Лекция 4. Корректность вычислительной задачи

Панкратов Владимир Александрович

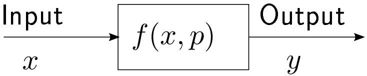
Московский Государственный Технический Университет имени Н.Э.Баумана

Москва, 2022

Корректность вычислительной задачи по Адамару. Устойчивое по входным данным решение вычислительной задачи. Неустойчивое по входным данным решение вычислительной задачи. Относительно устойчивое по входным данным решение вычислительной задачи. Обусловленность вычислительной задачи. Абсолютное и относительное числа обусловленности.

Корректность вычислительной задачи

Корректность вычислительной задачи по Адамару



- X — множество допустимых входных данных;
- Y — множество допустимых решений

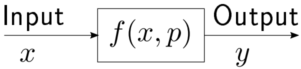
Вычислительная задача называется *корректной (по Адамару)*, если решение вычислительной задачи удовлетворяет условиям

- $\forall x \in X \ \exists! y \in Y$;
- устойчиво по отношению к малым возмущениям входных данных (непрерывно зависит от входных данных)

Если хотя бы одно из условий не выполнено, то вычислительная задача называется *некорректной*

Корректность вычислительной задачи

Виды устойчивости



Решение вычислительной задачи *устойчиво по входным данным или абсолютно устойчиво*

$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\sigma(\varepsilon) > 0\ \forall x^*\ (\Delta(x^*) < \sigma(\varepsilon) \Rightarrow \Delta(y^*) < \varepsilon)$

Решение вычислительной задачи *неустойчиво*

$\exists\varepsilon > 0,\ \forall\sigma > 0\text{: } \exists x^*(\Delta(x^*) < \sigma \Rightarrow \Delta(y^*) \geqslant \varepsilon)$

Корректность вычислительной задачи

Устойчивость задачи вычисления определенного интеграла $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$

- $f^*(x)$ — приближенно заданная интегрируемая функция;
- $I^* = \int\limits_a^b f^*(x)\,dx$ — приближенное значение интеграла;
- $\Delta\left(f^*\right) = \sup\limits_{x\in[a,b]} \left|f(x) - f^*(x)\right|$ — абсолютная погрешность вычисления функции $f^*(x)$

$$\Delta\left(I^*\right) = \left|I - I^*\right| = \left|\int\limits_a^b \left(f(x) - f^*(x)\right)dx\right| \leqslant (b-a)\Delta\left(f^*\right)$$

$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\sigma(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{b-a} > 0\colon\ \forall f^*(x)\ \Big(\Delta\left(f^*\right) < \sigma(\varepsilon) \Rightarrow \Delta\left(I^*\right) < \varepsilon\Big)$

$\Rightarrow$ задача вычисления определенного интеграла абсолютно устойчива

Корректность вычислительной задачи

Неустойчивость задачи вычисления производной $f'(x)$

- $f^*(x)$ — приближенно заданная, непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция;
- $u^*(x) = {f^*}'(x)$ — производная приближенно заданной функции

$$\Delta(f^*) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - f^*(x)|, \quad \Delta(u^*) = \max_{x\in[a,b]} |u(x) - u^*(x)|$$

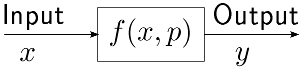
let $f^*(x) = f(x) + \alpha^2 \cos\left(\frac{x}{\alpha^5}\right)$, где $0 < \alpha \ll 1 \Rightarrow$

$$u^*(x) = u(x) - \alpha^{-3} \sin\left(\frac{x}{\alpha^5}\right), \quad \Delta(f^*) = \alpha^2, \ \Delta(u^*) = \alpha^{-3}$$

Значит, сколь угодно малой погрешности функции f отвечает сколь угодно большая погрешность производной f'.
$\Rightarrow$ Задача вычисления производной приближенно заданной функции неустойчива

Корректность вычислительной задачи

Виды устойчивости



Замечание

Зачастую требование малости абсолютной погрешности является неоправданным. В таких случаях рассматривают относительную устойчивость решения.

