重庆理工大学《概率论与数理统计》2023-2024学年第一学期期末试卷

班别________　　姓名__________　　成绩____________

要求：　1、本卷考试形式为**闭卷，**考试时间为**1.5小时，满分100分。**

2、考生不得将装订成册的试卷拆散，不得将试卷或答题卡带出考场。

3、考生只允许在密封线以外答题，答在密封线以内的将不予评分。

4、考生答题时一律使用蓝色、黑色钢笔或圆珠笔（制图、制表等除外）。

5、考生禁止携带手机、耳麦等通讯器材。否则，视为为作弊。

6、不可以使用普通计算器等计算工具。

题目部分，（卷面共有20题，100分，各大题标有题量和总分）

一、选择题（2小题，共7分）

1、设A和B是任意两个概率不为零的互不相容事件，则下列结论中肯定正确的是(　　)。

A、$\overline{A}$与$\overline{B}$不相容　　B、$\overline{A}$与$\overline{B}$相容　　C、P(AB)=PA、PB、　　D、P(A− B)=PA、答案：D

2、在[0,π]上均匀地任取两数ξ与η则$P\{\cos(\xi+\eta)<0\}$=(　　)。

A、$\frac{3}{4}$　　B、$\frac{1}{2}$　　C、$\frac{2}{3}$　　D、$\frac{7}{8}$

答案：A

二、填空（6小题，共15分）

1、设由十个数字0，1，2，3，···，9的任意七个数字都可以组成电话号码，则所有可能组成的电话号码的总数是______________。

答案：10^7个

2、已知$P(A)=0.8,\quad P(\overline{B})=0.3,\quad P(A\cup B)=0.9$，则$P(B\mid A)=$_________。

答案：0.75

3、设$F_1(x),F_2(x)$为分布函数，则当$a_1>0$，$a_2>0$均为常数，且a_1+a_2=_____时，

$a_1F_1(x)+a_2F_2(x)$ 也为分布函数。

答案：1

4、答案：1

5、掷一均匀硬币10000次，ξ表示出现正面的次数，试用中心极限定理计算p{5100<ξ<10000}=____________。已知，$F_{0,1}$(1)=0.8413，$F_{0,1}$(2)=0.9772，$F_{0,1}$ (100)=1。

答案：0.0228

6、设样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ 已知，要对 σ^2 作假设检验，统计假设为 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2,H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$，则要用检验统计量为_______,给定显著水平 α，则检验的拒绝域为_________________。

答案：$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$,$(0,\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)]\cup[\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n),+\infty)$

三、问答（3小题，共23分）

1、ξ与η的联合分布列为：

η	η=y_1	η=y_2	η=y_3
ξ=x_1	0.05	0.10	0.05
ξ=x_2	0.08	0.16	0.08
ξ=x_3	0.12	0.24	0.12

判断ξ与η是否相互独立。

答案：解法一：P{ξ= x_1 }=0.05+0.10+0.05=0.20

P{ξ= x_2 }=0.08+0.16+0.08=0.32

P{ξ= x_3 }=0.12+0.24+0.12=0.48

P{η= y_1 }=0.05+0.08+0.12=0.25

P{η= y_2 }=0.10+0.16+0.24=0.50

P{η= y_3 }=0.05+0.08+0.12=0.25

则 $P\{\xi=x_k,\ \eta=y_m\}=P\{\xi=x_k\}\cdot P\{\eta=y_m\}$

(k=1,2,3；m=1,2,3)

故ξ与η相互独立。

解法二：$(P\{\xi=x_i,\eta=y_j\})_{3\times3}=\begin{pmatrix}0.05 & 0.10 & 0.05\\0.08 & 0.16 & 0.08\\0.12 & 0.24 & 0.12\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}0.20\\0.32\\0.48\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.25 & 0.50 & 0.25\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}P\{x=x_1\}\\P\{x=x_2\}\\P\{x=x_3\}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P\{\eta=y_1\} & P\{\eta=y_2\} & P\{\eta=y_3\}\end{pmatrix}$$

故ξ与η相互独立。

2、母体 X 服从指数分布。密度函数为 $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$，x≥0，问样本均值近似分布可以是什么？为什么？

答案：(1)近似分布为 $N\left(\frac{1}{\lambda},\frac{1}{n\lambda^2}\right)$，n 为样本容量。 (2)中心极限定理。

3、设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，相互独立服从同一分布，Eξ=a，Dξ=σ^2。求出 $\bar{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_n$ 的数学期望与方差，并说明 $\bar{\xi}$ 作为 Eξ的估计量的无偏性及一致性的理由。

答案：解：$E\bar{\xi}=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a=a$

$$D\bar{\xi}=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D\xi_i=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

由于 $E\left(\bar{\xi}-a\right)=E\bar{\xi}-a=a-a=0$ 故 $\bar{\xi}$ 是ξ的无偏估计量。

由切氏不等式 $P\left\{\left|\bar{\xi}-a\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$ 故 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\bar{\xi}-a\right|<\varepsilon\right\}=1$

则 $\bar{\xi}$ 是ξ的一致估计量。

四、计算（5 小题，共 21 分）

1、从一付扑克的 13 张黑桃中，一张接一张地有放回地抽取 3 次，求没有同号的概率。
答案：A 表示事件“没有同号”

