

# 第一部分

## 基础平面几何

(近代 Εὐκλείδης 几何与圆锥曲线基础)

All Rights Reserved.

# 第零章 预备知识

在本章中,我们先对初等平面几何中的基本知识进行复习,其中大部分的内容很可能是被读者所熟知的.

对于在中学课本中已经明确讲授过的知识,本章将不再重复介绍,本章主要是对中学课本中未出现但颇为重要或今后将要用到的基础平面几何知识作一个介绍,以为之后进一步的研究做好铺垫.

此外,笔者也将后面需要用到、但与之后的内容的关联又不大的结论放在本章节中,读者可以先暂时跳过它们,等之后用到时再回过头来查看,也可将其作为初等平面几何知识的应用来学习.

## 0.1 平面几何中的有向语言

本节将引入有向线段、有向角与有向面积的概念,它们有助于消除一些几何问题中的歧义.

### 0.1.1 有向角

在这些“有向”的概念中,最重要的莫过于有向角.因此,本节我们先来看有向角的概念.

**Definition 0.1.1.** 对于直线  $l_1, l_2$ , 两者之间的有向角 (directed angle) 为  $l_1$  沿逆时针方向绕任一定点转至与  $l_2$  平行或重合所需的最小角度, 记为  $\angle(l_1, l_2)$ , 其取值范围为  $[0^\circ, 180^\circ)$ ; 有向角  $\angle AOB$  定义为  $\angle(OA, OB)$ .

**Remark.** 用符号“ $\angle$ ”表示有向角, 以区别于一般的角度符号“ $\angle$ ”. 注意有向角是在  $\text{mod } 180^\circ$  意义下的<sup>(1)</sup>, 例如  $\angle(l_1, l_2) = 60^\circ$  与  $\angle(l_1, l_2) = -120^\circ$  以及  $\angle(l_1, l_2) = 240^\circ$  是一回事. 这样, 若  $\angle(l_1, l_2) = 80^\circ$ ,  $\angle(l_2, l_3) = 60^\circ$ , 我们也可以说  $\angle(l_2, l_3) = 3\angle(l_1, l_2)$ .

但是, 当差  $180^\circ$  会导致计算结果的多值性时, 除非有特别说明, 我们规定取有向角在  $[0^\circ, 180^\circ)$  的区间内的数值进行计算.

例如在计算两直线间有向角的正弦或余弦时, 以及有向角除以一整数时. 比如, 若  $\angle(l_1, l_2) = -120^\circ$ , 则  $\sin \angle(l_1, l_2) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 而不能用  $\sin \angle(l_1, l_2) = \sin(-120^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  计算;  $\frac{\angle(l_1, l_2)}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ , 而不能用  $\frac{\angle(l_1, l_2)}{2} = \frac{-120^\circ}{2} = -60^\circ (= 120^\circ)$  来计算.

**Proposition 0.1.2.**  $\forall l_1, l_2, \angle(l_1, l_2) + \angle(l_2, l_3) = \angle(l_1, l_3)$ .

*proof.* 显然. □

利用有向角的语言, 我们可以有如下的旋转变换定义:

(1) 即加上或减去若干个  $180^\circ$  后数值相同的角算作相等的角, 因为直线绕其上一点转  $180^\circ$  后与原来重合.

**Definition 0.1.3.** 平面上, 一个以  $O$  为中心、[任意实数] $\alpha$  为旋转角的旋转变换 (rotation), 将平面上任意一点  $A$  通过绕点  $O$  按取定的正方向 (默认为逆时针方向) 旋转  $\alpha$  角<sup>(2)</sup>变为另一点  $A'$ , 即满足  $\angle AOA' = \alpha$ . 下记关于点  $O$  按正方向旋转  $\alpha$  角的旋转变换为  $r_{O,\alpha}$ .

对于图形  $\mathcal{A}$ , 作出其中所有点在这一旋转变换下的点, 它们组成的图形  $\mathcal{A}'$  称为  $\mathcal{A}$  在这一旋转变换下的像.

易知旋转变换具有如下性质:

**Proposition 0.1.4.** 旋转变换下图形  $\mathcal{A}$  与其像  $\mathcal{A}'$  是全等的.

**Proposition 0.1.5.** 设旋转变换  $r_{O,\alpha}$  将直线  $l$  变为直线  $l'$ , 则  $\angle(l, l') = \alpha$ .

另外, 我们还可以定义相似变换:

**Definition 0.1.6.** 定义:

- (1) 在平面中, 一个顺相似变换, 将平面中的一点变为另一点, 且同时满足:
  - i. 对于任意三组相似变换下的对应点  $(A, A'), (B, B')$  与  $(C, C')$ ,  $\angle ABC = \angle A'B'C'$ ;
  - ii. 对于任意四组相似变换下的对应点  $(A, A'), (B, B'), (C, C')$  与  $(D, D')$ <sup>(3)</sup>, 有  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$ .
- (2) 在平面中, 一个逆相似变换, 将平面中的一点变为另一点, 且同时满足:
  - i. 对于任意三组相似变换下的对应点  $(A, A'), (B, B')$  与  $(C, C')$ ,  $\angle ABC = -\angle A'B'C'$ ;
  - ii. 对于任意四组相似变换下的对应点  $(A, A'), (B, B'), (C, C')$  与  $(D, D')$ , 有  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$ .
- (3) 顺相似变换与逆相似变换统称相似变换. 对于图形  $\mathcal{A}$ , 作出其中所有点在一 (顺或逆) 相似变换下的点, 它们组成的图形  $\mathcal{A}'$  称为  $\mathcal{A}$  在这一 (顺或逆) 相似变换下的像.
- (4) 对于图形  $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ , 如果存在相似变换, 使得  $\mathcal{A}$  在相似变换下的像为  $\mathcal{A}'$ , 则称图形  $\mathcal{A}$  与  $\mathcal{A}'$  相似 (similar), 或图形  $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$  是一对相似图形, 记为  $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$ . 特别地, 若这一相似变换为顺相似, 则称图形  $\mathcal{A}$  与  $\mathcal{A}'$  顺相似 (directly similar), 记为  $\mathcal{A} \pm \mathcal{A}'$ ; 若这一相似变换为逆相似, 则称图形  $\mathcal{A}$  与  $\mathcal{A}'$  逆相似 (inversely similar), 记为  $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$ .
- (5) 给定  $\triangle ABC$ , 称一直线  $l$  与  $BC$  [相对于  $\triangle ABC$ ] 逆平行 (antiparallel), 如果直线  $l, AB, AC$  围成的三角形与  $\triangle ABC$  逆相似.

**Remark.** 中学阶段, 我们是如下定义两个多边形间的相似的: 若两个多边形的对应角相等、对应边之长成比例, 则称这两个多边形相似. 容易知道, 通过平面上的相似变换来定义的相似图形与上述的定义是相容的. 我们最常用的相似图形是相似三角形.

同理, 对于顺相似与逆相似的多边形, 容易知道我们可以如下简化地定义: 若两个多边形的对应角的有向大小相等、对应边之长成比例, 则称这两个多边形顺相似; 若两个多边形的对应角的有向大小互为相反数、对应边之长成比例, 则称这两个多边形逆相似.

对于相似的三角形, 容易知道有如下结论:

**Proposition 0.1.7.** 对于  $\triangle ABC$  与  $\triangle A'B'C'$ , 它们顺相似的充要条件是  $\angle CAB = \angle C'A'B', \angle ABC = \angle A'B'C'$  且  $\angle BCA = \angle B'C'A'$ ; 它们逆相似的充要条件是  $\angle CAB = -\angle C'A'B', \angle ABC = -\angle A'B'C'$  且  $\angle BCA = -\angle B'C'A'$ , 记为  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .<sup>(4)</sup>

利用有向角, 可以减少对图形的依赖. 例如, 在下面的(0.3.7)中, 无需考虑点  $C, D$  是否在弦  $AB$  的同侧:

(2) 当  $\alpha < 0$  时即绕  $O$  沿正方向的反方向转  $-\alpha$  角.

(3) 点  $(A, A')$  与  $(C, C')$  可以是同一点, 点  $(B, B')$  与  $(D, D')$  可以是同一点. (2)ii 中同理.

(4) 当我们说  $\triangle ABC$  与  $\triangle A'B'C'$  相似时, 我们默认点  $A, A'$ , 点  $B, B'$ , 点  $C, C'$  为相似的对对应点. 对多边形的情形同理.

**Theorem 0.1.8.** 四点  $A, B, C, D$  共圆, 当且仅当  $\angle ACB = \angle ADB$ .

*proof.* 若点  $A, B, C, D$  在同一圆上, 则由初中的几何知识可知, 无论点  $D$  在  $\widehat{ACB}$  上还是在另一段弧上,  $\angle ACB = \angle ADB$  均成立.

反之, 若  $A, B, C, D$  满足  $\angle ACB = \angle ADB$ , 作  $\odot ABC$  与  $AD$  交于点  $A, D'$ , 则  $\angle ACB = \angle ADB$ , 即  $\angle ADB = \angle AD'B$ . 但对于某一给定的直线  $AD$  与点  $B$ , 直线  $AD$  上的满足  $\angle AD'B$  等于某一给定的角的点  $D'$  是唯一的 [为什么?], 则  $D = D'$ , 即证.  $\square$

**Remark.** 像上面的证明的后半部分中, 当要证明的命题的条件不好处理时, 我们给出另一种构造 (取出点  $D'$ ), 然后证明它与原命题所说的是一样的 (证明  $D = D'$ ). 这样的方法叫做同一法. 以后我们也会多次使用这一方法.

## 练习

**Problem 0.1.** 证明:  $\angle(l_1, l_2) + \angle(l_3, l_4) = \angle(l_1, l_4) + \angle(l_3, l_2)$ .

**Problem 0.2.** 证明(0.1.4)(0.1.5)(0.1.7).

**Problem 0.3.** 证明: 在平面上, 先作一顺相似变换, 在作一关于某直线的轴对称变换, 其效果等价于作一逆相似变换.

**Problem 0.4.** 证明: 一对相似三角形唯一确定一个相似变换, 即, 给定  $\triangle ABC$  以及与之相似的  $\triangle A'B'C'$ , 则存在唯一的相似变换, 将  $\triangle ABC$  变为  $\triangle A'B'C'$ .

**Problem 0.5.** 证明: 任意两圆间存在无数个相似变换.

## 0.1.2 有向线段与有向面积

我们先介绍有向线段.

**Definition 0.1.9.** 规定了方向的线段叫有向线段 (directed [line] segment), 把以  $A$  为起点,  $B$  为终点的有向线段记为  $\overrightarrow{AB}$ . 规定了长度的正方向之后, 有向线段的长度有正负之分, 给点两点  $A, B$ , 若规定了从  $A$  指向  $B$  为正方向, 则  $\overrightarrow{AB} > 0, \overrightarrow{BA} < 0$ .

**Remark.** 用上加的横线表示有向线段, 以区别于一般的线段. 一般地, 我们对有向线段的长度正方向约定如下:

1. 对于共线或平行的几条线段, 除非有需要, 我们不指明有向线段的长度的正方向, 因为有向线段常以乘积或比值出现作为结果, 此时无论正方向为何都不影响结果. 例如, 若  $A, B, C$  依次排列在一条直线上, 则无论以  $A$  到  $B$  还是  $B$  到  $A$  为正方形,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$  与  $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}}$  均为正,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$  与  $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CB}}$  均为负.

2. 若指定了参考三角形, 点  $P$  在某一边上的射影为  $Q$ , 则当  $P$  在该边外侧时  $\overrightarrow{PQ} < 0 (\overrightarrow{QP} > 0)$ , 当  $P$  在该边内侧时  $\overrightarrow{PQ} > 0 (\overrightarrow{QP} < 0)$ . 所谓外侧是指该边所在直线的两侧中靠近三角形内部的一侧. 此规则对参照图形为多边形的情形也适用.

**Proposition 0.1.10.** 若点  $A, B, C$  共线, 则  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

*proof.* 显然.  $\square$

下面我们介绍有向面积.

**Definition 0.1.11.** 规定了方向的面积叫有向面积 (directed area), 用中括号表示某一图形的有向面积, 如  $\triangle ABC$  的有向面积记为  $[\triangle ABC]$ . 若固定点  $A, B$ , 则当一点  $C$  由直线  $AB$  的一侧跨越到另一侧时其有向面积变号.

**Remark.** 有向面积多用于三角形. 一般地, 我们对三角形有向面积的正方向约定如下:

1. 与有向线段类似, 对于共底边的三角形, 除非有需要, 我们不指明有向面积的长度的正方向. 若固定点  $A, B$ , 则当一点  $C$  由直线  $AB$  的一侧跨越到另一侧时其有向面积变号.

