第一章　拓扑空间

1.1　拓扑空间

对于$A \subset \mathbb{R}^n$称为开集,若对于任意$x \in A$,存在x的某个邻域包含于A. 对$f : A \to \mathbb{R}^n$,称为连续映射,如果对任意开集$O \subset \mathbb{R}^n$,$f^{-1}(O)$为开集.由此引出拓扑空间的定义.

定义1　设X是一个集合,X的一个**拓扑**τ是一组X的子集组成的集合,它的成员称为**开集**.满足

- $X, \varnothing \in \tau$.即$X, \varnothing$是开集.
- 任意两个开集的交是开集,即若$U, V \in \tau$,则$U \cap V \in \tau$
- 任意多个开集的并集是开集.

则称(X, τ)称作**拓扑空间**.

例1　记$X = \mathbb{R}^n$,$\tau = \{A|A$在分析意义下的开$\}$,则(X, τ)是拓扑空间.

以下为了方便起见,在不引起歧义的情况下,(X, τ)简记为X.

定义2　设X, Y为拓扑空间,称$f : X \to Y$为**连续映射**,如果对任意开集O,$f^{-1}(O)$为开集

命题1　设$f : X \to Y$为连续映射,$g : Y \to Z$为连续映射,则$g \circ f : X \to Z$也连续.

证明　　只需注意到$(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(g^{-1}(O))$　□

例2　设X是一个集合

- X的离散拓扑:$\tau_d = \{A \subset X\}$,(X, τ_d)称为离散拓扑空间.
- X的平凡拓扑:$\tau_t = \{\varnothing, X\}$,$(X, \tau_t)$称为平凡拓扑空间.

注　一个集合上有许多不同的拓扑,$\{*\}$只有一个拓扑,$\{0, 1\}$有4个不同的拓扑.

注　定义中第二条可以换做有限多个开集的交是开集.

定义3　设X是拓扑空间,$A \subset X$,X的拓扑诱导了A的一个拓扑,称作子空间拓扑,如果$V \subset A$是开集当且仅当存在X的开集U,使得$V = U \cap A$

容易验证,上述的定义确实是一个拓扑.

例3　$\mathbb{R}^n$的任意子集都可以看成拓扑空间(作为$\mathbb{R}^n$的子空间).例如

- $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}||x| = 1\}$
- $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n||x| \leq 1\}$
- $\mathbb{R}$的子集$[0, 1] = A$,$(0, 1), [0, 1)$均为A中的开集.

定义4　设X是集合,X上的**度量**是一个映射$d : X \times X \to \mathbb{R}$,满足

- $d(x,y) \geq 0$,且等号成立当且仅当$x = y$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

则称(X,d)为**度量空间**.

同样的,在不引起歧义的情况下,(X,d)简记为X.

例4 $\mathbb{R}^n$及其子集,赋范线性空间.对任意集合X,定义$d(x,y) = 0 (x \neq y), d(x,x) = 1$

定义5 设X是度量空间,度量d诱导了X的一个拓扑.称作**度量拓扑**.记$B(x,\varepsilon) = \{y \in X | d(x,y) < \varepsilon\}$.称$A \subset X$为开集,若$\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0$使得$B(x,\varepsilon) \subset A$.容易验证这样满足定义.

例5 设X是离散空间,设$f : X \to Y$是映射,则f连续.

设Y为平凡空间,设$f : X \to Y$是映射.则f连续.

练习题

1. 证明例中X的拓扑是离散拓扑.

命题2
1. 设X是拓扑空间,A是其子空间,含入映射$i : A \to X$连续.
2. 一个映射$f : Y \to A$连续$\Leftrightarrow i \circ fY \to X$连续

证明
1. 任意开集$U \subset X, i^{-1}(U) = A \cap U$是A的开集.
2. 一方面,若i, f连续,$i \circ f$连续.另一方面,对开集$V \subset A$设$V = A \cap U$,U是X中的开集,$f^{-1}(V) = (i \circ f)^{-1}(U)$

□

练习题

2. 证明:A的子空间拓扑是使得含入映射$i : A \to X$连续的最弱(最粗)的拓扑.也是使得(2)成立的唯一拓扑.

