ממן	א	6-8
גלזנר	ב	12-2
גלזנר	ב	2-4
ממן	ג	4-6
עולמי	ד	5-7
עולמי	ה	12-2

מת"פ-2 בוחן 5

תשע"ח

שם: ______________________

ת.ז. | ד | ו | ג | מ | א | | | | |

1. נתונה המשוואה האוטונומית $\dot{y}=e^{y^3-4y}-1$ (1)

א. מצאו את כל הפתרונות שיווי משקל של (1).

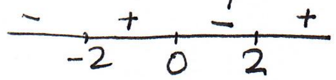
ב. שרטטו בצירים (t,y) אחת (כולל תחומי עליה וירידה, קמירות וקעירות, התנהגות כאשר $t\to\pm\infty$) את סקיצות הפתרונות y_1,y_2,y_3,y_4 למשוואה (1) אשר מתאימים לתנאי ההתחלה הבאים

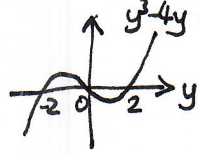
$$y_1(0)=-3,\quad y_2(1)=-1,\quad y_3(2)=2,\quad y_4(-1)=1$$

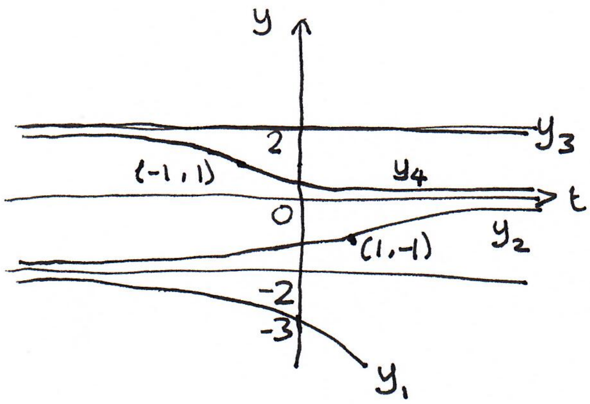
ג. קבעו את יציבתם של כל הפתרונות שיווי משקל של (1).

א. $y=0,\pm2 \Leftarrow y^3=4y \Leftarrow e^{y^3-4y}=1 \Leftarrow e^{y^3-4y}-1=0$

ב. סימן של $e^{y^3-4y}-1$ $\Leftarrow$ גרף של y^3-4y







$g(y)=e^{y^3-4y}-1 \Rightarrow g'(y)=(3y^2-4)e^{y^3-4y}$

כאשר $|y|>2/\sqrt{3}$, $g'>0$

כאשר $|y|<2/\sqrt{3}$, $g'<0$

y_1 : פונקציה יורדת, קמירה $y_1 \xrightarrow{t\to-\infty} -2$, $y_1 \xrightarrow{t\to\infty} -\infty$

(להראות ש-y_1 תמיד קיים [מוגדר לכל t] אפשר להשוות ל- $\phi_1=-3-t$, $\phi_2=-2$ כי $-1<g(y)$)

y_2 פונקציה עולה, פיתול כאשר $y=-2/\sqrt{3}$, $\lim_{t\to\infty} y_2=0$, $\lim_{t\to-\infty} y_2=-2$

y_3 קבועה, $y_3\equiv 2$

y_4 פונקציה יורדת, $\lim_{t\to\infty} y_4=0$, $\lim_{t\to-\infty} y_4=2$ <------------ המשך

A

ג. $y=0$ יציב אסימפטוטית, $y=\pm2$ לא יציב.

2.. א. מצאו משוואה דיפרנציאלית ליניארית והומוגנית מסדר ארבע, בעלת מקדמים קבועים, לפונקציה $y=y(x)$ כך ש- $y = xe^x \sin 2x$ אחד מהפתרונות.

ב. מה הפתרון הכללי לאותה מד"ר?

