



# 高级人工智能

沈华伟

[shenhuawei@ict.ac.cn](mailto:shenhuawei@ict.ac.cn)

中国科学院计算技术研究所

2020.12.22

# 课程回顾

## ■ 博弈

- 基本概念
- 纳什均衡
- 机制设计

## ■ 两个经济学的应用

- 拍卖
- 讨价

# 课堂作业回顾

## ■ 海盗分金币

- 问题描述：有5个海盗抢到了100个金币，经过激烈争论，就如何分配达成以下协议：
  - 抽签决定每个人提分配方案的顺序
  - 抽到1号签的海盗首先提出自己的分配方案，然后所有人表决（包括方案提出者），当且仅当**半数或超过半数**以上的人同意的时候，才按照他提出的方案执行，否则他会被扔进海里
  - 1号海盗的方案如果未被通过，那么2号海盗提自己的方案，规则和上述一样，直到某个方案通过
- 给出最终的分配方案
  - 提示：从后往前回滚

# 海盗分金币

## ■ 从后向前回滚

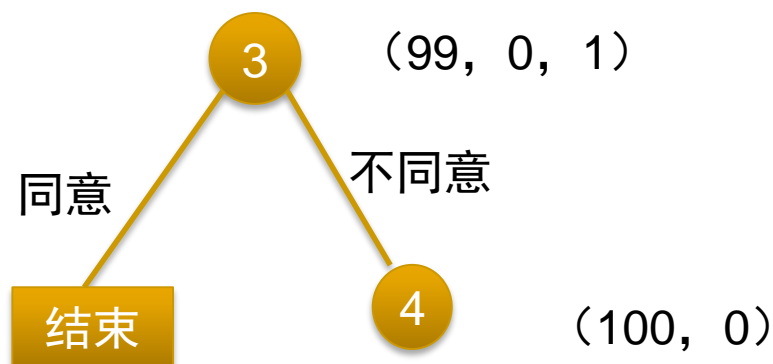
- 如果前三个海盗都死了，只剩最后两个海盗，那么4号海盗可以提出分配方案  $(100, 0)$ ，他自己同意，满足规则，所以会执行

4

$(100, 0)$

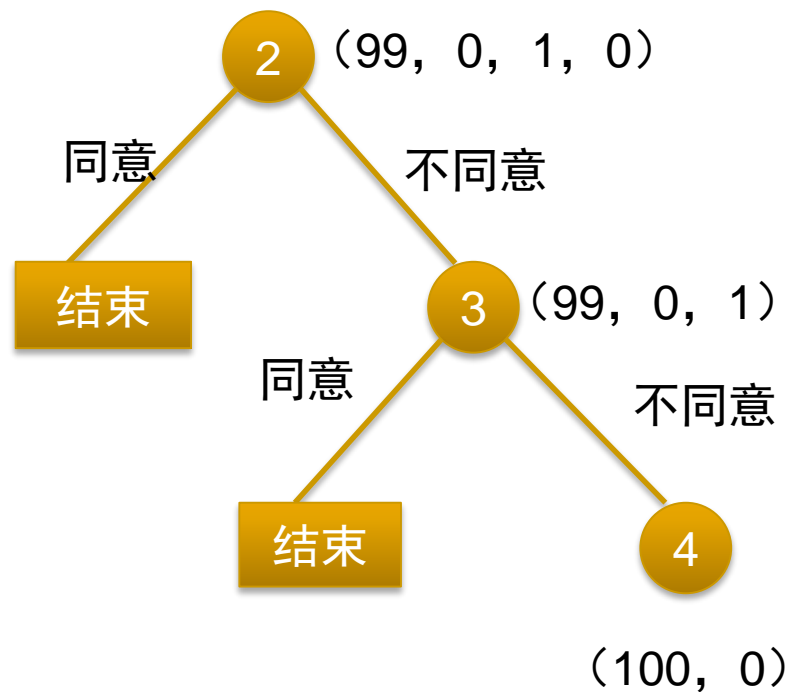
# 海盗分金币

- 所有的海盗都知道这一点，因此第三个海盗会给出如下策略
  - 如果前两个海盗死了，第三个海盗为了使自己的方案通过，并使自己获得最大的利益，那么他的分配方案即为  $(99, 0, 1)$ ，3号和5号肯定会同意。因为5号这样至少还能得到1个金币



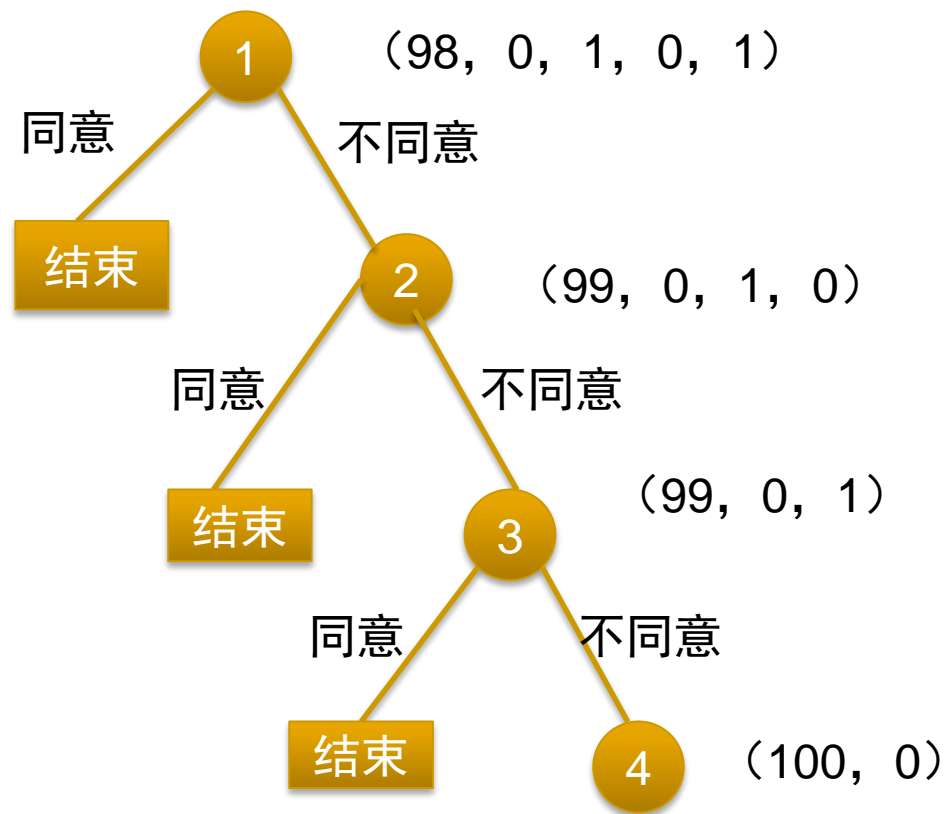
# 海盗分金币

- 同理，可以推出2号海盗的分配方案为  $(99, 0, 1, 0)$



# 海盗分金币

- 最终，1号海盗的方案（**98, 0, 1, 0, 1**）



# 课程内容

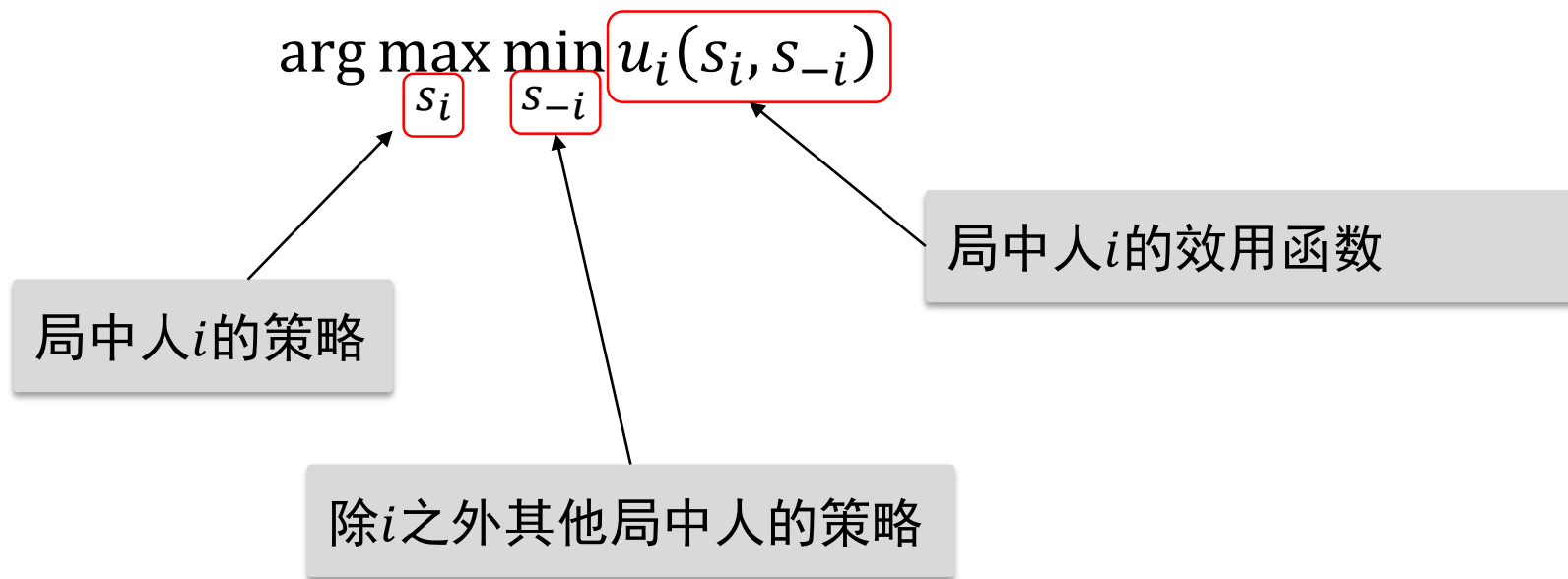
- **maxmin策略和minmax策略**
- 匹配市场
- 中介市场
- 议价权



