《计算机算法设计与分析》

第四章 贪心方法

马丙鹏

2020年10月08日

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

第四章 贪心方法

- 4.1 一般方法
- 4.2 背包问题
- 4.3 带有限期的作业排序
- 4.4 最优归并模式
- 4.5 最小生成树
- 4.6 单源点最短路径

4.3 带有限期的作业排序

- **1. 问题描述**
  - 假定在一台机器上处理n个作业，
    - 每个作业均可在单位时间内完成；
    - 每个作业i都有一个截至期限d_i>0,
    - 每个作业i在其截至期限以前被完成时，则获得p_i>0的效益。
  - 问题：
    - 求这n个作业的一个子集J，其中的所有作业都可在其截至期限内完成。
    - ——J是问题的一个可行解。
  - 可行解J中的所有作业的效益之和是$\sum_{i\in J} p_i$，具有最大效益值的可行解是该问题的最优解。

4.3 带有限期的作业排序

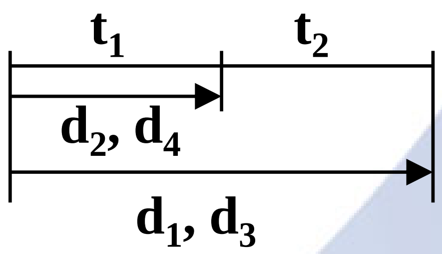
- **1. 问题描述**
  - 目标函数：
    $$\sum_{i \in J} p_i$$
  - 约束条件：
    - 所有的作业都应在其期限之前完成。
  - 分析
    - 如果所有的作业期限“足够宽松”，而使得多有作业都能在其期限之内完成，则显然可以获得当前最大效益值；
    - 否则，将有作业无法完成；
    - ——决策应该执行哪些作业，以获得最大可能的效益值。

4.3 带有限期的作业排序

■ 1. 问题描述

□[例4.2] n=4，$(p_1, p_2, p_3, p_4)=(100, 10, 15, 20)$和$(d_1, d_2, d_3, d_4)=(2, 1, 2, 1)$。可行解如下表所示：

	可行解J	处理顺序	效益值$\sum p_j$
①	(1)	1	100
②	(2)	2	10
③	(3)	3	15
④	(4)	4	20
⑤	(1, 2)	2, 1	110
⑥	(1, 3)	1, 3 或 3, 1	115
⑦	(1, 4)	4, 1	120
⑧	(2, 3)	2, 3	25
⑨	(3, 4)	4, 3	35



问题的最优解是⑦。所允许的处理次序是：先处理作业4再处理作业1。

4.3 带有限期的作业排序

- 2. 贪心策略求解
  - 度量标准的选择
    - 以目标函数 $\sum_{i\in J} p_i$ 作为度量。
    - 度量标准：
      - ✓下一个要计入的作业将是，使得在满足所产生的J是一个可行解的限制条件下让 $\sum_{i\in J} p_i$ 得到最大增加的作业。
    - 处理规则：
      - ✓按p_i的非增次序来考虑这些作业。

4.3 带有限期的作业排序

■ 2. 贪心策略求解

例4.2求解： $(p_1, p_2, p_3, p_4)=(100, 10, 15, 20)$

$(d_1, d_2, d_3, d_4)=(2, 1, 2, 1)$

① 首先令J=Φ， $p_1 > p_4 > p_3 > p_2$， $\sum_{i\in J} p_i = 0$

② 作业1具有当前的最大效益值，且{1}是可行解，所以作业1计入J；

③ 在剩下的作业中，作业4具有最大效益值，且{1, 4}也是可行解，故作业4计入J，即J={1, 4}；

④ 考虑{1, 3, 4}和{1, 2, 4}均不能构成新的可行解，作业3和2将被舍弃。

故最后的J={1, 4}，最终效益值=120(问题的最优解)。

4.3 带有限期的作业排序

■ 2. 贪心策略求解

□作业排序算法的概略描述

算法4.3 作业排序算法的概略描述

```
procedure GREEDY-JOB(D, J, n)
  //作业按p1≥p2≥…≥pn的次序输入，它们的期限值D(i)≥1,
   1≤i≤n, n≥1。J是在它们的截止期限完成的作业的集合//
  J←{1}
  for i←2 to n do
    if J∪{i}的所有作业能在它们的截止期限前完成
      then J←J∪{i}
    endif
  repeat
end GREEDY-JOB
```