$xe^x \sin 2x$ מגיע מ· $xe^{(1\pm 2i)x}$

לכן צריכים ש- $\lambda = 1\pm 2i$ שורשים כפולים של משוואה האופיינית

פולינום האופייני צריך להיות

$$
\begin{aligned}
&(\lambda-(1+2i))^2(\lambda-(1-2i))^2 \\
&= [(\lambda-1+2i)(\lambda-1-2i)]^2 \\
&= [(\lambda-1)^2+4]^2 \\
&= (\lambda^2-2\lambda+5)^2 \\
&= \lambda^4-4\lambda^3+14\lambda^2-20\lambda+25
\end{aligned}
$$

לכן המד"ר היא: $\underline{\underline{y^{(4)}-4y'''+14y''-20y'+25y=0}}$

בהצלחה!

ממן	א	6-8
גלזנר	ב	12-2
גלזנר	ב	2-4
ממן	ג	4-6
עולמי	ד	5-7
עולמי	ה	12-2

מת"פ-2 בוחן 5

תשע"ח

שם: ______________

ת.ז. | ק | ו | ז | מ | א | | | |

1. א. נמקו מדוע לכל $y\in\mathbb{R}$ מתקיים $\frac{y^2}{3}\le\frac{y^2}{2+\sin(xy)}\le y^2$.

ב. יהיה y הפתרון לבעיית התחלה $(1)\begin{cases} y'=\frac{y^2}{2+\sin(xy)} \\ y(2)=3 \end{cases}$.

בעזרת סעיף א', נמקו מדוע $y(x)$ מוגדר לכל $x\le 2$ ומתקיים $\frac{3}{7-3x}\le y(x)\le\frac{3}{3-x}$ שם.

ג. האם $y(x)$ מוגדר לכל $x\ge 2$? נמקו!

א. $-1\le\sin(xy)\le 1 \Leftarrow 1\le 2+\sin(xy)\le 3$

$\Leftarrow \frac{y^2}{3}\le \frac{y^2}{2+\sin(xy)}\le y^2$

ב. נסמן $\phi_1=\frac{3}{7-3x},\ \phi_2(x)=\frac{3}{3-x}$

אזי $\phi_1(2)=3=\phi_2(2)$

וגם $\phi_1'(x)=\frac{9}{(7-3x)^2}=\phi_1^2\ge f(x,\phi_1(x))$

$\phi_2'(x)=\frac{3}{(3-x)^2}=\phi_2^2/3\le f(x,\phi_2(x))$

כאשר $f(x,y)=\frac{y^2}{2+\sin(xy)}$

$\partial f/\partial y=\frac{2y(2+\sin(xy))-y^2x\cos(xy)}{(2+\sin(xy))^2}$

רציפות לכל x,y

לכן לפי העקרון המשכה והשוואה, קיים פתרון יחיד ל-(1) על $(-\infty,2]$ עם $\phi_1(x)\le y(x)\le\phi_2(x)$

ג. בצד ימין של $x=2$, משתמשים ב- $\phi_1=\frac{3}{3-x},\ \phi_2=\frac{3}{7-3x}$ להראות שהפתרון ל- $x\ge 2$ כך ש- $\phi_1(x)\le y(x)\le\phi_2(x)$

אבל ϕ_1 מוגדר ל- $x<3$ ו- ϕ_2 מוגדר כאשר $x<7/3$

ולכן הפתרון ל-(1) מוגדר לפחות עד $7/3$

אבל לא יותר מ- $x=3$. כלומר יש ל-y "blow up" ב- x_0 $(7/3<x_0<3)$

לכן לא יכול להיות ש- y מוגדר לכל $x\ge 2$.

המשך ----------->

B

2. נתונה משוואה $y''-2y'+5y=0$ (2)

א. מצאו מערכת בסיסית של פתרונות ל-(1) ומצאו את הוורונסקיאן (Wronskian) שלהם.

ב. מצאו פתרון של (2) תחת תנאי התחלה $y(\pi)=2, \quad y'(\pi)=-1$.

ג. שרטטו גרף של הפתרון שמצאתם בסעיף ב'.

