# Лекция 1. Введение

Панкратов Владимир Александрович

Московский Государственный Технический Университет имени Н.Э.Баумана

Москва, 2022

- *Модуль 1*. Методы численного решения задач линейной алгебры.
- *Модуль 2*. Методы отыскания решений нелинейных уравнений. Интерполяция и приближение функций.
- *Модуль 3*. Численное интегрирование и дифференцирование.

Предмет и метод вычислительной математики. Понятие математической модели, вычислительного эксперимента, вычислительной задачи.

## Литература


1. Галанин М. П., Савенков Е. Б. Методы численного анализа математических моделей. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018. — 591 с.
2. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. — М.: Высшая школа, 1994. — 544 с.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989. — 432 с.
4. Калиткин Н.Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978. — 512 с.
5. Ильина В.А., Силаев П.К. Численные методы для физиков-теоретиков. — М.: Институт компьютерных исследований, 2003. — 132 с.

### Математическая модель изучаемого объекта

Математическое описание поведения объекта исследования, как правило, в форме системы уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных и т. д.), реже — неравенств или включений.

### Вычислительный эксперимент

Анализ математической модели на вычислителе (в современных условиях это ЭВМ).

### Математическое моделирование

Метод исследования объекта, в котором для изучения объекта используется его математическая модель.

# Введение

## Схема построения и анализа математической модели

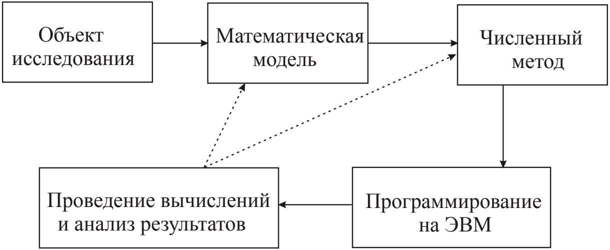



Рис. 1: Последовательность исследования.

1. Формулировка основных законов, определяющих поведение данного объекта исследования;

# Введение

## Схема построения и анализа математической модели

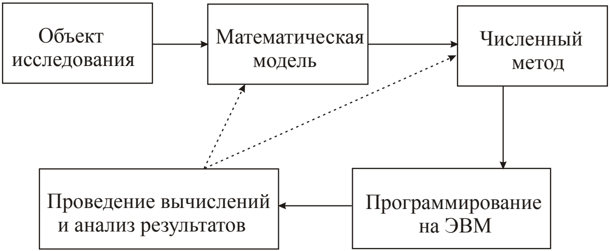



Рис. 1: Последовательность исследования.

**2**. Построение математической модели, обычно представляющей собой запись этих законов в форме системы уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных и т. д.);

# Введение

## Схема построения и анализа математической модели

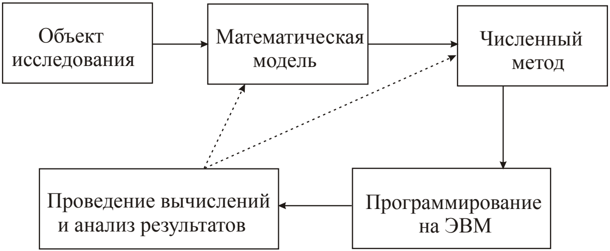



Рис. 1: Последовательность исследования.

**3.** Постановка вычислительной задачи;

# Введение

## Схема построения и анализа математической модели

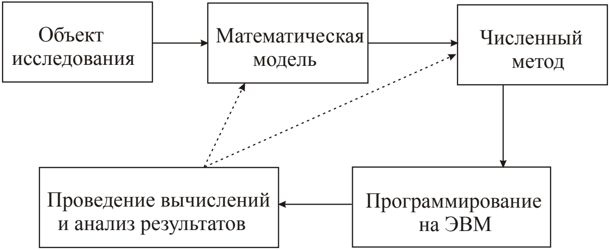



Рис. 1: Последовательность исследования.

**4**. Разработка численного алгоритма для решения полученной вычислительной задачи;

# Введение

## Схема построения и анализа математической модели

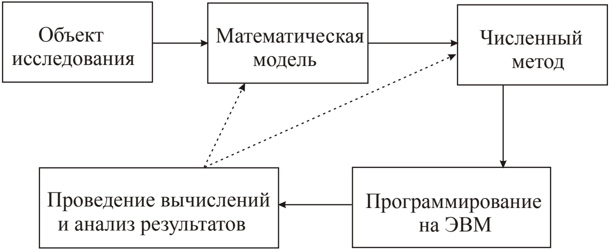



Рис. 1: Последовательность исследования.

**5**. Разработка программного обеспечения реализующего численный алгоритм (математическое обеспечение);

# Введение

## Схема построения и анализа математической модели

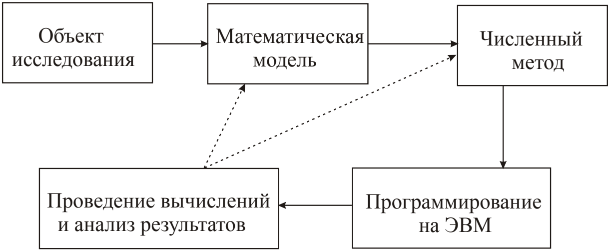
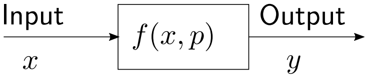



Рис. 1: Последовательность исследования.

