Лекция 5. Прямые методы решения СЛАУ

Панкратов Владимир Александрович

Московский Государственный Технический Университет имени Н.Э.Баумана

Москва, 2022

Прямые методы решения СЛАУ

Ключевые слова

Основные вычислительные задачи линейной алгебры. Прямые методы. Метод Жордана-Гаусса. Прямой ход метода Гаусса. Обратный ход метода Гаусса. Вычислительная сложность метода Гаусса. LU-разложение. Метод Гаусса с выбором ведущего элемента.

Прямые методы решения СЛАУ

Основные вычислительные задачи линейной алгебры

- Решение систем линейных алгебраических уравнений;
- Вычисление определителей;
- Обращение матриц;
- Нахождение собственных значений и собственных векторов.

$$Ax = b$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $x_i \in \mathbb{R}$ $(i, j = \overline{1, n})$.
Даны: A, b.
Требуется найти x.

$$Ax = b$$

Прямые методы

Решение x находится за конечное число арифметических операций. Вследствии погрешностей округления при решении задач на ЭВМ, прямые методы не приводят к точному решению. Показателем качества прямых методов выступает их вычислительная сложность.

$$Ax = b$$

Итерационные методы (методы последовательных приближений)

Для нахождения решения x строится последовательность $x^{(n)}$: $x = \lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)}$, которую называют последовательными приближениями. Как правило, за конечное число итераций этот предел не достигается, поэтому вычисления производятся до тех пор, пока не будет выполнена оценка: $\left|\left|x^{(n)} - x\right|\right| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — точность.

Качество различных итерационных процессов оценивается по числу итераций $n(\varepsilon)$, которые необходимо провести для получения заданной точности.

Метод Жордана-Гаусса

Состоит из двух этапов: *прямого хода* и *обратного хода*. Прямой ход заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений СЛАУ до получения СЛАУ треугольного вида. Во время обратного решают полученную СЛАУ треугольного вида.

Прямые методы решения СЛАУ

Прямой ход метода Гаусса

Запишем $Ax = b$ в координатной форме:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

let $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \neq 0 \Rightarrow \det A \neq 0$

1-й шаг. Будем называть a_{11} *ведущим элементом* 1-го шага и для каждого $i = \overline{2, n}$ вычтем из i-го уравнения первое уравнение, умноженное на $\tau_{1i} = \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$, получим:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ & & a_{22}^{(2)}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)} \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & a_{n2}^{(2)}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}^{(2)}x_n & = & b_n^{(2)} \end{array}\right.$$

После **1-го шага** структура матрицы СЛАУ будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \dots & \times \\ 0 & \times & \dots & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \times & \dots & \times \end{pmatrix}$$

2-й шаг. Рассмотрим систему

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{22}^{(2)}x_2 & + & a_{23}^{(2)}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)} \\ a_{32}^{(2)}x_2 & + & a_{33}^{(2)}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}^{(2)}x_n & = & b_3^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2}^{(2)}x_2 & + & a_{n3}^{(2)}x_3 & + & \cdots & + & a_{nn}^{(3)}x_n & = & b_n^{(2)} \end{array} \right.$$

Если порядок системы больше 1, то переходим к **1-му шагу**, в противном случае завершаем вычисления.

В результате вычислительного процесса приходим к окончательной СЛАУ вида:

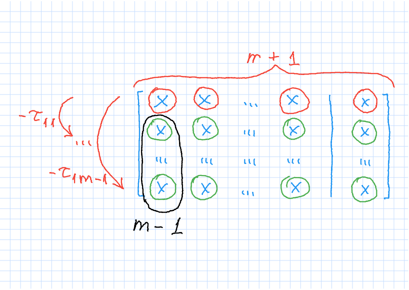
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n-1}x_n + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{22}^{(2)}x_2 + & \cdots & +a_{2n-1}^{(2)}x_{n-1} + a_{2n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)} \\ & \cdots \quad \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & a_{n-1n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n-1n}^{(n-1)}x_n & = & b_n^{(n-1)} \\ & & a_{nn}^{(n)}x_n & = & b_n^{(n)} \end{cases}$$

