פפסיום כלכלי: בלאק ושולס

רועי זהר

5 בינואר 2019

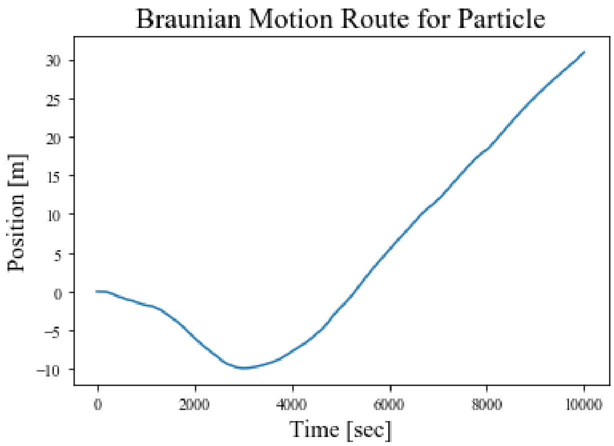
תקציר

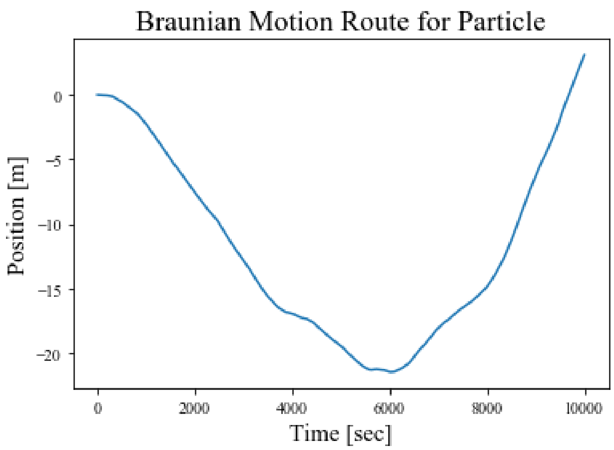
המודל של בלאק ושולס נחשב לאחת ההצלחות הגדולות ביותר של עולם הכלכלה במאה שנים האחרונות. עם זאת, המודל של בלאק ושולס מניח כמה הנחות יסוד, אשר לא תואמות את המציאות כלל. אחת מההנחות הללו, היא שהתנודתיות של המניות בשוק היא קבועה $(Volatility, \sigma)$. בחלק [1] אציג קודם כל את החלק הבסיסי של המטלה, שהוא מימוש של המודל הבסיסי לחיזוי מניות, המניח תנודתיות קבועה. לאחר מכן בחלק [2], אחשוף את הבעייתיות הרבה בהנחה שהתנודתיות קבועה, ואראה כיצד היא לא תואמת את המציאות בצורה משמעותית. לבסוף בחלק [3], אתאים מודל מסובך יותר לתנועת המניות בשם מודל $Heston$, אשר מאפשר גם לתנודתיות של המניה להתנהג כמו תהליך אקראי, וממדל את התנועה של המניה כתנועה בראונית מורכבת בשני מימדים.

1 חלק בסיסי

1.1 תנועה בראונית

התחלנו חלק זה בסימולציות של תנועה בראונית חד מימדית. התנועה סומלצה בצורה איטרטיבית, כך שבכל איטרציה נוסף רעש המתפלג בצורה נורמלית למהירות, ומסיט את כיוון ההתקדמות של החלקיק.





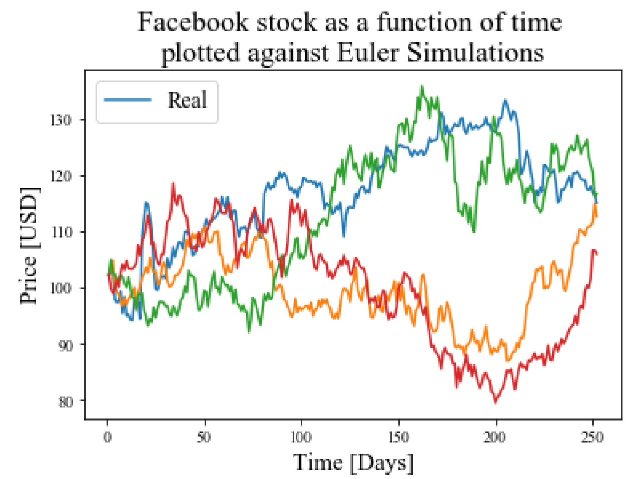
כפי שניתן לראות, בכל ריצה מתקבל מסלול חדש של חלקיק. כאשר מיצעתי ריצות רבות, ראיתי שהמהירות הממוצעת, וההעתק הממוצע מתקרבים ל0. כמו כן, ראיתי שבממוצע, החלקיק מתרחק בסדר גודל של $\sqrt{T}$ מהנקודה $x = 0$, תכונה המאפיינת תנועה בראונית.

