

Algebra and geometry

31 серпня 2022 р.

Зміст

1	Векторна алгебра	3
1.1	Вектори на прямій, на площині, у просторі	3
1.2	Лінійні операції над векторами	4
1.3	Властивості лінійних операцій, аксіоми векторної алгебри	5
1.4	Базис на прямій, на площині, у просторі	5
1.5	Декартів прямокутний базис	7
1.6	Проекція вектора на вектор (або на вісь)	7
1.7	Множення векторів. Скалярний добуток двох векторів	8
1.8	Скалярний добуток в координатах	8
1.9	Нормування вектора	9
1.10	Векторний добуток двох векторів	10
1.11	Векторний добуток в координатах	11
1.12	Мішаний добуток трьох векторів	12
1.13	Мішаний добуток в координатах	13
2	Визначники і лінійна залежність	14
2.1	Визначники другого і третього порядків	14
2.2	Властивості визначників	15
2.3	Лінійна залежність векторів	17


Розділ 1

Векторна алгебра

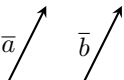
1.1 Вектори на прямій, на площині, у просторі

Означення 1.1. Вектор — це направлений відрізок прямої.

Вектор повністю задається довжиною та напрямком. Також вектор можна задати, вказавши його початок і кінець.

 Вектори позначаються: \overline{AB} , \bar{a} , а їх довжини — $|\overline{AB}|$, $|\bar{a}|$.

Означення 1.2. Два вектори рівні, якщо їх довжини і напрямки співпадають.

 $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ (напрямки співпадають) та $|\bar{a}| = |\bar{b}|$ (довжини співпадають).

Означення 1.3. Колінеарні вектори (паралельні вектори) ($\bar{a} \parallel \bar{b}$) — це вектори \bar{a} і \bar{b} , які лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Серед них будемо розрізняти вектори одного напрямку: $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$, та протилежного напрямку: $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$.

Означення 1.4. Нульовий вектор (нуль - вектор) — це вектор нульової довжини, тобто вектор, кінець і початок якого співпадають, $|\bar{0}| = 0$. Буде зручно вважати нульовий вектор вектором довільного напрямку, тобто нульовий вектор є колінеарним будь-якому вектору.

Означення 1.5. Вектор \bar{a}' — протилежний вектор до вектора \bar{a} , якщо $\bar{a}' \uparrow\downarrow \bar{a}$ і $|\bar{a}'| = |\bar{a}|$, тобто $\bar{a}' = -\bar{a}$.

Означення 1.6. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ — це **компланарні вектори**, якщо вони лежать в одній площині або паралельні одній площині.

1.2 Лінійні операції над векторами

Множення вектора на скаляр

Означення 1.7. **Добуток** вектора $\vec{a} \neq \vec{0}$ і числа $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha\vec{a})$ — це вектор $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, який задовольняє такі умови:

- 1) \vec{b} колінеарний вектору \vec{a}
- 2) $|\vec{b}| = |\alpha||\vec{a}|$
- 3) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ — однаково направлені, якщо $\alpha > 0$, і $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ — протилежно направлені, якщо $\alpha < 0$.

Додавання векторів

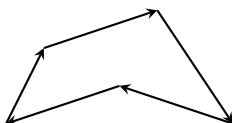
Означення 1.8. **Сума векторів** \vec{a} і \vec{b} , $(\vec{a} + \vec{b})$ — це вектор, який з'єднує початок вектора \vec{a} з кінцем вектора \vec{b} за умови, що вектор \vec{b} відкладено від кінця вектора \vec{a} .

Цей спосіб додавання векторів — це **правило трикутника**.

Два вектори можна додати і за іншим правилом, яке має назву — **правило паралелограма**: сумою двох векторів \vec{a} і \vec{b} , відкладених від спільного початку, є вектор, який збігається з діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах \vec{a} і \vec{b} як на сторонах. Початки векторів \vec{a} , \vec{b} та $\vec{a} + \vec{b}$ співпадають.



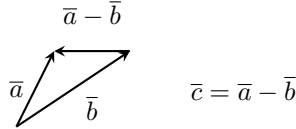
Використовуючи послідовно правило трикутника, можна побудувати суму скінченної кількості довільних векторів. Якщо кінець останнього вектора співпадає з початком першого, то сумою векторів є нульовий вектор: $\vec{0}$.



Віднімання векторів

Означення 1.9. Різниця векторів \vec{a} і \vec{b} , $(\vec{a} - \vec{b})$ — це вектор \vec{c} , який в сумі з вектором \vec{b} дає вектор \vec{a} , тобто $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.

Очевидно, що $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$.