Обратный ход метода Гаусса заключается в нахождении неизвестных:

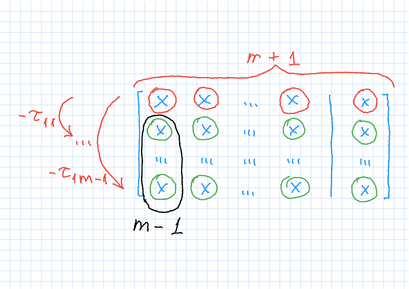
$$x_i = \frac{b_i^{(i)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j}{a_{ii}^{(i)}} \quad (i = \overline{n, 1}) \, .$$

Прямые методы решения СЛАУ

Вычислительная сложность



Вычислительная сложность **1-го шага**:
$O((m-1)(m+1)) = O(m^2)$.
1-й шаг выполняется при $m = \overline{n,2} \Rightarrow$ общее число операций затрачиваемое на прямой ход: $\sum\limits_{m=n}^{2} O(m^2) = O(n^3)$.



Вычислительная сложность **1-го шага**:
$O((m-1)(m+1)) = O(m^2)$.
1-й шаг выполняется при $m = \overline{n, 2} \Rightarrow$ общее число операций затрачиваемое на прямой ход: $\sum\limits_{m=n}^{2} O(m^2) = O(n^3)$.

Прямые методы решения СЛАУ

Вычислительная сложность обратного хода

$$x_i = \frac{b_i^{(i)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j}{a_{ii}^{(i)}} \quad (i = \overline{n,1})\,.$$

Общее число операций затрачиваемое на обратный ход: $O(n^2)$
$\Rightarrow$ на выполнение метода Гаусса требуется $O(n^3)$ операций.

Пример

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x_1 + 5x_2 & = & 9 \\ 6x_1 + 7x_2 & = & 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} 3x_1 + 5x_2 & = & 9 \\ -3x_2 & = & -14 \end{array}\right.$$

Исключение Гаусса можно описать на языке матричных разложений. Данный пример демонстрирует, что алгоритм вычисляет нижнюю унитреугольную матрицу L и верхнюю треугольную матрицу U так, что $A = LU$, т. е.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Теперь решение $Ax = b$ находится посредством последовательного решения двух треугольных систем:

$$Ax = (LU)x = Ly = b \Leftrightarrow Ly = b\,,\; Ux = y\,.$$

LU-разложение квадратной матрицы A

Представление матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ в виде произведения

$$A = LU\,,$$

где L — нижнетреугольная матрица, U — верхнетреугольная матрица.

Теорема об LU-разложении

let $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, ..., $\Delta_n = \det A$.

Если $\Delta_i \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow$

- $\exists L$ — нижняя треугольная матрица с ненулевыми диагональными элементами;
- $\exists U$ — верхняя треугольная матрица с единичной диагональю,

такие что $A = L \cdot U$, причем данное представление единственно

◁ Доказательство **существования** LU-разложения матрицы A проведем методом математической индукции.

База индукции. let $n = 2$: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Будем искать разложение матрицы A в виде:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & u_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где l_{11}, l_{21}, l_{22}, u_{12} — неизвестные числа. Для их нахождения приходим к системе уравнений:

$$l_{11} = a_{11}\,, \quad l_{11}u_{12} = a_{12}\,, \quad l_{21} = a_{21}\,, \quad l_{21}u_{12} + l_{22} = a_{22}\,.$$

Данная система имеет единственное решение:

$$l_{11} = a_{11} \neq 0\,, \quad u_{12} = a_{12}/a_{11}\,, \quad l_{21} = a_{21}\,,$$
$$l_{22} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11}} \neq 0\,.$$

