《计算机算法设计与分析》

第五章 动态规划

马丙鹏

2020年10月22日

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

第五章 动态规划

- 5.1 一般方法
- 5.2 多段图问题
- 5.3 每对结点之间的最短路径
- 5.4 最优二分检索树
- 5.5 0/1背包问题
- 5.6 可靠性设计
- 5.7 货郎担问题
- 5.8 流水线调度问题

5.5 0/1背包问题

- **1. 问题描述**
  - **KNAP(1, j, X)**
    - 目标函数：$\sum_{1\le i\le j} p_i x_i$
    - 约束条件：$\sum_{1\le i\le j} w_i x_i \le X$

$$x_i = 0或1, p_i > 0, w_i > 0, 1 \le i \le j$$

  - **0/1背包问题：KNAP(1, n, M)**
  - 最优性原理对于**0/1**背包问题成立
  - 求解策略：向前递推、向后递推

5.5 0/1背包问题

- **1. 问题描述**
  - 向后递推关系式
    - 记$f_j(X)$是KNAP(1, j, X)的最优解，则$f_n(M)$有
      $f_n(M) = \max\{f_{n-1}(M), f_{n-1}(M-w_n)+p_n\}$
    - 对于任意的$f_i(X)$，i>0，有
      $f_i(X) = \max\{f_{i-1}(X), f_{i-1}(X-w_i)+p_i\}$

5.5 0/1背包问题

- **1. 问题描述**
  - 向后递推过程
    - 初始值

$$f_0=\begin{cases} 0 & X\geq 0 \\ -\infty & X<0 \end{cases}$$

    - 求出所有可能的X对应的f_i值。
    - $f_n(M)=KNAP(1, n, M)$

例1 背包问题

n=3, (w_1, w_2, w_3)=(2, 3, 4), (p_1, p_2, p_3)=(1, 2, 5), M=6

递推计算过程

$$f_0(X)=\begin{cases}-\infty & X<0\\ 0 & X\ge 0\end{cases}$$

$$f_1(X)=\max\{f_0(X),\ f_0(X-2)+1\}=\begin{cases}-\infty & X<0\\ \max\{0,-\infty+1\}=0 & 0\le X<2\\ \max\{0,0+1\}=1 & X\ge 2\end{cases}$$

$$f_2(X)=\max\{f_1(X),\ f_1(X-3)+2\}=\begin{cases}-\infty & X<0\\ \max\{0,-\infty+2\}=0 & 0\le X<2\\ \max\{1,-\infty+2\}=1 & 2\le X<3\\ \max\{1,0+2\}=2 & 3\le X<5\\ \max\{1,1+2\}=3 & X\ge 5\end{cases}$$

$$f_3(M)=\max\{f_2(6),\ f_2(6-4)+5\}=\max\{3,1+5\}=6$$

$$\boxed{f_i(X)=\max\{f_{i-1}(X),\ f_{i-1}(X-w_i)+p_i\}}$$

第1个物品无法放入

第1个物品可放入

第1个物品无法放入

第1个物品可放入，第2个物品无法放入

第1个物品或第2个物品可放入

第1个物品和第2个物品可放入

例1 背包问题

n=3, $(w_1, w_2, w_3)=(2, 3, 4)$, $(p_1, p_2, p_3)=(1, 2, 5)$, M=6

递推计算过程

$$f_0(X)=\begin{cases}-\infty & X<0\\ 0 & X\ge 0\end{cases}$$

$$f_1(X)=\begin{cases}-\infty & X<0\\ \max\{0,-\infty+1\}=0 & 0\le X<2\\ \max\{0,0+1\}=1 & X\ge 2\end{cases}$$

$$f_2(X)=\begin{cases}-\infty & X<0\\ \max\{0,-\infty+2\}=0 & 0\le X<2\\ \max\{1,-\infty+2\}=1 & 2\le X<3\\ \max\{1,0+2\}=2 & 3\le X<5\\ \max\{1,1+2\}=3 & X\ge 5\end{cases}$$

$$f_3(M)=\max\{3,1+5\}=6$$

解向量的推导(最优的决策序列)

$\boxed{f_3(M)=6} \Rightarrow \boxed{x_3=1}$

$\Downarrow$

$\boxed{f_3(M)-p_3=1}$

$\Downarrow$

$\boxed{f_2(X)=1 \quad f_1(X)=1} \Rightarrow \boxed{x_2=0 \quad x_1=1}$

$\Rightarrow \boxed{\text{KNAP}(1,3,6)=6 \quad X=(1,0,1)}$

$$f_i(X) = \max\{f_{i-1}(X), f_{i-1}(X - w_i) + p_i\}$$

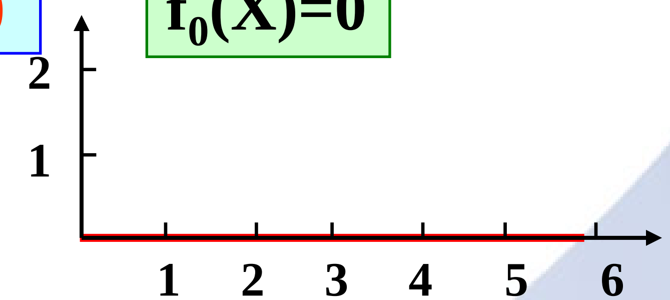
f_1, f_2, f_3计算过程的图解 $(w_1, w_2, w_3)=(2, 3, 4)$, $(p_1, p_2, p_3)=(1, 2, 5)$, $M=6$

