סיכום S-R

תיאור פיזיקלי:

אנו מעוניינים לנתח את ההתנהגות הקולקטיבית של מערכת חלקיקים שמתוארים כמרחב מכפלה טנזורית של מערכות 2 רמות, על מנת לנבא את קצב הפליטה הספונטנית.

ההנחה שלנו היא כי כל האטומים במערכת מדברים עם מוד משותף של שדה אלקטרו מגנטי וכי מימדי המערכת קטנים בהרבה ממימדי השדה וניתן לראות אותו כקבוע (בהמשך נעיר מה צריך לתקן אם ההנחה השניה לא מתקיימת)

תיאור מתמטי:

נרצה לתאר את המערכת כמורכבת ממכפלה טנזורית של מרחבי החלקיקים והשדה.

$$\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_{ph}$$

כיוון שהחלקיקים מורכבים למעשה ממערכת 2 רמות נוכל לתאר את $\mathcal{H}_a$ בתור מכפלה טנזורית של כל תתי המערכות ומהם להרכיב את המצבים שלהמרחב.

$$\mathcal{H}_a = \prod_{i=1}^{N} \otimes \mathcal{H}_{a_i}$$

כאשר $\mathcal{H}_{a_\mathrm{i}} = \{ |\boldsymbol{g}\rangle_{\boldsymbol{i}}, \ |\boldsymbol{e}\rangle_{\boldsymbol{i}} \}$ ולכן מצב עצמי כללי ניתן לתיאור כסופר פוזיציה של מצבים מהצורה $|\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{g}, .., \boldsymbol{e}\rangle$

ניגש לתאר את ההמילטוניאן של המערכת.

עבור החלקיקים נשתמש בהמילטוניאן למערכת 2 רמות עם פער אנרגיה E_a

$$H_a = \sum_{i=1}^{N} \frac{E_a}{2} (\, |e\rangle_i \, \langle e|_i - |g\rangle_i \langle g|_i) = \frac{E_a}{2} \sum_{i=1}^{N} \sigma_{z,i} \triangleq \frac{E_a}{2} \sigma_z$$

עבור השדה נניח כי בבעיה שלנו רק המוד המתאים לפער האנרגיה של המערכת רלוונטי ולכן

$$H_{ph} = E_a \cdot \widehat{N}$$

עבור איבר האינטראקציה באופן אינטואיטיבי נרצה העברת אנרגיה מהשדה לחלקיקים ולהיפך.

אופרטור האינטראקציה עבור המוד הספציפי שלנו (בהזנחת אופרטורים שלא משמרים אנרגיה) יכול להכתב כ

$$H_{int} = \sum_{i=1}^{N} g\left(S_i^+ \otimes \hat{a} + S_i^- \otimes \hat{a}^\dagger\right) = g\left(S^+ \otimes \hat{a} + S^- \otimes \hat{a}^\dagger\right)$$

סה"כ ההמילטוניאן

$$H_{tot} = H_a + H_{ph} + H_{int}$$

מכיוון שמדובר במערכת של ספינים נח לעבור לכתיבה בבסיס המחובר ולתאר את המצבים של המערכת על פי המספרים הקוונטיים *s, m*. מבחינת מערכת 2 רמות *s* מתאר את גודל הספין ו *m* מתאר את ההיטל על ציר *z* של הספין.

מנקודת מבט של רמות אנרגטיות ניתן לראות כי האופרטורים שבהמילטוניאן אינם מעבירים בין מצבי *s* שונים (כל האופרטורים בהמילטוניאן מתחלפים עם האופרטור S^2) כלומר "קיבולת האנרגיה" של המערכת נשמרת תחת המערכת הנל. מה שיכול להשתנות הוא העירור של המערכת ביחס ל *s* על ידי אופרטור האינטראקציה שיעביר אנרגיה מהשדה אל החלקיקים האטומיים.

באופן אינטואיטיבי, הע"ע *s* מתאר את סולם האנרגיה שניתן לנוע בו במסגרת דינמיקה המוכתבת מאינטראקציה עם המוד הספציפי. באופן נסיוני נוכל לעורר את המערכת בפולס π ולמדוד את סך האנרגיה שנבלע על ידי הדגימה כאשר *s* יינתן על ידי $E_{absorbed} = (2(2s)+1)E_a$

נעבור עם כן לתאר את המצבים עם אלגברת ספין.

$$|\psi\rangle_{tot} = |\psi\rangle_a \otimes |\psi\rangle_{ph} = |s,m\rangle_a \otimes |\psi\rangle_{ph}$$

נרצה למצוא את קצב המעבר

$$|s,m\rangle_a \otimes |\psi_i\rangle_{ph} \rightarrow |s,m-1\rangle_a \otimes |\psi_f\rangle_{ph}$$

מכלל הזהב של פרמי נקבל:

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|\, H_{tot}\, |i\rangle|^2 \rho(E=\hbar\omega_a) = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|\, H_{tot}\, |i\rangle|^2 \delta(E=\hbar\omega_a)$$

נחשב:

$$\langle f|\, H_{tot}\, |i\rangle = \langle s,m-1|_a \otimes \langle\psi_f|_{ph} H_{tot}\, |s,m\rangle_a \otimes |\psi_i\rangle_{ph}$$

$$= \langle s,m-1|_a S^- \, |s,m\rangle_a g \langle\psi_f|_{ph} \hat{a}^\dagger |\psi_i\rangle_{ph}$$

$$= \sqrt{(s+m)(s-m+1)}\hbar g_{eff}$$

ומכאן נקבל

$$\Gamma(s,m) = \Gamma_0(s+m)(s-m+1)$$

כאשר Γ_0 הוא קצב הפליטה עבור אטום בודד ואכן $\Gamma\left(s=\frac{1}{2}, m=+\frac{1}{2}\right) = \Gamma_0$

אם לא היינו לוקחים בחשבון את הניוון של המצבים ומתארים את הפליטה באופן קלאסי הרי שעבור *m* חלקיקים מעוררים הם יפלטו כל אחד באופן ספונטני פוטון בקצב Γ_0 כך שקצב הפליטה אמור לגדול ביחס ישר למספר החלקיקים הפולטים.