Решение *относительно устойчиво*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \sigma(\varepsilon) > 0\colon \forall x^*\ \left(\delta(x^*) < \sigma(\varepsilon) \Rightarrow \delta(y^*) < \varepsilon\right)$$

Корректность вычислительной задачи

Относительная устойчивость задачи о вычислении суммы сходящегося ряда

- $s = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$ — сходящийся ряд и его сумма s;
- $s^* = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k^*$ — ряд с приближенно заданными членами $a_k^* \approx a_k$ и его сумма s^*;

let $\Delta(a_k^*) = \sup\limits_{k \geqslant 0} |a_k - a_k^*|$, $a_k^* = \begin{cases} a_k + \delta, & k < N \\ a_k, & k \geqslant N \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow$

$\Delta(s^*) = |s - s^*| = \left| \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (a_k - a_k^*) \right| = N\delta \to +\infty$ при $N \to +\infty$

$\Rightarrow$ задача о вычислении приближенной суммы неустойчива.

Если $a_k^* = a_k + \delta$, $\forall k \in \mathbb{N}$, то $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k^*$ расходится.

Корректность вычислительной задачи

Относительная устойчивость задачи о вычислении суммы сходящегося ряда

Теперь предположим, что $a_k \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Часто можно гарантировать малость $\delta(a_k^*) = \sup\limits_{k \geqslant 0} \dfrac{|a_k - a_k^*|}{|a_k|} \Rightarrow$

$\Delta(a_k^*) \leqslant |a_k|\delta(a_k^*) \Rightarrow$

$$\Delta(s^*) = |s - s^*| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} (a_k - a_k^*)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \Delta(a_k^*) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|\delta(a_k^*) \Rightarrow \Delta(s^*) \leqslant \frac{\sum\limits_{k=0}^{+\infty} |a_k|}{\left|\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k\right|}\delta(a^*) \,.$$

Корректность вычислительной задачи

Относительная устойчивость задачи о вычислении суммы сходящегося ряда

$$\Delta(s^*) \leqslant \frac{\sum\limits_{k=0}^{+\infty} |a_k|}{\left|\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k\right|} \delta(a^*) \Rightarrow$$

- при абсолютной сходимости $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$: задача вычисления суммы сходящегося ряда относительно устойчива;
- при условной сходимости ряда: $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} |a_k| = \infty$, а значит задача не будет относительно устойчивой.

Показателем устойчивости вычислительной задачи задачи является *обусловленность вычислительной задачи*

Обусловленность вычислительной задачи

Чувствительность решения вычислительной задачи к малым погрешностям входных данных

Определение

Задача называется *хорошо обусловленной*, если малым погрешностям входных данных отвечают малые погрешности решения и *плохо обусловленной* в обратном случае

Число обусловленности

Коэффициент возможного возрастания погрешностей в решении по отношению к вызвавшим их погрешностям входных данных (числовой показатель обусловленности).

let $\Delta(y^*) \leqslant \nu_\Delta \Delta(x^*)$, $\delta(y^*) \leqslant \nu_\delta \delta(x^*)$, где

Абсолютное и относительное числа обусловленности

$$\nu_\Delta > 0 \text{ и } \nu_\delta > 0$$

Замечание

В неравенства вместо Δ и δ могут быть и их границы $\overline{\Delta}$ и $\overline{\delta}$.

Замечание

Для плохо обусловленнной задачи $\nu \gg 1$.

Корректность вычислительной задачи

Обусловленность задачи вычисления значения функции одной переменной

$$\overline{\Delta}(y^*) \approx \overline{\Delta}(x^*)|f'(x^*)| \Rightarrow$$

- $\nu_\Delta \approx \dfrac{\overline{\Delta}(y^*)}{\overline{\Delta}(x^*)} = |f'(x^*)|;$
- $\nu_\delta \approx \dfrac{\overline{\delta}(y^*)}{\overline{\delta}(x^*)} \approx \dfrac{\overline{\Delta}(y^*)|x|}{\overline{\Delta}(x^*)|y|} \approx \dfrac{|f'(x^*)||x|}{|f(x)|}.$