例6 设X是度量空间,$\forall x in X, B(x,\varepsilon) = \{y \in \varepsilon | d(x,y) < \varepsilon\}$是开集.

证明 对$\forall y \in X$,令$\delta = \varepsilon - d(x,y)$,则$B(y,\delta) \subset B(x,\varepsilon)$,因为,对任意$z \in B(y,\delta)$,有$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + \varepsilon$ □

定义6 一个度量空间称作**可度量化**,如果它的拓扑由某个度量$d : X \times X \to X$诱导.

事实上,并非所有拓扑空间可度量化.

命题3 设X, Y是度量空间,$f : X \to Y$是映射.f连续的充分必要条件是对$x \in X$ 和$\forall \varepsilon > 0$,使得$f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$

证明 $\Leftarrow$:设$U \subset Y$开,$x \in f^{-1}(u)$,存在$\varepsilon > 0$,使得$B(f(x),\varepsilon) \subset U$,从而存在$\delta > 0$,使得$f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon) \subset U$,从而$f^{-1}(U)$是开集,从而$f$连续. □

另一部分作为练习.

注
1. $\forall U \subset Y$开,$f^{-1}(U) \subset X$开.$V \subset X$开,$f(V)$开
2. 若f双射,且连续.不能推出f^{-1}连续.考虑下面例子: $X = (\mathbb{R}^n, \tau), Y = (\mathbb{R}^n, \tau_d)$ 考虑$f : X \to Y, f(x) = x$是连续映射,但是逆映射不连续,比如$f(0) = 0$不是开集.
3. 同胚是拓扑空间之间的等价关系.

1.2　闭集，邻域，闭包

定义7　$A \subset X$称为闭的,如果$X - A$是开的.

例7　1. 在$\mathbb{R}$中.$[a, b]$是闭集.单点集是闭集,$[0, +\infty]$是闭集.$\mathbb{Z}$是闭集.$\mathbb{Q}$既不是开集也不是闭集.Cantor集是闭的.

命题4　1. $X, \varnothing$是闭集.

2. 任意多个闭集的交集.

3. 有限多个闭集的并集是闭集.

证明　由De-Morgan定理显然. □

命题5　$f : X \to Y$连续$\Leftrightarrow$每个Y中闭集的原像是闭集.

证明　只需注意到$X - f^{-1}(E) = f^{-1}(X - E)$ □

例8　欧式空间中单点集是闭集.

例9　$S^n \subset \mathbb{R}^n$是闭集.事实上,考虑$f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$.由闭集的原像是闭集即得.同样的,$D^{n+1} = f^{-1}([0, 1])$是闭集.

定义8　X是拓扑空间,$P \in A$称为A的**内点**,若存在开集$U \subset X$,使得$p \in U \subset A$,此时称A是p的**邻域**.A的内点的集合为A的**内部**,记作A°或$\mathrm{Int} A$

注　若A是p的邻域,则包含A的集合也是p的邻域.

命题6　A°是包含于A的最大开集.

证明　注意到.若开集$U \subset A$,则U的每点都是A的内点,所以$U \subset A^\circ$.对任意$p \in A^\circ$,存在开集U_p,使得$p \in U_p \subset A$.

从而$A^\circ = \bigcup_{p\in A} U_p \subset A^\circ$.从而$A^\circ$是开集,成立. □

推论1　1. A开$\Leftrightarrow A = A^\circ$

2. $(A^\circ)^\circ = A^\circ$

练习题

3. 设$f : X \to Y$在$x \in X$处连续,若$\forall f(x)$的邻域V,$f^{-1}(V)$是x的邻域.

证明:f连续$\Leftrightarrow$ f在每点$x \in X$连续.

定义9　设$A \subset X, p \in X$称p是A的**极限点**或**聚点**,若p的每个邻域都与$A - \{p\}$相交,A与A的所有聚点构成的集合称为A的**闭包**.

