Theorver

20 вересня 2022 р.

Зміст

Розділ 1

Вступ в теорію імовірності

1.1 Математична модель імовірнісного експерименту

Означення 1.1. Ймовірнісним (статистичним) експериментом — називають експеримент, для якого:

1) Множин а можливих результатів наперед відома.

2) Наперед знати, яким саме результатом закінчиться експеримент, ми не можемо.

3) Експеримент можна повторювати як завгодно багато разів при однакових умовах.

Приклади: 1.1.

1) Підкидання монети.

2) Підкидання кубика.

Означення 1.2. Простором елементарних подій експерименту, називають множину Ω всіх можливих результатів експерименту.

Приклади: 1.2.

1) Монета підкидається 1 раз.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} = \{\text{Р}, \text{Г}\}; |\Omega| = 2$

2) Монета підкидається двіччі.

$\Omega = \{\text{ГГ}, \text{ГР}, \text{РГ}, \text{РР}\}; |\Omega| = 4$

3) Монету підкидають до першої появи герба.

$\Omega = \{\text{Г}, \text{РГ}, \text{РРГ}, ...\}$

$\omega_i = \underbrace{\text{РР...Р}}_{i-1}\text{Г}, i = 1, 2, 3, ...$

$|\Omega| = \infty, \Omega$ — злічення множина

4) Задача про зустріч.

Двоє людей домовились про зустріч в секретному місці між 12:00 і 13:00. Кожен з них вибирає час приходу на місце навмання.

$\Omega = \{(t_1, t_2) : 0 \leqslant t_1 \leqslant 1, 0 \leqslant t_2 \leqslant 1\}$

t_1 — час прибуття 1-ої людини

t_1 — час прибуття 2-ої людини

Ω має потужність континума.

1.2 Дискретний простір елементарних подій

Вважаємо, що Ω — скінченна або злічення множина.

Означення 1.3. Довільна підмножина $A \subseteq \Omega$ дискретного простору елементарних подій — це **випадкова подія**.

Зауваження. Якщо Ω — довільна (не обов'язково дискретна), то взагалі кажучи не кожна її підмножина є випадковою подією.

Кажуть, що подія A відбулася, якщо відбулася якась з елементарних подій $\omega \in A$.

Приклади: 1.3.
1) Підкидають 1 раз гральний кубик.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; |\Omega| = 6$
$A = \{$Випала парна кількість очок$\}$
$A = \{2, 4, 6\}, |A| = 3$
2) Кидок 2-х гральних кубиків.
$\Omega = \{(i, j), i = \overline{1, 6}; j = \overline{1, 6}\}; |\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$
$A = \{$сума очок дорівнює 4$\}$
$A = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}, |A| = 3$
3) Підкидання монети до першого герба.
$\Omega = \{$Г, РГ, РРГ, ...$\}$
$A = \{$Було проведено непарну кількість підкидань$\}$
$A = \{\text{Г}, \text{РРГ}, ..., \underbrace{\text{Р} \cdots \text{Р}}_{2k}\text{Г}, ...\}$ A — зліченна.

1.3 Операції над подіями

1) Обєднання (сума) подій A і B — це подія $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega in A \vee \omega \in B\}$
2) Перетин (добуток) подій A і B — це подія $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega in A \wedge \omega \in B\}$ — відбулися обидві події.
3) $A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega in A \wedge \omega \notin B\}$ — відбулась подія A, але не відбулася подія B.

$$A \setminus B = A \cap \underline{B}$$

4) $A \subset B$ — з події A випливає подія B.

Означення 1.4.
1) Подія Ω називається достовірною подією.
2) Подія $\varnothing \subset \Omega$ називається неможливою подією.
3) Подія $\overline{A} = \Omega \setminus A$ називається протилежною до події A.
4) Події A і B називаються несумісними, якщо $A \cap B = \varnothing$

Приклади: 1.4. Підкидають два гральних кубика.
$\Omega = \{(i, j), i = \overline{1, 6}, j = \overline{1, 6}\}$
$A = \{$сума очок дорівнює 4$\}$
$A = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$
$B = \{$на першому кубику 6 очок$\}$
$B = \{(6, j), j = \overline{1, 6}\}$
$A \cap B = \varnothing \Rightarrow A$ і B несумісні.

Зауваження. До подій, як до множини, можна застосувати правила де моргана:
а) $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$
б) $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

1.4 Ймовірність випадкової події

Вважаємо, що Ω — дискретна множина. Кажуть, що на Ω задано розподіл ймовірностей, якщо кожній елементарній події $\omega \in \Omega$ ставиться у відповідність число $P(\omega)$ так, що:

1) $\forall \omega \in \Omega : P(\omega) \geqslant 0$

2) $\sum\limits_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$ — умова нормування.

