

Theorver

6 листопада 2022 р.

# Зміст

<b>1</b>	<b>Вступ в теорію імовірності</b>	<b>3</b>
1.1	Математична модель імовірнісного експерименту . . . . .	3
1.2	Дискретний простір елементарних подій . . . . .	3
1.3	Операції над подіями . . . . .	4
1.4	Ймовірність випадкової події . . . . .	5
1.5	Класична модель . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Деякі класичні моделі і розподіли.</b>	<b>8</b>
2.1	Біноміальний розподіл . . . . .	8
2.2	Мультиполіноміальний розподіл . . . . .	10
2.3	Гіпергеометричний розподіл . . . . .	10
2.4	Статистика Больцмана, Бозе-Ейнштейна, Фермі-Дірака . . . . .	11

# Розділ 1

## Вступ в теорію імовірності

### 1.1 Математична модель імовірнісного експерименту

**Означення 1.1.** Ймовірнісним (статистичним) експериментом — називають експеримент, для якого:

- 1) Множин  $\Omega$  можливих результатів наперед відома.
- 2) Наперед знати, яким саме результатом закінчиться експеримент, ми не можемо.
- 3) Експеримент можна повторювати як завгодно багато разів при однакових умовах.

**Приклад: 1.1.**

- 1) Підкидання монети.
- 2) Підкидання кубика.

**Означення 1.2.** Простором елементарних подій експерименту, називають множину  $\Omega$  всіх можливих результатів експерименту.

**Приклад: 1.2.**

- 1) Монета підкидається 1 раз.  
 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} = \{P, G\}; |\Omega| = 2$
- 2) Монета підкидається двічі.  
 $\Omega = \{GG, GP, PG, PP\}; |\Omega| = 4$
- 3) Монету підкидають до першої появи герба.  
 $\Omega = \{G, PG, PPG, \dots\}$   
 $\omega_i = \underbrace{PP \dots P}_{i-1} G, i = 1, 2, 3, \dots$

$|\Omega| = \infty, \Omega$  — зліченна множина

- 4) Задача про зустріч.

Двоє людей домовились про зустріч в секретному місці між 12:00 і 13:00. Кожен з них вибирає час приходу на місце навмання.

$$\Omega = \{(t_1, t_2) : 0 \leq t_1 \leq 1, 0 \leq t_2 \leq 1\}$$

$t_1$  — час прибуття 1-ої людини

$t_2$  — час прибуття 2-ої людини

$\Omega$  має потужність континуума.

### 1.2 Дискретний простір елементарних подій

Вважаємо, що  $\Omega$  — скінченна або зліченна множина.

**Означення 1.3.** Довільна підмножина  $A \subseteq \Omega$  дискретного простору елементарних подій — це **випадкова подія**.

**Зауваження.** Якщо  $\Omega$  — довільна (не обов'язково дискретна), то взагалі кажучи не кожна її підмножина є випадковою подією.

Кажуть, що подія  $A$  відбулася, якщо відбулася якась з елементарних подій  $\omega \in A$ .

**Приклад: 1.3.**

1) Підкидають 1 раз гральний кубик.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; |\Omega| = 6$$

$A = \{\text{Випала парна кількість очок}\}$

$$A = \{2, 4, 6\}, |A| = 3$$

2) Кидок 2-х гральних кубиків.

$$\Omega = \{(i, j), i = \overline{1, 6}; j = \overline{1, 6}\}; |\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$$

$A = \{\text{сума очок дорівнює 4}\}$

$$A = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}, |A| = 3$$

3) Підкидання монети до першого герба.

$$\Omega = \{\Gamma, P\Gamma, PP\Gamma, \dots\}$$

$A = \{\text{Було проведено непарну кількість підкидань}\}$

$$A = \{\Gamma, PP\Gamma, \dots, \underbrace{P \cdots P}_{2k} \Gamma, \dots\} \quad A - \text{зліченна.}$$

## 1.3 Операції над подіями

1) Об'єднання (сума) подій  $A$  і  $B$  — це подія  $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \vee \omega \in B\}$

2) Перетин (добуток) подій  $A$  і  $B$  — це подія  $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\}$  — відбулися обидві події.