4.3 带有限期的作业排序

■ 3. 最优解证明

定理4.2 算法4.3对于作业排序问题总是得到问题的一个最优解。

证明：

设J是由算法所得的贪心解作业集合，I是一个最优解的作业集合。

① 若I=J，则J就是最优解；

② 否则$I \not\subset J$且$J \not\subset I$，即至少存在两个作业a和b，使得$a \in J$且$a \notin I$, $b \in I$且$b \notin J$。

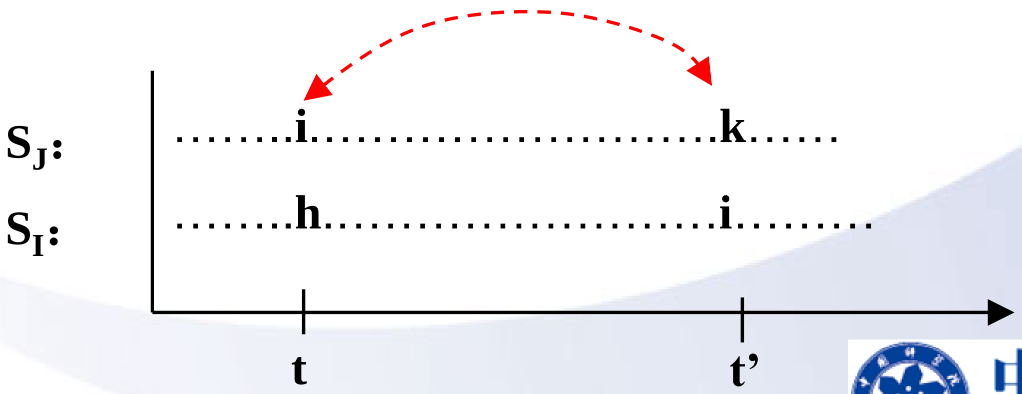
4.3 带有限期的作业排序

设S_J和S_I分别是J和I的可行的调度表。因为J和I都是可行解，故这样的调度表一定存在；

设i是既属于J又属于I的一个作业，并i设在调度表S_J中的调度时刻是[t, t+1]，而在S_I中的调度时刻是[t', t'+1]。

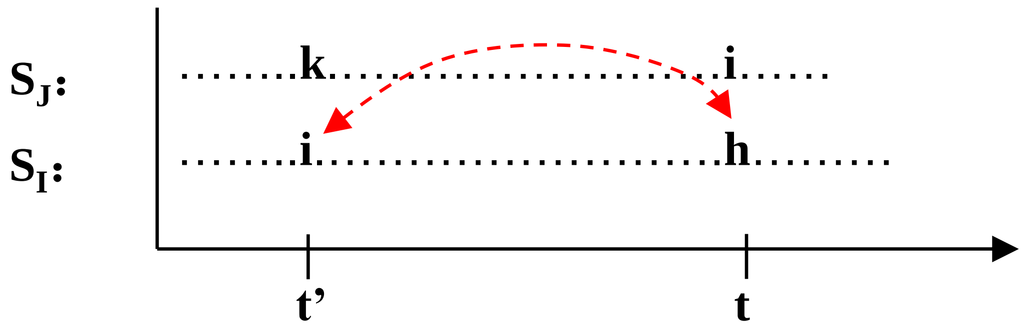
在S_J和S_I中作如下调整：

- 若$t<t'$，则将S_J中在[t', t'+1]时刻调度的那个作业(如果有的话)与i相交换。如果J中在[t', t'+1]时刻没有作业调度，则直接将i移到[t', t'+1]调度。——新的调度表也是可行的。反之，



4.3 带有限期的作业排序

- 若t’<t，将S_I中在[t, t+1]时刻调度的那个作业(如果有的话)与i相交换。如果I中在[t, t+1]时刻没有作业调度，则直接将i移到[t, t+1]调度。——同样，新的调度表也是可行的。