- $f_{i-1}(X-w_i)+p_i$曲线的构造：将$f_{i-1}(X)$的曲线在X轴上右移w_i个单位，然后上移p_i个单位而得到；
- $f_i(X)$曲线的构造：由$f_{i-1}(X)$ 和$f_{i-1}(X-w_i)+p_i$的曲线按X相同时f取大值的规则归并而成

i: $f_{i-1}(X-w_i)+p_i$

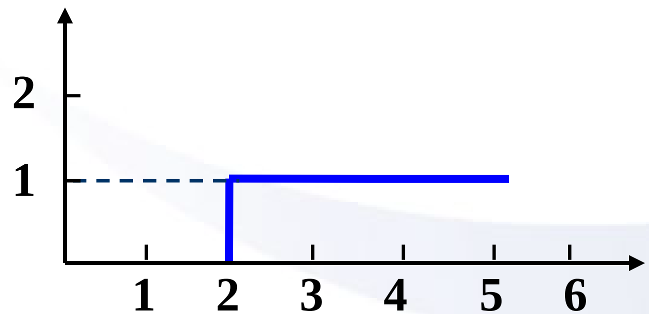
$f_i(X)$

$f_0(X)=0$

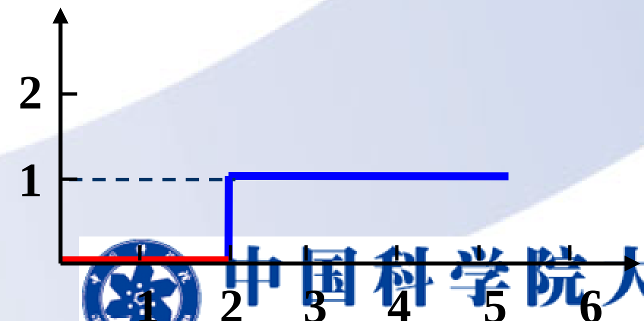


i=0: 函数不存在

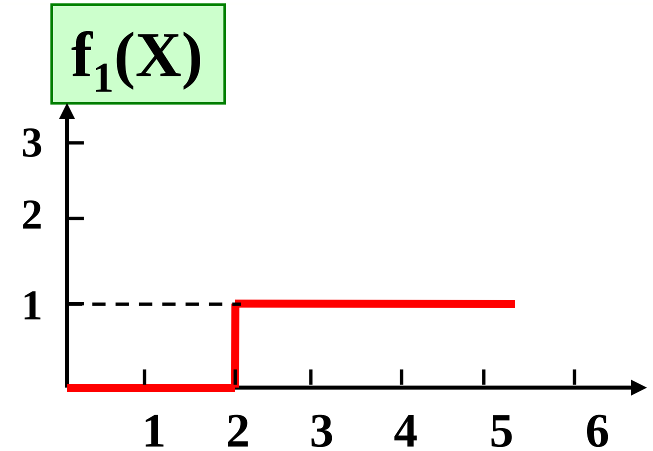
i=1: $f_0(X-w_1)+p_1$

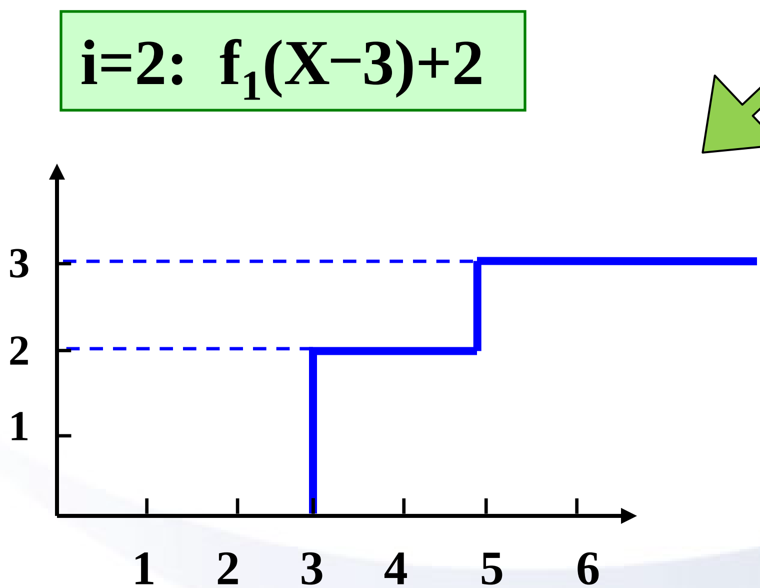


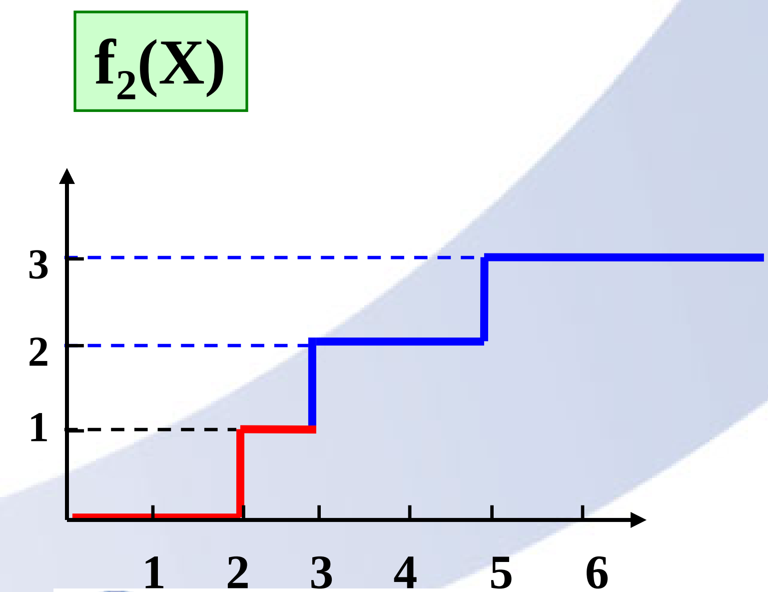
$f_1(X)$



f_1, f_2, f_3计算过程的图解 $(w_1, w_2, w_3)=(2, 3, 4)$, $(p_1, p_2, p_3)=(1, 2, 5)$, $M=6$



