



Instituto Jorge Sabato, 25 años.  
Comisión Nacional de Energía atómica.

## Modelización de Materiales 2018

# Método de las Diferencias Finitas

Ejemplo: Estado Estacionario de un problema de conductividad térmica.

Mariano Forti - Ruben Weht

ruweht@cnea.gov.ar marianodforti@gmail.com

[www.tandar.cnea.gov.ar/~weht/Modelizacion](http://www.tandar.cnea.gov.ar/~weht/Modelizacion)

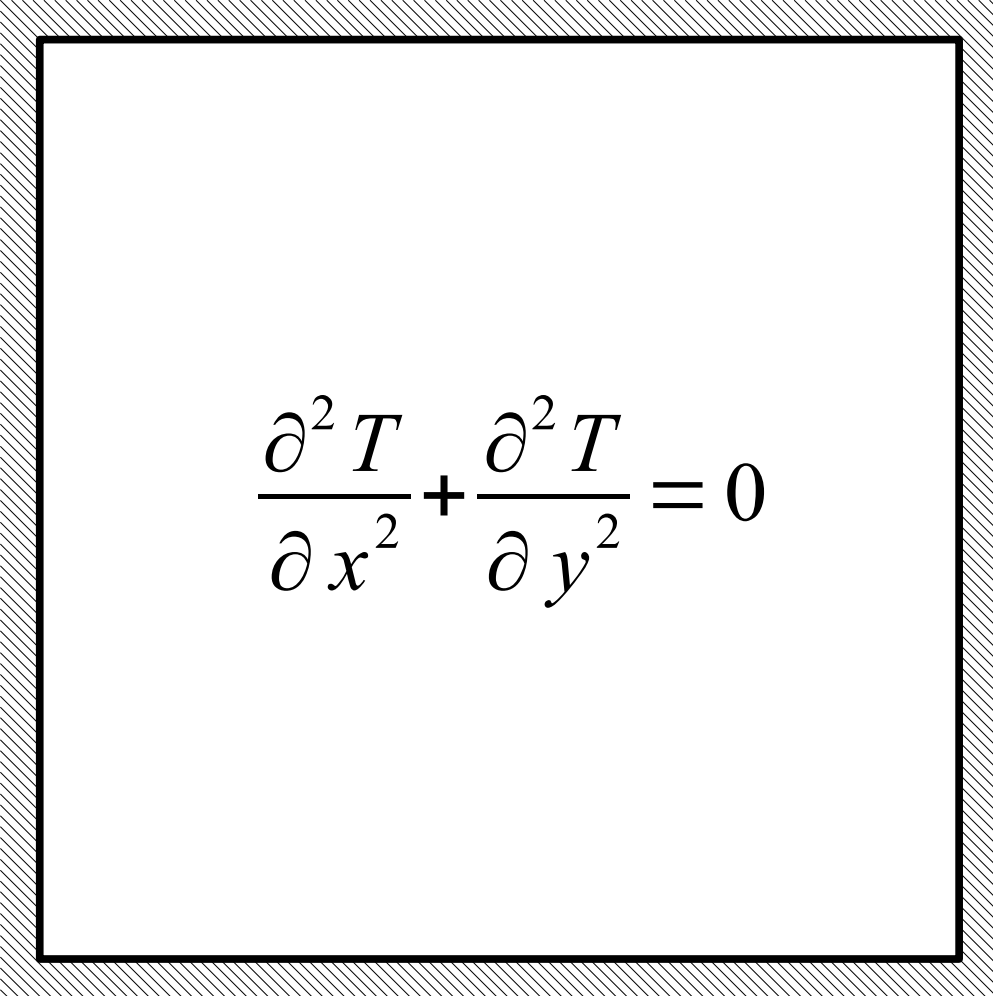
<https://mdforti.github.io/Modelizacion/>



