תרגיל פפסיום - משוואות דיפרנציאליות סטוכסטיות, תנועה בראונית ותמחור אופציות

10 בדצמבר 2018

1 תנועה בראונית

בתרגיל הסיום הזה אנחנו נדגים את השימוש של חשיבה פיזיקלית ונומרית בפתרון של בעיות מהתחום הפיננסי. נעשה זאת ע"י שילוב הכלים שלמדנו בקורס על פתרון משוואות דיפרנציאליות ושיטות מונטה קרלו.

הנושא הראשון שנתמקד בו הוא הנושא של משוואות דיפרנציאליות סטוכסטיות שיהוו הכללה לנושא של משוואות דיפרנציאליות רגילות שנגענו בו בקורס.

כזכור לכולם משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון היא משוואה מהצורה:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x, y\right) \tag{1.1}$$

הפתרון של משוואה מהצורה הזו הוא פונקציה $y\left(x\right)$. את המשוואה הזו נוכל לרשום גם בצורה לא פורמלית:

$$dy = f\left(x, y\right) dx \tag{1.2}$$

כאשר המשמעות המתמטית נשארת זהה, אך הצורה הזו מאפשרת לנו לראות משהו אינטואיטיבי יותר במשוואה. המשוואה הזו אומר שההפרש של שני ערכים של הפונקציה בנקודות קרובות dy יהיה פרופורציוני לאורך הקטע dx כפול מקדם פרופורציה שנקבע ע"פ הפונקציה $f\left(x, y\right)$.

נדגיש כאן שהפתרון של המשוואה הזו הוא **דטרמיניסטי** מכיוון שאין שום תופעה הסתברותית במשוואה (1.1).

לצערנו, כאשר אנחנו עושים ניסוי בעולם האמיתי, ולא על דף נייר, המשוואות הדיפרנציאליות שלנו מושפעות מהרבה "רעשים" אקראיים שנמצאים בסביבה. הדוגמה הקלאסית שמדברים עליה בהקשר של דינמיקה עם רעש היא התופעה של אבקן שצף בתוך נוזל. כאשר חלקיק האבק צף בתוך הנוזל הוא חווה התנגשויות ממולוקולות הנוזל בכיוונים אקראיים ועוצמות אקראיות. נתבונן בתנועה כזו של חלקיק במרחב חד ממדי (כלומר החלקיק יכול לנוע ימינה או שמאלה). נרשום את החוק השני של ניוטון:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = \xi\left(t\right) \tag{1.3}$$

במקרה שלנו הביטוי $\xi\left(t\right)$ מתאר את ה"רעש" האקראי שמשפיע על המהירות של האבקן. בצורה הזו שאנו כותבים אותו נראה לנו שהוא מבטא תפקיד של כוח אקראי, אך בכדי להבין טוב יותר את תפקידו נעבור לצורה אחרת של המשוואה:

$$dv=\frac{1}{m}d\xi$$

כאשר $d\xi$ הולך להיות תוספת אקראית של מהירות. בצורה הזו אנו אומרים "בכדי לדעת את השינוי של v מזמן t לזמן $t+u$ תצטרכו למצוא את כמה רעש $d\xi$ נכנס למערכת". הביטוי $d\xi$ נבחר לרוב להיות פורמלית ביטוי שנקרא "תהליך וינר" (Wiener Process). העובדה החשובה בתהליך מסוג כזה הוא שמתקיים:

$$\xi\left(t+u\right)-\xi\left(t\right)\sim N\left(0,u\sigma^{2}\right) \tag{1.4}$$

כאשר σ היא הגודל המסדר את הביטוי מבחינת יחידות, ודואג לגודל של הרעש, ו־u הוא הפרש הזמנים שבו בחרנו לחסר את שני הרעשים. האות N מסמנת כאן התפלגות נורמלית כך שלגאוסיאן $N\left(\mu,\sigma^{2}\right)$ יש סטיית תקן של σ וממוצע של μ. כלומר תוספת הרעש הופכת לקטנה יותר ככל שאנו מסתכלים על זמנים קצרים יותר, ובנוסף השונות של הרעש פרופורציונית להפרש הזמנים המחושב. מכאן שאם אנחנו רוצים את ההפרש של הרעש בין שתי נקודות אנחנו צריכים להגריל מספר מתוך התפלגות נורמלית עם ממוצע 0 וסטיית תקן של $\sigma\sqrt{u}$.