1.2 מניות בשוק ההון

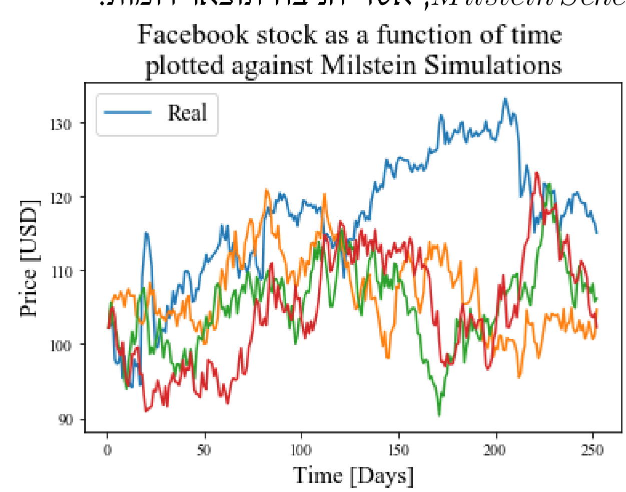
לאחר מכן, השלכנו את המודל של תנועה בראונית על מניה בשוק ההון, כאשר הרעש נובע מהשפעות אקראית בשוק. סימנו בS מחיר של מניה מסוימת, ותיארנו אותו בתור התהליך הסטוכסטי הבא:

$$dS = f(t,S)dt + g(t,S)d\zeta$$
$$g(t,S) = \sigma S$$
$$f(t,S) = rS$$

לקחתי נתונים של מניית פייסבוק בשנת 2016, וחילצתי מתוכם את r ואת σ של אותה תקופה. הערכים שיצאו לי היו $r = 0.00063$ $\sigma = 0.0178$. מתוך הערכים הללו, חישבתי כמה מסלולים אקראיים בעזרת שיטת $Euler$.



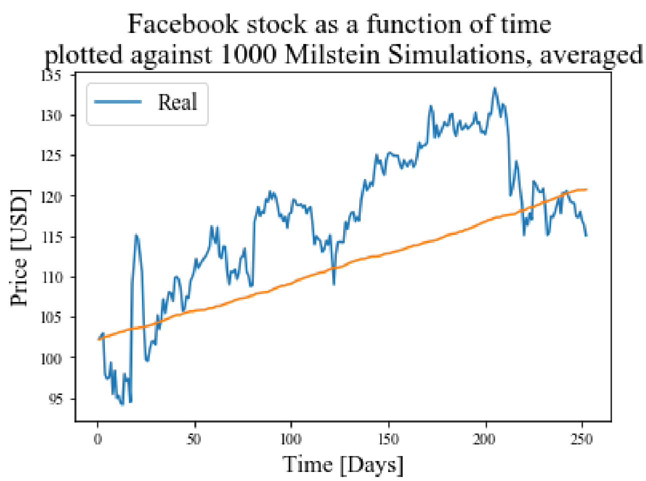
לעיל אנו רואים שלושה חיזויים שונים של מניה, הצבועים בירוק כתום ואדום, וכנגדם ערך המניה האמיתית הצבועה בכחול. אמנם כל גרף שונה לחלוטין, עדיין ניתן לראות קשר צורתי בין המניה האמיתית לחיזויים. לאחר מכן סימלצתי את המניה בשיטה נוספת בשם $Milstein\ Scheme$, אשר הניבה תוצאו דומות:



שוב, אנו רואים תוצאות דומות לאלו בשיטות $Euler$. נשאלת השאלה - איזה מבין השיטות חוזה את תנועת המניה בצורה טובה יותר? לא הגעתי לתשובה חד משמעית בעבודה שלי. למרות ששיטת $Milstein$ מוסיפה מימד נוסף של סיבוך, לא צפיתי בשינוי משמעותי בין שתי השיטות. בדיקה שהרצתי היית לראות מי מהמודלים מתכנס מהר יותר אל ערך המניה האמיתי לאחר שנה, עד כדי שגיאה של אחוז. לאחר מאה סבבים כאלו, התוצאות היו:

$$Milstein : 37, Euler : 33$$

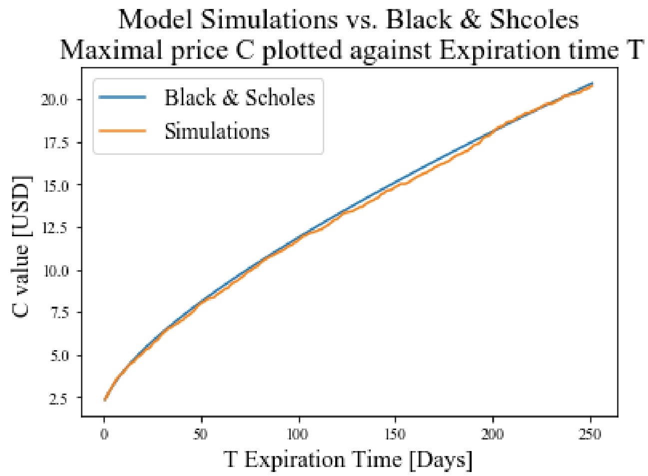
שאלה מעניינת שאפשר לשאול היא מה יקרה אם נמצע המון חיזויים? נשים לב שאם σ היה שווה ל0, היינו מצפים לקבל קו לינארי חסר רעשים, ששיפועו הוא ריבית חסרת הסיכון r. נשים לב שזה מצב הגיוני מאוד, משום שאילו לא היו רעשים מסביב, סביר להניח שכל המניות היו עולות בצורה בלתי תלויה לסביבתם.



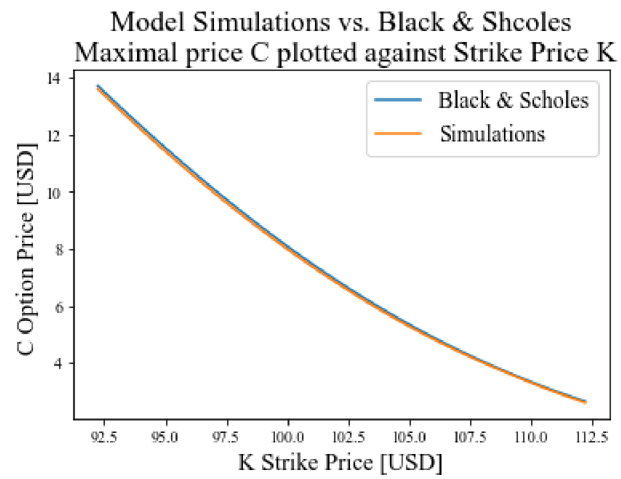
בגרף לעיל, אנו רואים את מניית פייסבוק בכחול, ובכתום ממוצע של 1000 סימולציות בשיטת $Milstein$. ניתן לראות שהממוצע הזה העלים את רוב הרעשים של σ, ונותרנו עם קו לינארי ששיפועו r כמצופה.

1.3 תמחור אופציות

לבסוף, בדקנו האם הסימולציות שלנו תואמות את המודל של בלאק ושולס לתמחור מניות. מצד אחד, מימשתי את המודל התיאורטי של בלאק ושולס, ומצד שני סימלצתי את המניה ובדקתי מהם המחירים המקסימליים עבור אופציה מסוימת.



בגרף לעיל אנו רואים את הערכת מחיר האופציה לפי מודל בלאק ושולס, לעומת הערכת הסימולציות שלנו, כתלות בזמני פקיעה T שונים עבור מניית $Facebook$.