例10　在$\mathbb{R}$中,$(0, 1)$的极限点是$[0, 1]$,$\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$

命题7　$(X - A)^\circ = X - \overline{A}$

证明　$p \in (X - A)^\circ \Leftrightarrow$存在开集$U \ni p$,使得$U \cap A = \varnothing \Leftrightarrow p$不是$A$的极限点且$p \notin A \Leftrightarrow p \notin \overline{A} \Leftrightarrow p \in X - \overline{A}$
. □

推论2　$\overline{A}$是包含A的最小闭集.

推论3　1. A闭$\Leftrightarrow \overline{A} = A$

2. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

定义10　设$A\subset X$,称为在X中稠密,如果$\overline{A}=X$

定义11　$A\subset X$的边界定义为$\overline{A}-A^{\circ}$,记作∂A.一个集合的边界一定为闭集.

定义12　设$x_1,x_2,\cdot\subset X$**收敛到**$x\in X$,如果$\forall x$的邻域,当n充分大时,$x_n\in V$.

命题8　设X是度量空间,$x_n\to x$的充分必要条件是$d(x_n,x)\to 0$

证明　"$\Leftarrow$": $\forall x$的邻域V,$\exists\varepsilon$使得$B(x,\varepsilon)\subset V$,从而当$n$充分大时,$x_n\in B(x,\varepsilon)$,从而$x_n\to x$.

"$\Rightarrow$":由于$B(x,\varepsilon)$为x的邻域,从而当n充分大时$d(x_n,x)<\varepsilon$,从而$d(x_n,x)\to 0$.　□

1.3　乘积空间,拓扑基

定义13　设(X,τ)是拓扑空间,τ的**基**是一个子集$\mathcal{B}\subset\tau$,如果X的每个开集可表为$\mathcal{B}$中成员的并.

例11

- R^n的拓扑的基可以为全体开区间.也可以取为$B(x,\dfrac{1}{n})|x\in\mathbb{Q},n\in\mathbb{Z}^+$
- 度量空间的拓扑基为$\{B(x,\varepsilon)|x\in X,\varepsilon>0\}$

命题9　$\mathcal{B}$为Y的拓扑基,则$f:X\to Y$连续$\Longleftrightarrow\forall U\subset\mathcal{B},f^{-1}(U)$开.

命题10　设X是集合,$\mathcal{B}$是一个X的子集组成的集合,$\mathcal{B}$中任意两个成员的交属于$\mathcal{B}$,且X是$\mathcal{B}$中成员的并.则存在X的拓扑τ,使得$\mathcal{B}$是τ的基.

证明　取τ中的成员为X中若干元素的并即可.　□

定义14　设X,Y是拓扑空间,令$\mathcal{B}=\{U\times V|U\subset X,V\subset Y\}$开,则$\mathcal{B}$满足命题条件,$\mathcal{B}$生成的拓扑称为**乘积拓扑**$\tau$,$(X\times Y,\tau)$称为**乘积空间**.

定理1　设X,Y是拓扑空间.

1. $\pi_X:X\times Y\to X,\pi_Y:X\times Y\to Y$连续.
2. $f:Z\to X\times y$连续$\Longleftrightarrow\pi_X\circ f:Z\to X$和$\pi_Y\circ f:Z\to Y$连续.

证明

1. 考虑开集的原像即可
2. 只需注意到$f^{-1}(U\times V)=(\pi\circ f)^{-1}(U)\times(\pi\circ f)^{-1V}$

□

注　满足上述(2)的拓扑是唯一的.

证明　设τ_1,τ_2满足(2),考虑$\mathrm{id}:(X\times Y,\tau_1)\to(X\times Y\to Y)$.

由(2),π_X,π_Y连续,由(2),π_Y连续.　□

定义15　一个映射$f:X\times Y$称为**嵌入**,若诱导映射$X\to\operatorname{Im}f$是同胚.

命题11　$(X\times Y)\times Z$与$X\times Y\times Z$拓扑一致.

证明　□

例12　$T^2=S^1\times S^1$称为**环面**. $T^n=(S^1)^n$称为**n维环面**

练习题

4. 1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

2. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$并指出等号不成立的条件.