2. 对于共高的三角形, 除非有需要, 我们也不指明有向面积的长度的正方向, 其有向面积的正方向与所共高线对应的底边的有向线段的正方向相同. 例如, 设直线  $l$  上有四点  $A, B, C, D$ , 直线  $l$  外有一点  $P$ , 则  $[\triangle ABP]:[\triangle CDP] = \overline{AB}:\overline{CD}$ .

3. 与有向线段类似, 若指定了参考三角形, 一点  $P$  与三角形某底边组成的三角形的有向面积, 当  $P$  在该边外侧时为负, 当  $P$  在该边内侧时为正. 此规则对参照图形为多边形的情形也适用.

利用有向线段、有向角与有向面积的语言, 可以减少对图形的依赖. 除了上一小节中的例子之外, 我们可以给出一个的优美的结论——奔驰定理. 利用有向面积, 在这一定理中无需考虑点  $P$  在  $\triangle ABC$  内还是  $\triangle ABC$  外. 该定理的证明留给读者.

**Theorem 0.1.12** (奔驰定理). 对于  $\triangle ABC$  与一点  $P$ ,  $[\triangle PBC]\overrightarrow{PA} + [\triangle PCA]\overrightarrow{PB} + [\triangle PAB]\overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$ .

另外, 利用有向的语言, 还可以方便地叙述 Ceva 定理和 Μενέλαος 定理:

**Lemma 0.1.13** (燕尾定理).  $\triangle ABC$  中, 点  $D$  在直线  $BC$  上, 对于一点  $P$ , 点  $P$  在直线  $AD$  上的充要条件为  $\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{[\triangle BPA]}{[\triangle CPA]}$ .

*proof.* 显然  $\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{[\triangle BPD]}{[\triangle CPD]} = \frac{[\triangle BAD]}{[\triangle CAD]}$ . 若  $P \in AD$ , 则由比例的性质<sup>(5)</sup>得

$$\frac{[\triangle BPA]}{[\triangle CPA]} = \frac{[\triangle BAD] - [\triangle BPD]}{[\triangle CAD] - [\triangle CPD]} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}};$$

若  $\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{[\triangle BPA]}{[\triangle CPA]}$ , 设  $AP \cap BC = D'$ , 则由上可知  $\frac{\overline{BD'}}{\overline{CD'}} = \frac{[\triangle BPA]}{[\triangle CPA]}$ , 但  $\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \neq \frac{\overline{BD'}}{\overline{CD'}}$  除非  $D = D'$ , 则  $D = D'$  成立, 即点  $A, P, D$  共线.  $\square$

**Theorem 0.1.14** (Ceva). 给定  $\triangle ABC$ , 在直线  $BC, CA, AB$  上分别取点  $A_1, B_1, C_1$ , 则直线  $AA_1, BB_1, CC_1$  交于一点  $P \Leftrightarrow \frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} = -1$ .<sup>(6)</sup>

*proof.* 仅证明 “ $\Rightarrow$ ” 方向. 由燕尾定理, 则  $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{[\triangle APB]}{[\triangle APC]} \cdot \frac{[\triangle BPC]}{[\triangle BPA]} \cdot \frac{[\triangle CPA]}{[\triangle CPB]} = -1$ .  $\square$

**Theorem 0.1.15** (Μενέλαος(Menelaus)<sup>(7)</sup>). 给定  $\triangle ABC$ , 在直线  $BC, CA, AB$  上分别取点  $D, E, F$ , 则点  $D, E, F$  共线  $\Leftrightarrow \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} = 1$ .

*proof.* 仅证明 “ $\Rightarrow$ ” 方向. 由燕尾定理, 则  $\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} = \frac{[\triangle BED]}{[\triangle CED]} \cdot \frac{[\triangle CED]}{[\triangle AED]} \cdot \frac{[\triangle AED]}{[\triangle BED]} = 1$ .  $\square$

(5) 比例的性质: 若  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , 则 [当下述分式有意义时]: ①  $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$ ; ②  $\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d}$ .

(6) 更严格的说, 应该是直线  $AA_1, BB_1, CC_1$  或互相平行, 但平行的情况可视为交点趋于无穷远处的极限情形.

(7) 或许很多读者都知道这个定理, 但很多人可能都不知道的是, Μενέλαος 最初提出这个定理时是针对球面三角形而言的. 与大多数人想象的不同, 在 Μενέλαος 所处的古希腊时期就已经有球面几何的研究了.

但是, 使用“有向”的语言时有时会不那么直观, 因此笔者有时也会用非“有向”的语言, 此时会辅以图片进行说明; 喜欢“有向”的语言的读者可以自己改为“有向”的语言. 我们约定, 当某一定理的证明有配图说明时, 若采用非有向的语言进行叙述, 则默认按照图片的位形进行论证, 此时其余位形的证明是类似的, 不再单独讨论.

### 练习

**Problem 0.6.** 若同一直线上的四点  $A, B, C, D$  满足  $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{BC} \cdot \overline{AD}$ , 点  $O$  为  $AC$  的中点, 证明:  $\overline{OA}^2 = \overline{OB} \cdot \overline{OD}$ .

**Problem 0.7.** 给定点  $A, B, C, D$ , 点  $E$  为  $AD$  的中点, 证明:  $[\triangle ABC] + [\triangle DBC] = 2[\triangle EBC]$ .

**Problem 0.8.**

- (1) 证明 Ceva 定理和 Μενέλαος 定理的“ $\Leftarrow$ ”方向;
- (2) 证明奔驰定理.

**Problem 0.9.** 已知  $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ , 且点  $D, E$  在  $\triangle ABC$  外. 点  $U, V, X, Y, Q$  分别为  $AD, AE, BD, CD, BC$  的中点, 记  $P = UY \cap VX$ , 证明: 点  $A, P, Q$  共线.

## 0.2 三角形与四边形

本节我们先来复习三角形和四边形相关的定理.

**Theorem 0.2.1** (射影定理 (right triangle altitude theorem)/Εὐκλείδης 定理 (Euclidean theorem)).  $\text{Rt}\triangle ABC$  的斜边  $AB$  上的高线为  $CD (D \in AB)$ , 则  $CD^2 = AD \cdot BD$ ,  $CA^2 = AD \cdot AB$ ,  $CB^2 = BD \cdot AB$ .

*proof.* 注意  $\triangle ACB \sim \triangle CDB \sim \triangle ADC$ , 容易证明该定理. □

**Theorem 0.2.2** (分角定理). 点  $D$  是  $\triangle ABC$  的边  $BC$  (或其延长线) 上一点, 则  $\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle CAD}$ .

*proof.*  $\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{[\triangle BAD]}{[\triangle CAD]} = \frac{AB \cdot AD \sin \angle BAD}{AC \cdot AD \sin \angle CAD} = \frac{AB \sin \angle BAD}{AC \sin \angle CAD}$ . □

对于  $AD$  为角平分线的特殊情形, 有以下两个重要结论, 即角平分线定理和外角平分线定理.

**Theorem 0.2.3** (角平分线定理).  $\triangle ABC$  中,  $\angle BAC$  的平分线交  $BC$  于点  $D$ , 则  $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ .

**Theorem 0.2.4** (外角平分线定理).  $\triangle ABC$  中,  $\angle BAC$  的平分线交  $BC$  于点  $D$ , 则  $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ .

接下来是著名的正弦定理、余弦定理以及相关的推论.

**Theorem 0.2.5** (正弦定理 (sine theorem)).  $\triangle ABC$  中,  $\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R$ , 其中  $R$  为  $\triangle ABC$  外接圆半径.

*proof.* 熟知. □

**Theorem 0.2.6** (余弦定理 (cosine theorem)).  $\triangle ABC$  中,  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A$ .

*proof.* 熟知. □

**Theorem 0.2.7** (Stewart). 给点  $\triangle ABC$ ,  $D$  为直线  $BC$  上的一点, 则

$$AD^2 = AB^2 \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}} + AC^2 \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} - \overline{BD} \cdot \overline{DC}. \quad (1)$$

*proof.* 设  $\angle ADB = \theta$ , 则由余弦定理,  $\cos \theta = \frac{AD^2 + BD^2 - AB^2}{2AD \cdot \overline{BD}}$ ,  $-\cos \theta = \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2AC \cdot \overline{DC}}$ , 两式相加整理即得.  $\square$

Stewart 定理是三角形几何中的重要定理, 但看起来过于暴力而缺乏美感, 因而在后面不会使用它, 但会在一个地方用到它的某种特殊情况—— $D$  为中点的情形:

**Theorem 0.2.8** (中线长公式). 若  $D$  为  $\triangle ABC$  的边  $BC$  的中点, 则  $AD^2 = \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$ .

此外, 我们有如下的重要定理, 它经常被用于判定垂直关系.

**Theorem 0.2.9** (等差幂线定理). 直线  $AB \perp CD$ , 当且仅当  $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$ .

*proof.* 由勾股定理易证.  $\square$

最后, 我们介绍 Echols 第一定理及其推广形式.

**Theorem 0.2.10** (Echols 第一定理). (如图0.1) 设  $\triangle ABC$  与  $\triangle DEF$  是同向<sup>(8)</sup>正三角形, 点  $X, Y, Z$  分别是不相交线段  $AD, BE, CF$  的中点, 则  $\triangle XYZ$  也是正三角形.

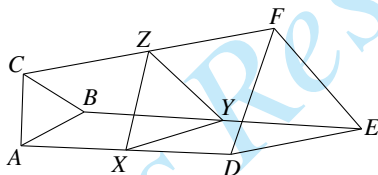


Figure 0.1

*proof.* 我们证明下面 Echols 第一定理的推广形式.  $\square$

**Theorem 0.2.11.** (如图0.2) 设  $\triangle ABC \triangleq \triangle A'B'C'$ , 点  $X, Y, Z$  分别在直线  $AA', BB', CC'$  上, 且  $\frac{\overline{AX}}{\overline{A'X}} = \frac{\overline{BY}}{\overline{B'Y}} = \frac{\overline{CZ}}{\overline{C'Z}}$ , 则  $\triangle ABC \triangleq \triangle XYZ$ .

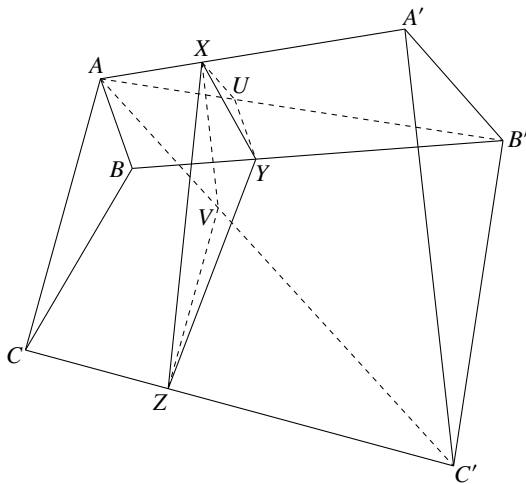


Figure 0.2

(8) 即  $\triangle ABC \triangleq \triangle DEF$ .



*proof.* 在直线  $AB', AC'$  上分别取点  $U, V$ , 使得  $\frac{\overline{AU}}{\overline{B'U}} = \frac{\overline{AV}}{\overline{C'V}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{A'X}} = \frac{\overline{BY}}{\overline{B'Y}} = \frac{\overline{CZ}}{\overline{C'Z}}$ . 则  $XU \parallel A'B', UV \parallel AB, XV \parallel A'C', ZV \parallel AC$ . 那么,  $\frac{XV}{A'C'} = \frac{XU}{A'B'}, \frac{ZV}{AC} = \frac{YU}{AB}$ , 而由顺相似有  $\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB}$ , 故  $\frac{XV}{XU} = \frac{VZ}{YZ}$ .

另一方面, 由

$$\angle XVZ = \angle XVA + \angle AVZ = (-\angle AXV - \angle VAX) + (-\angle CAV) = -\angle CAV - \angle AXV = -\angle CAV - \angle AA'C',$$

$$\angle XUY = \angle XUA + \angle AUY = (-\angle XAU - \angle AXU) + (-\angle BAU) = -\angle BAX - \angle AXU = -\angle BAX - \angle AA'B',$$

知  $\angle XVZ - \angle XUY = (\angle BAX - \angle CAV) + (\angle AA'B' - \angle AA'C') = -\angle CAB + \angle C'A'B' = 0$ , 即  $\angle XVZ = \angle XUY$ .

因此  $\triangle XVZ \sim \triangle XUY$ , 故  $\frac{XY}{XZ} = \frac{YU}{ZV} = \frac{AC}{AB}$ . 同理,  $\frac{AB}{CB} = \frac{XY}{ZY}$ , 即  $AB:BC:CA = XY:YZ:ZX$ , 由此命题成立.  $\square$

**Corollary 0.2.12.** 设  $n$  边形  $A_1A_2 \cdots A_n \sim A'_1A'_2 \cdots A'_n$ , 在  $A_1A'_1, A_2A'_2, \cdots, A_nA'_n$  上分别取点  $X_1, X_2, \cdots, X_n$ , 使得  $\frac{\overline{X_1A_1}}{\overline{X_1A'_1}} = \frac{\overline{X_2A_2}}{\overline{X_2A'_2}} = \cdots = \frac{\overline{X_nA_n}}{\overline{X_nA'_n}}$ , 则  $n$  边形  $A_1A_2 \cdots A_n \sim X_1X_2 \cdots X_n$ .

