лінії. Нехай маємо на площині P декартову прямокутну систему координат та деяку лінію L.

Означення 3.1. Рівняння лінії L — це рівняння $F(x, y)$, якому задовольняють координати x та y кожної точки цієї лінії.

Інакше кажучи, лінія – це геометричне місце точок, координати яких задовольняють рівняння. Лінію L можна задавати таким чином.

1) Неявний спосіб: $F(x, y) = 0$. Функція y від x (чи x від y) задана неявно. Приклад: $x^2 + y^2 = R^2$ — рівняння кола радіуса R з центром у початку координат.

2) Явний спосіб: $y = f(x)$. Функція y від x задана явно. Для побудови графіка цієї функції складається таблиця значень x та $f(x)$, ці пари точок позначаються на площині та з'єднуються плавною лінією. Приклад 2: $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$.

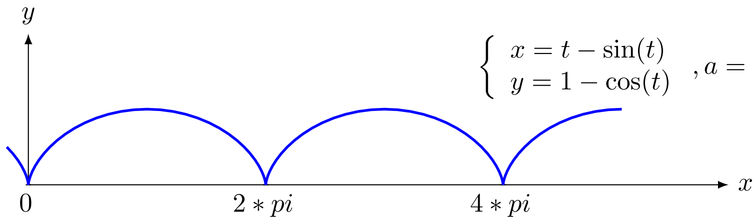
3) Параметричне представлення: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in D$.

Щоб побудувати графік такої функції треба скласти таблицю для $x(t)$ і $y(t)$ для однакових значень параметра t , що пробігає числову множину D . Виключення з двох рівнянь параметра t приводить до неявного способу задання даної лінії L. Приклад: $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$.

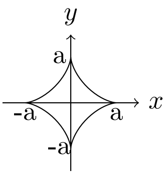
<u>Приклади графіків параметричних функцій:</u>

Приклад 1: циклоїда $\left\{\begin{array}{l} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{array}\right.$ $, t \in [-\infty, +\infty], a > 0.$

Таку лінію описує фіксована точка кола радіуса а, що котиться по всій осі Ox. Очевидно, що $y \in [0, 2a]$, а $y = 0$ при $1 - \cos t = 0 \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi$.



Приклад 2: астроїда $\left\{\begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{array}\right.$ $, t \in [0, 2\pi]$.

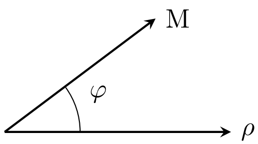


Запишемо рівняння астроїди в неявному вигляді:
$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$
$\Rightarrow x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

4) Представлення лінії у полярній системі координат. На площині задана полярна система координат, якщо задано:

1. точка O полюс;

2. полярна вісь ρ промінь, що виходить з точки O.

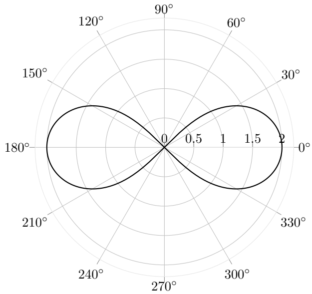


Тоді положення будь-якої точки M на площині визначається парою чисел (ρ, φ), де полярний радіус $\rho \geqslant 0$ — довжина вектора $\overline{OM}$, а полярний кут φ це кут між віссю ρ і $\overline{OM}$, який відраховується проти годинникової стрілки. Якщо точка M має декартові координати (x, y) і цій парі чисел відповідає пара (ρ, φ), то ця відповідність буде взаємно однозначною, якщо $\varphi \in [0, 2\pi]$ або $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Легко вивести наступні співвідношення (перехід від полярної системи координат до декартової, і навпаки):

$$\left\{\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \end{cases}$$

Приклад: Лемніската Бернуллі $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2), a > 0$.

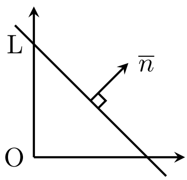


З формул випливає, що $\rho^4 = a^2\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$, тобто $\rho^2 = a\cos 2\varphi$ або $\rho = \sqrt{a\cos 2\varphi}$. Область визначення: $\cos 2\varphi \geqslant 0$, тобто $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

3.2 Пряма на площині

Нехай дано пряму L.