5. 设$A \subset B \subset X$,若A在B稠密,B在X中稠密,则A在X中稠密。

6. 设$f : X \to Y$在$x \in X$处连续,若$x_n \to x$,则$f(x_n) \to f(x)$

7. 设U是$p \in X$的邻域,V是$q \in Y$的邻域,证明(p, q)是$X \times Y$的邻域

8. 设$f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$,证明$f \times g : X \times Y \to X' \times Y'$连续

9. 证明:$X \to X \times Y$是嵌入.

10. 设X, Y是度量空间,$X \times Y$上有度量$d((x, y), (x', y')) = \sqrt{d(x, x')^2 + d(y, y')^2}$.
证明:$X \times Y$的度量拓扑和乘积拓扑相同.

11. $A \subset X, B \subset Y$,$A \times B$的乘积拓扑与子空间拓扑相同.(提示:$A \times B$取子空间拓扑证满足定理(2))

第二章　拓扑空间的性质

2.1　分离性

定义16　设X是拓扑空间,称X是T_0空间,如果对于不同$p,q\in X$,至少有一个点不包含另一个点的邻域.

称X是T_1空间,如果p,q各有一个邻域不包含对方.

称X是T_2空间或Hausdorff空间.如果任意不同$p,q\in X$,存在p,q的邻域U,V使得$U\cap V=\varnothing$

注　$T_2\Rightarrow T_1\Rightarrow T_0$

注　几何,拓扑学一般都假设满足T_2公理.

命题12　度量空间是T_1空间

例13　多于一个点的平凡拓扑空间不是Hausdorff空间.

命题13　X是$T_1\Leftrightarrow$单点集是闭集.

证明　$\Leftarrow$,设$p,q\in X$不同,故$X-\{q\}$,$X-\{p\}$是包含p,q的邻域.

$\Rightarrow$,只需证$X-\{p\}$为开集.显然. □

2.2　紧性

命题14

1. 连续映射将紧集映为紧集
2. 紧集的闭子集的紧集
3. Hausdorff空间的紧集是闭集
4. $\mathbb{R}^n$中紧集等价于有界闭集
5. 紧性具有可乘性

命题15　X是紧集,Y是T_2,则连续映射$f:X\to Y$是闭映射.

证明　取$A\subset X$是闭集,则A是紧集,故$f(A)$是紧集,从而$f(A)$是闭集. □

推论4

1. 紧集到Hausdorff空间的连续双射为同胚.
2. 紧集到Hausdorff空间的满射为商映射

例14　离散空间是紧的当且仅当其实有限集.

2.3　可数性公理

定义17　X称为**可分**的,如果它存在可数稠密子集.

例15　$\mathbb{R}$是可分的,$\mathbb{R}^n$也是可分的.

不可数个点构成的离散空间是不可分的.

定义18　X称为**第二可数**的(或C_2的),如果存在可数拓扑基.

例16　$\mathbb{R}^n$是C_2的,由于以有理数为球心,有理数为半径的球是一组拓扑基.

定义19　$x \in X$为拓扑空间中的一个点,x的一组邻域称为x的一组邻域基$\mathcal{B}$,如果对于任何x的邻域U,U包含某个$B \in \mathcal{B}$.

定义20　称X是C_1的,如果每个点都有一个可数邻域基.

例17　度量空间满足C_1公理,事实上,对于每个点$B(x, \dfrac{1}{n})$是一组邻域基.

注　C_2空间的子空间也是C_2的.

注　第二可数空间的乘积空间也是第二可数的.可分空间的乘积空间也是可分的

注　可分空间的子空间不一定可分.

大概的构造是将一个不可分的嵌入到可分的.设X不可分，添加y,使得y的这个单点集的闭包是全空间,并且$X \to (X', \tau') = \{y\} \cup X$是嵌入.

令$\tau' = \{\varnothing\} \cup (\{y\} \cup \tau)$

命题16　C_2推出C_1和可分.其它推不出.

证明　设X是C_2的.$\mathcal{B}$是X的可数基,在非空的$u \in \mathcal{B}$中选一点x_u,则$\overline{\{x_u\}} = X$.从而X可分,而邻域基即取原来的基和x的交.

