

# Metoda CPM/PERT

dr inż. Mariusz Makuchowski

## CPM

- nazwa metody pochodzi od angielskiego Critical Path Method,
- jest techniką bazującą na grafowej reprezentacji projektu,
- używana jest dla deterministycznych danych.

# CPM - modele grafowe projektu

Stosowane są dwa typy modeli grafowych:

- model AON (ang. activity on node)
  - wierzchołki reprezentują operacje (zadania) do wykonania,
  - łuki reprezentują zależności kolejnościowe pomiędzy danymi operacjami;
- model AOA (ang. activity on arrow)
  - wierzchołki reprezentują stany wykonania projektu,
  - łuki reprezentują operacje do wykonania.

# CPM - cele stosowania CPM

Główne cele stosowania CPM to:

- wyliczenie czasu zakończenia projektu,
- wyznaczenie operacji niekrytycznych, dla których wyznacza się dopuszczalne opóźnienie, które nie będzie skutkowało opóźnieniem całego projektu,
- wyznaczenie operacji krytycznych, których każde nawet minimalne opóźnienie spowoduje opóźnienie projektu.

# CPM - obliczenia w przód i wstecz

CPM dokonuje obliczeń w dwóch fazach:

- obliczenia w przód,
  - najwcześniejsze momenty rozpoczęcia operacji, ES (ang. Early Start),
  - najwcześniejsze momenty zakończenia operacji, EF (ang. Early Finish).
- obliczenia wstecz.
  - LS (ang. Late Start)  
najpóźniejsze momenty rozpoczęcia operacji,
  - LF (ang. Late Finish)  
najpóźniejsze momenty zakończenia operacji.

# CPM - ES, EF, LS, LF

|       |      |    |
|-------|------|----|
| ES    | czas | EF |
| nazwa |      |    |
| LS    |      | LF |

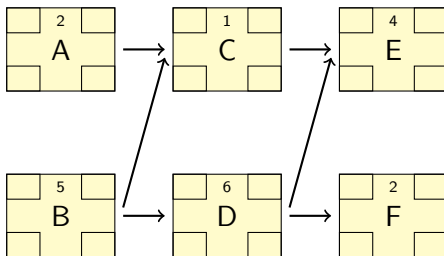
- ES jest najwcześniejszym możliwym momentem rozpoczęcia wykonywania operacji,
- EF jest najwcześniejszym możliwym momentem zakończenia wykonywania operacji,
- LS jest najpóźniejszym możliwym momentem rozpoczęcia wykonywania operacji, bez opóźnienia całego projektu,
- LF jest najpóźniejszym możliwym momentem zakończenia wykonywania operacji, bez opóźnienia całego projektu.

# CMP - przykład: dane

| czynność | poprzednik | czas trwania |
|----------|------------|--------------|
| A        | -          | 2            |
| B        | -          | 5            |
| C        | A,B        | 1            |
| D        | B          | 6            |
| E        | C,D        | 4            |
| F        | D          | 2            |

# CPM - obliczenia ES, EF

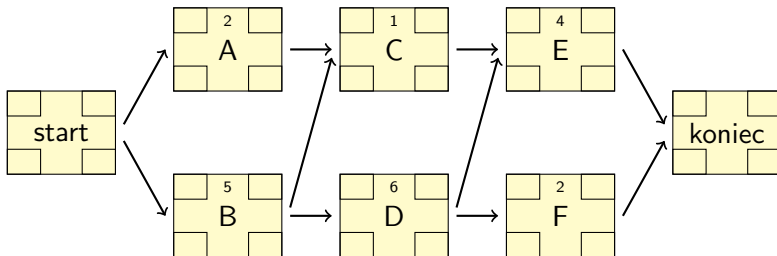
- ES = najpóźniejszy z EF wszystkich poprzedników
- EF = ES + czas trwania operacji.