בגרף לעיל אנו רואים את הערכת מחיר האופציה לפי מודל בלאק ושולס, לעומת הערכת הסימולציות שלנו, כתלות במחירי מימוש שונים K, עבור מניית $Facebook$.

ניתן לראות בגרפים לעיל, שהסימולציות שלנו תואמות את מדד בלאק ושולס לחלוטין, ולמעשה מצאנו דרך להעריך את נוסחת בלאק ושולס בצורה נומרית על ידי סימולציות של תנועה בראונית.

2 הנחות שגויות ו$Volatility\ Smile$

ראינו בחלק [1] דרך למדל תנועת מניה על ידי תנועה בראונית. המודל מניח ריבית חסרת סיכון קבועה r, **ותנודתיות קבועה** σ. מטרתנו בחלק זה, תהיה לבדוק עד כמה המודל הזה תואם את המציאות. נעשה זאת על ידי הערכה של הפרמטר σ מתוך מחירים אמיתיים בשוק, ונסיק מכאן כמה המודל שלנו תואם את המציאות.

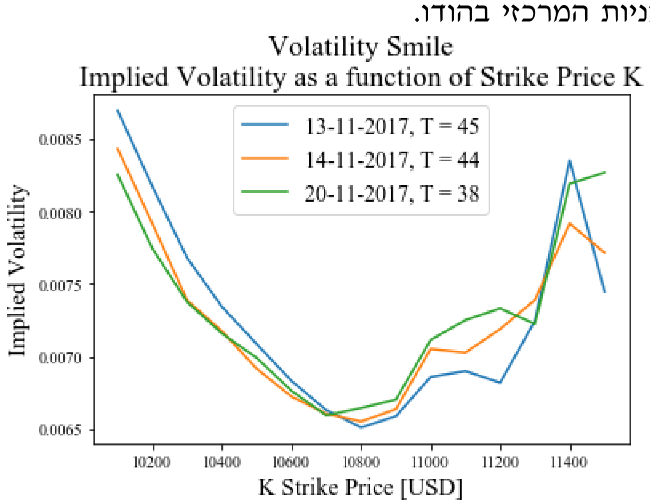
הגדרה 2.1 $Implied\ Volatility$ - התנודתיות הגלומה σ, מוגדרת בתור התנודתיות שאופציה משרה על מניה מסויימת.

בעזרת חישוב ה$Implied\ Volatility$, נוכל להעריך את הσ הגלום בשוק. נשאלת השאלה כיצד אפשר לחשב את ה$Implied\ Volatility$ של מניה מסוימת? נשים לב שנוסחת בלאק ושולס המסובכת, מסתכמת בתור:

$$f(r,\sigma,K,T,S_0)=C$$

האם ניתן לחלץ את σ מתוך כל הפרמטרים האחרים? ראינו בחלק [1] כמה מסובכת נוסחת בלאק ושולס, וחשוב לציין שזו אינה פונקציה הפיכה. כלומר, לא נוכל למצוא f^{-1} אשר בהינתן כל שאר הפרמטרים תניב לנו את σ. למזלנו, במהלך הקורס פפסי למדנו שיטות נומריות מגוונות אשר יעזרו לנו לחלץ את σ. משימתנו ניתן לתיאור באופן שקול, כמציאת נקודה σ_0 אשר בה הפונקציה $g(\sigma) = f(r,\sigma,K,T,S_0) - C$ מתאפסת. בשיעור 7 לקורס, נחשפנו לשיטה הנומרת $Newton\ Raphson\ Method$, אשר תתאים לצרכינו בדיוק.