反过来不可数个点的离散空间是C_1的,但不可分,也不是C_2的. □

命题17　在度量空间中,X可分当且仅当X是C_2的.

证明　设D的可数稠密集,令考虑$B(x, \dfrac{1}{n}), n \in \mathbb{Z}^+, x \in D$为一组拓扑基. □

推论5　可分度量空间的子空间也是可分空间.

2.4　连通性

定义21　设X是拓扑空间,称X是**连通的**,如果X不能分成两个非空开集的并集.

例18　$(0,1) \cup (1,2)$不是连通的.

定理2　$\mathbb{R}$是连通的.

证明　反证法,假设能分成两个开集U, V的并.取$x \in U, y \in V$,不妨设$x < y$.考虑$\sup_{a \in U | a < y}$,则既不能有$c \in U$,也不能有$c \in V$,从而导致矛盾. □

命题18　连续映射保持连通性.

证明　设X连通,$f : X \to Y$连续满射.假设Y不连通,容易推出矛盾. □

注　连通有很多等价的描述.

- 不能分成两个非空开集的并.
- 不能分成两个非空闭集的并.

- 既开又闭的子空间一定是全空间.

命题19　设XC_1,则$A \subset C, x \in X$,则$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow$存在点列$x_1, \cdots, x_n, \cdots$,使得$x_n \to X$.

证明　$\Rightarrow$取可数邻域基即可 □

推论6　设$x \in XC_1, f: X \to Y$是映射,则f连续$\Longleftrightarrow$任意$x_n \to x, f(x_n) \to f(x)$

2.5　连通分支

定义22　X的一个极大的连通子集称为一个连通分支.

定理3

1. 连通分支是闭集
2. 不同连通分支不交
3. X是连通分支的不交并

例19　$\mathbb{Q}$中单点集连通，因此连通集不一定是开集

引理1　有公共点的一族连通子集的并集也是连通的.

定理4　设X, Y连通,则$X \times Y$连通.

命题20　局部道路连通$\Rightarrow$道路分支既开且闭.

命题21

1. X局部道路连通.
2. X的每个开集的道路分支是开集.
3. X道路连通的开领域是该点的邻域基.

证明　$(3) \Rightarrow (1)$显然

$(1) \Rightarrow (2)$设A是X的开集.则A是局部道路连通的.从而A的道路分支开.

$(2) \Rightarrow (3)$设V是$x \in X$的开邻域,W是x在V中的道路分支,由条件W开.从而W是x道路连通的开邻域.

□

2.6　度量空间的紧性

定义23　X称为**列紧的**,如果X的每个点列有收敛子列.

X称为极限点紧的**极限点紧**,若每个无穷点集有聚点.

对于一般的空间.紧则极限点紧.作业：证明列紧则极限点紧.

定理5　设X是度量空间,则下列命题等价

1. X紧
2. X极限点紧
3. X列紧

证明　$(1) \Rightarrow (2)$,显然。

$(2) \Rightarrow (3)$,设$x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$.若有常值子列,则该子列显然收敛.

否则,$W = \{x_n | n = 1, 2, \cdots\}$,为无穷集有极限点.由度量空间的C1,T1性即得.

$(1) \Rightarrow (3)$可以由下面的两个结论得到. □

注　若X是C_1, T_1,则极限点紧$\Rightarrow$ fff;

命题22　C_2+列紧$\Rightarrow$紧.

证明　设$\mathcal{B}$是列紧空间的可数拓扑基,设U是$\mathcal{B}$中成员的组成的X开覆盖.假设U没有有限子覆盖.则可选取$x_n \notin U_1 \cup \cdots \cup U_n$,容易验证$\{x_n\}$没有收敛子列.事实上,对任意$y \in U_k$,当$n > k$时,$x_n \notin U_k$,从而$\{x_n\}$的子列不收敛到y. □

最后证明列紧的度量空间是第二可数的.