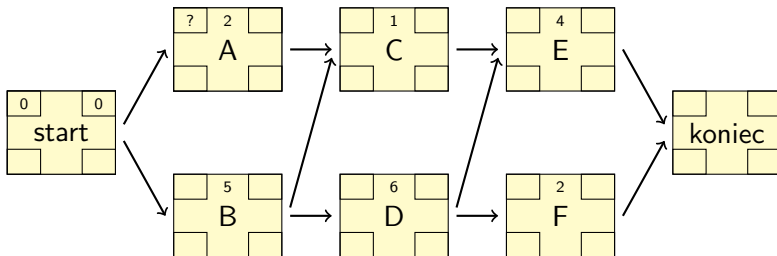
# CPM - obliczenia ES, EF

- ES = najpóźniejszy z EF wszystkich poprzedników
- EF = ES + czas trwania operacji.



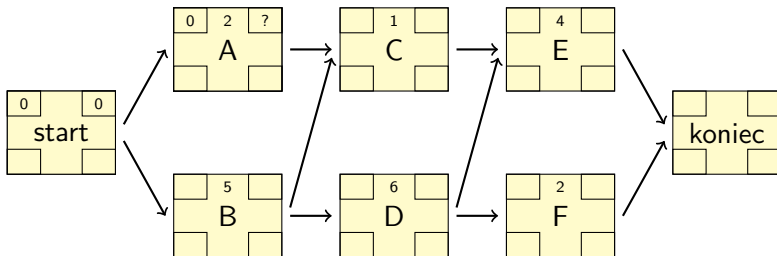
# CPM - obliczenia ES, EF

- ES = najpóźniejszy z EF wszystkich poprzedników
- EF = ES + czas trwania operacji.



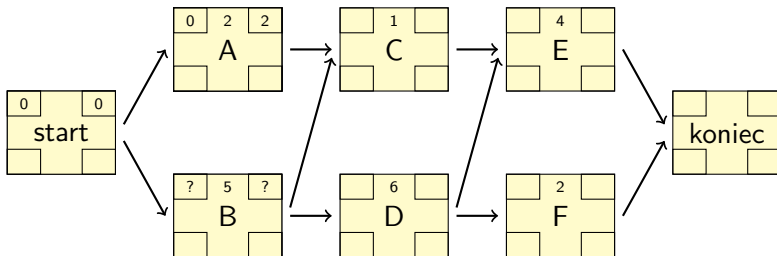
# CPM - obliczenia ES, EF

- ES = najpóźniejszy z EF wszystkich poprzedników
- EF = ES + czas trwania operacji.



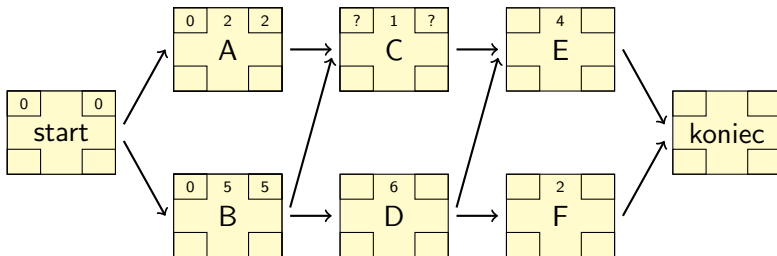
# CPM - obliczenia ES, EF

- ES = najpóźniejszy z EF wszystkich poprzedników
- EF = ES + czas trwania operacji.



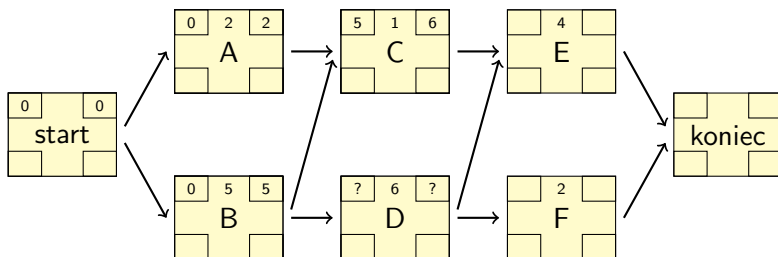
# CPM - obliczenia ES, EF

- ES = najpóźniejszy z EF wszystkich poprzedników
- EF = ES + czas trwania operacji.