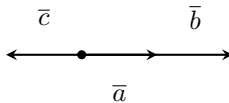
1.3 Властивості лінійних операцій, аксіоми векторної алгебри

1. $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ — асоціативність відносно множення на скаляр.
2. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ — комутативність додавання.
3. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ — асоціативність додавання.
4.
$$\left. \begin{aligned} (\alpha + \beta)\vec{a} &= \alpha\vec{a} + \beta\vec{a} \\ \vec{a}(\alpha + \beta) &= \vec{a}\alpha + \vec{a}\beta \end{aligned} \right\} \text{— дистрибутивність.}$$
5. $\exists! \vec{0} : \forall \vec{a} : \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ — існування єдиного нуля.
6. $\forall \vec{a} \exists! \vec{a}' : \vec{a}' + \vec{a} = \vec{0}$ — існування протилежного вектора.
7. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

1.4 Базис на прямій, на площині, у просторі

Розглянемо множину векторів, колінеарних вектору $\vec{a} \neq \vec{0}$. Позначимо її E^1 .

Нехай $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in E^1$.



Теорема 1.1. $\forall \vec{b} \in E^1 \exists$ дійсне число α таке, що $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, причому це представлення єдине.

► Доведемо єдиність даного представлення методом від супротивного.

Нехай $\bar{b} = \tilde{\alpha}\bar{a}$

Тоді $\bar{0} = \bar{b} - \bar{b} = \tilde{\alpha}\bar{a} - \alpha\bar{a} = (\tilde{\alpha} - \alpha)\bar{a} \Rightarrow \tilde{\alpha} - \alpha = 0 \Rightarrow \tilde{\alpha} = \alpha$

Вкажемо значення коефіцієнта α .

Якщо $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$, то $\alpha = \frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}$.

Дійсно: $|\alpha\bar{a}| = \left| \frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|} \right| |\bar{a}| = \frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|} |\bar{a}| = |\bar{b}|$, $\alpha\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$.

Якщо ж $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$, то $\alpha = -\frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}$ (доведення аналогічне).

◀

Нехай $\bar{a} \nparallel \bar{b}$ (тому $\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$). Розглянемо множину векторів, компланарних векторам \bar{a} та \bar{b} , позначимо її E^2 . Нехай $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in E^2$.

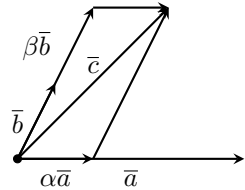
Теорема 1.2. $\forall \bar{c} \in E^2 \exists!$ дійсні α, β , такі, що $\bar{c} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$.

► Проведемо доведення графічно.

З кінця вектору \bar{c} проведемо дві прямі паралельно векторам \bar{a} і \bar{b} відповідно до перетину з цими векторами чи прямими, на яких вони лежать. Отримали паралелограм, дві сторони якого дорівнюють відповідно $\alpha\bar{a}$ і $\beta\bar{b}$ (за теоремою 1.1). Діагоналю цього паралелограма є вектор \bar{c} , тобто $\bar{c} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$. Єдиність коефіцієнтів α та β випливає з двох умов:

1) існує лише одна точка перетину непаралельних прямих,

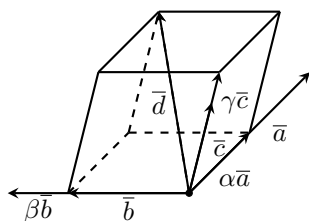
2) за теоремою 1.1 константи α і β визначаються однозначно.



◀

Нехай E^3 — множина всіх векторів у просторі, причому $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ — некопланарні ($\bar{a} \neq \bar{0}, \bar{b} \neq \bar{0}, \bar{c} \neq \bar{0}$).

Теорема 1.3. $\forall \bar{d} \in E^3, \exists! \alpha, \beta, \gamma : \bar{d} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}$.



Із кінця вектора \vec{d} проведемо три площини, паралельні парам векторів (\vec{b}, \vec{c}) , (\vec{a}, \vec{c}) , (\vec{a}, \vec{b}) . Ці площини перетнуть прямі, на яких лежать $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в єдиних точках. За теоремою 1.1 отримаємо нові вектори $\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}, \gamma\vec{c}$, а вектор \vec{d} — це діагональ паралелепіпеда, на них побудованого, тобто $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, що і треба було довести.

Зауваження. Базисом у множині E^1 може слугувати довільний ненульовий вектор, базисом у E^2 — впорядкована пара неколінеарних векторів, а в E^3 — впорядкована трійка некомпланарних векторів. Вектору \vec{b} було поставлено у відповідність число α ; вектору \vec{c} — числа α і β ; вектору \vec{d} — числа α, β, γ . Ці числа називаються — коефіцієнти розкладу векторів $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ за базисами $\vec{a}; \vec{a}, \vec{b}; \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ просторів E^1, E^2 і E^3 відповідно.