*proof.* 将多边形划分为若干三角形, 利用(0.2.11)即证.  $\square$

**Corollary 0.2.13** (Finsler-Hadwiger). (如图0.3) 两正方形  $ABCD, EBG I$  有公共顶点  $B$ , 设不相交的两线段  $AE, CG$  中点分别为点  $L, K$ , 两正方形中心分别为点  $H, J$ , 则四边形  $LHKJ$  为正方形.

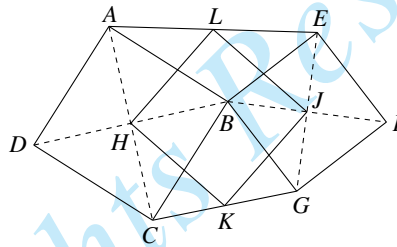


Figure 0.3

*proof.* 这是(0.2.12)的在  $n$  边形为正方形、且所取的点  $X_i$  为中点时的特例.  $\square$

Finsler-Hadwiger 定理又有如下应用:

**Theorem 0.2.14** (van Aubel). 分别以一四边形的各边为边向四边形外侧作正方形, 则相对的正方形中心的连线垂直且相等.

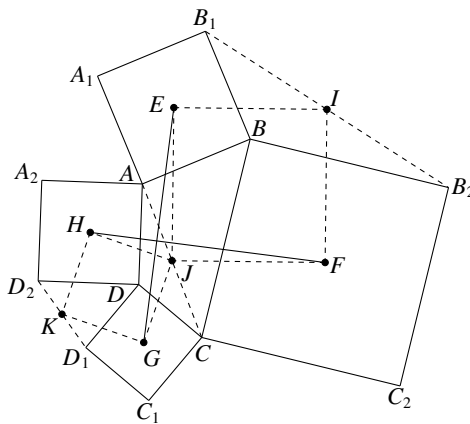


Figure 0.4

*proof.* 如图0.4, 四边形  $AA_1B_1B, BB_1C_1C, CC_1D_1D, DD_1A_1A$  均为正方形, 点  $E, F, G, H$  分别为其中心, 要证明  $EG, HF$  垂直且相等.

分别取出  $B_1B_2, AC, D_1D_2$  的中点分别为点  $I, J, K$ , 由 Finsler-Hadwiger 定理知四边形  $HJKG, EIFJ$  均为正方形.

因此, 在  $r_{J, 90^\circ}$  下, 点  $F, H$  分别变为  $E, G$ , 由旋转变换的性质可知对应点的连线  $HF, EG$  相等且夹角等于旋转角, 即证.  $\square$

**Corollary 0.2.15** (Thébault 第一定理). 分别以一四边形的各边为边向四边形外侧作正方形, 则四个正方形的中心组成一个正方形.

*proof.* 在(0.2.14)的证明中, 额外要求  $ABCD$  为平行四边形, 则点  $J$  即  $ABCD$  的中心, 而整个图形有关于  $J$  的中心对称性. 因此, 点  $E$  与  $G$ , 点  $H$  与  $F$  均关于  $J$  中心对称, 结合  $EG, HF$  垂直且相等可知四边形  $EFGH$  为正方形.  $\square$

### 练习

**Problem 0.10** (Thébault 第二定理). 设四边形  $ABCD$  为正方形, 分别以  $AB, BC$  为边向外侧作正三角形  $\triangle ABP, \triangle BCQ$ , 分别以  $AB, AC$  为边向内侧作正三角形  $\triangle ABP', \triangle BCQ'$ , 证明: 点  $D, P, Q'$  共线, 点  $D, P', Q$  共线, 且  $\triangle DP'Q', \triangle DPQ$  均为正三角形.

**Problem 0.11** (Ceva 定理的角元形式). 设  $A_1, B_1, C_1$  分别是  $\triangle ABC$  三边  $BC, CA, AB$  所在直线上的点, 证明以下两者均是直线  $AA_1, BB_1, CC_1$  交于一点 [或互相平行] 的充要条件:

- (1)[第一角元形式]  $\frac{\sin \angle CAA_1}{\sin \angle BAA_1} \cdot \frac{\sin \angle ABB_1}{\sin \angle CBB_1} \cdot \frac{\sin \angle BCC_1}{\sin \angle ACC_1} = -1$ ;
- (2)[第二角元形式]  $\frac{\sin \angle BXA_1}{\sin \angle CXA_1} \cdot \frac{\sin \angle CXB_1}{\sin \angle AXB_1} \cdot \frac{\sin \angle AXC_1}{\sin \angle BXC_1} = -1$ ,  $X$  是不在直线  $AB, BC, CA$  上的一点.

**Problem 0.12** (Menélaos 定理的角元形式). 设  $A_1, B_1, C_1$  分别是  $\triangle ABC$  三边  $BC, CA, AB$  所在直线上的点, 证明以下两者均是点  $A_1, B_1, C_1$  共线的充要条件:

- (1)[第一角元形式]  $\frac{\sin \angle CAA_1}{\sin \angle BAA_1} \cdot \frac{\sin \angle ABB_1}{\sin \angle CBB_1} \cdot \frac{\sin \angle BCC_1}{\sin \angle ACC_1} = 1$ ;
- (2)[第二角元形式]  $\frac{\sin \angle BXA_1}{\sin \angle CXA_1} \cdot \frac{\sin \angle CXB_1}{\sin \angle AXB_1} \cdot \frac{\sin \angle AXC_1}{\sin \angle BXC_1} = 1$ ,  $X$  是不在直线  $AB, BC, CA$  上的一点.

**Problem 0.13** (角平分线长公式).  $\triangle ABC$  中,  $\angle A$  的平分线交  $BC$  于点  $D$ , 证明:  $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$ .

**Problem 0.14** (Steiner-Lehmus). 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle B, \angle C$  的平分线分别交对边于点  $D, E$ , 若  $BD = CE$ , 证明:  $AB = AC$ .

**Problem 0.15** (أبي خزام ('Abī-Khuzām)). 证明: 对于  $\triangle ABC$ ,  $\sin A \sin B \sin C \leq \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right)^2 ABC$ .

**Problem 0.16** (Ῥέρων(Heron) 公式). 设  $\triangle ABC$  的三边的长度分别为  $a, b, c$ ,  $p = \frac{a+b+c}{2}$ , 证明:

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

**Problem 0.17** (ब्रह्मगुप्त(Brahmagupta) 公式). 设四边形  $ABCD$  的四条边的长度分别为  $a, b, c, d$ , 一组对角之和的一半为  $\theta$ ,  $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ , 证明:

$$S_{ABCD} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \theta}.$$

特别地, 若该四边形为圆内接四边形, 则  $S_{ABCD} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ .

**Problem 0.18.** 设  $P$  为矩形  $ABCD$  内一点, 证明:  $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$ .

**Problem 0.19.** 如图0.5, 凸四边形  $ABCD$  中,  $AB \perp BC$ ,  $AD \perp DC$ ,  $AB = AD$ , 在边  $CD, CB$  上分别取点  $E, F$ , 满足  $DF \perp AE$ , 证明:  $AF \perp BE$ .

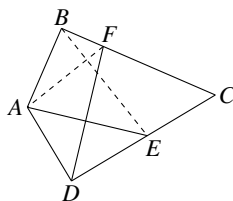


Figure 0.5

**Problem 0.20** (Echols 第二定理). 设  $\triangle ABC, \triangle DEF, \triangle IJK$  是同向<sup>(9)</sup>的正三角形, 点  $X, Y, Z$  分别是  $\triangle ADI, \triangle BEJ, \triangle CFK$  的重心, 证明:  $\triangle XYZ$  也是正三角形.

**Problem 0.21.** 设  $\triangle ABC, \triangle CDE, \triangle BFG, \triangle AHI$  是四个同向的正三角形, 设  $DG, EH, FI$  的中点分别为点  $X, Y, Z$ , 证明:  $\triangle XYZ$  为正三角形.

## 0.3 圆的性质

### 0.3.1 直线与圆的位置关系

下面先给出一些与直线和圆有关的最著名的定理.

**Theorem 0.3.1** (弦切角定理). 顶点在一个圆上, 且一边与该圆相切的角称为弦切角, 弦切角的度数等于它所夹的圆弧对应的圆周角. 即, 如图0.6,  $AB$  为圆  $\omega$  的一条弦,  $B$  为  $\omega$  在  $P$  点处的切线上的一点,  $\angle PQA$  为  $\angle BPA$  所夹弧  $\widehat{PA}$  所对的圆周角, 则  $\angle PQA = \angle BPA$ .

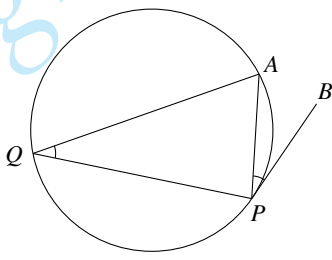


Figure 0.6

*proof.* It's left to the reader. □

**Theorem 0.3.2** (相交弦定理). 设  $P$  为  $\odot O$  内一点, 过  $P$  作  $\odot O$  的两条弦, 分别交  $\odot O$  于点  $A, B$  和  $C, D$ . 则  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ .

*proof.* 显然有  $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ , 由此即证. □

**Theorem 0.3.3** (割线定理). 设  $P$  为  $\odot O$  外一点, 过  $P$  作  $\odot O$  的两条割线, 分别交  $\odot O$  于点  $A, B$  和  $C, D$ . 则  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ .

*proof.* 显然有  $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ , 由此即证. □

(9) 即  $\triangle ABC \triangleq \triangle DEF \triangleq \triangle IJK$ .

**Theorem 0.3.4** (切割线定理). 设  $P$  为  $\odot O$  外一点, 过  $P$  作  $\odot O$  的割线, 交  $\odot O$  于点  $A, B$ ; 过  $P$  作  $\odot O$  的一条切线, 切点为  $C$ . 则  $PA \cdot PB = PC^2$ .

*proof.* 显然有  $\triangle PAC \sim \triangle PCB$ , 由此即证.  $\square$

**Theorem 0.3.5** (切线长定理). 设  $P$  为  $\odot O$  外一点, 过  $P$  作  $\odot O$  的两条切线, 切点分别为点  $A, B$ . 则  $PA = PB^{(10)}$ .

*proof.* 显然.  $\square$

上面的相交弦定理、割线定理、切割线定理以及切线长定理有时也统称“圆幂定理”. 对于其中的割线定理与相交弦定理, 可以写出其逆定理, 具体证明留给读者:

**Theorem 0.3.6.** 设直线  $AB, CD$  交于点  $P$ , 若  $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$ , 则点  $A, B, C, D$  共圆.

下面另几个与圆相关的定理.

**Theorem 0.3.7** (Ἀπολλώνιος(Apollonius) 圆定理). 给定点  $A, B$  与正实数  $k^{(11)}$ , 则满足  $\frac{PA}{PB} = k$  的点  $P$  的轨迹是一个圆, 且直线  $AB$  过该圆的圆心. 称该圆为一个关于点  $A, B$  的 Ἀπολλώνιος 圆.

*proof.* 过点  $P$  作  $\angle APB$  的内、外角平分线, 分别交直线  $AB$  于点  $X, Y$ , 由角平分线定理和外角平分线定理知  $X, Y$  为定点, 而  $\angle XPY = 90^\circ$  从而点  $P$  在以  $XY$  为直径的圆上.  $\square$

**Proposition 0.3.8.** 一个四边形内接于一个圆, 当且仅当它的两组对边的交角的平分线互相垂直.

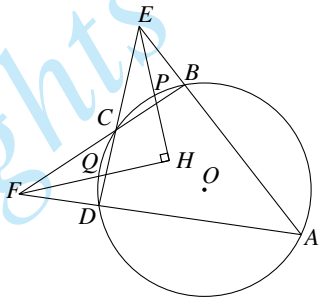


Figure 0.7

*proof.* 我们证明四边形内接于一个圆时其对边所成角的平分线互相垂直. 其逆命题可用同一法证明. 如图0.7,  $A, B, C, D$  四点共圆,  $HE$  平分  $\angle AED$  交  $\odot O$  于  $P$ ,  $HF$  平分  $\angle BFA$  交  $\odot O$  于  $Q$ , 则<sup>(12)</sup>

$$\begin{aligned} \angle EHF &= \angle ECF - \angle CEP - \angle CFH = \angle BCD - \frac{\angle BEC}{2} - \frac{\angle DFC}{2} \stackrel{\text{m}}{=} \frac{\widehat{BAD}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\widehat{DA} - \widehat{BC}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\widehat{BA} - \widehat{CD}}{2} \\ &= \frac{\widehat{BAD}}{2} - \frac{\widehat{BAD}}{2} + \frac{\widehat{BD}}{4} = \frac{\widehat{BAD}}{4} + \frac{\widehat{BD}}{4} \stackrel{\text{m}}{=} 90^\circ. \end{aligned} \quad \square$$

下面是一个例题, 它也将之后用到:

**Example 0.3.9.** 给定  $\triangle ABC$ , 点  $B$  关于  $AC$  的对称点为  $P$ , 点  $C$  关于  $AB$  的对称点为  $Q$ ,  $\odot(APQ)$  在点  $A$  处的切线交直线  $PQ$  于点  $T$ , 则点  $T$  关于  $A$  的对称点  $U$  在直线  $BC$  上.

