Theorver

2 грудня 2022 р.

Зміст

Розділ 1

Вступ в теорію імовірності

1.1 Математична модель імовірнісного експерименту

Означення 1.1. Ймовірнісним (статистичним) експериментом — називають експеримент, для якого:

1) Множин а можливих результатів наперед відома.

2) Наперед знати, яким саме результатом закінчиться експеримент, ми не можемо.

3) Експеримент можна повторювати як завгодно багато разів при однакових умовах.

Приклад: 1.1.

1) Підкидання монети.

2) Підкидання кубика.

Означення 1.2. Простором елементарних подій експерименту, називають множину Ω всіх можливих результатів експерименту.

Приклад: 1.2.

1) Монета підкидається 1 раз.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} = \{\text{Р}, \text{Г}\}; |\Omega| = 2$

2) Монета підкидається двіччі.

$\Omega = \{\text{ГГ}, \text{ГР}, \text{РГ}, \text{РР}\}; |\Omega| = 4$

3) Монету підкидають до першої появи герба.

$\Omega = \{\text{Г}, \text{РГ}, \text{РРГ}, ...\}$

$\omega_i = \underbrace{\text{РР...Р}}_{i-1}\text{Г}, i = 1, 2, 3, ...$

$|\Omega| = \infty, \Omega$ — зліченна множина

4) Задача про зустріч.

Двоє людей домовились про зустріч в секретному місці між 12:00 і 13:00. Кожен з них вибирає час приходу на місце навмання.

$\Omega = \{(t_1, t_2) : 0 \leqslant t_1 \leqslant 1, 0 \leqslant t_2 \leqslant 1\}$

t_1 — час прибуття 1-ої людини

t_1 — час прибуття 2-ої людини

Ω має потужність континума.

1.2 Дискретний простір елементарних подій

Вважаємо, що Ω — скінченна або зліченна множина.

Означення 1.3. Довільна підмножина $A \subseteq \Omega$ дискретного простору елементарних подій — це **випадкова подія**.

Зауваження. Якщо Ω — довільна (не обов'язково дискретна), то взагалі кажучи не кожна її підмножина є випадковою подією.

Кажуть, що подія A відбулася, якщо відбулася якась з елементарних подій $\omega \in A$.

Приклад: 1.3.
1) Підкидають 1 раз гральний кубик.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; |\Omega| = 6$
$A = \{$Випала парна кількість очок$\}$
$A = \{2, 4, 6\}, |A| = 3$
2) Кидок 2-х гральних кубиків.
$\Omega = \{(i, j), i = \overline{1, 6}; j = \overline{1, 6}\}; |\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$
$A = \{$сума очок дорівнює 4$\}$
$A = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}, |A| = 3$
3) Підкидання монети до першого герба.
$\Omega = \{$Г, РГ, РРГ, ...$\}$
$A = \{$Було проведено непарну кількість підкидань$\}$
$A = \{\text{Г}, \text{РРГ}, ..., \underbrace{\text{Р} \cdots \text{Р}}_{2k}\text{Г}, ...\}$ A — зліченна.

1.3 Операції над подіями

1) Обєднання (сума) подій A і B — це подія $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega in A \vee \omega \in B\}$
2) Перетин (добуток) подій A і B — це подія $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega in A \wedge \omega \in B\}$ — відбулися обидві події.
3) $A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega in A \wedge \omega \notin B\}$ — відбулась подія A, але не відбулася подія B.

$$A \setminus B = A \cap \underline{B}$$

4) $A \subset B$ — з події A випливає подія B.

Означення 1.4.
1) Подія Ω називається достовірною подією.
2) Подія $\varnothing \subset \Omega$ називається неможливою подією.
3) Подія $\overline{A} = \Omega \setminus A$ називається протилежною до події A.
4) Події A і B називаються несумісними, якщо $A \cap B = \varnothing$

Приклад: 1.4. Підкидають два гральних кубика.
$\Omega = \{(i, j), i = \overline{1, 6}, j = \overline{1, 6}\}$
$A = \{$сума очок дорівнює 4$\}$
$A = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$
$B = \{$на першому кубику 6 очок$\}$
$B = \{(6, j), j = \overline{1, 6}\}$
$A \cap B = \varnothing \Rightarrow A$ і B несумісні.

Зауваження. До подій, як до множини, можна застосувати правила де моргана:
а) $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$
б) $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

1.4 Ймовірність випадкової події

Вважаємо, що Ω — дискретна множина. Кажуть, що на Ω задано розподіл ймовірностей, якщо кожній елементарній події $\omega \in \Omega$ ставиться у відповідність число $P(\omega)$ так, що:

1) $\forall \omega \in \Omega : P(\omega) \geqslant 0$

2) $\sum\limits_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$ — умова нормування.

Тоді для довільної випадкової події $A \subseteq \Omega$:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$$

$P(A)$ називається ймовірністю події A.

Властивості ймовірності:

1) $P(\Omega) = 1$ — випливає з умови нормування, (2)

2) $P(\varnothing) = 0$

3) $P(A \cup B) = \sum\limits_{\omega \in A \cup B} P(\omega) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\omega) + \sum\limits_{\omega \in B} P(\omega) - \sum\limits_{\omega \in A \cap B} P(\omega) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Для несумісних подій $(A \cap B = \varnothing)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4) $P(\overline{A}) = \sum\limits_{\omega \in \overline{A}} P(\omega) = \sum\limits_{\omega \in \Omega \setminus A} P(\omega) = 1 - P(A)$

1.5 Класична модель

Якщо $|\Omega| = N$ і всі елементарні події вважаються рівноімовірними, тобто

$P(\omega_1) = ... = P(\omega_N) = \dfrac{1}{N}$,

то $\forall A \subseteq \Omega$:

$P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} \dfrac{1}{N} = \dfrac{1}{N}|A| = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$

— відношення кількості сприятливих елементарних подій для A до загальної кількості елементарних подій.

Приклад: 1.5.