# Presentación del Problema

$T_{i \ j}$

$j$

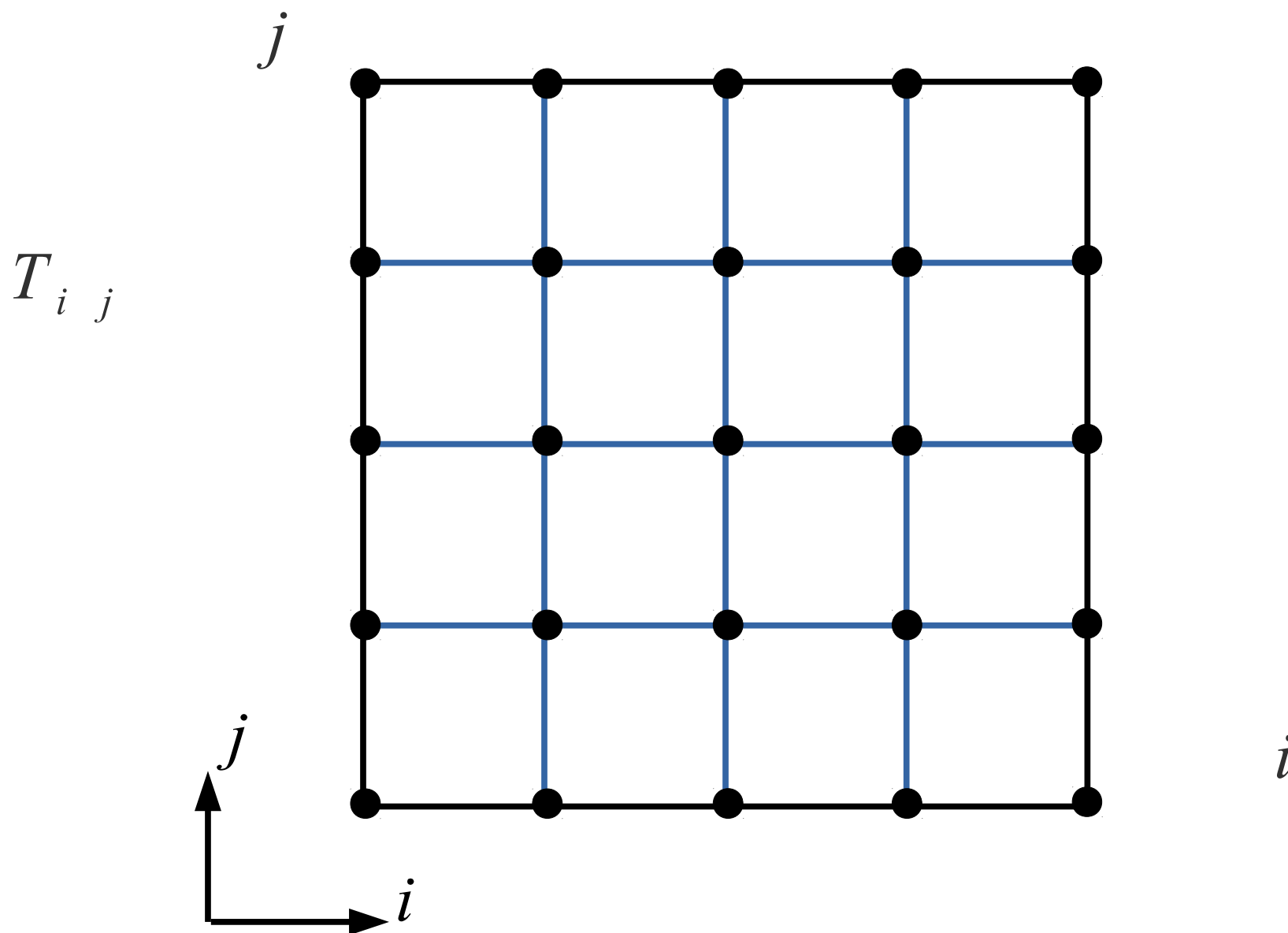


$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$i$



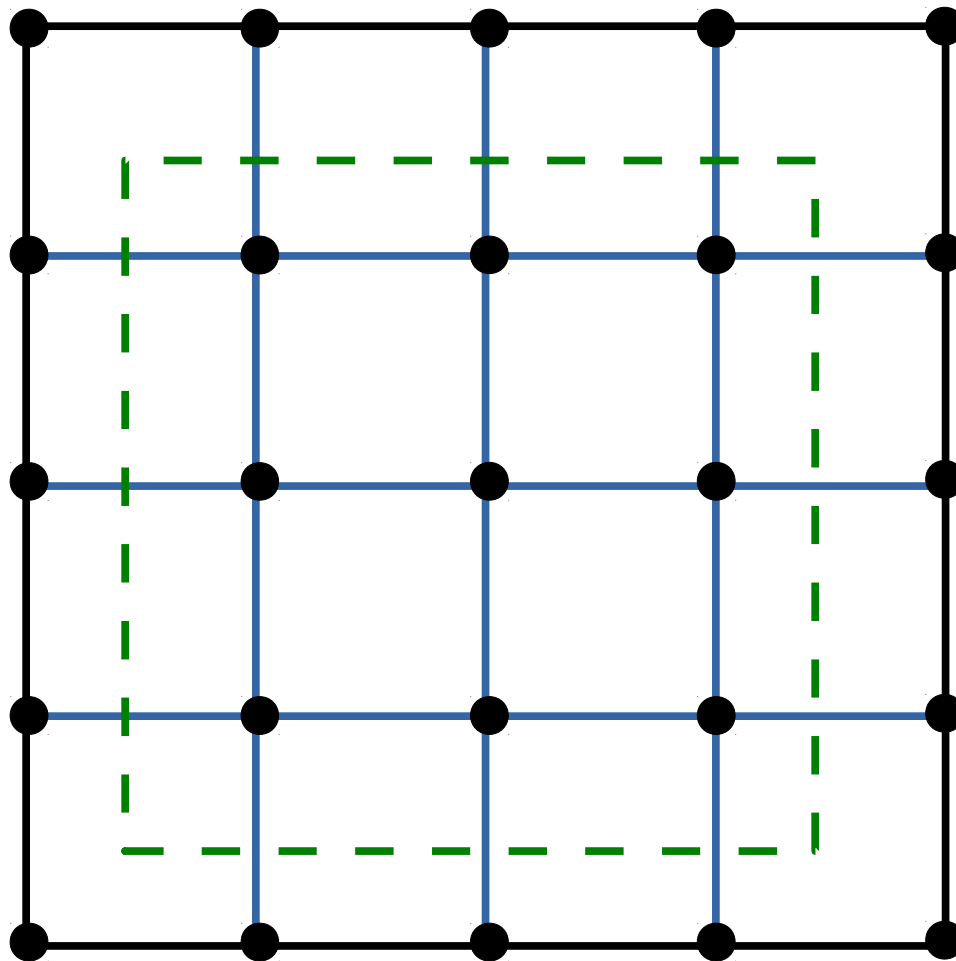
# Discretización del Problema





# Ecuación Matricial

- Temperaturas en nodos internos



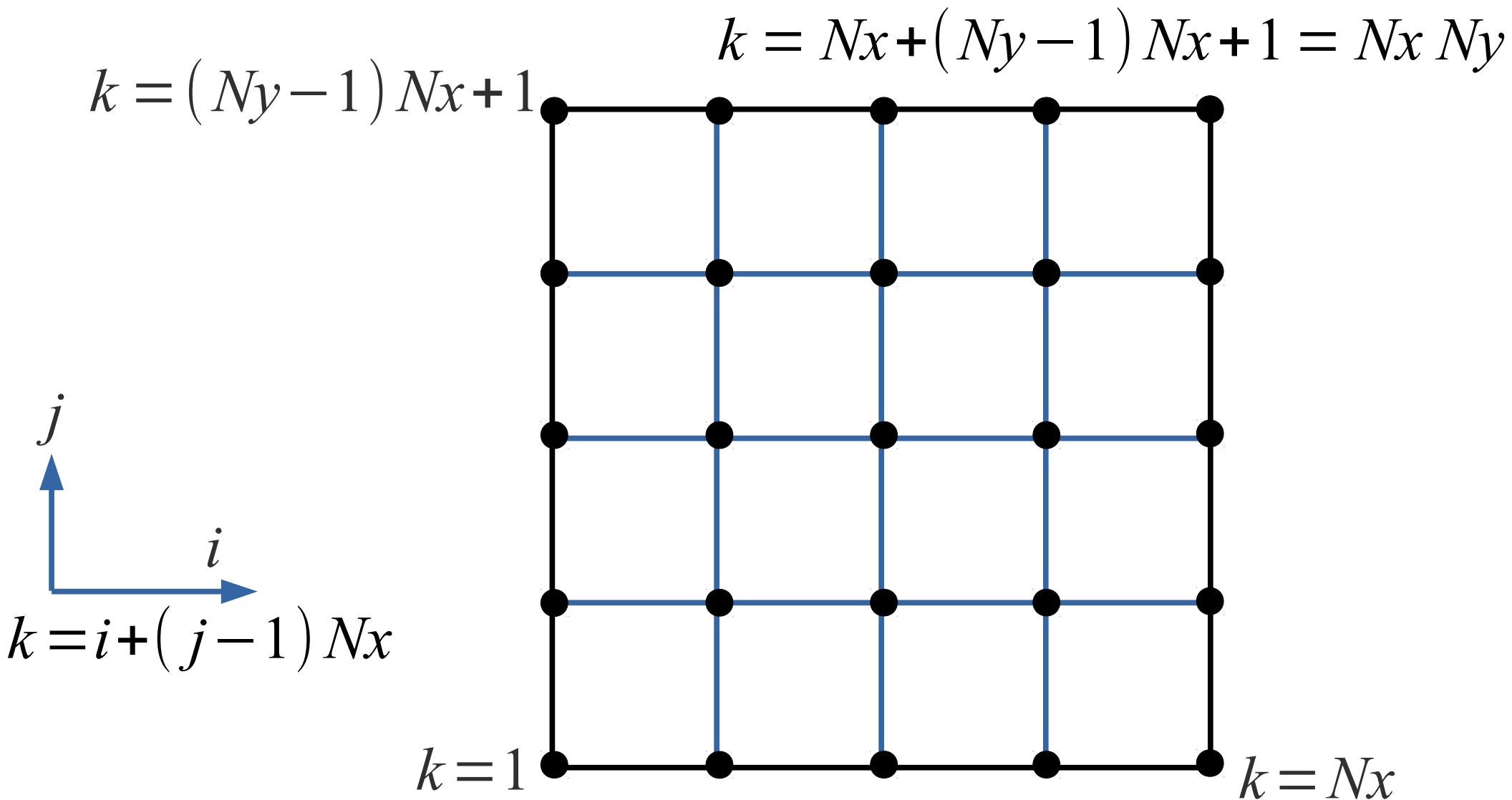
$$T_{i,j} = T_k$$

$$k = i + (j - 1) N_x$$

$$T_k = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N_x N_y} \end{pmatrix}$$



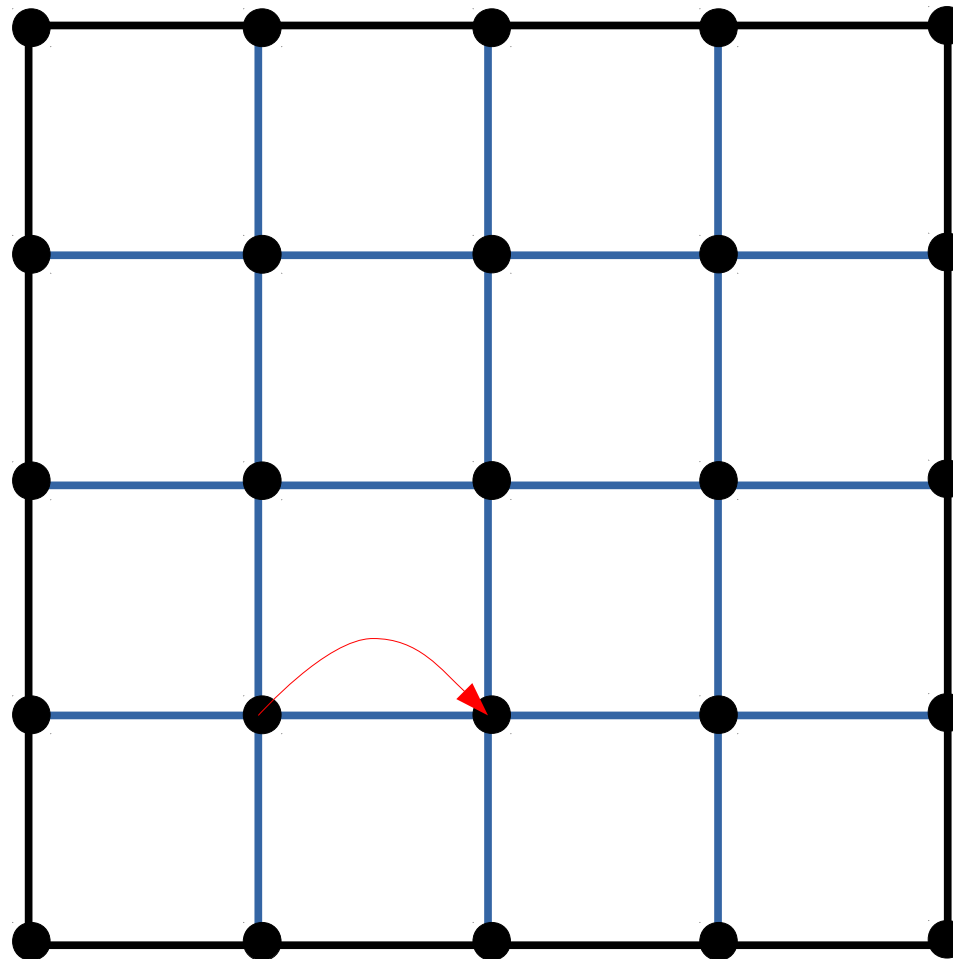
# Ecuación Matricial: Numeración de Nodos





