# Complex analysis

# Зміст

# Розділ 1

# Комплексні числа і числа комплексної змінної

## 1.1 Комплексні числа. основні визначення

**Уявна одиниця** — це спеціальне число в математиці з незвичайними властивостями.

Властивість уявної одиниці $i^2 = -1$.

Якщо ми маємо щось схоже на $\frac{x}{iy}$, то, $\frac{x}{iy} = -\frac{ix}{y}$.

**Комплексне число (уявне число)** — це число виду $z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}$, а число $i$ — це уявна одиниця.

**Множина комплексних чисел** $\mathbb{C}$ – множина усіх дійсних чисел та комплексних чисел.

**Спряжене число** до комплексного числа — це $\bar{z} = x - iy$.

**Дійсна частина** комплексного числа $z = x + iy$ — це $Re(z) = x$.

$Rez = \frac{z + \bar{z}}{2}$.

**Уявна частина** комплексного числа $z = x + iy$ — це $Im(z) = y$.

$Imz = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

Комплексне число можна подати як вектор. В Декартовій системі координат дійсна частина зображається на осі $Ox$, а уявна на осі $Oy$, при чому за одиницю на уявній осі, ми беремо число $i$. В полярній системі координат все те ж саме, але вектор ми подаємо не як дійсна та уявна частина, $x$ та $y$, а як довжина вектора $\rho$ і кут його повороту $\phi$, відносно додатнього напрямку осі $Ox$.

Нехай $x, y, \rho, \phi \in \mathbb{R}$, тоді:
**Алгебраїчна форма** комплексного числа — $z = x + iy$.
**Показникова форма** комплексного числа — $z = |z|e^{i\phi}$.
**Тригонометрична форма** комплексного числа — $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$.
**Модуль** комплексного числа — $|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.
**Формула Ейлера(Ойлера)** — $s^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$.
Аргумент комплексного числа — кут $\phi$.
$Argz$ — множина значень аргумента $z$.
$Argz = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.
Головне значення аргумента комплексного числа —$\arg z = \phi$, $\phi \in (-\pi; \pi]$.

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & x > 0, \qquad (1,4 \text{ чверті}) \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y > 0, \qquad (2 \text{ чверть}) \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0, \qquad (3 \text{ чверть}) \end{cases}$$

$\arg z$ визначений для $z \neq 0$, а для випадків коли $x$ чи $y$ рівні 0, дивишся куди направлений вектор вручну.

Корінь комплексного числа – $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos\dfrac{\phi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\phi + 2\pi k}{n}), k = 0, 1, ..., n-1$.

## 1.2 Послідовності комплексних чисел

**Послідовність комплексних чисел** – це комплекснозначна функція натурального аргумента $f(n) = z_n, n \in \mathbb{N}, z_n \in \mathbb{C}$.
$\{z_n\}$ – послідовність.
**Ліміт послідовності комплексних чисел**:
$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N(\varepsilon)\ |z_n - z_0| < \varepsilon$.
$\{z_n\}$ – **обмежена**, якщо
$\exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ |z_n| < M$.

**Теорема 1.1.**

$$\textit{Нехай: } \begin{array}{l} z_n = x_n + iy_n; \\ z_0 = x_0 + iy_0; \end{array}, (x_n, y_n, x_0, y_0 \in \mathbb{R})$$

$$\textit{Тоді: } \lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 \end{cases}$$

► Очевидно.

◀

**Твердження 1.1.** $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$

**Теорема 1.2.** *Якщо* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$*, то* $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z_0|$

**Теорема 1.3.**

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z_0| \\ \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi_0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$$

## 1.3 Комплексні числа. основні визначення

**Уявна одиниця** — це спеціальне число в математиці з незвичайними властивостями.

Властивість уявної одиниці $i^2 = -1$.

Якщо ми маємо щось схоже на $\dfrac{x}{iy}$, то, $\dfrac{x}{iy} = -\dfrac{ix}{y}$.

**Комплексне число (уявне число)** — це число виду $z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}$, а число $i$ — це уявна одиниця.

**Множина комплексних чисел** $\mathbb{C}$ – множина усіх дійсних чисел та комплексних чисел.

**Спряжене число** до комплексного числа — це $\bar{z} = x - iy$.

**Дійсна частина** комплексного числа $z = x + iy$ — це $Re(z) = x$.

$Rez = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$.

**Уявна частина** комплексного числа $z = x + iy$ — це $Im(z) = y$.

$Imz = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$.

Комплексне число можна подати як вектор. В Декартовій системі координат дійсна частина зображається на осі $Ox$, а уявна на осі $Oy$, при чому за одиницю на уявній осі, ми беремо число $i$. В полярній системі координат все те ж саме, але вектор ми подаємо не як дійсна та уявна частина, $x$ та $y$, а як довжина вектора $\rho$ і кут його повороту $\phi$, відносно додатнього напрямку осі $Ox$.

Нехай $x, y, \rho, \phi \in \mathbb{R}$, тоді:

**Алгебраїчна форма** комплексного числа — $z = x + iy$.

**Показникова форма** комплексного числа — $z = |z|e^{i\phi}$.

**Тригонометрична форма** комплексного числа — $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$.

**Модуль** комплексного числа — $|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

**Формула Ейлера(Ойлера)** — $s^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$.

Аргумент комплексного числа — кут $\phi$.

$Argz$ — множина значень аргумента $z$.

$Argz = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Головне значення аргумента комплексного числа —$\arg z = \phi$, $\phi \in (-\pi; \pi]$.

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0, & (1,4 \text{ чверті}) \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y > 0, & (2 \text{ чверть}) \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0, & (3 \text{ чверть}) \end{cases}$$

$\arg z$ визначений для $z \neq 0$, а для випадків коли $x$ чи $y$ рівні 0, дивишся куди направлений вектор вручну.

Корінь комплексного числа – $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos \dfrac{\phi + 2\pi k}{n} + i \sin \dfrac{\phi + 2\pi k}{n}), k = 0, 1, ..., n-1$.

## 1.4 Послідовності комплексних чисел

**Послідовність комплексних чисел** – це комплекснозначна функція натурального аргумента $f(n) = z_n, n \in \mathbb{N}, z_n \in \mathbb{C}$.

$\{z_n\}$ – послідовність.

**Ліміт послідовності комплексних чисел**:

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \; |z_n - z_0| < \varepsilon$.

$\{z_n\}$ – **обмежена**, якщо

$\exists M > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \; |z_n| < M$.

**Теорема 1.4.**

$$\textit{Нехай:} \begin{array}{l} z_n = x_n + iy_n; \\ z_0 = x_0 + iy_0; \end{array} , (x_n, y_n, x_0, y_0 \in \mathbb{R})$$

$$\textit{Тоді:} \lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 \end{cases}$$

► Очевидно.

◄

**Твердження 1.2.** $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$

**Теорема 1.5.** *Якщо* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z_0|$

**Теорема 1.6.**

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z_0| \\ \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi_0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = z_0$$