1) Підкидаємо симетричну монету

$\Omega = \{\text{Р}, \Gamma\}$

Нехай $P(\text{Р}) = \dfrac{1}{2}$, $P(\Gamma) = \dfrac{1}{2}$ — припущення що до симетричності монети.

Якщо $P(\text{Р}) = p$, $P(\Gamma) = (1-p)$, де $p \neq \dfrac{1}{2}$, то монета несиметрична.

2) Монету підкидають n разів, фіксована кількість.

$\Omega = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n), \varepsilon_i = 0, 1\}$, де $\varepsilon_i = 0$, якщо випала решка в i-тому підкиданні, $\varepsilon_i = 1$, якщо випав герб.

$|\Omega| = 2^n$

Покладемо: $P(\omega) = \dfrac{1}{2^n}$ — припущення рівноможливості елементарних подій.

Зауваження. $\sum\limits_{\omega \in \Omega} \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^n} 2^n = 1$

$A = \{$герб випав k разів в nвипробуваннях$\}$

$A = \{(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \Omega : \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i = k\}$

$|A| = C_n^k$ — кількість способів вибрати k-елементну підмножину n-елементної множини

Таким чином: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_n^k}{2^n}$

3) Два гравці почерзі підкидають монету. Виграє той, в кого раніше випаде герб.

$A = \{$ виграв 1-ший гравець $\}$

$B = \overline{A} = \{$ виграв 2-гий гравець $\}$

$\Omega = \{$Г, РГ, РРГ, ...$\}$

$A = \{$Г, РРГ, РРРРГ, ...$\}$

$B = \{$РГ, РРРГ, ...$\}$

Покажимо: $\omega_i = \underbrace{\text{РРР...Р}}_{i-1}\text{Г},\ i = 1, 2, ...$

Нехай $P(\omega_i) = \frac{1}{2^i}$

Маємо: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$ — умова нормування виконується.

Згідно значення:

$P(A) = \sum\limits_{i-\text{непарне}} P(\omega_i),\ P(B) = 1 - P(A) = \sum\limits_{i-\text{парне}} P(\omega_i)$

$P(A) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2} \sum\limits_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{4})^k = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$

Тоді: $P(B) = 1 - P(A) = \frac{1}{3}$.

4) Задача про секретаря

Написано n листів різним адресатам. Ці листи навмання вкладаються в конверти з адресами.

$A = \{$Принаймі один лист прийде за призначенням$\}$.

Опишемо простір елементарних подій.

$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ i_1 & i_2 & ... & i_n \end{pmatrix}, i_j = \overline{1, n}; i_j - \text{різні} \right\}$ — множина перестановок множини $(1, 2, ..., n)$.

Подія A зображається у вигляді

$A = A_1 \cup A_2 ... \cup A_n$,

де $A_i = \{i$-тий лист прийшов за призначенням$\}$

A-відбулася принаймі одна з подій $A_1, ..., A_n$.

$P(A) = P(A_1 \cup A_2 ... \cup A_n) =?$

Лема 1.1 (Формула включень-виключень). *Нехай $A_1, ..., A_n$ — випадкові події а Ω. Тоді* $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\limits_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum\limits_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - ... + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$

Розглянемо подію

$A_1 = \{$ Лист з номером 1 прийшов за призначенням $\} =$

$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 1 & i_2 & i_3 & ... & i_n \end{pmatrix} \in \Omega \right\},\ |A_1| = (n-1)!$

Зрозуміло, що $|A_2| = ... = |A_n| = (n-1)!$

$A_1 \cap A_2 = \{$ Листи з номерами 1 і 2 прийшли за призначенням $\} =$
$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 1 & 2 & i_3 & ... & i_n \end{pmatrix} \in \Omega \right\}$, $|A_1 \cap A_2| = (n-2)!$
і так далі...
$|A_1 \cap A_3 \cap ... \cap A_k| = (n-k)!$
$P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{(n-1)!}{n!} - \sum\limits_{i<j} \dfrac{(n-2)!}{n!} + \sum\limits_{i<j<k} \dfrac{(n-3)!}{n!} + ... + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n!} =$
$= n\dfrac{(n-1)!}{n!} - C_n^2\dfrac{(n-2)!}{n!} + C_n^3\dfrac{(n-3)!}{n!} + ... + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n!} =$
$= \dfrac{(n-1)!}{n!} - \dfrac{n!}{2!(n-2)!}\dfrac{(n-2)!}{n!} + \dfrac{n!}{23(n-3)!}\dfrac{(n-3)!}{n!} + ... + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n!} =$
$= 1 - \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + ... + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n!}$
Якщо $n \to \infty$, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-1}$$

Розділ 2

Деякі класичні моделі і розподіли.

2.1 Біноміальний розподіл

Припустимо, що деякий ймовірнісний експеримент повторюється n разів, в кожному з яких може відбутись або дуяка подія A — "успіх", або подія $\overline{A}$ — "невдача". Простір всіх можливих результатів можна описати так:

$\Omega = \{\omega : \omega = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n), \varepsilon_i \in \{0,1\}\}$, де $\varepsilon_i = 0$, якщо в i-тому експерименті сталася невдача, $\varepsilon_i = 1$, якщо в i-тому експерименті стався успіх.

Припишемо кожній елементарній події $\omega = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ ймовірність

$$P(\omega) = p^{\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i} (1-p)^{n - \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i},$$

де $p \in (0,1)$ - деяке число.

Переконаймося, що означення коректне, тобто, що $\sum\limits_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$, маємо

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = \sum_{(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{0,1\}} p^{\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i} (1-p)^{n - \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) : \sum \varepsilon_i = k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} p^k (1-p)^{n-k} \sum_{(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) : \sum \varepsilon_i = k} 1 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= (p + (1-p))^n = 1.$$

При $n = 1$ отримаємо:

$$\Omega = \{0,1\}$$

$$p(0) = 1 - p$$

$$p(1) = p$$

p — це ймовірність "успіху" в одному випробуванні.