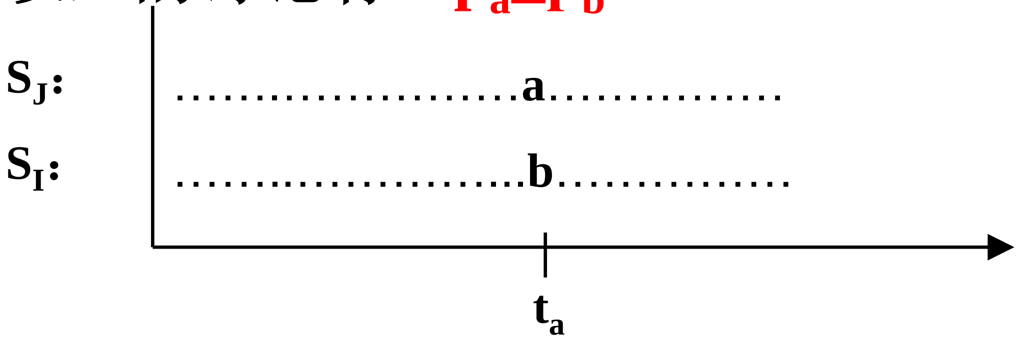


- 对J和I中共有的所有作业作上述的调整。设调整后得到的调度表为S'_J和S'_I，则在S'_J和S'_I中J和I中共有的所有作业将在相同的时间被调度。

4.3 带有限期的作业排序

设a是使得a∈J且a∉I的一个具有**最高效益值**的作业，由算法处理规则可得：对于在I中而不在J中的作业所有b，有: $p_a \geq p_b$。

设a在S'_J中的调度时刻是$[t_a, t_a+1]$， b是S'_I中该时刻调度的作业。根据以上的讨论有：$p_a \geq p_b$



在S'_I中，去掉作业b，而去调度作业a，得到的是作业集合$I'=I-\{b\}\cup\{a\}$的 一个可行的调度表，且I'的效益值不小于I的效益值。而I'中比I少了一个与J不同的作业。

重复上述的转换，可使I在不减效益值的情况下转换成J。从而J至少有和I一样的效益值。所以J也是最优解。

证毕。

4.3 带有限期的作业排序

- 4. 如何判断J的可行性
  - 怎样才能称“J是可行的”？
    - J中的作业能够按照某种不违反任一作业时间期限的次序执行。
  - 方法一：
    - 检验J中作业所有可能的排列，对于任一种次序排列的作业排列，判断这些作业是否能够在其期限前完成。
    - 对于所给出的一个排列$\sigma = i_1 i_2 \ldots i_k$，由于作业$i_j$完成的最早时间是j，因此只要判断出σ排列中的每个作业$d_{ij} \geq j$，就可得知σ是一个允许的调度序列，从而J是一个可行解。

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

4.3 带有限期的作业排序

- **4. 如何判断J的可行性**
  - 方法一：
    - 反之，如果σ排列中有一个$d_{ij}<j$，则σ将是一个行不通的调度序列，因为至少作业i_j不能在其期限之前完成。
    - 若J中有k个作业，则将要检查**k!**个序列。
  - 方法二：
    - 检查J中作业的一个特殊序列就可判断J的可行性：按照作业期限的非降次序排列的作业序列。

4.3 带有限期的作业排序

定理4.3 设J是k个作业的集合，$\sigma=i_1i_2\ldots i_k$是J中作业的一种排列，它使得$d_{i1}\le d_{i2}\le\ldots\le d_{ik}$。J是一个可行解，当且仅当J中的作业可以按照σ的次序而又不违反任何一个期限的情况来处理。

证明：

① 如果J中的作业可以按照σ的次序而又不违反任何一个期限的情况来处理，则J是一个可行解。

② 若J是一个可行解，σ是否代表一个可行的调度序列？

J为一个可行解，必存在序列$\sigma'=r_1r_2\ldots r_k$，使得$d_{rj}\ge j$, $1\le j\le k$

- 若σ=σ'，则σ即是可行解。否则，
- 若σ≠σ'，令a是使得$r_a\ne i_a$的最小下标，并设$r_b=i_a$。则有：

$b>a$ 且 $d_{ra}\ge d_{rb}$ (?)

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

4.3 带有限期的作业排序

■ 4. 如何判断J的可行性

$\sigma = i_1\ \ i_2\ \dots\ i_a\ \dots\ \dots\ i_c\ \dots\ i_k$　　　$(d_{i1} \le d_{i2} \le \dots \le d_{ik})$

$\sigma' = r_1\ \ r_2\ \dots\ r_a\ \dots\ r_b\ \dots\ r_k$

- $a<b$
- $d_{ic} \ge d_{ia}$; $d_{ic}=d_{ra}$; $d_{ia}=d_{rb}$
- $d_{ra} \ge d_{rb}$

在σ'中调换r_a与r_b，所得的新序列$\sigma''= s_1 s_2 \dots s_k$的处理次序不违反任何一个期限。

重复上述过程，则可将**σ'转换成σ**且不违反任何一个期限。故σ是一个可行的调度序列。

故定理得证。

4.3 带有限期的作业排序

- ■ 5. 带有限期的作业排序算法的实现
  - □对当前正在考虑的作业j，按限期大小采用一种“插入排序”的方式，尝试将其“插入”到一个按限期从小到大顺序构造的作业调度序列中，以此判断是否能够合并到当前部分解J中。
    - ➢如果可以，则插入到序列中，形成新的可行解，
    - ➢否则，舍弃该作业。
  - □具体如下：