מכאן ניתן להסיק באופן עקרוני את משוואות הקצב להיות במצב עם *m* אטומים מעוררים:

$$P(\dot{m} = k) = -\Gamma(s,k)P(m = k) + \Gamma(s,k+1)P(m = k+1)$$

עד כה אם כן מצאנו את קצב המעבר ממצב התחלתי כלשהו למצב הבא שהמערכת מצומדת אליה.

זה לא נותן את התמונה המלאה שכן לאחר שהמערכת נמצאת בסופרפוזיציה של מצבים קוונטיים הרי שכבר נקבל צימוד ליותר מצבים בגלל הרכיבים הנמוכים יותר.

נפתח את משוואות הקצב מההמילטוניאן ההתחלתי.

נתאר את המצב הקוונטי על ידי המצב הטהור הכללי:

$$|\psi\rangle(t) = \sum_n \sum_{m=-s}^{s} c_{mn}(t)|m,s,n\rangle$$

כאשר *n* מייצג את מספר הפוטונים במהוד ו *m* את המצב הקוונטי.

מכיוון שסך האנרגיה של הפוטונים והאטומים נשמר לאורך התהליך הרי ש $m + n = const$

נניח מצב התחלה ללא פוטונים במהוד (ללא הגבלת הכלליות התוצאה לגבי המצב הקוונטי *m* תקפה גם כאשר בתחילת התהליך ישנם פוטונים)

$$c_{nm}(0) = \delta_{m\,m_0}\delta_{nn_0} = \delta_{m\,m_0}\delta_{n0}$$

כיוון שאנרגיית המערכת של האטומים פלוס הפוטונים נשמרת אין צימוד בין מצבים בעלי $n + m \neq n_0 + m_0$

ולכן נוכל לקבלתלות דטרמיניסטית בין *n* ו*m* :

$$n = m_0 - m$$

ונשאר עם המצב ההתחלתי

$$|\psi\rangle(t) = \sum_{m=-s}^{s} c_{m(m_0-m)}(t)|m,s,m_0 - m\rangle \triangleq \sum_{m=-s}^{s} c_m(t)|m,s\rangle$$

כאשר עברנו לתאר את המצב הקוונטי בעזרת *m,s* בלבד.

נציב במשוואת שרדינגר על מנת למצוא את ההתפתחות בזמן של המקדמים:

$$i\hbar|\dot{\psi}\rangle = H_{tot}|\psi\rangle$$

$$i\hbar \sum_{m=-s}^{s} \dot{c_m}(t)|m,s\rangle = H_{tot} \sum_{m=-s}^{s} c_m(t)|m,s\rangle$$

נכפול במצב $\langle m = k, s|$

$$i\hbar\, \dot{c_k}(t) = \sum_{m=-s}^{s} c_m(t)\langle k,s|\, H_{tot}|m,s\rangle$$

מכיוון שההמילטוניאן מצמד בין מצבי m שונים על ידי אופרטורי העלאה והורדה נקבל כי לא קיים איבר צימוד בין מצבי m המקיימים $|m_1 - m_2| \geq 2$

$$\langle k \neq \{m-1, m, m+1\}, s|\, H_{tot}|m, s\rangle = 0$$

סה"כ נשאר עם המשוואה:

$$i\hbar\, \dot{c_k}(t) = c_{k-1}(t)\langle k, s|\, H_{tot}|k-1, s\rangle + c_k(t)\langle k, s|\, H_{tot}|k, s\rangle + c_{k+1}(t)\langle k, s|\, H_{tot}|k+1, s\rangle$$

נציב את התוצאה שקיבלנו מקודם:

$$\begin{aligned} i\hbar\, \dot{c_k}(t) = \quad & c_{k-1}(t)\langle k, s|\, H_{tot}|k-1, s\rangle \\ & + c_k(t)\langle k, s|\, H_{tot}|k, s\rangle \\ & + c_{k+1}(t)\langle k, s|\, H_{tot}|k+1, s\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{c_k}(t) = \quad & + c_{k-1}(t)\sqrt{(s+k)(s-k+1)}g_{eff} \\ & + c_k(t)\left(\frac{\hbar k\omega_a}{ih} + n\omega_{ph}\right) \\ & - c_{k+1}(t)\sqrt{(s-k)(s+k+1)}g_{eff} \end{aligned}$$

ומכיוון ש $m + n = m_0$ והנחנו $\omega_a = \omega_{ph}$

$$\begin{aligned} \dot{c_k}(t) = \quad & + c_{k-1}(t)\sqrt{(s+k)(s-k+1)}g_{eff} \\ & + c_k(t)m_0\omega_a \\ & - c_{k+1}(t)\sqrt{(s-k)(s+k+1)}g_{eff} \end{aligned}$$

כאשר כפי שסימנו בחישוב הראשוני $g_{eff} = g\langle n-1|_{ph}\hat{a}^{\dagger}|n\rangle_{ph}$