Означення 1.10. Коефіцієнти розкладу вектора \vec{a} за базисом $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots$ — це числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots \in \mathbb{R}$, такі, що $\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots$

1.5 Декартів прямокутний базис

Означення 1.11. Впорядкована трійка некомпланарних векторів $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ називається правою (права трійка векторів), якщо з кінця вектора \vec{c} поворот від \vec{a} до \vec{b} , менший за 180° , тобто відбувається проти годинникової стрілки.

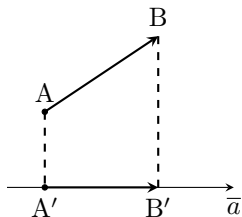
Означення 1.12. Трійка векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ утворює декартів правий прямокутний базис, якщо:

1. $\vec{i} \perp \vec{j}, \vec{j} \perp \vec{k}, \vec{k} \perp \vec{i}$
2. $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$
3. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — права трійка

1.6 Проекція вектора на вектор (або на вісь)

Нехай задано $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Означення 1.13. Проекція вектора \overline{AB} на вектор \vec{a} називається довжина відрізка $A'B'$ між основами перпендикулярів, опущених з точок А та В на вектор \vec{a} (або напрямку, на який він лежить):



$$\text{пр}_{\vec{a}} \overline{AB} = \begin{cases} |\overline{A'B'}|, & \text{якщо } \overline{A'B'} \uparrow \uparrow \vec{a} \\ -|\overline{A'B'}|, & \text{якщо } \overline{A'B'} \uparrow \downarrow \vec{a} \end{cases}$$

Властивості проекції:

1. $\text{пр}_{\vec{a}} \alpha \vec{b} = \alpha \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$
2. $\text{пр}_{\vec{a}} (\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_{\vec{a}} \vec{a} + \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$

1.7 Множення векторів. Скалярний добуток двох векторів

Означення 1.14. Скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} (позначається $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a}\vec{b}$ чи (\vec{a}, \vec{b})) — це число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними: $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$, де $\varphi = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$.

Алгебраїчні властивості скалярного добутку:

1. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ — комутативність.
2.
$$\left. \begin{aligned} (\alpha \vec{a}, \vec{b}) &= \alpha (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \alpha \vec{b}) \\ (\vec{a} + \vec{a}', \vec{b}) &= (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}', \vec{b}) \\ (\vec{a}, \vec{b} + \vec{b}') &= (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{b}') \end{aligned} \right\} \text{— лінійність.}$$

Геометричні властивості скалярного добутку:

1. $(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.
2. $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$.

1.8 Скалярний добуток в координатах

Нехай $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ — це фіксований базис в просторі E^3 , $\vec{x}, \vec{y} \in E^3$. Тоді:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 \\ \bar{y} &= y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + y_3\bar{e}_3\end{aligned}$$

Обчислимо скалярний добуток цих векторів:

$$\begin{aligned}(\bar{x}, \bar{y}) &= (x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3, \bar{y}) = (x_1\bar{e}_1, \bar{y}) + (x_2\bar{e}_2, \bar{y}) + (x_3\bar{e}_3, \bar{y}) = \\ &= x_1(\bar{e}_1, y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + y_3\bar{e}_3) + x_2(\bar{e}_2, y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + y_3\bar{e}_3) + x_3(\bar{e}_3, y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + y_3\bar{e}_3) = \\ &= x_1y_1(\bar{e}_1, \bar{e}_1) + x_1y_2(\bar{e}_1, \bar{e}_2) + x_1y_3(\bar{e}_1, \bar{e}_3) + x_2y_1(\bar{e}_2, \bar{e}_1) + x_2y_2(\bar{e}_2, \bar{e}_2) + x_2y_3(\bar{e}_2, \bar{e}_3) + \\ &+ x_3y_1(\bar{e}_3, \bar{e}_1) + x_3y_2(\bar{e}_3, \bar{e}_2) + x_3y_3(\bar{e}_3, \bar{e}_3) = x_1y_1(\bar{e}_1, \bar{e}_1) + (x_1y_2 + x_2y_1)(\bar{e}_1, \bar{e}_2) + \\ &+ (x_1y_3 + x_3y_1)(\bar{e}_1, \bar{e}_3) + x_2y_2(\bar{e}_2, \bar{e}_2) + (x_2y_3 + x_3y_2)(\bar{e}_2, \bar{e}_3) + x_3y_3(\bar{e}_3, \bar{e}_3).\end{aligned}$$

У частковому випадку, коли $\bar{e}_1 = \vec{i}, \bar{e}_2 = \vec{j}, \bar{e}_3 = \vec{k}$, маємо: $(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = (\bar{e}_2, \bar{e}_3) = (\bar{e}_3, \bar{e}_1), (\bar{e}_i, \bar{e}_j) = 1$, де $i = 1, 2, 3$.

$$(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Якщо $\bar{a} = (x, y, z)$, то $|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1.9 Нормування вектора

Означення 1.15. Нехай $\bar{a} \neq \vec{0}$. **Орт-вектор** вектора \bar{a} — це вектор \bar{a}_o , такий, що $\bar{a}_o \uparrow \bar{a}$ і $|\bar{a}_o| = 1$.