命题23　设X是列紧度量空间.$\forall \varepsilon > 0$,则存在$x_1, \cdots, x_n \in X$,使得$\bigcup\limits_{i=1}^{n}$,使得$B(x_i, \varepsilon) = X$

证明　利用反证法,假设存在$\varepsilon > 0$,使得不存在有限ε网.每个里面选取一个即得矛盾. □

推论7　列紧的度量空间可分.

由于度量空间可分等价于第二可数,从而列紧的度量空间第二可数.

2.7　正则和正规空间

定义24　X称为**正则的**,若任意不交的点和闭集,存在不交的开邻域.

X称为**正规的**,若不交的闭集有不交的邻域.

注　T_1正规$\Rightarrow T_1$正则$\Rightarrow T_2$

例20　两点以上的平凡空间正则且正规,但不$T1$.

命题24　度量空间正则且正规。

证明　由于T_1,只需验证正规.设A, B是不交的闭集,$\forall a \in A$,使得$\varepsilon > 0$,使得$B(a, \varepsilon_a)$,使得$B(0, \varepsilon_n) \cap B = \varnothing$.同样的,对$b \in B$,有$\varepsilon_b$.从而$B(0, \frac{\varepsilon_a}{2} + \frac{\varepsilon_b}{2})$.从而令$U, V$为其邻域起来,满足条件. □

引理2 (Urysohn引理)　下列等价

1. X正规
2. 任意不交闭集存在连续函数$f : X \to [0, 1]$,使得$f|_A = 0, f|_B = 1$

注　C_2空间可度量化$\Longleftrightarrow T_1$正规.

证明　(2)$\Rightarrow$(1)显然.

(1)$\Rightarrow$(2):参见Munkres. □

推论8　X是连通的度量空间,则X要么一个点,要么不可数.

证明　取$a, b \in X$,由于X连通由介值定理$|X| \geq |[0, 1]| = |\mathbb{R}|$ □

定理6 (Tietz扩张定理)　下列等价

1. X正规
2. 任意闭集$Z \subset X$上的连续函数$f : X \to [-1, 1]$能够扩充到X.
3. 任意闭集$Z \subset X$上的连续函数$f : X \to \mathbb{R}$能够扩充到X.
4. 任意闭集$Z \subset X$上的连续函数$f : X \to (-1, 1)$能够扩充到X.

证明　$(2) \Rightarrow (1)$,设A, B为不交闭集.与上面类似即得.

$(2) \to (4)$,设$f : Z \to (-1, 1)$连续,由(2), f可扩张为连续$\varphi : X \to [-1, 1]$,令$E = \varphi^{-1}(-1) \cup \varphi^{-1}(1)$,$E \cap Z = \varnothing$.由Uryson引理.存在连续$X \to [0, 1]$,使得$\psi(E) = 0, \psi(Z) = 1$

$(1) \to (2)$

引理3　设$\varphi_n X \to \left[-\frac{2^{n-1}}{3^n}, \frac{2^{n-1}}{3^n}\right]$

定义$\varphi : X \to [-1, 1], \varphi(x) = {}_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$连续.

证明　由一致收敛的命题即得. □

令$A = f^{-1}[-1, -\dfrac{1}{3}], B = f^{-1}[\dfrac{1}{3}, 1]$,由Urysohn引理,存在连续$\varphi_1 : X \to -\left[-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right]$,且$f - \varphi_1 : Z \to [-\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}]$.以此类推即可. □

练习题

12. 有限个紧集的并是闭集.

13. 紧集的无限子集必有聚点.

14. 设X, Y是可分的,则$X \times Y$也是可分的

第三章　商空间和曲面

构造:设X是拓扑空间,$\sim$是X上的等价关系.$X/\sim$是等价类的集合.考虑$\pi : X \to X/\sim, x \mapsto [x]$.$X/\sim$赋予拓扑.$A \subset X/\sim$开$\iff \pi^{-1}(A)$是$X$的开集.(等价于...闭$\iff$...闭),容易验证其实一个拓扑,称作**商拓扑**,称$X/\sim$及其商拓扑称为商空间.

定义25　一个满射$f : X \to Y$称为商映射.若$U \subset Y$开$\iff f^{-1}(U)$开(对于闭集有等价的描述.)