基本事件总数 13^3

A 所包含事件数 13×12×11

PA、$=\dfrac{13\times12\times11}{13^3}=\dfrac{132}{169}=0.781$

2、一口袋装有 10 只球，其中 6 只是红球，4 只是白球，今随机地从中同时取出 2 只球，试求取到二只球颜色相同的概率。
答案：A 表事件“取到的二只球颜色相同”

基本事件总数 n=C_{10}^2=45

B 表事件"取到的二只球都是白球"
C 表事件"取到的二只球都是红球"

$r_A=r_B+r_C=C_4^2+C_6^2=21$

PA、$=\dfrac{r_A}{n}=\dfrac{21}{45}=\dfrac{7}{15}$

3、A1000000_999_14482 答案文档没有找到！

答案：A1000000_999_14482 答案文档没有找到！

4、(1)设总体 X 服从区间[a,8]上的均匀分布，求 a 的矩估计量.
(2)设总体 X 服从区间[3,b]上的均匀分布，求 b 的矩估计量.

答案：(1)因为 $E\left(X\right)=\dfrac{a+8}{2}$ 得 $a=2EX-8$ 所以 $\hat{a}=2\bar{X}-8$

(2)因为 $E\left(X\right)=\dfrac{3+b}{2}$ 得 $b=2EX-3$ 所以 $\hat{b}=2\bar{X}-3$

5、设母体 X 服从分布Γ(α,β)，其密度函数为 $\varphi(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}x^x e^{-\frac{x}{\beta}} & x\ge 0\end{cases}$

求α,β的估计量.

答案：由 $\mathrm{E(X)}=\beta(\alpha+1)$, $\mathrm{D(X)}=\beta^2(\alpha+1)$

可用子样均值 $\bar{X}$ 及方差 S^2 作为母体均值 $E(X)$ 及方差 $D(X)$ 的估计量，即

$$\begin{cases}\overline{X}=\hat{\beta}(\hat{\alpha}+1)\\ S^2=\hat{\beta}^2(\hat{\alpha}+1)\end{cases}$$

解之得：$\hat{\alpha}=\overline{X}^2/S^2-1$　　　$\hat{\beta}=S^2/\overline{X}$

五、应用（4 小题，共 34 分）

1、设有某产品 40 件，其中有 10 件次品，其余为正品，现从其中任取 5 件，求取出的 5 件产品中至少有 4 件次品概率.

答案：设 A 表“恰有 4 件次品”,B 表“5 件全是次品”,C 表“至少有 4 件次品”,

则 C=A⋃B，A,B 互斥，PC、=PA、+PB、.

由于 PA、$=\dfrac{C_{30}^1C_{10}^4}{C_{40}^5}=\dfrac{175}{18278}$

PB、$=\dfrac{C_{10}^5}{C_{40}^5}=\dfrac{7}{18278}$

因此 PC、=PA、+PB、≈0.0100

2、对同一目标进行三次独立射击，第一、二、三次射击的命中概率分别为 0.4、0.5、0.7，试求在这三次射击中恰好有一次击中目标的概率。

答案：P=0.4(1－0.5)(1－0.7)+(1－0.4)0.5(1－0.7)+(1－0.4)(1－0.5)0.7=0.36

3、设计规定，由自动机床生产的产品尺寸$\mu=\mu_0$=35mm，随机取出 20 个产品，测量结果如下：

产品尺寸 x_i (单位：mm)：34.8，34.9，35.0，35.1，35.3

频数(产品数量) f_i：2，3，4，6，5

问：产品尺寸合乎设计规定码？α=0.05，假定产品尺寸服从正态分布。(已知 $t_{0.975}$ (19)=2.093)

答案：这问题即是在α=0.05 下，检验假设

H_0：$\mu=\mu_0=35$；H_1：$\mu\neq\mu_0=35$；(σ^2 未知)

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum f_ix_i=35.07\quad s^2=\frac{1}{n-1}\sum f_i\left(x_i-\overline{x}\right)^2=2.747$$

$$t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{35.07-35}{\sqrt{2.747/20}}=1.96$$

由于 $|t|=1.96<2.093=t_{0.975}(19)=t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 故接受 H_0 即认为自动机床生产的产品尺寸符合设计要求。

4、用显微定量法测定一种成药中的某成份的浓度 x 与镜检菌丝数目 y 如下表：

x 浓度 mg/ml	2.07	4.14	6.21	8.28	10.34
y 镜检数	60	142	203	269	309

(1)建立 y 对 x 的回归方程，(2)求 x_0=9mg/ml 时 y_0 的估计区间(置信度为 95%)

(已知 $\alpha = 0.05$ 时，$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3) = 3.18$)

答案：解：$\overline{x} = 6.208, \overline{y} = 196.6, n = 5$

$$\ell_{xx} = 42.766, \ell_{yy} = 39557.2, \ell_{xy} = 1292.626$$

(1) $\hat{b} = \ell_{xy} / \ell_{xx} = 30.226, \hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x} = 8.960$

回归方程为：$\hat{y} = 8.960 + 30.226x$

(2)x0=9 则 $\hat{y}_0 = 280.994$

$\hat{\sigma} = \sqrt{(\ell_{yy} - \hat{b}\ell_{xy})/(n-2)} = 12.73$

估计区间为：

$$\hat{y}_0 \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)\hat{\sigma}\sqrt{1 + \frac{1}{n} + (x_0 - \overline{x})^2 / \ell_{xx}} = (280.994 \pm 49.836)$$