באופן מקורב נוכל לכתוב (נניח כי ניתן לסובב את המערכת כך שאיבר הצימוד יהיה ממשי)

לקחנו את אנרגיית הצימוד להיות שלילית $g_{eff}(s,k) \triangleq \sqrt{(s+k)(s-k+1)}g_{eff}$

$$\begin{aligned} \dot{c_k}(t) \;\cong \quad & - c_{k-1}(t)\cdot g_{eff}(s,k) \\ & -ik\omega_a \cdot\, c_k(t) \\ & + c_{k+1}(t)\cdot g_{eff}(s,k+1) \end{aligned}$$

נעבור למערכת המסתובבת של המצבים $(\alpha_k(t) \triangleq c_k(t)e^{im_0\omega_a t})$

ונקבל משוואה פשוטה יותר:

$$\dot{\alpha_k}(t) \cong -\alpha_{k-1}(t)g_{eff}(s,k) + \alpha_{k+1}(t)g_{eff}(s,k+1)$$

נציב ביטוי אינטגרלי עבור $\alpha_{k-1}(t)$ בהנחה והמצבים הנמוכים לא מאוכלסים בתחילת התהליך שכן ניתן להניח שהאנרגיה זורמת בכיוון מועדף ונקבל

$$\alpha_{k-1}(t) = \int_0^t dt' \quad -\alpha_{k-2}(t')\cdot g_{eff}(s,k-1) + \alpha_k(t')\cdot g_{eff}(s,k)$$

נציב

$$\dot{\alpha_k}(t) \cong -\left(\int_0^t dt' -\alpha_{k-2}(t')\cdot g_{eff}(s,k-1) + \alpha_k(t')g_{eff}(s,k)\right)g_{eff}(s,k) + \alpha_{k+1}(t)g_{eff}(s,k+1)$$

$$\dot{\alpha_k}(t) \cong -\left(\int_0^t dt' -\alpha_{k-2}(t')g_{eff}(s,k-1) + \alpha_k(t')g_{eff}(s,k)g_{eff}(s,k)\right) + \alpha_{k+1}(t)g_{eff}(s,k+1)$$

נזניח את התרומה של המקדם *k-2*

$$\dot{\alpha_k}(t) \cong -\left(\int_0^t dt' \cancel{-\alpha_{k-2}(t')g_{eff}(s,k-1)g_{eff}(s,k)e^{-i\omega_a t}e^{-i\omega_a t'}} + \alpha_k(t')g_{eff}(s,k)g_{eff}(s,k)\right) + \alpha_{k+1}(t)g_{eff}(s,k+1)$$

$$\dot{\alpha_k}(t) \cong -\int_0^t dt' \, \alpha_k(t')g_{eff}(s,k)g_{eff}(s,k) + \alpha_{k+1}(t)g_{eff}(s,k+1)$$

קירוב מרקובי - $a(t)$ משתנה לאט ביחס לנגזרת שלו:

$$\dot{\alpha_k}(t) \cong -\alpha_k(t)\int_0^t g_{eff}^2(s,k)dt' + \alpha_{k+1}(t)g_{eff}(s,k+1)e^{+i\omega_a t}$$

$$\dot{\alpha_k}(t) \cong -\frac{\alpha_k(t) g_{eff}^2(s,k) e^{-i\omega_a t}}{2} \int_{-t}^{t} dt'$$

$$+ \alpha_{k+1}(t) g_{eff}(s,k+1)$$

נקח $t \to \infty$

(עבור זמנים סופיים נקבל תיקון בדמות לורנציאן כך שלא איבדנו יותר מדי בהשאפה לאינסוף ולמעשה הטעות הזאת אמורה להכנס לתוך צפיפות המצבים שבמודל הנוכחי משוכלל כחלק מהפרמטר Γ_0)

$$\dot{\alpha_k}(t) \cong -\alpha_k(t) g_{eff}^2(s,k) \pi\delta(0)$$

$$+ \alpha_{k+1}(t) g_{eff}(s,k+1)$$

מכאן ניתן לנסח קשר מקורב נוסף

$$\alpha_k(t) \cong \int_0^t dt' - \alpha_k(t) g_{eff}^2(s,k)\pi\delta(0) + + \alpha_{k+1}(t) g_{eff}(s,k+1)$$

$$\cong -\alpha_k(t) g_{eff}^2(s,k)\left(\pi\delta(0)\right)^2 + \alpha_{k+1}(t) g_{eff}(s,k+1)\pi\delta(0)$$

הביטוי עבור ההסתברות:

$$P(m=k)(t) = c_m(t)^+ c_m(t) = \alpha_k(t)^+ \alpha_k(t)$$

$$P(\dot{m}=k) = 2\mathcal{R}e\left\{\alpha_k(t)^+ \dot{\alpha_k}(t)\right\}$$

נציב בביטוי עבור ההסתברות:

$$P(\dot{m}=k) \cong 2\mathcal{R}e\left\{\alpha_k(t)^+\left(-\alpha_k(t) g_{eff}^2(s,k)\pi\delta(0) + \alpha_{k+1}(t) g_{eff}(s,k+1)\right)\right\}$$

$$= 2\mathcal{R}e\left\{-P(m=k)\, g_{eff}^2(s,k)\pi\delta(0) + \alpha_k^+(t)\alpha_{k+1}(t) g_{eff}(s,k+1)\right\}$$