Розглянемо події

$A_n(k) = \{(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \Omega : \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i = k\} = \{$В n випробуваннях сталося рівно k успіхів$\}$, $k = \overline{0, n}$.

Тоді $P(A_n(k)) = \sum\limits_{\omega \in A_n(k)} p(\omega) = C_n^k p^k (1-k)^{n-k}$, $k = \overline{0, n}$.

Означення 2.1. Набір імовірностей $\{P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = \overline{0, n}\}$ — цей **біноміальний розподіл** з параметрами n (кількість випробувань), і p (ймовірність успіху в одному випробуванні); $Bin(n, p)$.

Приклад: 2.1. (Випадкове блукання)

Деяка частинка виходить з нуля і через одиницю часу, робить або крок вгору, або вниз. За n кроків, де n фіксоване, частинка може переміститись що найбільще на n кроків вгору або вниз.

Beautifull image.

Прстір елементарних подій:

$\Omega = \{(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n), \varepsilon_i = \pm 1\}$, де $\varepsilon_i = -1$, якщо на i-тому кроці частинка зробила крок вниз, $\varepsilon_i = 1$, якщо на i-тому кроці частинка зробила крок вгору.

Покладемо

$$P(\omega) = p^{\nu(\omega)}(1-p)^{n-\nu(\omega)},$$

де $\nu(\omega)$ — це кількість одиничок в $\omega = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = \mu(\omega) - (n - \mu(\omega)) = 2\mu(\omega) - n \Rightarrow$$

$$\mu(\omega) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i + n}{2}$$

Оскільки $\sum\limits_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$, то простір Ω разом з розподілом ймовірностей $p(\omega)$ визначає деяку ймовірнісну модель руху частинки за n кроків.

Розглянемо події

$A_n(k) = \{(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \Omega : \mu(\omega) - (n - \mu(\omega)) = k\} = \{$ за n кроків частинка опиниться в точці з кординатою $k\}$.

Beautifull image.

Червоний прямокутник — це область де "живуть" шляхи з $(0, 0)$ в (n, k)

$P(A_n(k)) = C_n^{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}}$

Умова досяжності: n і k мають однакову парність.

2.2 Мультиполіноміальний розподіл

Проведемо n випробувань, в кожному з яких може спостерігатись один з r несумісних результатів. Опишемо Ω :

$\Omega = \{(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n), \varepsilon_i = \overline{1, r}\}$, де $\varepsilon_i = j$ в j-му випроуванні спостерігали результат номер j, $j = \overline{1, r}$, $i = \overline{1, n}$.

Нехай:

$\nu_1(\omega)$ — це кількість одиничок в $\omega = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$

$\nu_2(\omega)$ — це кількість двійок в $\omega = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$

$\nu_r(\omega)$ — це кількість координат які дорівнюють r в $\omega = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$

Покладемо:

$P(\omega) = p_1^{\nu_1(\omega)} p_2^{\nu_2(\omega)} ... p_r^{\nu_r(\omega)}$, де $p_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{r} p_i = 1$.

Покажемо, що $\sum\limits_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$. Маємо:

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = \sum_{(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \Omega} p_1^{\nu_1(\omega)} p_2^{\nu_2(\omega)} ... p_r^{\nu_r(\omega)} = \sum_{\substack{n_1 \geqslant 0, ..., n_r \geqslant 0 \\ n_1 + ... + n_r = n}} p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_r^{n_r} =$$

$$= \sum_{n_1 + ... + n_r = n} C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} ... C_{n-(n_1+...+n_r)}^{n_r} p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_r^{n_r} = (p_1 + ... + p_r)^n = 1.$$

Розглянемо події

$A_n(K_1, ..., K_r) = \{\omega \in \Omega : \nu_1(\omega) = K_1, ..., \nu_r(\omega) = K_r\} = \{$ в n випробуваннях результат N_1 відбувся K_1 раз, результат N_2 відбувся K_2 разів, ..., результат N_r відбувся K_r разів $\}$, $k_1 + ... + K_r = n$.

Тоді

$P(A_n(K_1, ..., K_r)) = \dfrac{n!}{K_1! ... K_r!} p_1^{K_1} ... p_r^{K_r}$.

Означення 2.2. Набір ймовірностей $\{\dfrac{n!}{K_1! ... K_r!} p_1^{K_1} ... p_r^{K_r}, K_i \geqslant 0, K_1 + ... + K_r = n\}$ — це **мультиполіноміальний (поліноміальний) розподіл** з параметрами n і $p_1, ..., p_r$, де $\sum\limits_{i=1}^{r} p_i = 1$.

Зауваження. І біноміальний і поліноміальний розподіли пов'язані з вибором без повторень.

2.3 Гіпергеометричний роподіл

Нехай в урні міститься N куль, занумерованих від 1 до N. З них M є білими, $N - M$ чорними. Припустимо, що проводиться вибір без повернення n куль, $n < N$. Простір елементирних подій:

$$\Omega = \{\omega : \omega = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n), \varepsilon_i = \overline{1, N}, \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq ... \neq \varepsilon_n\}$$

$$|\Omega| = N(N-1)...(N-n+1) = A_N^n$$

Покладемо: $\forall \omega \in \Omega : P(\omega) = \dfrac{1}{|\Omega|} = \dfrac{1}{A_N^n}$

Розглянемо події:
$A_n(k) = \{$Серед вийнятих куль рівно k виявились білими$\}$
$|A_n(k)| = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} A_M^k A_{N-M}^{n-k}$
і тоді
$P(A_n(k)) = \dfrac{|A_n(k)|}{|\Omega|} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \dfrac{k! C_M^k (n-k)! C_{N-M}^{n-k}}{n! C_N^n} = \dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$

Означення 2.3. Набір ймовірностей $\left\{ \dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, k : \begin{array}{l} 0 \leqslant k \leqslant M \\ 0 \leqslant n-k \leqslant N-M \end{array} \right\}$ — це **гіпергеометричний розподіл** з параметрами N, M, n.