<u>א'</u> המשוואה האופיינית היא $\lambda^2-2\lambda+5=0$

$$(\lambda-1)^2+4=0$$

$$\lambda=1\pm 2i$$

לכן $\underline{\{e^x\cos 2x, e^x\sin 2x\}}$ מערכת בסיסית של פתרונות ל-(2)

$$W(e^x\cos 2x, e^x\sin 2x)=\begin{vmatrix} e^x\cos 2x & e^x\sin 2x \\ e^x(\cos 2x-2\sin 2x) & e^x(\sin 2x+2\cos 2x)\end{vmatrix}$$

$$=e^{2x}\left[\cos 2x(\sin 2x+2\cos 2x)-\sin 2x(\cos 2x-2\sin 2x)\right]$$

$$=e^{2x}\cdot(2\cos^2 2x+2\sin^2 2x)$$

$$=\underline{\underline{2e^{2x}}}$$

<u>ב'</u> הפתרון הכללי הוא $y=Ae^x\cos 2x+Be^x\sin 2x$

$$y'=Ae^x(\cos 2x-2\sin 2x)+Be^x(\sin 2x+2\cos 2x)$$

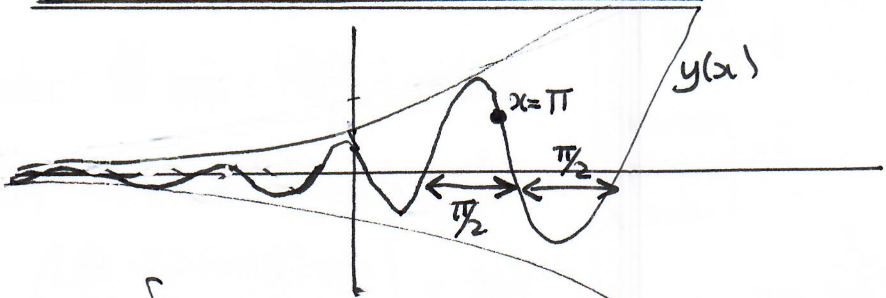
$$y(\pi)=Ae^{\pi}=2$$

$$y'(\pi)=Ae^{\pi}+2Be^{\pi}=-1$$

$$\Rightarrow \quad A=2e^{-\pi}$$

$$B=-\tfrac{3}{2}e^{-\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y=2e^{x-\pi}\cos 2x-\tfrac{3}{2}e^{x-\pi}\sin 2x}$$



$2\cos 2x-\frac{3}{2}\sin 2x$ פונקציה עם מחזור $=\frac{2\pi}{2}=\pi$

$y(x)$ עם אפסים כל $\pi/2$, גדל כמו e^x כאשר $x\to\infty$

בהצלחה!

ממן	א	6-8
גלזנר	ב	12-2
גלזנר	ב	2-4
ממן	ג	4-6
עולמי	ד	5-7
עולמי	ה	12-2

מת"פ-2 בוחן 5

שם: ____________________

ת.ז.: ד ו ג מ א

תשע"ח

1. נתונה המשוואה $\frac{dy}{dt} = \dot{y} = (2^y - 2)(2^y - 8)$ (1) . ***אין צורך לפתור את המשוואה (1) !***

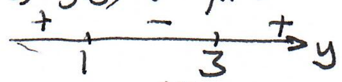
א. <u>מצאו</u> את כל פתרונות שיווי משקל של המשוואה (1). עבור כל פתרון שיווי משקל <u>קבעו</u> האם הוא יציב אסימפטוטית או לא יציב.

ב. נתון כי $v = v(t)$ הוא פתרון פרטי ל-(1) אשר מקיים $v(0) = b$ (כלומר $v = v(t)$ הוא פתרון לבעיית ההתחלה $\frac{dv}{dt} = \dot{v} = (2^v - 2)(2^v - 8), \quad v(0) = b$). נתון כי $v(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 1$. <u>מצאו</u> את כל b כנ"ל.

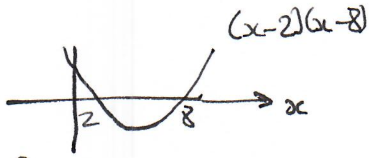
א: פתרונות שיווי משקל: $y=$קבוע : $(2^y-2)(2^y-8)=0$

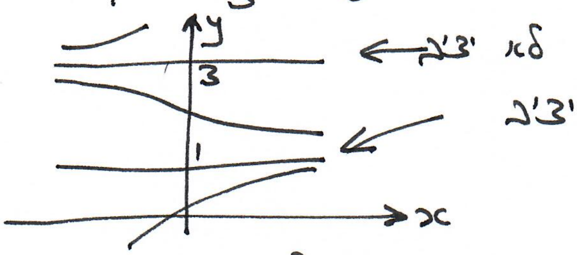
$\underline{\underline{y = 1, 3}} \Leftarrow 2^y = 2, 8 \Leftarrow$

