Лекция 6. Итерационные методы решения СЛАУ

Панкратов Владимир Александрович

Московский Государственный Технический Университет имени Н.Э.Баумана

Москва, 2022

Общий вид итерационного процесса. Метод последовательных приближений. Метод простой итерации. Метод Якоби. Метод Зейделя.

Итерационные методы решения СЛАУ

Постановка задачи

Рассмотрим СЛАУ

$$Ax = b\,,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Требуется построить последовательность $x^{(k)}$ такую, что

$$\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = x^*,$$

где x^* — точное решение.

Рассмотрим итерационный процесс, с неподвижной точкой x^*, в котором состояние на k-м шаге линейно зависит от $k-1$-го шага:

$$x^{(k)} = B^{(k)} x^{(k-1)} + c^{(k)},$$

где

- $B^{(k)}$ — некоторая последовательность матриц;
- $c^{(k)}$ — некоторая последовательность векторов;
- $x^{(0)}$ — начальное приближение, в общем случае произвольное.

Последовательности $B^{(k)}$ и $c^{(k)}$ определяют вид итерационного процесса.
if за начальное приближение взять $x^{(0)} = x^* \Rightarrow$ все последующие приближения будут также равны x^*.

Теорема

Итерационный процесс $x^{(k)} = B^{(k)}x^{(k-1)} + c^{(k)}$ *сходится к решению* x^* *при любом начальном приближении* $\Leftrightarrow$

$$\lim_{k\to\infty} T^{(k)} = 0\,,$$

где $T^{(k)} = B^{(k)} \cdot \ldots \cdot B^{(1)}$.

◁ Рассмотрим погрешность между точным решением и его приближением на k-й итерации

$$\left.\begin{array}{l} x^{(k)} = B^{(k)} x^{(k-1)} + c^{(k)} \\ x^* = B^{(k)} x^* + c^{(k)} \end{array}\right\} \Rightarrow x^* - x^{(k)} = B^{(k)} \left(x^* - x^{(k-1)}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x^* - x^{(k)} =& B^{(k)} \left(x^* - x^{(k-1)}\right) = \ldots = \\ =& B^{(k)} \cdot \ldots \cdot B^{(1)} \left(x^* - x^{(0)}\right). \end{aligned}$$

$\forall x^{(0)}$: $x^* - x^{(k)} \to 0$ при $k \to \infty \Leftrightarrow T^{(k)} = B^{(k)} \cdot \ldots \cdot B^{(1)} \underset{k\to\infty}{\to} 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} T^{(k)} = 0.$ ▷

Итерационные методы решения СЛАУ

Общий вид итерационного процесса

$$x^{(k)} = B^{(k)} x^{(k-1)} + c^{(k)}$$

Стационарные итерационные процессы

Итерационные процессы, в которых матрица $B = B^{(k)}$ и вектор $c = c^{(k)}$ не зависит от номера шага k.

Циклические итерационные процессы

Если матрица $B = B^{(k)}$ и вектор $c = c^{(k)}$ повторяется через некоторое число p шагов, то такие итерационные процессы называются *циклическими*.

Замечание

Из каждого циклического процесса можно получить равносильный ему стационарный процесс, принимая за один шаг результат применения полного цикла из p шагов.

Итерационные методы решения СЛАУ

Общий вид итерационного процесса

$$x^{(k)} = B^{(k)} x^{(k-1)} + c^{(k)}$$

Нестационарные итерационные процессы

Итерационные процессы, в которых матрица $B = B^{(k)}$ и вектор $c = c^{(k)}$ меняются в зависимости от номера шага k.

Замечание

Зачастую итерационный процесс строится для ускорения сходимости стационарного процесса. Для этого на некоторых шагах матрицу B заменяют на подобранную специальным образом матрицу $B^{(k)}$.

Итерационные методы решения СЛАУ

Метод последовательных приближений

$$Ax = b \Leftrightarrow x = Bx + c\,,$$

где где $B = E - A$, $c = b$.

Зададим произвольным образом $x^{(0)}$ и построим последовательность $x^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, по реккурентной формуле

$$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + c\,.$$

Если $\exists x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}$, то при переходе к пределу: $x^* = Bx^* + c$, а значит сходится к решению $Ax = b$.