ומהצבת הקשר הנוסף והזנחת האיבר עם כפל הדלתאות

$$P(\dot{m}=k) \cong 2\pi\delta(\omega=\omega_a)\mathcal{R}e\left\{\left(-P(m=k)\, g_{eff}^2(s,k) + P(m=k+1) g_{eff}^2(s,k+1)\right)\right\}$$
$$= -\Gamma(s,k)P(m=k) + \Gamma(s,k+1)P(m=k+1)$$

#

$$2\pi\, g_{eff}^2(s,k)\delta(0) = 2\pi\hbar\delta(E-\hbar\omega_a)|_{E=\hbar\omega_a}\left|\sqrt{(s+k)(s-k+1)}\cdot g_{eff}\right|^2 = \Gamma(s,k)$$

סה"כ

$$P(\dot{m} = k) = -\Gamma(s,k)P(m=k) + \Gamma(s,k+1)P(m=k+1)$$

עד כה הנחנו כי המצב ההתחלתי של המערכת הינו מצב קוונטי בעל m מוגדר כך שיכולנו להניח

$$n = m_0 - m$$

ולמרות שאם המערכת איננה מאותחלת בצורה מדוייקת הרי שההנחה הנ"ל נשברת הרי שמשוואת הקצב עבור תת המערכת האטומית נשארת אותו דבר ומה שישתנה יהיה חישוב מספר הפוטונים כפונקציה של m.

לקחנו את הקשר האחרון כדי לסמלץ את ההתפתחות בזמן של המערכת.

ניתן לראות סימולציה של הסתברויות האכלוס של המערכת כפונקציה של הזמן עבור מקרה של 20 אטומים כאשר לקחנו את S להיות מקסימלי. (אם S איננו מקסימלי זה שקול ללקיחת מספר שונה של אטומים כפי שהערנו בתחילת הפיתוח)

עבור עירור מלא של המערכת כך שהיא מתחילה מהמצב המעורר ביותר:

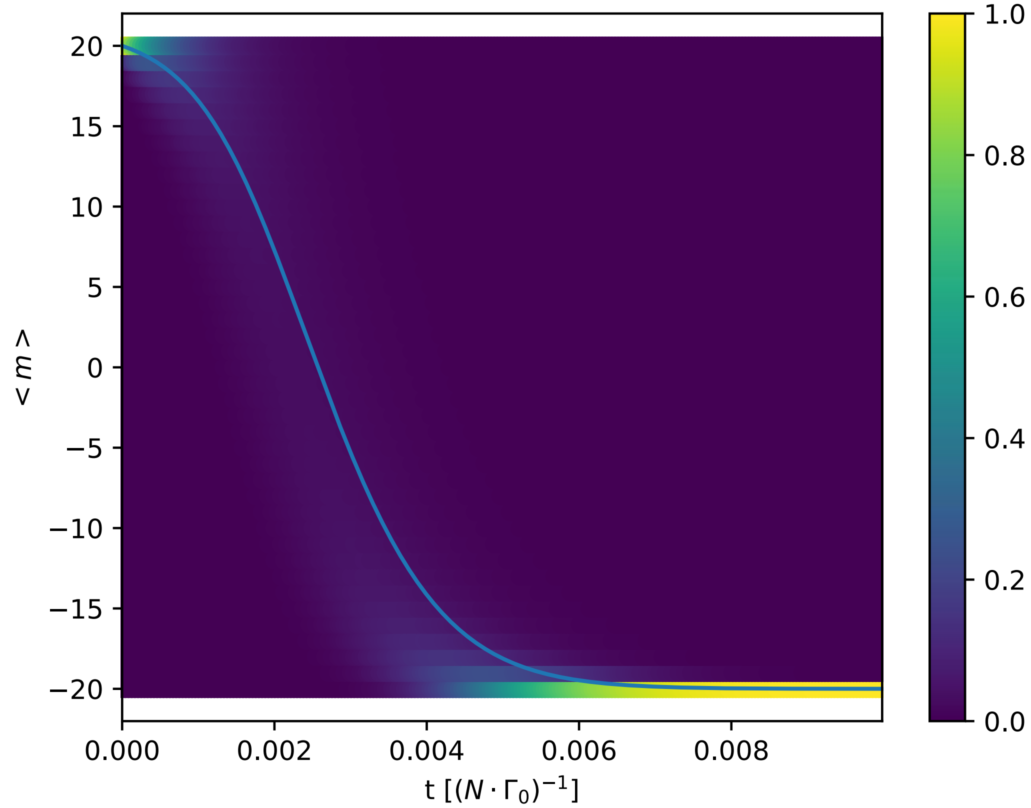


Figure 1: התפתחות פילוג ההסתברות של המערכת על פי משוואת הקצב שפיתחנו. מוצג עקום המתאים ל $< m >$

ועבור עירור המתאים לפולס $\frac{\pi}{2}$ כך שהמערכת נמצאת בתת המרחב עבורו $m = 0$:

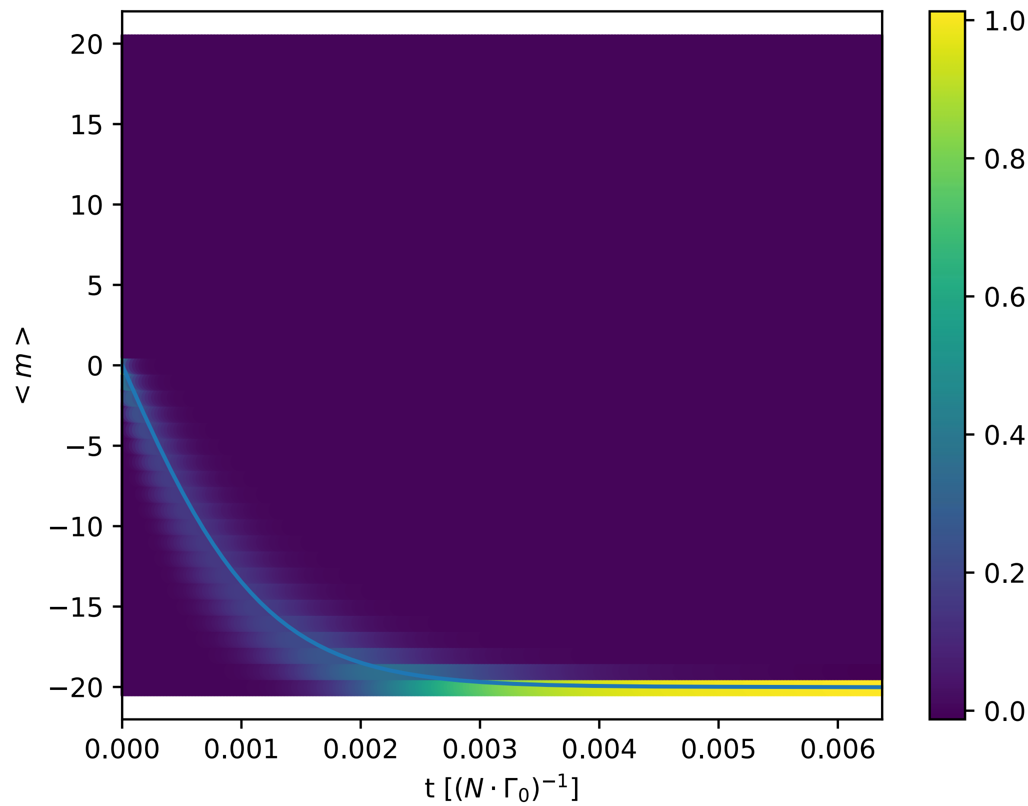


Figure 2: התפתחות פילוג ההסתברות של המערכת על פי משוואת הקצב שפיתחנו. מוצג עקום המתאים ל$< m >$

לשם השוואה ללא התחשבות בSR עבור מערכת שמתחילה במצב המעורר ביותר:

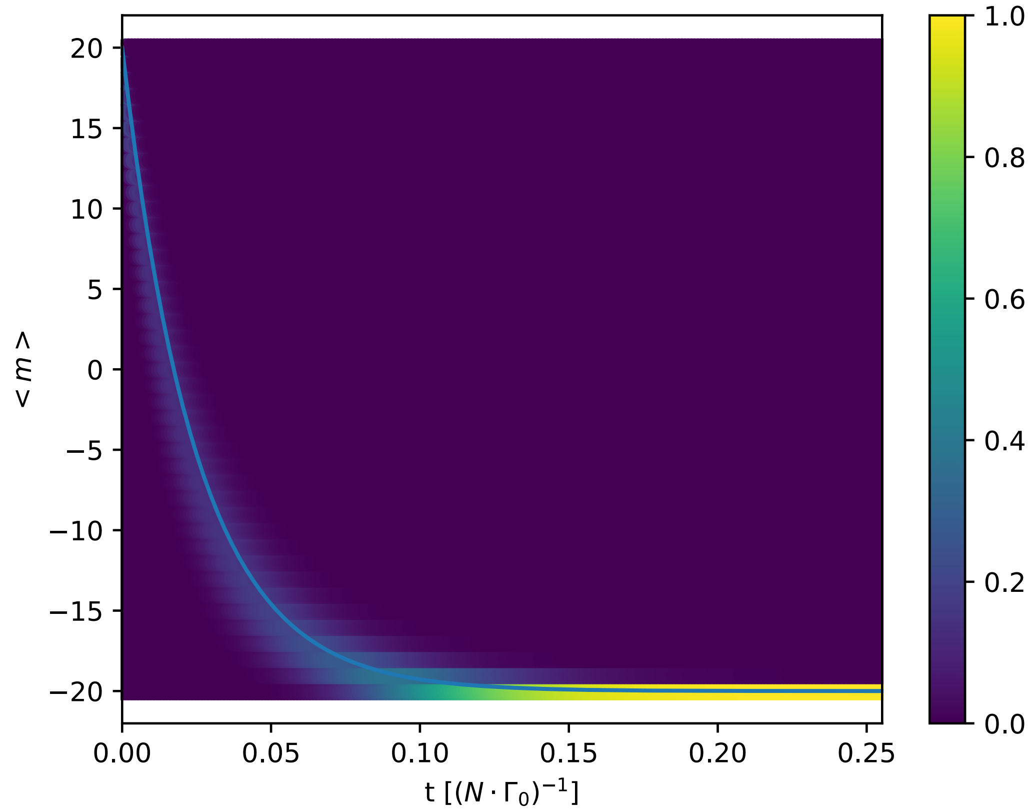


Figure 3: התפתחות פילוג ההסתברות של המערכת על פי משוואת הקצב שפיתחנו. מוצג עקום המתאים ל$< m >$

השוואה ישירה:

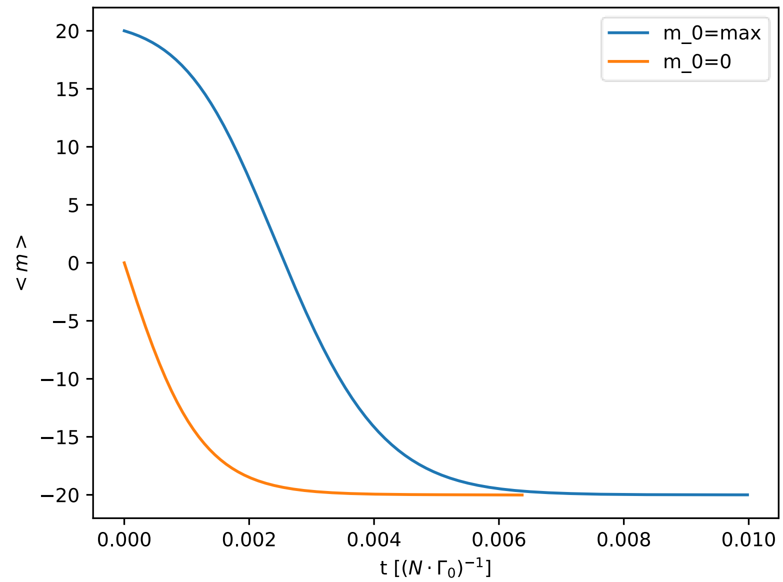


Figure 4: התפתחות המערכת על פי משוואת הקצב שפיתחנו. מוצגות שני סיטואציות שנבדלות בעירור ההתחלתי שניתן למערכת.

כאשר לשם השוואה ללא התחשבות ב SR (כלומר קצב פליטה פרופורציוני לעירור) נקבל עבור עירור מקסימלי:

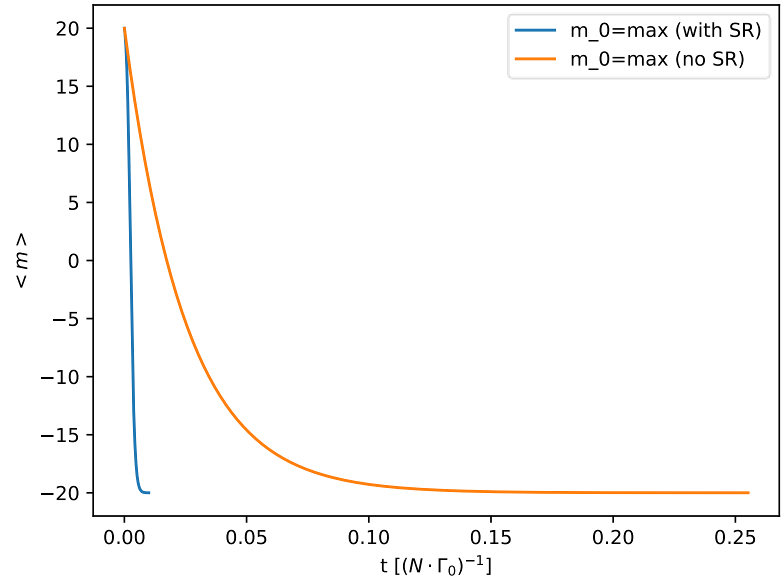


Figure 5: השוואה של תהליך הפליטה כפי שהיה אמור להראות ללא התחשבות בSR

למרות שהמערכת לא נמצאת במצב m מוגדר ניתן להגדיר את קצב הפליטה כערך התצפית של $\Gamma(s,m)$

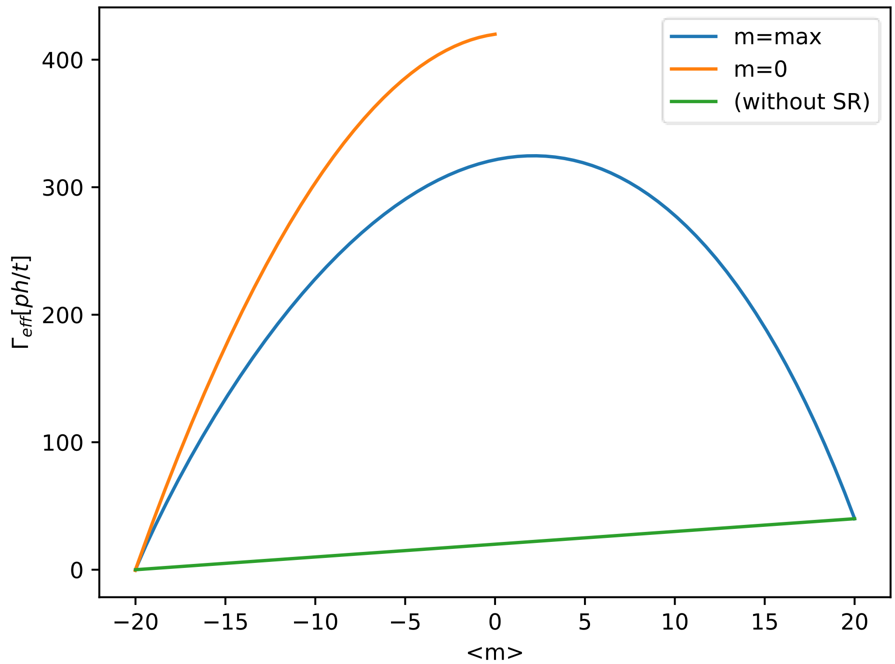


Figure 6: קצב הפליטה Γ של המערכת כפונקציה של העירור הממוצע שלה שניתן על ידי $\langle m \rangle$. לשם השוואה מוצג גם קצב הפליטה שמצופה אם לא היינו מתחשבים בSR. ללא התחשבות בSR אין תלות במצב שממנו איתחלנו את המערכת ולכן בגרף מוצג עקום יחיד עבור פליטה ללא התחשבות בSR

מעניין לראות כי בגלל האפקט של *SR* קצב הפליטה תלוי במצב הפנימי של המערכת ולא רק בעירור הממוצע שלה!