כדי להקל על עצמנו נבחר לעבוד ביחידות שבהן $m=1$ ו־$\sigma=1$ ונעבוד עם המשוואה:

$$dv=d\xi \tag{1.5}$$

איך נוכל לפתור אותה נומרית? בגלל שהרעש הוא אקראי, ברור שכל הפתרונות יראו שונים אחד מהשני. בכדי לקבל פתרון **מסוים** למשוואה נהוג להשתמש בהכללה של שיטת אוילר, לשיטה הקרויה שיטת אוילר־מרוימה (Euler–Maruyama). בשיטה הזו אנחנו לוקחים את תהליך הוינר שמופיע במשוואה ורושמים את הדיסקרטיזציה:

$$v^{n+1}-v^{n}=\xi^{n+1}-\xi^{n} \tag{1.6}$$

ואולם ראינו שהביטוי:

$$\xi^{n+1}-\xi^{n}\sim N\left(0,\Delta t\right) \tag{1.7}$$

ולכן נקבל את ה"משוואה" הנומרית:

$$v^{n+1}=v^{n}+N\left(0,\Delta t\right)$$

כלומר בכדי לקבל את המהירות הבאה מהמהירות הקודמת נצטרך להגריל מספר מתוך התפלגות גאוסיאנית עם סטיית תקן $\sqrt{\Delta t}$ ולחבר אותו לערך הקודם של המהירות. באופן כללי נוכל לרשום את ה**משוואה הדיפרנציאלית הסטוכסטית**:

$$dy=f\left(t,y\right)dt+g\left(t,y\right)d\xi \tag{1.8}$$

כאשר שוב נניח שבחרנו את המשוואה כך שמתקיים:

$$\xi\left(t+u\right)-\xi\left(t\right)\sim N\left(0,u\right) \tag{1.9}$$

- בצעו דיסקרטיזציה אקספליסיטית למשוואה (1.8) ורשמו את המשוואה הכללית ל:

$$y^{n+1} = ???$$

בשלב הבא ננתח את הפתרון המלא של חלקיק הנע בתנועה בראונית.

- כתבו קוד אשר פותר את המשוואה עבור חלקיק הנע בתנועה בראונית לפי הדיסקרטיזציה של המשוואה שרשמתם לעיל. כתבו את המשוואה כך שהקוד שלכם יהיה תלוי ב־$seed$ לצרכי ריפרודסביליות של ההגרלות האקראיות. הקוד צריך לקבל את הזמן שעד אליו רוצים את מסלול החלקיק ואת הרזולוציה הזמנית, ולחשב את המסלול האקראי המתקבל. תוכלו להיעזר בפעולה np.random.normal לשם הגרלת מספרים מתוך התפלגות גאוסיאנית.
- שימו לב שהקוד שכתבתם מוצא את המהירות של החלקיק בכל זמן נתון. אותנו יעניין המיקום של החלקיק, ולא רק המהירות שלו. העזרו בטכניקה הדומה לזו המתוארת בשיעור על משוואות דיפרנציאליות רגילות, ופתרו לא רק את הפונקציה $v(t)$, אלא גם את $x(t)$.
- כעת תוכלו לייצר כמויות גדולות של מסלולים ולהתחיל לענות על שאלות, כמו "מהו המיקום הממוצע אחרי t זמן?", "מהי המהירות הממוצעת אחרי t זמן?" וכו' ־ ודאו שהתשובות שלכם תואמות את האינטואיציה.

