Лекция 2. Элементы теории погрешностей

Панкратов Владимир Александрович

Московский Государственный Технический Университет имени Н.Э.Баумана

Москва, 2022

Приближенные числа. Абсолютная и относительная погрешности. Погрешности арифметических операций над приближенными числами: теорема об абсолютной погрешности алгебраически суммы, теорема об относительной погрешности алгебраической суммы, теорема об относительной погрешности произведения и частного. Погрешность функции. Погрешность величины, не являющейся скалярной.

Неустранимые погрешности

Так как математическая модель изучаемого процесса зачастую носит приближенный характер, что связано с упрощением объекта исследования (не учитываются факторы, оказывающие незначительное влияние него), то по отношению к численному методу, данные погрешности являются неустранимыми.

Погрешности метода

Эти погрешности возникают при переходе от математической модели к численному методу, если метод является приближенным.

Вычислительные погрешности

Возникают в связи с точностью представления вещественных чисел на ЭВМ при вводе данных или при проведении арифметических операций.

let

- $x \in \mathbb{R}$ — точное (вообще говоря, неизвестное) значение некоторой величины,
- $x^* \in \mathbb{R}$ — известное приближённое значение той же величины.

Погрешность приближённого значения x^*

Разность $x - x^*$ точного и приближённого значения.

Абсолютная погрешность приближённого значения x^*

Величина $\Delta(x^*) = |x - x^*|$.

Относительная погрешность приближённого значения x^*

Величина $\delta(x^*) = \dfrac{\Delta(x^*)}{|x|} = \dfrac{|x^* - x|}{|x|}$.

Пример

$$e = 2{,}718281828459045\ldots .$$

Приближённое значение $e^* = 2{,}71$ *имеет абсолютную погрешность* $\Delta(e^*) = 0{,}008281828\ldots$.

Обычно точное значение x неизвестно и вычисление погрешностей не представляется возможным. Поэтому на практике используют верхние границы абсолютной $\bar{\Delta}(x^*)$ и относительной $\bar{\delta}(x^*)$ погрешностей, удовлетворяющие неравенствам.

$$|x - x^*| \leqslant \overline{\Delta}\,(x^*)\,, \quad \frac{|x - x^*|}{|x|} \leqslant \bar{\delta}\,(x^*)\,,$$

Величины $\bar{\Delta}(x^*)$ и $\bar{\delta}(x^*)$ считают связанными соотношением

$$\bar{\Delta}(x^*) = |x| \cdot \bar{\delta}(x^*)\,.$$

Поскольку $x^* \approx x$, используют приближённое равенство

$$\bar{\Delta}(x^*) \approx |x^*| \cdot \bar{\delta}(x^*).$$

Элементы теории погрешностей

Влияние погрешностей в исходных данных на результат арифметических операций

Абсолютная погрешность суммы и разности

$$\Delta(x^* \pm y^*) \leqslant \Delta(x^*) + \Delta(y^*).$$

$$\triangleleft \quad \begin{aligned} \Delta(x^* \pm y^*) =& |(x \pm y) - (x^* \pm y^*)| = \\ =& |(x - y^*) \pm (x - y^*)| \leqslant |x - y^*| + |x - y^*| = \\ =& \Delta(x^*) + \Delta(y^*) \quad \triangleright \end{aligned}$$

Следствие

$$\bar{\Delta}(x^* \pm y^*) = \bar{\Delta}(x^*) + \bar{\Delta}(y^*)$$

Относительная погрешность суммы и разности

let x и y — ненулевые числа **одного знака** $\Rightarrow$

$$\delta(x^* \pm y^*) \leqslant \frac{|x+y|}{|x \pm y|} \cdot \max\{\delta(x^*), \delta(y^*)\}\,.$$

$$\begin{aligned} \triangleleft \quad |x \pm y| \cdot \delta(x^* \pm y^*) =& \Delta(x^* \pm y^*) \leqslant \Delta(x^*) + \Delta(y^*) = \\ =& |x| \cdot \delta(x^*) + |y| \cdot \delta(y^*) \leqslant \\ &\leqslant (|x| + |y|) \cdot \max\{\delta(x^*), \delta(y^*)\} = \\ =& |x+y| \cdot \max\{\delta(x^*), \delta(y^*)\}\,. \end{aligned}$$

Поделив обе части неравенства на $|x \pm y|$, получим требуемое неравенство. $\triangleright$

Относительная погрешность суммы и разности

let x и y — ненулевые числа **одного знака** $\Rightarrow$

$$\delta(x^* \pm y^*) \leqslant \frac{|x+y|}{|x \pm y|} \cdot \max\{\delta(x^*), \delta(y^*)\}\,.$$