Означення 3.2. Нормальний вектор прямої L — це довільний ненульовий вектор $\overline{n}$, перпендикулярний прямій L.



$\overline{n} \perp L; \overline{n} \neq \overline{0}$ — нормальний вектор прямої. Зауважимо, що нормальних векторів існує безліч — з точністю до ненульової константи.

Нехай задано точку $M_0(x_0, y_0)$. Складемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно до вектора $\overline{n}(A, B)$.

Для довільної точки $M(x, y)$ шуканої прямої вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ є перпендикулярним вектору $\overline{n}$: $\overline{M_0M} \perp \overline{n}$, тобто $(\overline{M_0M}, \overline{n}) = 0$. Отримали: $A(x-x_0)+B(y-y_0) = 0$ — рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0)$ та нормальний вектор $\overline{n}(A, B)$.

Побудуємо загальне рівняння прямої. Розкривши дужки, маємо $Ax + By - (Ax_0 + By_0) = 0$, де A і $B \neq 0$ одночасно. Позначивши $C = -(Ax_0 + By_0)$, отримуємо $Ax + By + C = 0$ — **загальний вигляд прямої**.

3.3 Неповні рівняння прямої

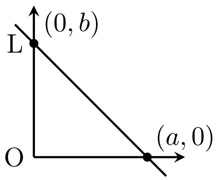
Означення 3.3. Загальне рівняння $Ax+By+C=0$ — це **повне рівняння**, якщо всі його коефіцієнти $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$ (тобто $ABC \neq 0$). Якщо ж хоча б один коефіцієнт дорівнює нулю, то це рівняння — це **неповне рівняння**.

Розглянемо можливі випадки неповних рівнянь.

1. $C = 0; L : Ax + By = 0$ — пряма L проходить через точку $O(0, 0)$.
2. $B = 0; L : Ax + C = 0$; $\overline{n}(A, 0) \perp Oy, L \parallel Ox$.
3. $A = 0; L : By + C = 0$; $\overline{n}(0, B) \perp Ox, L \parallel Oy$.
4. $B = 0, C = 0; L : Ax = 0$ — пряма L співпадає з віссю Oy , тобто $L \parallel Oy$ і проходить через точку O.
5. $A = 0, C = 0; L : By = 0$ — пряма співпадає з віссю Ox.

3.4 Рівняння прямої у відрізках

Розглянемо повне рівняння прямої $L : Ax + By + C = 0$, де $ABC \neq 0$.



$$Ax + By = -C$$
$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$$

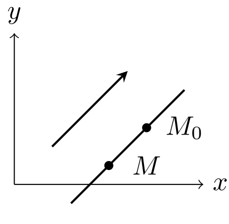
Позначимо $a = -\dfrac{C}{A}, b = -\dfrac{C}{B}$. Тоді маємо рівняння прямої "у відрізках":

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Геометричний зміст чисел a і b: вони дорівнюють величинам відрізків, які відсікає пряма L на осях Ox та Oy відповідно.

3.5 Канонічне рівняння

Означення 3.4. Напрямний вектор — це довільний ненульовий вектор $q \neq \overline{0}$, що паралельний прямій L.



Нехай задано точку $M_0(x_0, y_0)$. Складемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно до вектора $\overline{q}(l, m)$ (напрямний вектор). Якщо $M(x, y)$ — це довільна точка шуканої прямої, то вектор $\overline{M_0M}$ має координати $(x - x_0, y - y_0)$ і $\overline{M_0M} \parallel \overline{q}$, тобто координати цих векторів пропорційні. В результаті маємо **канонічне рівняння**

$$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}}$$

— рівняння прямої L через точку і напрямний вектор.