Можна показати, що при $N \to \infty$, $M \to \infty$ так, що $\dfrac{M}{N} \to$:

$$\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \xrightarrow[\substack{N\to\infty \\ M\to\infty \\ \frac{M}{N}\to p}]{} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

2.4 Статистика Больцмана, Бозе-Ейнштейна, Фермі-Дірака

Задача 2.1. Є n частинок, кожна з яких може знаходитися з однаковою ймовірністю $\frac{1}{N}$ в кожній з N комірок ($N > n$). Потрібно знайти, наприклад, ймовірність того, що певна комірка виявиться порожньою, всі частинки потрапляють в різні комірки, тощо.

1. В статистиці Больцмана рівноімовірними є довільні розміщення, що відрізняються не лише кількістю, а й набором частинок в комірці.

   $\Omega_1 = \{(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n), \varepsilon_i \in \{1, ..., N\}\}$,

   ε_i — це номер комірки, яку "вибрала" собі i-та частинка.

   $|\Omega_1| = N^n$, $P(\omega) = \frac{1}{N^n} \quad \forall \omega \in \Omega_1$

2. В статистиці Бозе-Ейнштейна вважаються тотожними випадки, коли частинки міняються місцями між комірками: важлива лише кількість частинок в комірці. Тоді

   $\Omega_2 = \{\omega : \omega = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) : \varepsilon_i \geqslant 0, \sum\limits_{i=1}^{N} \varepsilon_i = n\}$,

   ε_i — кількість частинок в i-тій урні.

   $|\Omega_2| = C_{N+n-1}^n$, $P(\omega) = \frac{1}{C_{N+n-1}^n}$.

3. Згідно статистики Фермі-Дірака в кожній комірці може знаходитись не більше однієї частинки.

   $\Omega_3 = \{\omega : \omega = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n), \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq ... \neq \varepsilon_n, \varepsilon_i \in \{1, ..., N\}\}$,

   $|\Omega_3| = N(N-1)...(N-n+1) = A_N^n$,

   $\forall \omega \in \Omega_3 : P(\omega) = \frac{1}{A_N^n}$.

Розділ 3

Геометричний ймовірнісний експеримент

Задача 3.1. Нехай Ω — деяка область скінченної міри (довжина в $\mathbb{R}$, площа в $\mathbb{R}^2$, об'єм в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 3$). В цій області ми навмання вибираємо деяку точку $\omega in \Omega$. Чому дорівнює ймовірність того, що вибрана точка буде належати деякій області $A \subseteq \Omega$?

Припущення:

1. Вибрати можна довільну точку Ω.
2. Ймовірність потрапляння точки в область A має бути пропорційною мірі A (довжині, площі, об'єму A)
3. Ймовірність не має залежати від розміщення і форми області A.

При виконанні припущень 1) – 3) покладають

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

де $\mu(X)$ — це міра у відповідному просторі.

Приклади:

1) Задача про зустріч.

Двоє осіб домовилися про зустріч між 12:00 і 13:00. Кожний вибирає час приходу навмання, чакає не більше 15хв. і йде. Яка ймовірність, того, що ці дві особи зустрінуться?

t_i — час прибуття i-тої особи.
$\Omega = \{(t_1, t_2) : 0 \leqslant t_1 \leqslant 1, 0 \leqslant t_2 \leqslant 1\}$
$A = \{(t_1, t_2) \in \Omega : |t_1 - t_2| \leqslant \frac{1}{4}\}$

Beautifull image

$\Omega = [0, 1]^2$
$P(A) = \dfrac{S_A}{S_\Omega} = \dfrac{1 - 2\frac{1}{2}(\frac{3}{4})^2}{1} = 1 - \dfrac{9}{16} = \dfrac{7}{16}$

2) Розглянемо квадратне рівняння $X^2 + ax + b = 0$, де a, b вибираються навмання в $(0, 1)$, незалежно одне від одного.

$A = \{$Корені рівняння виявляються дійсними$\}$

$\Omega = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 0 < a < 1, 0 < b < 1\}$
$D = a^2 - 4b \geqslant 0$ — необхідна і достатня умова того, що корені дійсні.
$A = \{(a, b) \in \Omega : b \leqslant \frac{a^2}{4}\}$

Beautifull image

$\Omega = [0, 1]^2$

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\int\limits_0^1 \frac{a^2}{4} da}{1} = \frac{1}{12}$$

Задача 3.2 (парадокс Бертрана). В крузі одиничного радіусф навмяння вибирається хорда. Яка ймовірність того, що її довжина буде більшою за сторону правильного трикутника, вписаного в це коло.

Розв'язання. Варіант 1: Закріпимо один кінець хорди. Тоді другий кінець — це довільна точка на колі:

Beautifull image

$\Omega = [0, 2\pi]$
$A = [\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$

Beautifull image

$P(A = \dfrac{\frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}}{2\pi} = \dfrac{1}{3}$
Варіант 2:

Beautifull image

Фіксуємо напрямок хорди. Проведемо діаметр, перпендикілярний до цього напрямку. Кожну хорду можна ототожнити з точкою цього діаметра
$\Omega = [0, 2]$ — точка відрізка $[0, 2]$.
$A = [\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$
$P(A) = \dfrac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{2}$.
Варіант 3:

Beautifull image

Через кожну точку круга проходить єдина хорда, для якої ця точка круга є серединою. Тому хорду можна ототожнити з її серединою. (x, y) — середина хорди
$\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$
A — множина точок круга, вписаного в правильний трикутник.
$A = \{(x, y) \in \Omega : x^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{4}\}$
$P(A) = \dfrac{S_A}{S_\Omega} = \dfrac{\frac{1}{4}\pi}{\pi} = \dfrac{1}{4}$.

Приклад: 3.1. (Задача Бюффона) Голка довжини 2 навмання кидається на площину, розграфлену паралельними прямими на відстані 2 одна від одной. Знайти ймовірність того, що голка перетне якусь з прямих.