(10) 称线段  $PA$  (或  $PB$ ) 的长度为所引切线的切线长.

(11) 若  $k=1$ , 下述  $k$  的轨迹变为  $AB$  的中垂线, 我们可以将它视为圆的半径无穷大的情形.

(12) 式中的“ $\stackrel{\text{m}}{=}$ ”表示角的大小与弧对应的圆心角相等.

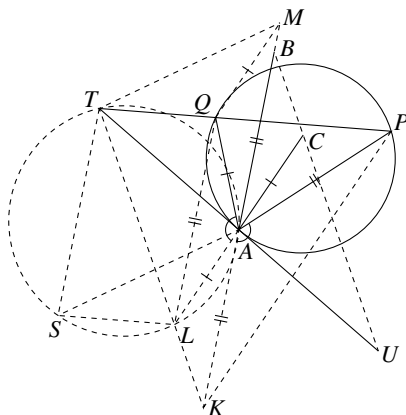


Figure 0.8

*solution.* 如图0.8, 作  $B, C$  关于  $A$  的对称点  $K, L$ , 则显然四边形  $CLKP$  为等腰梯形. 容易知道, 我们只需要证明点  $T, L, K$  在同一条直线上.

由于  $AL = AC = AQ$ ,  $AK = AB = AP$ ,  $\angle LAQ = 180^\circ - \angle QAC = 180^\circ - 2\angle BAC = 180^\circ - \angle BAP = \angle PAK$ , 所以  $\triangle QAL, \triangle PAK$  为一对相似的等腰三角形.

由于  $AT$  为  $\odot(QAP)$  的切线, 则根据弦切角定理,  $\angle TAQ = \angle TPA$ , 因而  $\triangle TQA \sim \triangle TAP$ , 从而可以选取一点  $M$ , s.t. 四边形  $TMAQ$  与四边形  $TKPA$  相似.

那么,  $\triangle MQA \sim \triangle KAP \sim \triangle LAQ$ , 但注意  $\triangle MQA, \triangle LAQ$  的一组对应边相同, 因而  $\triangle MQA \cong \triangle LAQ$ , 因而四边形  $MQLA$  为平行四边形.

因此  $\angle QAM = \angle AQL = \angle AKP = \angle BAC = \angle BAQ$ , 因而点  $A, B, M$  在同一直线上.

作点  $S$  使得四边形  $TSLQ$  为平行四边形, 则  $TQ \parallel SL$ , 结合  $QM \parallel LA$  可知  $\triangle TQM \cong \triangle SLA$ , 从而

$$\angle LAS = \angle QMA \stackrel{TQMA \sim TAPK}{=} \angle TKA = \angle TLQ = \angle LTS,$$

则  $L, A, T, S$  共圆. 因此

$$\angle ATL = \angle AST = \angle MTQ \stackrel{TQMA \sim TAPK}{=} \angle ATK,$$

即  $T \in KL$ . □

### 练习

**Problem 0.22.** 证明(0.3.1)(0.3.6).

**Problem 0.23.** 设某圆的一个内接四边形的对角线互相垂直, 证明: 该四边形四边长度的平方和等于该圆半径平方的八倍.

**Problem 0.24.** 一圆的两条弦  $AB, CD$  所在直线交于点  $E$ , 证明:  $\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AD}{BD}$ .

**Problem 0.25.** 设凸四边形  $ABCD$  满足  $\angle B + \angle D = 90^\circ$ , 证明:  $AC^2 \cdot BD^2 = AD^2 \cdot BC^2 + AB^2 \cdot CD^2$ .

**Problem 0.26.** 四边形  $ABCD$  内接于  $\odot O$ ,  $AC \cap BD = E$ , 过点  $E$  作  $BC$  的平行线交直线  $AD$  于点  $F$ , 过点  $F$  作  $\odot O$  的切线, 切点记为  $G$ . 证明:  $EF = GF$ .

**Problem 0.27.** 点  $T$  为凸五边形  $ABCDE$  内一点, 且满足  $TB = TD$ ,  $TE = TC$ ,  $\angle ABT = \angle AET$ . 设  $AB \cap CD = P$ ,  $AE \cap CD = R$ ,  $DT \cap EA = S$ ,  $CT \cap AB = Q$ , 证明:  $P, R, Q, S$  四点共圆.

### 0.3.2 圆与圆的位置关系

在本节的最后, 我们介绍一些与两个圆的位置关系相关的只是. 有的读者在中学阶段可能没有学习过相关的概念, 因此先简要说明如下.

对于两个圆, 记它们的半径分别为  $R, r (R \geq r)$ , 圆心的距离为  $d$ , 则两圆的位置关系可分为:

- ① 内含: 两圆不相交且一者在另一者内时 (需要  $R \neq r$ , 否则重合), 条件为  $d < R - r$ , 如图0.9a;
- ② 外离: 两圆不相交且任一者均不在另一者内时, 条件为  $d > R + r$ , 如图0.9b;
- ③ 内切: 两圆相切且一者在另一者内时 (需要  $R \neq r$ , 否则重合), 条件为  $d = R - r$ , 如图0.9c;
- ④ 外切: 两圆相切且任一者均不在另一者内时, 条件为  $d = R + r$ , 如图0.9d;
- ⑤ 相交: 两圆交于两个不同的点时, 条件为  $R - r < d < R + r$ , 如图0.9e.

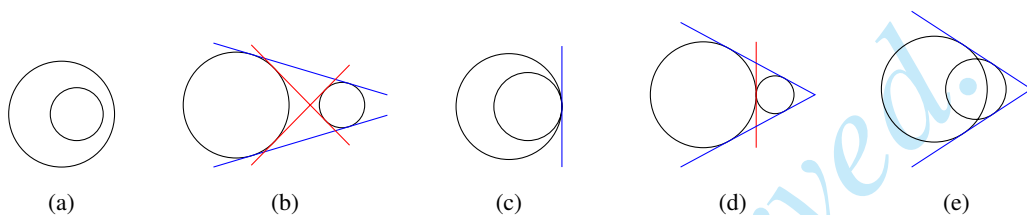


Figure 0.9

其中, 内含与外离统称相离, 内切与外切统称为相切. 需要注意的是, 从语义上看, 对于一般的两曲线, 相切算是相交的一种特殊情形, 因此在之后, 少数地方所谓的“两圆相交”可能也包括相切的情形, 不过读者总能根据上下文进行判断.

对于两个圆, 如果有直线有直线同时与两圆同时相切, 则称此直线为两圆的公切线. 特别地, 若两圆在公切线的同侧, 则称此公切线为外公切线, 若两圆在公切线的异侧, 则称此公切线为内公切线.

对于上述五种圆与圆的位置关系, 相应的公切线均在3.1中作出, 其中外公切线用蓝色表示, 内公切线用红色表示. 对于内含的情形, 无法作出公切线; 对外离的情形, 可作两外公切线与两内公切线; 对内切的情形, 可作一条外公切线, 无法作出内公切线; 对外切的情形, 可作两外公切线与一条内公切线; 对相交的情形, 可作两外公切线, 无法作出内公切线. 将切线长定理应用到两个圆的公切线上, 我们可以得到如下的两个结论:

**Theorem 0.3.10.** 对于两个圆:

- (1) 若它们有两条外公切线, 则两外公切线关于两圆圆心的连线对称且交于两圆圆心连线上一点, 且两外公切线段<sup>(13)</sup>长度相等;
- (2) 若它们有两条内公切线, 则两内公切线关于两圆圆心的连线对称且交于两圆圆心连线上一点, 且两内公切线段长度相等.

*proof.* (1) 参考图0.10, 设  $\odot O_1, \odot O_2$  的外公切线段为  $IJ$  和  $KL$ , 两者所在直线交于点  $Q$ , 则  $IJ = QJ - QI \stackrel{\text{切线长定理}}{=} QL - QK = KL$ . 由于  $QI, QK$  是  $\odot O_1$  的两切线, 则  $O_1Q$  平分  $\angle IQK$ , 同理  $O_2Q$  平分  $\angle JQL$ , 而  $\angle IQK, \angle JQL$  为同一个角, 则  $Q, O_1, O_2$  三点共线, 即证对称.

(2) 参考图0.10, 设  $\odot O_1, \odot O_2$  的内公切线段为  $AB$  和  $CD$ , 两者所在直线交于点  $P$ , 则  $AB = AP + PB \stackrel{\text{切线长定理}}{=} CP + DP = CD$ . 由于  $PA, PB$  是  $\odot O_1$  的两切线, 则  $O_1P$  平分  $\angle APC$ , 同理  $O_2P$  平分  $\angle BPD$ , 而  $\angle APC, \angle BPD$  为对顶角, 故  $O_1, P, O_2$  三点共线, 即证对称.  $\square$

**Proposition 0.3.11.** 如果两圆同时有两条外公切线和两条内公切线, 则外公切线被限制在两内公切线间的部分的长度等于内公切线段, 内公切线被限制在两外公切线间的部分的长度等于外公切线段.

(13) 所谓“外公切线段”即外公切线被限制在两圆之间的部分, 下面的“内公切线段”同理.

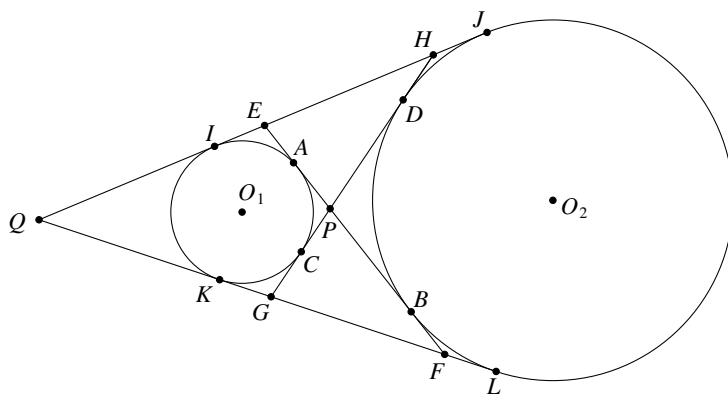


Figure 0.10

*proof.* 如图0.10, 两外公切线分别切两圆于点  $I, J$  和  $K, L$ , 两内公切线分别切两圆于点  $A, B$  和  $C, D$ , 四条公切线两两交于  $E, F, G, H, P, Q$  六点. 则需要证明:  $AB=GF, EF=KL$ .

利用切线长定理, 可得

$$\begin{aligned} BF+AB &= AF=KF=KG+GF, \\ BF+GF &= LF+GF=GL=GD=GC+CD=KG+CD \stackrel{(0.3,10)}{=} KG+AB, \end{aligned}$$

上式减下式即得  $AB=GF$ .

注意由对称性可知  $IE=KG$ , 而已证  $AB=GF$ , 则利用切线长定理可得  $KL=KG+GF+FL=IE+AB+FL=EA+AB+BF=EF$ .  $\square$

最后, 对于两个圆的情形, 我们有如下的著名结论:

**Theorem 0.3.12 (Reim).** 设  $\odot O_1, \odot O_2$  交于  $P, Q$  两点, 过  $P$  的一条直线与  $\odot O_1$  的另一个交点为  $A_1$ , 与  $\odot O_2$  的另一个交点为  $A_2$ ; 过  $Q$  的一条直线与  $\odot O_1$  的另一个交点为  $B_1$ , 与  $\odot O_2$  的另一个交点为  $B_2$ , 则  $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ .

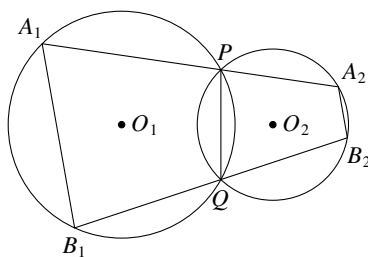


Figure 0.11

*proof.* 考虑如图0.11的情形. 注意到  $\angle A_1B_1Q + \angle A_2B_2Q = \angle A_1B_1Q + (180^\circ - \angle QPA_2) = \angle A_1B_1Q + \angle A_1PQ = 180^\circ$ , 即证.  $\square$

可以写出它的逆定理的形式, 我们同样称之为 **Reim 定理**. 其证明是容易的, 我们将它留给读者.

