חשמל ומגנטיות – תרגיל 6

רונן שקל – 309987493

שאלה 1

סעיף א':

המעטפות הכדוריות המוליכות ומוארקות הן בעלי פוטנציאל 0, כי הן שוות פוטנציאל לאינסוף – בו הפוטנציאל מוגדר ל0. כמו כן, לשאלה סימטריה כדורית, ולכן $\phi(\vec{r}) = \phi(r)$.

עבור $r > b$:

הפוטנציאל הוא 0, כי פוטנציאל כזה מקיים את תנאי השפה (באינסוף, ועל שפת המעטפת החיצונית), ומקיים $\nabla^2\phi = 0 = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$, כי אין מטענים נוספים בתחום זה. מיחידות – זהו הפוטנציאל האמיתי במרחב.

עבור $r < a$:

הפוטנציאל הוא 0, כי השפה שלו היא המעטפת הפנימית שם הפוטנציאל 0, ומקיים את משוואת פואסון. מיחידות – זהו הפוטנציאל.

נסמן את הצפיפות המשטחית שנוצרת של הספירה הפנימית σ_1, ושל החיצונית σ_2. לכן כמות המטען בכל אחת מהספירות היא: $Q_1 = 4\pi a^2\sigma_1,\ Q_2 = 4\pi b^2\sigma_2$, כמו כן, כמות המטען מהספירה הטעונה: $Q_R = 4\pi R^2\sigma$.

עבור מעטפת כדורית בודדת, ראינו כי הפוטנציאל מחוץ לה הוא כמו פוטנציאל של מטען נקודתי בעל המטען הכולל שעליה שנמצא במרכזה, ובתוך המעטפת הפוטנציאל הוא כמו על המעטפת. עבור המרחב בין הספירות, נסכום את הפוטנציאל לפי עיקרון ההרכבה:

$a < r < R$:

$$\phi_3(r) = \frac{kQ_1}{r} + \frac{kQ_R}{R} + \frac{kQ_2}{b} = 4\pi k \cdot \left[\frac{a^2\sigma_1}{r} + R\sigma + b\sigma_2\right]$$

$R < r < b$:

$$\phi_4(r) = \frac{kQ_1}{r} + \frac{kQ_R}{r} + \frac{kQ_2}{b} = 4\pi k \cdot \left[\frac{a^2\sigma_1}{r} + \frac{R^2\sigma}{r} + b\sigma_2\right]$$

כדי למצוא את σ_1, σ_2 נציב את תנאי השפה:

$$(1)\ \phi_3(a) = 0 = a\sigma_1 + R\sigma + b\sigma_2$$

$$(2)\ \phi_4(b) = 0 = \frac{a^2\sigma_1}{b} + \frac{R^2\sigma}{b} + b\sigma_2$$

נפתח:

$$(1)\ \sigma_2 = \frac{-a\sigma_1 - R\sigma}{b}$$

$$(2)\ \frac{a^2\sigma_1}{b} + \frac{R^2\sigma}{b} + \frac{-a\sigma_1 - R\sigma}{b} b = 0$$

$$a^2\sigma_1 + R^2\sigma - ab\sigma_1 - Rb\sigma = 0$$

$$\sigma_1(a^2 - ab) + \sigma(R^2 - Rb) = 0$$

$$\boldsymbol{\sigma_1 = \frac{(Rb - R^2)}{(a^2 - ab)}\sigma}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\sigma_2} = \frac{-a\left(\frac{-\sigma(R^2 - Rb)}{(a^2 - ab)}\right) - R\sigma}{b} = \frac{\sigma(R^2 - Rb) - R\sigma(a - b)}{b(a - b)} = \boldsymbol{\frac{R(R - a)}{b(a - b)}\sigma}$$

כאשר הצבה של σ_1, σ_2 בנוסחאות לעיל ייתנו תשובה מפורשת עבור הפוטנציאל.

<u>סעיף ב':</u>

מצאנו אותם כבר בסעיף א'.