Розв'язання. Beautifull image

Положення голки на площині опишемо парою (x, φ), де x — відстань від центра голки до ближчої з прямих; φ-кут, утворений голкою з вказаною прямою

Two beautifull images

$$\Omega = \{(x, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$$
$$A = \{(x, \varphi) \in \Omega : x \leqslant \sin(\varphi)\}$$
$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\int\limits_0^\pi \sin(\varphi) d\varphi}{1\pi} = \frac{2}{\pi}$$

Beautifull image

Обчислення числа π методом Монте-Карло: n разів голку кинуто на площину. Нехай k разів голка перетнула пряму. Число $\frac{k}{n}$ має бути близьким (при дуже великому n) до $\frac{2}{\pi}$. Отже $\pi \approx \frac{2n}{k}$ — апроксимація для π.

Розділ 4

Симетричне випадкове блукания. принцип відбиття (віддзеркалення)

Beautifull image

Нехай n — фіксований час спостереження. Ω — множина всіх можливих траєкторій частинки за час n.

$\Omega = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n), \varepsilon_i \in \{-1, 1\}, i = \overline{1, n}\}$

$\varepsilon_i = 1$ на i-тому кроці, крок був вгору

$\varepsilon_i = -1$ на i-тому кроці, крок був вниз

$|\Omega| = 2^n$

Покладемо: $\forall \omega \in \Omega$.

Траекторія випадкового блукання називається шляхом з початку кординат

Нехай -кількість шляхів з точки

Умови досяжності: і і мають мати однакову парність

— кількість кроків вгору

— кількість кроків вниз

— кількість кроків (всього)

Множина шляхів, які ведуть з в

Зауваження. при

Лема 4.1 (Принцип відбиття). *Нехай і — точки з цілочисельними кординатами і відповідно, причому , .*

Нехай — точка з кординатами —симетрична точці відносно осі абсис.

Тоді кількість шляхів з в , які дотикаються або перетинають вісь абсис, дорівнює кількості всіх шляхів і в .

Кожному шляху з в , фкий дотикається або перетинає вісь абсис, поставимо у відповідність шлях з в наступним чином: якщо шлях з в попадпє на вісь х вперше в точці С, то ділянку шляху з в будуємо як відображення з в без змін ділянку з в

Така відповідність є взаємооднозначною, що й доводить лему.

Приклади:

а) знайдемо кількість додатніх шляхів х в (всі шляхи над віссю абсис)

б)Кількість невідємних шляхів з в — кількість невідємних шляхів, які ведуть з в .

Розділ 5

Умовні ймовірності. Незалежність подій. Формула повної ймовірності та формула Байса

Умовна ймовірність події в припущенні, що відбулася деяка подія визначається так: де вважається, що .

Приклади

1) Підкидаємо два гральних кубика.

На першому кубику випало 6 очок

сума всіх очок дорівнює 11

2) В сімї є двоє дітей. Відомо, що одне з дітей — це хлопчик. Яка ймовірність того, що в цій сімї є дівчинка?

Вважаємо, що всі елементарні події є рівноможливими.

В сімї є дівчинка

В сімї є хлопчик

Таким чином:

Твердження Властивості умовної ймовірності

зауваження: що події і є несумісними

Тому

Отже

2) Запишемоправу частину

Випадкові події і — це незалежні події, якщо

Приклади

Монета підкидається двіччі

При першому підкиданні випав герб

При другому підкиданні випав герб

В обох підкиданнях випав герб

Таким чином

Отже події є незалежними

Події — це незалежні в сукупності події,якщо

для довільного набору випадкових подій

Приклад Піраміда Бернштейна

Правильна чотирикутна піраміда пофарбована наступним чином: є червона, синя , зелена грані і одна грань, що пофарбована у всі три кольори. При підкиданні кожна грань випадає з ймовірністю

Випала грань, яка має червоний колір

Випала грань, яка має зелений колір

Випала грань, яка має синій колір

Отже і і і є незалежними

розглянемо :

Отже події , і не є незалежними в сукупності

Твердження: 1) Якщо і незалежні і то 2) Якщо і є несумісними і , то і не є незалежними.

1) Якщо і незалежні, то

тоді

2) Якщо і несумісні, то . Тому . В той же час . Значить , а отже і не є незалежними.

Набір подій — це повна група подій, якщо: 1) при і є несумісними 2) 3) для довільного .

Кажуть, що визначають розббиття .

Теорема формула повної ймовірності

Нехай — повна група подій на і нехай . тоді

Оскільки є попарно неперетинними, то при . Тому

Теорема формула Байеса

Нехай — це повна група подій на і . тоді

Оскільки , то .

Ймовірності , — апріорні ймовірності, — апосторіорні ймовірності гіпотез.

Приклад:

1) маємо 4 кулі: 2 білих, 2 чорних кулі, розкладають довільним чином по двом вазам.

Правитель навмання вибирає вазу, з якої навмання виймає кулю. Яка ймовірність того, що куля виявиться білою.

вийняли білу кулю

вибрали 1-шу вазу , вибрали 2-гу вазу

1-й спосіб

2-й спосіб

3-й спосіб

2) Підкидається гральний кубик, а потім монета підкидається стільки разів, скільки очок випало на кубику. Відомо, що при підкиданні монети випали всі герби. Яка ймовірність того, що на кубику випало 5 очок?

При підкиданні монети випали всі герби

На кубику випало очок

Скористаємося формулою Байеса:

Обчислюємо:

при підкиданнях монети випали всі герби

Отже

3) Повернення в 0 випадкового симетричного блукання

Частинка стартує з 0, в дискретні моменти часу робить крок вгору, вниз з ймовірністю . Нехай — мовірність того, що частинка коли-небуть повернеться у вихвдну точку.

Запишемо формулу повної ймовірності для , зробивши гіпотези про результат -го кроку.

введемо позначення

частина потрапить в 0, стартувавши з точки

тоді 1-ий крок вгору 1-ий крок вниз

Запишемо формулу повної ймовірності для

Характеристичне рівнянняарифметричної прогресії, а отже

Оскільки , то . Отже

Підставимо в рівняння для :

Таким чином і тоді

Висновок: з ймовірністю 1 частинка, стартувала з 0, повернеться коли небуть в 0.