# maxmin策略

## ■ maxmin策略

- 最大化自己最坏情况时的效用（收益）



# maxmin策略示例

## ■ 性别大战

- 妻子的策略：以概率 $p$ 选择韩剧，以概率 $1 - p$ 选择体育
- 丈夫的策略：以概率 $q$ 选择韩剧，以概率 $1 - q$ 选择体育

## ■ 妻子的期望收益

$$u_w(p, q) = 2pq + (1 - p)(1 - q) = 3pq - p - q + 1$$

## ■ 妻子的期望收益关于丈夫的策略 $q$ 是单调的

- 最小值的可能取值点： $q = 0$ 或 $q = 1$

## ■ 妻子的最坏期望收益

$$\min_q u_w(p, q) = \min(1 - p, 2p)$$

## ■ 妻子的maxmin策略为

$$\arg \max_p \min_q u_w(p, q)$$

		妻子	
		韩剧	体育
丈夫	韩剧	1,2	0,0
	体育	0,0	2,1

丈夫:  $h$       妻子:  $w$

# maxmin策略示例

## ■ 性别大战

$$\arg \max_p \min_q u_w(p, q) = \arg \max_p \min(1 - p, 2p)$$

## ■ 解得

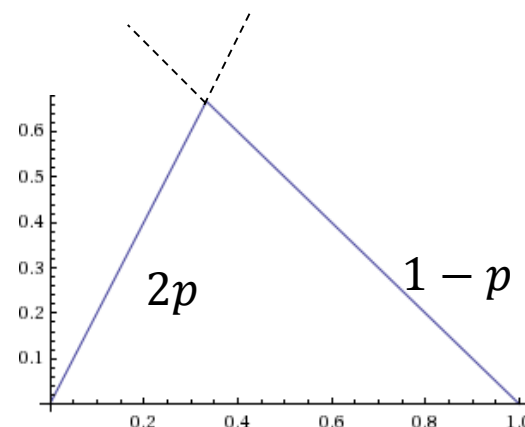
□  $p = \frac{1}{3}$

## ■ 妻子的maxmin策略

□ 1/3概率选择韩剧， 2/3概率选择体育

## ■ 同理，丈夫的maxmin策略

□ 2/3概率选择韩剧， 1/3概率选择体育



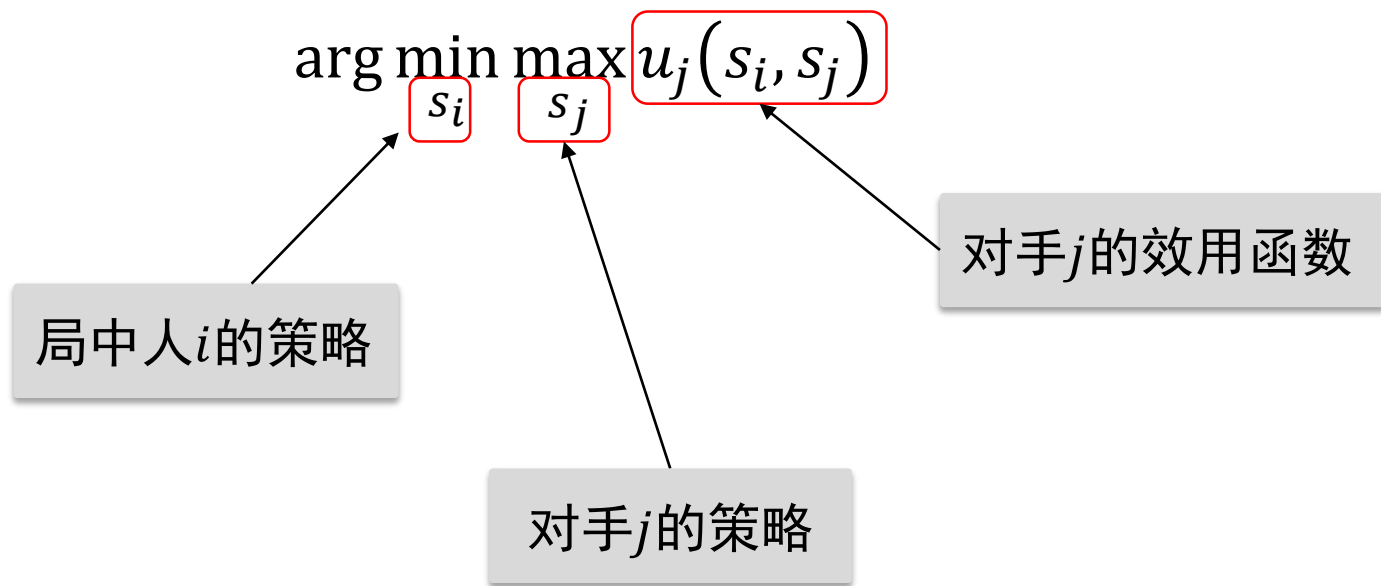
# maxmin策略

- 为什么要用maxmin策略？
  - 最小化损失，控制风险
  - 预防其它局中人的不理性给自己带来损失
  - .....

# minmax策略

## ■ minmax策略

- 最小化对手的最大收益（收益）



# minmax策略示例

## ■ 性别大战

- 妻子的策略：以概率 $p$ 选择韩剧，以概率 $1 - p$ 选择体育
- 丈夫的策略：以概率 $q$ 选择韩剧，以概率 $1 - q$ 选择体育

## ■ 丈夫的期望收益（注意：妻子的minmax策略考虑到是丈夫的收益）

$$u_h(p, q) = pq + 2(1 - p)(1 - q) = 3pq - 2p - 2q + 2$$

## ■ 丈夫的期望收益关于其策略 $q$ 是单调的

- 最大值的可能取值点： $q = 0$ 或 $q = 1$

## ■ 丈夫的最好期望收益

$$\max_q u_h(p, q) = \max(2 - 2p, p)$$

丈夫

## ■ 妻子的minmax的策略为

$$\arg \min_p \max_q u_h(p, q)$$

		妻子	
		韩剧	体育
丈夫	韩剧	1,2	0,0
	体育	0,0	2,1

丈夫:  $h$       妻子:  $w$

# minmax策略示例

## ■ 性别大战

$$\arg \min_p \max(2 - 2p, p)$$

## ■ 解得

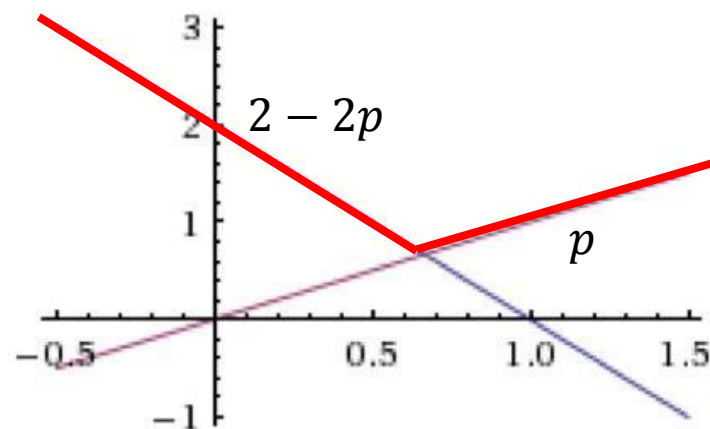
□  $p = \frac{2}{3}$

## ■ 妻子的minmax策略

□ 2/3概率选择韩剧，1/3概率选择体育

## ■ 同理，丈夫的minmax策略

□ 1/3概率选择韩剧，2/3概率选择体育



# maxmin策略和minmax策略

## ■ 性别大战小结

### □ maxmin策略（以我为主）

- 妻子1/3概率选择韩剧，2/3概率选择体育
- 丈夫2/3概率选择韩剧，1/3概率选择体育

### □ minmax策略（抑制对手）

- 妻子2/3概率选择韩剧，1/3概率选择体育
- 丈夫1/3概率选择韩剧，2/3概率选择体育

### □ 混合纳什均衡策略（抑制对手）

- 妻子2/3概率选择韩剧，1/3概率选择体育
- 丈夫1/3概率选择韩剧，2/3概率选择体育

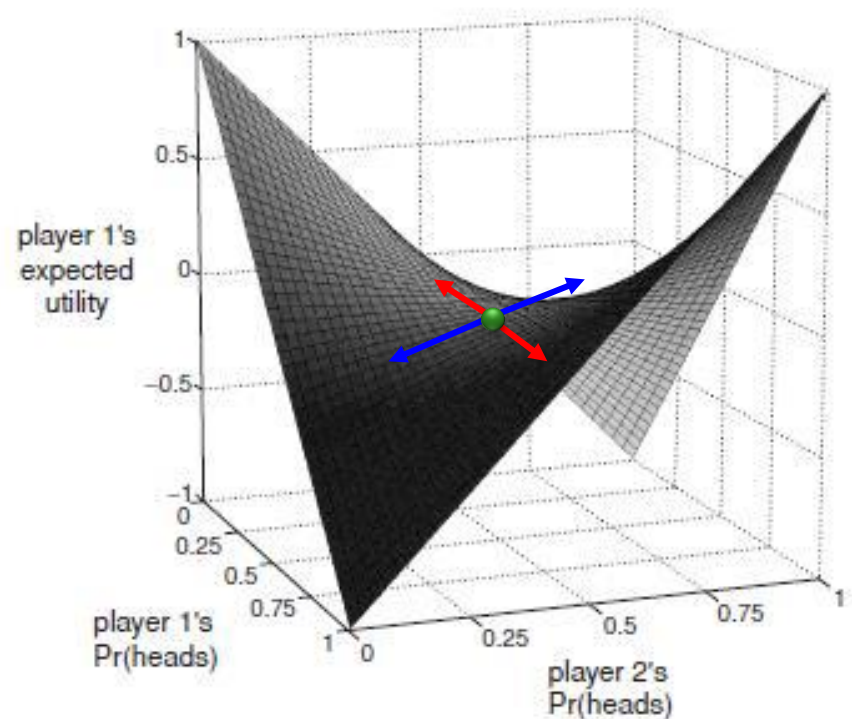


# maxmin策略和minmax策略

- 零和博弈情况下
  - minmax和maxmin是对偶的
  - minmax策略和maxmin策略等价于纳什均衡策略

		玩家二	
玩家一		Heads	Tails
	Heads	1,-1	-1,1
	Tails	-1,1	1,-1

零和博弈的例子



# 课程内容

- maxmin策略和minmax策略
- 匹配市场
- 中介市场
- 议价权

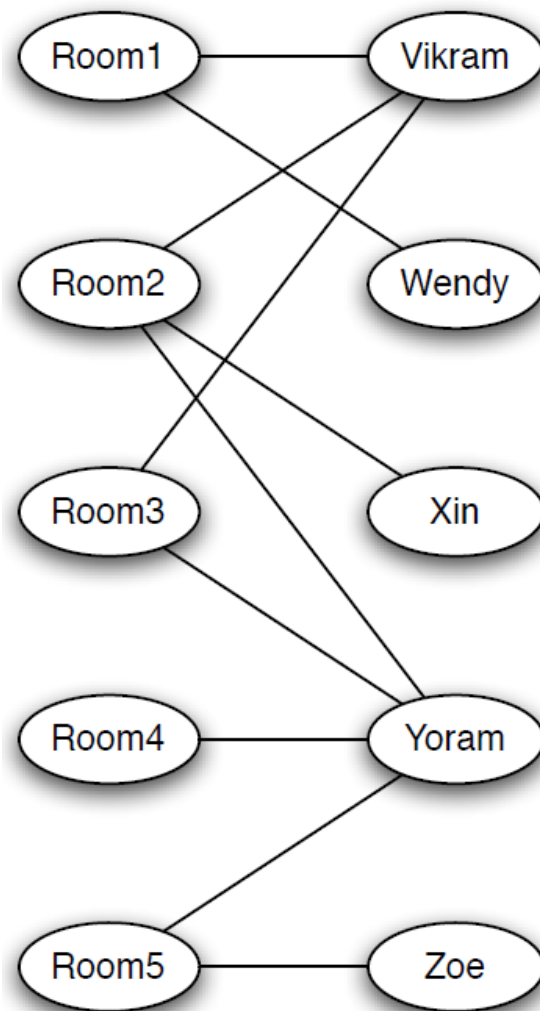
# 匹配问题(matching)