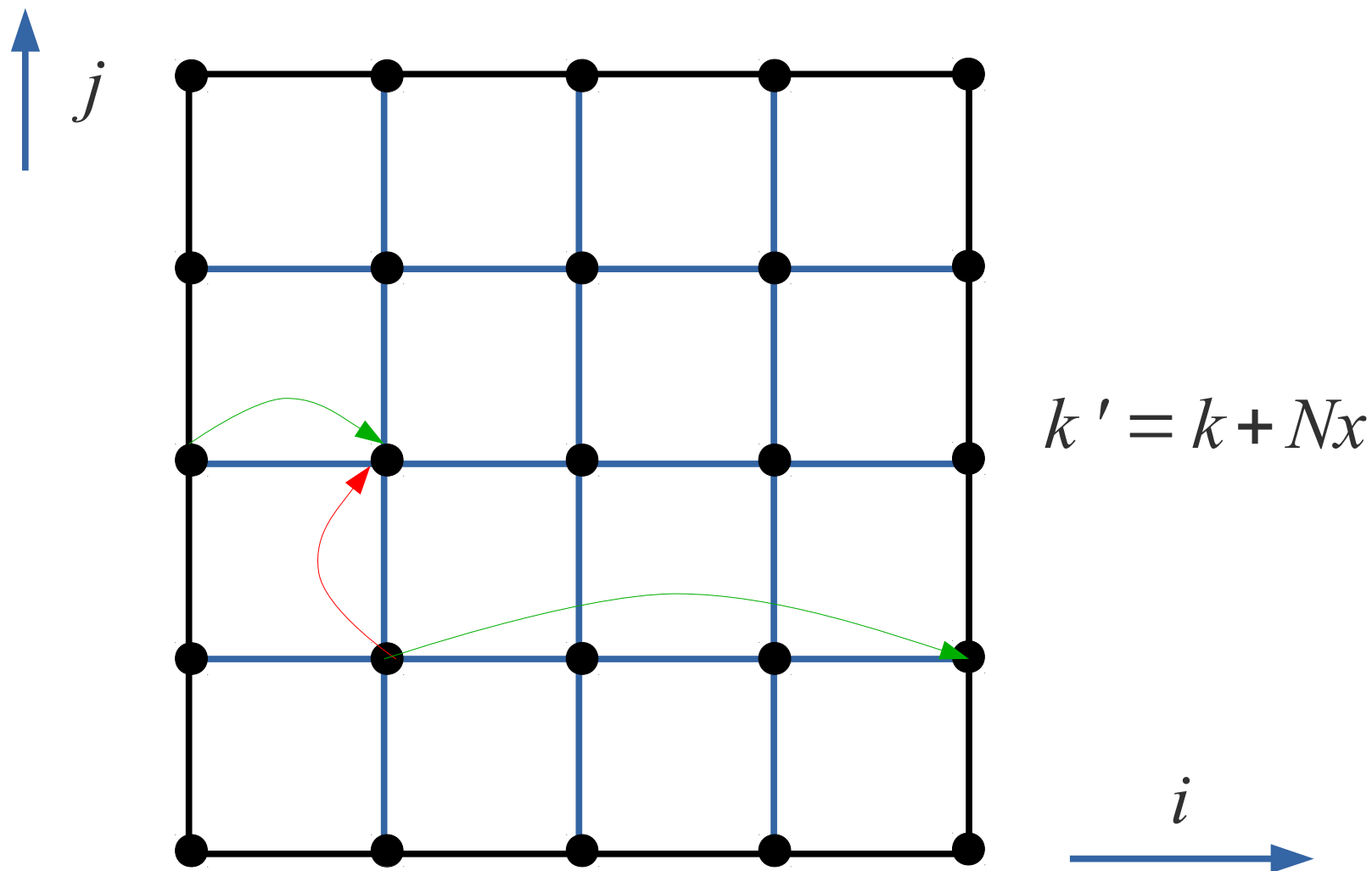
# Ecuación Matricial: Numeración de Nodos

$$k' = k + 1$$





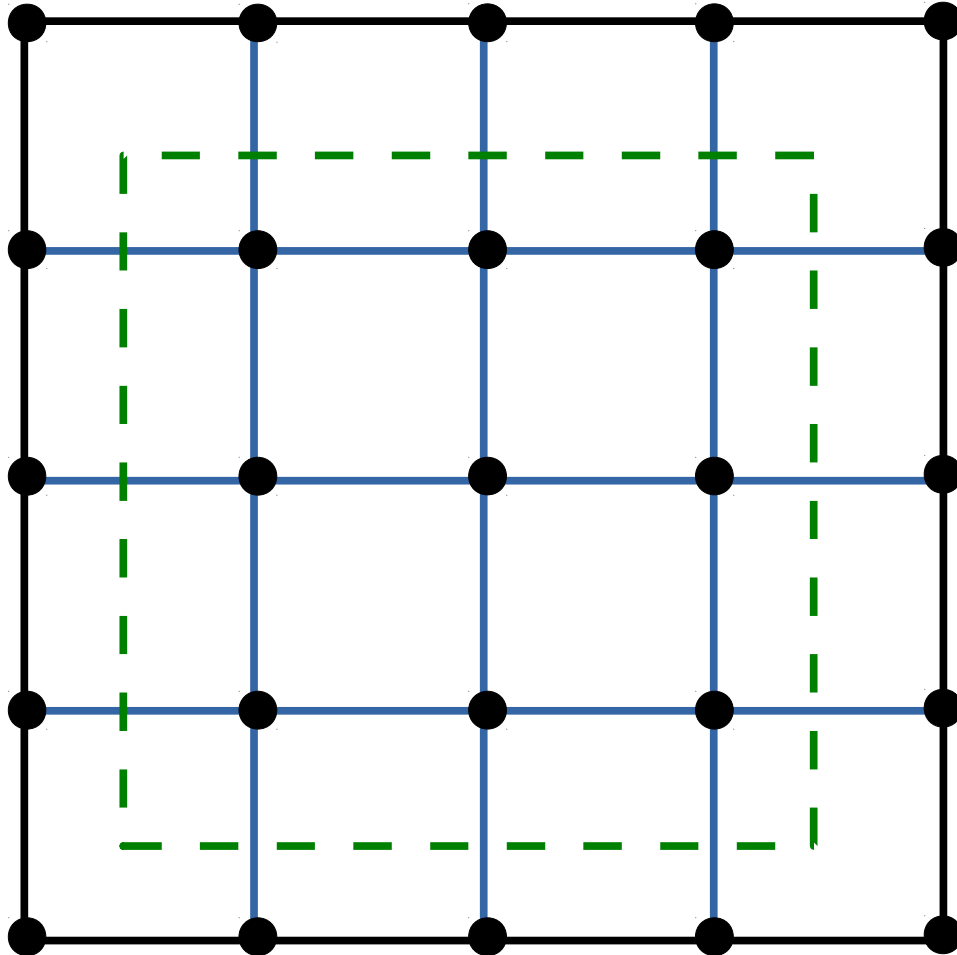
# Ecuación Matricial: Numeración de Nodos





# Ecuación General

- Para los nodos Internos:



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{k-1} - 2T_k + T_{k+1}}{dx^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{k-Nx} - 2T_k + T_{k+Nx}}{dy^2}$$