4) Задача про розорення гравця.

Гравець починає гру в казино, маючи 1 грн.

За одну гру гравець виграє одну гривню з ймовірністю або програє 1 грн з ймовірністю .

Казано має гривень. Яка ймовірність розорення гравця?

Позначимо

— ймовірніст розорення гравця, який має гривень.

Зрозуміло, що

Запишемо для формулу повної ймовірності

Отримали

Підсумуємо обидві частини від 0 довільним

Зліва

Справа

Прирівняємо

Звідси

— ймовірність розорення гравця

— ймовірність розорення казино

Припустимо, що .Тоді

а) якщо . Тоді

б) . Тоді

Для того, щоб ймовірність розорення гравця була меншою за ймовірність розорення казино потрібно

Розділ 6

Неперервні випадкові величини. Основні ймовірнісні розподіли

6.1 Нехай X-випадкова величина з неперервною функцією розподілу $F(x) = P(X \leqslant x), xin\mathbb{R}$

Якщо існує невідємна інтегровна на $\mathbb{R}$ функція $f(x), x \in \mathbb{R}$ така, що

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(y)dy, \tag{6.1}$$

то функція f — це **щільність розподілу випадкової величини** X, а сама випадкова величина X — це **неперервна величина**.

З означення випливає, що для неперервної випадкової величини X справедливі такі рівності:

1)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \tag{6.2}$$

Умова нормування () випливає з того, що $F(\infty) = 1$.

2)

$$P(a < X \leqslant b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx \tag{6.3}$$

Рівність () випливає з того, що

$P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a) = \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$

Оскільки функція F є неперервною, то $P(X = x) = 0$ і

$$P(a < X < b) = P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X \leqslant b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx \tag{6.4}$$

Загалом, для довільної множини $B \in \mathbb{B}$:

$$P(X \in B) = \int\limits_{B} f(x)dx \tag{6.5}$$

3) З властивості інтеграла зі змінною верхньою межею випливає, що

$$f(x) = F'(x) \tag{6.6}$$

в точках неперервності функції f.

Приклад: 6.1. Нехай випадкова величина має щільність розподілу

$$f(x) = C(4x - 2x^2)\mathbb{I}(0 < x < 2).$$

Знайдемо константу C та ймовірність $P(X > 1)$.
Константу C знаходимо з умови нормування:

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = C\int\limits_{0}^{2}(4x - 2x^2)dx = C(4\frac{2^2}{2} - 2\frac{2^3}{3}) = \frac{8}{3}C \Rightarrow c = \frac{3}{8}$$

Тоді

$$P(X > 1) = \int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx = \frac{3}{8}\int\limits_{0}^{2}(4x - 2x^2)dx = \frac{1}{2}$$

6.2 Рівноімовірний розполіл на відрізку

Означення 6.1.

Випадкова величина X має **рівноімовірний розподіл на відрізку** $[a, b]$, якщо її щільність розподілу має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{I}(x \in [a, b]) \tag{6.7}$$

з (6.7) випливає, що функція розподілу X має вигляд

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(y)dy = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 1, & x > b \end{cases} \tag{6.8}$$

Beautifull Image

Приклад: 6.2. Нехай $X \sim U[0, 1]$, тобто X має рівномірний розподіл на $[0, 1]$. Тоді $f(x) = \mathbb{I}(x \in [0, 1])$ і отже $P(\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}) = \int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{6} = \frac{l_A}{l_\Omega}$,

де $\Omega = [0, 1], A = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

Beautifull Image

Нехай $X \sim U[0, 1]$. За допомогою X можна побудувати випадкову величину з заданою неперервною функцією розподілу F. Справді, покладемо $Y = F^{-1}(X)$.
Тоді

$$F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(F^{-1}(X) \leqslant x) = P(X \leqslant F(x)) = F(x),$$

оскільки $X \sim U[0,1]$ і $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$.

Навпаки, маючи випадкову величину Y з неперервною функцією розподілу F, можна побудувати випадкову величину з рівномірним на $[0,1]$ розподілом.

Справді, поклавши $X = F(Y)$, отримаємо для $x \in [0,1]$:

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(F(Y) \leqslant x) = P(Y \leqslant F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x$$

При $x < 0: \quad P(F(Y) \leqslant x) = 0$
При $x > 1: \quad P(F(Y) \leqslant x) = 1$
Отже $X \sim U[0,1]$.

6.3 Нормальний розподіл

Випадкова величина X має нормальний розподіл з параметрами $a \in \mathbb{R}$ і σ^2 $(\sigma > 0)$, що записується як $X \sim N(a, \sigma^2)$, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$f_{a,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{1\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R} \tag{6.9}$$

Якщо $a = 0$, $\sigma^2 = 1$, то кажуть, що X має **стандартний нормальний розполіл**.

Функція розподілу випадкової величини X позначається Φ і

$$\Phi_{a,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{1\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}} dy, x \in \mathbb{R} \tag{6.10}$$

Оскільки $\Phi_{a,\sigma^2}(x) = \Phi_{0,1}(\frac{x-a}{\sigma})$, то a-параметр зсуву, σ-параметр маштабу.

Графік функції $f(x)$ є симетричним відносно $x = a$.

Beautifull Image

Вперше нормальний розподіл було використано в 1733 році для апроксимації біноміального розподілу, коли n є великим.

Теорема 6.1 (Локальна теорема Муавра)**.**

$$\sqrt{np(1-p)}p_n(k) \approx f_{0,1}(x), \tag{6.11}$$

де $p_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, $k = \overline{0, n}$ *При великому* n.

Приклад: 6.3. Нехай ймовірність влучених в мішень при одному пострілі дорівнює 0.8. Нехай X — кількість влучень при $n = 400$ пострілах. Обчислити $P(X = 300)$.