3)  $A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$  — відбулась подія  $A$ , але не відбулася подія  $B$ .

$$A \setminus B = A \cap \underline{B}$$

4)  $A \subset B$  — з події  $A$  випливає подія  $B$ .

**Означення 1.4.**

1) Подія  $\Omega$  називається достовірною подією.

2) Подія  $\emptyset \subset \Omega$  називається неможливою подією.

3) Подія  $\overline{A} = \Omega \setminus A$  називається протилежною до події  $A$ .

4) Події  $A$  і  $B$  називаються несумісними, якщо  $A \cap B = \emptyset$

**Приклад: 1.4.** Підкидають два гральних кубика.

$$\Omega = \{(i, j), i = \overline{1, 6}, j = \overline{1, 6}\}$$

$A = \{\text{сума очок дорівнює 4}\}$

$$A = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$

$B = \{\text{на першому кубіку 6 очок}\}$

$$B = \{(6, j), j = \overline{1, 6}\}$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \text{ і } B \text{ несумісні.}$$

**Зауваження.** До подій, як до множини, можна застосувати правила де моргана:

$$\text{а) } \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$$

$$\text{б) } \bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$$

## 1.4 Ймовірність випадкової події

Вважаємо, що  $\Omega$  — дискретна множина. Кажуть, що на  $\Omega$  задано розподіл ймовірностей, якщо кожній елементарній події  $\omega \in \Omega$  ставиться у відповідність число  $P(\omega)$  так, що:

- 1)  $\forall \omega \in \Omega : P(\omega) \geq 0$
- 2)  $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$  — умова нормування.

Тоді для довільної випадкової події  $A \subseteq \Omega$ :

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$$

$P(A)$  називається ймовірністю події  $A$ .

### Властивості ймовірності:

- 1)  $P(\Omega) = 1$  — випливає з умови нормування, (2)
  - 2)  $P(\emptyset) = 0$
  - 3)  $P(A \cup B) = \sum_{\omega \in A \cup B} P(\omega) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) + \sum_{\omega \in B} P(\omega) - \sum_{\omega \in A \cap B} P(\omega) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Для несумісних подій ( $A \cap B = \emptyset$ )  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- 4)  $P(\bar{A}) = \sum_{\omega \in \bar{A}} P(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega \setminus A} P(\omega) = 1 - P(A)$

## 1.5 Класична модель

Якщо  $|\Omega| = N$  і всі елементарні події вважаються рівноімовірними, тобто

$$P(\omega_1) = \dots = P(\omega_N) = \frac{1}{N},$$

то  $\forall A \subseteq \Omega$ :

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{N} = \frac{1}{N} |A| = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

— відношення кількості сприятливих елементарних подій для  $A$  до загальної кількості елементарних подій.

### Приклад: 1.5.

- 1) Підкидаємо симетричну монету

$$\Omega = \{P, \Gamma\}$$

Нехай  $P(P) = \frac{1}{2}$ ,  $P(\Gamma) = \frac{1}{2}$  — припущення що до симетричності монети.

Якщо  $P(P) = p$ ,  $P(\Gamma) = (1 - p)$ , де  $p \neq \frac{1}{2}$ , то монета несиметрична.

- 2) Монету підкидають  $n$  разів, фіксована кількість.

$\Omega = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_i = 0, 1\}$ , де  $\varepsilon_i = 0$ , якщо випала решка в  $i$ -тому підкиданні,  $\varepsilon_i = 1$ , якщо випав герб.

$$|\Omega| = 2^n$$

Покладемо:  $P(\omega) = \frac{1}{2^n}$  — припущення рівноможливості елементарних подій.

**Зауваження.**  $\sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} 2^n = 1$

$A = \{\text{герб випав } k \text{ разів в } n \text{ випробуваннях}\}$

$$A = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \Omega : \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = k\}$$

$|A| = C_n^k$  — кількість способів вибрати  $k$ -елементну підмножину  $n$ -елементної множини

Таким чином:  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_n^k}{2^n}$

3) Два гравці по черзі підкидають монету. Виграє той, в кого раніше випаде герб.