Означення 1.16. **Нормування вектора** \bar{a} — це процес отримання орт-вектора \bar{a}_o , $\bar{a}_o = \frac{1}{|\bar{a}|}\bar{a}$

Якщо $\bar{a} = (x, y, z)$, то

$$\bar{a}_o = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right).$$

Геометричний сенс координат орт-вектора \bar{a}_o у декартовій системі координат: $\bar{a}_o = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ де, $\alpha = (\bar{a}, \overline{OX}) = (\bar{a}_o, \overline{OX})$, $\beta = (\bar{a}, \overline{OY}) = (\bar{a}_o, \overline{OY})$, $\gamma = (\bar{a}, \overline{OZ}) = (\bar{a}_o, \overline{OZ})$.

Означення 1.17. Косинуси кутів, які утворює вектор (або його орт) з осями координат — це **напрямні косинуси**.

Знайдемо косинус кута α :

$$\cos \alpha = \frac{(\bar{a}, \vec{i})}{|\bar{a}||\vec{i}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Твердження 1.1. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Формула для довжини проекції вектора:

$$x = |\vec{a}| \cos \alpha = \text{пр}_i \vec{a}$$

1.10 Векторний добуток двох векторів

Означення 1.18. Векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} $[\vec{a}, \vec{b}]$ — це вектор \vec{c} , що задовольняє умови:

1. $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$
2. $|\vec{a}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi, \varphi = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$
3. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — права трійка

Зауваження. Оскільки $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$, то \vec{c} перпендикулярний площині векторів \vec{a} і \vec{b} .

Алгебраїчні властивості векторного добутку:

- 1) $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$
- 2) $[\alpha \vec{a}, \vec{b}] = \alpha [\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \alpha \vec{b}]$
- 3) $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$
- 4) $[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}]$

Доведення:

► 1) Нехай $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{c}, [\vec{b}, \vec{a}] = \vec{d}$. Тоді: $\vec{c} \perp \vec{a}$ і $\vec{c} \perp \vec{b}, \vec{d} \perp \vec{b}$ і $\vec{d} \perp \vec{a}$, тобто вектори \vec{c} і \vec{d} перпендикулярні до площини, в якій лежать вектори \vec{a} і \vec{b} , отже, $\vec{c} \parallel \vec{d}$.

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi = |\vec{d}|, \text{ де } \varphi = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}.$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — права трійка; $\vec{b}, \vec{a}, \vec{d}$ — також права трійка $\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ — ліва трійка, тому вектори \vec{c} та \vec{d} протилежно направлені.

Отже, вектори \vec{c} та \vec{d} колінеарні, мають однакову довжину та протилежно направлені. Тому $\vec{c} = -\vec{d}$.

2) Якщо $\alpha = 0$ або $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то рівності очевидні: $[\alpha \vec{a}, \vec{b}] = \alpha [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$. Нехай $\alpha < 0$, $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{c}, \varphi = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}, [\alpha \vec{a}, \vec{b}] = \vec{d}$. Тоді:

$$|\alpha \vec{c}| = |\alpha| |\vec{a}, \vec{b}| = |\alpha| |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi = -\alpha |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi.$$

$$|[\alpha \vec{a}, \vec{b}]| = |\alpha \vec{a}||\vec{b}| \sin \widehat{(\alpha \vec{a}, \vec{b})} = |\alpha| |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\pi - \varphi) = -\alpha |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi.$$

$\vec{c} \perp$ площині, в якій лежать \vec{a} і $\vec{b} \Rightarrow \vec{c} \perp$ площині, в якій лежать $\alpha \vec{a}$ і \vec{b} .

$\vec{d} \perp$ площині, в якій лежать $\alpha\vec{a}$ і \vec{b} , отже, $\vec{c} \parallel \vec{d}$.
 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — права трійка $\alpha\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — ліва трійка, $\vec{a}, \vec{b}, \alpha\vec{c}$ — ліва трійка.
 $\alpha\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ — права трійка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ — ліва трійка; отже, вектори $\alpha\vec{c}$ та \vec{d} однаково направлені.

Враховуючи однакову довжину векторів $\alpha\vec{c}$ та \vec{d} , маємо $\alpha\vec{c} = \vec{d}$ або $[\alpha\vec{a}, \vec{b}] = \alpha[\vec{a}, \vec{b}]$.

