Theorver

6 листопада 2022 р.

Зміст

Розділ 1

Вступ в теорію імовірності

1.1 Математична модель імовірнісного експерименту

Означення 1.1. Ймовірнісним (статистичним) експериментом — називають експеримент, для якого:

1) Множин а можливих результатів наперед відома.

2) Наперед знати, яким саме результатом закінчиться експеримент, ми не можемо.

3) Експеримент можна повторювати як завгодно багато разів при однакових умовах.

Приклад: 1.1.

1) Підкидання монети.

2) Підкидання кубика.

Означення 1.2. Простором елементарних подій експерименту, називають множину Ω всіх можливих результатів експерименту.

Приклад: 1.2.

1) Монета підкидається 1 раз.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} = \{\text{Р}, \Gamma\}; |\Omega| = 2$

2) Монета підкидається двіччі.

$\Omega = \{\Gamma\Gamma, \Gamma\text{Р}, \text{Р}\Gamma, \text{РР}\}; |\Omega| = 4$

3) Монету підкидають до першої появи герба.

$\Omega = \{\Gamma, \text{Р}\Gamma, \text{РР}\Gamma, ...\}$

$\omega_i = \underbrace{\text{РР...Р}}_{i-1}\Gamma, i = 1, 2, 3, ...$

$|\Omega| = \infty, \Omega$ — зліченна множина

4) Задача про зустріч.

Двоє людей домовились про зустріч в секретному місці між 12:00 і 13:00. Кожен з них вибирає час приходу на місце навмання.

$\Omega = \{(t_1, t_2) : 0 \leqslant t_1 \leqslant 1, 0 \leqslant t_2 \leqslant 1\}$

t_1 — час прибуття 1-ої людини

t_1 — час прибуття 2-ої людини

Ω має потужність континума.

1.2 Дискретний простір елементарних подій

Вважаємо, що Ω — скінченна або зліченна множина.

Означення 1.3. Довільна підмножина $A \subseteq \Omega$ дискретного простору елементарних подій — це **випадкова подія**.

Зауваження. Якщо Ω — довільна (не обов'язково дискретна), то взагалі кажучи не кожна її підмножина є випадковою подією.

Кажуть, що подія A відбулася, якщо відбулася якась з елементарних подій $\omega \in A$.

Приклад: 1.3.
1) Підкидають 1 раз гральний кубик.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; |\Omega| = 6$
$A = \{$Випала парна кількість очок$\}$
$A = \{2, 4, 6\}, |A| = 3$
2) Кидок 2-х гральних кубиків.
$\Omega = \{(i, j), i = \overline{1, 6}; j = \overline{1, 6}\}; |\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$
$A = \{$сума очок дорівнює 4$\}$
$A = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}, |A| = 3$
3) Підкидання монети до першого герба.
$\Omega = \{$Г, РГ, РРГ, ...$\}$
$A = \{$Було проведено непарну кількість підкидань$\}$
$A = \{\text{Г}, \text{РРГ}, ..., \underbrace{\text{Р} \cdots \text{Р}}_{2k}\text{Г}, ...\}$ A — зліченна.

1.3 Операції над подіями

1) Обєднання (сума) подій A і B — це подія $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega in A \vee \omega \in B\}$

2) Перетин (добуток) подій A і B — це подія $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega in A \wedge \omega \in B\}$ — відбулися обидві події.

3) $A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega in A \wedge \omega \notin B\}$ — відбулась подія A, але не відбулася подія B.

$$A \setminus B = A \cap \underline{B}$$

4) $A \subset B$ — з події A випливає подія B.

Означення 1.4.
1) Подія Ω називається достовірною подією.
2) Подія $\varnothing \subset \Omega$ називається неможливою подією.
3) Подія $\overline{A} = \Omega \setminus A$ називається протилежною до події A.
4) Події A і B називаються несумісними, якщо $A \cap B = \varnothing$

Приклад: 1.4. Підкидають два гральних кубика.
$\Omega = \{(i, j), i = \overline{1, 6}, j = \overline{1, 6}\}$
$A = \{$сума очок дорівнює 4$\}$
$A = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$
$B = \{$на першому кубику 6 очок$\}$
$B = \{(6, j), j = \overline{1, 6}\}$
$A \cap B = \varnothing \Rightarrow A$ і B несумісні.