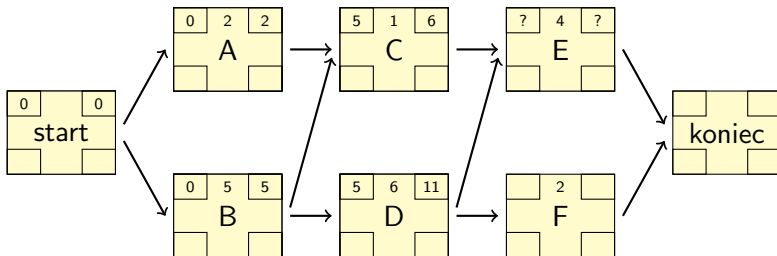
# CPM - obliczenia ES, EF

- ES = najpóźniejszy z EF wszystkich poprzedników
- EF = ES + czas trwania operacji.



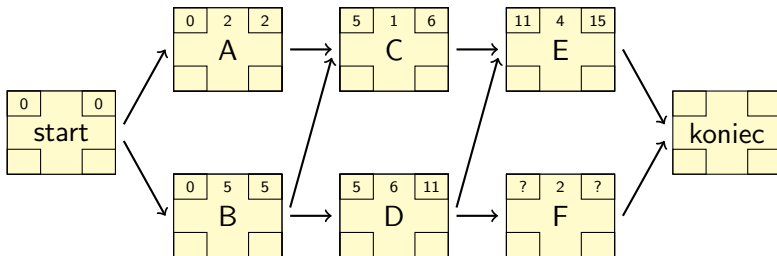
# CPM - obliczenia ES, EF

- ES = najpóźniejszy z EF wszystkich poprzedników
- EF = ES + czas trwania operacji.



# CPM - obliczenia ES, EF

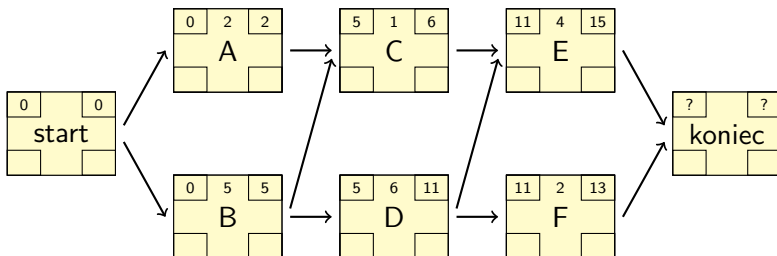
- ES = najpóźniejszy z EF wszystkich poprzedników
- EF = ES + czas trwania operacji.





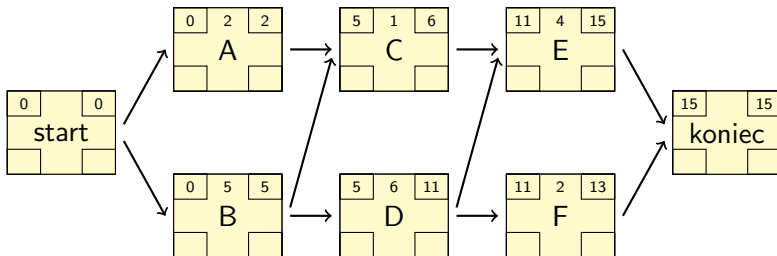
# CPM - obliczenia ES, EF

- ES = najpóźniejszy z EF wszystkich poprzedników
- EF = ES + czas trwania operacji.



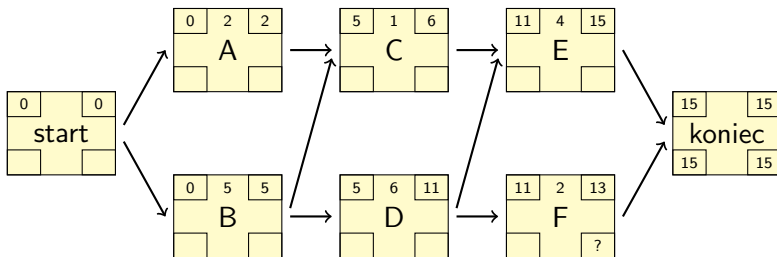
# CPM - obliczenia ES, EF

- ES = najpóźniejszy z EF wszystkich poprzedników
- EF = ES + czas trwania operacji.