3), 4) — очевидно. ◀

Геометричні властивості векторного добутку:

1) $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

2) $||[\vec{a}, \vec{b}]|| = S_{\diamond\vec{a}\vec{b}}$, де $S_{\diamond\vec{a}\vec{b}}$ — площа паралелограма, побудованого на векторах \vec{a} та \vec{b} , як на сторонах

Доведення:

► 1) $||[\vec{a}, \vec{b}]|| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$ або $\vec{b} = \vec{0}$, або $\sin\varphi = 0 \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$.
Якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\sin\varphi = 0$, і $||[\vec{a}, \vec{b}]|| = 0 \Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.

2) $||[\vec{a}, \vec{b}]|| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi = |\vec{a}|h = S_{\diamond\vec{a}\vec{b}}$. ◀

Твердження 1.2. $[\vec{a}, \vec{a}] = \vec{0}$.

1.11 Векторний добуток в координатах

Нехай в просторі E^3 зафіксовано базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, $\vec{x}, \vec{y} \in E^3$, тоді

$$\vec{x} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

$$\vec{y} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

Знайдемо координати вектору $[\vec{x}, \vec{y}]$.

Зауважимо, що $[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}$, $[\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}$, $[\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}$. Тоді:

$$\begin{aligned} [\vec{i}, \vec{j}] &= [x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}] = x_1x_2[\vec{i}, \vec{i}] + x_1y_2[\vec{i}, \vec{j}] + x_1z_2[\vec{i}, \vec{k}] + y_1x_2[\vec{j}, \vec{i}] + \\ &+ y_1y_2[\vec{j}, \vec{j}] + y_1z_2[\vec{j}, \vec{k}] + z_1x_2[\vec{k}, \vec{i}] + z_1y_2[\vec{k}, \vec{j}] + z_1z_2[\vec{k}, \vec{k}] = (x_1y_2 - x_2y_1)[\vec{i}, \vec{j}] + (x_1z_2 - \\ &- x_2z_1)[\vec{i}, \vec{k}] + (y_1z_2 - y_2z_1)[\vec{j}, \vec{k}] = (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k} + (x_1z_2 - x_2z_1)\vec{j} + (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} = \\ &= (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} + (x_1z_2 - x_2z_1)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}. \end{aligned}$$

Задача 1.1. Знайти площу трикутника з вершинами $A(3, 0, -1)$, $B(-2, 4, 1)$, $C(2, 1, -3)$.

Розв'язання. $S = \frac{1}{2} |[\overline{AB}, \overline{AC}]|$. Оскільки $\overline{AB} = (-5, 4, 2)$, $\overline{AC} = (-1, 1, -2)$, то $[\overline{AB}, \overline{AC}] = -10\vec{i} - 12\vec{j} - \vec{k}$. Тоді $|[\overline{AB}, \overline{AC}]| = \sqrt{(-10)^2 + (-12)^2 + (-1)^2} = \sqrt{100 + 144 + 1} = \sqrt{245}$, і $S = \frac{1}{2} \sqrt{245}$

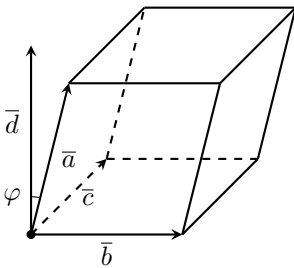
1.12 Мішаний добуток трьох векторів

Означення 1.19. Мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — це скалярний добуток \vec{a} з векторним добутком векторів \vec{b} і \vec{c} , тобто $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$.

Теорема 1.4. Мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда $V_{\text{пар}}$, побудованого на цих векторах, якщо вони складають праву трійку і дорівнює $-V_{\text{пар}}$, якщо $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — ліва трійка:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{cases} V_{\text{пар}}, & \text{якщо } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — права трійка} \\ -V_{\text{пар}}, & \text{якщо } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — ліва трійка} \end{cases}$$

► Розглянемо випадок, коли $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — права трійка.



Нехай $[\vec{b}, \vec{c}] = \vec{d}$. Тоді $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ — права трійка. Позначимо $\varphi = \widehat{(\vec{a}, \vec{d})}$.

Тоді $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = (\vec{a}, \vec{d}) = |\vec{a}||\vec{d}| \cos \varphi = S_{\diamond \vec{c}\vec{b}} |\vec{a}| \cos \varphi = S_{\diamond \vec{c}\vec{b}} h = V_{\text{пар}}$, оскільки висота паралелепіпеда $h = |\vec{a}| \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = |\vec{a}| \cos \varphi$. У випадку, коли $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — ліва трійка, доведення аналогічне.