Шаг индукции. let утверждение верно для $n = k - 1$, докажем, что оно справедливо для матриц порядка k. Представим матрицу A порядка k в виде

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \dots & & a_{1,k-1} & a_{1k} \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ a_{k-1,1} & \dots & & a_{k-1,k-1} & a_{k-1,k} \\ \hline a_{k1} & \dots & & a_{k,k-1} & a_{kk} \end{array}\right)$$

и введем обозначение

$$A_{k-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,k-1} \end{pmatrix}, \quad a_{k-1} = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \dots \\ a_{k-1,k} \end{pmatrix},$$

$$b_{k-1} = (a_{k1}, \dots, a_{k,k-1})$$

Согласно предположению индукции существует разложение матрицы $A_{k-1} = L_{k-1} \cdot U_{k-1}$.
Будем искать разложение в виде

$$A = \begin{bmatrix} A_{k-1} & a_{k-1} \\ l_{k-1} & l_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{k-1} & 0 \\ l_{k-1} & l_{kk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{k-1} & u_{k-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $l_{k-1} = (l_{k1}, l_{k2}, \ldots, l_{k,k-1})$ и $u_{k-1} = (u_{1k}, u_{2k}, \ldots, u_{k-1,k})^T$ — неизвестные векторы. Тогда

$$L_{k-1} u_{k-1} = a_{k-1}\,, \quad l_{k-1} U_{k-1} = b_{k-1}\,, \quad l_{k-1} u_{k-1} + l_{kk} = a_{kk}\,.$$

Из формулировки теоремы L_{k-1} и U_{k-1} невырождены $\Rightarrow$

$$u_{k-1} = L_{k-1}^{-1} a_{k-1}\,, \quad l_{k-1} = b_{k-1} U_{k-1}^{-1}\,, \quad l_{kk} = a_{kk} - l_{k-1} u_{k-1}\,.$$

Прямые методы решения СЛАУ

LU-разложение

Докажем, что $l_{kk} \neq 0$. Запишем

$$\det A = \det\left(\begin{bmatrix} L_{k-1} & 0 \\ l_{k-1} & l_{kk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{k-1} & u_{k-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= l_{11} \cdot \ldots \cdot l_{kk}\,.$$

По условию теоремы $\det A \neq 0 \Rightarrow l_{kk} \neq 0$.
Т. о., $\exists LU$-разложение матрицы A произвольного порядка.

Теперь покажем **единственность** такого разложения.
Предположим противное, let $A = L_1 U_1 = L_2 U_2 \Rightarrow$
$U_1 U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2$.
Матрица в левой части указанного равенства является верхней треугольной, а в правой — нижней треугольной. Такое равенство возможно только если обе матрицы $U_1 U_2^{-1}$ и $L_1^{-1} L_2$ являются диагональными.
Но на диагонали матрицы $U_1 U_2^{-1}$ стоят единицы $\Rightarrow$ и на диагонали $L_1^{-1} L_2$ также стоят единицы. Т. о. эти матрицы являются единичными: $U_1 U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2 = E \Rightarrow U_1 = U_2$ и $L_1 = L_2$, т. е. разложение единственно. $\triangleright$

Задача обращения матрицы A, эквивалентна решению матричного уравнения

$$AX = E\,,$$

где E — единичная матрица и, очевидно, решение $X = A^{-1}$ — искомая обратная матрица.

$$AX = E \Leftrightarrow Ax^{(j)} = \delta^{(j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n\,,$$

n независимых систем уравнений, с одной и той же матрицей A, но с различными правыми частями, где

- $x^{(j)} = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{mj})^T$,
- $\delta^{(j)} = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \ldots 0)^T$.

Пример

Для матрицы 2×2 *система* $AX = E \Leftrightarrow$ *двум независимым системам:*

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = 1, \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = 0, \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = 1. \end{cases}$$

Системы имеют одинаковую матрицу $A \Rightarrow$ *достаточно один раз совершить прямой ход методом Гаусса и запомнить матрицы* L *и* U.