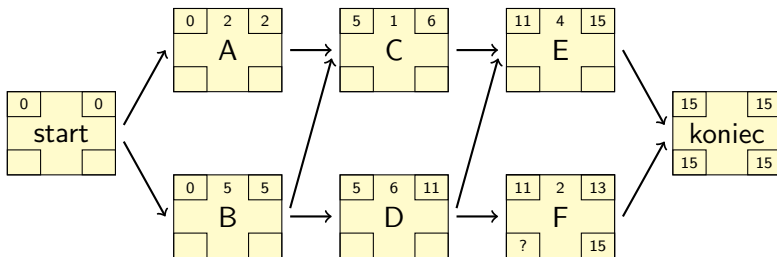
# CPM - obliczenia LS, LF

- LF = najwcześniejszy z LS wszystkich następników
- LS = LF - czas trwania operacji.



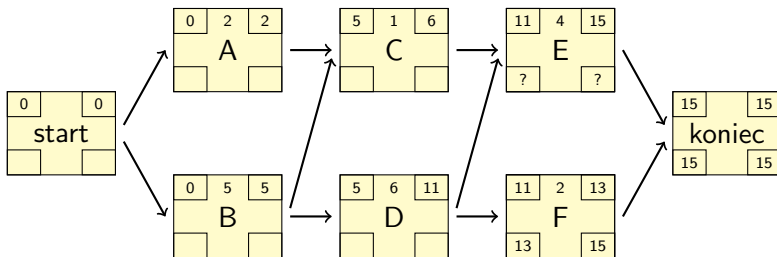
# CPM - obliczenia LS, LF

- LF = najwcześniejszy z LS wszystkich następników
- LS = LF - czas trwania operacji.



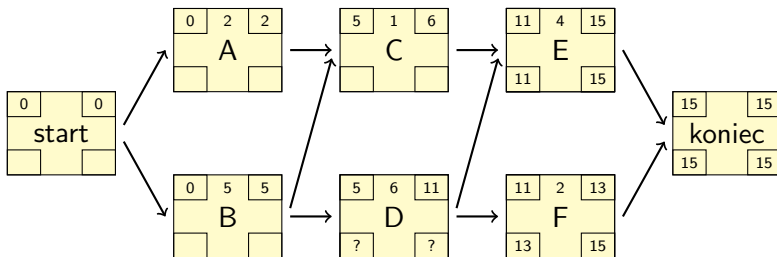
# CPM - obliczenia LS, LF

- LF = najwcześniejszy z LS wszystkich następników
- LS = LF - czas trwania operacji.



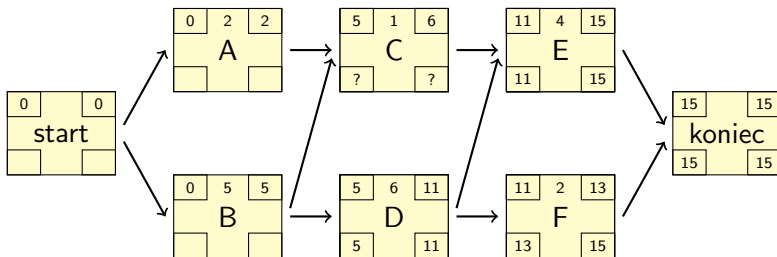
# CPM - obliczenia LS, LF

- LF = najwcześniejszy z LS wszystkich następników
- LS = LF - czas trwania operacji.