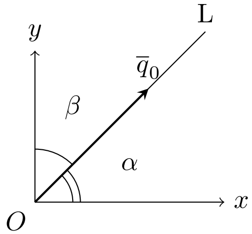
3.6 Параметричне рівняння прямої

Нехай $\overline{q}(l, m)$ — це напрямний вектор прямої L і $M_0(x_0, y_0) \in L$. У канонічному рівнянні даної прямої введемо параметр: $t = \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, t \in (-\infty; +\infty)$. Тоді

$$\begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \end{cases}$$

— параметричне рівняння прямої.

3.7 Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом



Розглянемо довільну пряму $L \nparallel Ox$. Нехай α — це кут нахилу L до осі Ox (якщо $L \parallel Ox$, то $\alpha = 0$), β — це кут між прямою L та віссю Oy, $\overline{q}(l, m)$ — це напрямний вектор прямої L , $\overline{q}$ — це його орт-вектор. Тоді $\overline{q}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ (при цьому враховано, що $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$).

У цьому випадку канонічне рівняння прямої L буде мати вигляд:

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\sin\alpha}$$

Звідси $y - y_0 = \operatorname{tg}\alpha(x - x_0)$. Якщо позначити $k = \operatorname{tg}\alpha$ — кутовий коефіцієнт, то отримаємо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом: $y - y_0 = k(x - x_0)$, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$. Останнє рівняння можна переписати у вигляді: $y = kx + b$, де $b = y_0 - kx_0$ — величина відрізка, який відсікає L на осі Oy.

3.8 Кут між двома прямими

Кут між двома прямими дорівнює меншому з кутів між їх нормальними або напрямними векторами. Розглянемо три випадки.

1. Прямі задано загальними рівняннями:

$$L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, \overline{n}_1(A_1, B_1)$$
$$L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0, \overline{n}_2(A_2, B_2)$$

$$\cos(\widehat{L_1, L_2}) = \cos(\widehat{\overline{n}_1, \overline{n}_2}) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

2. Прямі задано у канонічному вигляді:

$$L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1}, \overline{q}_1(l_1, m_1)$$
$$L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2}, \overline{q}_2(l_2, m_2)$$

$$\cos(\widehat{L_1, L_2}) = \cos(\widehat{\overline{q}_1, \overline{q}_2}) = \frac{|l_1l_2 + m_1m_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}$$

3. Прямі задано рівняннями з кутовими коефіцієнтами:

$$L_1 : y = k_1x + b_1, k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$$
$$L_2 : y = k_2x + b_2, k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$$

$$\operatorname{tg}(\widehat{L_1, L_2}) = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \left|\frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}\right| = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$$

3.9 Умови перпендикулярності і паралельності прямих

Паралельність або перпендикулярність двох прямих рівнозначна паралельності або перпендикулярності нормальних або напрямних векторів. Тому відповідно до вигляду рівнянь, якими задані прямі (див. пункти 1 – 3 попереднього розділу), маємо:

а) умови паралельності $L_1 \parallel L_2$:

1. $\overline{n}_1 \parallel \overline{n}_2$ або $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$;

2. $\overline{q}_1 \parallel \overline{q}_2$ або $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$;

3. $k_1 = k_2$.

b) умови перпендикулярності $L_1 \perp L_2$:

1. $\overline{n}_1 \perp \overline{n}_2$ або $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$;

2. $\overline{q}_1 \perp \overline{q}_2$ або $l_1l_2 + m_1m_2 = 0$;

3. $k_1k_2 = -1$.

3.10 Нормальне рівняння прямої

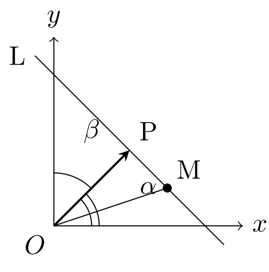
Нехай L — пряма, що не проходить через початок координат. Проведемо нормальний вектор $\overline{n}$ так:

1. його початок — в точці $(0,0)$, а кінець лежить на прямій;

2. $|\overline{n}| = p > 0$ (такий вектор єдиний!).

3. Кут α — це кут між віссю OX і $\overline{n}$, який відраховується проти годинникової стрілки.