**Theorem 0.3.13 (Reim).** 若  $P, Q, A_1, B_1$  四点共圆, 点  $A_2, B_2$  分别在直线  $PA_1, PB_1$  上, 且  $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ , 则点  $P, Q, A_2, B_2$  也共圆.



## 练习

**Problem 0.28.** 证明: 在图0.10中,  $IE=EA=HJ=DH=KG=GC=BF=FL$ .

**Problem 0.29.** 设两圆  $\omega_1, \omega_2$  相交于  $A, B$  两点, 点  $P$  是直线  $AB$  上一点, 过  $P$  分别引  $\omega_1, \omega_2$  的切线, 切线长分别记为  $l_1, l_2$ , 证明:  $l_1 = l_2$ .

**Problem 0.30.** 三个不同的圆  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  有两个共同的公共点  $A, B$ , 点  $P$  是  $\omega_3$  上的异于  $A, B$  的一个动点. 过  $P$  分别引  $\omega_1, \omega_2$  的切线, 切线长分别记为  $l_1, l_2$ , 证明:  $\frac{l_1}{l_2}$  为与  $P$  无关的定值.

**Problem 0.31.** 给定两圆  $\omega_1, \omega_2$ , 两者交于  $A, B$  两点, 点  $P$  是  $\omega_1$  上的动点, 过  $P$  引  $\omega_2$  的切线, 切点为  $T$ , 证明  $\frac{PT^2}{PA \cdot PB}$  为定值.

**Problem 0.32.** 一大一小两圆内切于点  $T$ , 大圆的弦  $AB$  交小圆于  $C, D$  两点, 证明:  $\angle ATB = \angle CTD$ .

## 0.4 位似

之前, 我们已经介绍了相似图形的概念与相关性质. 本节将介绍一个与之相关的概念——位似.

**Definition 0.4.1.** 如果两个图形相似, 且所有相似下对应点<sup>(14)</sup>的连线 (所在直线) 均交于一点  $O$ , 则称这两个图形位似, 点  $O$  称为位似中心, 两个图形的相似比即为位似比  $k$ . 规定当  $k > 0$  时, 表示一对位似的对应点在位似中心的同侧; 当  $k < 0$  时, 表示一对位似的对应点在位似中心的异侧.

平面上, 一个以  $O$  为中心、系数为  $k$  的位似变换 (homothety), 将平面上的任意一点  $A$  变为另一点  $A'$ , 且  $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ , 下记此位似变换为  $\mathfrak{h}_{O,k}$ . 对于图形  $\mathcal{A}$ , 作出其中所有点在这一位似变换下的点, 它们组成的图形  $\mathcal{A}'$  称为  $\mathcal{A}$  在这一位似变换下的像.

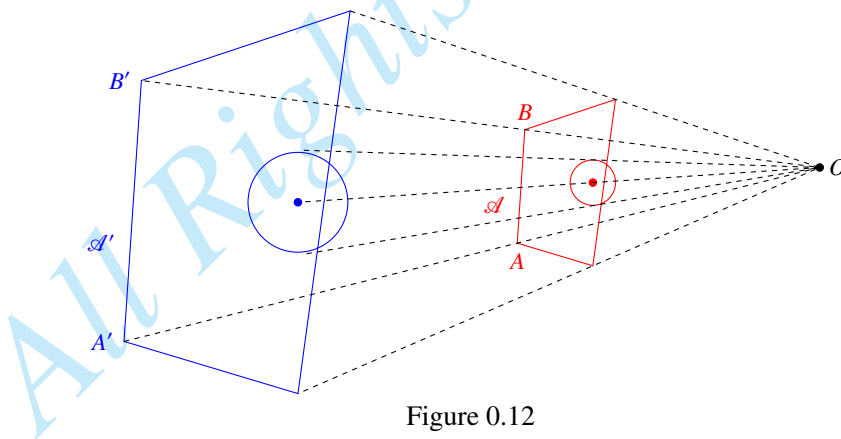


Figure 0.12

如图0.12, 图中蓝色部分的图形  $\mathcal{A}'$  就是红色部分的图形  $\mathcal{A}$  在某一以点  $O$  为中心、位似比  $k > 0$  的位似变换下的像.

显然, 位似有以下性质:

**Proposition 0.4.2.** 两图形  $\mathcal{A}$  与  $\mathcal{A}'$  关于中心  $O$  位似, 位似比为  $k$ , 点  $A, A'$  与  $B, B'$  为两组位似的对应点, 则  $AB \parallel A'B'$ <sup>(15)</sup>, 且  $\frac{AO}{A'O} = \frac{BO}{B'O} = \frac{AB}{A'B'} = k$ .

(14) 请务必注意“所有”一词! 注意这里所说的相似下的对应点包括两图形间的相似变换下的所有对应点, 这一点非常重要! 例如, 对一对相似的三角形, 对应点不仅包括两三角形的对应顶点, 它们的对应边的中点、它们的垂心等等均是这里所说的“对应点”(容易知道这些点也确实是这两个三角形所确定的相似变换下的对应点). 见本节的练习 [0.34], 你能构造出反例吗?

(15) 当然也可能  $AB, A'B'$  重合. 与中学阶段严格区分平行与重合的做法不同, 很多时候我们会将重合视为平行的一种特殊情况, 这会为我们带来极大的便利. 读者容易根据上下文区分我们所说的“平行”是否包括重合.



*proof.* 由位似的定义易知  $\triangle A'OB' \sim \triangle AOB$ , 由此结论显然.  $\square$

**Proposition 0.4.3.** 位似变换相当于是对图形的一种放缩, 作图形  $\mathcal{A}$  关于中心  $O$  的位似比为  $k$  的位似变换下的像  $\mathcal{A}'$ , 则  $\mathcal{A}'$  与  $\mathcal{A}$  关于  $O$  位似, 且位似比为  $k$ .

**Proposition 0.4.4.** 对应边互相平行 [或重合] 的三角形位似<sup>(16)</sup>, 位似三角形对应边平行 [或重合].

**Proposition 0.4.5.** 若两相似图形的对应边互相平行 [或重合], 则两者位似<sup>(17)</sup>.

在位似的图形中, 两个圆之间的位似有一定的特殊之处, 下面我们来着重讨论一下这种情况.

**Definition 0.4.6.** 两个圆可以用两种方式看作位似形, 两个圆之间的位似可以有两个位似中心, 称为内位似中心 (inner center of homothety/insimilicenter) 和外位似中心 (outer ~/outsimilicenter)<sup>(18)</sup>, 其中关于内位似中心的位似, 位似比小于零; 关于外位似中心的位似, 位似比大于零.

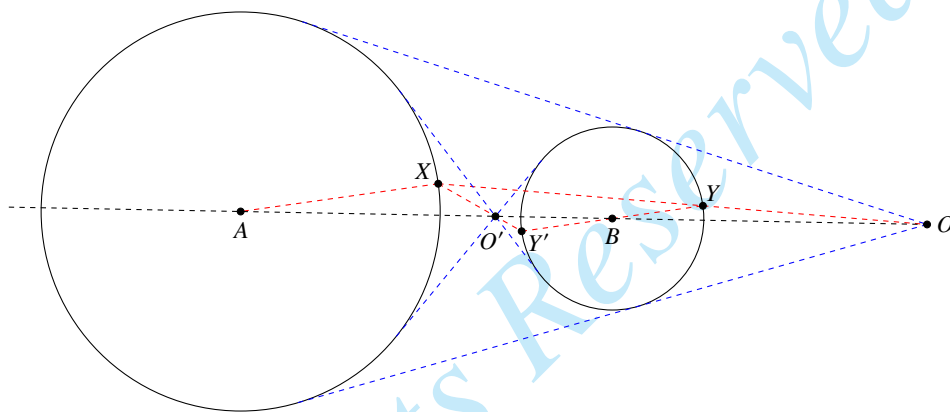


Figure 0.13

**Proposition 0.4.7.** 作两圆的同向平行的一对半径, 其端点的连线通过两圆圆心连线上的一个定点, 该定点为外位似中心; 作两圆的反向平行的一对半径, 其端点的连线通过两圆圆心连线上的一个定点, 该定点为内位似中心.

*proof.* 如图0.13,  $\odot A, \odot B$  的半径  $AX$  与  $BY$  同向平行,  $XY \cap AB = O$ , 则显然  $\triangle AXO \sim \triangle BYO$ , 则  $\frac{BO}{AO} = \frac{BY}{AX} = \text{const}$ , 故点  $O$  为一个定点; 又易知那  $X, Y$  为两圆的一种相似方式下的一组对应点, 且点  $X, Y$  在  $O$  的同侧, 从而  $O$  是外位似中心. 类似地可证明, 对于反向平行的半径  $AX, BY'$ , 点  $O' = XY' \cap AB$  即是两圆的内位似中心.  $\square$

**Proposition 0.4.8.** (参考图0.13) 若可以作两圆的外公切线, 则两外公切线的交点为两圆的外位似中心; 若可以作两圆的内公切线, 则两内公切线的交点为两圆的外位似中心.

**Proposition 0.4.9.** 两内切的圆的外位似中心为两圆的切点; 两外切的圆的内位似中心为两圆的切点.

*proof.* 在(0.4.8)中, 令两圆不断趋于相切即可.  $\square$

(16) 若两三角形全等, 且一者可由另一者平移而得, 则此时对应点的连线互相平行, 严格地说这不算位似. 但是, 虽然这些互相平行的直线不交于一点, 但在极限意义下, 可认为互相平行的直线交于无穷远处的一点, 即可认为位似中心在无穷远处. 关于无穷远点的详细介绍, 可参见第三章.

(17) 与(0.4.4)中类似, 若两图形全等, 且一者可由另一者平移而得, 则此时对应点的连线互相平行.

(18) 需要说明的是, 当两个圆同心时, 它们只有一个位似中心, 即两圆共同的圆心, 此时可以看成是外位似中心和内位似中心重合; 当两圆的半径相同时, 外位似中心不存在, 此时可视为外位似中心在无穷远处.

**Proposition 0.4.10.** 对于三个圆心均不重合的大小互不相同的圆, 两两一组可以有三组, 则:

- (1) 三组中每一组的外位似中心共线.<sup>(19)</sup>
- (2) 其中任意两组中每一组的内位似中心与剩下一组的外位似中心共线.

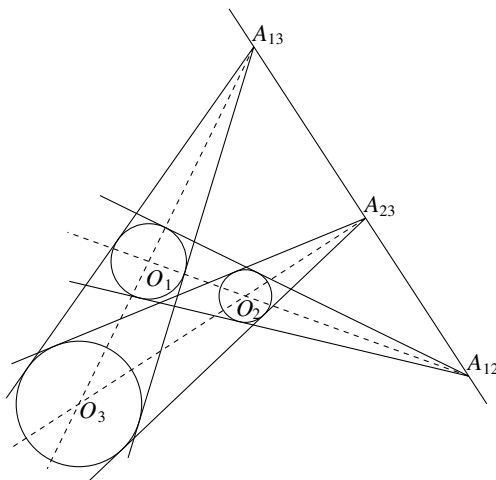


Figure 0.14

*proof.* (1) 设圆  $O_1, O_2, O_3$  的半径分别为  $r_1, r_2, r_3$ , 两两的公切线的交点分别为  $A_{12}, A_{13}, A_{23}$ . 由相似易知  $\frac{A_{ij}O_i}{A_{ij}O_j} = \frac{r_i}{r_j}$ , 对  $\triangle O_1O_2O_3$  以及  $\triangle A_{12}A_{13}A_{23}$  应用  $\text{Menélaos}$  定理, 由于  $\frac{A_{13}O_1}{A_{13}O_3} \cdot \frac{A_{23}O_3}{A_{23}O_2} \cdot \frac{A_{12}O_2}{A_{12}O_1} = \frac{r_1}{r_3} \cdot \frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_1}$ , 故  $A_{12}, A_{23}, A_{31}$  三点共线. (2) 的证明与 (1) 类似.  $\square$

最后, 我们有一个与位似相关的定义:

**Definition 0.4.11.** 我们称关于点  $O$  的旋转变换  $\mathbf{r}$  与关于点  $O$  的位似  $\mathbf{h}$  的复合  $\mathbf{r} \circ \mathbf{h}$  为一个以  $O$  点为中心的旋似变换; 若存在旋似变换将图形  $\mathcal{A}$  变为  $\mathcal{A}'$ , 则称图形  $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$  旋似.