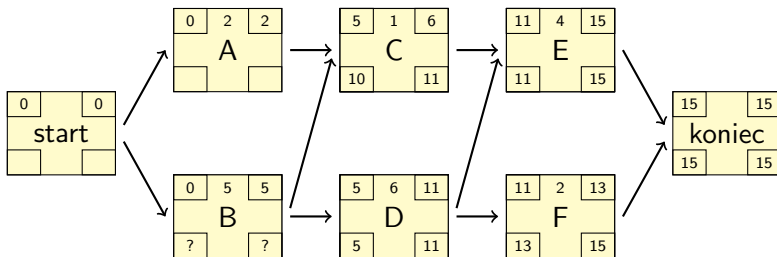
# CPM - obliczenia LS, LF

- LF = najwcześniejszy z LS wszystkich następników
- LS = LF - czas trwania operacji.



# CPM - obliczenia LS, LF

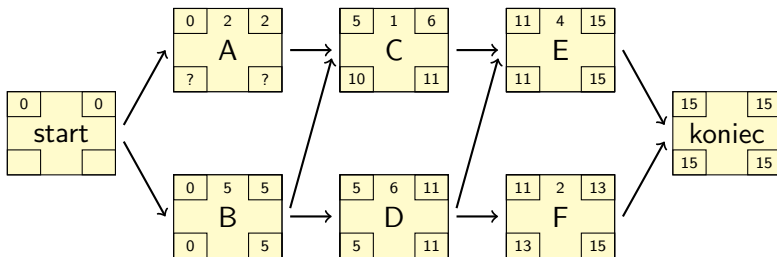
- LF = najwcześniejszy z LS wszystkich następników
- LS = LF - czas trwania operacji.





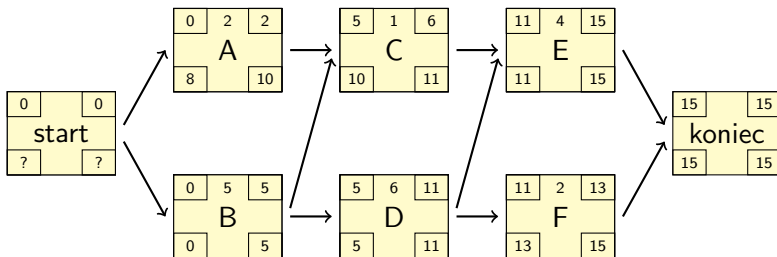
# CPM - obliczenia LS, LF

- LF = najwcześniejszy z LS wszystkich następników
- LS = LF - czas trwania operacji.



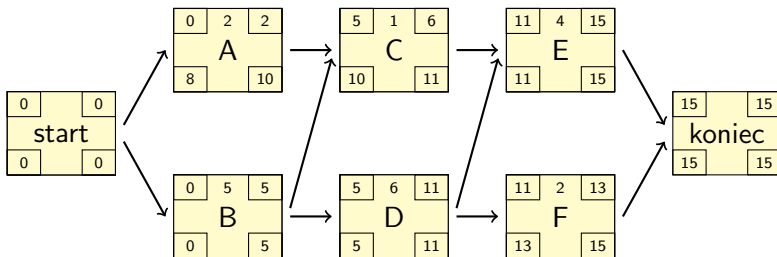
# CPM - obliczenia LS, LF

- LF = najwcześniejszy z LS wszystkich następników
- LS = LF - czas trwania operacji.



# CPM - obliczenia LS, LF

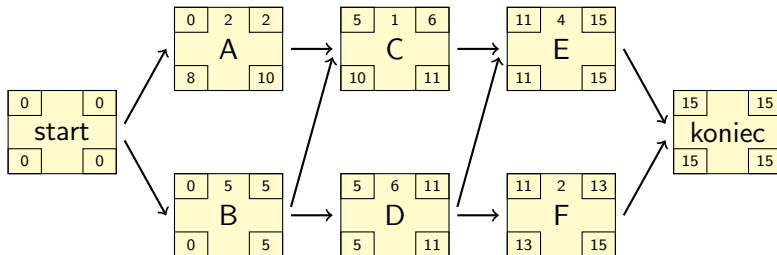
- LF = najwcześniejszy z LS wszystkich następników
- LS = LF - czas trwania operacji.