Нехай точка $M(x,y) \in L$. Тоді $\overline{OM}(x,y)$ — це її радіус-вектор, $\overline{n}_0$ — це ортвектор нормального вектора $\overline{n}$: $\overline{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. При цьому враховано, що $\alpha + \beta = \frac{pi}{2}$.



Мають місце наступні співвідношення:
$p = |OP| = \text{пр}_{\overline{n}}\overline{OM} = \text{пр}_{\overline{n}_0}\overline{OM} = |OM|\cos(\widehat{\overline{n}_0, \overline{OM}}) = |OM|\dfrac{(\overline{n}_0, \overline{OM})}{|\overline{n}_0||\overline{OM}|} = \dfrac{(\overline{n}_0, \overline{OM})}{|\overline{n}_0|} = x\cos\alpha + y\sin\alpha.$
Отримали рівняння $s\cos\alpha + y\sin\alpha = 0$, — це **нормальне рівняння прямої** L, де p — це відстань від початку координат до прямої L.

3.11 Зведення загального рівняння прямої до нормального вигляду

Розглянемо загальне рівняння прямої $L : Ax + By + C = 0$, та нормальне рівняння цієї прямої: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$.

Для того, щоб рівняння були рівносильними, достатньо, щоб їх коефіцієнти були пропорційними: $\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\sin\alpha}{b} = \frac{-p}{C} = \mu$, де μ — це **нормуючий множник**. Тоді $\cos\alpha = \mu A, \sin\alpha = \mu B, -p = \mu C$. Звідси визначимо μ:

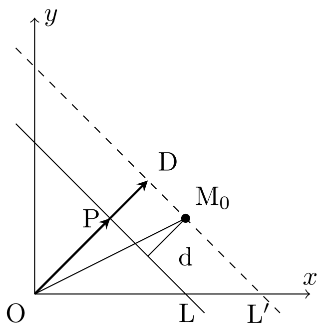
$$\mu^2(A^2 + B^2) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Знак μ визначається рівністю $\mu C = -p$. Оскільки $p \geq 0$, то знак нормуючого множника μ є протилежним до знаку C. Отже, нормальне рівняння прямої L буде мати вигляд

$\mu(Ax + By + C) = 0$, де $\mu = \dfrac{-\text{sign}C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ — нормуючий множник.

Приклад. Звести рівняння прямої $L : 3x - 4y + 25 = 0$ до нормального виду. Знайдемо нормуючий множник: $\mu = -\dfrac{1}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$. Тоді $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 5 = 0$ — нормальне рівняння L, де $\cos\alpha = -\frac{3}{5}, \sin\alpha = \frac{4}{5}, p = 5$ — довжина перпендикуляра, опущеного з точки O на цю пряму.

3.12 Відхилення і відстань від точки до прямої



Нехай задано пряму L , точку $M_0(x_0, y_0) \notin L$, відстань від якої до даної прямої дорівнює $d = \rho(M_0, L) > 0$. Точка $O(0, 0)$ — це початок координат.

Нехай пряма L задається нормальним рівнянням: $x\cos\alpha y\sin\beta - p = 0$.

Означення 3.5. Відхилення точки M_0 від прямої L — це число

$$\delta_{M_0,L} \begin{cases} d, \text{ якщо точки } M_0 \text{ і } O \text{ лежать по різні сторони прямої;} \\ -d, \text{ якщо точки } M_0 \text{ і } O \text{ лежать по один бік від прямої.} \end{cases}$$

Обчислимо відхилення $\delta_{M_0,L}$. Для цього через точку M_0 проведемо пряму L', паралельну L. Побудуємо $OD \perp L'$. Тоді рівняння L' має вигляд: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p - \delta_{M_0,L} = 0$.

Але координати точки $M_0(x_0, y_0)$ задовольняють це рівняння, тому $x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p - \delta_{M_0,L} = 0$.

Таким чином, відхилення точки M_0 від прямої L обчислюється за формулою:

$$\delta_{M_0,L} = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p$$

(для того, щоб знайти відхилення точки M_0 від прямої L , потрібно підставити координати цієї точки в нормальне рівняння даної прямої).