<u>סעיף ג':</u>

הקליפות הן מוליכות, ולכן כל המטען מפולג על השפה שלהן, וגם השדה בתוכן הוא אפס. ראינו בסעיף א' כי הפוטנציאל מחוץ לכדורים מתאפס, ולכן גם השדה מתאפס. אם כן, הקפיצה בשדה ב$r = b$ הוא 0, (כי השדה הוא אפס משני הצדדים), והרי $\Delta E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, ולכן $\sigma_{b_{out}} = 0$. לכן כל המטענים נמצאים על הקליפה הפנימית, ו$\sigma_{b_{inner}} = \sigma_2$.

משיקולים זהים, $\sigma_{a_{out}} = \sigma_1$, ו$\sigma_{a_{inner}} = 0$, כי כל המטען מפולג על השפה, ובשפה הפנימית הצפיפות המשטחית היא 0, כי השדה בתוך הקליפה וגם בתוך הקליפה הפנימית הוא 0.

שאלה 2

בכיתה בתרגול 7 נתקלנו בבעיה זהה עבור מטען שנמצא ב$a\hat{z}$, כשבמקרה שלנו $a = 4_m$, ו$R = 2_m$, וגם $q = 5_{mC}$. שם מצאנו מטען דמות בתוך הכדור שיקיים את תנאי השפה ואת משוואת פואסון, ובעצם מבחינת הפוטנציאל (וממילא – השדה, והכוח) של המרחב שמחוץ לכדור, ניתן להתייחס לכדור כאל מטען הדמות.

מטען הדמות בתרגול קיים: $q' = -q\frac{R}{a}$, וגם $d = \frac{R^2}{a}$. ובמקרה שלנו:

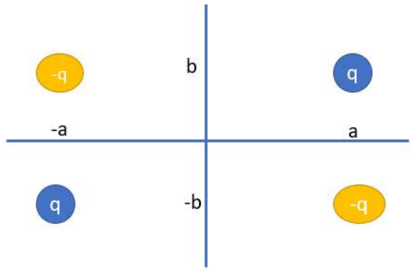
$$q' = -\frac{q}{2} = 2.5_{mC}, \qquad d = 1_m$$

משיקולי סימטריה ברור כי הכוח יפעל על ציר $\hat{z}$, ולפי חוק קולון (כשנעבור ליחידות סטנדרטיות של קולון, מטר):

$$\vec{F} = \frac{kqq'}{r^2} = \left| -\frac{8.988 \cdot 10^9 \cdot 25 \cdot 10^{-6}}{9} \right| = 24.967 \cdot 10^3 N$$

שאלה 3

נמצא מטעני דמות עבורם הפוטנציאל על שני המישורים יתאפסו כאשר q נמצא ב(a, b):



ההשפעה על הפוטנציאל בכל מישור של כל מטען מתבטלת ע"י השפעה הפוכה של מטען הפוך בצד השני.

האנרגיה של המערכת כאשר המטען היה באינסוף הוא 0, ואת האנרגיה במצב הסופי אפשר לחשב כאילו במקום המישורים היו מטעני הדמות. נשתמש בנוסחה:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi(\vec{r}_i)$$

כאשר לא נספור את האנרגיה של המטענים המדומים, מכיוון שהמישורים המוארקים הם שווי פוטנציאל, ולא נדרשת עבודה כדי להזיז בהם מטענים, ומטעני הדמות הם רק לצורך הנוחות של חישוב הפוטנציאל של המטען האמיתי, ולכן:

$$U = \frac{1}{2} q \cdot \phi(q) = \frac{q}{2} \cdot \left[\sum_j \frac{kq_j}{r_{qj}} \right] = \frac{kq}{2} \cdot \left[\frac{q}{\sqrt{4a^2 + 4b^2}} - \frac{q}{2b} - \frac{q}{2a} \right] =$$

$$= \frac{kq^2}{4} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right] < 0$$

מה שהגיוני, כי אין שום כוח דוחה מהמישורים אל המטען, אלא רק כוח מושך שנוצר אחרי שמטענים מאותו הסימן שלו התחילו לזרום לאינסוף, ולכן "הרווחנו" אנרגיה.