Лемма

$$\lim_{m\to\infty} B^m = 0 \Leftrightarrow E + B + B^2 + \ldots + B^m + \ldots = (E + B)^{-1}$$

$\lhd$ $\Longleftarrow$ Очевидно: чтобы ряд из матриц сошелся, должны сойтись ряды из элементов матриц, а значит для каждого из элементов должно быть выполнено необходимое условие сходимости.

$\Longrightarrow \lim\limits_{m\to\infty} B^m = 0 \Rightarrow$ все собственные значения матрицы B по модулю меньше единицы $\Rightarrow |E - B| \neq 0 \Rightarrow \exists (E - B)^{-1}$.
Рассмотрим равенство:

$$\left(E + B + B^2 + \ldots + B^m\right)(E - B) = E - B^{m+1}\,.$$

и умножим его справа на $(E - B)^{-1}$

$$E + B + B^2 + \ldots + B^m = (E - B)^{-1} - B^{m+1}(E - B)^{-1} \Rightarrow$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} B^m = E + B + B^2 + \ldots + B^m =$$

$$= (E - B)^{-1} - \lim_{m\to\infty} B^{m+1}(E - B)^{-1} = (E - B)^{-1}\,. \quad \triangleright$$

Теорема

Для сходимости метода последовательных приближений $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ при произвольном начальном условии $x^{(0)}$ необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы B были по модулю меньше единицы.

$\triangleleft \quad \Longrightarrow$ let $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$, где x^* — решение системы $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\forall x^{(0)} :\ x^* - x^{(k)} =& B\left(x^* - x^{(k-1)}\right) = \ldots = \\ =& B^m\left(x^* - x^{(0)}\right) \to 0 \Leftrightarrow B^k \to 0\end{aligned}$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы B были по модулю меньше единицы.

Итерационные методы решения СЛАУ

Небходимое и достаточное условие метода последовательных приближений

$$
\begin{aligned}
\Longleftarrow x^{(k)} =& Bx^{(k-1)} + c = \\
=& B(Bx^{(k-2)} + c) + c = B^2 x^{(k-2)} + (E + B)\, c = \ldots = \\
=& B^k x^{(0)} + \left(E + B + B^2 + \cdots + B^{k-1}\right) c
\end{aligned}
$$

Все собственные значения матрицы B по модулю меньше единицы $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} x^{(k)} &= \lim_{k\to\infty} \left(B^k x^{(0)} + \left(E + B + B^2 + \cdots + B^{k-1}\right) c\right) = \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(E + B + B^2 + \cdots + B^{k-1}\right) c = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} B^m = (E - B)^{-1} \\ B = E - A\,,\;\; c = b \end{array} \right\} = A^{-1} b = x^* \quad \triangleright
\end{aligned}
$$

Итерационные методы решения СЛАУ

Небходимое и достаточное условие метода последовательных приближений

$$\left.\begin{array}{l} x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + b \\ x^* = Bx^* + b \end{array}\right\} \Rightarrow x^* - x^{(k)} = B(x^* - x^{(k-1)}) \Rightarrow$$

$$\| x^* - x^{(k)} \| \leqslant \| B \| \| x^* - x^{(k-1)} \| \leqslant \| B \|^k \| x^* - x^{(0)} \| \; .$$

let $x^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right)^{\mathrm{T}}$,

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\| x^* - x^{(k)} \| \leqslant \| B \|^k \| x^* - x^{(0)} \|$$

Октаэдрическая норма

$\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$, $\|B\|_1 = \max\limits_{j=\overline{1,n}} \sum\limits_{i=1}^{n} |b_{ij}| \Rightarrow$

$\sum\limits_{i=1}^{n} |b_{ij}| \leqslant \nu < 1$ при любом $\forall j = 1, 2, \ldots, n$, то процесс последовательных приближений сходится, причем

$$\sum_{j=1}^{n} \left| x_j - x_j^{(k)} \right| \leqslant \nu \sum_{j=1}^{n} \left| x_j - x_j^{(k-1)} \right| .$$

$$\| \, x^* - x^{(k)} \, \| \leqslant \| \, B \, \|^k \| \, x^* - x^{(0)} \, \|$$

Кубическая норма

$\|x\|_\infty = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|$, $\|B\|_\infty = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} |b_{ij}| \Rightarrow$