Тоді для довільної випадкової події $A \subseteq \Omega$:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$$

$P(A)$ називається ймовірністю події A.

Властивості ймовірності:

1) $P(\Omega) = 1$ — випливає з умови нормування, (2)

2) $P(\varnothing) = 0$

3) $P(A \cup B) = \sum\limits_{\omega \in A \cup B} P(\omega) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\omega) + \sum\limits_{\omega \in B} P(\omega) - \sum\limits_{\omega \in A \cap B} P(\omega) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Для несумісних подій $(A \cap B = \varnothing)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4) $P(\overline{A}) = \sum\limits_{\omega \in \overline{A}} P(\omega) = \sum\limits_{\omega \in \Omega \setminus A} P(\omega) = 1 - P(A)$

1.5 Класична модель

Якщо $|\Omega| = N$ і всі елементарні події вважаються рівноімовірними, тобто

$P(\omega_1) = ... = P(\omega_N) = \dfrac{1}{N}$,

то $\forall A \subseteq \Omega$:

$P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} \dfrac{1}{N} = \dfrac{1}{N}|A| = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$

— відношення кількості сприятливих елементарних подій для A до загальної кількості елементарних подій.

Приклади: 1.5.

1) Підкидаємо симетричну монету

$\Omega = \{\text{Р}, \Gamma\}$

Нехай $P(\text{Р}) = \dfrac{1}{2}$, $P(\Gamma) = \dfrac{1}{2}$ — припущення що до симетричності монети.

Якщо $P(\text{Р}) = p$, $P(\Gamma) = (1 - p)$, де $p \neq \dfrac{1}{2}$, то монета несиметрична.

2) Монету підкидають n разів, фіксована кількість.

$\Omega = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n), \varepsilon_i = 0, 1\}$, де $\varepsilon_i = 0$, якщо випала решка в i-тому підкиданні, $\varepsilon_i = 1$, якщо випав герб.

$|\Omega| = 2^n$

Покладемо: $P(\omega) = \dfrac{1}{2^n}$ — припущення рівноможливості елементарних подій.

Зауваження. $\sum\limits_{\omega \in \Omega} \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^n} 2^n = 1$

$A = \{$герб випав k разів в nвипробуваннях$\}$

$A = \{(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \Omega : \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i = k\}$

$|A| = C_n^k$ — кількість способів вибрати k-елементну підмножину n-елементної множини

Таким чином: $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{C_n^k}{2^n}$

3) Два гравці почерзі підкидають монету. Виграє той, в кого раніше випаде герб.

$A = \{$ виграв 1-ший гравець $\}$

$B = \overline{A} = \{$ виграв 2-гий гравець $\}$

$\Omega = \{$Г, РГ, РРГ, ...$\}$

$A = \{$Г, РРГ, РРРРГ, ...$\}$

$B = \{$РГ, РРРГ, ...$\}$

Покажимо: $\omega_i = \underbrace{\text{РРР...Р}}_{i-1}\text{Г}$, $i = 1, 2, ...$

Нехай $P(\omega_i) = \dfrac{1}{2^i}$

Маємо: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^i} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$ — умова нормування виконується.

Згідно значення:

$P(A) = \sum\limits_{i-\text{непарне}} P(\omega_i)$, $P(B) = 1 - P(A) = \sum\limits_{i-\text{парне}} P(\omega_i)$

$P(A) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^{2k+1}} = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{k=0}^{\infty} (\dfrac{1}{4})^k = \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \dfrac{2}{3}$

Тоді: $P(B) = 1 - P(A) = \dfrac{1}{3}$.

4) Задача про секретаря

Написано n листів різним адресатам. Ці листи навмання вкладаються в конверти з адресами.

$A = \{$Принаймі один лист прийде за призначенням$\}$.

Опишемо простір елементарних подій.

$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ i_1 & i_2 & ... & i_n \end{pmatrix}, i_j = \overline{1, n}; i_j - \text{різні} \right\}$ — множина перестановок множини $(1, 2, ..., n)$.

Подія A зображається у вигляді

$A = A_1 \cup A_2 ... \cup A_n$,

де $A_i = \{i$-тий лист прийшов за призначенням$\}$

A-відбулася принаймі одна з подій $A_1, ..., A_n$.

$P(A) = P(A_1 \cup A_2 ... \cup A_n) = ?$

Лема 1.1 (Формула включень-виключень)**.** *Нехай $A_1, ..., A_n$ — випадкові події а Ω. Тоді* $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\limits_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum\limits_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - ... + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$