4.3 带有限期的作业排序

- 5. 带有限期的作业排序算法的实现

① 假设n个作业已经按照效益值从大到小的次序，即$p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n$的顺序排列好，每个作业可以在单位时间内完成，并具有相应的时间期限；且至少有一个单位时间可以执行作业。

② 将作业1存入部分解J中，此时J是可行的；

③ 依次考虑作业2到n。假设已经处理了i-1个作业，其中有k个作业计入了部分解J中：J(1), J(2), …, J(k), 且有

$D(J(1)) \leq D(J(2)) \leq \ldots \leq D(J(k))$

④ 对当前正在考虑的作业i，将D(i)依次和D(J(k)), D(J(k-1)), …, D(J(1))相比较，直到找到位置q：使得

$D(J(q)) \leq D(i) < D(J(l)) \quad q < l \leq k$

4.3 带有限期的作业排序

■ 5. 带有限期的作业排序算法的实现

⑤ 若D(J(l))>l，q<l≤k，即说明q位置之后的所有作业均可推迟一个单位时间执行，而又不违反各自的执行期限。

⑥ 将q位置之后的所有作业后移一位，将作业i插入到位置q+1处，从而得到一个包含k+1个作业的新的可行解。

⑦ 若找不到这样的q，作业i将被舍弃。

⑧ 对i之后的其它作业重复上述过程直到n个作业处理完毕。

⑨ 最后J中所包含的作业集合是此时算法的贪心解，也是问题的最优解。

算法4.4 带有限期和效益的单位时间的作业排序贪心算法

```
procedure JS(D, J, n, k)
 //D(1),…,D(n)是期限值。n≥1。作业已按p1≥p2≥…≥pn的顺序排序。J(i)是最优
 解中的第i个作业，1≤i≤k。终止时， D(J(i))≤D(J(i＋1))， 1≤i<k//
  integer D(0:n), J(0:n), i, k, n, r
  D(0)←J(0)←0 //初始化//
  k←1; J(1)←1 //计入作业1//
  for i←2 to n do//按p的非增次序考虑作业。找i的位置并检查插入的可行性//
     r←k
     while D(J(r))>D(i) and D(J(r))≠r do    r←r-1   repeat
     if D(J(r))≤D(i) and D(i)>r then //把i插入到J中//
        for m←k to r+1 by -1 do
              J(m+1) ←J(m)
        repeat
        J(r+1) ←i;  k←k+1
     endif
  repeat
end JS
```

从D(J(k))到 D(J(1))依次与D(i)比较来寻找插入位置r的过程

满足条件表示找到插入位置r

实现作业r+1到作业k依次往后移动一个位置

将作业i插入到r+1位置

4.3 带有限期的作业排序

■ 5. 带有限期的作业排序算法的实现

实例: $n=5$, $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)=(10, 1, 15, 20, 5)$

$(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)=(1, 4, 3, 2, 4)$

排序: $(p_1', p_2', p_3', p_4', p_5')=(20, 15, 10, 5, 1)$

$(d_1', d_2', d_3', d_4', d_5')=(2, 3, 1, 4, 4)$

4.3 带有限期的作业排序

	0	1’	2’	3’	4’	5’
p		20	15	10	5	1
d	0	2	3	1	4	4

J(0)	J(1)	J(2)	J(3)	J(4)	J(5)
0	1’	2’			

D(0)=J(0)=0; k=1; J(1)=1;

for循环(i=2时)

r = k =1;

while (D(J(r)))≯D(i) and D(J(r))) ≠r) 条件不满足,不执行循环

if (D(J(r)))≤D(i) and D(i)>r) then

{ for i=1 to r+1=2 by –1 do 不执行循环

J(2)=i=2 ;   k=k+1=2;

}

	0	1’	2’	3’	4’	5’
p		20	15	10	5	1
d	0	2	3	1	4	4

J(0)	J(1)	J(2)	J(3)	J(4)	J(5)
0	3’	1’	2’	4’	

k=2;

for循环(i=3时)

r = k = 2;

while (D(J(r)))>D(i) and D(J(r))) ≠ r) 执行两次循环后 r=0

if (D(J(r)))≤D(i) and D(i)>r) then

{ for i=2 to r+1=1 by –1 do 执行2次 J(3)=J(2); J(2)=J(1);

J(1)=i=3 ; k=k+1=3;