Алгебраїчні властивості:

- $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$
- $(\alpha \vec{a})\vec{b}\vec{c} = \alpha \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(\alpha \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}(\alpha \vec{c})$
- $(\vec{a} + \vec{a}')\vec{b}\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}'\vec{b}\vec{c}$
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{b}')\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}'\vec{c}$
- $\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \vec{c}') = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{c}'$

Доведення:

► 1) випливає з того факту, що при циклічній перестановці векторів їх орієнтація не змінюється. А якщо в трійці векторів деякі два з них поміняти місцями, то її орієнтація змінюється.

2) випливає з лінійності скалярного і векторного добутків відносно множення на скаляр.

$$3) (\bar{a} + \bar{a}')\bar{b}\bar{c} = (\bar{a} + \bar{a}', [\bar{b}, \bar{c}]) = (\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]) + (\bar{a}', [\bar{b}, \bar{c}]) = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}'\bar{b}\bar{c}$$

$$\bar{a}(\bar{b} + \bar{b}')\bar{c} = (\bar{b} + \bar{b}')\bar{c}\bar{a} = \bar{b}\bar{c}\bar{a} + \bar{b}'\bar{c}\bar{a} = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}'\bar{c}.$$

$$\text{Але } \bar{a}(\bar{b} + \bar{b}')\bar{a} = (\bar{a}, [\bar{b} + \bar{b}', \bar{c}]) = (\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}] + [\bar{b}', \bar{c}]).$$

Ця рівність справедлива $\forall \bar{a}$. Тому $[\bar{b} + \bar{b}', \bar{c}] = [\bar{b}, \bar{c}] + [\bar{b}', \bar{c}]$, що доводить властивість 3 векторного добутку.

◀

Твердження 1.3. $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]) = ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c})$.

1.13 Мішаний добуток в координатах

Нехай в просторі E^3 зафіксовано базис $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ і задано три вектори:

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3), \bar{b} = (b_1, b_2, b_3), \bar{c} = (c_1, c_2, c_3).$$

Тоді $[\bar{b}, \bar{c}] = (b_2c_3 - b_3c_2)\bar{i} - (b_1c_3 - b_3c_1)\bar{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\bar{k}$ та $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$.

Задача 1.2. Чи можуть вектори $\bar{e}_1 = (1, -1, 0)$, $\bar{e}_2 = (2, 0, -2)$, $\bar{e}_3 = (3, 1, 6)$ слугувати базисом в просторі E^3 ?

Розв'язання. Якщо $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ — базис, то вони некопланарні і об'єм паралелепіпеда, на них побудованого, не дорівнює нулю. Тобто, $\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3 \neq 0$. Знайдемо мішаний добуток $\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$: $\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3 = 0 + 0 + 6 + 0 + 2 + 12 = 20 \neq 0$. Це означає, що дані вектори можуть слугувати базисом в E^3 .

Розділ 2

Визначники і лінійна залежність

2.1 Визначники другого і третього порядків

Означення 2.1. Матриця A , розміром $m \times n$ — це прямокутна таблицю чисел з m рядків та n стовпчиків:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Позначають матриці і в такий спосіб: $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m, j=1,\dots,n}$, де a_{ij} — це елемент матриці, що стоїть в i -му рядку та j -му стовпчику.

Нехай A — квадратна матриця другого порядку (тобто 2×2).

Означення 2.2. Визначник матриці (детермінант матриці) A другого порядку — це число, яке знаходиться за формулою:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Означення 2.3. Визначник матриці (детермінант матриці) A третього порядку — це число, яке знаходиться за формулою (правило "зірочки"):

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 + x_3 y_1 z_2 + x_2 y_3 z_1 - x_3 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_3 - x_1 y_3 z_2$$

Ця формула нам вже відома, адже саме так ми шукали мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, які в базисі $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ мають координати $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2), \vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$

2.2 Властивості визначників

Усі властивості будемо формулювати і доводити для визначників 3-го порядку. Але, як ми побачимо пізніше, усі наведені властивості будуть виконуватися і для визначників довільного порядку.

Нехай A квадратна матриця третього порядку, тоді $\det A = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$, де $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2), \vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$.

Означення 2.4. Транспонована матриця — це матриця A^T , отримана шляхом транспонування (транспоновки) елементів матриці A , тобто стовпчики і рядки, міняються місцями: $A^T = (a_{ij}^T)$, де $a_{ij}^T = a_{ji}$.

$$\text{Нехай } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Означення 2.5. Мінор M_{ij} , елемента a_{ij} — це визначник матриці, яка отримана з матриці A викреслюванням i -го рядка та j -го стовпчика.

$$\text{Наприклад: } M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}.$$

Означення 2.6. Алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} — це добуток $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Властивості визначників:

1) При транспонуванні матриці значення її визначника не зміниться:

$$\det A = \det A^T$$

► Доведення випливає безпосередньо з правила “зірочки”

$$\det A^T = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 + x_3 y_1 z_2 + x_2 y_3 z_1 - x_3 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_3 - x_1 y_3 z_2 =$$

$\det A$

Ця властивість урівнює в “правах” стовпчики і рядки. Тому далі всі властивості будемо формулювати для рядків.