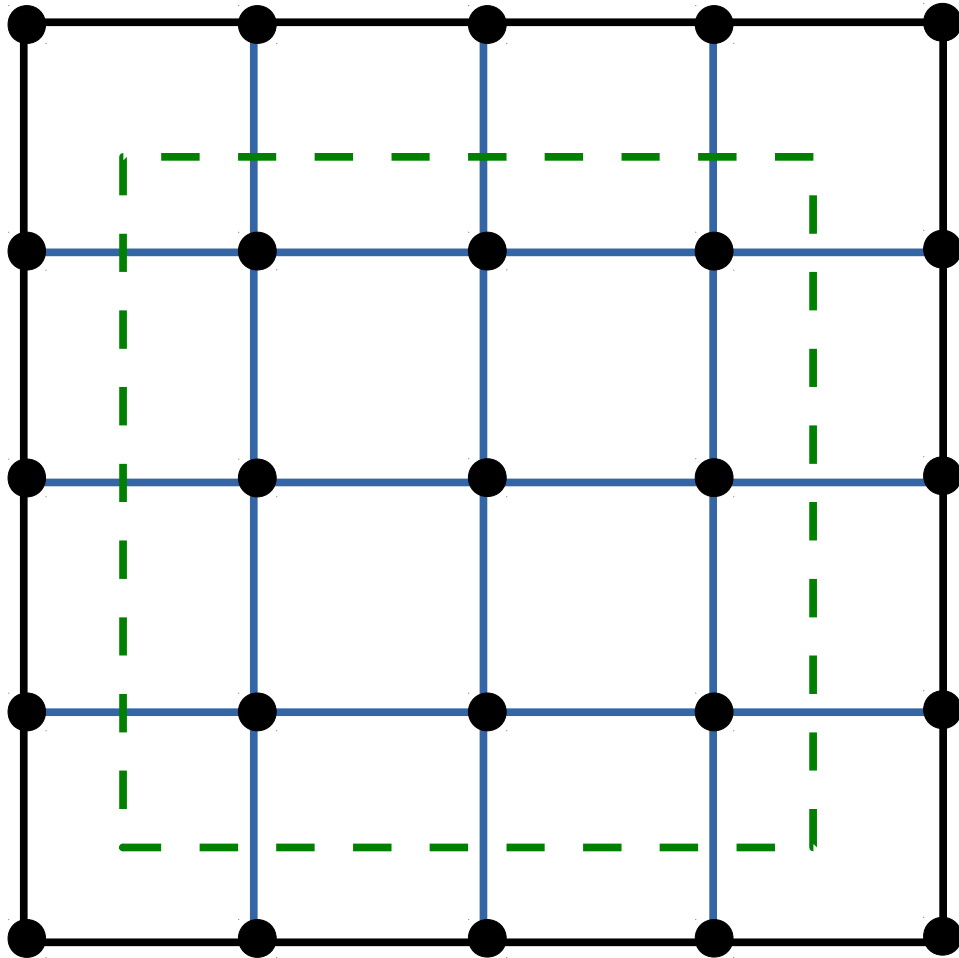




# Linealización de la ecuación Diferencial

- Para los nodos Internos

$$\beta^2 T_{k-N_x} + T_{k-1} - 2(1+\beta^2)T_k + T_{k+1} + \beta^2 T_{k+N_x} = 0$$



$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_k \\ \vdots \\ T_{N_x N_y} \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$



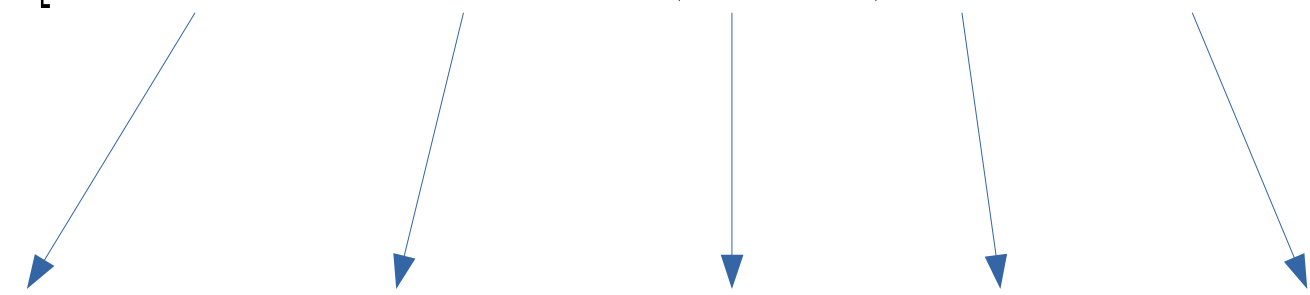
# Linealización de la ecuación Diferencial

- Coeficientes de la Matriz

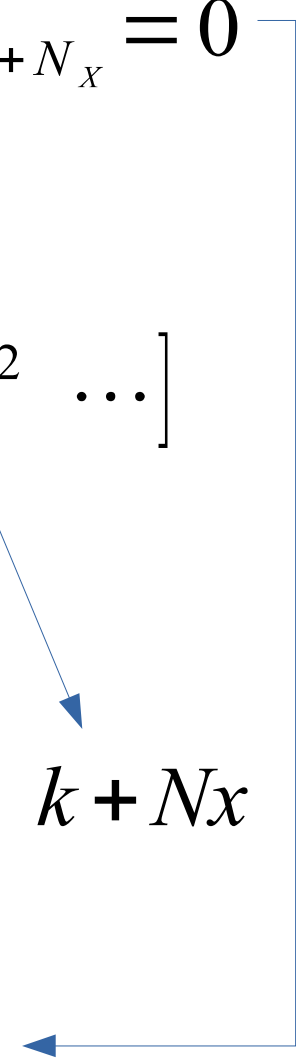
$$\beta^2 T_{k-N_x} + T_{k-1} - 2(1+\beta^2)T_k + T_{k+1} + \beta^2 T_{k+N_x} = 0$$

Fila k-ésima:

$$M_{k,:} = [\dots \beta^2 \dots 1 \quad -2(1+\beta^2) \quad 1 \dots \beta^2 \dots]$$



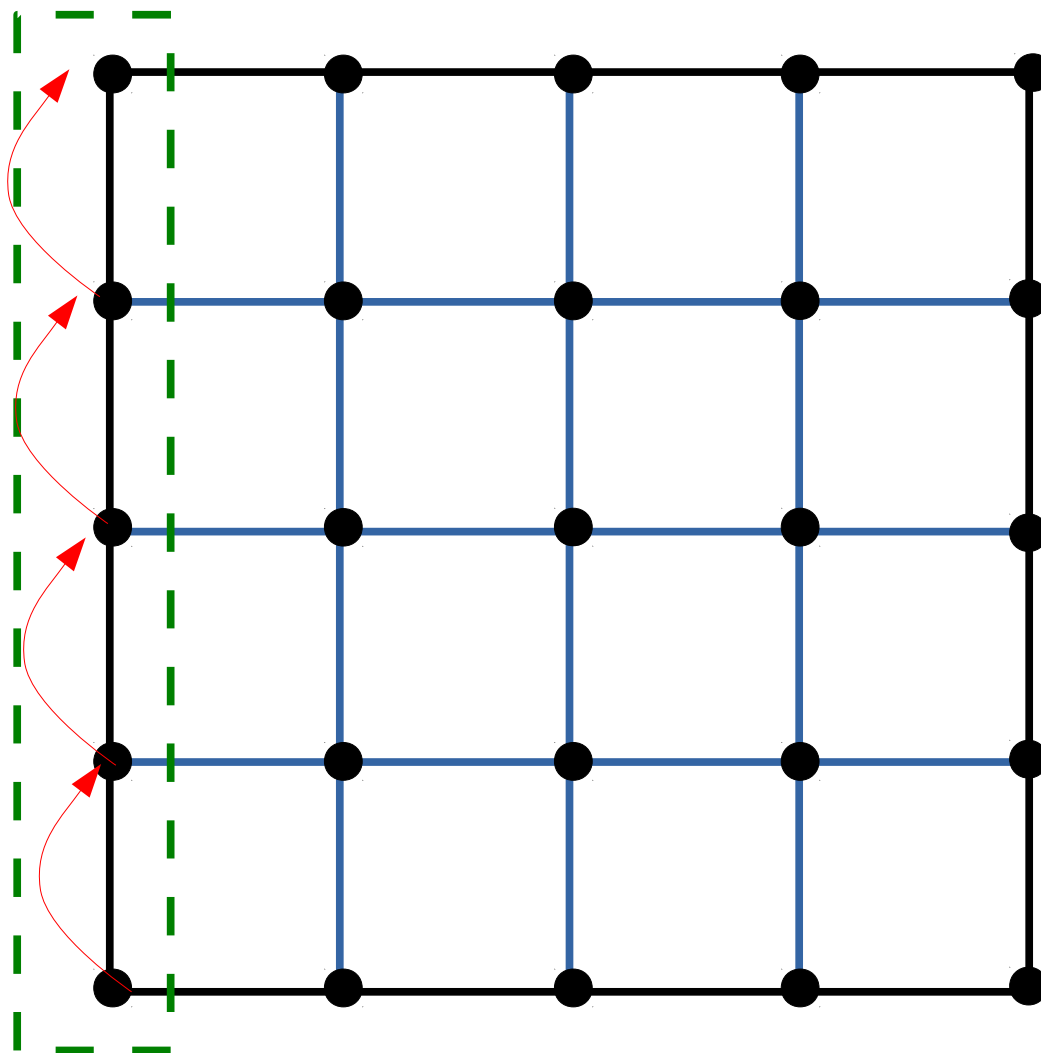
$k - Nx \qquad k - 1 \qquad k \qquad k + 1 \qquad k + Nx$