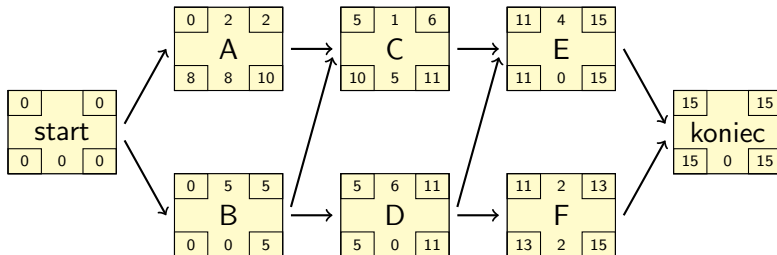
# CPM - luz operacji

- Co to jest całkowity luz, TF (ang. Total Float).  
Luz jest wartością o jaką można opóźnić rozpoczęcie wykonywania operacji albo wydłużyć jej czas trwania, przy jednoczesnym zachowaniu terminu zakończenia projektu.
- Jak wyznaczyć TF?  
$$TF = LS - ES = LF - EF$$
- Co można powiedzieć o operacji dla której  $TF=0$ ?  
Operacja taka jest operacją krytyczną, jakiegokolwiek opóźnienie tej operacji spowoduje wydłużenie całego projektu.

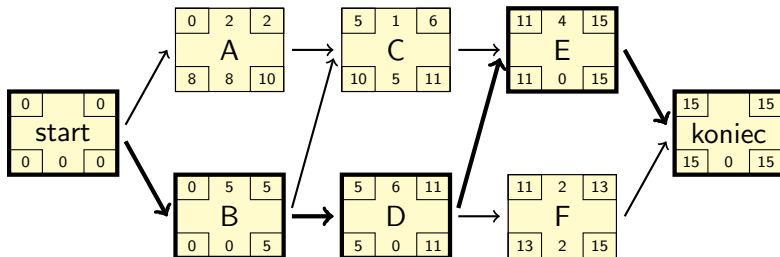
# CPM - ścieżka krytyczna: przykład



# CPM - ścieżka krytyczna: przykład



# CPM - ścieżka krytyczna: przykład



# CPM - ścieżka krytyczna: własności

Własności ścieżki krytycznej:

- ścieżkę krytyczną tworzą operacje krytyczne ( $TF=0$ ),
- ścieżka krytyczna jest najdłuższą ścieżką w grafie,
- może istnieć wiele ścieżek krytycznych.



## PERT

- nazwa metody PERT pochodzi od angielskiego Program Evaluation and Review Technique,
- jest techniką bazującą na metodzie CPM,
- używana jest dla niedeterministycznych danych;
  - pozwala wyznaczyć prawdopodobieństwo terminowego zakończenia projektu,
  - pozwala wyznaczyć z zadaniem prawdopodobieństwem czas trwania projektu.

## Dane projektu:

- dane są operacje wchodzące w skład projektu,
- dane są relacje kolejnościowe pomiędzy operacjami projektu,
- czas operacji podany jest jako trójka:
  - a - optymistyczny,
  - m - najbardziej prawdopodobny,
  - b - pesymistyczny.

# PERT - oczekiwany czas trwania operacji

Dla każdej operacji wylicza się oczekiwany czas jej trwania oraz jego wariancję

- $t_{oper} = \frac{a_{oper} + 4m_{oper} + b_{oper}}{6},$

- $\sigma_{oper}^2 = \left( \frac{b_{oper} - a_{oper}}{6} \right)^2.$

# PERT - użycie CPM

Dla wyliczonych oczekiwanych czasów trwania operacji stosujemy metodę CPM otrzymując:

- $\mu$  oczekiwany czas realizacji projektu,
- $\sigma^2$  wariancje czasu projektu, która jest sumą wariancji operacji ze ścieżki krytycznej,  
$$\sigma^2 = \sum_{oper \in CriticalPath} (\sigma_{oper}^2).$$

# PERT - prawdopodobieństwo zakończenia projektu

- Wartość oczekiwana czasu projektu wynosi  $\mu$ , a prawdopodobieństwo  $p(t < \mu)$  zakończenia projektu w czasie nie większym niż  $\mu$  wynosi 50%.
- Prawdopodobieństwo  $p(t < x)$  zakończenia projektu w terminie nie większym niż  $x$  wynosi:

$$p(t < x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right),$$

gdzie  $\Phi$  jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego.