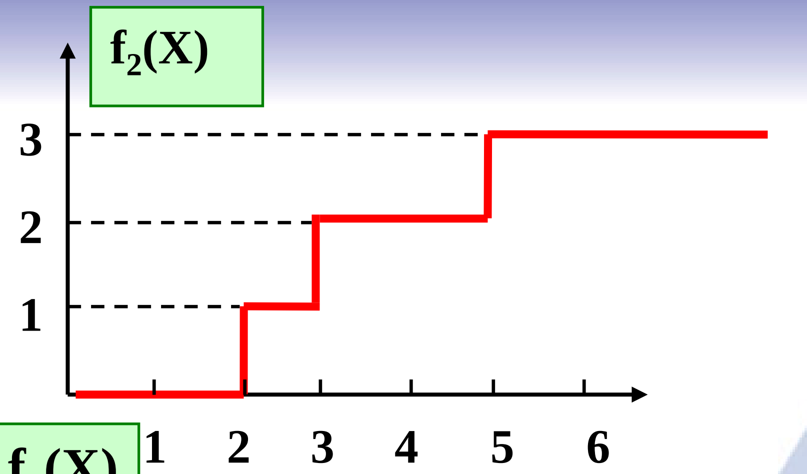


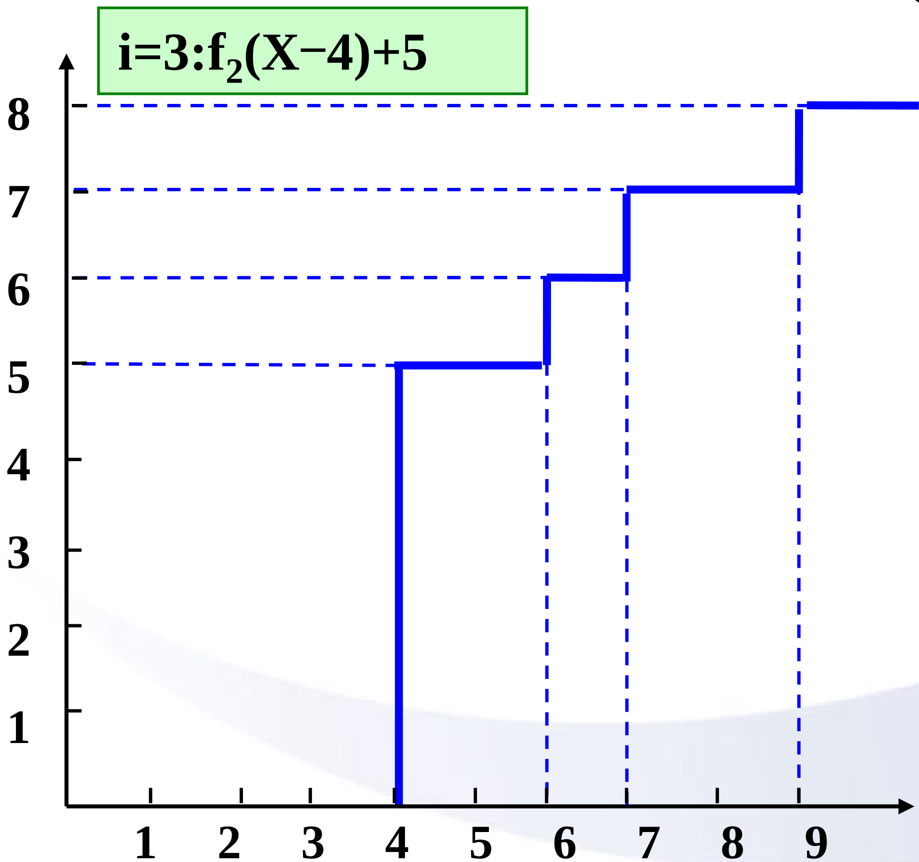


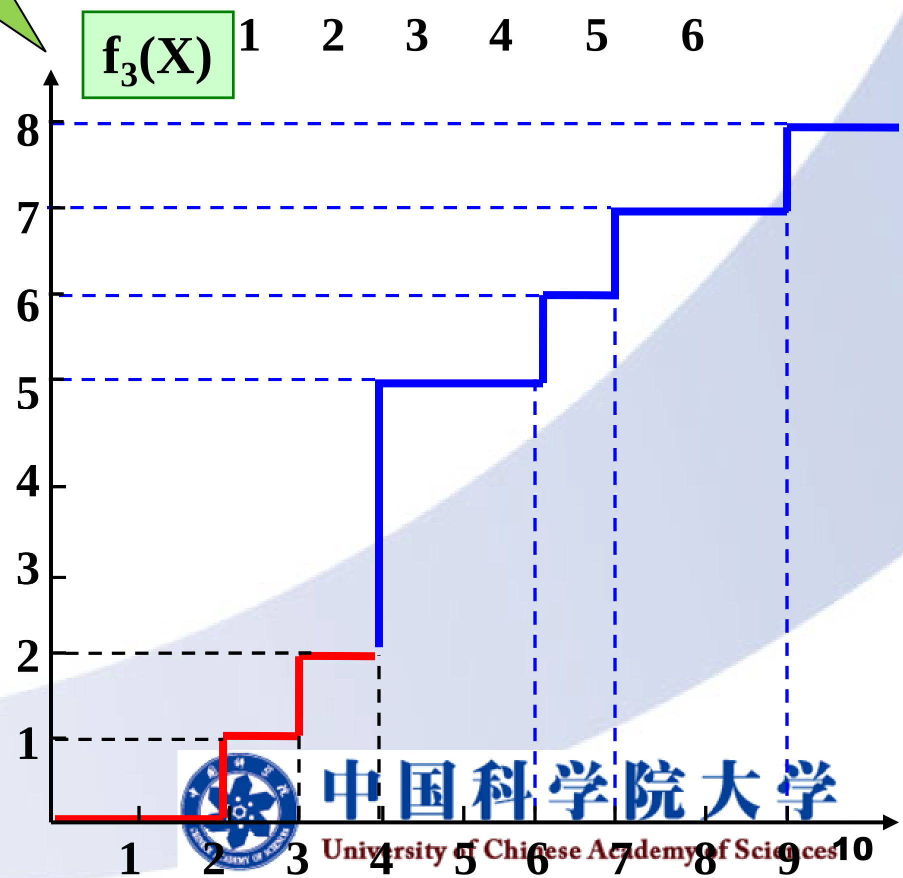
$$f_i(X)=\max\{f_{i-1}(X), f_{i-1}(X-w_i)+p_i\}$$

f_1, f_2, f_3计算过程的图解 $(w_1, w_2, w_3)=(2, 3, 4), (p_1, p_2, p_3)=(1, 2, 5), M=6$

$$f_i(X) = \max\{f_{i-1}(X), f_{i-1}(X - w_i) + p_i\}$$







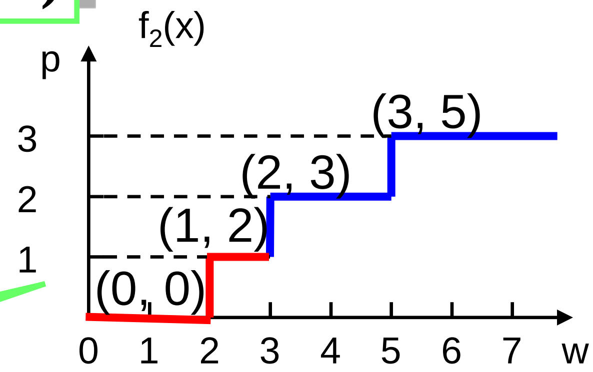
5.5 0/1背包问题

- **2. 序偶表示**
  - □ f_i是关于X的阶跃函数，阶跃点是f_i的关键点。每个阶跃点用其对应坐标表示——称为一个序偶，f_i阶跃点的集合称为 f_i的序偶集合，即
  - □ $S^i = \{(P_j, W_j)|W_j$是f_i曲线中使得f_i产生一次阶跃的X值，$P_j=f_i(W_j)$，$0\le j<r\}$
    - ➢ $(P_0, W_0) = (0, 0)$
    - ➢ 共有r个阶跃值，分别对应r个(P_j, W_j)序偶，$1\le j\le r$
      - ① 若$W_j<W_{j+1}$，则$P_j<P_{j+1}$，$0\le j<r$，即f_i是关于X的单调递增函数
      - ② 若$W_j\le X<W_{j+1}$，$f_i(X)=f_i(W_j)$，即具有阶跃特点
      - ③ 若$X\ge W_r$，$f_i(X)=f_i(W_r)$