$$b_k = 0$$




# Condiciones de contorno

- Temperatura Fija



$$T_{k_A} = T_A$$

$$k_A = ? \quad \text{Algun rango ...}$$

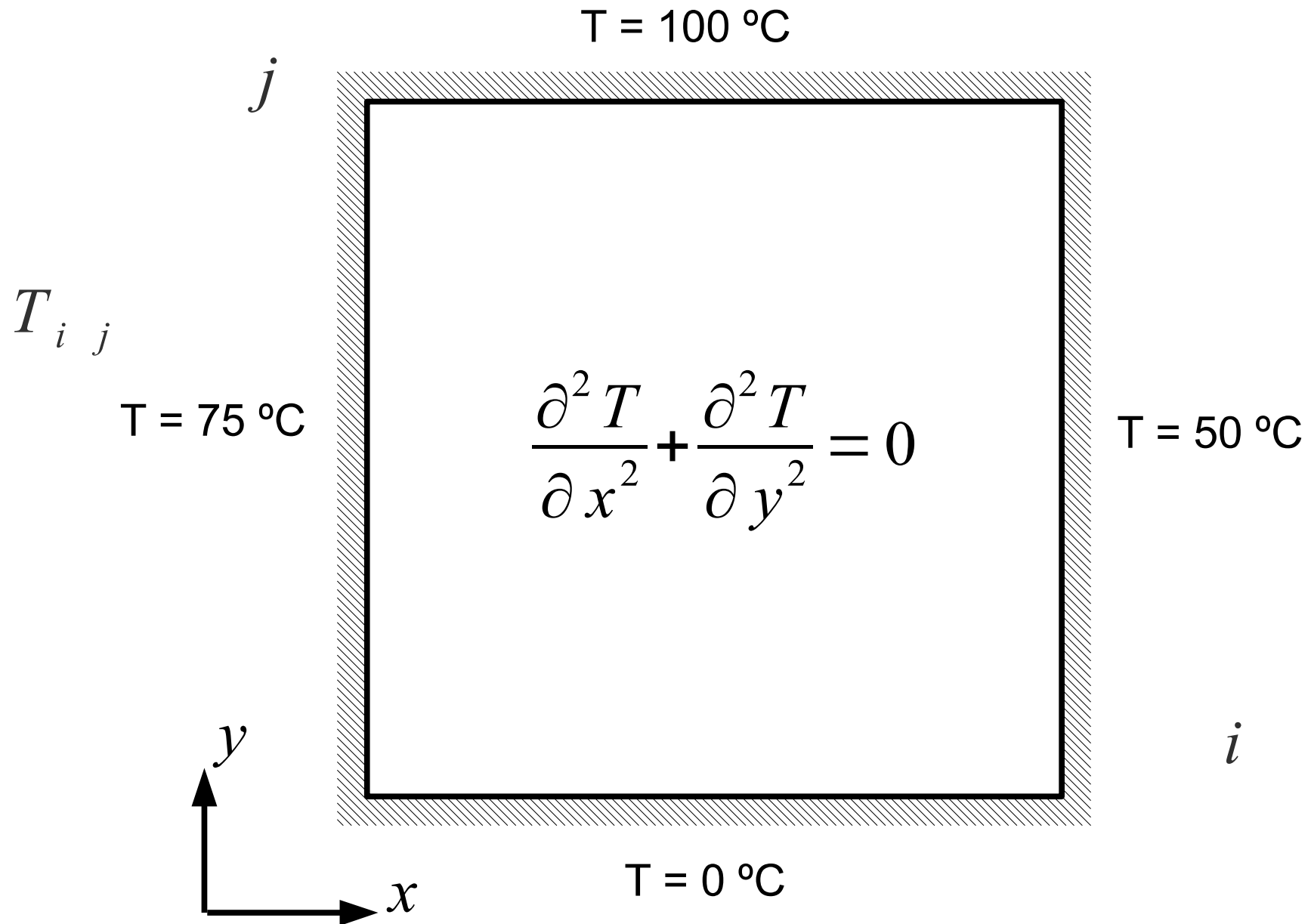
$$M_{k_A, :}^{fija} = \begin{bmatrix} \dots & 1 & \dots \end{bmatrix}$$