2 מניות בשוק ההון

במקום לחשוב על חלקיק אבקן שצף בתוך מים, אנחנו יכולים לנסות ולשדרג את המודל שלנו לעבוד על דוגמא מורכבת יותר ־ מניות בשוק ההון. נניח ויש לנו פונקציה $S(t)$ המייצגת את המחיר של מנייה כלשהיא בזמן נתון. שאלה כלכלית מעניינת היא מה תהיה המחיר של המנייה בזמן מאוחר יותר, $S(t')$. כמובן שהמחיר הזה, כמו במקרה של האבקן, מושפע מהרבה מאד "רעשים" שונים שגורמים למחיר של המנייה לעלות ולרדת כל הזמן. נרצה לכתוב משוואה דיפרנציאלית סטוכסטית לתיאור עליית המחיר של המנייה. נרשום באופן כללי:

$$dS = f(t,S)\,dt + g(t,S)\,d\xi$$

וכעת נעבור לכתוב את f ו־g. תחילה, בהנחה שלא היו רעשים במערכת היינו מצפים לראות עלייה בקצב קבוע של המנייה. העלייה הזו נמדדת כמובן בשווי היחסי של המנייה ולכן הגיוני לנחש:

$$f(t,S) = rS \tag{2.1}$$

כאשר r מכונה "שיעור ריבית חסר סיכון" (Risk-free interest rate) מפני שהוא מתאר את הריבית תחת ההנחה שלא היה לנו את הרעש שיוצר אלמנט של "סיכון". אנחנו מצפים שהפונקציה g תקבל צורה דומה לזו של f, שהרי גם הרעשים בערכה של המנייה צריכים להיות פרופורציוניים לגודל שלה. לכן נרשום:

$$g(t,S) = \sigma S$$

כאשר הגודל σ נקרא התנודתיות (volatility) של המנייה והוא קובע, כפי שאומר שמו, עד כמה הערך של המנייה הולך ל"קפץ" (=להתנדנד).

• אם $\sigma = 0$, איזה גרף היה מתקבל באופן אנליטי מפתרון המשוואה?

בואו ננסה לעבוד עם מידע אמיתי מהעולם ולראות כמה הוא עובד. לשם כך נוכל להעזר בספרייה pandas_datareader לקריאת נתונים כלכליים מתוך בסיסי נתונים. לדוגמא הפקודה:

fb_data = pdr.DataReader("FB", "yahoo", '2016-01-01', '2017-01-01')

תביא לנו את המידע הכלכלי על המנייה של פייסבוק בין התאריכים ה־1.1.2016 וה־1.1.2017 מתוך המאגר של yahoo. האובייקט שמוחזר כולל הרבה מאד מערכים, שהמרכזי שעניין אותנו הוא:

fb_data['Close'].values

שהוא מערך הכולל בכל יום בשנה (= כל יום שבו התרחש מסחר בשנה) את הערך שבו נסגר המסחר במנייה.

• נעבוד לדוגמא עם המנייה של פייסבוק בתאריכים הנתונים. העזרו במערך fb_data['Close'].values וקבלו ממנו הערכה ל־r ול־σ הממוצעים של המנייה הזו. (רמז: העזרו ביחס של מחירי הסגירה בין ימים עוקבים ־ מה הקשר שלו ל־r? מה הקשר שלו ל־σ?)

• כתבו פעולה המקבלת את המחיר ההתחלתי של המנייה, את r, את σ, את הרזולוציה הזמנית ואת זמן הסיום, ומחשבת "מסלול" אקראי של מחיר המנייה $S(t)$ לפי פתרון המשוואה הסטוכסטית המתאימה בשיטת אוילר־מרוימה באותו האופן שבו פתרתם את המקרה של חלקיק בתנועה בראונית . הציבו את r ו־σ הממוצעים שחושבו מהסעיף הקודם, ופתרו את המשוואה הדיפרנציאלית הסטוכסטית עבור מספר מסלולים שונים. שרטטו את המסלולים באותו הגרף כמו המידע המקורי. וודאו שאתם מקבלים תוצאות הגיוניות.