- 生活中有很多匹配问题
  - 分宿舍：学生和宿舍之间的匹配
  - 结婚：男性和女性的匹配
  - 大作业分组：搭档匹配
  - .....
- 匹配蕴含着很多智能问题
  - 价格的作用
  - .....

# 匹配问题示例

## ■ 学生宿舍分配

- 每个学生列出自己可以接受的宿房间
  - Vikram认为宿舍1,2,3均可接受
  - Wendy只接受房间1
- 学生对房间偏好采用一个二部图表示
  - 左侧节点是房间
  - 右侧节点是学生
  - 连边表示偏好关系



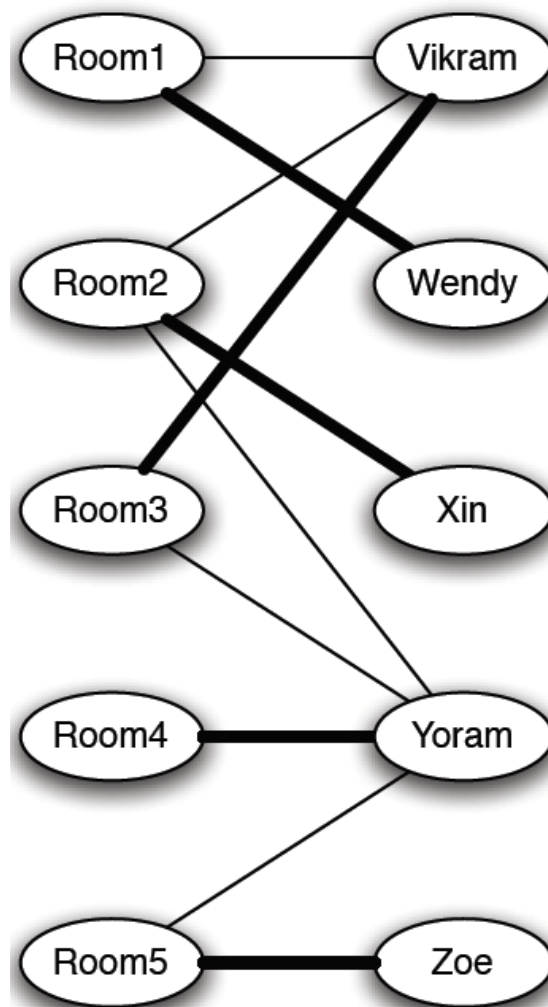
# 完全匹配

## ■ 完全匹配

- 对于两类节点集合大小一样的二部图，选择数目和节点个数一样的边，使得每类节点中的任意一个节点在另一类节点中都有唯一的对应者

## ■ 如何判断一个二部图是否存在完全匹配呢？

- 如果存在，找到这个完全匹配即可
- 如果不存在，怎么办呢？



# 匹配定理

## ■ 匹配定理

- 对于左右两部节点数相同的二部图，如果其不存在完全匹配，那么该二部图一定包含一个受限集。

## ■ 受限集

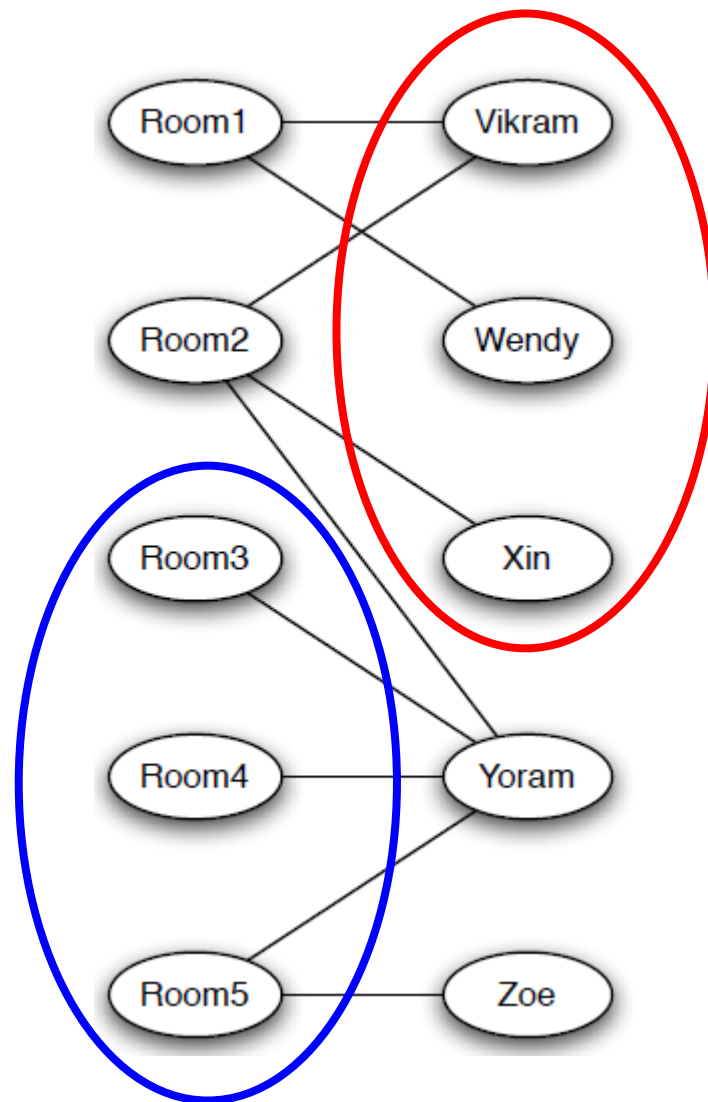
- 假设 $S$ 是二部图某部节点集的子集， $N(S)$ 是 $S$ 的邻居节点集合（注意：该集合的节点一定来自二部图的另一部节点集合），如果 $N(S)$ 中的节点个数 $|N(S)|$ 小于 $S$ 中的节点个数 $|S|$ ，即 $|N(S)| < |S|$ ，则称 $S$ 为受限集

# 匹配定理

## ■ 完全匹配不存在的例子

## ■ 受限集

- 受限集总是成对出现
- {Vikram, Wendy, Xin}
- {Room3, Room4, Room5}
- .....