$P(X = 300) = P_{400}(X = 300) = C_{400}^{300}(0.8)^{300}(0.2)^{100}$

Скористаємося нормальним наближенням:

$$\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2} = 8,$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{300 - 320}{8} = -2.5,$$

$$P(X = 300) \approx \frac{1}{8} f_{0,1}(-2.5) = 0.0022.$$

Інтегральна формула Муавра-Лапласа:

Якщо $X \sim Bin(n,p)$, причому n є великим і ймовірномті p і $(1-p)$ є не надто малим, то

$$P(K_1 \leqslant X \leqslant K_2) \approx \Phi_{0,1}(x_2) - \Phi_{0,1}(x_1) = \inf_{x_1}^{x_2} f_{0,1}(x)dx \tag{6.12}$$

де $\Phi_{0,1}$-функція розподілу стандартного нормального розподілу, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, $x_1 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}$

Приклад: 6.4. Нехай X-кількість шісток, що випали при $n = 600$ підкиданнях грального кубика. Обчислимо наближено ймовірність $P(90 \leqslant X \leqslant 120)$:

$P(90 \leqslant X \leqslant 120) \approx \Phi_{0,1}(\frac{120-600\frac{1}{6}}{\sqrt{600\frac{1}{6}\frac{5}{6}}}) - \Phi_{0,1}(\frac{90-600\frac{1}{6}}{\sqrt{600\frac{1}{6}\frac{5}{6}}}) = \Phi_{0,1}(2.19) - \Phi_{0,1}(-1.1) = 0.85007$

6.4 Показниковий (Експоненціальний) розподіл, $Exp(\lambda)$

Неперервна випадкова величина X має **показниковий розподіл з параметром** $\lambda > 0$, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}(x \geqslant 0) \tag{6.13}$$

Функція Розподілу X має вигляд:

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dy = 1 - e^{1-\lambda x}, & x \geqslant 0 \end{cases} \tag{6.14}$$

Показниковий розподіл широко застосовується при моделювання часу безвідмовної роботи пристроїв, часу між надходженнями вимог в симтемах масового обслуговування і тривалості обслуговування цих вимог.

Твердження 6.1 (Відсутність післядії)**.** *Якщо $X \sim Exp(\lambda)$, то для довільних $s, t \geqslant 0$*

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t) \tag{6.15}$$

► Зауважимо, що

$$P(X > t) = \int_t^{\infty} f(x)dx = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-t}.$$

За означенням умовної ймовірності

$$P(X > t + s \mid X > s) = \frac{P(X > t + s, X > s)}{P(X > s)} = \frac{P(X > t + s)}{P(X > s)}.$$

Тоді

$$P(X > t + s \mid X > s) = \frac{e^{-(t+s)}}{e^{-s}} = e^{-t},$$

що й потрібно було довести.

◄

Beautifull Image

6.5 Розподіл Коші $C(\alpha, \beta)$

Непрервна випадкова величина X має **розподіл Коші** $C(\alpha, \beta)$, якщо її щільність розподілу має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\beta}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} \tag{6.16}$$

При $\alpha = 0$, $\beta = 1$ говорять про **стандартний розподіл Коші**. Цей розподіл виникає, наприклад, в наступній задачі:

Приклад: 6.5. Нехай в точці $(0, 1)$ в $\mathbb{R}^2$ Поміщено джерело випромінювання частинок. Детектор, який співпадає з віссю Ox, фіксує сліди випромінювання.

Напрямок випромінювання є випадковим і має рівномірний розподіл на $[-\pi, \pi]$.
Нехай X-кордината, в якій детектор зафіксував частинку.

Beautifull Image

φ-кут між напрямком руху частинки і віссю Oy.
Частинка досягає детектора, якщо $\varphi \sim U{-\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2}$.
$X = \operatorname{tg}\varphi$
Знайдемо функцію розподілу $X = \operatorname{tg}\varphi$:
$F(x) = P(X \leqslant x) = P(\operatorname{tg}\varphi \leqslant x) = P(\varphi \leqslant \operatorname{arctg} x) = \frac{\operatorname{arctg} x - (-\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$
Оскільки $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$,
то

$$\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{dy}{1+y^2} = \int\limits_{-\infty}^x \frac{dy}{1+y^2} - \frac{\pi}{2}$$

і Тоді

$$P(X \leqslant x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^x \frac{dy}{1+y^2},$$

а отже

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+y^2}.$$

6.6 Розподіл багатовимірної випадкової величини

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — ймовірнісний простір, X_1, X_2, ..., X_n — випадкові величини на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Впорядкований набір $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ — це n**-вимірний випадковий вектор**, або n**-вимірна випадкова величина**. X_i — i-та кордината.

Приклад: 6.6. Нехай $(X_1, X_2, ..., X_n)$ — це координати відхилення зенітного снаряда від точки прицілювання в деякій просторовій системі координат.

Функція вигляду:

$$F(x_1, x_2, .., x_n) = P(X_1 \leqslant, X_2 \leqslant, ..., X_n \leqslant), (x_1, x_2, .., x_n) \in \mathbb{R}^n \tag{6.17}$$

— це **функція розподілу випадкового вектора** $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$.
При $n = 2$ маємо двовимірну випадкову величину $X = (X_1, X_2)$, для якої

$$F(a, b) = P(X_1 \leqslant a, X_2 \leqslant b)$$

задає ймовірність потрапляння (X_1, X_2) в заштриховану область

Beautifull Image

Властивості функції розподілу (при $n = 2$).