5.5 0/1背包问题

■ 2. 序偶表示

(P, W)



(P_j, W_j): $P_j = f_i(W_j)$

$$
f_2(X) = \begin{cases} -\infty & X < 0 \\ \max\{0, -\infty + 2\} = 0 & 0 \le X < 2 \\ \max\{1, -\infty + 2\} = 1 & 2 \le X < 3 \\ \max\{1, 0 + 2\} = 2 & 3 \le X < 5 \\ \max\{1, 1 + 2\} = 3 & X \ge 5 \end{cases}
$$

5.5 0/1背包问题

■ 2. 序偶表示

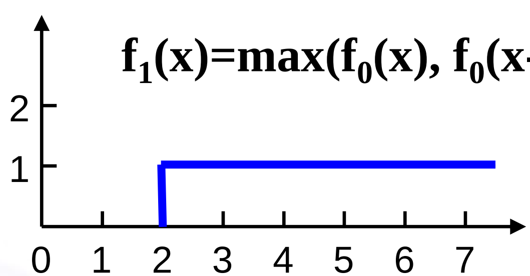
□S^i的构造

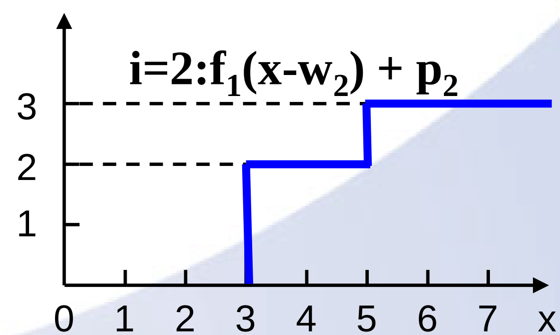
➢记 S_1^i是$f_{i-1}(X-w_i)+p_i$的所有序偶的集合，则

$$S_1^i = \{(P,W) \mid (P - p_i, W - w_i) \in S^{i-1}\}$$

即：在S_{i-1}的序偶分量上增加p_i、w_i生成

➢其中S^{i-1}是f_{i-1} 的所有序偶的集合





5.5 0/1背包问题

- 2. 序偶表示
  - S^i的构造
    - 由S^{i-1}和S_1^i按照支配规则合并而成。
    - 支配规则：
      - ✓如果S^{i-1}和S_1^i之一有序偶(P_j, W_j),另一有(P_k, W_k)，且有$W_j \geq W_k$, $P_j \leq P_k$，则序偶(P_j, W_j)将被舍弃。(反映曲线合并过程中的取大值规则。)
      - ✓注：S^i中的所有序偶是背包问题KNAP(1, i, X)在X各种取值下的最优解。

5.5 0/1背包问题

- 2. 序偶表示
  - S^i的构造
    - 在S^i中，没有两个完全一样的序偶存在，即不存在j和k，使得(P_j, W_j)、$(P_k, W_k) \in S^i$ 且 $W_j = W_k$ 且 $P_j = P_k$，也不存在$W_j = W_k$ 或 $P_j = P_k$。
    - 若$W_j > W_k$ 则 $P_j > P_k$，反之亦然，即序偶同时按照W_i和P_i递增有序。

例5.12 例5.11的序偶计算

$(w_1, w_2, w_3)=(2, 3, 4), (p_1, p_2, p_3)=(1, 2, 5), M=6$

$S^0=\{(0, 0)\}$ $\quad S_1^1=\{(1, 2)\}$

$S^1=\{(0, 0), (1, 2)\}$ $\quad S_1^2=\{(2, 3), (3, 5)\}$

$S^2=\{(0, 0), (1, 2), (2, 3), (3, 5)\}$ $\quad S_1^3=\{(5, 4), (6, 6), \cancel{(7, 7)}, \cancel{(8, 9)}\}$

$S^3=\{(0, 0), (1, 2), (2, 3), (5, 4), \cancel{(3, 5)}, (6, 6)\}$

支配

注：序偶(3, 5)被(5, 4)“支配”而删除

5.5 0/1背包问题

- **3. 决策序列的求取**
  - 如何求取决策序列?
    - 分析S^i中序偶的来源:
      - ✓S^i中的序偶或者来源于S^{i-1} 或者来源于 S_1^i 。
      - ✓若来源于S^{i-1}，则对当前的W计算$f_i(X)$时，表达式中$f_{i-1}(X)$的值大些，故第i件物品不装为好，即$x_i = 0$。
      - ✓否则来源于S_1^i，$f_{i-1}(X-W_i) + P_i$的效益值好些，第i件物品应该装入背包，$x_i = 1$。

$$f_i(X) = \max\{f_{i-1}(X), f_{i-1}(X - w_i) + p_i\}$$

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

5.5 0/1背包问题

■ 3. 决策序列的求取

□KNAP(1, n, M)问题的解——决策序列的求取

① 生成序偶集S^i。(应将W>M的那些序偶(P, W)去掉，因为由它们不能导出满足约束条件的可行解。)