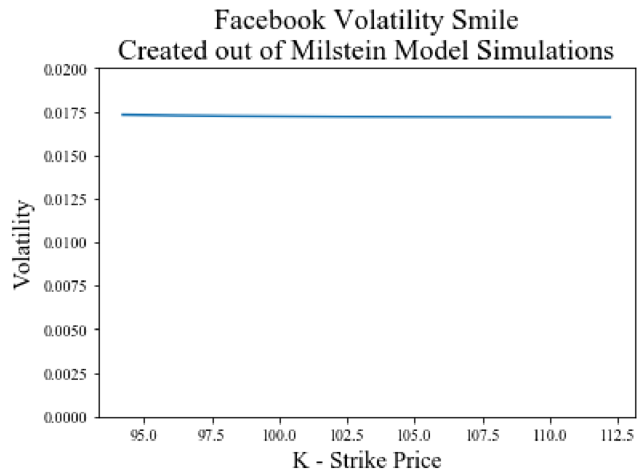
מחירי אופציות הם משאב יקר באינטרנט, אך הצלחתי לדוג מחירים של אופציות על מדד $NIFTY$, שהוא מדד המניות המרכזי בהודו.



הרצתי את האלגוריתם למציאת ה$Implied\ Volatility$ על מחירי המניות, וקיבלתי את התנודתיות הגלומות הבאות. העקומות שאנו רואים כאן הן בשורה מדאיגה עבור מודל בלאק ושולס. נסביר: נניח בשלילה שמניות

בשוק מתנהגות עם σ קבועה. אזי, מודל בלאק ושולס הוא נכון, והתהליך שעשינו אכן יחזיר את ה-σ של מניה שהיא קבועה. והנה קיבלנו סתירה, משום שה-σ לנגד עינינו אינה קבועה בכלל ומשתנה כתלות במחיר המימוש K. כלומר, הראינו כאן שה-σ של מניות בשוק אינה קבועה, ולכן מודל בלאק ושולס לא יוכל למדל אותן בצורה טובה מספיק.

נדגים את הפספוס של מודל בלאק ושולס בצורה נוספת:



להלן גרף של אותה תנודתיות גלומה, מסומלצת לפי מדד בלאק ושולס על מניית פייסבוק. יש לשים לב לתנודתיות הקבועה המתקבלת, וכיצד המודל שלנו לא מסובך מספיק כדי ליצור את אותה עקמומיות שראינו בטבע. המסקנה הנובעת מהפרק הזה, היא שהמודל של בלאק ושולס לא מצליח לתאר את התהליכים הטבעיים של השוק בצורה טובה מספיק.

3 מודל $Heston$

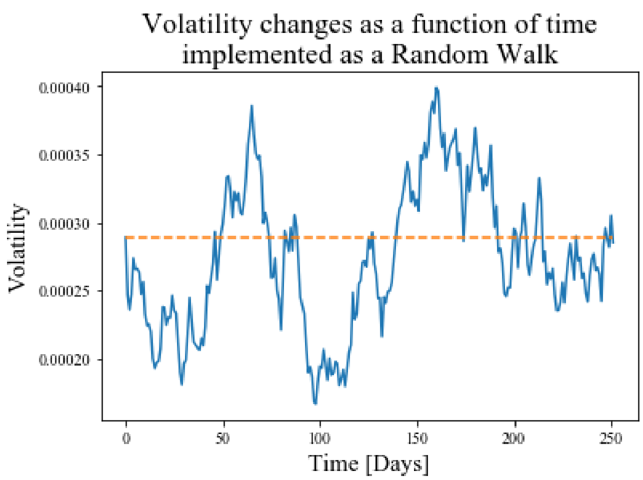
לאחר שראינו בחלק הקודם את הבעייתיות בהנחה של מודל בלאק ושולס, ננסה להתאים מודל סטוכסטי מסובך יותר לבעיה. אם עד עכשיו התייחסנו רק למחיר המניה כתהליך סטוכסטי אקראי, כעת נבדוק מה יקרה אם גם את σ **נתאר כתהליך סטוכסטי אקראי.** לתהליכים מהסוג הזה קוראים $Stochastical\,Volatility$.

אם נחזור לחלק הבסיסי [1], כעת אנו מדברים על תנועה בראונית דו מימדית, אשר בה גם המניה וגם התנודתיות שלה מבצעים הילוך אקראי. נקודה חשובה לגבי התנועה הזו, היא שאנו לא רוצים שהשינוי בתנודתיות ישתולל, ולכן נוסיף לה אלמנט שגורם לה לחזור לערכה הממוצע. ניתן לחשוב על תנועת התנודתיות בתור חלקיק המחובר לקפיץ: החלקיק נוטה להתרחק מהמרכז בורה אקראית, אך עם הזמן הקפיץ מחזיר אותה לערכו הטבעי. לתהליך כזה קוראים $Mean\,Reversion$, חזרה אל הממוצע.