# 更一般的匹配问题

- 前面的宿舍分配问题中，每个人只列出可接受的房间，更一般的情形是每个人对于房间给出一个估价
- 前面的例子可以看成是一个打分为0和1的特例

		估价
		Valuations
Room1	Xin	12, 2, 4
Room2	Yoram	8, 7, 6
Room3	Zoe	7, 5, 2



# 最优匹配

## ■ 匹配的效用

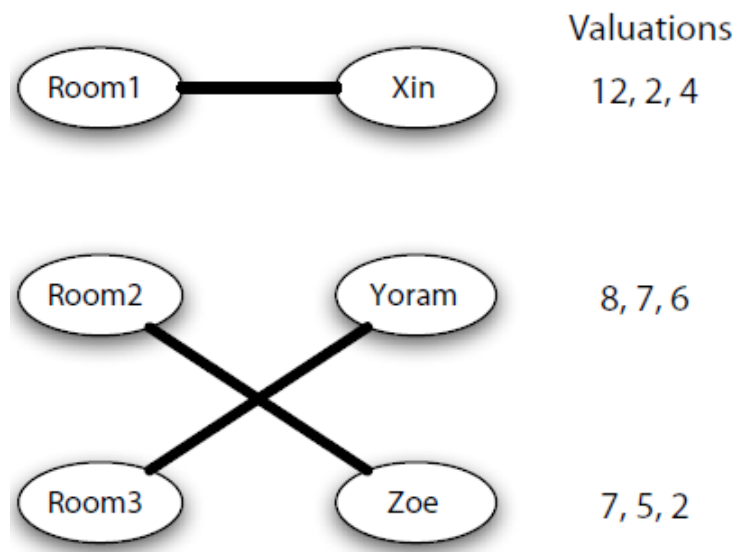
- 成功匹配的估价之和，称为匹配的效用

## ■ 最优匹配

- 效用最大的匹配

## ■ 最优匹配对于个体而言不一定最优，甚至是最差的

- Yoram和Zoe的最优选择是Room1
- Yoram的最差选择是Room3



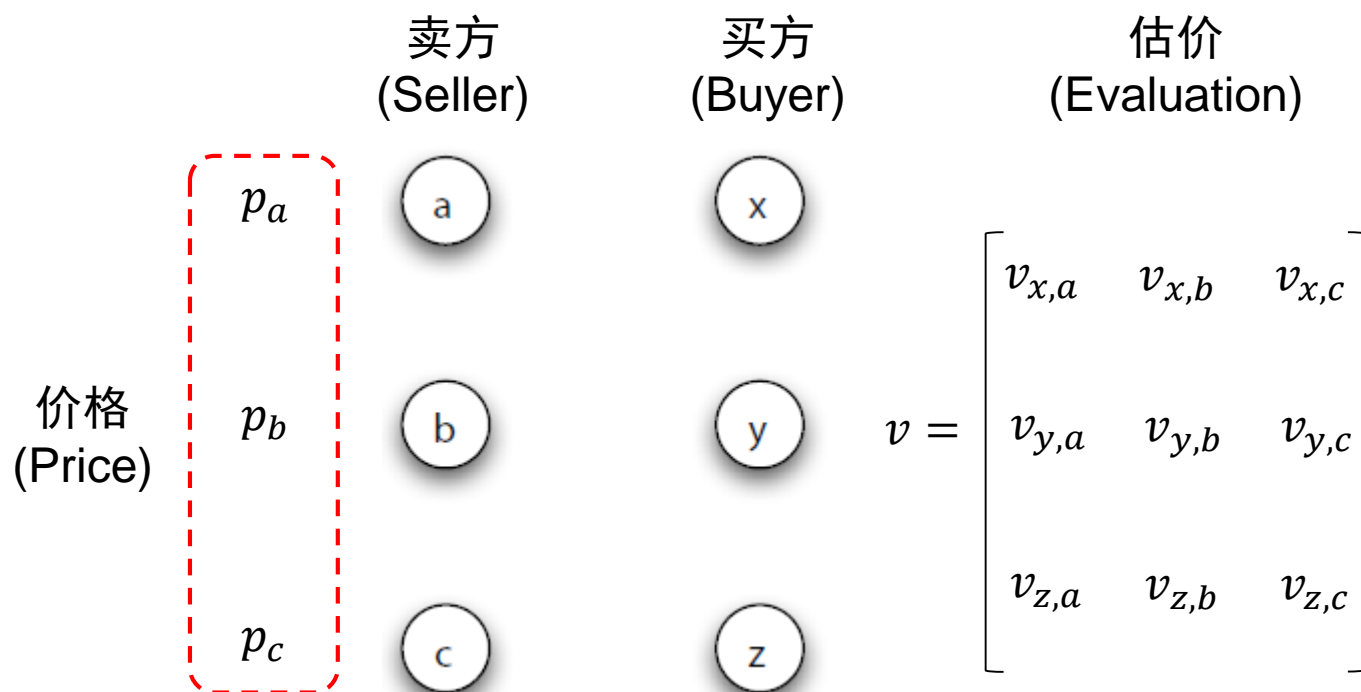
最优匹配  
效用：12+6+5=23

# 最优匹配

- 如何找到最优匹配呢？
  - 穷举搜索
    - 时间复杂度： $O(n!)$
  - 有更高效的方法吗？
  - 需要宿舍管理员这样的全局角色吗？
    - 价格

# 价格导向的匹配

## ■ 价格导向的匹配问题的形式化表示

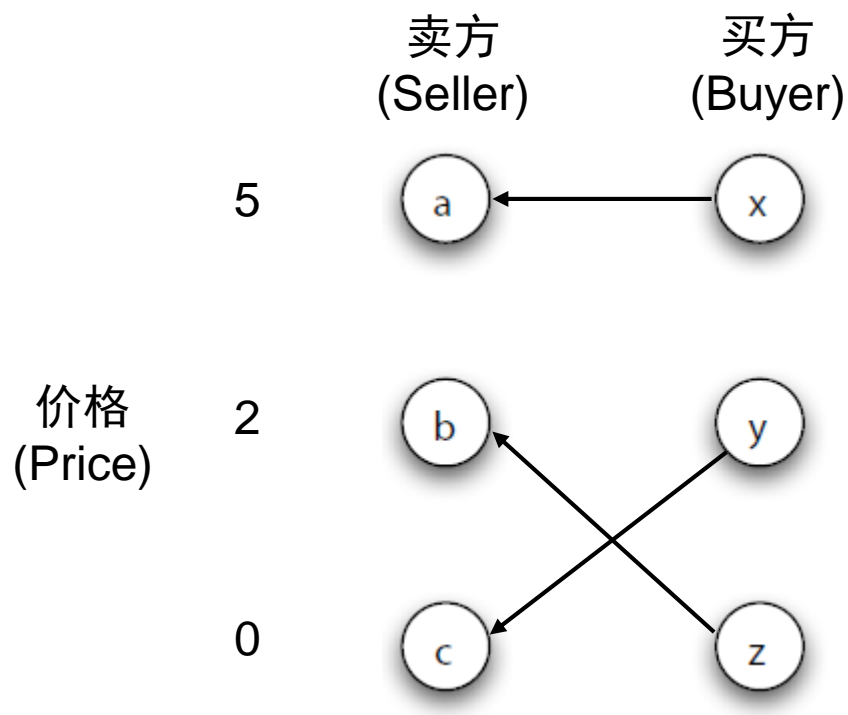


# 价格导向的匹配

- 估价不低于价格时，买方可以接受
  - 如果  $v_{x,a} \geq p_a$ ，则买方  $x$  可以接受卖方  $a$  的价格，如果成交，买方  $x$  获得的效用是
$$v_{x,a} - p_a$$
  - 对于买方  $x$ ，如果使其效用最大的卖方是  $a$ ，那么在二部图中添加一条由  $x$  指向  $a$  的边
  - 对于同一个买方，如果有多个卖方使其效用最大，则添加多条边
  - 最终得到一个“买方偏好图”

# 价格导向的匹配

## ■ 示例



买方偏好图

估价 (Evaluation)

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>x</i>	12,	4,	2
<i>y</i>	8,	7,	6
<i>z</i>	7,	5,	2

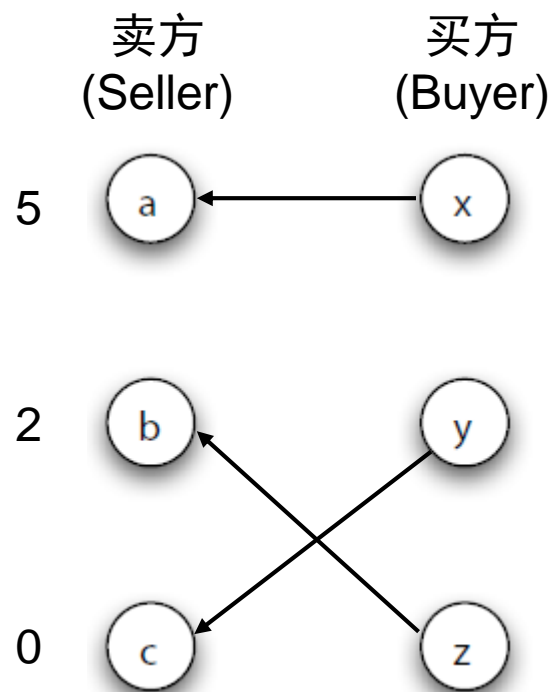
$v =$

# 市场结清价格

## ■ 市场结清(Market-Clearing)

□ 每个卖方和买方都成交了

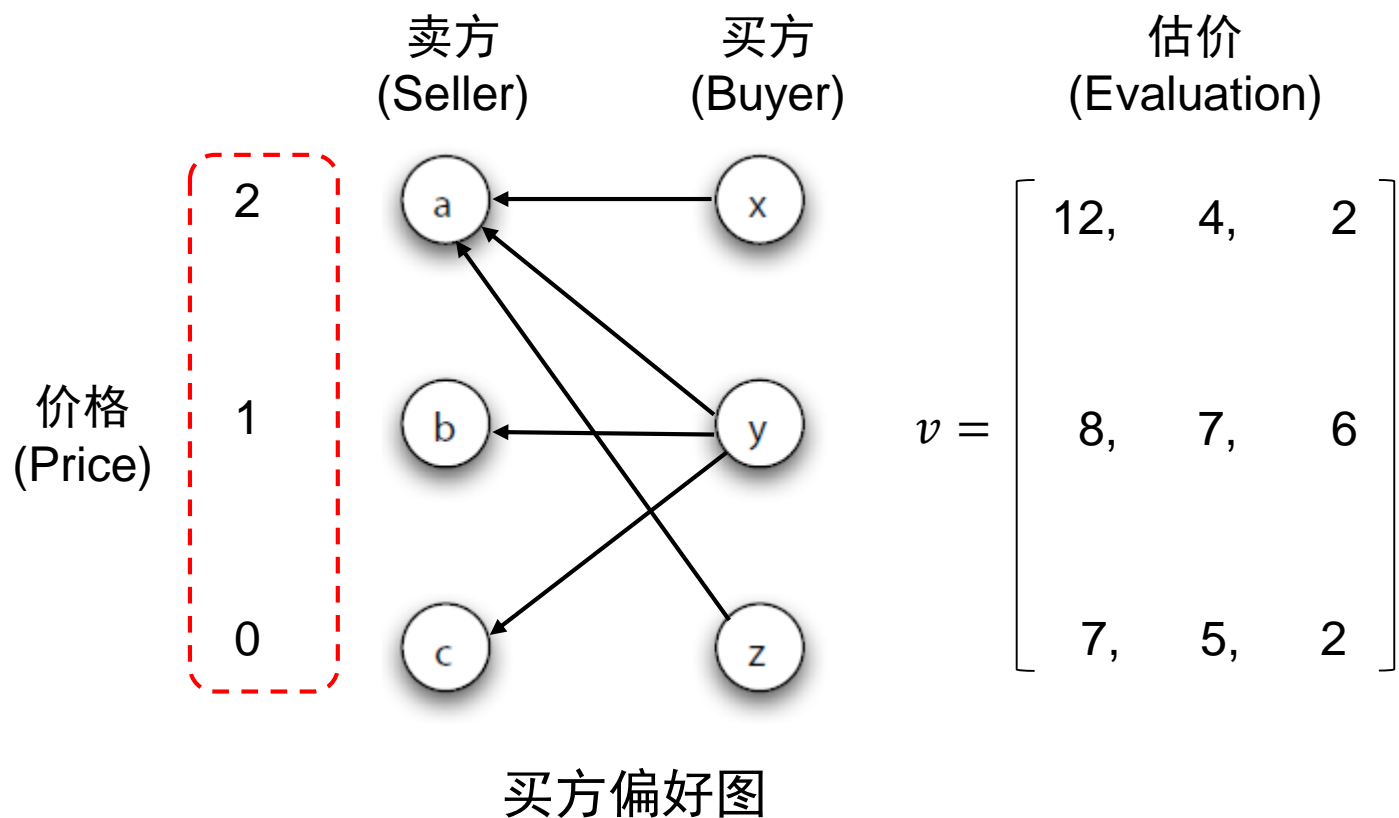
■ 给定买方报价的情况下，如果卖方的某种价格使得对应的**买方偏好图中存在完全匹配**，则称卖方的这组价格为**市场结清价格**