שאלה 4

סעיף א':

הפתרון יהיה אנלוגי לחלוטין לפתרון מהתרגול. על הקליפה המוארקת הפוטנציאל יהיה 0, וגם באינסוף הפוטנציאל הוא 0, ולכן מיחידות הפוטנציאל בכל המרחב מחוץ לכדור הוא 0.

על מנת לחשב את הפוטנציאל בתוך הכדור נבנה מטען דמות מחוץ לכדור, כאשר הדרישות זהות לחלוטין, ונקבל שוב ש:

$$q' = -q\frac{R}{a}, \qquad d = \frac{R^2}{a} > R$$

כאשר הביטוי הפעם מראה שמטען הדמות הוא אכן מחוץ לכדור, כי $R > a$. ולכן הביטוי אליו הגענו של הפוטנציאל עבור המרחב מחוץ לכדור:

$$\phi(\vec{r}|r < R) = \frac{kq}{|\vec{r} - a\hat{z}|} - \frac{kq\frac{R}{a}}{\left|\vec{r} - \frac{R^2}{a}\hat{z}\right|}$$

מתקיים במקרה שלנו רק בתוך הכדור.

<u>סעיף ב':</u>

פוטנציאל עם סימטריה כדורית נובע ממטען נקודתי. ננחש מטען דמות נקודתי q' במרכז שיענה על תנאי השפה:

$$\phi(r = R) = \frac{kq'}{R} = \varphi_0 \to q' = \frac{R\varphi_0}{k}$$

אם כן, מידול של המטענים בתוך הקליפה כמטען נקודתי במרכז בעל מטען $q' = \frac{R\varphi_0}{k}$ עונה על תנאי השפה, ומקיים את משוואת פואסון (כי לא שינינו את ρ בתחום אותו אנו בודקים – התחום שמחוץ לכדור). לכן הפוטנציאל מחוץ לכדור הוא:

$$\phi(r|r > R) = \frac{kq'}{r} = \frac{R}{r}\varphi_0$$

<u>סעיף ג':</u>

הקליפה הכדורית מוליכה, ולכן הפוטנציאל עליה קבוע, ונסמנו בϕ_0, שבינתיים אינו ידוע.

לפי סעיף ב' אנו יודעים כעת כי הפוטנציאל מחוץ לכדור הוא: $\phi(r|r > R) = \frac{R}{r}\phi_0$, ולכן השדה הוא:

$$E = -\nabla\phi = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{R}{r}\phi_0\right) = \frac{R\phi_0}{r^2}\hat{r}$$

כאשר ϕ_0 עדיין לא ידוע. נמצא אותו באמצעות בניית מעטפת גאוסית כדורית בעלת רדיוס $R' > R$. מתקיים $\int E \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$, אך השדה הוא בעל סימטריה כדורית, ולכן קבוע על משטח זה ולכן:

$$\frac{\mathrm{Q+q}}{\epsilon_0} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{R\phi_0}{R'^2}\hat{r} \cdot 4\pi R'^2\hat{r} = 4\pi R\phi_0$$

$$\to \phi_0 = \frac{k(Q + q)}{R}$$

ולכן:

$$\phi(r \geq R) = \frac{k(Q+q)}{r}$$

ע"מ למצוא את הפוטנציאל בתוך הכדור, עלינו למצוא פוטנציאל שמקיים את תנאי השפה וגם את משוואת פואסון. הפתרון שמצאנו בסעיף א' עונה על משוואת פואסון, אך מאפס את השפה. אם נוסיף לו קבוע זה לא ישפיע על הפתרון של משוואת פואסון, כי הנגזרת של קבוע היא 0, אך זה יתקן את תנאי השפה, ולכן:

$$\phi(r < R) = \frac{kq}{|\vec{r} - a\hat{z}|} - \frac{kq\frac{R}{a}}{\left|\vec{r} - \frac{R^2}{a}\hat{z}\right|} + \frac{k(Q+q)}{R}$$

ומיחידות – זה אכן הפוטנציאל בתוך הכדור.