ככל שיהיו יותר אטומים במערכת הסטיה הנ"ל תהפוך להיות יותר מודגשת. לדוגמא עבור $N = 40$

פרמטר נוסף שניתן לבחון הוא עד כמה הפילוג הוא פואסוני.

בחרנו לכמת כמו *Andrea* עם *mandel Q parameter*

$$Q = \frac{\left\langle (\Delta\hat{n})^2 \right\rangle - \langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle} = \frac{\left\langle \hat{n}^{(2)} \right\rangle - \langle \hat{n} \rangle^2}{\langle \hat{n} \rangle} - 1$$

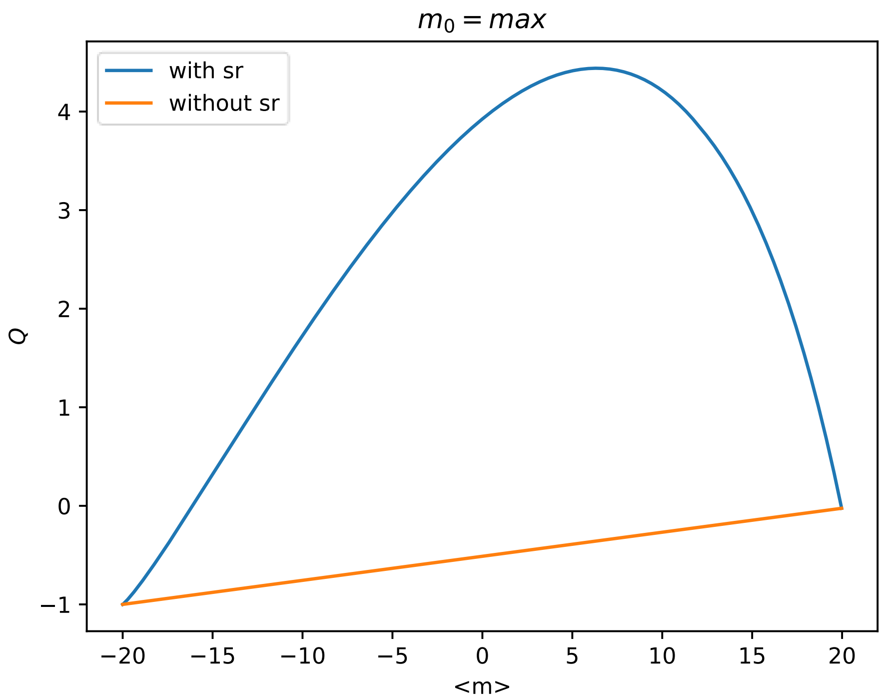


Figure 7: קצב הפליטה Γ של המערכת כפונקציה של העירור הממוצע שלה שניתן על ידי $\langle m \rangle$ עבור עירור התחלתי ל$m_0 = m_max$. לשם השוואה מוצג גם קצב הפליטה שמצופה אם לא היינו מתחשבים בSR