买方偏好图

# 市场结清价格

## ■ 未实现市场结清的价格



# 市场结清价格的性质

## ■ 最优性

- 市场结清价格所对应的买方偏好图中得到的完全匹配是最优匹配

## ■ 存在性

- 对于任意买方估价，市场结清价格一定存在



# 市场结清价格的存在性

## ■ 寻找市场结清价格的过程

- 步骤1：初始时，所有卖方的价格为0
- 步骤2：构建买方偏好图，检查其是否存在完全匹配
  - 如果存在，当前价格是市场结清价格
  - 如果不存在，从图中找到一个受限集 $S$ （一定是买方）及其邻居 $N(S)$ ，让 $N(S)$ 中的每个卖家的价格增加1
- 回到步骤2（当所有价格都为正时，可以通过让所有价格减去最低价格，使最低价格为0，此操作不影响结果）

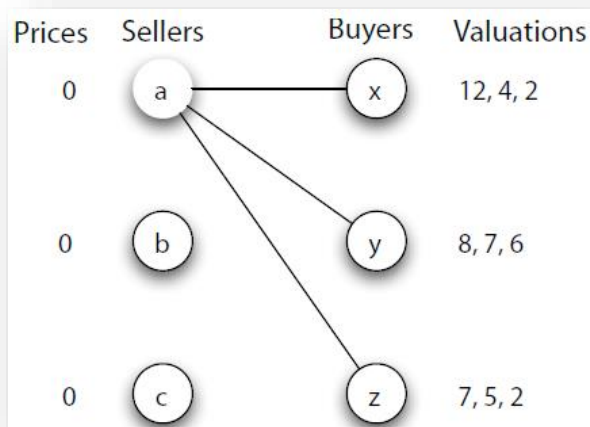
## ■ 收敛性

- 买卖双方的总收益有限
- $|N(S)| < |S|$ ，总收益下降，但不会小于0

# 市场结清价格

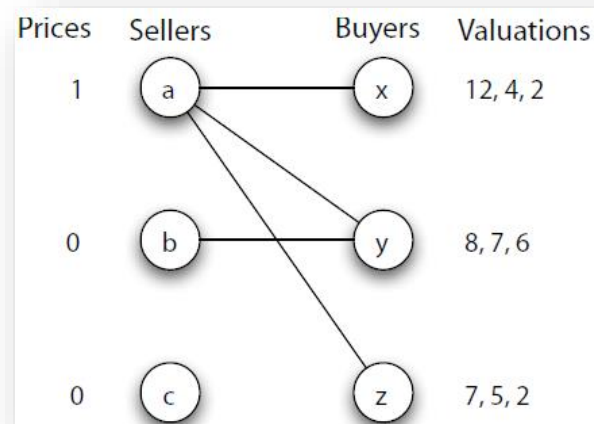
## 寻找市场结清价格的过程示例

第一轮



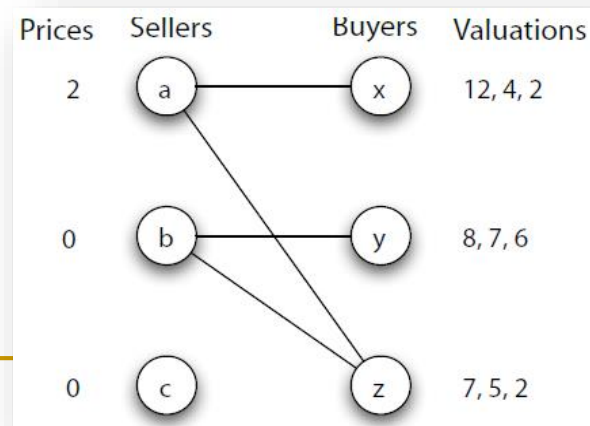
受限集  $S=\{x,y,z\}$ ,  $N(S)=\{a\}$

第二轮



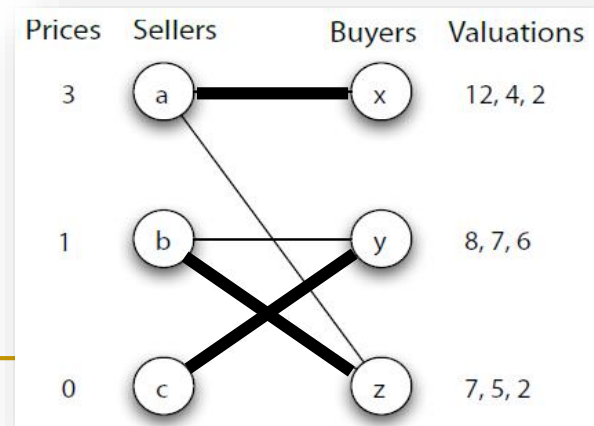
受限集  $S=\{x,z\}$ ,  $N(S)=\{a\}$

第三轮



受限集  $S=\{x,y,z\}$ ,  $N(S)=\{a,b\}$

第四轮



# 市场结清价格的存在性

## ■ 小结

- 完全匹配是否存在可以通过寻找受限集来判断
- 价格能够引导市场优化配置
- 市场结清价格总是存在