<u>סעיף ד':</u>

הפוטנציאל על הקליפה הוא הקבוע φ_0, ולכן כדי להביא מטען מנקודה אחת על הקליפה לנקודה אחרת לא דרושה עבודה, ולכן השדה בפנים הוא 0, כי ההבאה יכולה להיעשות בכל מסלול, ואם השדה לא היה 0, היתה צריכה להיעשות עבודה. לכן הפוטנציאל בתוך הקליפה קבוע, ולכן הפוטנציאל בתוך הקליפה הוא הקבוע φ_0, כי הוא עונה על תנאי השפה ומקיים את משוואת פואסון. (ניתן להסיק את הפוטנציאל הקבוע בתוך הקליפה גם מיחידות.)

אם נוסיף מטען דמה בדיוק כמו בתרגול, עם $q' = -q\frac{R}{a},\ d = \frac{R^2}{a} > R$ הפוטנציאל על הקליפה יתאפס. נוסיף מטען דמות נוסף במרכז הקליפה, עם $q'' = \frac{R\varphi_0}{k}$, בדומה לסעיף ב', וכעת מסופרפוזיציה הפוטנציאל על הקליפה יהיה φ_0, ולכן מצאנו מטעני דמות שמקיימים את תנאי השפה ואת משוואת פואסון. לכן השדה מחוץ לקליפה יהיה:

$$E(r > R) = k\left[\frac{q}{|\vec{r} - a\hat{z}|}(\vec{r} - a\hat{z}) + \frac{-q\frac{R}{a}}{\left|\vec{r} - \frac{R^2}{a}\hat{z}\right|}\left(\vec{r} - \frac{R^2}{a}\hat{z}\right) + \frac{\frac{R\varphi_0}{k}}{r^2}\right]$$

שאלה 5

<u>סעיף א':</u>

תחת הקירוב $d \ll \sqrt{A}$ ניתן להתייחס לשדה בין הלוחות כשדה בין לוחות אינסופיים, ואז השדה קבוע כלפי מעלה, וערכו:

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0}\hat{z}$$

<u>סעיף ב':</u>

נחשב את הפוטנציאל באמצעות אינטגרל לא מסוים על השדה, בתוספת קבוע:

$$\phi_{in}(z) = -\int E_0 dz = -E_0 z + C$$

כיוון השדה בכל המישור $z = 0$ הוא כלפי $\hat{z}$. לכן על מנת להביא מטען מהאינסוף על ציר הx אל ראשית הצירים לא צריך להשקיע עבודה, ולכן הפוטנציאל ב$z = 0$ בראשית הצירים צריך להיות 0, על מנת שגם באינסוף הפוטנציאל יהיה 0:

$$\phi(0) = 0 = -E_0 \cdot (0) + C \rightarrow C = 0$$

$$\phi_{in}(z) = -E_0 z = -E_0 r cos(\theta)$$

נשים לב שאין קפיצה בפוטנציאל, כי בניגוד לקבל לוחות אינסופי, במקרה שלנו מחוץ ללוחות הפוטנציאל אינו קבוע ב0, וכשמתקרבים ללוחות הלוח הקרוב משפיע יותר מהלוח הרחוק.

<u>סעיף ג':</u>

בתוך הכדור:

הכדור מוארק, ולכן הפוטנציאל על השפה שלו הוא 0 (כי הגדרנו את הפוטנציאל להיות 0 באינסוף). הוא מוליך ולכן השדה בפנים הוא 0, ולכן מיחידות גם הפוטנציאל בפנים הוא 0.