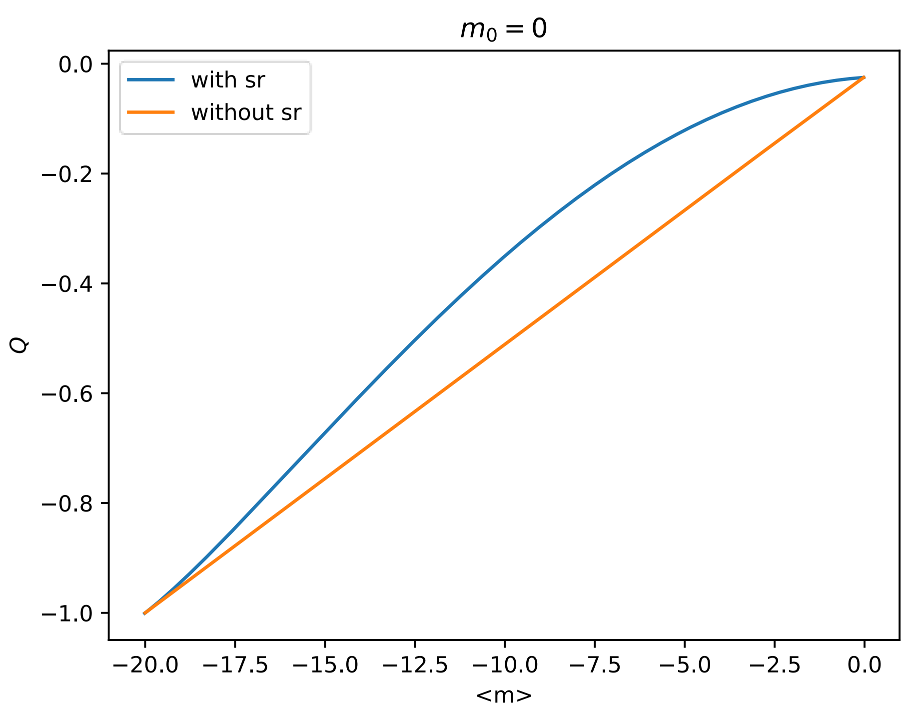


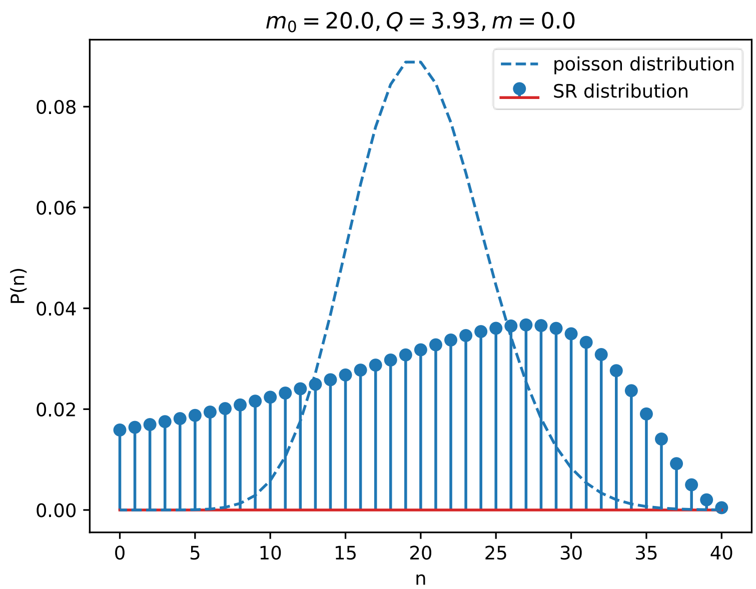
Figure 8: קצב הפליטה Γ של המערכת כפונקציה של העירור הממוצע שלה שניתן על ידי $\langle m \rangle$ עבור עירור התחלתי ל$m_0 = 0$. לשם השוואה מוצג גם קצב הפליטה שמצופה אם לא היינו מתחשבים בSR.

בתור בדיקת שפיות ניתן לראות שעבור $\langle m\rangle$ שמתאים למצב הסופי של המערכת בו ידוע המצב שלה מקבלים בכל המקרים $Q = -1$

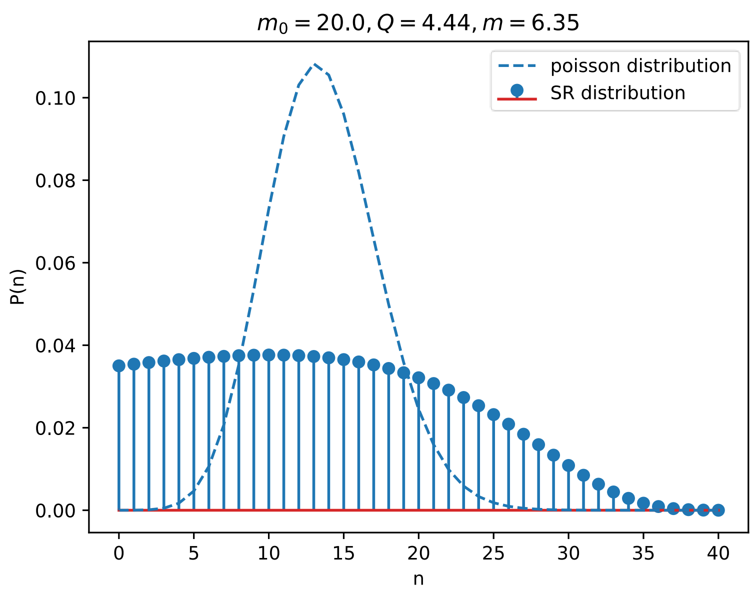
במצב התחלתי במצב התחלתי ידוע עם 0 פוטונים מקבלים $Q = 0$ שהרי ההתפלגות המתאימה ללהיות עם אפס פוטונים היא מצב פיזיקלי בעל פילוג פואסוני מנוון.

ניתן לראות את המשמעות של ההתפלגויות ביחס להתפלגות פואסונית עם תוחלת דומה עבור עירור של המערכת למצב המעורר ביותר שלה.

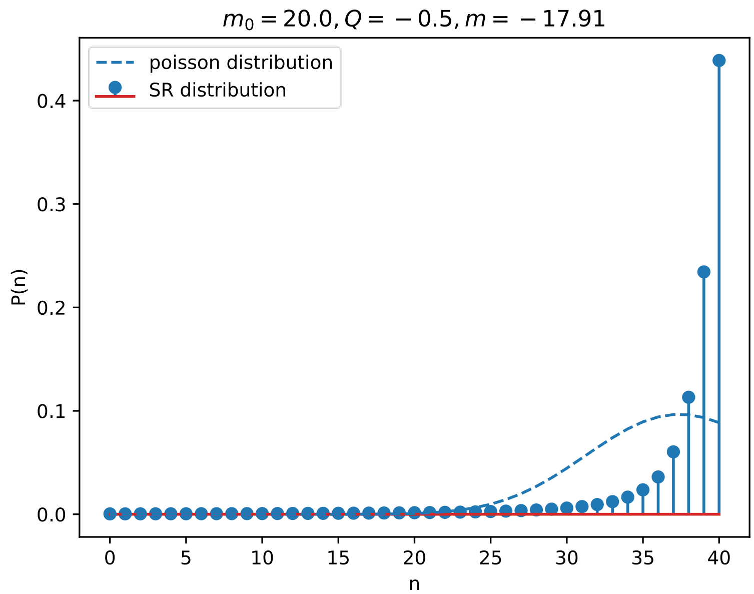
עבור מקרה שבו $< m > = 0$



עבור מקרה שבו Q הינו מקסימלי



עבור מקרה שבו $Q = -0.5$



לקרוא על g^2 אם זה פשוט קורלציה מצטלבת... ולהציג.