$\sum\limits_{j=1}^{n} |b_{ij}| \leqslant \mu < 1$ при любом $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, то процесс последовательных приближений сходится, причем

$$\max_j \left| x_j - x_j^{(k)} \right| \leqslant \mu \max_j \left| x_j - x_j^{(k-1)} \right| .$$

Теорема

let $\|B\| < 1 \Rightarrow \|x^{(k)} - x^*\| \leqslant \dfrac{\|B\|}{1 - \|B\|}\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|.$

$\triangleleft \quad x^* - x^{(k)} = B\left(x^* - x^{(k-1)}\right) \Rightarrow$

$$x^* - x^{(k)} = B\left(x^* - x^{(k)}\right) + B\left(x^{(k)} - x^{k-1}\right) \Rightarrow$$

$$\|x^* - x^{(k)}\| = \|B\left(x^* - x^{(k)}\right) + B\left(x^{(k)} - x^{k-1}\right)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|B\|\|x^* - x^{(k)}\| + \|B\|\|x^{(k)} - x^{k-1}\| \Leftrightarrow$$

$$\|x^* - x^{(k)}\| \leqslant \frac{\|B\|}{1 - \|B\|}\|x^{(k)} - x^{k-1}\|. \quad \triangleright$$

Критерий остановки

if требуется найти решение с точностью ε, то следует вести итерации до выполнения неравенства:

$$\frac{\|B\|}{1-\|B\|}\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\| < \varepsilon \Rightarrow$$

$\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\| < \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 = \dfrac{1-\|B\|}{\|B\|}\varepsilon$.

Для сходимости метода последовательных приближений необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы $B = E - A$ были по модулю меньше единицы $\Rightarrow$ если они не таковы, то необходимо провести подготовку СЛАУ. Подготовка подразумевает, что нужно перейти от системы $Ax = b$ к эквивалентной системе $\widetilde{A}x = \widetilde{b}$, для которой условие будет выполняться

Задача

$$\widetilde{A}x = \widetilde{b},\ \widetilde{A} = HA,\ \widetilde{b} = Hb\,.$$

Требуется найти невырожденную H: собственные числа матрицы $\widetilde{B}$ системы $x = \widetilde{B}x + \widetilde{c}$, $\widetilde{B} = E - \widetilde{A}$, $\widetilde{c} = \widetilde{b}$ меньше единицы.

$\triangleleft$ let $\mu \in \mathbb{R}$ и $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$: $\widetilde{A}v = \mu v$.
Вектор v будет собственным и для матрицы $\widetilde{B}$:
$\widetilde{B}v = (E - \widetilde{A})v = v - \mu v = (1 - \mu)v$, значит $|1 - \mu| < 1 \Leftrightarrow 0 < \mu < 2$.
let $\lambda \in \mathbb{R}$ и $u \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$: $Au = \lambda u$.

$$\|\lambda u\| = \|Au\| \leqslant \|A\|\|u\| \Rightarrow |\lambda| < \|A\| \Rightarrow$$

Значит, if $A > 0$, то достаточно выбрать $H = \dfrac{2}{\|A\|}E$, тогда собственные числа $\widetilde{A}$ будут принадлежать $(0, 2)$. $\triangleright$

Итерационные методы решения СЛАУ

Метод простой итерации или метод Якоби

Запишем СЛАУ в координатной форме:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Для $k = \overline{1, n}$ из k-го уравнения исключаем x_k:

$$\begin{cases} x_1 & = & & & b_{12}x_2 & + & \dots & + & b_{1n}x_n & + & c_1 \\ x_2 & = & b_{21}x_1 & + & & & \dots & + & a_{2n}x_n & + & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & = & b_{n1}x_1 & + & b_{n2}x_2 & + & \dots & + & & & c_n \end{cases}.$$

Итерационные методы решения СЛАУ

Метод простой итерации или метод Якоби

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & = & & & b_{12}x_2 & + & \dots & + & b_{1n}x_n & + & c_1 \\ x_2 & = & b_{21}x_1 & + & & & \dots & + & a_{2n}x_n & + & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & = & b_{n1}x_1 & + & b_{n2}x_2 & + & \dots & + & & & c_n \end{array}\right. .$$

В матричной форме $x = Bx + c$, в которой на главной диагонали матрицы B стоят нулевые элементы. Для возможности проведения данного преобразования необходимо, чтобы $a_{kk} \neq 0$ для $k = \overline{1, n}$.