אני בחרתי לממש בחלק זה את מודל $Heston$, אשר מתאר בדיוק את התהליך הזה:

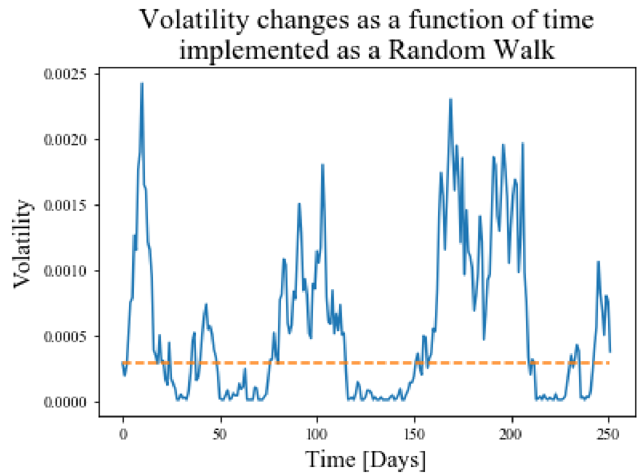
$$dS_t = rS_tdt + \sqrt{v_t}S_td\zeta_1$$
$$dv_t = k(\theta - v_t)dt + \eta\sqrt{v_t}d\zeta_2$$

נשים לב שאין כמעט שינוי במחיר המניה S ביחס למודל הקודם, למעט העובדה שהחלפנו את σ בתהליך אקראי v_t. אילו הייתי מציב ב-$v_t = \sigma^2$, הייתי מקבל בחזרה את מודל בלאק ושולס. להלן סימולציה של התנודתיות של המניה כפונקציה של הזמן.

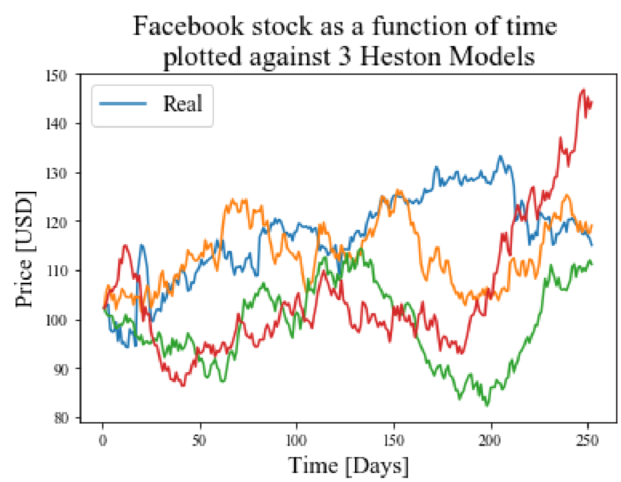


נשים לב שקיבלנו בדיוק את התוצאה שרצינו: תנודתיות שאינה קבועה, אך "מרחפת" סביב אותה נקודה. בכל פעם שהתנודתיות מתרחקת יותר מדי מהממוצע שלה, היא נאלצת לחזור חזרה.

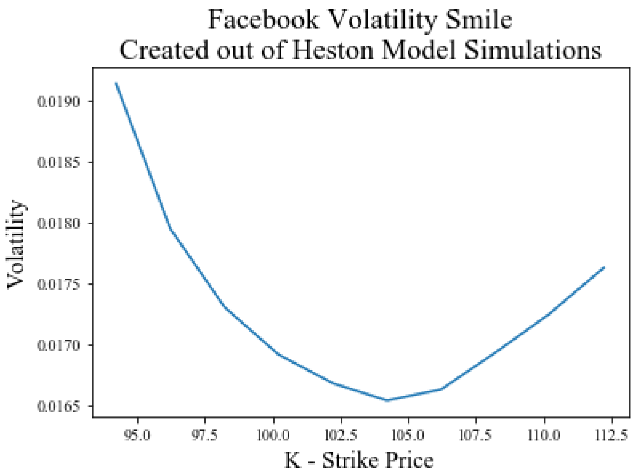
אציין במשפט שלמודל $Heston$ יש פרמטרים רבים, כשלכל אחד מהם יש חשיבות רבה: θ מציין את הערך הממוצע של התנודתיות, k מציין כמה מהר התנודתיות חוזרת אל הממוצע לאחר שהתרחקה, ו-η מציין כמה התנודתיות יכולה לנוע. לדוגמא, בדקתי מקרה קצה בו הגדלתי את η פי 10, וקיבלתי את התנועה האקראית הבאה עבור התנודתיות:



