课程名称__高等数学【机电（1）】

一、单项选择题（本大题共 5 个小题，每小题 3 分，总计 15 分）

1、当 $x\to 0$ 时，函数 $\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 是（　　　）【答案】B

(A) 无穷大量　　(B) 无界但不是无穷大量

(C) 无穷小量　　(D) 有界但不是无穷小量

2、 若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题不正确的是(　　　)【答案】 D

（A）若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$　　（B）若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

（C） 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在　　（D）若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

3、函数 $f(x)=\frac{x^n-1}{x}$，则 $f^{(n)}(1)=$ (　　　)【答案】 C

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$　（B）$(-1)^n(n-1)!$　（C） $(-1)^{n-1}n!$　（D）$(-1)^n n!$

4、已知 $f(x)=xe^{-x^2}$，则 $\int f'(-x)dx=$（　　　）【答案】 A

（A） $xe^{-x^2}+C$　（B） $-xe^{-x^2}+C$　（C） $xe^{x^2}+C$　（D）$-xe^{x^2}+C$

5、设反常积分 $I_1=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ ， $I_2=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x}dx$ ，则（　　　）【答案】 C

(A) I_1 与 I_2 都收敛；　　(B) I_1 与 I_2 都发散；

(C) I_1 收敛， I_2 发散；　　(D) I_1 发散， I_2 收敛.

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，总计 15 分）

6、极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=$_________.　【答案】 3

7、设 $y=f(x\ln x)$ ，其中函数 $f(x)$ 可导，则 $\frac{dy}{dx}=$__________.

【答案】 $(1+\ln x)f'(x\ln x)$

8、函数 $y=\frac{1-x^2}{x^2-3x-2}$ 的水平渐近线方程为___________.【答案】 $y=-1$

9、设 $\sin x^2$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int_0^{\sqrt{\pi}}xf'(x)\,dx=$________.　【答案】 -2π

10、定积分$\int_{-1}^{1}x^2(2+\sin x)dx=$________. 【答案】 $\frac{4}{3}$

三、计算题（本大题共 5 小题，每小题 6 分，总计 30 分）

11、求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x-2}$.

解答： $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{(-x)\bullet(-1)}\bullet\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{-2}$ (4 分)

$=e^{-1}$ (2 分)

12、求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

解答： $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(e^x+e^{-x})$ (4 分)

$=2$ (2 分)

13、设$y=\frac{1}{1-x}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{2}$，求$dy\big|_{x=0}$.

解答： $dy=y'dx=\left[\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right]dx$ (4 分)

故 $dy\big|_{x=0}=2dx$ (2 分)

14、求不定积分$\int(x-1)e^{2x}dx$.

解答： $\int(x-1)e^{2x}dx=\frac{1}{2}\int(x-1)\,\mathrm{d}(e^{2x}) =\frac{1}{2}(x-1)e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\,\mathrm{d}x$ (4 分)

$=\frac{1}{2}(x-1)e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$ (2 分)

15、求定积分求定积分$\int_0^3\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$.

解答： $\int_0^3\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx\overset{\sqrt{x+1}=t}{=}\int_1^2\frac{t^2-1}{t}d(t^2-1)=\int_1^2 2(t^2-1)dt$ (4 分)

$$=\int_1^2 (2t^2-2)dt=\left[\frac{2}{3}t^3-2t\right]_1^2=\frac{8}{3} \qquad (2\text{ 分})$$

或：$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx=\int_0^3 (\sqrt{x+1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}})dx=\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{x+1}\right]_0^3$ (4 分)

$=\frac{8}{3}$ (2 分)

四、解答题（本大题共 5 小题，每小题 8 分，总计 40 分）

16、已知函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2t \\ y=\int_0^t \ln(1+u^2)du \end{cases}$ (t 为参数)确定，求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$

解答：因为 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\ln(1+t^2)}{2}$，（**3** 分）

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\ln(1+t^2)}{2}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{t}{1+t^2}}{2}=\frac{t}{2(1+t^2)} \quad （\textbf{4} 分），$$

故 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=\frac{1}{4}$.（**1** 分）

17、求方程 $y=1-xe^y$ 确定的曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程.

解答：在方程 $y=1-xe^y$ 两边同时对 x 求导，得

$y'=-e^y-xe^y y'$，有 $y'=-\frac{e^y}{1+xe^y}$，（**4** 分）

于是 $\left.y'\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=-\frac{1}{2}$ （**2** 分）

得所求切线方程为 $x+2y-1=0$.（**2** 分）

18、设函数 $y=f(x)$ 可积，且满足关系式 $f(x)=-x^2+x\int_0^1 f(x)dx$，

（1）求 $f(x)$ 的表达式；（2）判定曲线 $y=f(x)$ 的凹凸性.

解答：（1）令 $k=\int_0^1 f(x)dx$，则 $f(x)=-x^2+kx$，

于是 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(-x^2+kx)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{kx^2}{2}\right]_0^1=-\frac{1}{3}+\frac{k}{2}$

故 $k=-\frac{1}{3}+\frac{k}{2}$，则 $k=-\frac{2}{3}$.

所以 $f(x)$ 的表达式为 $f(x)=-x^2-\frac{2}{3}x$　（5 分）

（2）$y'=-2x-\frac{2}{3}$，$y''=-2<0$.故曲线 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是凸的（3分）

19、求函数 $f(x)=x^2-\frac{54}{x}$ 的极值；

解答：令 $f'(x)=2x+\frac{54}{x^2}=\frac{2(x^3+27)}{x^2}=\frac{2(x+3)(x^2-3x+9)}{x^2}=0$，得 $x=-3$　（3 分）

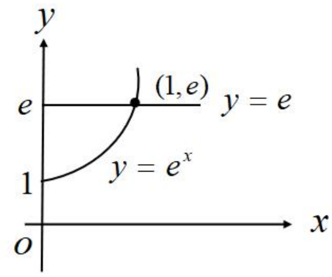
由 $f''(x)=2-\frac{108}{x^3}$ 得，$f''(-3)=6>0$　（3 分）

故函数极小值为 $f(-3)=27$.　（2 分）

20、设 D 是曲线 $y=e$ 与直线 $y=e^x$ 及 $x=0$ 所围成的平面图形.

求 (1) D 的面积 S；(2) D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

解答：平面图形 D 如图，



（1）　$S=\int_0^1(e-e^x)dx=1$；　（**4** 分）

（2）　$V=\int_0^1\pi[e^2-(e^x)^2]dx=\frac{1}{2}\pi(e^2+1)$.　（**4** 分）