练习

**Problem 0.33.** 证明(0.4.2)(0.4.4).

**Problem 0.34.** 若两个三角形相似, 且对应顶点的连线交于一点, 则这两个三角形一定位似吗?

**Problem 0.35.** 已知位似变换  $\mathbf{h}_{O_1, k_1}$  和  $\mathbf{h}_{O_2, k_2}$ , 证明:

- (1) 若  $k_1 k_2 = 1$ , 则  $\mathbf{h}_{O_2, k_2} \circ \mathbf{h}_{O_1, k_1}$  为一个平移变换;
- (2) 若  $k_1 k_2 \neq 1$ , 则  $\exists O \in O_1 O_2$ , 使得  $\mathbf{h}_{O_2, k_2} \circ \mathbf{h}_{O_1, k_1} = \mathbf{h}_{O, k_1 k_2}$ .

**Problem 0.36.** 小金认为: 若两图形顺相似, 则它们必是旋似的. 你认为这种说法正确吗? 请证明你的论断.

**Problem 0.37.** 圆  $\omega_1, \omega_2$  内切于点  $A$ , 且  $\omega_1$  在  $\omega_2$  内.  $\omega_2$  的弦  $BC$  切  $\omega_1$  于点  $D$ , 直线  $AD$  与  $\omega_2$  的另一个交点为点  $E$ , 证明:  $\omega_2$  在点  $E$  处的切线平行于  $BC$ .<sup>(20)</sup>

**Problem 0.38.** 设圆  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  分别与圆  $\omega$  外切于点  $A', B', C'$ , 作  $\triangle ABC$ , 使得  $\omega_1$  同时与  $AB, AC$  相切,  $\omega_2$  同时与  $BC, CA$  相切,  $\omega_3$  同时与  $CA, AB$  相切, 且  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  均在  $\triangle ABC$  内. 证明: 直线  $AA', BB', CC'$  交于一点.

(19) 这一命题还可以表述为: 三个圆心均不重合的圆, 其中任意两个圆的外公切线交于一点, 则三个这样的交点共线. 此时, 我们将它称为 Monge 定理.

(20) 实际上, 由此可以立即得到 [0.32] 的结论, 但我们希望读者在之前的问题中利用非位似的方法完成.

**Problem 0.39** (Pascal). 设点  $A, B, C, D, E, F$  共圆,  $AB \cap DE = R, BC \cap EF = S, CD \cap FA = T$ , 证明: 点  $R, S, T$  共线.

**Problem 0.40.** 设  $\odot A, \odot B$  外切于点  $S$ ,  $\odot B, \odot C$  外切于点  $T$ ,  $\odot C, \odot D$  外切于点  $U$ ,  $\odot D, \odot A$  外切于点  $V$ , 且  $ABCD$  组成一凸四边形. 在  $\odot A, \odot B$  上分别取点  $P, Q$ , 使得  $PS, QT$  均与  $ST$  垂直. 设  $R = VP \cap UQ$ , 证明: 点  $B, D, R$  在同一直线上.

*Hint.* 可以利用以下结果: 设四边形  $ABCD$  外切于  $\odot O$ , 则四个切点组成的四边形的对角线的交点和  $ABCD$  的对角线的交点重合.

## 0.5 重心、外心与垂心

在本节中, 我们将单回顾一下几个关于三角形的重心、外心、垂心的基本性质, 在我们后续章节中会用到它们. 其中有一些命题的证明是直接的, 我们会将它们留作习题.

### 0.5.1 三角形的重心与外心

#### 重心

我们先回顾重心的有关知识.

**Definition 0.5.1.** 三角形的三条中线 (median) 交于一点, 称为三角形的重心 (centroid).

三角形的重心有如下性质.

**Proposition 0.5.2.** 设点  $G$  为  $\triangle ABC$  的重心, 则  $S_{\triangle AGB} = S_{\triangle BGC} = S_{\triangle CGA}$ .

**Proposition 0.5.3.** 重心到三边的距离为对应边长之倒数之比.

**Proposition 0.5.4.** 给定三角形  $ABC$ , 重心到三角形三个顶点的距离的平方和最小.

*proof.* 设  $\triangle ABC$  的重心为  $G$ ,  $P$  为任意一点, 则

$$\begin{aligned} PA^2 + PB^2 + PC^2 &= (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 3PG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{PG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 3PG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2. \end{aligned}$$

□

利用重心, 我们可以引入如下的相关定义.

**Definition 0.5.5.**  $\triangle ABC$  的中点三角形 (medial triangle) 是它的三边的中点组成的三角形; 称一个三角形为反补三角形 (anticomplementary triangle), 如果原三角形是它的中点三角形.

**Definition 0.5.6.** 点  $P$  关于  $\triangle ABC$  的补点 (complement point) 是指点  $P'$ , 满足  $\overrightarrow{PG} = 2\overrightarrow{GP'}$ , 其中  $G$  为  $\triangle ABC$  的重心; 此时, 点  $P$  称为点  $P'$  的反补点 (anticomplement point). 记  $P$  关于  $\triangle ABC$  的补点和反补点分别为  $c_{\triangle ABC}P$  和  $a_{\triangle ABC}P$ , 在不引起歧义的情况下可分别简记为  $cP$  和  $aP$ .

**Proposition 0.5.7.** 三角形的重心将其中线分为 2:1 的两部分, 或者说, 三角形的顶点的补点为其对边的中心.

**Proposition 0.5.8.**  $\triangle ABC$  的中点三角形为  $\triangle M_a M_b M_c$  <sup>(21)</sup>, 则  $\triangle ABC$  与  $\triangle M_a M_b M_c$  关于重心  $G$  位似, 且若点  $P, P'$  为这一位似的一对对应点, 则点  $P'$  为点  $P$  的补点.

此外, 重心的概念还可以推广到一般的多边形.

**Definition 0.5.9.** 对于  $n$  边形  $A_1 A_2 \cdots A_n$ , 其重心是满足  $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \cdots + \overrightarrow{GA_n} = 0$  的点  $G$ .

容易看到, 三角形的重心的概念与多边形的中心的概念间是自洽的, 即按  $\triangle ABC$  的三条中线的交点定义的重心  $G$  满足  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$ . 此外, 对于在平面直角坐标系中, 若  $n$  边形的各个顶点的坐标分别为  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , 则显然该多边形的重心的坐标为  $\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}\right)$ .

## 外心

下面来看外心.

**Definition 0.5.10.** 三角形的外接圆圆心称为三角形的外心 (circumcenter).

**Proposition 0.5.11.** 三角形的外心是三角形三边的垂直平分线的交点.

最后, 我们给出几个与三角形的外心或外接圆有关的定义, 我们将在之后用它们.

**Definition 0.5.12.** 定义:

- a.) 对于  $\triangle ABC$  与一点  $P$ , 设  $\triangle BCP, \triangle CAP, \triangle ABP$  的外心分别为  $P_1, P_2, P_3$ , 则称  $\triangle P_1 P_2 P_3$  为点  $P$  关于  $\triangle ABC$  的 Carnot 三角形 (Carnot triangle).
- b.) 一个三角形的外接圆在其三个顶点处的切线围成的三角形叫 切线三角形 (tangential triangle).
- c.) 对于  $\triangle ABC$ , 其外接圆上的劣弧  $\widehat{BC}, \widehat{CA}, \widehat{AB}$  的中点组成的三角形称为 南极点三角形 (circum-circle mid-arc triangle), 其外接圆上的优弧  $\widehat{BAC}, \widehat{CBA}, \widehat{ABC}$  的中点组成的三角形称为 北极点三角形,  $\triangle ABC$  的三个顶点在其外接圆上的对径点 <sup>(22)</sup> 称为 对径点三角形.

## 练习

**Problem 0.41.** 证明(0.5.2)(0.5.3)(0.5.7)(0.5.8).

**Problem 0.42.** 给定多边形  $A_1 \cdots A_n$ , 平面内的动点  $P$  满足  $\sum_{i=1}^n PA_i^2 = \text{const}$ , 证明: 动点  $P$  在一个以该多边形的重心为圆心的定圆上.

**Problem 0.43.** 设  $\triangle ABC$  三边的长度分别为  $a, b, c$ , 外接圆半径为  $R$ , 证明:  $4R \cdot S_{\triangle ABC} = abc$ .

**Problem 0.44.** 给定  $\triangle ABC$ , 在线段  $BC, CA, AB$  上分别取点  $D, E, F$ , 使得  $\frac{DB}{DC} = \frac{EC}{EA} = \frac{FA}{FB}$ , 证明:  $\triangle ABC$  与  $\triangle DEF$  有共同的重心.

(21) 在有关三角形几何的章节中, 我们对点的标号与顶点相对应, 例如, 此处  $M_a, M_b, M_c$  分别为  $BC, CA, AB$  的中点. 之后若无特别声明, 我们对点的标号满足类似的关系, 这样可以略去一些不必要的说明. 我们会使用的这样的每组三个的表示轮换对称性的标号有  $(A, B, C), (D, E, F), (L, M, N), (X, Y, Z), (1, 2, 3)$  五组, 如称  $\triangle ABC$  的垂三角形 (你马上就会看到它的定义) 为  $\triangle H_1 H_2 H_3$ , 则意味着点  $H_1, H_2, H_3$  分别为垂心在直线  $BC, CA, AB$  上的射影; 又如称直线  $l$  截  $\triangle ABC$  的三边分别于点  $X, Y, Z$ , 则意味着  $l$  与  $BC, CA, AB$  直线的交点分别为点  $X, Y, Z$ .

(22) 称点  $P'$  为圆上一点  $P$  的 对径点 (antipodal point), 若  $P'$  在这个圆上且  $PP'$  为该圆的一条直径.

### 0.5.2 三角形的垂心

在本节中, 我们将研究垂心的基本性质.

**Definition 0.5.13.** 三角形的三条高线 (height) 交于一点, 称为三角形的垂心 (orthocenter). (如图0.15)

**Definition 0.5.14.** 一个三角形的三个顶点在各自对边上的射影组成的三角形叫垂三角形 (orthic triangle/orthotriangle)<sup>(23)</sup>.

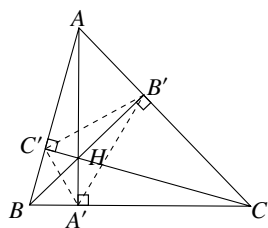


Figure 0.15

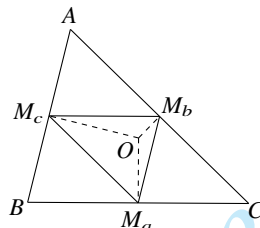


Figure 0.16

我们证明垂心的存在性. 如图0.15, 设已知  $CC' \perp AB, BB' \perp AC, AA' \perp BC, CC' \cap BB' = H$ , 下证点  $A, H, A'$  共线. 而

$$\angle HA'C' \xrightarrow{A', H, C', B \text{ 共圆}} \angle HBC' \xrightarrow{B', C', C, B \text{ 共圆}} \angle ACC' \xrightarrow{A, C', A', C \text{ 共圆}} \angle AA'C',$$

故有  $A, H, A'$  三点共线, 即说明了垂心的存在性.  $\square$

关于垂心, 我们有以下一些有用的性质.

**Proposition 0.5.15.** 三角形的外心是其中点三角形的垂心. (如图0.16)

*proof.* 设  $\triangle ABC$  的外心为  $O$ , 中点三角形为  $\triangle M_a M_b M_c$ , 则显然  $OM_a \perp BC$ , 而  $M_b M_c \parallel BC$ , 则  $OM_a \perp M_b M_c$ . 同理有另两个垂直关系, 则可知  $O$  为垂心.  $\square$

(0.4.7)也可以说明垂心的存在性: 取出一三角形的反补三角形的外心, 则它满足原三角形垂心的条件, 由外心的存在性可推知垂心的存在性.

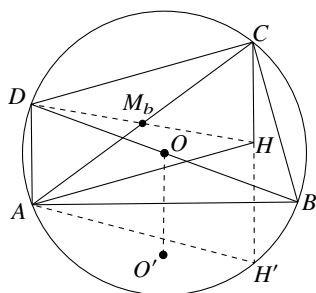


Figure 0.17

**Lemma 0.5.16.** 设  $\triangle ABC$  的垂心为  $H$ , 点  $B$  在  $C$  上的对径点为  $D$ , 则四边形  $ADCH$  为平行四边形.

*proof.* 如图0.17, 记  $\odot O \triangleq \odot(ABC)$ , 直线  $BO$  与  $\odot O$  的另一个交点为  $D$ , 由于  $CH \perp AB, DA \perp AB$ , 故  $AD \parallel CH$ , 同理  $CD \parallel AH$ , 从而四边形  $ADCH$  为平行四边形.  $\square$

(23) 在很多地方它被称为“垂足三角形”, 为避免与我们之后讲的“垂足三角形”混淆, 笔者不采用这一称呼.