סימן של $(2^y-2)(2^y-8) = g(y)$



$\Leftarrow$



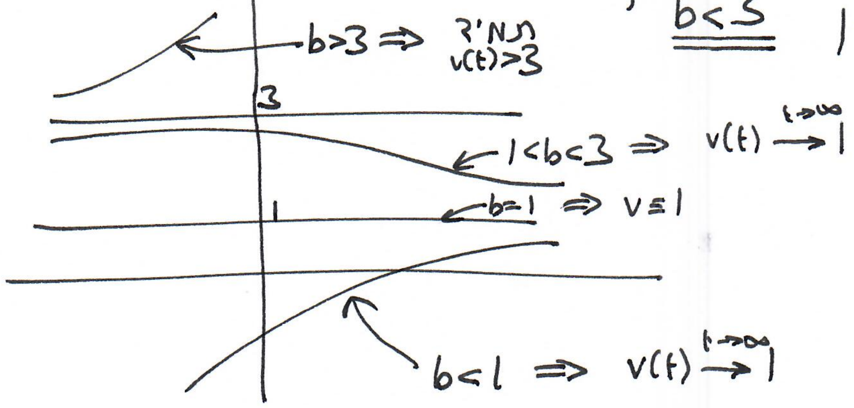


לכן $y=1$ פתרון שיווי משקל יציב

$y=3$ פתרון שיווי משקל לא יציב

ב: כל הפתרונות כך ש- $v(t) \xrightarrow{t\to\infty} 1$ הם עם $v<3$

לכן $\underline{\underline{b<3}}$



המשך------------->

2. א. נתון ש- $x=-e^t$. הראו כי $\frac{d^2y}{dt^2}=x\frac{dy}{dx}+x^2\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dt}=x\frac{dy}{dx}$.

ב. מצאו את המספרים a,b,c כך שהמשוואה $2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-2y=0$ (1)

שקולה למשוואה דיפרנציאלית $a\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=0$.

ג. מצאו את הפתרון הכללי ל-(1) בתחום $x<0$ בצורה (פונקציה של x) $=y$.

א.

$$x=-e^t \Rightarrow \frac{dx}{dt}=-e^t=x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=x\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$=\left(x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\right)\cdot x = x\frac{dy}{dx}+x^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

$\square$

ב.

$$2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-2y=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)-\frac{dy}{dt}-2y=0$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}-2y=0$$

$\underline{\underline{a=2,\ b=-3,\ c=-2}}$ (או כפולה של זה)

ג. המשוואה האופיינית היא $2\lambda^2-3\lambda-2=0$

$$(2\lambda+1)(\lambda-2)=0$$

$$\lambda=2,-\tfrac{1}{2}$$

$\Leftarrow$ $y=Ae^{2t}+Be^{-t/2}$ הוא הפתרון הכללי

$x=-e^t \Leftarrow$ $\underline{\underline{y=Ax^2+B/\sqrt{-x}}}$ הוא הפתרון הכללי של (1) בתחום $x<0$

בהצלחה!

6-8	א	ממן
12-2	ב	גלזנר
2-4	ב	גלזנר
4-6	ג	ממן
5-7	ד	עולמי
12-2	ה	עולמי

מת"פ-2 בוחן 5

תשע"ח

שם: ______________________

ת.ז. | | | | | א | מ | ל | ו | ג |

1. נתונה המשוואה האוטונומית $\dot{y} = y^4 + y^3 - 2y^2$ (1)

א. מצאו את כל הפתרונות שיווי משקל של (1).

ב. y_1, y_2 הם פתרונות של (1) שמתאימים לתנאי התחלה $y_1(0) = \frac{1}{2},\ y_2(0) = -\frac{1}{2}$.

מצאו את $\lim\limits_{t\to-\infty} y_2(t)$, $\lim\limits_{t\to\infty} y_2(t)$, $\lim\limits_{t\to-\infty} y_1(t)$, $\lim\limits_{t\to\infty} y_1(t)$ כאשר הם קיימים.