}

k=4;

for循环(i=5时)

r = k = 4;

while (D(J(r))≯D(i) and D(J(r)))= =r) 条件不满足,不执行循环

if (D(J(r)))≤D(i) and D(i) ≯ r)条件不满足

作业5不能插入

4.3 带有限期的作业排序

- 5. 带有限期的作业排序算法的实现
  - 例: 设n=7, $(p_1, p_2, \ldots, p_n)=(35, 30, 25, 20, 15, 10, 5)$, $(d_1, d_2, \ldots, d_n)=(4, 2, 4, 3, 4, 8, 3)$,
  - 算法GreedyJob的执行过程:

$\underline{d_1}$;	$\underline{d_2, d_1}$;	$\underline{d_2, d_1, d_3}$;	$\underline{d_2, d_4, d_1, d_3}$;	$\underline{d_2, d_4, d_1, d_3, d_6}$;
$\underline{4}$;	$\underline{2,\ 4}$;	$\underline{2,\ 4,\ 4}$;	$\underline{2,\ 3,\ 4,\ 4}$;	$\underline{2,\ 3,\ 4,\ 4,\ 8}$;

4.3 带有限期的作业排序

- **5. 带有限期的作业排序算法的实现**
  - 计算时间分析

```
for i←2 to n do ———————————————— → 将循环n-1次①
   r←k
   while D(J(r))>D(i) and D(J(r)) ≠r do — ——————→ 至多循环k次，
                                        k是当前计入J中的作业数 ②
      r←r-1
   repeat
   if D(J(r))≤D(i) and D(i)>r then
      for i←k to r+1 by -1 do ———→ 循环k-r次，r是插入点的位置 ③
         J(i+1) ←J(i)
      repeat
     J(r+1) ←I;k←k+1
   endif
 repeat
```

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

4.3 带有限期的作业排序

- 5. 带有限期的作业排序算法的实现
  - 计算时间分析
    - 设s是最终计入J中的作业数(即k的最终值)，则算法JS所需要的总时间是O(sn)。$s \le n$，
    - 最坏情况：$T_{JS} = O(n^2)$，特例情况：$p_i=d_i=n-i+1, 1 \le i \le n$
    - 最好情况：$T_{JS} = O(n)$，特例情况：$d_i=i, 1 \le i \le n$

4.3 带有限期的作业排序

■ 6. 一种“更快”的作业排序问题

- 使用不相交集合的UNION和FIND算法(见书2.4.3节)，可以将JS的计算时间降低到数量级接近$O(n)$。
- 对作业i分配的时间为$[\alpha -1, \alpha]$，其中α应尽量取大，且时间片$[\alpha -1, \alpha]$为空
- 基本思想:
  - 尽可能推迟对作业i的处理。
  - 这样在安排作业处理次序时不必每有一个作业加入就需移动J中已有的作业。
  - 如果不存在这样的时间片，作业i被舍弃。

4.3 带有限期的作业排序

- **6. 一种“更快”的作业排序问题**
  - 例4.3 设$n=5$, $(p_1, \ldots, p_5) = (20, 15, 10, 5, 1)$, $(d_1, \ldots, d_5)=(2, 2, 1, 3, 3)$。

可行解J	已分配的时间片	考虑的作业	分配动作
∅	无	1	分配[1, 2]
{1}	[1, 2]	2	分配[0, 1]
{1, 2}	[0, 1] [1, 2]	3	舍弃
{1, 2}	[0, 1] [1, 2]	4	分配[2, 3]
{1, 2, 4}	[0, 1] [1, 2] [2, 3]	5	舍弃

➢最优解是J＝{1, 2, 4}

4.3 带有限期的作业排序

■ 6. 一种“更快”的作业排序问题

□ 例4.4 设n=7, $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$=(35, 30, 25, 20, 15, 10, 5), $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$=(4, 2, 4, 3, 4, 8, 3),

可行解J	已分配的时间片	考虑的作业	分配动作
0	无	1	分配[3, 4]
{1}	[3, 4]	2	分配[1, 2]
{1,2}	[1, 2], [3, 4]	3	分配[2, 3]
{1,2,3}	[1, 4]	4	分配[0, 1]
{1,2,3,4}	[0, 4]	5	舍弃
{1,2,3,4}	[0, 4]	6	[7, 8]
{1,2,3,4,6}	[0, 4], [7, 8]	7	舍弃

作业-课后练习9

- 对作业排序问题证明：
  - 当且仅当子集合J中的作业可以按下述规则处理时，J才表示一个可行解。
  - 即如果J中的作业还没有分配处理时间，则将他分配在时间片[α -1, α]处理，其中α是使得$1\leq r\leq d_i$的最大整数r，且时间片[α -1, α]是空的。

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

End