- 市场结清价格使得买卖双方总效用最优

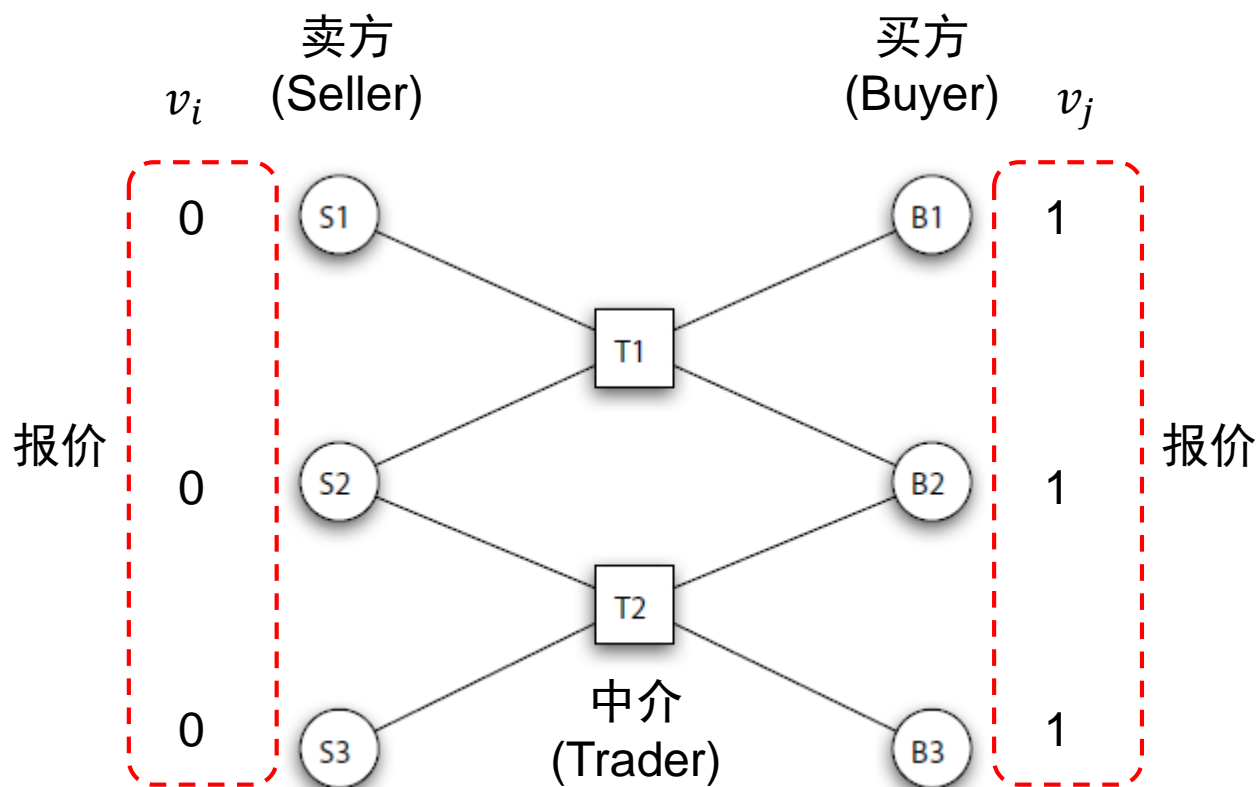
课间休息

# 课程内容

- maxmin策略和minmax策略
- 匹配市场
- 中介市场
- 议价权

# 中介市场

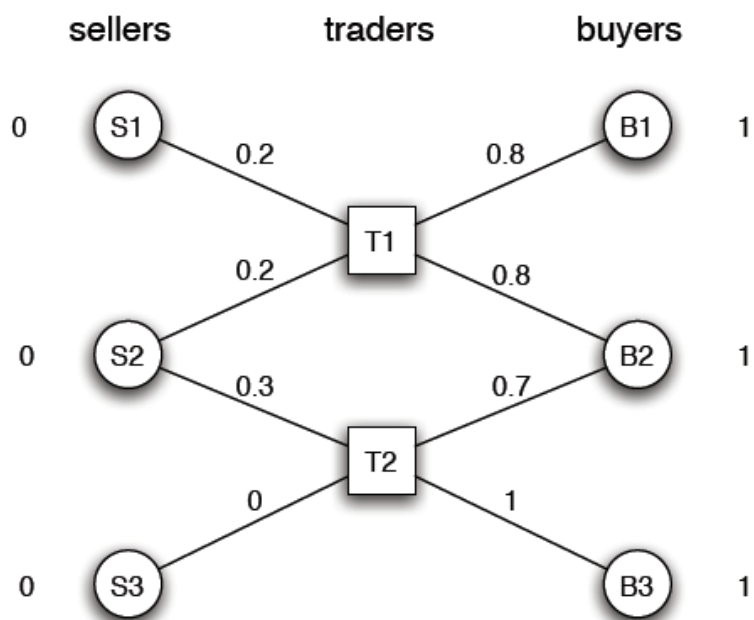
## ■ 中介市场的形式化表示



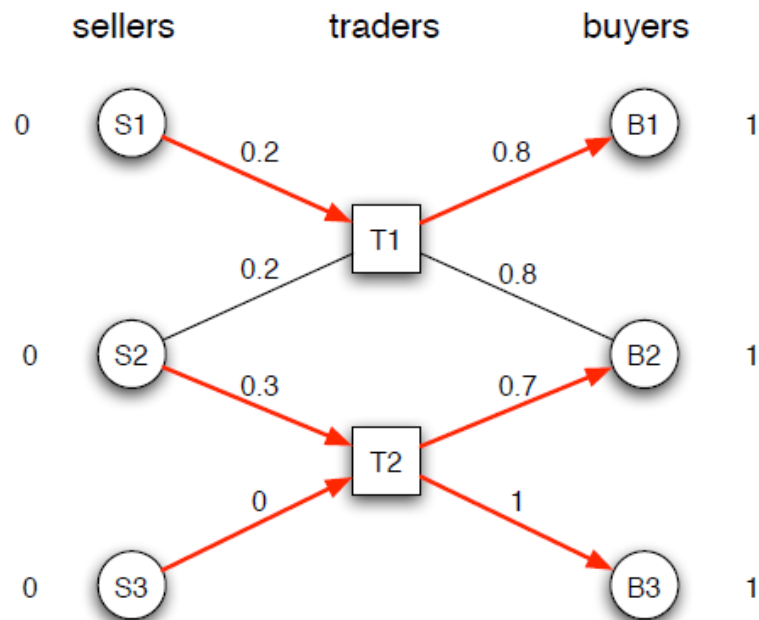
# 中介市场

## ■ 中介市场博弈规则

- 中介向买方、卖方报价
- 买方和卖方根据中介报价选择是否交易



中介报价情况

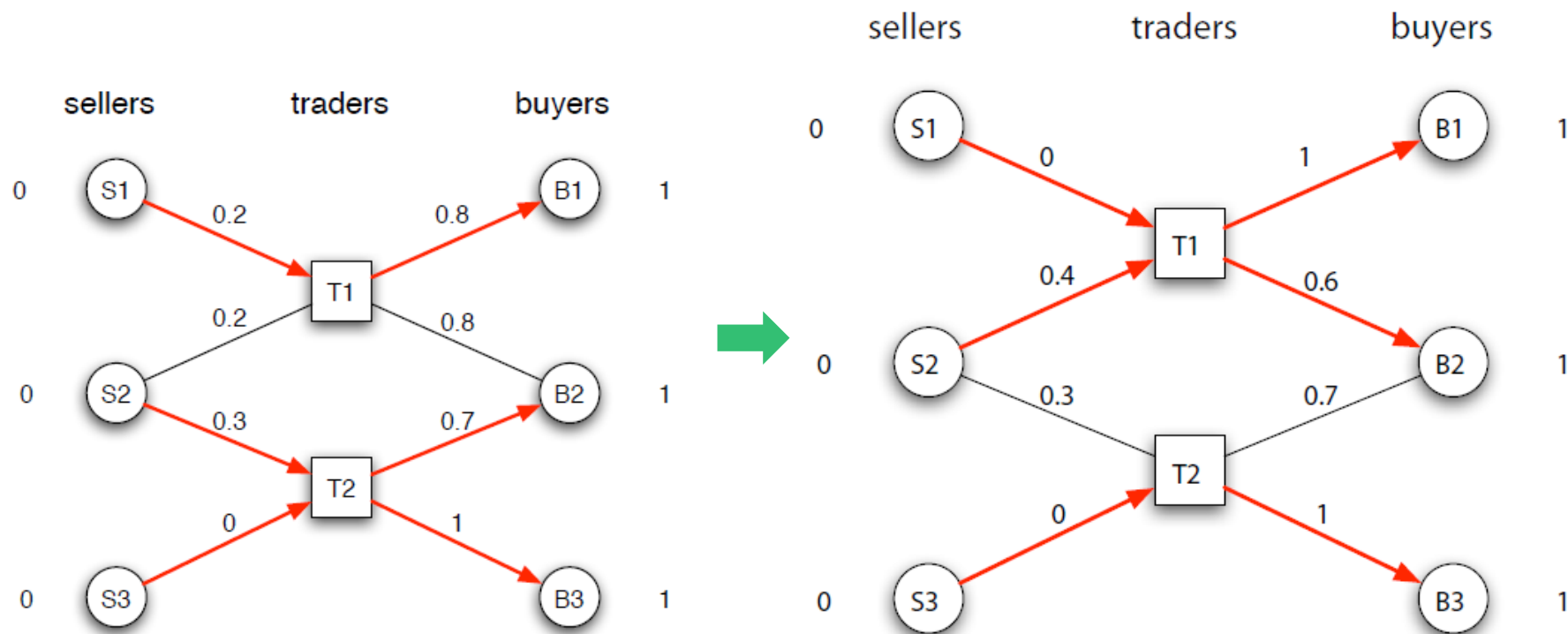


商品流动情况

# 中介市场

## ■ 中介市场的均衡态

- 买方和卖方的策略是确定的(首价竞拍)，且为中介所知
- 中介之间进行博弈



T1的收益: 0.6  
T2的收益: 1.4



T1为提高收益而改变  
对S2和B2的报价



T1的收益: 1.2  
T2的收益: 1



# 中介市场

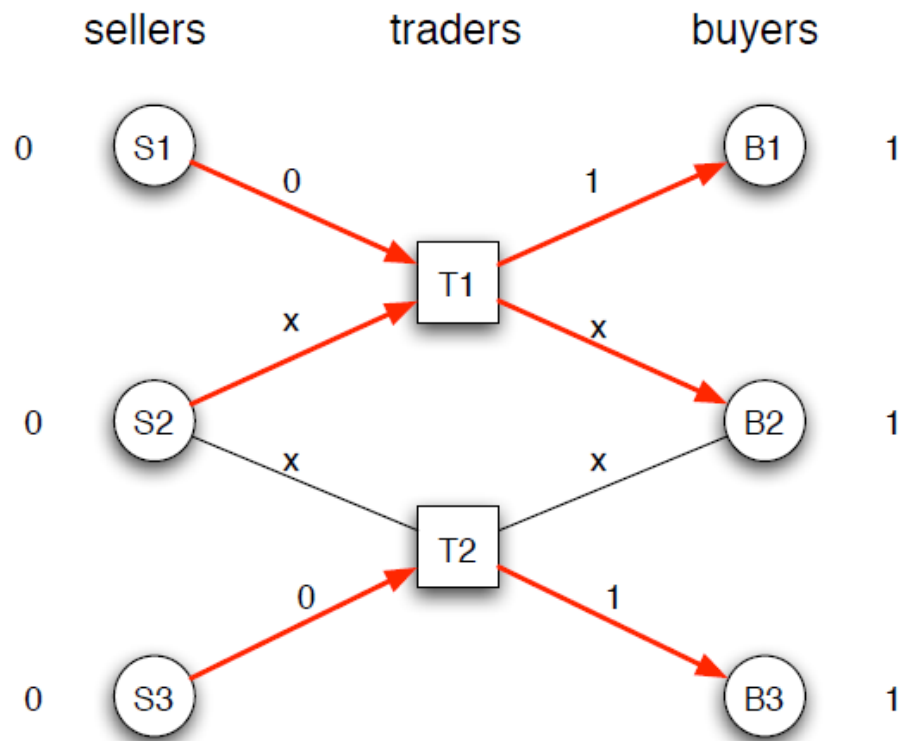
## ■ 中介市场的均衡态

### □ 垄断

- T1垄断和S1、B1的交易，T2垄断和S3、B3的交易

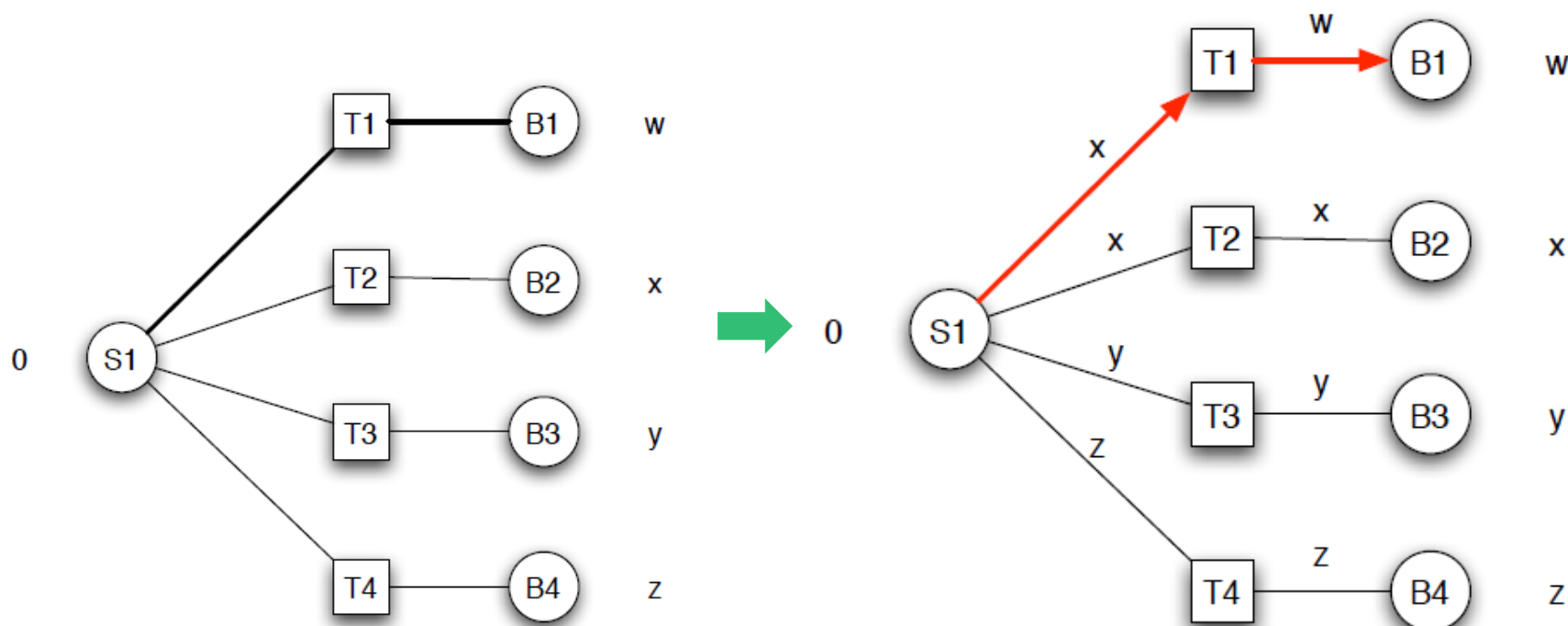
### □ 充分竞争

- T1和T2在和S2、B2的交易中充分竞争



# 中介市场

## ■ 次价拍卖在中介市场中的解释



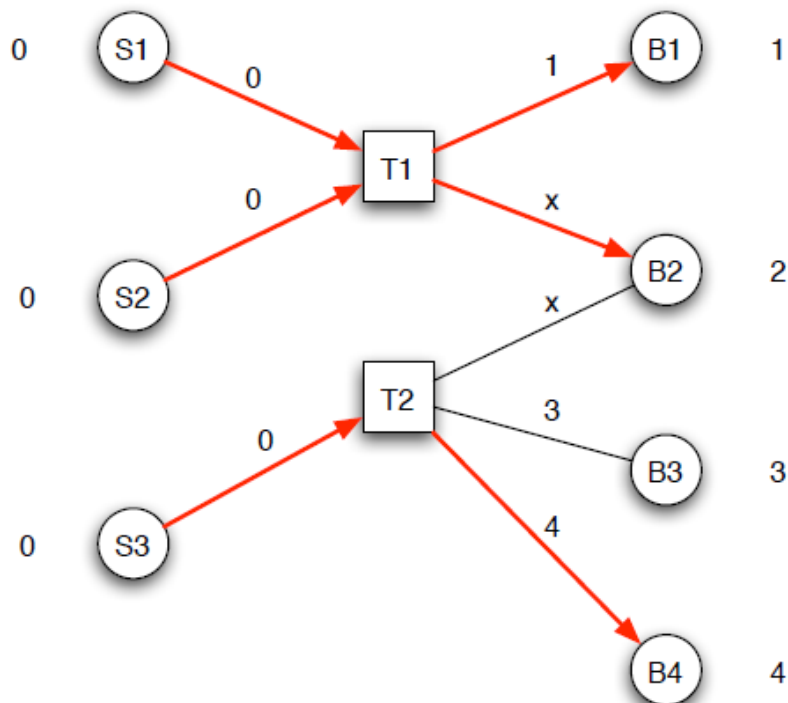
买方向中介报价:  $w \geq x \geq y \geq z$

竞拍成功者以次价成交