מחוץ לכדור:

משיקולי סימטריה ברור כי סך המטען על הכדור הוא 0. הגיוני שהכדור יתקטב דיפולית בכיוון $\hat{z}$ בגלל שהשדה הוא קבוע לכיוון זה. מומנט הדיפול של הפוטנציאל הוא $\frac{k\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}$, כאשר ברור כי $\vec{p} \parallel \hat{z}$, ולכן:

$$\vec{p} = p\hat{z} \rightarrow \vec{p}\cdot\hat{r} = p cos(\theta)$$

כאשר את הגודל של p נמצא לפי:

$$\phi_{boards}(r = R) + \phi_{ball}(r = R) = 0$$

$$-E_0 R \cdot cos(\theta) + \frac{kp cos(\theta)}{R^2} = 0$$

$$-E_0 R^3 = -kp$$

$$p = \frac{E_0 R^3}{k}$$

לכן הפוטנציאל מחוץ לכדור הוא:

$$\phi(\vec{r}) = -E_0 r \cdot cos(\theta) + \frac{E_0 R^3 cos(\theta)}{r^2} = E_0 \cos(\theta) \cdot \left(\frac{R^3}{r^2} - r\right)$$

לבסוף נמצא את השדה לפי:

$$E_1 = -\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta} = E_0\cos(\theta)\cdot\left(1 + \frac{2R^3}{r^3}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}E_0\sin(\theta)\cdot\left(\frac{R^3}{r^2} - r\right)\hat{\theta}$$

<u>סעיף ד':</u>

בתוך הכדור:

הפוטנציאל על שפת הכדור הוא ϕ_0, השדה בתוכו הוא 0, והפוטנציאל בתוכו הוא ϕ_0, מה שעונה על תנאי השפה ומקיים את משוואת פואסון, ומיחידות – זה אכן הפוטנציאל.

מחוץ לכדור:

הפוטנציאל שמצאנו בסעיף ג' מקיים את משוואת פואסון, ומאפס את הפוטנציאל על שפת הכדור. נוסיף מטען דמות בראשית הצירים שיגרום לפוטנציאל קבוע על הספירה בגודל ϕ_0, כאשר $q' = \frac{R\phi_0}{k}$. ולכן מעיקרון הסופר פוזיציה, הפוטנציאל הכולל הוא:

$$\phi(\vec{r}) = E_0\cos(\theta)\cdot\left(\frac{R^3}{r^2} - r\right) + \frac{kq'}{r} = E_0\cos(\theta)\cdot\left(\frac{R^3}{r^2} - r\right) + \frac{R}{r}\phi_0$$

<u>סעיף ה':</u>

כדור מוארק:

בסעיף ג' מצאנו כי הכיוון הרדיאלי של השדה מקיים $E = E_0\cos(\theta)\cdot\left(1 + \frac{2R^3}{r^3}\right)\hat{r}$, וכאשר $r = R$ אז $E = 3E_0\cos(\theta)$. נבנה מעטפת גאוסית כדורית סביב הכדור המוארק ונקבל:

$$\frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = \int_S E\cdot d\bar{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 3E_0\cos(\theta)\sin(\theta)\,d\theta d\phi = \frac{3}{2}E_0\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\pi}\sin(2\theta)\,d\theta = 0$$

ולכן סך המטען על הכדור המוארק הוא 0.

(כאשר לא התחשבנו ברכיב המשיקי של השדה כי הוא מאונך למעטפת הכדורית, אך הוא גם מתאפס ב$r = R$).

כדור לא מוארק:

נגזור את הפוטנציאל בסעיף ד' בדומה לסעיף ג':

$$E_1 = -\nabla\phi = \left[E_0\cos(\theta)\cdot\left(1 + \frac{2R^3}{r^3}\right) + \frac{R}{r^2}\phi_0\right]\hat{r} + \frac{1}{r}E_0\sin(\theta)\cdot\left(\frac{R^3}{r^2} - r\right)\hat{\theta}$$

החלק הראשון של האינטגרל יתאפס, ונישאר רק עם השדה $E' = \frac{\phi_0 R}{r^2}\hat{r}$, אך שדה זה שקול לשדה של מטען נקודתי עם $kQ = \phi_0 R$, ולכן $Q = \frac{\phi_0 R}{k}$.