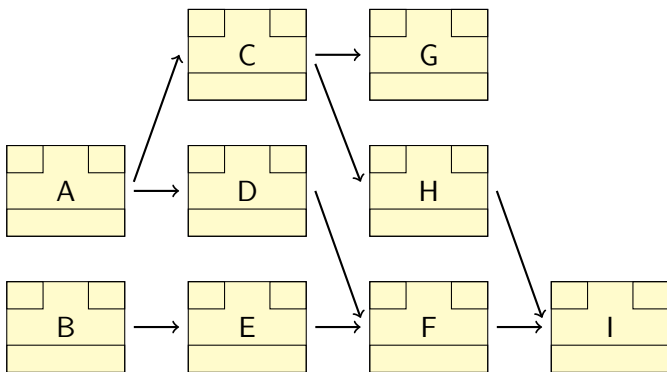
# PERT - przykład

- Jakie jest prawdopodobieństwo realizacji projektu w czasie nieprzekraczającym 17 dni?
- Jaki czas przeznaczyć na wykonanie projektu aby prawdopodobieństwo realizacji projektu w terminie wynosiło 99%?

# PERT - przykład: dane

| czynność | poprzednik | czas $a$ | czas $m$ | czas $b$ | czas $t$ | $\sigma^2$ |
|----------|------------|----------|----------|----------|----------|------------|
| A        | -          | 1        | 2        | 3        |          |            |
| B        | -          | 2        | 3        | 4        |          |            |
| C        | A          | 1        | 2        | 3        |          |            |
| D        | A          | 1        | 2        | 3        |          |            |
| E        | B          | 3        | 4        | 5        |          |            |
| F        | D, E       | 2        | 4        | 6        |          |            |
| G        | C          | 1        | 3        | 5        |          |            |
| H        | C          | 3        | 5        | 7        |          |            |
| I        | F, H       | 5        | 7        | 9        |          |            |

# PERT - przykład: użycie CPM

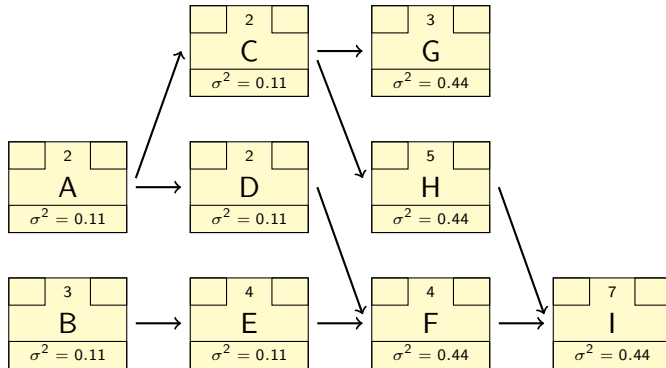




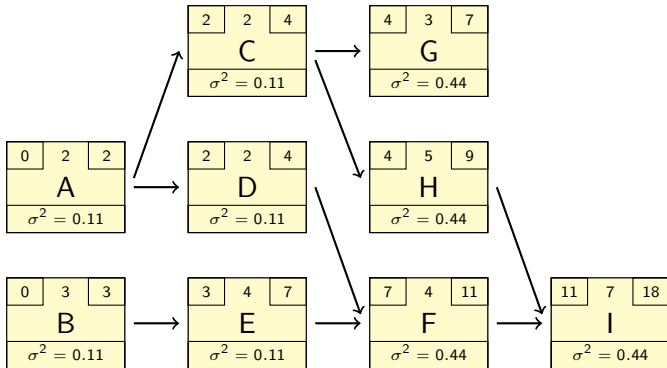
# PERT - przykład: czas $t$ i $\sigma^2$