② S^n是KNAP(1, n, X)在$0 \le X \le M$各种取值下的最优解。

③ 通过计算S^n可以找到KNAP(1, n, X)，$0 \le X \le M$的所有解。

④ KNAP(1, n, M)的最优解由S^n的最后一对有效序偶(具有有效的最大W值的序偶)给出。

中国科学院大学 University of Chinese Academy of Sciences

5.5 0/1背包问题

■ 3. 决策序列的求取

□KNAP(1, n, M)问题的解——决策序列的求取

⑤ x_n的计算。

- ✓ 设S^n的最后一对有效序偶是(P_1, W_1)，$W_1 \le M$，
- ✓ 则(P_1, W_1)或者是S^{n-1}的最末一对有效序偶，
- ✓ 或者是 (P_j+p_n, W_j+w_n)，其中 $(P_j, W_j) \in S^{n-1}$且W_j是S^{n-1}中满足$W_j+w_n \le M$的最大值。
- ✓ 若$(P_1, W_1) \in S^{n-1}$，则$x_n=0$；否则，
- ✓ $(P_1-p_n, W_1-w_n) \in S^{n-1}$，$x_n=1$

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

5.5 0/1背包问题

- 3. 决策序列的求取

  □KNAP(1, n, M)问题的解——决策序列的求取

  ⑥ x_{n-1} 的计算。

  ✓ 若x_n=0，则判断S^{n-1}中(P_1, W_1)的来源，以确定x_{n-1}的值

  ✓ 若x_n=1，则判断S^{n-1}中(P_1-p_n, W_1-w_n)的来源，以确定x_{n-1}的值

  ⑦ $x_{n-2}, \ldots, x_1$将依次推导得出。

例5.13 (例5.12)

$S^0=\{(0, 0)\}$

$S^1=\{(0, 0), (1, 2)\}$

$S^2=\{(0, 0), (1, 2), (2, 3), (3, 5)\}$

$S^3=\{(0, 0), (1, 2), (2, 3), (5, 4), (6, 6), (7, 7), (8, 9)\}$

M=6，$f_3(6)$由S^3中的序偶(6, 6)给出。

1) $\because (6, 6) \notin S^2$

$\therefore x_3=1$

2) $\because (6-p_3, 6-w_3)=(1, 2) \in S^2$且$(1, 2) \in S^1$

$\therefore x_2=0$

3) $\because (1, 2) \notin S^0$

$\therefore x_1=1$

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

算法5.6 非形式化的背包算法

procedure DKP(p, w, n, M)

$S^0 \leftarrow \{(0, 0)\}$

for $i \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**

$S_1^i \leftarrow \{(P_1, W_1) | (P_1 - p_i, W_1 - w_i) \in S^{i-1} \text{ and } W_1 \le M\}$

$S^i \leftarrow \text{MERGE-PURGE}(S^{i-1}, S_1^i)$

repeat

$(P_X, W_X) \leftarrow S^{n-1}$的最末一个有效序偶

$(P_Y, W_Y) \leftarrow (P_1 + p_n, W_1 + w_n)$，其中，$W_1$是$S^{n-1}$中使得$W + w_n \le M$的所有序偶中取最大值得W

//沿$S^{n-1}, \ldots, S^1$回溯确定$x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$的取值//

if $P_X > P_Y$ **then** $x_n \leftarrow 0$ //P_X将是S^n的最末序偶//

else $x_n \leftarrow 1$ //P_Y将是S^n的最末序偶//

endif

回溯确定$x_{n-1}, \ldots, x_1$

end DKP

5.5 0/1背包问题

■ 4. DKP的实现

- 序偶集S^i的存储结构
  - 使用两个一维数组P和W存放所有的序偶(P_1, W_1)，其中P存放P_1值，W存放W_1值
  - 序偶集$S^0, S^1, \ldots, S^{n-1}$顺序、连续存放于P和W中；
  - 用指针F(i)表示S^i中第一个元素在数组 (P, W)中的下标位置，$0 \le i \le n$;
  - $F(n)=S^{n-1}$中最末元素位置 + 1

	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0	0	1	0	1	2	3	
W	0	0	2	0	2	3	5	

F(0) F(1) F(2) F(3)

5.5 0/1背包问题

■ 4. DKP的实现

□序偶的生成与合并

- ➢S^i的序偶将按照P和W的递增次序生成
- ➢S_1^i中序偶的生成将与S_1^i和S^{i-1}的合并同时进行
- ➢设S_1^i生成的下一序偶是(pp, ww)；对所有的(pp, ww)，根据支配规则处理如下：

① S^{i-1}中所有W<ww的序偶(P, W)加入S^i

② 由支配规则看(pp, ww)是否加入S^i

a. 若S^{i-1}中有W_{g+1}= ww,则$pp \leftarrow \max\{p_{g+1}, pp\}$

↓$(pp, ww)=(p_t+p_i, w_t+w_i)$

↓next

	1	2	3														
P	0	0	P_t			P_g	P_{g+1}							P_g			
W	0	0	W_t			W_g	W_{g+1}							W_g			