$$k_A$$

$$b_{k_A} = T_A$$



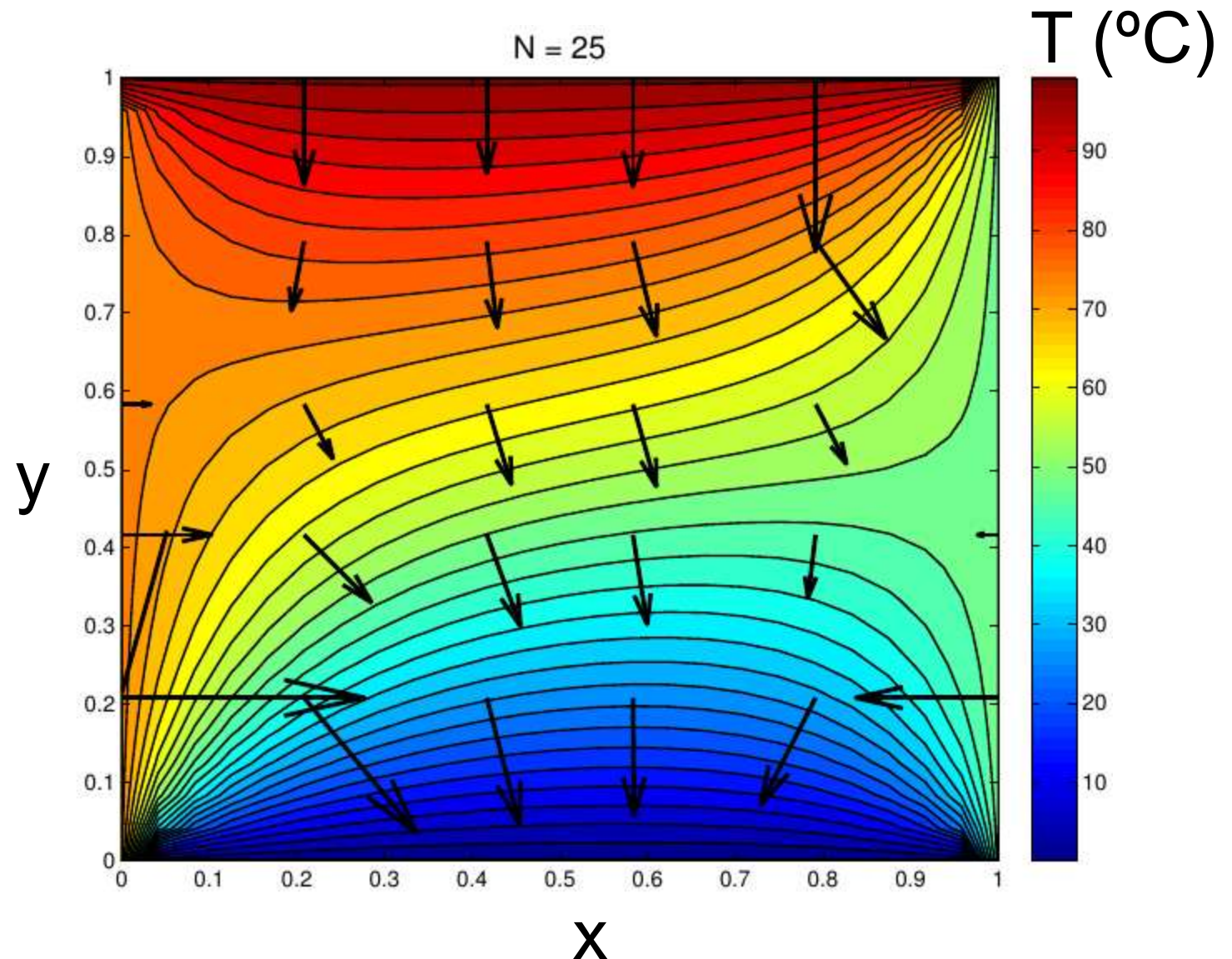
# Problema: Primera Aproximación





# Problema: primera aproximación

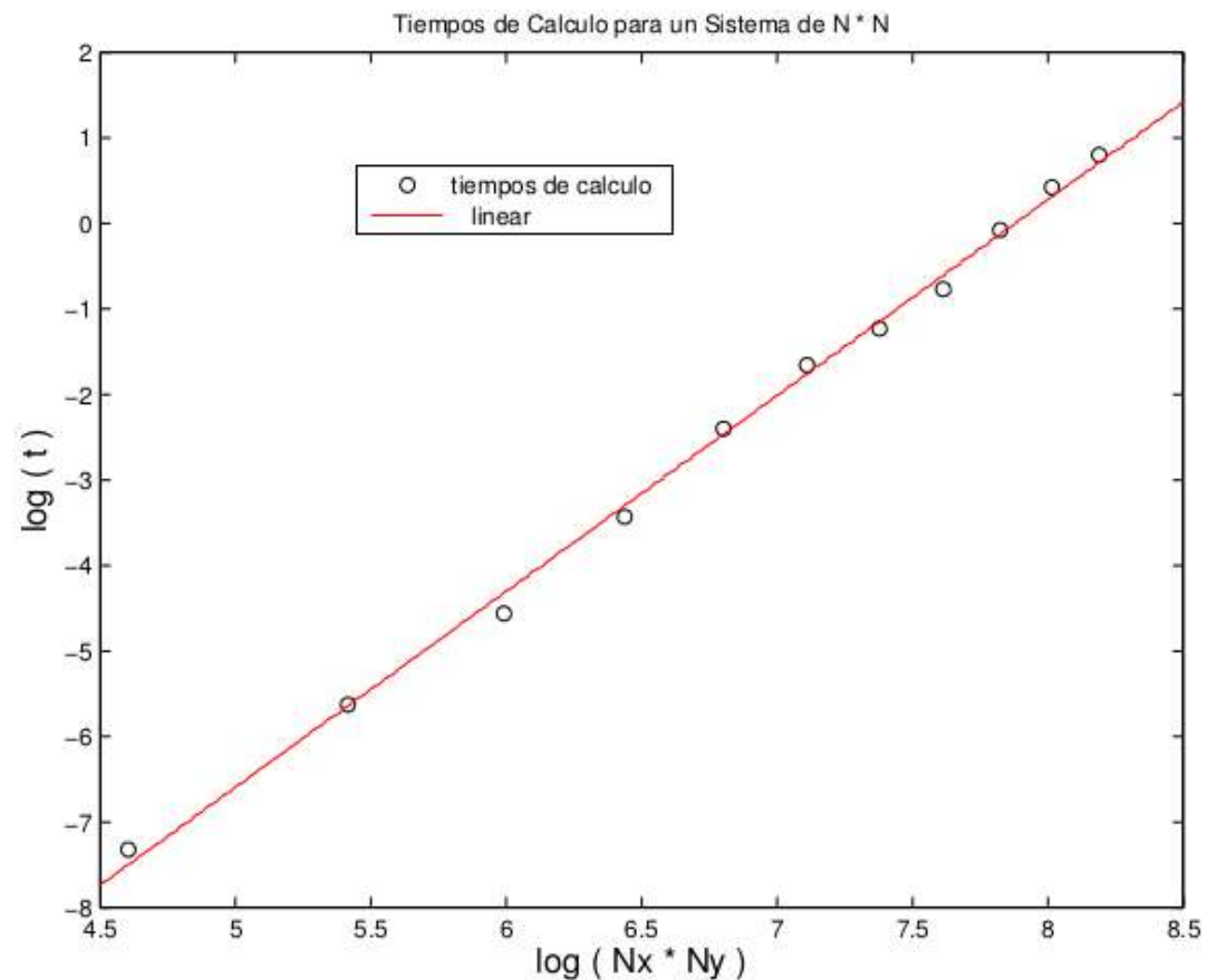
- Solución:





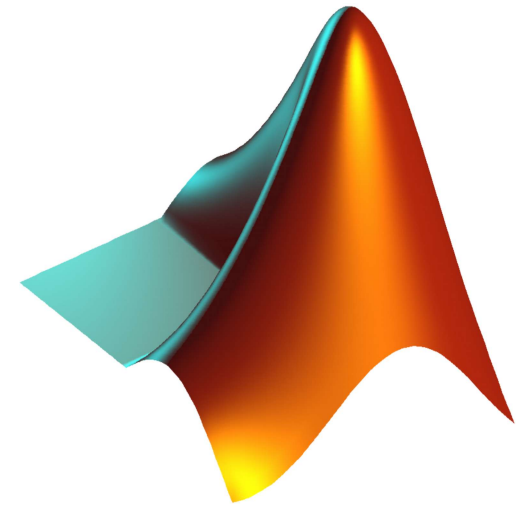
# Problema: Primera Aproximación

- Solución: Escaleo Temporal





# Postproceso: Mapa de temperaturas.



Genera grilla xy para el gráfico.

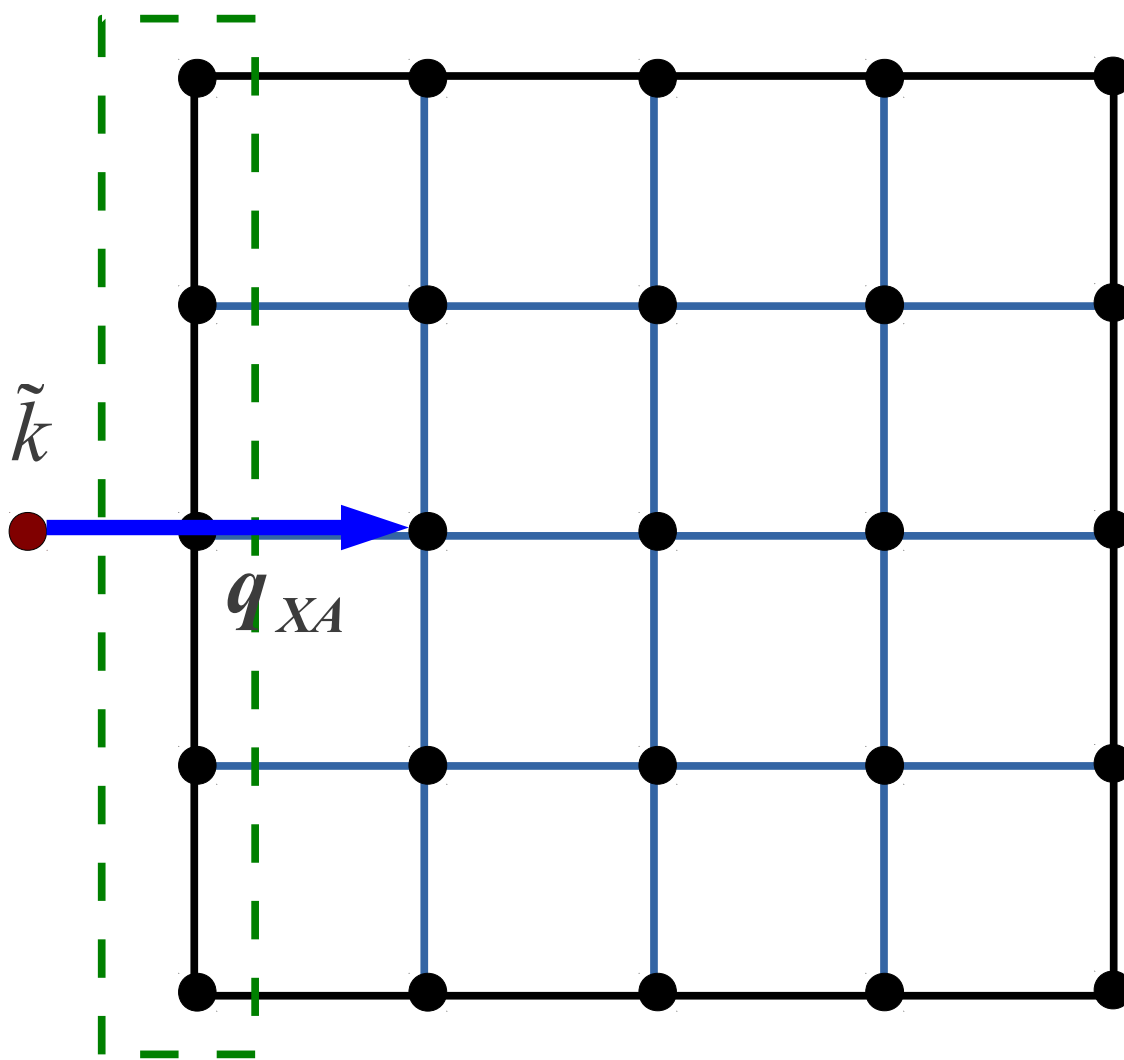
Mapa de colores.

```
Command Window
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);
>> contour(X,Y,Tsol,'Fill','on')
fx >>
```