| czynność | poprzednik | czas $a$ | czas $m$ | czas $b$ | czas $t$ | $\sigma^2$ |
|----------|------------|----------|----------|----------|----------|------------|
| A        | -          | 1        | 2        | 3        | 2        | 0.11       |
| B        | -          | 2        | 3        | 4        | 3        | 0.11       |
| C        | A          | 1        | 2        | 3        | 2        | 0.11       |
| D        | A          | 1        | 2        | 3        | 2        | 0.11       |
| E        | B          | 3        | 4        | 5        | 4        | 0.11       |
| F        | D, E       | 2        | 4        | 6        | 4        | 0.44       |
| G        | C          | 1        | 3        | 5        | 3        | 0.44       |
| H        | C          | 3        | 5        | 7        | 5        | 0.44       |
| I        | F, H       | 5        | 7        | 9        | 7        | 0.44       |

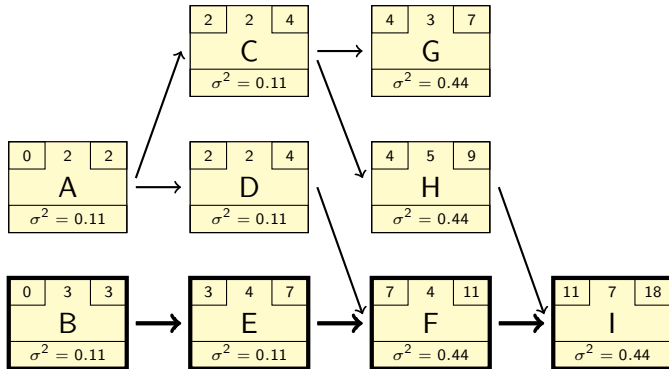
# PERT - przykład: użycie CPM



# PERT - przykład: użycie CPM



# PERT - przykład: użycie CPM



# PERT - przykład: użycie CPM

Wyniku działania metody CPM otrzymujemy:

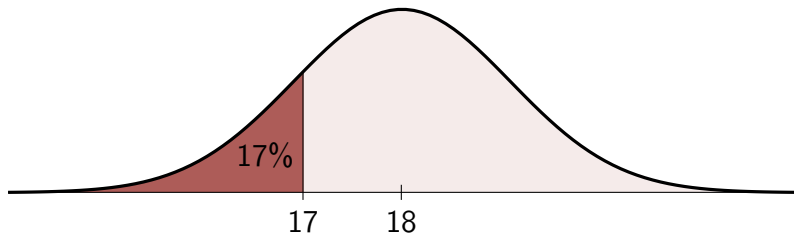
- ścieżkę krytyczną,  $B \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow I$ ,
- $\mu = t_B + t_E + t_F + t_I = 3 + 4 + 4 + 7 = 18$ ,
- $\sigma^2 = \sigma_B^2 + \sigma_E^2 + \sigma_F^2 + \sigma_I^2 = 0.11 + 0.11 + 0.44 + 0.44 = 1.10$ ,
- $\sigma = 1.05$ .

# PERT - przykład: rozwiązanie

Prawdopodobieństwo zakończenia projektu w ciągu 17 dni:

$$p(t < 17) = \Phi\left(\frac{17-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{-1}{1.05}\right) = \Phi(-0.95) = 0.1711$$

wynosi 17%.

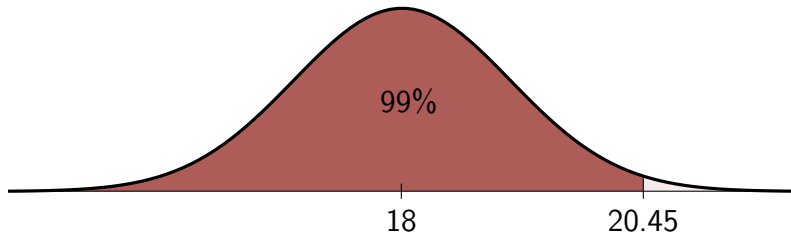


# PERT - przykład: rozwiązanie

Projekt na 99% zakończy się:

$$t = \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(0.99) = 18 + 1.05 \cdot 2.33 = 20.45$$

nie później niż w połowie 21 dnia.



**Dziękuję za uwagę**