

Eto matanaaaaaliiis

11 вересня 2022 р.

Зміст

1	Введення в математичний аналіз	3
1.1	Най простіші логічні символи, квантори	3
1.2	Поняття множини, операції над множинами	4
1.3	Поняття бінарного відношення. Відношення порядку. Функціональне відношення	5
1.4	Відображення(функція). Образ та прообраз множини. Класифікація відображень	6

Розділ 1

Введення в математичний аналіз

1.1 Най простіші логічні символи, квантори

Для запису тверджень використовують вирази, зв'язані з логічними зв'язками:

— заперечення \neg , Наприклад, $\neg A$

A	$\neg A$
0	1
1	0

— кон'юнкція (логічне "і") \wedge , $\&$, Наприклад, $A \wedge B$

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

— диз'юнкція (логічне "або") \vee , Наприклад, $A \vee B$

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

— імплікація (логічне слідування) \Rightarrow , Наприклад, $A \Rightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

— рівносильність (еквівалентність) \Leftrightarrow , Наприклад, $A \Leftrightarrow B$

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

— ставиться у відповідність \mapsto , Наприклад, $A \mapsto B$

— "такий, що" $:$, Наприклад, $\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$

Логічні квантори

\forall — квантор загальності (всі, кожний, для всіх, ...)

Приклад 1.1. $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + 1 > 0$

\exists — квантор існування ("існує такий елемент, що", ...)

Приклад 1.2. $(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 - 1 = 0$

$\exists!$ — ("існує, і при чому єдиний", ...)

Приклад 1.3. $(\exists! x \in \mathbb{R}) : (x - 1)^2 = 0$

1.2 Поняття множини, операції над множинами

Означення 1.1. Множина — це об'єднання (клас, сімейство) деяких об'єктів, об'єднаних по певному признаку.

Цей признак повинен однозначно визначати об'єкти даної множини (наприклад: множина усіх студентів інститута, множина коренів рівняння $x^2 + 2x + 2 = 0$, множина усіх натуральних чисел і тому подібне).

Означення 1.2. об'єкт, що належить множині — це **елемент множини**.

Множина, зазвичай позначається великою буквою латинського алфавіта: A, B, \dots, X, Y, \dots , а їх елементи маленькими: a, b, \dots, x, y, \dots

Якщо елемент x належить множині X , то пишуть $x \in X$. Запис $x \notin X$ означає, що елемент x не належить множині X .

Означення 1.3. Множина, що не містить жодного елемента — це **порожня множина** (\emptyset)

Елементи множини записують в фігурних дужках, всередині яких вони перечислені (якщо це можливо) або вказано загальна властивість, що об'єднує всі елементи даної множини.

Приклад 1.4. $A = \{1; 3; 15\}, B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2\}$

Означення 1.4. Множина A — це **підмножина** множини B ($A \subset B$), якщо $(\forall x \in A) : x \in B$ (кожний елемент множини A є елементом множини B)

$\forall A : A \subset A, \emptyset \subset A$

Означення 1.5. Множини A і B — **рівні множини** або ці **множини співпадають**, ($A = B$) якщо $A \subset B$ і $B \subset A$. Інакше кажучи, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів.

Означення 1.6. **Перетин множин** A і B ($A \cap B$) — це множина, що складається з елементів, що належать одночасно обома множинам: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.

Означення 1.7. **Різниця множин** A і B ($A \setminus B$) — це множина, що складається з елементів множини A , що не належать множині B : $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.

Означення 1.8. **Універсальна множина** U — це множина, що складається з усіх елементів у даному контексті, (наприклад, множина усіх чисел, множина усіх студентів).

Означення 1.9. **Доповнення множини** A (\bar{A}) — це множина, що складається з усіх елементів універсальної множини, крім тих, що належать множині A . $\bar{A} = \{x : x \notin A\}$

Означення 1.10. Декартовий добуток множин X та Y (\bar{A}) — це множина всіх упорядкованих пар $(x; y)$, де $x \in X$ та $y \in Y$

Наприклад, $X = \{\triangle\}$, $Y = \{1; 2\}$, $x \times Y = \{(\triangle; 1); (\triangle; 2)\}$.