# Condiciones de contorno: Flujo

- Derivada centrada: punto extra



$$Q_x \propto q_{XA} = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{k_A} = \frac{T_{k_A+1} - T_{\tilde{k}}}{2\Delta x}$$

$$k_A = 1 : N_X : (N_Y - 1) N_X + 1$$





## Condiciones de contorno: Flujo

- Cambio en los elementos de matriz

$$T_{\tilde{k}} = T_{k_A+1} - 2dxq_{XA} \quad k_A = 1 : N_X : (N_Y - 1) N_x$$

Reemplazo en la ecuación general

$$\beta^2 T_{k-N_x} + T_{k-1} - 2(1+\beta^2) T_k + T_{k+1} + \beta^2 T_{k+N_x} = 0$$

Reordenado

$$\beta^2 T_{k-N_x} - 2(1+\beta^2) T_k + 2 T_{k+1} + \beta^2 T_{k+N_x} = 2 dx q_{XA}$$



# Condiciones de contorno: Flujo

$$T_{\tilde{k}-1} = T_{k_A+1} - 2 dx q_{XA}$$

$$k_A = 1 : N_X : (N_Y - 1) N_x$$

$$\beta^2 T_{k-N_X} - 2(1+\beta^2) T_k + 2 T_{k+1} + \beta^2 T_{k+N_X} = 2 dx q_{XA}$$

Fila k-ésima :

$$M_{k_A,:} = [\dots \beta^2 \dots 0 \quad -2(1+\beta^2) \quad 2 \quad \dots \beta^2 \dots]$$

$k - N_x$

$k - 1$

$k$

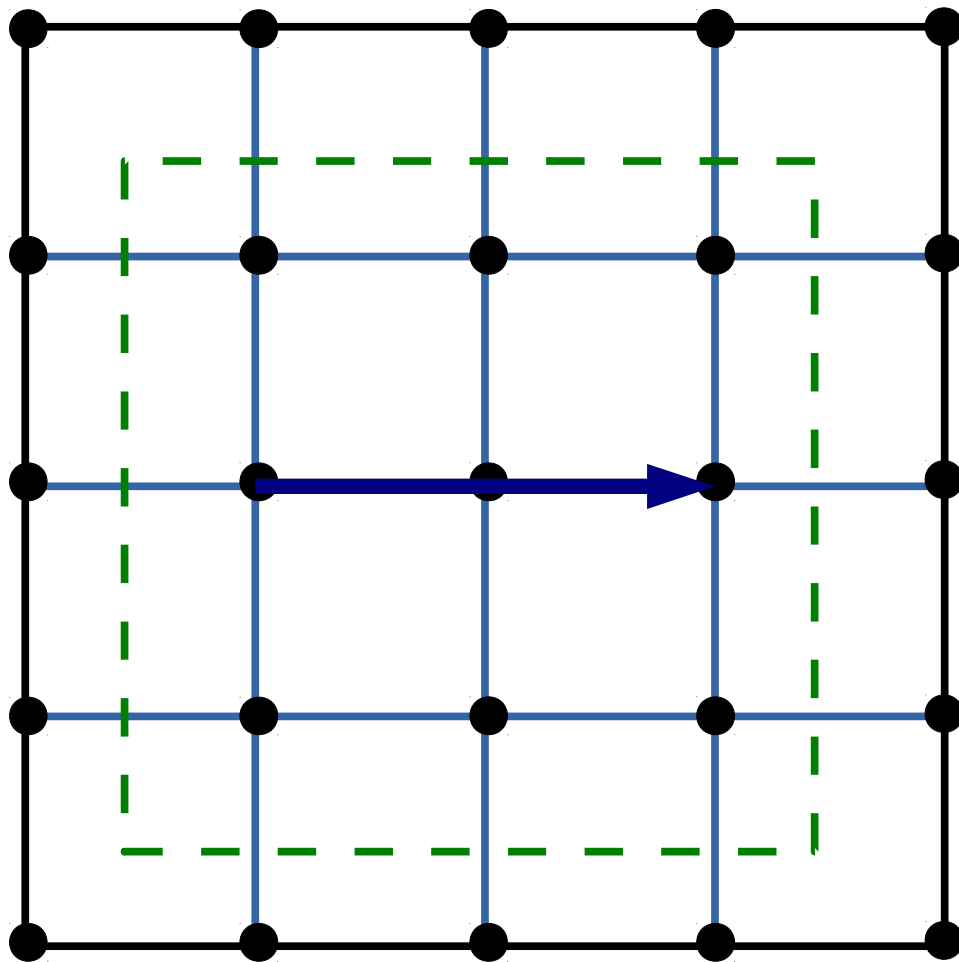
$k + 1$

$k + N_x$

$$b_k = 2 dx q_{XA}$$



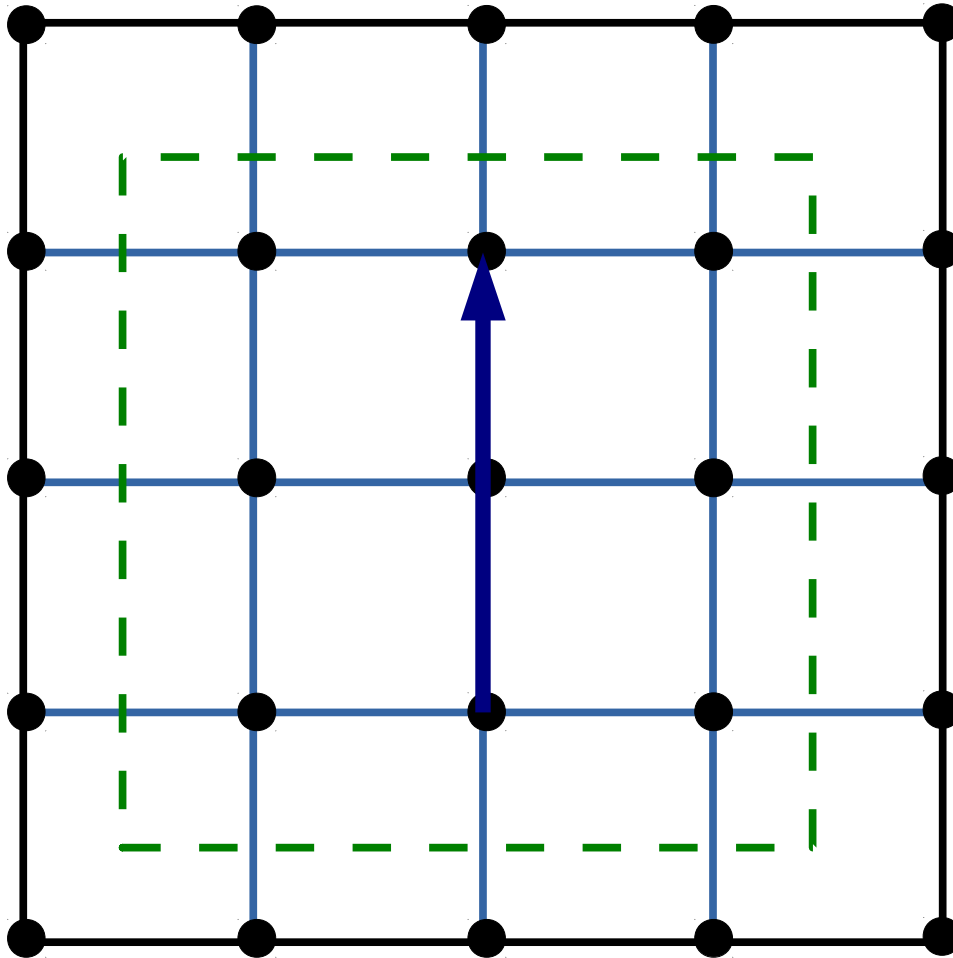
# Cálculo de Flujos



$$Q_x \propto q_X = \frac{\partial T_k}{\partial x} = \frac{T_{k+1} - T_{k-1}}{2dx}$$