**Corollary 0.5.17.** 设  $\triangle ABC$  的垂心为  $H$ , 则  $CH=2R|\cos \angle BCA|$ , 其中  $R$  为  $\triangle ABC$  的外接圆半径.

*proof.* 承(0.5.16)的证明, 由于四边形  $ADCH$  为平行四边形, 因而  $CH=CD=BD|\cos \angle BDA|=2R|\cos \angle ACB|$ .  $\square$

**Lemma 0.5.18.**  $\triangle ABC$  垂心为  $H$ , 外心  $O$  关于  $AB$  的对称点为  $O'$ , 则四边形  $CHO'O$  为平行四边形.

*proof.* 在(0.5.17)的证明中有  $CH \parallel AD$ , 而显然  $OO' \parallel AD$ , 因此  $CH \parallel OO'$ , 从而得证.  $\square$

*another proof.* 设中点三角形为  $\triangle M_a M_b M_c$ , 由原三角形与中点三角形的位似, 注意  $H, O$  为对应点,  $\overline{CH}=2\overline{OM_c}$ , 故  $CH \parallel OO'$ , 即证.  $\square$

**Lemma 0.5.19.**  $\triangle ABC$  的垂心  $H$  关于三角形三边中点的对称点均在  $\odot(ABC)$  上.

*proof.* 在(0.5.17)的证明中,  $\square CDAH$  的对角线互相平分 (参考图0.17), 即  $DH$  过  $AC$  的中点  $M_b$ , 且  $D, H$  关于  $M_b$  对称. 对其余边的情形同理.  $\square$

**Lemma 0.5.20.** 三角形的对径点三角形与中点三角形关于垂心 2:1 位似.

*proof.* 在(0.5.19)的证明中, 已经得到  $D$  为  $B$  的对径点, 而  $M_b = h_{O, 1/2}(H)$ ; 对  $A, C$  的对径点作类似讨论即证.  $\square$

**Lemma 0.5.21.** 三角形的垂心关于三边的对称点均在三角形的外接圆上.

*proof.* 参考图0.17, 延长  $CH$  交外接圆于点  $H'$ , 则由于  $\angle BCH = \angle BAH = \angle BAH'$ , 从而  $H'$  为  $H$  关于  $AB$  边的对称点, 从而  $H$  关于  $AB$  的对称点在外接圆上. 对其他边同理.  $\square$

**Lemma 0.5.22.**  $\triangle ABC$  的垂心为  $H$ , 三条高线分别为  $AA', BB', CC'$ , 点  $A', B', C'$  分别在对应的边上, 则  $AH \cdot A'H = BH \cdot B'H = CH \cdot C'H = 4R^2 |\cos A \cos B \cos C|$ .

*proof.* 如图0.15, 由于高线与对应边垂直, 从而  $A, A', B, B'$  四点共圆, 因而由圆幂定理可得  $AH \cdot A'H = BH \cdot B'H$ , 同理  $AH \cdot A'H = CH \cdot C'H$ . 利用(0.5.17)可得

$$AH \cdot A'H = AH \cdot BH |\cos BHA'| = |(2R \cos A)| \cdot |(2R \cos B)| |\cos C| = 4R^2 |\cos A \cos B \cos C|. \quad \square$$

## 练习

**Problem 0.45.** 证明: 三角形的垂心到其某一顶点的距离是外心到该顶点的对边的距离的两倍.

**Problem 0.46.** 设  $\triangle ABC$  的垂心和外心分别为点  $O, H$ , 证明:  $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ .

**Problem 0.47.** 设  $\triangle ABC$  的垂心和外心分别为点  $O, H$ , 证明: 直线  $BO, BH$  关于  $\angle ABC$  的平分线对称.

**Problem 0.48.** 给定  $\triangle ABC$ , 在线段  $BC, CA, AB$  上分别取点  $D, E, F$ , 证明: 当  $\triangle DEF$  为  $\triangle ABC$  的垂三角形时, 其周长最小.

**Problem 0.49 (Hagge).** 设  $\triangle ABC$  的垂心为  $H$ , 在三角形的三边上分别取点  $X, Y, Z$ , 使  $AX, BY, CZ$  交于一点  $P$ . 证明:

(1) 设  $\odot(AX), \odot(BY), \odot(CZ)$  与  $\odot(BC), \odot(CA), \odot(AB)$  交于点  $A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$ , 则这六个交点共圆;

(2) 过点  $H$  分别引  $AX, BY, CZ$  的垂线, 与  $\odot(BC), \odot(CA), \odot(AB)$  分别交于点  $X_1, X_2; Y_1, Y_2; Z_1, Z_2$ , 则这六个交点共圆;

(3) 过点  $H$  分别引  $AX, BY, CZ$  的垂线, 与  $\odot(AX), \odot(CA), \odot(AB)$  分别交于点  $X'_1, X'_2; Y'_1, Y'_2; Z'_1, Z'_2$ , 则这六个交点共圆.



### 0.5.3 Euler 线与 Euler 圆

在本节的最后, 我们来研究 Euler 线与 Euler 圆, 它们揭示了重心、外心、垂心间的联系.

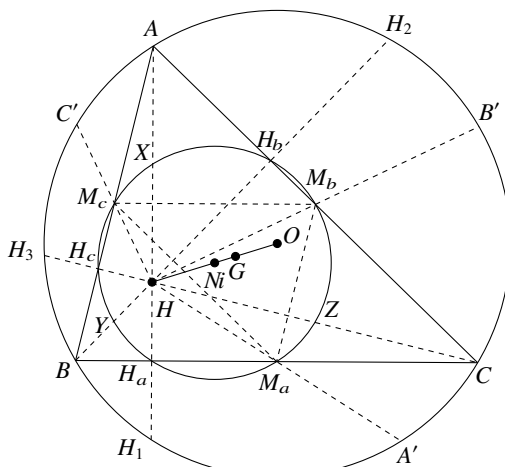


Figure 0.18

**Theorem 0.5.23** (Euler 线定理). 三角形的外心、重心、垂心在同一直线上依序排列, 且外心为垂心的补点.

外心、重心、垂心所共直线称为三角形的 Euler 线 (Euler line), 下记某三角形  $\Delta$  的 Euler 线为  $\mathcal{E}_\Delta$ , 在不引起歧义的情况下简记为  $\mathcal{E}$ .

*proof.* 如图0.18, 由(0.5.15), 考虑  $\Delta ABC$  与其中点三角形  $\Delta M_a M_b M_c$  之间的位似, 则两三角形的垂心为一组对应点, 即垂心  $H$  对应于外心  $O$ , 因而由(0.5.8)知命题成立.  $\square$

**Theorem 0.5.24** (九点圆/Euler 圆定理). 记  $H$  为  $\Delta ABC$  的垂心, 则  $\Delta ABC$  三边的中点, 三条高线的垂足, 以及线段  $AH, BH, CH$  的中点九点共圆, 该圆称为九点圆 (nine-point circle)/Euler 圆 (Euler circle).

下记  $\Delta ABC$  的九点圆和外接圆分别为  $N_{\Delta ABC}, C_{\Delta ABC}$ , 在不引起混淆的情况下简作  $N, C$ .

*proof.* 如图0.18, 利用(0.5.21)和(0.5.19), 可知垂心  $H$  关于三边的对称点  $H_1, H_2, H_3$  以及关于三边中点的对称点  $A', B', C'$  均在外接圆上, 关于垂心取系数为  $1/2$  的位似即证.  $\square$

**Theorem 0.5.25.** 三角形的九点圆圆心在 Euler 线上, 且为外心与垂心连线的中点, 也是外心的补点.(如图0.18)

*proof.* 由(0.5.24)可知  $N = h_{H, 1/2}(C)$ , 从而九点圆圆心  $N$  为外心  $O$  和垂心  $H$  的中点. <sup>(24)</sup> 结合(0.5.23)可知九点圆圆心为外心的补点.  $\square$

**Proposition 0.5.26.** 重心为九点圆与外接圆的内位似中心.

*proof.* 由 Euler 线以及九点圆的知识可知中心将九点圆圆心与外心的连线分为  $1:2$  的两段, 这正是两圆的半径之比.  $\square$

最后, 我们引入下述定义:

**Definition 0.5.27.** 一点关于三角形三边的对称点组成的三角形称为该点关于该三角形的反射三角形; 给定  $\Delta ABC$ , 点  $A$  关于  $BC$  的对称点、点  $B$  关于  $CA$  的对称点、点  $C$  关于  $AB$  的对称点组成的三角形称为  $\Delta ABC$  的映像三角形 (reflection triangle)<sup>(25)</sup>.

(24) 今后, 在学习了等角共轭的性质之后, 由于垂心和外心等角共轭, 这一关系也可以由(4.4.6)得到.

(25) 在许多地方也将映像三角形称为反射三角形, 但本书中为了将这两种定义区分开来, 我们使用“映像三角形”的称呼.

**Proposition 0.5.28.** 三角形的垂心为外心的反射三角形<sup>(26)</sup>的外心.

*proof.* 三角形外心在三边上的射影组成的三角形为中点三角形, 它的外接圆为九点圆, 显然中点三角形与外心的反射三角形关于外心 1:2 位似, 则关于外心取系数为 2 的位似后中点三角形的外心变为外心的反射三角形的外心, 而中点三角形的外心为九点圆圆心, 结合(0.5.25)即证.  $\square$

关于九点圆及九点圆圆心的更多性质, 我们将在第五章中继续探讨.

## 练习

**Problem 0.50.** 证明: 三角形的反补三角形的垂心在 Euler 线上, 且为三角形垂心关于外心的对称点.

**Problem 0.51.** 证明: 三角形的九点圆的圆心到三个顶点的距离以及到垂心的距离之平方和等于三角形外接圆半径的平方的三倍.

**Problem 0.52.** 设点  $G, H$  分别为一个钝角三角形的重心和垂心, 证明:  $\odot(MH)$  以及该三角形的切线三角形的外接圆均过  $N, C$  的两个交点.

**Problem 0.53.** 证明: 给定三角形, 其映像三角形与九点圆圆心的反射三角形 2:1 位似.

**Problem 0.54.** 给定点  $H$ 、圆  $\omega$  以及  $\omega$  上一点  $A$ , 求作  $\triangle ABC$  使得  $\omega=C$  且  $H$  为  $\triangle ABC$  的垂心. 请完整地进行讨论, 并确定有解的条件.

## 0.6 内心与旁心

在本节中, 我们将简要地介绍内心与旁心的相关知识.

### 0.6.1 内心与旁心的基本性质

**Definition 0.6.1.** 定义:

a.) 对于  $\triangle ABC$ , 存在一圆与同时与线段  $AB, BC, CA$  相切, 称为  $\triangle ABC$  的内切圆 (incircle); 存在一圆同时与线段  $BC$  以及线段  $AB, AC$  的延长线相切, 称为  $\triangle ABC$  的A-旁切圆, 同理可定义  $B$ -旁切圆与  $C$ -旁切圆, 这三个圆统称为  $\triangle ABC$  的旁切圆 (excircle).

下记某三角形  $\Delta$  的内切圆为  $I_\Delta$ , 在不引起歧义的情况下简记为  $I$ ; 分别记该三角形的  $A, B, C$ -旁切圆为  $I_{a\Delta}, I_{b\Delta}, I_{c\Delta}$ , 在不引起歧义的情况下可分别简记为  $I_a, I_b, I_c$ .

b.) 三角形的内切圆圆心称为三角形的内心 (incenter); 三角形的旁切圆的圆心叫做三角形的旁心 (excenter), 一个三角形有三个旁心. 三角形的内心和旁心统称为等心.

(26) 在含义明确时, 可省略参考三角形, 如本处指外心关于原三角形的反射三角形. 一般而言, 所省略的参考三角形均为最先给定的原三角形, 常用  $\triangle ABC$  记之.



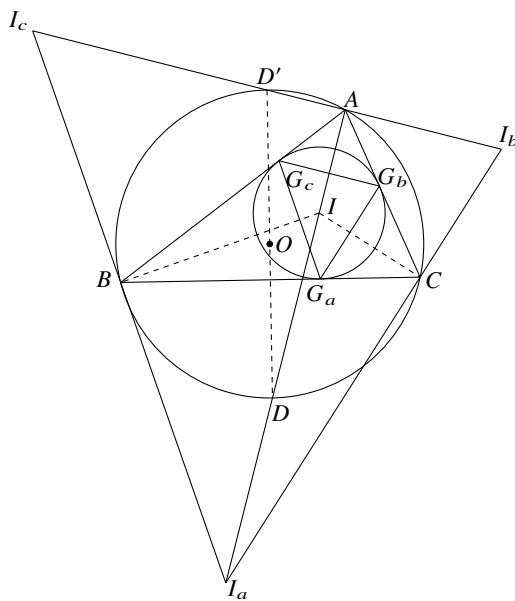


Figure 0.19

容易知道, 三角形的内心是三角形的三条角平分线的交点, 三角形的旁心是三角形两个角的外角平分线和剩下一个角的内角平分线的交点, 对于  $\triangle ABC$ , 若它的某个旁心在  $\angle A$  的内角平分线上, 我们称之为  $\triangle ABC$  的 A-旁心, 同理可定义它的 B-旁心 与 C-旁心.