Зауваження. До подій, як до множини, можна застосувати правила де моргана:
а) $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$
б) $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

1.4 Ймовірність випадкової події

Вважаємо, що Ω — дискретна множина. Кажуть, що на Ω задано розподіл ймовірностей, якщо кожній елементарній події $\omega \in \Omega$ ставиться у відповідність число $P(\omega)$ так, що:

1) $\forall \omega \in \Omega : P(\omega) \geqslant 0$

2) $\sum\limits_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$ — умова нормування.

Тоді для довільної випадкової події $A \subseteq \Omega$:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$$

$P(A)$ називається ймовірністю події A.

Властивості ймовірності:

1) $P(\Omega) = 1$ — випливає з умови нормування, (2)

2) $P(\varnothing) = 0$

3) $P(A \cup B) = \sum\limits_{\omega \in A \cup B} P(\omega) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\omega) + \sum\limits_{\omega \in B} P(\omega) - \sum\limits_{\omega \in A \cap B} P(\omega) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Для несумісних подій $(A \cap B = \varnothing)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4) $P(\overline{A}) = \sum\limits_{\omega \in \overline{A}} P(\omega) = \sum\limits_{\omega \in \Omega \setminus A} P(\omega) = 1 - P(A)$

1.5 Класична модель

Якщо $|\Omega| = N$ і всі елементарні події вважаються рівноімовірними, тобто

$P(\omega_1) = ... = P(\omega_N) = \dfrac{1}{N}$,

то $\forall A \subseteq \Omega$:

$P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} \dfrac{1}{N} = \dfrac{1}{N}|A| = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$

— відношення кількості сприятливих елементарних подій для A до загальної кількості елементарних подій.

Приклад: 1.5.

1) Підкидаємо симетричну монету

$\Omega = \{\text{Р}, \Gamma\}$

Нехай $P(\text{Р}) = \dfrac{1}{2}$, $P(\Gamma) = \dfrac{1}{2}$ — припущення що до симетричності монети.

Якщо $P(\text{Р}) = p$, $P(\Gamma) = (1-p)$, де $p \neq \dfrac{1}{2}$, то монета несиметрична.

2) Монету підкидають n разів, фіксована кількість.

$\Omega = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n), \varepsilon_i = 0, 1\}$, де $\varepsilon_i = 0$, якщо випала решка в i-тому підкиданні, $\varepsilon_i = 1$, якщо випав герб.

$|\Omega| = 2^n$

Покладемо: $P(\omega) = \dfrac{1}{2^n}$ — припущення рівноможливості елементарних подій.

Зауваження. $\sum\limits_{\omega \in \Omega} \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^n} 2^n = 1$

$A = \{$герб випав k разів в nвипробуваннях$\}$

$A = \{(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \Omega : \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i = k\}$

$|A| = C_n^k$ — кількість способів вибрати k-елементну підмножину n-елементної множини

Таким чином: $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{C_n^k}{2^n}$

3) Два гравці почерзі підкидають монету. Виграє той, в кого раніше випаде герб.

$A = \{$ виграв 1-ший гравець $\}$

$B = \overline{A} = \{$ виграв 2-гий гравець $\}$

$\Omega = \{$Г, РГ, РРГ, ...$\}$

$A = \{$Г, РРГ, РРРРГ, ...$\}$

$B = \{$РГ, РРРГ, ...$\}$

Покажимо: $\omega_i = \underbrace{\text{РРР...Р}}_{i-1}\text{Г},\ i = 1, 2, ...$

Нехай $P(\omega_i) = \dfrac{1}{2^i}$

Маємо: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^i} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$ — умова нормування виконується.