2) Знак визначника змінюється, якщо будь-які два рядки поміняти місцями:

$$D(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -D(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}) = -D(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b}) = -D(\bar{c}, \bar{b}, \bar{a})$$

3) Спільний множник можна винести з довільного рядка за визначник:

$$D(\alpha \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = D(\bar{a}, \alpha \bar{b}, \bar{c}) = D(\bar{a}, \bar{b}, \alpha \bar{c}) = \alpha D(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$$

4) $D(\bar{a} + \bar{a}', \bar{b}, \bar{c}) = D(\alpha \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) + D(\alpha \bar{a}', \bar{b}, \bar{c})$

5) Визначник, рядки якого пропорційні, дорівнює нулю:

$$D(\bar{a}, \alpha \bar{a}, \bar{c}) = 0$$

6) Визначник, який має два однакових рядки, дорівнює нулю:

$$D(\bar{a}, \bar{a}, \bar{c}) = 0$$

7) Визначник матриці з нульовим рядком дорівнює нулю:

$$D(\bar{a}, \bar{0}, \bar{c}) = 0$$

8) Визначник не змінюється, якщо до якогось його рядка додати лінійну комбінацію інших рядків:

$$D(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} + \alpha \bar{a} + \beta \bar{b}) = D(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$$

► $D(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} + \alpha \bar{a} + \beta \bar{b}) = D(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) + D(\bar{a}, \bar{b}, \alpha \bar{a}) + D(\bar{a}, \bar{b}, \beta \bar{b}) = D(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$



9) Визначник матриці A дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка на їх алгебраїчні доповнення.

Наприклад: $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$.

Будемо казати, що в цьому прикладі ми розклали визначник за першим рядком.

►
$$\sum_{i=1}^3 a_{1i}A_{1i} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{22}a_{31} = \det A.$$



Задача 2.1. З'ясувати, чи можуть вектори $\bar{a} = (2, -1, 2)$, $\bar{b} = (1, 2, -3)$, $\bar{c} = (3, -4, 7)$ утворювати базис у просторі E^3 ?

Розв'язання. Вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ будуть утворювати базис, якщо вони некопланарні. Тобто об'єм паралелепіпеда, на них побудованого, не повинен дорівнювати нулю. Знайдемо мішаний добуток даних векторів:

$$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = d(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ -5 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Для обчислення цього визначника ми спочатку 2-й стовпчик помножили на 2 і додали його до 1-го та 3-го стовпчиків, а потім скористалися властивістю 9. Таким чином, об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах \bar{a}, \bar{b} і \bar{c} дорівнює нулю, тобто ці вектори лежать в одній площині і слугувати базисом не можуть.

2.3 Лінійна залежність векторів

Розглянемо систему векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$.

Означення 2.7. **Лінійна комбінація векторів** — це вираз $\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_1 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n$, де $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Означення 2.8. Лінійна комбінація векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ — це **тривіальна лінійна комбінація**, якщо всі $\alpha_i = 0$, і це **нетривіальна лінійна комбінація**, в протилежному випадку.

Означення 2.9. **Лінійно залежні вектори** $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n \in$ такими, якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ що виконується рівність $\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n = \bar{0}$, причому $|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n| \neq 0$.

Означення 2.10. **Лінійно незалежні вектори** — це вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$, такі, що їх лінійна комбінація дорівнює нулю лише за умови, коли всі $\alpha_i = 0$.

Інакше кажучи, вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n \in$ лінійно незалежними, якщо ніяка їх нетривіальна лінійна комбінація не дорівнює нульовому вектору.

Властивості:

Твердження 2.1. Вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ — лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли хоча б один з них лінійно виражається через інші.

► 1) Нехай $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ — це лінійно залежні вектори. Тоді $\alpha_1 \bar{a}_1 + \dots + \alpha_i \bar{a}_i + \dots + \alpha_n \bar{a}_n = \bar{0}$ та $\alpha_i \neq 0$ для деякого i . Звідси випливає, що $\bar{a}_i = -\frac{1}{\alpha_i}(\alpha_1 \bar{a}_1 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n)$

$\dots + \alpha_{i-1}\bar{a}_{i-1} + \alpha_{i+1}\bar{a}_{i+1} + \dots + \alpha_n\bar{a}_n$), тобто вектор \bar{a}_i лінійно виражається через інші вектори системи.