Прямые методы решения СЛАУ

Обращение матриц

$$Ax^{(j)} = \delta^{(j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Вычислительная сложность получения разложения $A = LU$: $O(n^3)$.
Обратный ход будет осуществляться путем решения систем уравнений:

$$\begin{aligned} Ly^{(j)} &= \delta^{(j)}, \quad y^{(j)} = (y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{mj})^T \ , \\ Ux^{(j)} &= y^{(j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, m \, . \end{aligned}$$

Для каждого $j = \overline{1, n}$ вычислительная сложность обратного хода: $O(n^2) \Rightarrow$ всего на обратный ход требуется $O(n^3) \Rightarrow$ вычислительная сложность обращения матрицы $O(n^3)$.

Используя специфический вид правых частей системы $AX = E$, число операций можно сократить. Запишем первые $j-1$ уравнений системы $Ly^{(j)} = \delta^{(j)}$:

$$
\begin{array}{lcllll}
l_{11}y_{1j} & = & 0, & & & \\
l_{21}y_{1j} & + & l_{22}y_{2j} & = & 0, & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
l_{j-1,1}y_{1j} & + & l_{j-1,2}y_{2j} & + & \dots & +l_{j-1,j-1}y_{j-1,j} = 0.
\end{array}
$$

Так как матрица L — невырожденная, то получаем

$$y_{1j} = y_{2j} = \ldots = y_{j-1,j} = 0\,.$$

Оставшиеся уравнения системы имеют вид:

$$
\begin{aligned}
l_{jj}y_{jj} =& 1, \\
l_{ij}y_{jj} +& l_{i,j+1}y_{j+1,j} + \ldots + l_{ii}y_{ij} = 0, \quad i = j+1, j+2, \ldots, m\,.
\end{aligned}
$$

Отсюда последовательно находим неизвестные y_{ij}:

$$
\begin{aligned}
y_{ij} =& -\frac{\sum\limits_{k=j}^{i-1} l_{ik}y_{kj}}{l_{ii}}, \quad i = j+1, j+2, \ldots, n\,, \\
y_{jj} =& \frac{1}{l_{jj}}\,.
\end{aligned}
$$

Прямые методы решения СЛАУ

Обращение матриц

$$
y_{ij} = -\frac{\sum\limits_{k=j}^{i-1} l_{ik} y_{kj}}{l_{ii}}, \quad i = j+1, j+2, \ldots, n\,,
$$

$$
y_{jj} = \frac{1}{l_{jj}}\,.
$$

Для каждого $i = \overline{j+1, n}$ для вычисления y_{ij} требуется $O(i-j)$ операций. Вычисления по формулам y_{ij} при фиксированном j потребуют $\sum\limits_{i=j+1}^{n} O(i-j) = O(n^2)$.

Решение системы при всех $j = 1, 2, \ldots, n$ потребует $\sum\limits_{j=1}^{n} O(n^2) = O(n^3)$ операций.

Итого, вычислительная сложность остается $O(n^3)$.

Исключение Гаусса требует невырожденности первых $n-1$ главных миноров. Это условие может быть нарушено для довольно простых матриц, например

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Несмотря на то что матрица A прекрасно обусловленна, для нее нельзя выполнить LU-разложение, поскольку ее главная подматрица вырождена. Поэтому чтобы эффективно использовать исключение Гаусса для решения линейных систем общего вида, необходимо применять модификации метода.

Отличие от классического метода Гаусса

На очередном шаге исключают не следующее по номеру неизвестное, а неизвестное, коэффициент при котором по модулю наибольший. Т. е. в качестве ведущего элемента выбирается наибольший по модулю элемент.