Згідно значення:

$P(A) = \sum\limits_{i-\text{непарне}} P(\omega_i),\ P(B) = 1 - P(A) = \sum\limits_{i-\text{парне}} P(\omega_i)$

$P(A) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^{2k+1}} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty} (\dfrac{1}{4})^k = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \dfrac{2}{3}$

Тоді: $P(B) = 1 - P(A) = \dfrac{1}{3}$.

4) Задача про секретаря

Написано n листів різним адресатам. Ці листи навмання вкладаються в конверти з адресами.

$A = \{$Принаймі один лист прийде за призначенням$\}$.

Опишемо простір елементарних подій.

$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ i_1 & i_2 & ... & i_n \end{pmatrix}, i_j = \overline{1, n}; i_j - \text{різні} \right\}$ — множина перестановок множини $(1, 2, ..., n)$.

Подія A зображається у вигляді

$A = A_1 \cup A_2 ... \cup A_n$,

де $A_i = \{i$-тий лист прийшов за призначенням$\}$

A-відбулася принаймі одна з подій $A_1, ..., A_n$.

$P(A) = P(A_1 \cup A_2 ... \cup A_n) =?$

Лема 1.1 (Формула включень-виключень)**.** *Нехай* $A_1, ..., A_n$ *— випадкові події а* Ω. *Тоді* $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\limits_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum\limits_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - ... + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$

Розглянемо подію

$A_1 = \{$ Лист з номером 1 прийшов за призначенням $\} =$

$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 1 & i_2 & i_3 & ... & i_n \end{pmatrix} \in \Omega \right\},\ |A_1| = (n-1)!$

Зрозуміло, що $|A_2| = ... = |A_n| = (n-1)!$

$A_1 \cap A_2 = \{$ Листи з номерами 1 і 2 прийшли за призначенням $\} =$
$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 1 & 2 & i_3 & ... & i_n \end{pmatrix} \in \Omega \right\}$, $|A_1 \cap A_2| = (n-2)!$
і так далі...
$|A_1 \cap A_3 \cap ... \cap A_k| = (n-k)!$
$P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{n!} - \sum\limits_{i<j} \frac{(n-2)!}{n!} + \sum\limits_{i<j<k} \frac{(n-3)!}{n!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} =$
$= n\frac{(n-1)!}{n!} - C_n^2\frac{(n-2)!}{n!} + C_n^3\frac{(n-3)!}{n!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} =$
$= \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{2!(n-2)!}\frac{(n-2)!}{n!} + \frac{n!}{23(n-3)!}\frac{(n-3)!}{n!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} =$
$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$
Якщо $n \to \infty$, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-1}$$

Розділ 2

Деякі класичні моделі і розподіли.

2.1 Біноміальний розподіл

Припустимо, що деякий ймовірнісний експеримент повторюється n разів, в кожному з яких може відбутись або дуяка подія A — "успіх", або подія $\overline{A}$ — "невдача". Простір всіх можливих результатів можна описати так:

$\Omega = \{\omega : \omega = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n), \varepsilon_i \in \{0, 1\}\}$, де $\varepsilon_i = 0$, якщо в i-тому експерименті сталася невдача, $\varepsilon_i = 1$, якщо в i-тому експерименті стався успіх.

Припишемо кожній елементарній події $\omega = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ ймовірність

$$P(\omega) = p^{\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i} (1-p)^{n - \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i},$$

де $p \in (0, 1)$ - деяке число.

Переконаймося, що означення коректне, тобто, що $\sum\limits_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$, маємо

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = \sum_{(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n) \in \{0,1\}} p^{\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i} (1-p)^{n - \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n) : \sum \varepsilon_i = k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} p^k (1-p)^{n-k} \sum_{(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n) : \sum \varepsilon_i = k} 1 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= (p + (1-p))^n = 1.$$

При $n = 1$ отримаємо:

$$\Omega = \{0, 1\}$$

$$p(0) = 1 - p$$

$$p(1) = p$$

p — це ймовірність "успіху" в одному випробуванні.