• שיטה מסדר דיוק גבוה יותר לפתרון משוואות דיפרנציאליות סטוכסטיות היא שיטת מילשטיין (Milstein Scheme). חיקרו על השיטה וכתבו פעולה בדומה לפעולה הקודמת שפותרת את המשוואה הסטוכסטית באמצעות אלגוריתם מילשטיין. השוו בין מחיר המנייה הממוצע (על פני הרבה מסלולים) לאחר שנה המתקבל בין שתי השיטות, ובדקו איזה מהשיטות מתכנסת מהר יותר אל המחיר הממוצע. האם היה אפשר רק מהתוצאות שקיבלתם לנחש איזה שיטה היא מסדר גבוה יותר?

3 תמחור אופציות

ונעבור לפאנץ'!

נניח ומישהו מציע לכם הצעה ־ אתם תשלמו לו C דולרים באותו הרגע ובעוד כ־T ימים תוכלו לרכוש ממנו מנייה כלשהיא במחיר K (שנקרא גם "מחיר הרכישה" או Strike Price), האם העסקה הזו משתלמת? כמובן שזה תלוי במנייה. אם המנייה הזו בעוד T ימים תהיה שווה הרבה יותר מ־K, אז הרווחתם כי תוכלו לקנות אותה בזול ולמכור אותה ברווח. אם היא תהיה שווה הרבה פחות מ־K אז כמובן שהפסדתם, לא משתלם לכם לקנות את המנייה מאותו הגורם וסתם בזבזתם את C הדולרים ההתחלתיים ששמתם.

נרצה להיעזר בכלי שכתבנו עבור חישוב מניות בכדי להבין מתי משתלם לקנות את האופציה ומתי לא. התהליך הזה נקרא "תמחור אופציות" ואופציות מהסוג שהראינו פה נקראות "אופציות אירופאיות".

- הציעו אלגוריתם שבהינתן σ, r של מנייה ועבור הפרמטרים C, T וK של אופציה כלשהיא אומר לנו מהו הרווח שנקבל אם נבחר לרכוש את האופציה. העזרו בהגרלות של הרבה "מסלולים" של מניות ובצעו ממוצע כדי לקבל את הרווח הממוצע על פני הרבה מסלולים. איך אנחנו יכולים לקבוע עבור אופציה כלשהיא האם שווה לרכוש אותה או לא?

  הערה: שימו לב שדולר 1 בזמן T שווה פחות מדולר 1 בזמן 0, בגלל הריבית חסרת הסיכון שגורמת לערך לעלות בממוצע למרות הרעשים. לכן כאשר תרצו להשוות בין כמות הכסף שתרוויחו בזמן T לכמות הכסף שתשלמו בזמן C תזכרו להכפיל את כמות הכסף שתרוויחו בזמן T בפקטור e^{-rT}, בכדי לקבל את הערך במונחים של $t = 0$. חישבו ־ למה נבחר פה דווקא אקספוננט?

- בלאק ושולס פתרו את הבעיה הזו (וגם זכו על הפתרון בפרס נובל בכלכלה) באופן אנליטי, והראו כי המחיר המינימלי שיש לשלם עבור אופציה כדי להרוויח בממוצע מתנהג כמו:

$$C = S_0\Phi\left(d_1\right) - \Phi\left(d_2\right) PV\left(K\right)$$

כאשר:

$$\begin{gathered} d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right] \\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \\ PV\left(K\right) = Ke^{-r\sqrt{T}} \end{gathered}$$

והפונקציה Φ היא אינטגרל על גאוסיאן המוגדר בתור:

$$\Phi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

כאשר את הפונקציה הזו ניתן גם לחשב באמצעות הפעולה stats.norm.cdf בפייתון.
השוו בין הפתרון האנליטי לפתרון הנומרי שחישבתם קודם וודאו התאמה של החישובים אחד לשני.

- בחרו מנייה ותקופת זמן ארוכה כלשהיא וחשבו את המחיר של האופציה שמתחילה בתחילת תקופת הזמן הזו ומסתיימת בסופו. הציגו גרף של ההערכה שלכם עבור מחיר האופציה כתלות במספר ה"מסלולים" המסומלצים של המנייה וודאו שהערך הזה מתכנס אל הערך שמתארת משוואת בלאק־שולס.