Итерационные методы решения СЛАУ

Метод простой итерации или метод Якоби

Выберем начальное приближение $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}\right)^T$.
Подставляя его в $x = Bx + c$, находим первое приближение:
$x^{(1)} = Bx^{(0)} + c$.
Продолжая этот процесс далее получим последовательность приближений $x^{(0)}$, $x^{(1)}$, $\ldots$, $x^{(n)}$, $\ldots$, вычисляемых по формуле:

$$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + c, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Или в координатной форме:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = b_{12}x_2^{(k-1)} + \ldots + b_{1n}x_n^{(k-1)} + c_1 \\ x_2^{(k)} = b_{21}x_1^{(k-1)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(k-1)} + c_2 \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ x_n^{(k)} = b_{n1}x_1^{(k-1)} + b_{n2}x_2^{(k-1)} + \ldots + c_n \end{cases} .$$

Преобразование системы $Ax = b$ для метода простой итерации можно сформулировать в матричной форме.
let $H = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$:

$$\widetilde{A}x = \widetilde{b},\ \widetilde{A} = H^{-1}A,\ \widetilde{b} = H^{-1}b \Leftrightarrow x = \widetilde{B}x + \widetilde{c},\ \widetilde{B} = E - \widetilde{A},\ \widetilde{c} = \widetilde{b}.$$

Необходимое и достаточное условием сходимости: все собственные значения матрицы $B = E - H^{-1}A$ по модулю меньше единицы:

$$\begin{aligned} \det(\widetilde{B} - \lambda E) =& |E - H^{-1}A - \lambda E| = |H^{-1}| \cdot |H - A - \lambda H| = \\ =& (-1)^n |H^{-1}|\,|A - H + \lambda H| = \\ =& (-1)^n |H^{-1}| \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Рецепт

let в $Ax = b$ для матрицы A не выполнены достаточные условия сходимости метода Якоби. Зачастую, оказывается целесообразным, в качестве матрицы H взять матрицу, обратную к матрице

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Итерационные методы решения СЛАУ

Метод простой итерации или метод Якоби

$$\Rightarrow H = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{\Delta_1} & -\frac{a_{12}}{\Delta_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{21}}{\Delta_1} & \frac{a_{11}}{\Delta_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_{44}}{\Delta_2} & -\frac{a_{34}}{\Delta_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a_{43}}{\Delta_2} & \frac{a_{33}}{\Delta_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix},$$

где $\Delta_1 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ и $\Delta_2 = a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43}$.

Итерационные методы решения СЛАУ

Метод Зейделя

let СЛАУ $Ax = b$ представлена в виде $x = Bx + c$, где $B = E - A$, $c = b$.
Метод Зейделя напоминает метод Якоби с той разницей, что при вычислении k-го приближения для i-ой компоненты учитываются вычисленные уже ранее k-е компоненты $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$, ..., $x_{i-1}^{(k)}$, т. е.

$$\left\{\begin{array}{lllll}
x_1^{(n)} = & b_{12}x_2^{(n-1)} & +b_{13}x_3^{(n-1)} & +\ldots+b_{1n}x_n^{(n-1)} & +c_1 \\
x_2^{(n)} = & b_{21}x_1^{(n)} & +b_{23}x_3^{(n-1)} & +\ldots+b_{2n}x_n^{(n-1)} & +c_2 \\
x_3^{(n)} = & b_{31}x_1^{(n)} & +b_{32}x_2^{(n)} & +\ldots+b_{1n}x_n^{(n-1)} & +c_3 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x_n^{(n)} = & b_{n1}x_1^{(n)} & +b_{n2}x_2^{(n)} & +\ldots+b_{n,n-1}x_{n-1}^{(n)} & +c_n
\end{array}\right. .$$

Итерационные методы решения СЛАУ

Метод Зейделя

$$
\text{let } B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
B_2 = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 0 & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B = B_1 + B_2
$$

Расчетные формулы метода Зейделя в матричном виде:

$$
x^{(n)} = B_1 x^{(n)} + B_2 x^{(n-1)} + c\,.
$$

if x^* неподвижная точка отображения $x^* = Bx^* + c \Leftrightarrow$
$x^* = Bx^* + c = B_1 x^* + B_2 x^* + c.$