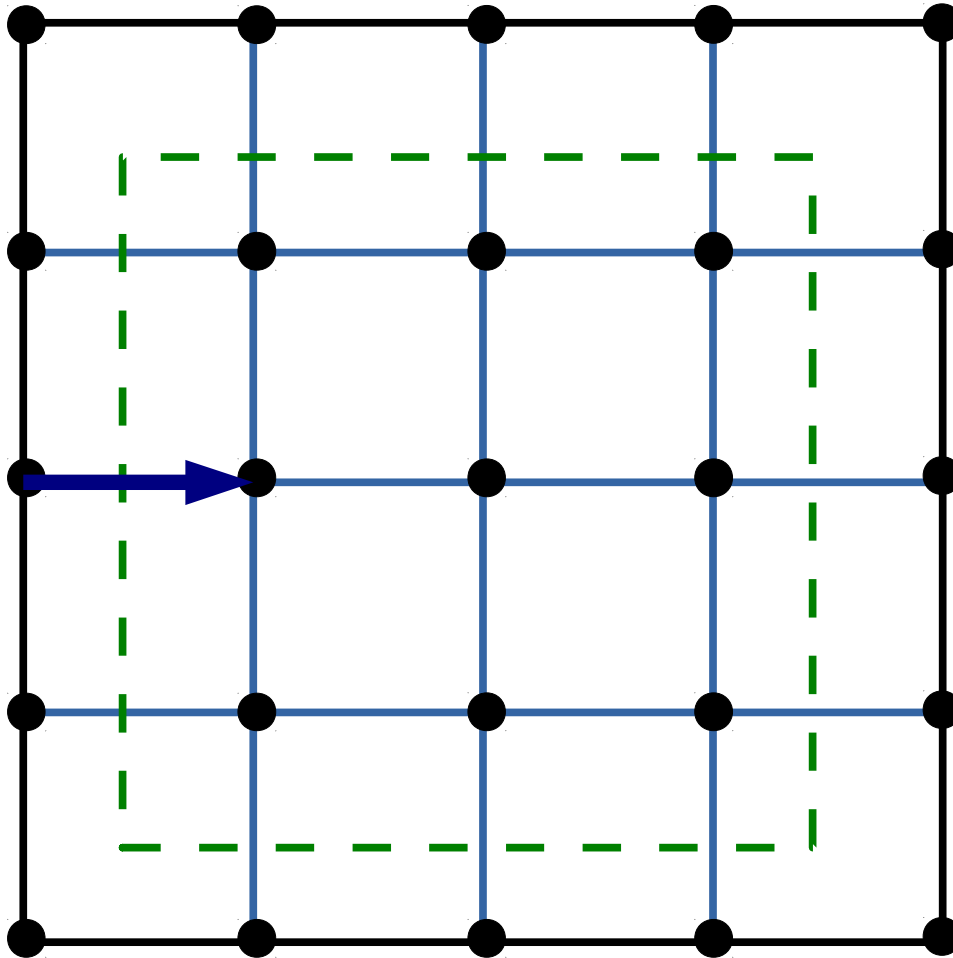
# Cálculo de Flujos



$$Q_y \propto q_Y = \frac{\partial T_k}{\partial y} = \frac{T_{k+N_x} - T_{k-N_x}}{2dy}$$



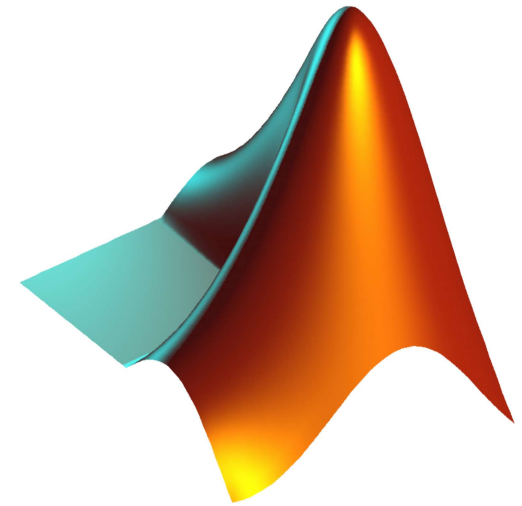
# Cálculo de Flujos



$$Q_{yA} \propto q_{YA} = \frac{\partial T_{k_A}}{\partial x} = \frac{T_{k_A+1} - T_k}{dx}$$



# Resultados: Graficación



Genera grilla xy para el gráfico.

Mapa de colores.

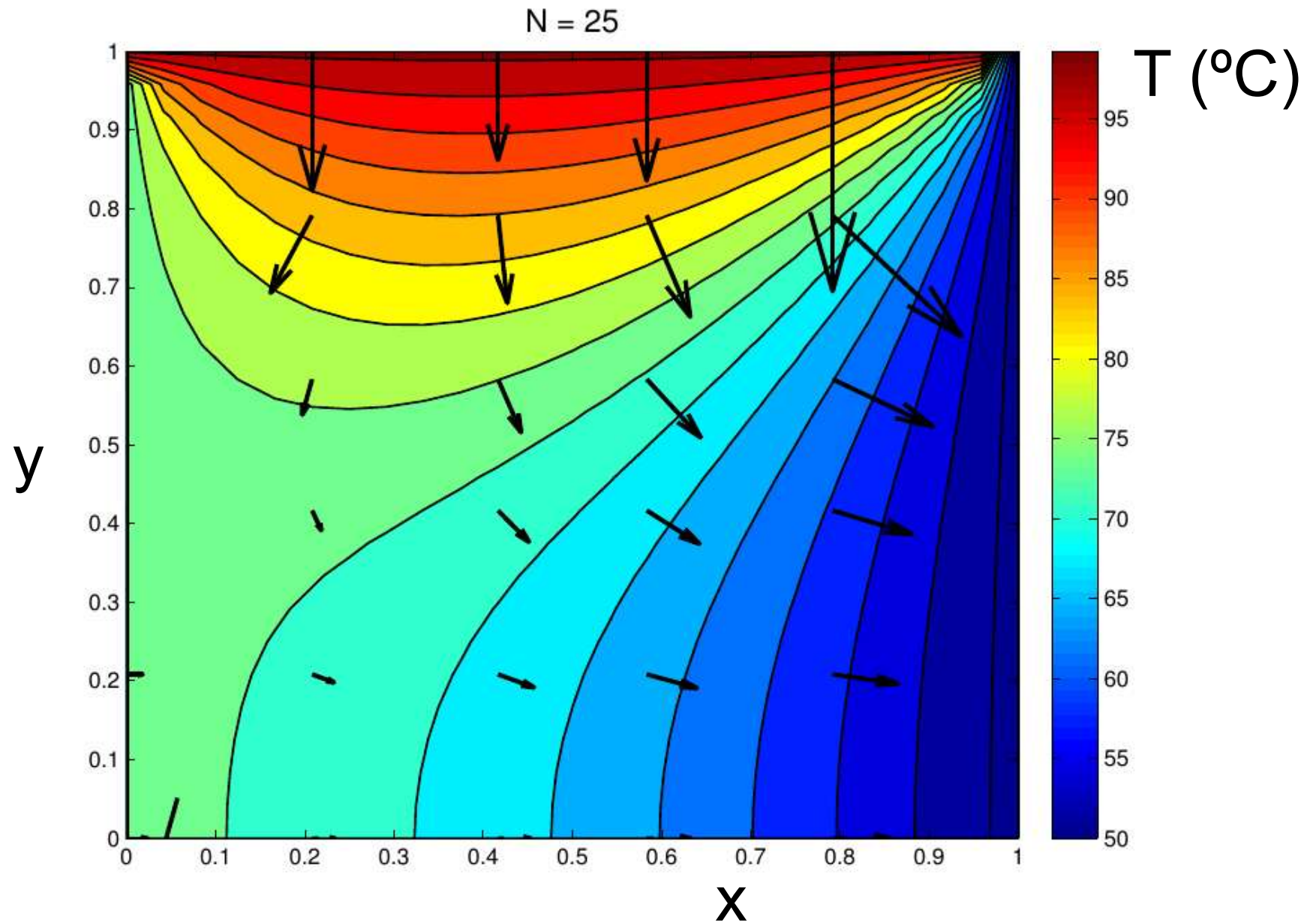
Calcula flujos (propia)

Grafica campo vectorial

```
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);  
>> contour(X,Y,Tsol,'Fill','on');  
>> [xx,yy,qx,qy]=flujos(N,N,x,y,Tsol);  
>> hold on  
>> quiver(xx,yy,qx,qy,'color',[0 0 0]);  
fx >>
```



# Resultados





# Resultados: Escaleo