注　1. $\pi : X \to X/\sim$为商映射

2. 满射$f : X \to Y$给X的一个等价关系.$x \sim x' \iff f(x) = f(x')$

命题25　设$f : X \to Y$是商映射.则

1. f连续

2. 任意g连续$ldag \circ f$连续.

练习：$X/\sim$的商拓扑是满足(2)唯一的拓扑.

定理7　设$f : X \to Y$是连续满射,若是开映射或闭映射,则f是商映射.

推论9　紧到Hausdorff的连续满映射为商映射.

记号：设$A \subset X$,定义$\sim$,其中A是一个等价类,其余单点为等价类,则记$X/\sim$为X/A

例21　$f : [0,1] \to S^1, t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}$为连续满射,且为紧到Hausdorff的映射.故为商映射.因此$[0,1]/\{0,1\} \cong S^1$

例22　$f : [0,1] \to [0,1]$,$(t,s) \to (\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}t}, s)$是商映射.

注　若X紧则$X/\sim$紧.对于连通和道路连通有相同的结论.

作业：(1)商映射的复合是商映射.

(2)若$f : X \to Y$连续,$g : Y \to Z$,$g \circ f$是商映射,则g也是.

例23　设$g : Y \to Z$连续,$A \subset Y$,若$g|_A : A \to Z$是商映射.则g也是.

例24　设$f : (-1,2) \to [0,1]$,$(-1,1)$上为绝对值函数,其余

作业2:$f : X \to X', g : Y \to Y', \pi : X \to Y, \pi' : X' \to Y'$,证明：若$f$连续则$g$也连续.

例25　$X \times [0,1]/X \times \{1\}$,记作$CX$称为$X$上的锥.

若$f : X \to Y$连续,$f \times \mathrm{id} : X \times [0,1] \to Y \times [0,1]$诱导$CX \to CY$连续.

作业:X是$T2$空间,$A \subset X$紧,证明:X/A是$T2$空间.

例26　$D^n/S^{n-1} \cong S^n$.构造$D^n \to S^n : x \mapsto (1 - 2|x|, x \cdot g(|x|))$

例27　$CS^n \cong D^{n+1}, CD^n \cong D^{n+1}$

定义26　设X, Y是拓扑空间,集合的不交并$X \sqcup Y$有如下拓扑.

$U \subset X \sqcup Y$开,若$U \cap X$和$U \cap Y$开.

作业：不交并的万有性质.

例28　对于$X \sqcup Y$,考虑$S_+^n \sqcup S_-^n \to S^n$为商映射.

从而$D^n \sqcup D^n / \sim \cong S^n$

命题26　设$A \subset \mathbb{R}^n$有界闭凸集,且A°为非空,则$A \cong D^n, \partial A \cong S^{n-1}$

证明　不妨$0 \in A^\circ$,考虑$\partial A \to S^{n-1} : x \mapsto \dfrac{x}{|x|}$.为连续双射.故$f$是同胚. 考虑$g : \partial \to [0,1] \to A,(x,t) \mapsto (1-t)x$ 从而g为商映射.因此$C(\partial A) \cong A$ □

3.1　流形

定义27　一个Hausdorff空间M称为一个n**维流形**.如果每个点x有一个邻域同胚于$\mathbb{R}^n$或$\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{n \geq 0}$.使$x$同胚对应于原点.前面的点称为**内点**,后面的点称为**边界点**.

内点的集合称为流形的**内部**,边界点的集合称为流形的**边界**(∂M).

若$\partial M = \varnothing$则称M为**无边流形**,否则称为**带边流形**

例29

1. $\mathbb{R}^n$
2. S^n
3. $\mathbb{R}_+^n$
4. D^n

例30　考虑$\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} / \sim$,其中$\sim$只不把0等同起来,其每个点同胚于$\mathbb{R}$的子集,但不是Hausdorff,故不是流形.

事实

1. 流形的边界与内部不交(即流形的边界拓扑不变)
2. 不同维数流形不同胚.

二维的流形称为**曲面**.