Розглянемо події

$A_n(k) = \{(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \Omega : \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i = k\} = \{$В n випробуваннях сталося рівно k успіхів$\}$, $k = \overline{0, n}$.

Тоді $P(A_n(k)) = \sum\limits_{\omega \in A_n(k)} p(\omega) = C_n^k p^k (1-k)^{n-k}$, $k = \overline{0, n}$.

Означення 2.1. Набір імовірностей $\{P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = \overline{0, n}\}$ — цей **біноміальний розподіл** з параметрами n (кількість випробувань), і p (ймовірність успіху в одному випробуванні); $Bin(n, p)$.

Приклад: 2.1. (Випадкове блукання)

Деяка частинка виходить з нуля і через одиницю часу, робить або крок вгору, або вниз. За n кроків, де n фіксоване, частинка може переміститись що найбільще на n кроків вгору або вниз.

Beautifull image.

Прстір елементарних подій:

$\Omega = \{(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n), \varepsilon_i = \pm 1\}$, де $\varepsilon_i = -1$, якщо на i-тому кроці частинка зробила крок вниз, $\varepsilon_i = 1$, якщо на i-тому кроці частинка зробила крок вгору.

Покладемо

$$P(\omega) = p^{\nu(\omega)} (1-p)^{n-\nu(\omega)},$$

де $\nu(\omega)$ — це кількість одиничок в $\omega = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = \mu(\omega) - (n - \mu(\omega)) = 2\mu(\omega) - n \Rightarrow$$

$$\mu(\omega) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i + n}{2}$$

Оскільки $\sum\limits_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$, то простір Ω разом з розподілом ймовірностей $p(\omega)$ визначає деяку ймовірнісну модель руху частинки за n кроків.

Розглянемо події

$A_n(k) = \{(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \Omega : \mu(\omega) - (n - \mu(\omega)) = k\} = \{$ за n кроків частинка опиниться в точці з кординатою $k\}$.

Beautifull image.

Червоний прямокутник — це область де "живуть" шляхи з $(0, 0)$ в (n, k)

$P(A_n(k)) = C_n^{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}}$

Умова досяжності: n і k мають однакову парність.

2.2 Мультиполіноміальний розподіл

Проведемо n випробувань, в кожному з яких може спостерігатись один з r несумісних результатів. Опишемо Ω :

$\Omega = \{(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n), \varepsilon_i = \overline{1, r}\}$, де $\varepsilon_i = j$ в j-му випроуванні спостерігали результат номер j, $j = \overline{1, r}$, $i = \overline{1, n}$.

Нехай:

$\nu_1(\omega)$ — це кількість одиничок в $\omega = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$

$\nu_2(\omega)$ — це кількість двійок в $\omega = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$

$\nu_r(\omega)$ — це кількість координат які дорівнюють r в $\omega = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$

Покладемо:

$P(\omega) = p_1^{\nu_1(\omega)} p_2^{\nu_2(\omega)} ... p_r^{\nu_r(\omega)}$, де $p_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{r} p_i = 1$.

Покажемо, що $\sum\limits_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$. Маємо:

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = \sum_{(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \Omega} p_1^{\nu_1(\omega)} p_2^{\nu_2(\omega)} ... p_r^{\nu_r(\omega)} = \sum_{\substack{n_1 \geqslant 0, ..., n_r \geqslant 0 \\ n_1 + ... + n_r = n}} p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_r^{n_r} =$$

$$= \sum_{n_1 + ... + n_r = n} C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} ... C_{n-(n_1+...+n_r)}^{n_r} p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_r^{n_r} = (p_1 + ... + p_r)^n = 1.$$

Розглянемо події

$A_n(K_1, ..., K_r) = \{\omega \in \Omega : \nu_1(\omega) = K_1, ..., \nu_r(\omega) = K_r\} = \{$ в n випробуваннях результат N_1 відбувся K_1 раз, результат N_2 відбувся K_2 разів, ..., результат N_r відбувся K_r разів $\}$, $k_1 + ... + K_r = n$.

Тоді

$P(A_n(K_1, ..., K_r)) = \dfrac{n!}{K_1! ... K_r!} p_1^{K_1} ... p_r^{K_r}$.