ג. קבעו את יציבתם של כל הפתרונות שיווי משקל של (1).

א. פתרון שיווני משקל הוא $y=y_0$ קבוע כאשר $y_0^4+y_0^3-2y_0^2=0$

$y_0^2(y_0^2+y_0-2)=0$

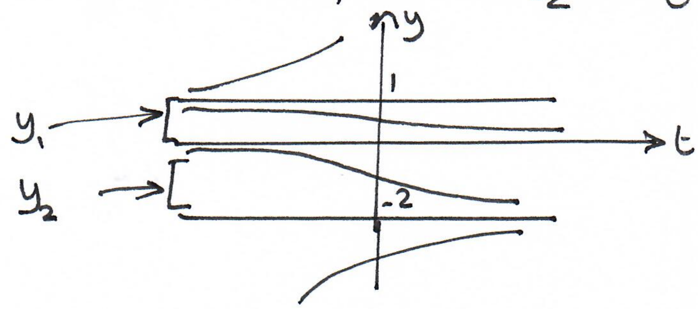
$y_0^2(y_0-1)(y_0+2)=0$

$y_0=0,1,-2$

לכן $y=0$, $y=1$, $y=-2$ הם הפתרונות שיווני משקל.

ב. סימן של $y^2(y^2+y-2)$

$\underset{+}{} \ {-2} \ \underset{-}{} \ 0 \ \underset{-}{} \ 1 \ \underset{+}{} \rightarrow y$



$\lim\limits_{t\to\infty} y_1(t)=0$, $\lim\limits_{t\to-\infty} y_1(t)=1$

$\lim\limits_{t\to\infty} y_2(t)=-2$, $\lim\limits_{t\to-\infty} y_2(t)=0$

ג. רק $y=-2$ יציב אסימפטוטית.

2. נתונה בעיית ההתחלה $y(0)=0, \quad y'(0)=1$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=y''=\dfrac{\sin(y-x)}{y'}$ (1).

א. בדקו כי $y(x)=x$ הוא פתרון לבעיית ההתחלה (1)

ב. נמקו מדוע לא קיימים פתרונות נוספים לבעיית ההתחלה הזאת.

ג. כתבו מערכת של 2 משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון ותנאי התחלה ששכולה ל-(1) וכתבו את הפתרון.

א. $y(x)=x \Leftarrow y'=1 \ , \ y''=0$

$$\begin{cases} 0=\dfrac{\sin(x-x)}{1} \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$$ לכן $y=x$ פתרון של (1)

ב. (1) $\Leftrightarrow$ $y''=f(x,y,y')$

כאשר $f(x,y_1,y_2)=\dfrac{\sin(y_1-x)}{y_2}$

$\partial f/\partial y_1 = \dfrac{\cos(y_1-x)}{y_2}$

$\partial f/\partial y_2 = -\dfrac{\sin(y_1-x)}{y_2^3}$

$f, \partial f/\partial y_1, \partial f/\partial y_2$ רציפות בסביבה של $(x,y_1,y_2)=(0,0,1)$

ולכן לפי משפט Picard Coen, קיימת סביבה של $x=0$

שבה יש פתרון יחיד ל-(1). כבר מצאנו פתרון $y=x$

לכן אין עוד פתרון!

ג. (1) $\Leftrightarrow$ $y_1=y$, $y_2=y'$

$$\begin{cases} y_1'=y_2 \\ y_2'=\dfrac{\sin(y_1-x)}{y_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(0)=0 \\ y_2(0)=1 \end{cases}$$

פתרון $y=x$ ל-(1) $\Rightarrow$ פתרון $\underline{\underline{y_1(x)=x}}$ $\underline{\underline{y_2(x)=1}}$ למערכת הנ"ל.

בהצלחה!

ממן	א	6-8
גלזנר	ב	12-2
גלזנר	ב	2-4
ממן	ג	4-6
עולמי	ד	5-7
עולמי	ה	12-2

מת"פ-2 בוחן 5

שם: ______________________

ת.ז.