5.5 0/1背包问题

■ 4. DKP的实现

- □序偶的生成与合并
  - ② 由支配规则看(pp, ww)是否加入S^i
    - b. 若S^{i-1}中有p_g>pp,则舍弃(pp, ww)
    - c. 若不舍弃(pp, ww)，则(pp, ww) → S^i
  - ③ 考虑S^{i-1}中W>ww的序偶有无被(pp, ww)所支配，若P_{g+1}<pp, (P_{g+1}, W_{g+1})被舍弃
  - ④ 对所有的(pp, ww)重复上述处理；
  - ⑤ 将最后S^{i-1}中剩余的序偶直接计入S^i中，(是一些P和W均较大的序偶)；
  - ⑥ 所有计入S^i中的新序偶依次存放到由F(i)指示的S^i的存放位置上。

➢注：不需要存放S_1^i的专用空间

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

5.5 0/1背包问题

■ 4. DKP的实现

□算法中变量的含义

- ➢F(i)：S^i中第一对序偶在数组中的位置(下标)
- ➢**l, h**：S^{i-1}的第一对序偶和最后一对序偶在数组中的位置，即F(i-1)和F(i)-1.
- ➢**k**: S^{i-1}中当前要加入S^i的序偶的位置.
- ➢**u**: 在S^{i-1}能够产生S^i_1序偶的最后一个位置，即对于$u+1 \le v \le h$的序偶(P_v, W_v)，有$W_v+w_i>M$.
- ➢**j**: 当前正在生成S^i_1的S^{i-1}中序偶的位置.
- ➢**next**: S^i中要加入序偶的位置.

l k h next

	1	2	3														
P	0	0	1														
W	0	0	2														

l j u

5.5 0/1背包问题

- **4. DKP的实现**
  - **算法的思想**
    - **1.初始化**
      最初只有S^0的信息，F(0), P(1), W(1), l, h, F(1), next
    - **2.生成S^i**
      对k, u赋值
      (1)依次生成S^i_1中的序偶(pp, ww)
      在S^{i-1}中，重量比ww小的序偶(P(k), W(k))加入S^i中
      (pp, ww)是否被支配；
      S^{i-1}中(pp, ww)被支配的序偶
      (2) S^i_1中的序偶都生成后， S^{i-1}中若还有序偶没有加入S^i中，则全部加入；
      l, h, F(i+1)赋值
    - **3.生成最末序偶，回溯构造最优决策序列**

算法5.7 0/1背包问题的算法描述

procedure DKNAP(p, w, n, M, m)

  real p(n), w(n), P(m), W(m), pp, ww, M; **integer** F(0:n), l, h, u, i, j, p, next

  F(0)←1; P(1)←W(1)←0 //S^0//

  l←h←1   // S^0 的首端和末端；l是S^{i-1}的首端，h是S^{i-1}的末端//

  F(1)←next←2 //P和W中第一个空位；next指示P/W中可以存放(P,W)序偶的第一个位置//

  for i←1 **to** n-1 **do** //生成S^i//

    k←l

    u←在l≤r≤h中使得$W(r)+w_i \le M$的最大r //u指示由S^{i-1}生成 S_1^i的最大有效位置//

    for j←l **to** u **do** //生成 S_1^i ，同时进行归并//

      (pp, ww)←$(P(j)+p_i, W(j)+w_i)$ //生成S_1^i中的下一个元素//

      while k≤h and W(k)<ww **do** //从S^{i-1}中取元素并归并//

        P(next)←P(k); W(next)←W(k) //所有W(k)<ww 的序偶直接归并//

        next←next+1; k←k＋1

      repeat

```
        //按照支配规则考虑(pp, ww)及S^{i-1}中的序偶//
        if k≤h and W(k)=ww then
              pp←max(pp, P(k)) k←k+1
        endif
        if pp>P(next-1) then (P(next), W(next))←(pp, ww)
              next←next+1
        endif
        //清除S^{i-1}中的序偶//
        while k≤h and P(k)≤P(next-1) do k←k+1 repeat
    repeat
    //将S^{i-1}中剩余的元素并入S^i //
    while k≤h do
         (P(next), W(next))←(P(k), W(k))
         next←next+1; k←k+1
    repeat
    //对S^{i+1}置初值 //
    l←h+1; h←next-1; F(i+1)←next
  repeat
  CALL PARTS  //递推求取x_n, x_{n-1}, …, x_1//
END DKNAP
```