# 中介市场

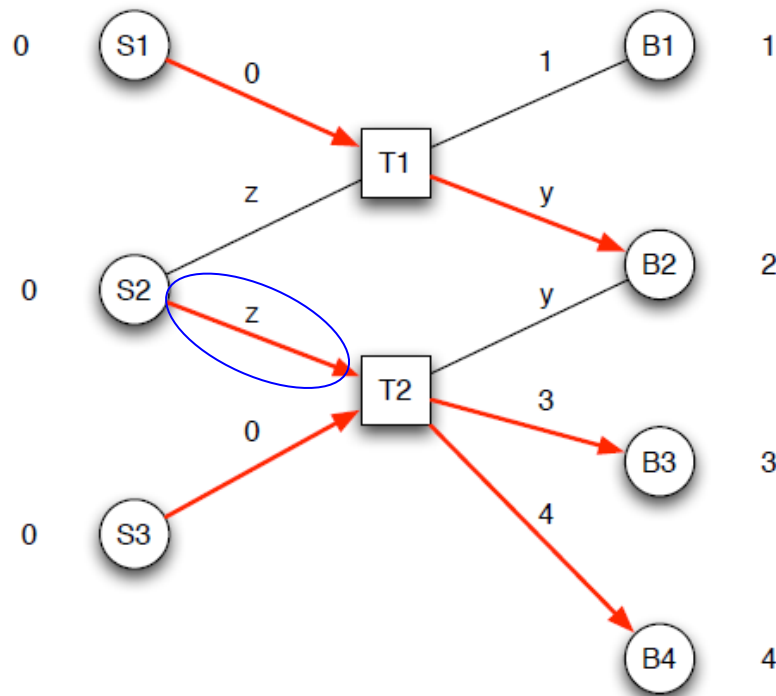
## ■ 引入竞争带来的影响

□ 例子：在S2和T2之间增加一条边



均衡态：  $0 \leq x \leq 2$

实现的社会效用：  $1+2+4=7$



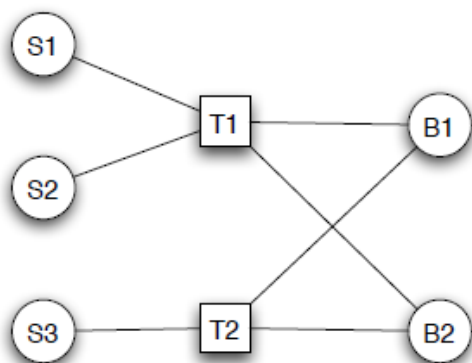
均衡态：  $1 \leq y \leq 2, 2 \leq z \leq 3$

实现的社会效用：  $2+3+4=9$

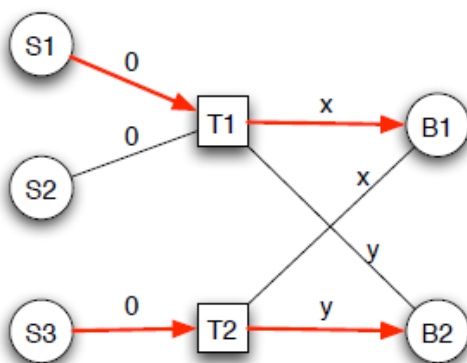
# 中介市场

## ■ 中介的效益

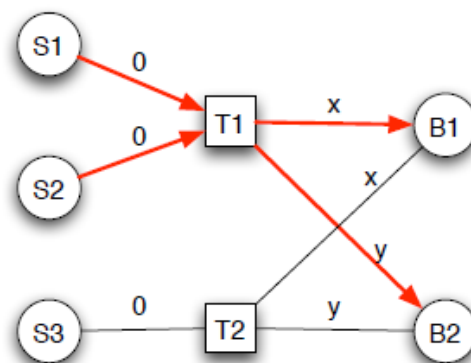
- 小的竞争也可使中介的效益趋近于0



中介市场



均衡态1:  $x=y=0$



均衡态2:  $x=y=0$

# 中介市场

## ■ 小结

- 中介存在于市场竞争不充分的情况下
- 买方和卖方通过中介交易
- 竞争不充分的地方，中介垄断价格
- 竞争充分的地方，中介的收益可以趋近于0

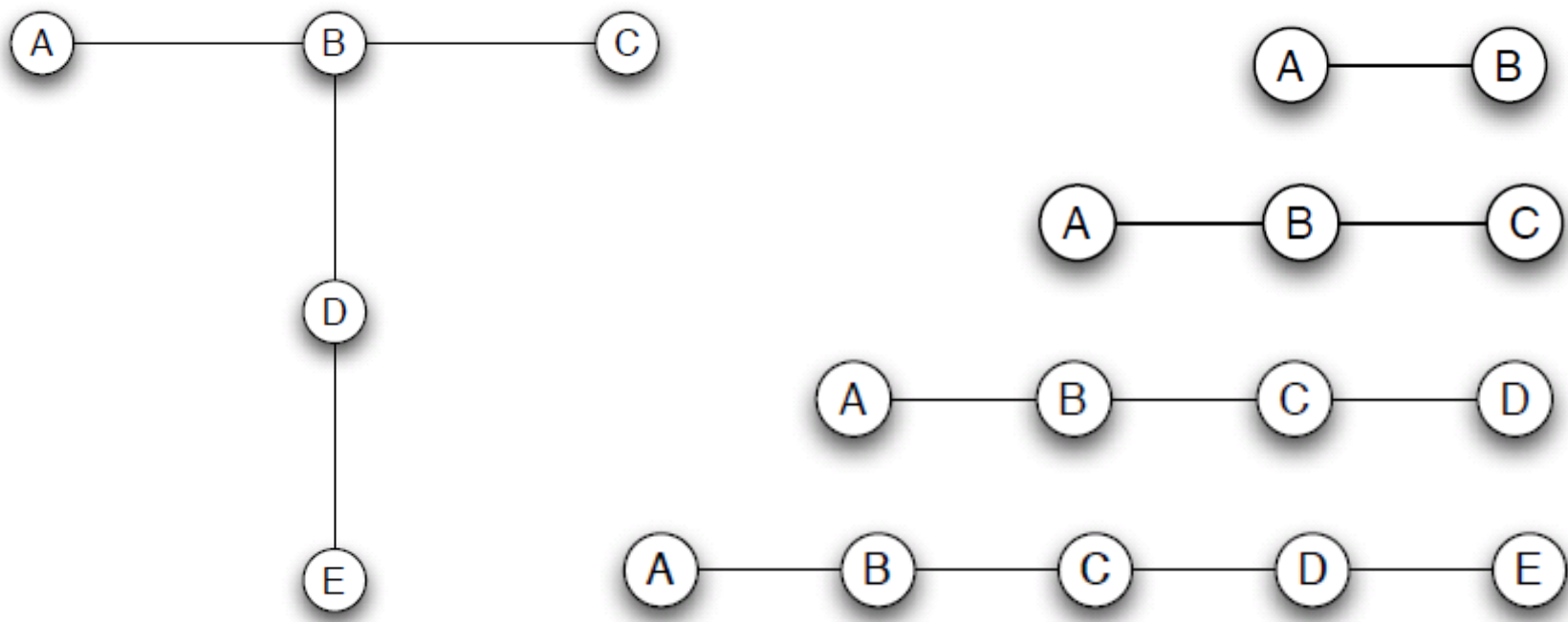
---

# 课程内容

- maxmin策略和minmax策略
  - 匹配市场
  - 中介市场
  - 议价权
-

# 网络中节点位置的重要性

- 节点在网络中所处的位置不同，导致其在博弈中的权利不同



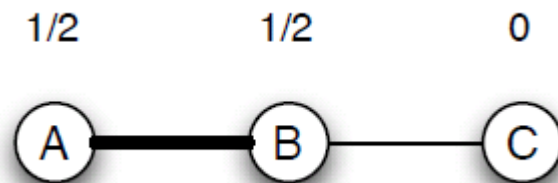
# 网络交换博弈(Network Exchange)

## ■ 找朋友游戏

- 给定一个网络，每个节点代表一个人
- 每个人选择一个人作为自己的好友 (Best friend)
- 达成好友的两个人，可以分配价值为1的东西
- 每个人可以在选择好友向对方报价