$A = \{\text{виграв 1-ший гравець}\}$

$B = \overline{A} = \{\text{виграв 2-гий гравець}\}$

$\Omega = \{\Gamma, P\Gamma, PP\Gamma, \dots\}$

$A = \{\Gamma, PP\Gamma, PPPP\Gamma, \dots\}$

$B = \{P\Gamma, PPP\Gamma, \dots\}$

Покажимо:  $\omega_i = \underbrace{PPP\dots P}_{i-1}\Gamma, i = 1, 2, \dots$

Нехай  $P(\omega_i) = \frac{1}{2^i}$

Маємо:  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$  — умова нормування виконується.

Згідно значення:

$$P(A) = \sum_{i-\text{непарне}} P(\omega_i), P(B) = 1 - P(A) = \sum_{i-\text{парне}} P(\omega_i)$$

$$P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

Тоді:  $P(B) = 1 - P(A) = \frac{1}{3}$ .

4) Задача про секретаря

Написано  $n$  листів різним адресатам. Ці листи навмання вкладаються в конверти з адресами.

$A = \{\text{Принаймі один лист прийде за призначенням}\}$ .

Опишемо простір елементарних подій.

$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}, i_j = \overline{1, n}; i_j - \text{різні} \right\}$  — множина перестановок множини  $(1, 2, \dots, n)$ .

Подія  $A$  зображається у вигляді

$$A = A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n,$$

де  $A_i = \{i\text{-тий лист прийшов за призначенням}\}$

$A$ -відбулася принаймі одна з подій  $A_1, \dots, A_n$ .

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n) = ?$$

**Лема 1.1** (Формула включень-виключень). *Нехай  $A_1, \dots, A_n$  — випадкові події а  $\Omega$ . Тоді  $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$*

Розглянемо подію

$$A_1 = \{\text{Лист з номером 1 прийшов за призначенням}\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix} \in \Omega \right\}, |A_1| = (n-1)!$$

Зрозуміло, що  $|A_2| = \dots = |A_n| = (n-1)!$

$$A_1 \cap A_2 = \{ \text{Листи з номерами 1 і 2 прийшли за призначенням} \} = \\ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix} \in \Omega \right\}, |A_1 \cap A_2| = (n-2)!$$

і так далі...

$$|A_1 \cap A_3 \cap \dots \cap A_k| = (n-k)!$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)!}{n!} - \sum_{i<j} \frac{(n-2)!}{n!} + \sum_{i<j<k} \frac{(n-3)!}{n!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} = \\ = n \frac{(n-1)!}{n!} - C_n^2 \frac{(n-2)!}{n!} + C_n^3 \frac{(n-3)!}{n!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} = \\ = \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{2!(n-2)!} \frac{(n-2)!}{n!} + \frac{n!}{23(n-3)!} \frac{(n-3)!}{n!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} = \\ = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

Якщо  $n \rightarrow \infty$ , то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1}$$

## Розділ 2

# Деякі класичні моделі і розподіли.

### 2.1 Біноміальний розподіл

Припустимо, що деякий ймовірнісний експеримент повторюється  $n$  разів, в кожному з яких може відбутись або дуюка подія  $A$  — ”успіх”, або подія  $\bar{A}$  — ”невдача”. Простір всіх можливих результатів можна описати так:

$\Omega = \{\omega : \omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_i \in \{0, 1\}\}$ , де  $\varepsilon_i = 0$ , якщо в  $i$ -тому експерименті сталася невдача,  $\varepsilon_i = 1$ , якщо в  $i$ -тому експерименті стався успіх.

Припишемо кожній елементарній події  $\omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  ймовірність

$$P(\omega) = p^{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n \varepsilon_i},$$

де  $p \in (0, 1)$  - деяке число.

Переконаймося, що означення коректне, тобто, що  $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$ , маємо

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) &= \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n} p^{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n \varepsilon_i} = \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \sum \varepsilon_i = k} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^n p^k (1-p)^{n-k} \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \sum \varepsilon_i = k} 1 = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= (p + (1-p))^n = 1. \end{aligned}$$

При  $n = 1$  отримаємо:

$$\Omega = \{0, 1\}$$

$$p(0) = 1 - p$$

$$p(1) = p$$

$p$  — це ймовірність ”успіху” в одному випробуванні.