2) Нехай $\bar{a}_i = \beta_1\bar{a}_1 + \dots + \beta_i - 1\bar{a}_{i-1} + \beta_i + 1\bar{a}_{i+1} + \dots + \beta_n\bar{a}_n$ для деякого i . Тоді $\beta_1\bar{a}_1 + \dots + \beta_{i-1}\bar{a}_{i-1} + (-1)\bar{a}_i + \beta_{i+1}\bar{a}_{i+1} + \dots + \beta_n\bar{a}_n = \bar{0}$, тобто отримано нульову лінійну комбінацію, в якій коефіцієнт при векторі i а є ненульовим.



Твердження 2.2. Якщо один з векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ є нульовим, то система цих векторів є лінійно залежною.

► Припустимо, що $\bar{a}_1 = \bar{0}$. Тоді очевидно, що $1\bar{a}_1 + 0\bar{a}_2 + \dots + 0\bar{a}_n = \bar{0}$, тобто за означенням дана система векторів є лінійно залежною ($\alpha_1 = 1 \neq 0$).



Твердження 2.3. Якщо серед векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ є два однакових, то система векторів є лінійно залежною.

► Доведення є очевидним.



Твердження 2.4. Якщо серед n векторів існує k лінійно залежних векторів, то і всі n векторів є лінійно залежними.

► Розглянемо лінійну комбінацію даних n векторів $\alpha_1\bar{a}_1 + \dots + \alpha_k\bar{a}_k + 0\bar{a}_{k+1} + \dots + 0\bar{a}_n = \bar{0}$, при умові, що $\alpha_1\bar{a}_1 + \dots + \alpha_k\bar{a}_k = \bar{0}$ і константи $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ не всі рівні нулю. Ця комбінація є нетривіальною, що і доводить потрібний факт.



Твердження 2.5. Якщо вектор \bar{a} лінійно виражається через лінійно незалежні вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$, то таке представлення єдине.

► (від супротивного). Припустимо, що вектор \bar{a} лінійно виражається через дані вектори не єдиним чином, тобто $\bar{a} = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \dots + \alpha_n\bar{a}_n$ і $\bar{a} = \beta_1\bar{a}_1 + \beta_2\bar{a}_2 + \dots + \beta_n\bar{a}_n$. Віднявши другу рівність від першої, маємо: $\bar{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\bar{a}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\bar{a}_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)\bar{a}_n$. Оскільки $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ є лінійно незалежними, то $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$, що суперечить припущенню про неєдиність представлення вектора \bar{a} .



Твердження 2.6. Довільна підсистема лінійно незалежних векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ є лінійно незалежною.

► Застосуємо метод від супротивного. Нехай існує підсистема $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n, k < n$, лінійно залежних векторів. Це означає, що $\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_k \bar{a}_k = \bar{0}$, причому $|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_k| \neq 0$. Додамо до обох частин рівності нуль-вектор: $0\bar{a}_{k+1} + \dots + 0\bar{a}_n$. В результаті отримаємо: $\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_k \bar{a}_k + 0\bar{a}_{k+1} + \dots + 0\bar{a}_n = \bar{0}$ і $|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_k| \neq 0$. Це означає лінійну залежність векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$, що протирічить припущенню. Отже, підсистема $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$, є лінійно незалежною. ◀

Твердження 2.7. Якщо після доповнення системи $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ лінійно незалежних векторів вектором \bar{a} , отримали лінійно залежну систему, то вектор \bar{a} лінійно виражається через вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$.

► Оскільки вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n, \bar{a}$ є лінійно залежними, то існують такі константи $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$, не всі рівні нулю, що

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n + \alpha_{n+1} \bar{a} = \bar{0}. (*)$$

При цьому саме $\alpha_{n+1} \neq 0$. Доведемо цей факт методом від супротивного. Якщо $\alpha_{n+1} = 0$, то $\alpha_{n+1} \bar{a} = \bar{0}$ і $\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n = \bar{0}$, причому серед чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ існують ненульові. Але в цьому випадку вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ є лінійно залежними, що суперечить умові твердження. Отже, $\alpha_{n+1} \neq 0$, тому з рівності (*) випливає, що $\bar{a} = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}}\right) \bar{a}_1 + \dots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right) \bar{a}_n$. ◀

Геометричний сенс лінійної залежності

Твердження 2.8. Два вектори \bar{a} і \bar{b} є лінійно залежними тоді і тільки тоді, коли $\bar{a} \parallel \bar{b}$.

Твердження 2.9. Три вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ є лінійно залежними тоді і тільки тоді, коли $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ є компланарними.

Твердження 2.10. Довільні чотири вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \in E^3$ є завжди лінійно залежними.