Układy równań liniowych

Rozalia Solecka

1 Wstęp

Celem projektu była implementacja metod iteracyjnych (Jacobiego i Gaussa- Seidela) i metody bezpośredniej (faktoryzacja LU). Do implementacji wykorzystano język Python.

2 Zadanie A

Celem tego zadania było stworzenie układu równań:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{1}$$

Dla danych N = 935, a1 = 12 , a2 = -1, a3 = -1 otrzymano macierz $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 12 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 12 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 12 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 12 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 12 \end{bmatrix}$$

Wektor $\mathbf{b}$ uzyskano ze wzoru $\mathbf{b_i} = sin(i * (f + 1))$, dla danych N = 935 i f = 5:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.0, -0.27941549819892586, -0.5365729180004349 & \dots \end{bmatrix}$$

3 Zadanie B

Celem tego zadania było zaimplementowanie metod iteracyjnych Jacobiego i Gaussa–Seidla do rozwiązania układu równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. W tabeli przedstawiono potrzebną liczbę iteracji i czas dla obu metod, aby otrzymać normę z wektora residuum równą 10^{-9}

Metoda	Czas [s]	Liczba iteracji
Jacobiego	5.71	24
Gaussa-Seidla	3.77	17

Metoda Gaussa - Seidela okazała się szybsza oraz wymaga mniejszej liczby iteracji.

4 Zadanie C

Dla danych N = 935, a1 = 3 , a2 = -1, a3 = -1 otrzymano macierz **C**:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań $\mathbf{Cx} = \mathbf{b}$ nie powiodło się. Dla metody Jacobiego w 1222 iteracji oraz dla metody Gaussa-Seidela w 512 iteracji norma z residuum wyniosła nieskończoność. W tym przypadku metody iteracyjne nie zbiegają się, co można zauważyć na wykresach przedstawiających normę residuum w kolejnych iteracjach. Fakt ten wynika z właściwości macierzy **C**

5 Zadanie D

Stosując metodę faktoryzacji LU do rozwiązania układu równań $\mathbf{Cx} = \mathbf{b}$ otrzymano rnormę residuum $3.92 * 10^{-13}$. Jest to wartość bliska zeru, co oznacza, że metoda faktoryzacji LU zapewnia dużą dokładność obliczeń.

6 Zadanie E

W ramach tego zadania utworzono wykres zależności czasu od liczby niewiadomych dla powyższych metod. Zależność została przedstawiona na poniższym wykresie:

Na podstawie powyższego wykresu można stwierdzić, że metoda Gaussa-Seidela wymaga najmniej czasu do rozwiązania układu równań. Niezancznie dłużej trwał algoryt metodą Jacobiego. Metoda faktoryzacji LU wymaga znacznie więcej czasu. Na tej podstawie można stwierdzić, że metody iteracyjne wymagają mniej czasu do rozwiązania układu równań niż metody bezpośrednie.

7 Zadanie F

W tabeli przedstawiono czas, liczbę ietracji i normę z residuum potrzebne do rozwiązania układu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

	metoda Jacobiego	metoda Gaussa Seidela	metoda faktoryzacji LU
czas [s]	5.71	3.77	55.75
liczba iteracjii	24	17	-
norma z residuum	$8.59 * 10^{-10}$	$3.17 * 10^{-10}$	$3.87 * 10^{-15}$

Czas wykonywania obliczeń dla każdej z powyższych metod wzrasta wraz ze wzrostem liczby niewiadomych. Metody iteracyjne są mniej dokładne niż metoda bezpośrednia, natomiast wymagają znacznie mniej czasu. Metoda Gaussa- Seidela okazała się szybsza niż metoda Jacobiego w każdym przypadku. Im większy rozmiar macierzy, tym większa różnica czasu między metodą Gaussa - Seidela a metodą Jacobiego.

Można stwierdzić, że metody iteracyjne lepiej nadają się do rozwiązywania układów równań z dużą liczbą niewiadomych. Warto jednak zauważyć, że metody iteracyjne nie sprawdzają się gdy norma z residuum dąży do nieskończoności, jak w przypadku układu Cx = b. Zaletą metody bezpośredniej jest możliwość rozwiązania układu, gdy metody iteracyjne nie zbiegają się.