Проиллюстрируем на примере СЛАУ из 2-х уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & b_2 \end{cases}$$

Метод Гаусса с выбором ведущего элемента по строке

let $|a_{12}| > |a_{11}| \Rightarrow$ тогда на первом шаге исключается переменное x_2

$$\begin{cases} a_{12}x_2 + a_{11}x_1 & = & b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{21}x_1 & = & b_2 \end{cases}$$

и к данной системе применяется первый шаг обычного метода Гаусса.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & b_2 \end{cases}$$

Метод Гаусса с выбором ведущего элемента по столбцу

let $|a_{21}| > |a_{11}| \Rightarrow$

$$\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & b_2 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 \end{cases}$$

и к новой системе применяют первый шаг обычного метода Гаусса.

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & b_2
\end{cases}
$$

Замечание

В ряде случаев применяют метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице, когда в качестве ведущего элемента выбирают наибольший по модулю элемент матрицы системы.

Метод прогонки используется для решения СЛАУ $Ax = f$, где матрица A порядка n является трехдиагональной, т. е. матрица все элементы которой, кроме элементов лежащих на главной диагонали и 2-х побочных, равны нулю ($a_{ij} = 0$ при $j > i + 1$ и $j < i - 1$).

$$\left\{\begin{array}{ccccl} c_1 x_1 & + & b_1 x_2 & = & f_1, \\ a_i x_{i-1} & + & c_i x_i & + & b_i x_{i+1} = f_i, \quad i = 2, \ldots, (n-1), \\ a_n x_{n-1} & + & c_n x_n & = & f_n. \end{array}\right.$$

Прямые методы решения СЛАУ

Метод прогонки

$$\begin{cases} c_1 x_1 & + & b_1 x_2 & = & f_1, \\ a_i x_{i-1} & + & c_i x_i & + & b_i x_{i+1} = f_i, \quad i = 2, \ldots, (n-1), \\ a_n x_{n-1} & + & c_n x_n & = & f_n. \end{cases}$$

Будем искать решение i-го уравнения в виде

$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i, \quad i = 1, \ldots, (n-1)\,,$$

где α_i и β_i - неизвестные коэффициенты.
Тогда выражение для x_{i-1} имеет вид:

$$\begin{aligned} x_{i-1} =& \alpha_{i-1} x_i + \beta_{i-1} = \alpha_{i-1} \left(\alpha_i x_{i+1} + \beta_i \right) + \beta_{i-1} = \\ =& \alpha_{i-1} \alpha_i x_{i+1} + \left(\alpha_{i-1} \beta_i + \beta_{i-1} \right)\,. \end{aligned}$$

Подставим выражения x_i и x_{i-1} в $a_i x_{i-1} + c_i x_i + b_i x_{i+1} = f_i$:

$$x_{i+1} \left[\alpha_i \left(a_i \alpha_{i-1} + c_i \right) + b_i \right] + \left[\beta_i \left(a_i \alpha_{i-1} + c_i \right) + a_i \beta_{i-1} - f_i \right] = 0\,.$$

Прямые методы решения СЛАУ

Метод прогонки

Для обеспечения

$$x_{i+1}\left[\alpha_i\left(a_i\alpha_{i-1}+c_i\right)+b_i\right]+\left[\beta_i\left(a_i\alpha_{i-1}+c_i\right)+a_i\beta_{i-1}-f_i\right]=0\,.$$

положим

$$\left.\begin{array}{rcl}\alpha_i\left(a_i\alpha_{i-1}+c_i\right)+b_i & = & 0\\ \beta_i\left(a_i\alpha_{i-1}+c_i\right)+a_i\beta_{i-1}-f_i & = & 0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{lcl}\alpha_i & = & -\dfrac{b_i}{a_i\alpha_{i-1}+c_i}, \quad i=2,\ldots,(n-1),\\ \beta_i & = & \dfrac{f_i-a_i\beta_{i-1}}{a_i\alpha_{i-1}+c_i}, \quad i=2,\ldots,(n-1).\end{array}\right.$$

Для вычислений, с использованием полученных выражений, необходимо получить начальные значения α_1 и β_1 из 1-го уравнения системы.