Аналогічно визначемо декартів добуток n множин, $X^n = \underbrace{X \times X \times \dots \times X}_{n \text{ раз}}$.

Зауваження. $X \times Y = \emptyset \Leftrightarrow (X = \emptyset) \vee (Y = \emptyset)$.

1.3 Поняття бінарного відношення. Відношення порядку. Функціональне відношення

Означення 1.11. Бінарне відношення — це деяка підмножина декартового добутку двох множин, тобто довільна множина упорядкованих пар:

$$R \subset X \times Y, R \subset \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}.$$

Запис: $(x, y) \in R$, або xRy , означає, що x зв'язаний з y відношенням R .

Множини перших та других елементів упорядкованих пар, що утворюють деяке відношення, це — **область визначення** і **область значень** цього відношення відповідно.

Якщо $R \subset X^2$ (тобто $R \subset X \times X$), то говорять, що відношення R задано на множині X .

Означення 1.12. Відношення $R \subset X^2$ — це **відношення часткового порядку**, якщо виконуються наступні властивості:

1. $\forall x \in X \ xRx$ (рефлексивність)
2. $(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$ (антисиметричність)
3. $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$ (транзитивність)

Множина X , на якій введено відношення часткового порядку $R \subset X^2$ є частково упорядкованою.

Для такого відношення, запис xRy означає, що y слідує за x , або x передує y (де x та y — елементи множини X).

Приклад 1.5. Відношення частково порядку на N :

1. R : " a є дільником b ".
2. R : " a менше рівно b ".

Нехай $R \subset X^2$ — відношення часткового порядку на X . Якщо будь які два елементи x та y множини X при цьому порівнюємі (тобто xRy або yRx), то таке відношення — це **відношення порядку**, а множина X — **упорядкована множина**.

Приклад 1.6.

1. R : " a менше рівно b ".
2. R : " a є дільником b " — не відношення порядку, бо наприклад числа 2 та 3 не є порівнюваними.

Відношення $R \subset X \times Y$ — це **функціональне відношення**, якщо $(xRy_1 \wedge xRy_2) \Rightarrow y_1 = y_2$, тобто якщо воно не містить різних пар з однаковими першими елементами.

1.4 Відображення(функція). Образ та прообраз множини. Класифікація відображень

Нехай $R \subset X \times Y$ — функціональне відношення. Якщо множина X співпадає з областю визначення цього відношення (тобто X утворено першими елементами тільки тих упорядкованих пар, які утворюють відношення R), то це функціональне відношення — це *відображення функції із X в Y*

Таким чином, якщо відношення $R \subset X \times Y$ це функція, то для кожного елемента x із X існує, ще й при тому єдиний, елемент y із Y , такий, що xRy .

$$R \subset X \times Y \text{ - функція} \Rightarrow \forall x \in X \quad \exists! y \in Y : xRy$$

Якщо не тільки X співпадає з областю визначення, а й Y співпадає з множиною значень, то це відображення — це *відображення із X на Y*

Красиві	картинки
---------	----------

Зауваження. Довільне відображення із X на Y одночасно є відображенням із X в Y , але не навпаки.

Означення 1.13. Відображення множини в себе, тобто із X в X — це **оператор**.

Функції будемо позначати наступним чином:

$$f : X \rightarrow Y, X \xrightarrow{f} Y, X \ni x \xrightarrow{f} y \in Y,$$

а якщо із контексту зрозуміло про які X та Y ідеться, то позначають — $y = f(x)$ або просто символом f .

Приклад 1.7.

1. Тотожне відображення: $I : X \rightarrow X; \forall x \in X I(x) = x$
2. Постійне відображення (константа): $C : X \rightarrow Y \quad \exists! y \in Y \quad \forall x \in X \quad C(x) = y$