Розглянемо події

$A_n(k) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \Omega : \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = k\} = \{\text{В } n \text{ випробуваннях сталося рівно } k \text{ успіхів}\}, k = \overline{0, n}.$

Тоді  $P(A_n(k)) = \sum_{\omega \in A_n(k)} p(\omega) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = \overline{0, n}.$

**Означення 2.1.** Набір ймовірностей  $\{P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = \overline{0, n}\}$  — цей **біноміальний розподіл** з параметрами  $n$  (кількість випробувань), і  $p$  (ймовірність успіху в одному випробуванні);  $Bin(n, p)$ .

**Приклад: 2.1.** (Випадкове блукання)

Деяка частинка виходить з нуля і через одиницю часу, робить або крок вгору, або вниз. За  $n$  кроків, де  $n$  фіксоване, частинка може переміститись що найбільше на  $n$  кроків вгору або вниз.

Beautiful image.

Простір елементарних подій:

$\Omega = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_i = \pm 1\}$ , де  $\varepsilon_i = -1$ , якщо на  $i$ -тому кроці частинка зробила крок вниз,  $\varepsilon_i = 1$ , якщо на  $i$ -тому кроці частинка зробила крок вгору.

Покладемо

$$P(\omega) = p^{\nu(\omega)} (1-p)^{n-\nu(\omega)},$$

де  $\nu(\omega)$  — це кількість одиниць в  $\omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i = \mu(\omega) - (n - \mu(\omega)) = 2\mu(\omega) - n \Rightarrow$$

$$\mu(\omega) = \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i + n}{2}$$

Оскільки  $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ , то простір  $\Omega$  разом з розподілом ймовірностей  $p(\omega)$  визначає деяку ймовірнісну модель руху частинки за  $n$  кроків.

Розглянемо події

$A_n(k) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \Omega : \mu(\omega) - (n - \mu(\omega)) = k\} = \{\text{за } n \text{ кроків частинка опиниться в точці з координатою } k\}.$

Beautiful image.

Червоний прямокутник — це область де ”живуть” шляхи з  $(0, 0)$  в  $(n, k)$

$$P(A_n(k)) = C_n^{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}}$$

Умова досяжності:  $n$  і  $k$  мають однакову парність.

## 2.2 Мультиполіноміальний розподіл

Проведемо  $n$  випробувань, в кожному з яких може спостерігатись один з  $r$  несумісних результатів. Опишемо  $\Omega$  :

$\Omega = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_i = \overline{1, r}\}$ , де  $\varepsilon_i = j$  в  $j$ -му випроуванні спостерігали результат номер  $j$ ,  $j = \overline{1, r}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Нехай:

$\nu_1(\omega)$  — це кількість одиничок в  $\omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

$\nu_2(\omega)$  — це кількість двійок в  $\omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

$\nu_r(\omega)$  — це кількість координат які дорівнюють  $r$  в  $\omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

Покладемо:

$$P(\omega) = p_1^{\nu_1(\omega)} p_2^{\nu_2(\omega)} \dots p_r^{\nu_r(\omega)}, \text{ де } p_i \geq 0, \sum_{i=1}^r p_i = 1.$$

Покажемо, що  $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$ . Маємо:

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) &= \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \Omega} p_1^{\nu_1(\omega)} p_2^{\nu_2(\omega)} \dots p_r^{\nu_r(\omega)} = \sum_{\substack{n_1 \geq 0, \dots, n_r \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_r = n}} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r} = \\ &= \sum_{n_1 + \dots + n_r = n} C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \dots C_{n-(n_1+\dots+n_{r-1})}^{n_r} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r} = (p_1 + \dots + p_r)^n = 1. \end{aligned}$$

Розглянемо події

$A_n(K_1, \dots, K_r) = \{\omega \in \Omega : \nu_1(\omega) = K_1, \dots, \nu_r(\omega) = K_r\} = \{ \text{в } n \text{ випробуваннях результат } N_1 \text{ відбувся } K_1 \text{ раз, результат } N_2 \text{ відбувся } K_2 \text{ разів, } \dots, \text{ результат } N_r \text{ відбувся } K_r \text{ разів} \}, k_1 + \dots + K_r = n$ .