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0) \notin L$ до прямої L обчислюється таким чином:

$$d = |\delta_{M_0,L}| = |x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p|$$

.

Якщо ж пряма задається загальним рівнянням, то

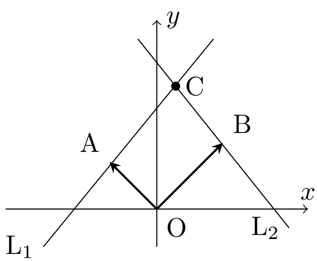
$$D = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

.

Задача 3.1. З'ясувати, в якому куті (гострому чи тупому), утвореному при перетині прямих L_1 та L_2, знаходиться точка $M_0(-2, 2)$, якщо $L_1 : 2x - y + 2 = 0$, $L_2 : 4x + y - 4 = 0$. В яких кутах (суміжних чи вертикальних) знаходяться точка M_0 та початок координат $O(0, 0)$?

Розв'язання. З'ясуємо, який кут (гострий чи тупий) утворюють орти нормальних векторів прямих L_1 та L_2. Спочатку запишемо рівняння даних прямих у нормальному вигляді:

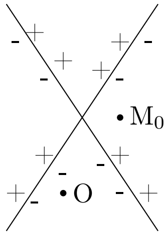
$$L_1 : -\frac{1}{\sqrt{5}}(2x - y + 2) = 0; \quad \overline{n}_1^0 = -\frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1);$$
$$L_1 : \frac{1}{\sqrt{17}}(4x + y - 4) = 0; \quad \overline{n}_2^0 = \frac{1}{\sqrt{17}}(4, 1);$$



Оскільки скалярний добуток $(\overline{n}_1^0, \overline{n}_2^0) = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{17}}(-8 + 1) < 0$, то кут AOB між векторами $\overline{n}_1^0$ та $\overline{n}_2^0$ — тупий. У чотирикутнику $AOBC$ $\angle A$ та $\angle B$ — прямі, $\angle A)B$ — тупий, тому $\angle ACB$ — гострий.

Отже, початок координат $O(0, 0)$ знаходиться в гострому куті, утвореному при перетині прямих L_1 та L_2.

Знайдемо відхилення точки $M_0(-2, 2)$ від даних прямих.



$\delta_{M_0,L_1} = -\frac{1}{\sqrt{5}}(-4-2+2) = \frac{4}{\sqrt{5}} > 0;$

$\delta_{M_0,L_2} = \frac{1}{\sqrt{17}}(-8+2-4) = -\frac{10}{\sqrt{17}} < 0;$

Дві прямі, що перетинаються, ділять площину на чотири області. На рисунку зображено знаки відхилень точок, які лежать в кожній з чотирьох областей, при умові, що початок координат $O(0,0)$ знаходиться в гострому куті.

Враховуючи знаки відхилень точки M_0 від даних прямих, робимо висновок, що точка M_0 лежить в тупому куті, утвореному при перетині прямих L_1 та L_2.

Точки $O(0,0)$ та M_0 лежать в суміжних кутах.

3.13 Рівняння пучка (низки) прямих

Означення 3.6. Пучок прямих (низка прямих) на площині з центром у даній точці — це сукупність прямих, що проходить через цю точку.

Якщо задана точка $M_0(x_0, y_0)$, то рівняння $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ при змінних коефіцієнтах A і B, а також рівняння $y-y_0=k(x-x_0)$ при змінному k є рівняннями пучка (низки) прямих з центром у точці M_0.

Пучок прямих можна задати довільними двома прямими, які перетинаються у точці M_0:

$$L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Рівняння пучка прямих із центром у точці M_0 можна записати, не визначаючи координат M_0:

$$A_1x = B_1y + C_1 + \lambda(A_2x = B_2y + C_2) = 0.$$

Щоб із пучка прямих виділити певну пряму, потрібно задати додаткову умову для знаходження параметра λ, що відповідає шуканій прямій.