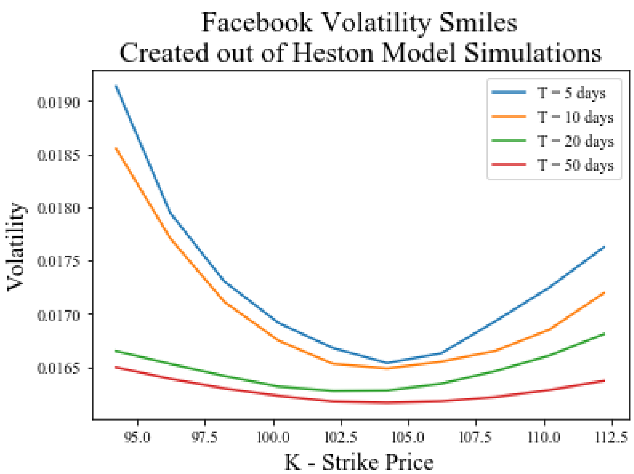
שהיא אכן גורמת לתנודתיות להיות הרבה יותר תנודתית. למעשה התנודתיות הזו מייצגת התנהגות אופיינית של מניות בשוק. כעת, נריץ סימולציה של מחיר המניה כתלות בזמן, ונראה את התנהגותה:



נשים לב שמודל $Heston$ מניב תוצאות אשר נראות בעין כמו אלו של המודל הקודם בשיטות $Euler$ ו$Milstein$. זוהי בדיקה חשובה, אך יותר חשובה לבדוק האם הוא בעל מספיק דרגות חופש כדי ליצור את אותו החיוך שראינו בפרק הקודם? כלומר, האם הסיבוכיות שהוספנו אכן שיפרה את התאמת המודל למציאות? חישבתי את ה$Implied\ Volatility$ גם במודל החדש עבור אותה מניית פייסבוק, וקיבלתי את התוצאה הבאה:



כעת ניתן לראות תהליך שהרבה יותר תואם למציאות (כפי שראינו במדד $NIFTY$). מודל $Heston$ הצליח לייצר את החיוך שצפינו במציאות, וזאת מכיוון שלא הניח תנודתיות קבועה.



התופעה האחרונה שרציתי לדון בה היא התופעה הבאה, בה אנו רואים את ה$Volatility\ Smile$ הולך ונהיה צר יותר ככל שזמן פקיעת המניה מתקרב. תופעה זו הינה תופעה מוכרת בתחום הפיננסי, וגם היא נחקרת רבות.

סיכום

אסכם בקצרה את מה שראינו. תחילה, הצגתי את מודל בלאק ושולס, וכיצד אפשר להגיע אל נוסחת בלאק ושולס גם מתוך סימולציות וגם בצורה תיאורטית. לאחר מכן, הדגמתי את אחת הבעיות המרכזית במודל, שהיא ההנחה של תנודתיות קבועה. הראיתי כיצד המודל לא מסובך מספיק כדי ליצור את תופעת ה$Volatility\ Smile$, שהיא תופעה מוכרת בשוק שאנו מנסים למדל. לבסוף,

הצעתי ומימשתי מודל חדש, מסובך יותר, בשם $Heston$, שהוא מניח שגם התנודתיות של מניה מתנהגת כתהליך אקראי. ראינו שמודל זה מסובך מספיק כדי ליצור את תופעת ה$Volatility\,Smile$, והסקנו שהוא מתאר את השוק הפיננסי בצורה טובה יותר.