5.5 0/1背包问题

- **5. 过程DKNAP的分析**
  - 空间复杂度

记S^i中的序偶数为：$|S^i|$

则有， $|S^i| \le |S^{i-1}| + |S_1^i|$

又， $|S_1^i| \le |S^{i-1}|$

所以， $|S^i| \le 2|S^{i-1}|$

最坏情况下有(由S^{i-1}生成S_1^i和S^i时没有序偶被支配)：

$$\sum_{0 \le i \le n-1} |S^i| = \sum_{0 \le i \le n-1} 2^i = 2^n - 1$$

故，DKNAP所需的空间复杂度(P、W数组)为: $O(2^n)$

5.5 0/1背包问题

- **5. 过程DKNAP的分析**
  - 时间复杂度
    - 由S^{i-1}生成S^i的时间为：$\Theta(|S^{i-1}|)$， $0 \le i \le n-1$
    - 故，DKNAP计算所有的S^i所需的时间为：

$$\sum_{0 \le i \le n-1} |S^{i-1}| = O(2^n)$$

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

5.5 0/1背包问题

■ 5. 过程DKNAP的分析

□时间复杂度

若每件物品的重量w_i和效益值p_i均为整数，则S^i中每个序偶(P, W)的P值和W值也是整数，且有$P \le \sum_{0\le j\le i} |p_j|$，W≤M

又，在任一S^i中的所有序偶具有互异P值和W值，故有

$$|S^i| \le 1 + \sum_{0\le j\le i} |p_j| \text{ 且 } |S^i| \le 1 + \min\{\sum_{0\le j\le i} |w_j|, M\}$$

在所有w_j和p_j均为整数的情况下，DKNAP的时间和空间复杂度将为：

$$O(\min\{2^n, n\sum_{1\le i\le n} |p_i|, nM\})$$

5.5 0/1背包问题

- 6. 序偶集合的一种启发式生成策略
  - 由S^0生成S^n的过程中，有些序偶无论如何也不会导致问题的最优解——问题的最优解由最大有效序偶给出。
  - 这些序偶最终也不会出现在任何最优决策序列中，故可以及时的舍去，以进一步降低计算量。

例：

$S^2=\{(0, 0), (1, 2), (2, 3), (3, 5)\}$

$p_3=2, w_3=3$

$(0, 0)\rightarrow(2, 3)$

$(1, 2)\rightarrow(3, 5)$

怎样预知背包的可能最好效益？

5.5 0/1背包问题

- **6. 序偶集合的一种启发式生成策略**
  - 设L是最优解的估计值，且有$f_n(M) \geq L$
  - 设$PLEFT(i)=\sum_{i<j\leq n} p_j$，即i+1至n件物品的效益值之和
  - 若正在生成的序偶(P, W)有P+PLEFT(i)<L，则(P, W)将不计入S^i中。
  - L的选择：

    ① 取S^i的最末序偶(P, W)的P作为L，$P \leq f_n(M)$

    ② 将某些剩余物品的p值+P作为L

例：$p_3=2$，$w_3=3$ → PLEFT(2) = 2

取L=6

(0, 0)→(2, 3), 0+PLEFT(2)=2<6

(1, 2)→(3, 5), 1+PLEFT(2)=3<6

例5.15 0/1背包问题

$n=6$, $(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6)=(w_1, w_2,w_3,w_4,w_5,w_6)=(100,50,20,10,7,3)$, $M=165$

不使用启发方法的序偶集

$S^0=\{0\}$

$S^1=\{0, 100\}$

$S^2=\{0, 50, 100, 150\}$

$S^3=\{0, 20, 50, 70, 100, 120, 150\}$

$S^4=\{0, 10, 20, 30, 50, 60, 70, 80, 100, 110, 120, 130, 150, 160\}$

$S^5=\{0, 7, 10, 17, 20, 27, 30, 37, 50, 57, 60, 67, 70, 77, 80, 87, 100,$
$107, 110, 117, 120, 127, 130, 137, 150, 157, 160\}$

则，$f_6(165)=163$

注：每对序偶(P, W)仅用单一量P(或W)表示

$n=6, (p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6)=(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5,w_6)=(100,50,20,10,7,3), M=165$

启发式规则求解

分析：将物品1, 2, 4, 6装入背包，将占用163的重量并产生163的效益。

故，取期望值L=163。

按照启发式生成规则，从S^i中删除所有P+PLEFT(i)<L的序偶，则有

$PLEFT(0)=p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=190$

$S^0=\{0\}$	$S_1^1=\{100\}$	$PLEFT(1)=p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=90$	
$S^1=\{100\}$	$S_1^2=\{150\}$	$PLEFT(2)=p_3+p_4+p_5+p_6=40$	
$S^2=\{150\}$	$S_1^3=\varnothing$	$PLEFT(3)=p_4+p_5+p_6=20$	$(w_3=20)$
$S^3=\{150\}$	$S_1^4=\{160\}$	$PLEFT(4)=p_5+p_6=10$	
$S^4=\{160\}$	$S_1^5=\varnothing$	$PLEFT(5)=p_6=3$	$(w_5=7)$
$S^5=\{160\}$		$PLEFT(6)=0$	

$f_6(165)=160+3=163$

作业-课后练习17

- 问题描述
  - 用序偶的方式求0/1背包问题，
    $n=4$,
    $(w_1, w_2, w_3, w_4)=(5, 3, 4, 7)$,
    $(p_1, p_2, p_3, p_4)=(3, 2, 5, 9)$,
    $M=15$
- 要求
  - 作业提交到课程网站上
  - Word文档即可

End