Корректность вычислительной задачи

Обусловленность задачи вычисления интеграла

let $\Delta\left(f^*\right) = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - f^*(x)| \Rightarrow$

$$\Delta\left(I^*\right) = |I - I^*| = \left| \int\limits_a^b \left(f(x) - f^*(x)\right) dx \right| \leqslant (b-a)\Delta\left(f^*\right)$$

$$\Rightarrow \nu_\Delta \approx \frac{\overline{\Delta}(I^*)}{\overline{\Delta}(f^*)} = b - a$$

Корректность вычислительной задачи

Обусловленность задачи вычисления интеграла

let $\delta(f^*) = \dfrac{\sup\limits_{x\in[a,b]} |f^*(x) - f(x)|}{|f(x)|}$, где $f(x) \neq 0 \Rightarrow$

$$\Delta(I^*) \leqslant \int\limits_a^b |f^*(x) - f(x)|dx \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx \cdot \delta(f^*) \Rightarrow$$

$$\delta(I^*) \leqslant \nu_\delta \delta(f^*), \qquad \nu_\delta = \frac{\int\limits_a^b |f(x)|dx}{|\int\limits_a^b f(x)dx|} \Rightarrow$$

- если подынтегральная функция знакопостоянна на $[a,b]$, то $\nu_\delta = 1$ и задача хорошо обусловлена;
- если же $f(x)$ принимает на $[a,b]$ значения разных знаков, то $\nu_\delta > 1$.

$$Ax = b\,, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,, \quad b \in \mathbb{R}^n\,.$$

let $x^* = x + \Delta x$, $b^* = b + \Delta b$, требуется оценить Δx по известной Δb.

$$Ax^* = b^* \Leftrightarrow A(x + \Delta x) = b + \Delta b,$$

для точного решения $Ax = b \Rightarrow$

$$A\Delta x = \Delta b \quad \Rightarrow \quad \Delta x = A^{-1}\Delta b \Rightarrow$$

$$A\Delta x = \Delta b \quad \Rightarrow \quad \Delta x = A^{-1}\Delta b \Rightarrow$$

Абсолютная погрешность:

$$\Delta(x^*) = \|\Delta x\| = \|A^{-1}\Delta b\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\| = \|A^{-1}\| \cdot \Delta(b^*)\,.$$

Относительная погрешность: $\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow$

$$\delta(x^*) = \frac{\Delta(x^*)}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \Delta(b^*)}{\|x\|} \leq$$
$$\leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \Delta(b^*)}{\|b\|} = \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \delta(b^*)\,.$$

Число обусловленности матрицы A

$$\operatorname{cond} A = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|\,.$$

let $x^* = x + \Delta x$, $A^* = A + \Delta A$, требуется оценить Δx по известной ΔA.

$$A^* x^* = b \Leftrightarrow (A + \Delta A)(x + \Delta x) = b\,, \Rightarrow$$
$$x + \Delta x = (A + \Delta A)^{-1} b.$$

Поскольку $x = A^{-1} b \Rightarrow \Delta x = \left((A + \Delta A)^{-1} - A^{-1}\right) b$.
Из тождества $B^{-1} - C^{-1} = C^{-1}(C - B)B^{-1} \Rightarrow$

$$\Delta x = A^{-1}\left(A - (A + \Delta A)\right)(A + \Delta A)^{-1} b = -A^{-1}\Delta A(x + \Delta x)\,,$$

т. е. $\|\Delta x\| = \|A^{-1}\Delta A(x + \Delta x)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| \cdot \|x + \Delta x\| \Rightarrow$

$$\delta(x^*) \approx \frac{\|\Delta x\|}{\|x^*\|} = \frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| =$$
$$= \operatorname{cond} A \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \operatorname{cond} A \cdot \delta(A^*)\,.$$

Свойства числа обусловленности матрицы

- $\operatorname{cond} A = \operatorname{cond}(A^{-1})$;
- $\operatorname{cond}(AB) \leqslant \operatorname{cond} A \operatorname{cond} B$;
- $\operatorname{cond} A \geqslant 1$;
- $\operatorname{cond} A \geqslant \dfrac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|}$, где $\lambda_{\max}$, $\lambda_{\min}$ — наибольшее и наименьшее по абсолютной величине собственные значения.