Прямые методы решения СЛАУ

Метод прогонки

$$\begin{cases} c_1 x_1 & + & b_1 x_2 & = & f_1, \\ a_i x_{i-1} & + & c_i x_i & + & b_i x_{i+1} = f_i, \quad i = 2, \ldots, (n-1), \\ a_n x_{n-1} & + & c_n x_n & = & f_n. \end{cases}$$

$\Rightarrow x_1 = \alpha_1 x_2 + \beta_1$, где $\alpha_1 = -b_1/c_1$, $\beta_1 = f_1/c_1$.

Нахождение коэффициентов α_i и β_i подобным образом называется *прямой прогонкой*.

После нахождения α_i и β_i, решения системы находятся по рекуррентной формуле $x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i$, $i = 1, \ldots, (n-1)$.

Прямые методы решения СЛАУ

Метод прогонки

Начальное значение x_n определяется из уравнений

$$a_n x_{n-1} + c_n x_n = f_n, \quad x_{n-1} = \alpha_{n-1} x_n + \beta_{n-1} .$$

Подставляя выражение для x_{n-1} в выражение для x_n получаем
$x_n = \dfrac{f_n - a_n \beta_{n-1}}{c_n + a_n \alpha_{n-1}} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{f_n - a_n \beta_{n-1}}{c_n + a_n \alpha_{n-1}} \, , \\ x_i &= \alpha_i x_{i+1} + \beta_i, \quad i = (n-1), (n-2), \ldots, 1 \, . \end{aligned}$$

Прямой ход

$$\begin{cases} \alpha_i = -\dfrac{b_i}{a_i\alpha_{i-1} + c_i}, & i = 2, \dots, (n-1), \\ \beta_i = \dfrac{f_i - a_i\beta_{i-1}}{a_i\alpha_{i-1} + c_i}, & i = 2, \dots, (n-1). \end{cases}$$

Начальные условия: $\alpha_1 = -b_1/c_1$, $\beta_1 = f_1/c_1$.

Обратный ход

$$x_n = \frac{f_n - a_n\beta_{n-1}}{c_n + a_n\alpha_{n-1}},$$

$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i, \quad i = (n-1), (n-2), \dots, 1\,.$$

Достаточные условия существования и единственности решения

let коэффициенты системы удовлетворяют условиям диагонального преобладания:

$$|c_k| \geqslant |a_k| + |b_k|, \quad |c_k| > |a_k|, \quad k = \overline{1, n}.$$

$\Rightarrow \gamma_i = a_i \alpha_{i-1} + c_i \neq 0$ и $|\alpha_i| \leqslant 1$ для всех $i = \overline{1, n}$.

Замечание

Этих условий достаточно для того, чтобы знаменатели, выражений $\alpha_i = -\dfrac{b_i}{a_i \alpha_{i-1} + c_i}$, $\beta_i = \dfrac{f_i - a_i \beta_{i-1}}{a_i \alpha_{i-1} + c_i}$ *и* $x_n = \dfrac{f_n - a_n \beta_{n-1}}{c_n + a_n \alpha_{n-1}}$ *не обращались в* 0.

$\triangleleft$ Проведем доказательство методом математической индукции. По условию теоремы имеем $\gamma_1 = c_1$ и $|\alpha_1| = \dfrac{|b_1|}{|c_1|} \leqslant 1$. Пусть $\gamma_{k-1} \neq 0$ и $|\alpha_{k-1}| \leqslant 1$ для некоторого $k > 1$. Тогда

$$|\gamma_k| = |a_k \alpha_{k-1} + c_k| \geqslant |c_k| - |a_k||\alpha_{k-1}| \geqslant |c_k| - |a_k|.$$

Из полученной оценки вытекает, что $|\gamma_k| > 0$ и одновременно $|\gamma_k| \geqslant |b_k|$. Следовательно $|\gamma_k| \neq 0$ и $|\alpha_k| = |b_k|/|\gamma_k| \leqslant 1$. $\triangleright$