Теорема

let выполнено условие $\|B_1\| + \|B_2\| < 1 \Rightarrow \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ *метод Зейделя сходится и верна оценка погрешности*

$$\left\| x^{(n)} - x^* \right\| \leqslant q^n \left\| x^{(0)} - x^* \right\|, \tag{1}$$

где $q = \dfrac{\|B_2\|}{1 - \|B_1\|} < 1.$

Итерационные методы решения СЛАУ

Достаточное условие сходимости метода Зейделя

$$\triangleleft \quad \left.\begin{aligned} x^{(n)} &= B_1 x^{(n)} + B_2 x^{(n-1)} + c \\ x^* &= B_1 x^* + B_2 x^* + c \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$x^{(n)} - x^* = B_1(x^{(n-1)} - x^*) + B_2(x^{(n-1)} - x^*) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \|x^{(n)} - x^*\| &\leqslant \|B_1\| \|x^{(n-1)} - x^*\| + \|B_2\| \|x^{(n-1)} - x^*\| \Rightarrow \\ \|x^{(n)} - x^*\| &\leqslant \frac{\|B_2\|}{1 - \|B_1\|} \|x^{(n-1)} - x^*\| \leqslant \\ &\leqslant \left\{ q = \frac{\|B_2\|}{1 - \|B_1\|} \right\} \leqslant \ldots \leqslant \\ &\leqslant q^n \|x^{(0)} - x^*\| \end{aligned}$$

и, т. к. $\|B_1\| + \|B_2\| < 1$, то $0 < q < 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x^*$. $\triangleright$

Теорема

$\|B\| < 1 \Rightarrow$ *для* $n \geqslant 1$ *верна оценка погрешности*

$$\left\|x^{(n)} - x^*\right\| \leqslant \frac{||B_2||}{1 - ||B||} \left\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right\|.$$

$$\triangleleft \qquad \left.\begin{array}{l} x^{(n)} = B_1 x^{(n)} + B_2 x^{(n-1)} + c \\ x^* = B_1 x^* + B_2 x^* + c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x^{(n)} - x^* =& B_1 \left(x^{(n)} - x^*\right) + B_2 \left(x^{(n-1)} - x^*\right) + \\ &+ B_2 \left(x^{(n)} - x^*\right) - B_2 \left(x^{(n)} - x^*\right) = \\ =& B \left(x^{(n)} - x^*\right) + B_2 \left(x^{(n-1)} - x^{(n)}\right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left\|x^{(n)} - x^*\right\| \leqslant ||B|| \cdot \left\|x^{(n)} - x^*\right\| + \|B_2\| \cdot \left\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right\| \Rightarrow$$

получим оценку $\left\|x^{(n)} - x^*\right\| \leqslant \dfrac{\|B_2\|}{1 - \|B\|} \left\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right\|.$ $\triangleright$

Критерий остановки

if требуется найти решение с точностью $\varepsilon > 0$, то итерационный процесс следует вести до выполнения неравенства:

$$\frac{\|B_2\|}{1 - \|B\|} \left\| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right\| < \varepsilon \Leftrightarrow \left\| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right\| < \varepsilon_1 \,,$$

где $\varepsilon_1 = \dfrac{1 - \|B\|}{\|B_2\|} \varepsilon$.

Итерационные методы решения СЛАУ

Геометрическая интерпретация метода Зейделя

Рассмотрим СЛАУ из 2-х уравнений с 2-мя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2. \end{cases}$$

Уравнения задают на плоскости Ox_1x_2 прямые.
let 1-е уравнение задает прямую l_1, а второе — $l_2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} & = & b_{12}x_2^{(k)} & + & c_1 \\ x_2^{(k+1)} & = & b_{21}x_1^{(k+1)} & + & c_2 \end{cases}$$

Итерационные методы решения СЛАУ

Геометрическая интерпретация метода Зейделя

let 1-е уравнение задает прямую l_1, а второе — $l_2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = b_{12}x_2^{(k)} + c_1 \\ x_2^{(k+1)} = b_{21}x_1^{(k+1)} + c_2 \end{cases}$$

Рисунок