Теорема 6.2. *Двовимірна функція розподілу $F(x, y)$ задовольняє таким умовам:*

1. $0 \leqslant F(x, y) \leqslant 1$,
2. $F(x, y)$ *неспадна за кожним аргументом*
3. $F(-\infty, y) = (x, -\infty) = 0$
4. $F(\infty, \infty) = 1$
5. $F(x, y)$ *неперервна справа в довільній точці* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *за кожним з аргументів*
6. $P(a_1 \leqslant X_1 \leqslant b_1, a_2 \leqslant X_2 \leqslant b_2) = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2)$
7. $F_{(X_1, X_2)}(x, \infty) = F_{X_1}(x)$
8. $F_{(X_1, X_2)}(\infty, y) = F_{X_2}(y)$

Якщо всі X_1, X_2, ..., X_n є дискретними випадковими величинами, то вектор $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ — це **дискретний випадковий вектор**. Закон розподілу двовиміргого дискретного вектора (X, Y) можна задати таблицю такого вигляду

$x\backslash y$	y_1	y_2	y_3	y_4	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	$\cdots$
x_2	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	$\cdots$
x_3	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$

де $\{x_1, x_2, ...\}$, $\{y_1, y_2, ...\}$ — можливі значення випадкової величини X та Y, $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ — ймовірність одночасної появи подій $\{X = x_i\}$ та $\{Y = y_i\}$.

При цьому за двовимірним розподілом можимо знайти одновимірні розподіли випадкових величин X, Y:

$$\begin{aligned} P(X = x_i) = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_j p_{ij} \\ P(Y = y_i) = \sum_i P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_i p_{ij} \end{aligned} \tag{6.18}$$

Приклад: 6.7. (Поліноміальний Розподіл) Нехай проводяться n незалежних випробувань, в кожному з яких спостерігається одна з m несумісних подій A_1, ..., A_m, причому $P(A_i) = p_i$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Нехай X_i — це кількість випробувань, в яких спостерігалася подія A_i. Тоді $X = (X_1, ..., X_m)$ — дискретний випадковий вектор з розподілом:

$$P(X_1 = K_1, ..., X_m = K_m) = \frac{n!}{K_1!K_2!...K_m!} p_1^{K_1}...p_m^{K_m}, \tag{6.19}$$

де $K_i \geqslant 0$ і $\sum\limits_{i=1}^{m} K_i = n$.

Якщо $m = 2$, то отримаємо біноміальний розподіл.

Розподіл вектора $X = (X_1, ..., X_n)$ — це **неперервний розподіл**, якщо існує невад'ємна інтегровна на $\mathbb{R}^n$ функція $f(x_1, ..., x_n)$ така, що

$$\forall B \in (B)(\mathbb{R}^n) : P(X \in B) = \int\limits_B f(x_1, ..., x_n) dx_1...dx_2 \tag{6.20}$$

Умова () еквівалентна тому, що

$$F(x_1, ..., x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} ... \int\limits_{-\infty}^{x_n} f(y_1, ..., y_n) dy_1...dy_n \tag{6.21}$$

для довільного $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Функцію $f(x_1, ..., x_n)$ з (), () — це **щільність розпоілу випадкового вектора** X. З властивостей функції розподілу F і властивостей інтеграла зі змінною верхньою мужею випливає, що

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} ... \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, ..., x_n) dx_1...dx_n = 1 \tag{6.22}$$

і

$$f(x_1, ..., c_n) = \frac{\delta^n F(x_1, ..., x_n)}{\delta x_1, .., \delta x_n} \tag{6.23}$$

Зауважимо, що за щільністю $f(x_1, ..., x_n)$ випадкового вектора $X = (X_1, .., X_n)$м ожна знайти щільність кожної координати. Справді:

$$F_{X_i}(x_i) = F_{(X_1, ..., X_i, ..., X_n)(\infty, ..., x_i, ..., \infty)} = \int\limits_{-\infty}^{x_i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} ... \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y_1, ..., y_n) dy_1...dy_n$$

отже

$$f_{X_i}(x_i) = \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} ... \int\limits_{-\infty}^{\infty}}_{n-1} f(x_1, ..., x_n) dx_1...dx_{i-1} dx_{i+1}...dx_n \tag{6.24}$$

Приклад: 6.8. (рівномірний розподіл в крузі)

Нехай $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$ і нехай (X, Y) — координати навмання вибраної точки в Ω. Тоді для довільної підмножини $B \subseteq \Omega$:

$$P((X, Y) \in B) = \frac{S_B}{\pi r^2} = \iint\limits_B \frac{dxdy}{\pi r^2}$$

Звідси

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{\pi r^2}\mathbb{I}(x^2+y^2 \leqslant r^2).$$

Знайдемо одновимірні щільності $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

Маємо:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dy = \frac{1}{\pi r^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{I}(x^2+y^2 \leqslant r^2)dy = \frac{1}{\pi r^2}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy = \frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-x^2}, \text{ при } |x| \leqslant$$

$$f_X(x) = 0, \text{ при } |x| > r.$$

Аналогічно,

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-y^2}\mathbb{I}(|y| \leqslant r).$$

Приклад: Нехай двовимірна випадкова величина має щільність розподілу

Обчислимо ймовірності .

Оскільки

то

Далі,

, де

Тому

7. Незалеєність випадкових величин

Випадкові величини , називаються незалежними, якщо

для довільних , .

теорема (Критерій незалежності неперервних випадкових величин)

Неперервні випадкові величини , зі щільностями та відповідно є незалежними тоді і лише тоді, коли вектор має щільність розподілу для якої

Якщо і є незалежними, то

Звідси

а з іншого боку

Отже

Якщо , то

що означає незалежність та .

Приклад Нехай , - незалежні випадкові величини, кожна з яких має показниковий розподіл з параметрами , відповідно. Покажемо, що випадкова величина маж показниковий розподіл з параметром .

Справді, для довільного маємо:

незалежність

Отримати функцію розподілу випадкової величини з параметром .

Поняття незалежності поширюється на довільну кількість випадкових .

Випадкові величини називаються незалежними, якщо для довільних :

Приклад Якщо незалежні випадкові величини і , тобто

(Довести самостійно)

Зауваження Існують також так звані стнгулярні випадкові величини, які не є ні дискретними, ні неперервними.

Приклад: Нехай - рівномірно розподілена на випадкова величина. Покладемо

Ця випадкова величина не є ні дискретною, ні неперервною.

Функція розподілу є розривною в точці :

, отже не є неперервною.
На інтервалі є неперервною функцією