תשע"ח

1. נתונה המשוואה $\frac{dy}{dt} = \dot{y} = (\sin y)^3$. (1) ***אין צורך לפתור את המשוואה (1) !***

א. <u>מצאו</u> את כל פתרונות שיווי משקל של המשוואה (1).

ב. יהי $y = y(t)$ פתרון פרטי למשוואה (1) . נתון כי $y(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \pi$, $y(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} 2\pi$.

נתון כי לגרף של $y = y(t)$ יש נקודת פיתול בנקודה $3, y(3)$. <u>מצאו</u> את $y(3)$.

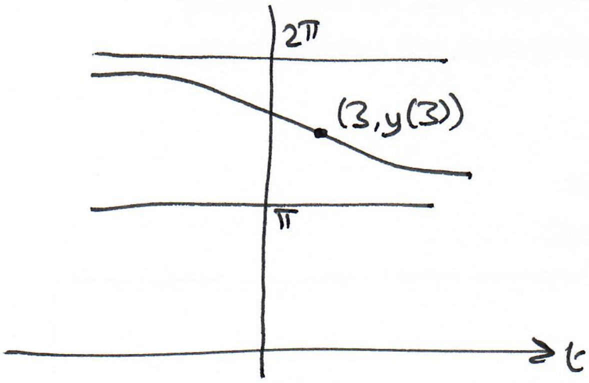
<u>א.</u> פתרון שיווי משקל הוא $y = y_0$ קבוע כאשר $(\sin y_0)^3 = 0$

$\Leftarrow \sin y_0 = 0$

$\Leftarrow y_0 = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

<u>ב.</u>

כאשר $\pi < y < 2\pi$, $\sin y < 0 \Leftarrow (\sin y)^3 < 0$



נקודת פיתול $\Leftarrow \ddot{y} = 0$

$\ddot{y} = \frac{d}{dt}(\dot{y}) = \frac{d}{dt}((\sin y)^3) = 3\dot{y}(\sin y)^2(\cos y)$

$= 3(\sin y)^5(\cos y)$

לכן ב- $t=3$ נתון ש- $\ddot{y} = 0$

$\pi < y(3) < 2\pi \Leftarrow \sin y(3) \neq 0 \Leftarrow \cos(y(3)) = 0$

$\Leftarrow y(3) = 3\pi/2$

המשך ---------->

2. נתונה המשוואה $y^{(4)}+ay'''+by''+cy'+dy=0$ (1) כאשר a,b,c,d הם מספרים ממשים קבועים.

נתון כי $y(x)=2xe^{-2x}-3\cos 2x$ הוא פתרון למשוואה (1).

א. רשמו את הפתרון הכללי למשוואה (1), בצורה ממשית.

ב. מצאו את המספרים a,b,c,d.

אם $y(x)=2xe^{-2x}-3\cos 2x$ פתרון של (1) $\Leftarrow$ $\left.\begin{array}{l}\lambda=-2 \text{ שורש כפול} \\ \lambda=\pm 2i \text{ שורשים}\end{array}\right\}$

של המשוואה האופיינית

$\lambda^4+a\lambda^3+b\lambda^2+c\lambda+d=0$

$$(\lambda+2)^2(\lambda-2i)(\lambda+2i)=(\lambda^2+4\lambda+4)(\lambda^2+4)$$
$$=\lambda^4+4\lambda^3+20\lambda^2+16\lambda+16$$

$\Leftarrow$ $\underline{\underline{a=4,\ b=20,\ c=16,\ d=16}}$

הפתרון הכללי ל- (1) הוא $\underline{\underline{y=(Ax+B)e^{-2x}+C\cos 2x+D\sin 2x}}$

(A,B,C,D קבועים)

בהצלחה!

ממן	א	6-8
גלזנר	ב	12-2
גלזנר	ב	2-4
ממן	ג	4-6
עולמי	ד	5-7
עולמי	ה	12-2

מת"פ-2 בוחן 5

תשע"ח

שם: ______________________

ת.ז.: דוגמא

1. א. נמקו מדוע לכל $y \in \mathbb{R}$ מתקיים $1 \le \sqrt{5+4\sin\left(xy^2\right)} \le 3$.

ב. יהיה y הפתרון לבעיית התחלה $\begin{cases} y' = \sqrt{5+4\sin\left(xy^2\right)} \\ y(1)=3 \end{cases}$ (1) .