Тоді

$$P(A_n(K_1, \dots, K_r)) = \frac{n!}{K_1! \dots K_r!} p_1^{K_1} \dots p_r^{K_r}.$$

**Означення 2.2.** Набір ймовірностей  $\{\frac{n!}{K_1! \dots K_r!} p_1^{K_1} \dots p_r^{K_r}, K_i \geq 0, K_1 + \dots + K_r = n\}$  — це **мультиполіноміальний (поліноміальний) розподіл** з параметрами  $n$  і  $p_1, \dots, p_r$ , де  $\sum_{i=1}^r p_i = 1$ .

**Зауваження.** І біноміальний і поліноміальний розподіли пов'язані з вибором без повторень.

## 2.3 Гіпергеометричний роподіл

Нехай в урні міститься  $N$  куль, занумерованих від 1 до  $N$ . З них  $M$  є білими,  $N - M$  чорними. Припустимо, що проводиться вибір без повернення  $n$  куль,  $n < N$ . Простір елементарних подій:

$$\Omega = \{\omega : \omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_i = \overline{1, N}, \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \dots \neq \varepsilon_n\}$$

$$|\Omega| = N(N-1)\dots(N-n+1) = A_N^n$$

Покладемо:  $\forall \omega \in \Omega : P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{A_N^n}$

Розглянемо події:

$A_n(k) = \{\text{Серед вийнятих куль рівно } k \text{ виявились білими}\}$

$$|A_n(k)| = \frac{n!}{k!(n-k)!} A_M^k A_{N-M}^{n-k}$$

і тоді

$$P(A_n(k)) = \frac{|A_n(k)|}{|\Omega|} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k! C_M^k (n-k)! C_{N-M}^{n-k}}{n! C_N^n} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

**Означення 2.3.** Набір ймовірностей  $\left\{ \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, k : \begin{array}{l} 0 \leq k \leq M \\ 0 \leq n-k \leq N-M \end{array} \right\}$  — це **гіпергеометричний розподіл** з параметрами  $N, M, n$ .

Можна показати, що при  $N \rightarrow \infty, M \rightarrow \infty$  так, що  $\frac{M}{N} \rightarrow p$ :

$$\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\substack{M \rightarrow \infty \\ \frac{M}{N} \rightarrow p}} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

## 2.4 Статистика Больцмана, Бозе-Ейнштейна, Фермі-Дірака

**Задача 2.1.** Є  $n$  частинок, кожна з яких може знаходитися з однаковою ймовірністю  $\frac{1}{N}$  в кожній з  $N$  комірок ( $N > n$ ). Потрібно знайти, наприклад, ймовірність того, що певна комірка виявиться порожньою, всі частинки потрапляють в різні комірки, тощо.

1. В статистиці Больцмана рівноімовірними є довільні розміщення, що відрізняються не лише кількістю, а й набором частинок в комірці.

$$\Omega_1 = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_i \in \{1, \dots, N\}\},$$

$\varepsilon_i$  — це номер комірки, яку "вибрала" собі  $i$ -та частинка.

$$|\Omega_1| = N^n, P(\omega) = \frac{1}{N^n} \quad \forall \omega \in \Omega_1$$

2. В статистиці Бозе-Ейнштейна вважаються тотожними випадки, коли частинки міняються місцями між комірками: важлива лише кількість частинок в комірці. Тоді

$$\Omega_2 = \{\omega : \omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = n\},$$

$\varepsilon_i$  — кількість частинок в  $i$ -тій урні.

$$|\Omega_2| = C_{N+n-1}^n, P(\omega) = \frac{1}{C_{N+n-1}^n}.$$

3. Згідно статистики Фермі-Дірака в кожній комірці може знаходитись не більше однієї частинки.

$$\Omega_3 = \{\omega : \omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \dots \neq \varepsilon_n, \varepsilon_i \in \{1, \dots, N\}\},$$

$$|\Omega_3| = N(N-1)\dots(N-n+1) = A_N^n,$$

$$\forall \omega \in \Omega_3 : P(\omega) = \frac{1}{A_N^n}.$$