## ■ 结局(outcome)

- 游戏结果称为结局
- 结局由节点配对结果和每个节点的收益构成
  - 右图中，配对结果是：A和B配对，C落单；收益是：A和B各1/2，C收益为0





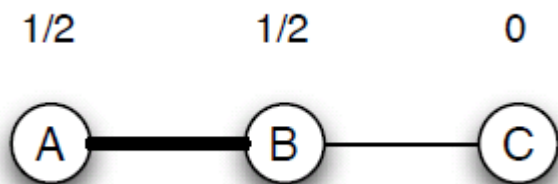
# 结局的稳定性

## ■ 不稳定边

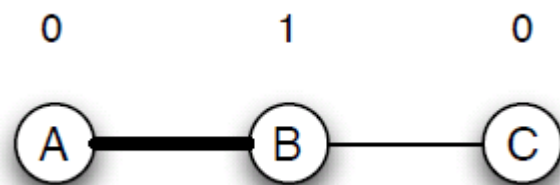
- 对于结局中**未参与配对的边**，如果边的两个端点获得的收益之和小于1，则称这条边为不稳定边
- 不稳定边的存在意味着其两个端点可以通过改变报价而改变结局

## ■ 稳定结局(stable outcome)

- 如果一个结局中不存在不稳定边，则称该结局为稳定结局



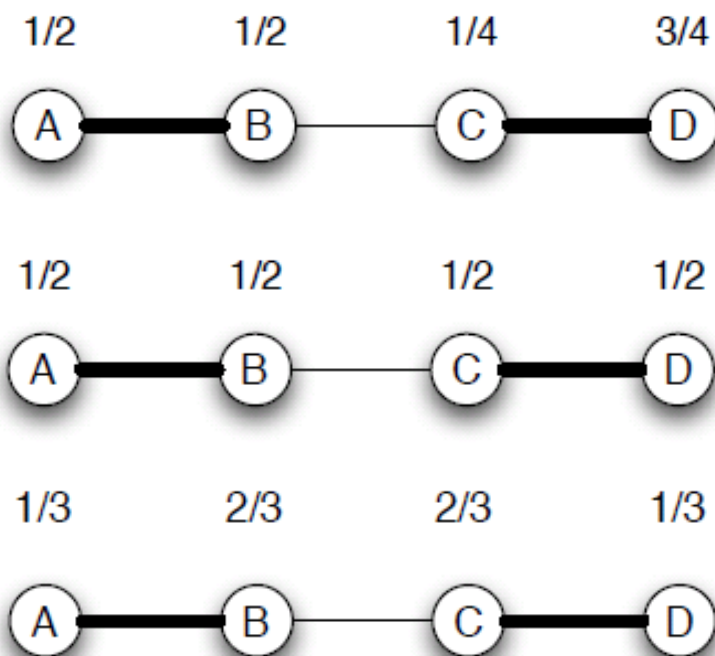
不稳定的结局  
B和C的收益之和小于1



稳定的结局

# 结局的稳定性

- 下列哪些结局是稳定的？

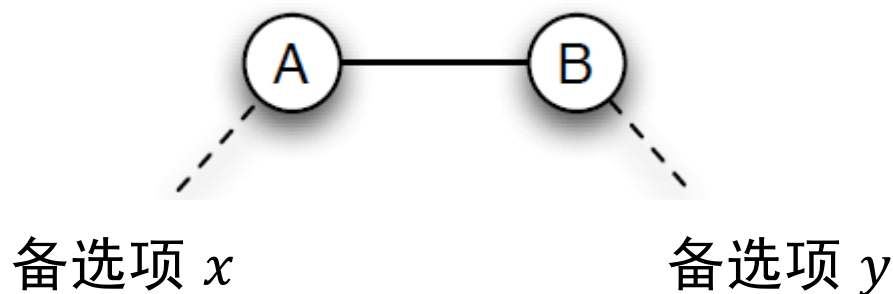


- 上面的例子中，后面两个稳定结局哪个更体现节点的议价权呢？如何判断呢？

# 网络中的议价权

## ■ 有备选项的议价

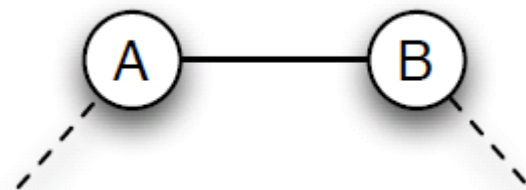
- A和B二人议价，确定分配比例
- A的备选项收益为 $x$
- B的备选项收益为 $y$
- 要求：  $x + y \leq 1$ ； 否则A和B达不成交易



# 纳什议价解

## ■ 议价的对象

- 如何分配“剩余价值”  $s = 1 - x - y$



备选项  $x$

备选项  $y$

## ■ 纳什议价解

- A的收益是:  $x + \frac{s}{2} = \frac{1+x-y}{2}$

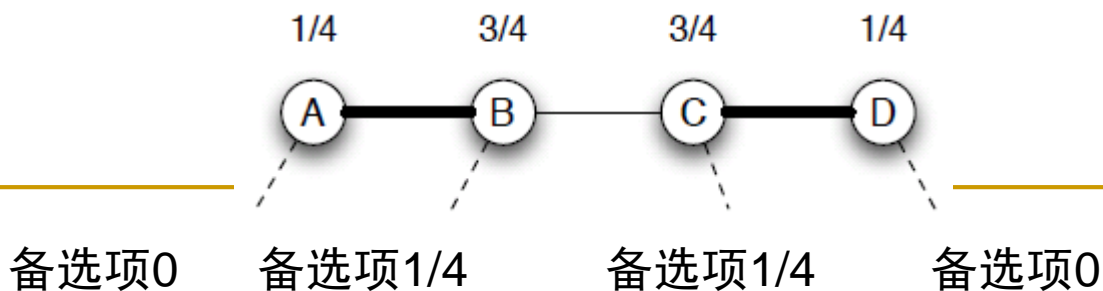
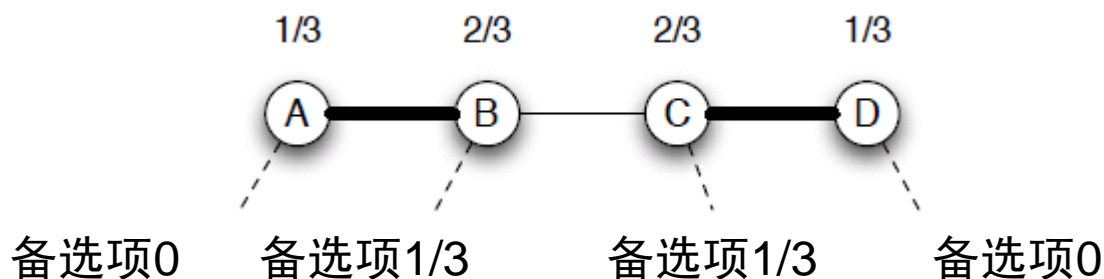
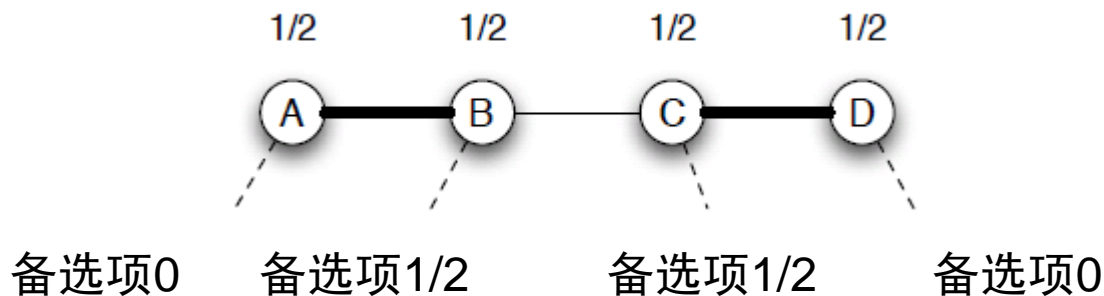
- B的收益是:  $y + \frac{s}{2} = \frac{1+y-x}{2}$

# 均衡结局

- 均衡结局 (balanced outcome)
  - 给定一个结局，如果结局中的任意一个参与配对的边都满足纳什议价解的条件，则称该结局是均衡结局
- 注意：均衡结局一定是稳定结局
  - 因此，在寻找均衡结局时，可以先寻找稳定结局，进而确定均衡结局

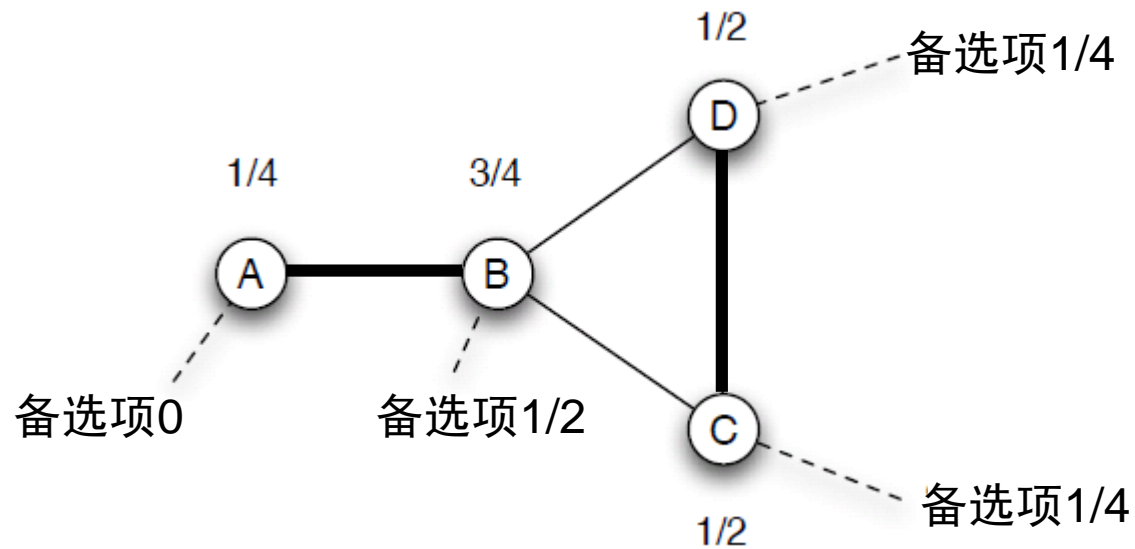
# 均衡结局

## ■ 下列哪些结局是均衡结局？



# 均衡结局

## ■ 案例



# 总结

## ■ 群体智能之博弈

- 博弈的要素：局中人、策略、效用矩阵
- 纳什均衡策略和混合纳什均衡策略
- maxmin和minmax策略
- 议价和拍卖
- 匹配问题中价格的作用
- 纳什议价解和均衡结局