Следствие

$$\bar{\delta}(x^* + y^*) = \max\{\bar{\delta}(x^*), \bar{\delta}(y^*)\}\,,$$

$$\bar{\delta}(x^* - y^*) = \frac{|x+y|}{|x-y|} \max\{\bar{\delta}(x^*), \bar{\delta}(y^*)\}\,.$$

Относительная погрешность произведения

$$\delta(x^*y^*) \leqslant \delta(x^*) + \delta(y^*) + \delta(x^*)\delta(y^*)$$

$$\begin{aligned}
\triangleleft \quad |xy| \cdot \delta(x^*y^*) =& \Delta(x^*y^*) = |xy - x^*y^*| = \\
=& |xy - x^*y + yx - y^*x - xy + xy^* + x^*y + x^*y^*| \leqslant \\
=& |(x - x^*) \cdot y + (y - y^*) \cdot x - (x - x^*)(y - y^*)| \leqslant \\
& \leqslant |y| \cdot \Delta(x^*) + |x| \cdot \Delta(y^*) + \Delta(x^*) \cdot \Delta(y^*) = \\
=& |xy| \cdot \Big(\delta(x^*) + \delta(y^*) + \delta(x^*) \cdot \delta(y^*)\Big)
\end{aligned}$$

Поделив обе части неравенства на $|xy|$, приходим к требуемому неравенству. $\triangleright$

Относительная погрешность произведения

$$\delta(x^*y^*) \leqslant \delta(x^*) + \delta(y^*) + \delta(x^*)\delta(y^*)$$

Следствие

let $\delta(x^*) \ll 1,\ \delta(y^*) \ll 1 \Rightarrow \delta(x^*y^*) \approx \delta(x^*) + \delta(y^*).$

Относительная погрешность частного

let $\delta(y^*) < 1 \Rightarrow \delta\left(\dfrac{x^*}{y^*}\right) \leqslant \dfrac{\delta(x^*) + \delta(y^*)}{1 - \delta(y^*)}$.

$\triangleleft$ Поскольку

$$|y^*| = |y + (y^* - y)| \geqslant |y| - |y^* - y| = |y| - \Delta(y^*) = |y|(1 - \delta(y^*)),$$

то

$$\delta\left(\frac{x^*}{y^*}\right) \geqslant \frac{|x/y - x^*/y^*|}{|x/y|} = \frac{|xy^* - x^*y|}{|xy^*|} =$$
$$= \frac{|x(y^* - y) + y(x - x^*)|}{|xy^*|} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{|x|\Delta(y^*) + |y|\Delta(x^*)}{|xy|(1 - \delta(y^*))} = \frac{\delta(x^*) + \delta(y^*)}{1 - \delta(y^*)}. \quad \triangleright$$

Относительная погрешность частного

let $\delta(y^*) < 1 \Rightarrow \delta\left(\dfrac{x^*}{y^*}\right) \leqslant \dfrac{\delta(x^*) + \delta(y^*)}{1 - \delta(y^*)}$.

Следствие

let $\delta(y^*) \ll 1 \Rightarrow \delta\left(\dfrac{x^*}{y^*}\right) \approx \delta(x^*) + \delta(y^*)$

Погрешность вычисления функции

let $y^* = f(x^*) \Rightarrow \Delta(y^*) \leqslant \Delta(x^*) \max\limits_{s \in [x, x^*]} |f'(s)|$.

$\triangleleft$ По теореме Лагранжа существует $s \in (x, x^*)$ такое, что

$$y - y^* = f(x) - f(x^*) = f'(s)(x - x^*) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Delta(y^*) =& |y - y^*| = |f'(s)||x - x^*| = \\ =& |f'(s)|\Delta(x^*) \leqslant \Delta(x^*) \max_{s \in [x, x^*]} |f'(s)| . \quad \triangleright \end{aligned}$$

Следствие

При $\delta(x^*) \ll 1$*:* $\bar{\Delta}(y^*) \approx \bar{\Delta}(x^*)|f'(x^*)|$.

let

- x — точное значение некоторой (нескалярной) величины,
- x^* — известное приближённое значение той же величины.

Абсолютная и относительная погрешности приближённого значения (нескалярной) величины x^*

$$\Delta(x^*) = \|x^* - x\|\,, \quad \delta(x^*) = \frac{\|x^* - x\|}{\|x\|}\,,$$

где $\|\cdot\|$ — какая-либо *норма*.