**6**. Проведение вычислительного эксперимента и анализ результатов.

# Введение

## Вычислительные задачи математического моделирования

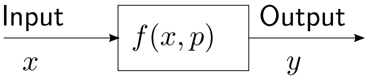



### Данные, с которыми оперирует математическая модель

- Входные данные $x$;
- Параметры модели $p$;
- Выходные данные $y$.

# Введение

## Вычислительные задачи математического моделирования




### Прямая задача

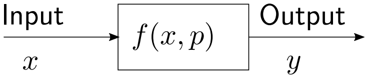
По известному значению входа $x$ и фиксированным значениям параметров математической модели $p$ требуется найти выход $y = f(x, p)$.

### Обратная задача

По известному значению выхода $y$ и фиксированным значениям параметров математической модели $p$ нужно определить значения входа $x$: $y = f(x, p)$.

# Введение

## Вычислительные задачи математического моделирования




### Задача идентификации

Задача подбора параметров математической модели $p$, которые оптимально, в смысле некоторого критерия, согласует известные вход $x$ и выход $y = f(x,p)$. Зачастую $y$ являются результатами наблюдений, а $x$ — известными признаками.

### Пример

*Задача вычисления $y = \sin x$ по данному $x \in \mathbb{R}$ является прямой вычислительной задачей.*

### Пример

*Задача поиска корня $x \in \mathbb{R}$ уравнения $e^{-x} - x = y$ по данному $y \in \mathbb{R}$ является обратной вычислительной задачей.*

### Пример

*Для контрольной группы из $m$ человек измеряем рост $x_k$ (признак) и вес $y_k$ (целевая переменная) $(k = \overline{1, m})$. Считаем, что связь между признаком и целевой переменной линейная $y = p_0 + p_1 x$ $(p_0, p_1 \in \mathbb{R})$. Задача нахождения значений параметров $p_0$, $p_1$ наилучшим, в некотором смысле, образом согласующим измерения $x_k$ и $y_k$ является задачей идентификации.*

## Выслительные методы

Методы решения вычислительных задач.

Выделяют следующие общие вычислительные методы:

1. прямые методы и методы эквивалентных преобразований,
2. итерационные методы,
3. методы аппроксимации,
4. методы статистических испытаний (методы Монте-Карло).

### Прямые методы

Методы, позволяющие получить решение исходной вычислительной задачи за конечное число операций.

## Пример

*Метод решения СЛАУ*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

*по формулам Крамера*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

*где*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

### Итерационные методы

Методы построения последовательности приближений к решению исходной вычислительной задачи.

### Пример

*Для вычисления $y = \sqrt{x}$ по данному $x$ рассматривается последовательность $y_k$ построенная по следующему правилу*

$$y_1 = x, \quad y_{k+1} = \frac{1}{2}\left(y_k + \frac{x}{y_k}\right), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

*Можно показать, что*

$$\lim_{k \to +\infty} y_k = y,$$

*поэтому $y \approx y_n$ при достаточно большом $n$.*

### Методы аппроксимации

Методы, в которых исходная вычислительная задача заменяется приближенной, решаемой за конечное число операций.

### Пример

*Задача вычисления* $y = \sin x$ *по данному* $x$ *может быть заменена задачей вычисления суммы*

$$y \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1} x^{2i-1}}{(2i-1)!}$$

*при достаточно больших* $n$.

### Пример

*Задача Коши* $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ *может быть заменена задачей поиска* $y_k$ *из системы уравнений*

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} = f(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

*где* $x_{k+1} = x_k + h_k$, $h_k > 0$, $y(x_k) \approx y_k$.

### Методы Монте-Карло

Методы, в которых для нахождения приближённого решения вычислительной задачи проводится серия случайных экспериментов.

### Пример

*Пусть $\Omega$ — некоторая фигура, площадь которой известна, $A$ — фигура, площадь которой требуется вычислить. Причём $A \subseteq \Omega$.*

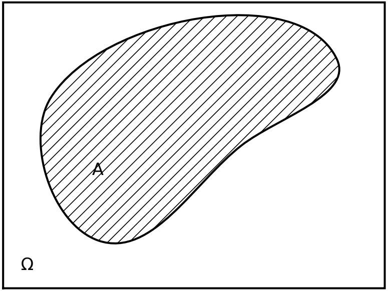



Рис. 2: *Вычисление площади фигуры $A$.*

# Введение

## Методы Монте-Карло

Проведём опыт по "бросанию"точки на $\Omega$. Тогда вероятность попадания точки на множество $A$ составит

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

где $\mu(\Omega)$ и $\mu(A)$ — площади фигур $\Omega$ и $A$. Вероятность $P(A)$ можно вычислить приближённо проведя серию опытов по «бросанию» точки на $\Omega$ по следующей формуле

$$P(A) \approx \frac{m}{n},$$

где $n$ — общее число опытов, $m$ — число опытов, в которых точка попала на множество $A$. Следовательно,

$$\mu(A) = P(A)\mu(\Omega) \approx \frac{m}{n}\mu(\Omega).$$