Означення 2.2. Набір ймовірностей $\{\dfrac{n!}{K_1! ... K_r!} p_1^{K_1} ... p_r^{K_r}, K_i \geqslant 0, K_1 + ... + K_r = n\}$ — це **мультиполіноміальний (поліноміальний) розподіл** з параметрами n і $p_1, ..., p_r$, де $\sum\limits_{i=1}^{r} p_i = 1$.

Зауваження. І біноміальний і поліноміальний розподіли пов'язані з вибором без повторень.

2.3 Гіпергеометричний роподіл

Нехай в урні міститься N куль, занумерованих від 1 до N. З них M є білими, $N - M$ чорними. Припустимо, що проводиться вибір без повернення n куль, $n < N$. Простір елементирних подій:

$$\Omega = \{\omega : \omega = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n), \varepsilon_i = \overline{1, N}, \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq ... \neq \varepsilon_n\}$$

$$|\Omega| = N(N-1)...(N-n+1) = A_N^n$$

Покладемо: $\forall \omega \in \Omega : P(\omega) = \dfrac{1}{|\Omega|} = \dfrac{1}{A_N^n}$

Розглянемо події:
$A_n(k) = \{$Серед вийнятих куль рівно k виявились білими$\}$
$|A_n(k)| = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} A_M^k A_{N-M}^{n-k}$
і тоді
$P(A_n(k)) = \dfrac{|A_n(k)|}{|\Omega|} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \dfrac{k! C_M^k (n-k)! C_{N-M}^{n-k}}{n! C_N^n} = \dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$

Означення 2.3. Набір ймовірностей $\left\{ \dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, k : \begin{array}{l} 0 \leqslant k \leqslant M \\ 0 \leqslant n-k \leqslant N-M \end{array} \right\}$ — це **гіпергеометричний розподіл** з параметрами N, M, n.

Можна показати, що при $N \to \infty$, $M \to \infty$ так, що $\dfrac{M}{N} \to$:

$$\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \xrightarrow[\substack{N\to\infty \\ M\to\infty \\ \frac{M}{N}\to p}]{} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

2.4 Статистика Больцмана, Бозе-Ейнштейна, Фермі-Дірака

Задача 2.1. Є n частинок, кожна з яких може знаходитися з однаковою ймовірністю $\frac{1}{N}$ в кожній з N комірок ($N > n$). Потрібно знайти, наприклад, ймовірність того, що певна комірка виявиться порожньою, всі частинки потрапляють в різні комірки, тощо.

1. В статистиці Больцмана рівноімовірними є довільні розміщення, що відрізняються не лише кількістю, а й набором частинок в комірці.

   $\Omega_1 = \{(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n), \varepsilon_i \in \{1, ..., N\}\}$,

   ε_i — це номер комірки, яку "вибрала" собі i-та частинка.

   $|\Omega_1| = N^n$, $P(\omega) = \frac{1}{N^n} \quad \forall \omega \in \Omega_1$

2. В статистиці Бозе-Ейнштейна вважаються тотожними випадки, коли частинки міняються місцями між комірками: важлива лише кількість частинок в комірці. Тоді

   $\Omega_2 = \{\omega : \omega = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) : \varepsilon_i \geqslant 0, \sum\limits_{i=1}^{N} \varepsilon_i = n\}$,

   ε_i — кількість частинок в i-тій урні.

   $|\Omega_2| = C_{N+n-1}^n$, $P(\omega) = \frac{1}{C_{N+n-1}^n}$.

3. Згідно статистики Фермі-Дірака в кожній комірці може знаходитись не більше однієї частинки.

   $\Omega_3 = \{\omega : \omega = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n), \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq ... \neq \varepsilon_n, \varepsilon_i \in \{1, ..., N\}\}$,
   $|\Omega_3| = N(N-1)...(N-n+1) = A_N^n$,
   $\forall \omega \in \Omega_3 : P(\omega) = \frac{1}{A_N^n}$.