בעזרת סעיף א', נמקו מדוע $y(x)$ מוגדר לכל $x \in \mathbb{R}$ ומצאו פונקציות $\phi_1(x), \phi_2(x)$ כך שהעיקרון ההשוואה מבטיח כי $y(x)$ בין הערכים של $\phi_1(x), \phi_2(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

ג. שרטטו את הגרפים של ϕ_1, ϕ_2 במישור (x,y) אחד.

א': $1 = 5-4 \le 5+4\sin(xy^2) \le 5+4 = 9$

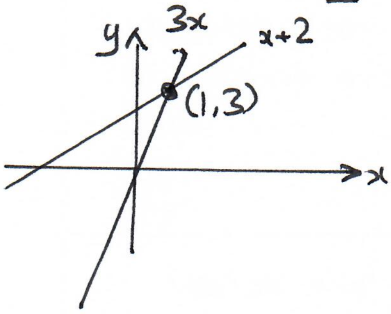
$\Leftarrow \quad 1 \le \sqrt{(5+4\sin(xy^2))} \le 3$

$\Box$

ב': פתרון ל- $\begin{cases} y'=1 \\ y(1)=3 \end{cases}$ הוא $y=x+2$

פתרון ל- $\begin{cases} y'=3 \\ y(1)=3 \end{cases}$ הוא $y=3x$

ג:



כאשר $x>1$ $\begin{cases} \phi_1(x) = x+2 \\ \phi_2(x) = 3x \end{cases}$

$\phi_1(1) = \phi_2(1) = 3$,

$\begin{cases} f(x,y) = \sqrt{5+4\sin(xy^2)} \\ \partial f/\partial y = \frac{1}{2}(5+4\sin(xy^2))^{-1/2} \cdot 4\cos(xy^2) \cdot 2xy \end{cases}$ רציפות לכל x,y (כי $5+4\sin(xy^2)$ אף פעם לא מתאפס)

$\phi_1'(x) = 1 \le \sqrt{(5+4\sin(xy^2))}$ לכל y $\Leftarrow \phi_1'(x) \le f(x,\phi_1(x))$

$\phi_2'(x) = 3 \ge \sqrt{(5+4\sin(xy^2))} \Leftarrow \phi_2'(x) \ge f(x,\phi_2(x))$

לכן לפי העקרון ההמשכה וההשוואה, קיים פתרון יחיד ל- $x>1$ וגם

$x+2 \le y(x) \le 3x$

המשך <-----------

F

ובאותו סיבה, כאשר $x<1$, גם קיים פתרון יחיד וגם

$3x \le y(x) \le x+2$

2. נתונה המשוואה $x^2y''+axy'+by=0$ (2) כאשר a,b הם מספרים ממשים קבועים.

נתון כי $y(x)=x^2\cos\left(3\ln|x|\right)$ הוא פתרון ל-(2).

א. רשמו את הפתרון הכללי ל-(2).

ב. מצאו את המספרים a,b.

ג. מצאו את הפתרון ל-(2) אשר מקיים את תנאי התחלה $y(1)=1,\ y'(1)=1$.

א: הפתרון הכללי הוא

$$\underline{\underline{y = Ax^2\cos(3\ln|x|) + Bx^2\sin(3\ln|x|)}}$$ (A,B קבועים)

ב: צריך להיות ש $\lambda=2\pm3i$ שורשים של המשוואה האופיינית: $\lambda(\lambda-1)+a\lambda+b=0$

$$(\lambda-2-3i)(\lambda-2+3i) = (\lambda-2)^2+9$$

$$= \lambda^2-4\lambda+13$$

$$= \lambda(\lambda-1)-3\lambda+13$$

ולכן $\underline{\underline{a=-3,\ b=13}}$

<u>הערה</u>

$$|x|^{2+3i} = e^{(2+3i)\ln|x|}$$

$$= e^{2\ln|x|}\cdot e^{3i\ln|x|}$$

$$= |x|^2\cdot\left(\cos(3\ln|x|)+i\sin(3\ln|x|)\right)$$

$$= x^2\cos(3\ln|x|) + i\cdot x^2\sin(3\ln|x|).$$

בהצלחה!