**Definition 0.6.2.** 一个三角形的旁心三角形 (excentral triangle) 是它的三个旁心组成的三角形; 一个三角形的切点三角形 (contact/intouch triangle) 是它的内切圆与三边的切点组成的三角形; 一个三角形的旁切点三角形 (extouch triangle) 是它的三个旁切圆与对应边 (指线段) 的切点组成的三角形.

我们简单回顾一下几个关于三角形的内心、旁心的基本性质, 在我们后续的章节中会用到它们.

**Theorem 0.6.3** (鸡爪定理). (如图0.19)  $\triangle ABC$  的内心为  $I$ , 延长  $AI$  交  $\odot(ABC)$  于点  $D$ , 则  $BD=ID=CD$ , 从而  $D$  为  $\triangle BIC$  的外心.

*proof.*  $\angle DBI = \angle DBC + \angle CBI = \angle DAC + \angle CBI = \angle BAI + \angle ABI = \angle BID$ , 故  $BD=ID$ , 同理  $CD=ID$ . □

**Proposition 0.6.4.** (如图0.19)  $\triangle ABC$  的旁心三角形为  $\triangle I_a I_b I_c$ , 内心为点  $I$ , 则点  $I_a, I_b, C$  共线,  $I_a, I_c, B$  共线,  $I_b, I_c, A$  共线,  $I, A, I_a$  共线,  $I, B, I_b$  共线,  $I, C, I_c$  共线; 此外,  $I$  为  $\triangle I_a I_b I_c$  的垂心. 即:  $\triangle ABC$  为  $\triangle I_a I_b I_c$  的垂三角形.

*proof.* 由内心和旁心的定义易知. □

**Corollary 0.6.5.** 三角形的垂心是其垂三角形的内心.

*proof.* 三角形的是其旁心三角形的垂三角形, 那么垂三角形的旁心三角形就是原三角形, 而垂三角形的内心就是垂三角形的旁心三角形的垂心, 即证. □

**Corollary 0.6.6.** 三角形的外接圆是其旁心三角形的九点圆, 三角形的外心是其旁心三角形的九点圆圆心.

*proof.* 由(0.6.4)显然. □

**Proposition 0.6.7.** 三角形的旁心三角形与切点三角形位似.(如图0.19)

*proof.* 设旁心三角形为  $\triangle G_a G_b G_c$ , 旁心三角形为  $\triangle I_a I_b I_c$ , 则  $AG_b = AG_c$ , 故  $G_b G_c$  垂直于  $\angle BAC$  的平分线  $AI_a$ , 而同时  $I_b I_c \perp AI_a$ , 因此  $G_b G_c \parallel I_b I_c$ , 同理  $G_a G_c \parallel I_a I_c$ ,  $G_a G_b \parallel I_a I_b$ , 从而位似.  $\square$

**Proposition 0.6.8.** (如图0.19) 记  $\triangle ABC$  的旁心三角形为  $\triangle I_a I_b I_c$ , 内心为  $I$ ,  $I_b I_c$  与  $C$  的另一交点为  $D'$ ,  $AI_a$  与  $C$  的另一交点为  $D$ , 则

- (1) 点  $D, D'$  分别为  $\widehat{BAC}, \widehat{BC}$  的中点,  $D, D'$  为  $C$  上的对径点;
- (2) 点  $D$  为  $I_b I_c$  的中点.

*proof.* (1) 由于  $A, B, C, D'$  共圆, 故而  $\angle D'BC = \angle CAI_b = \angle BAD' = \angle BCD'$ , 因此  $D'$  平分  $\widehat{BAC}$ ; 而显然  $D$  平分  $\widehat{BC}$ , 则  $D, D'$  为对径点.

(2) 由(0.6.4),  $\triangle ABC$  为  $\triangle I_a I_b I_c$  的垂三角形, 则  $C_{\triangle ABC} = N_{\triangle I_a I_b I_c}$ , 而九点圆在三角形的某边上除高线的垂足外的另一交点就是该边的中点, 故  $D$  为  $I_b I_c$  的中点.  $\square$

**Corollary 0.6.9.** 三角形的北极点三角形是旁心三角形的中点三角形.

**Corollary 0.6.10.** 三角形与其南极点三角形对应顶点的连线交于原三角形的内心.<sup>(27)</sup>

**Proposition 0.6.11.** 给定  $\triangle ABC$ , 其切点三角形  $\triangle G_a G_b G_c$  与南极点三角形  $\triangle D_a D_b D_c$  位似, 且位似比为内切圆与外接圆的半径之比.

*proof.* 设内心为  $I$ , 则显然  $IA \perp G_b G_c$ ; 由南极点三角形中“弧中点”易知  $AD_a \perp D_b D_c$ , 而由鸡爪定理可知  $I \in AD_a$ , 故  $IA \perp D_b D_c$ . 从而  $G_b G_c \parallel D_b D_c$ , 对其余几边是类似的, 从而可得位似, 而显然这两个三角形的外接圆分别为  $\triangle ABC$  的内切圆与外接圆, 从而位似比为这两个圆的半径之比.  $\square$

**Proposition 0.6.12.**  $\triangle ABC$  的内心  $I$  为南极点三角形  $\triangle D_a D_b D_c$  的垂心.

*proof.* 由(0.6.11)的证明易知  $IA \perp D_b D_c$ , 同理有另外两个垂直关系.  $\square$

**Proposition 0.6.13.** 设  $\triangle ABC$  的切点三角形为  $\triangle G_a G_b G_c$ , 过  $G_a$  作  $G_c P \perp G_a G_b$  于点  $P$ , 则  $\triangle AG_b P \sim \triangle BG_a P$ .

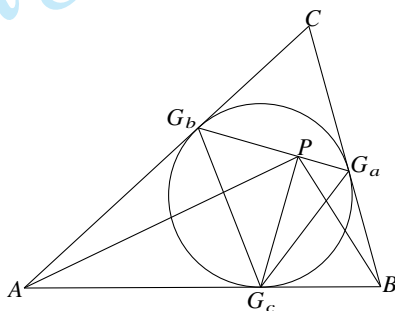


Figure 0.20

练习

**Problem 0.55.** 证明(0.6.4).

**Problem 0.56.** 设  $\triangle ABC$  的  $I_a$  切边  $BC$  于点  $D$ . 证明:  $AB + BD = AC + CD$ .

**Problem 0.57.** 证明: 三角形的旁心三角形的外接圆的半径为原三角形的外接圆的两倍.

(27) 用我们之后的 §3.4 中的“透视中心”的话来说, 三角形的内心是南极点三角形与原三角形的透视中心.

**Problem 0.58.** 设  $\triangle ABC$  的垂三角形为  $\triangle H_a H_b H_c$ , 旁心三角形为  $\triangle I_a I_b I_c$ ,  $\triangle AH_b H_c$ ,  $\triangle BH_c H_a$ ,  $\triangle CH_a H_b$  的内心分别为  $X_a, X_b, X_c$ , 证明:  $X_b X_c \parallel I_b I_c$ .

**Problem 0.59.** 设  $\triangle ABC$  满足  $AB < AC < BC$ , 设点  $I$  为  $\triangle ABC$  的内心, 记  $\triangle ABC$  的内切圆为  $\omega$ . 设点  $X$  是直线  $BC$  上的异于点  $C$  的一点, 满足过  $X$  且平行于  $AB$  的直线与  $\omega$  相切; 点  $Y$  为直线  $BC$  上的异于点  $B$  的一点, 满足过  $Y$  且平行于  $AB$  的直线与  $\omega$  相切. 直线  $AI$  与  $C$  的另一交点为点  $P$ , 点  $K, L$  分别为边  $AC, AB$  上的中点. 证明:  $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$ .

## 0.6.2 内心与旁心的度量性质

本小节中, 我们介绍一些内心和旁心相关的有关度量的性质.

**Proposition 0.6.14.** 对于  $\triangle ABC$ , 记三边  $BC, CA, AB$  之长分别为  $a, b, c$ ,  $p = \frac{a+b+c}{2}$  为半周长, 则:

(1) 设  $I$  与边  $BC, CA, AB$  的切点分别为  $G_a, G_b, G_c$ , 那么  $AG_b = AG_c = p - a$ ,  $BG_a = BG_c = p - b$ ,  $CG_a = CG_b = p - c$ ;

(2) 设  $I_a, I_b, I_c$  与边  $BC, CA, AB$  的切点分别为  $N_a, N_b, N_c$ , 则  $AN_b = BN_a = p - c$ ,  $CN_a = AN_c = p - b$ ,  $CN_b = BN_c = p - a$ .

*proof.* 此命题的证明是直接的, 我们将其留给读者.  $\square$

**Proposition 0.6.15.** 对于  $\triangle ABC$ , 记三边  $BC, CA, AB$  之长分别为  $a, b, c$ ,  $p = \frac{a+b+c}{2}$  为半周长,  $S$  为  $\triangle ABC$  的面积, 则:

(1)  $I$  的半径  $r = \frac{S}{p}$ ;

(2)  $I_a, I_b, I_c$  的半径分别为  $r_a = \frac{S}{p-a}$ ,  $r_b = \frac{S}{p-b}$ ,  $r_c = \frac{S}{p-c}$ .

*proof.* 显然  $S = S_{\triangle AIB} + S_{\triangle BIC} + S_{\triangle CIA} = \frac{1}{2}(AB \cdot r + BC \cdot r + CA \cdot r) = pr$ , 即得 (1) 的结果. (2) 的证明是类似的, 我们将其留给读者.  $\square$

*proof.* 由  $AB$  与内切圆相切可知  $\angle PG_b G_c = \angle G_a G_c B$ ,  $\angle PG_a G_a = \angle G_b G_c A$ , 从而

$$\frac{PG_a}{PG_b} = \frac{G_a G_c \cos \angle PG_a G_c}{G_b G_c \cos \angle PG_b G_c} = \frac{(2BG_a \cos \angle BG_c G_a) \cos \angle AG_c G_b}{(2AG_b \cos \angle AG_c G_b) \cos \angle BG_c G_a} = \frac{BG_a}{AG_a},$$

结合  $\angle BG_a P = \angle AG_b P$  可知命题成立.  $\square$

**Proposition 0.6.16.** 设  $\triangle ABC$  外接圆半径为  $R$ , 则内切圆半径  $r = 4R \prod_{\text{cyc}} \sin \frac{A}{2}$ .

*proof.* 如图0.19所示, 由几何关系可得 (倒数第二个等号应用了正弦定理)

$$\begin{aligned} r &= IC \sin \frac{\angle BCI}{2} = 2II_a \sin \angle AI_a C \sin \frac{\angle BCI}{2} \stackrel{B, I, C, I_a \text{共圆}}{=} \frac{BD=AD}{2BD} 2BD \sin \frac{\angle IBC}{2} \sin \frac{\angle BCI}{2} \\ &= 4R \sin \frac{\angle IAB}{2} \sin \frac{\angle IBC}{2} \sin \frac{\angle BCI}{2} = 4R \prod_{\text{cyc}} \sin \frac{A}{2}. \end{aligned} \quad \square$$

**Lemma 0.6.17.** 记三角形  $ABC$  的内心和垂心分别为点  $I, H$ , 内切圆半径为  $r$ , 外接圆半径为  $R$ , 则

$$HI^2 = 2r^2 - 4R^2 \cos A \cos B \cos C.$$

*proof.* 由(0.6.16)可得  $AI = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} = 4R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ , 同时由(0.5.17)可知  $AH = 2R|\cos A|$ , 并注意  $\angle IAH = \frac{A}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - C\right) = \frac{C-B}{2}$ , 对  $\triangle AHI$  用余弦定理有

$$\begin{aligned}
 HI^2 &= AI^2 + AH^2 - 2AI \cdot AH \cos \angle IAH \\
 &= 16R^2 \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} + 4R^2 \cos^2 A - 16R^2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos A \cos \frac{B-C}{2} \\
 &= 16R^2 \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} + 4R^2 \cos^2 A - 16R^2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos A \left( \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) \\
 &= 16R^2 \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} (1 - \cos A) + 4R^2 \cos^2 A - 16R^2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos A \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \\
 &= 32R^2 \prod_{\text{cyc}} \sin^2 \frac{A}{2} + 4R^2 \cos A \cos(B+C) - 4R^2 \cos A \sin B \sin C \\
 &= 32R^2 \prod_{\text{cyc}} \sin^2 \frac{A}{2} - 4R^2 \cos A (\cos B \cos C - \sin B \sin C) - 4R^2 \cos A \sin B \sin C \\
 &= 2r^2 - 4R^2 \prod_{\text{cyc}} \cos A. \quad \square
 \end{aligned}$$

其中第一步的最后一个等号用到了如下的结论:

**Proposition 0.6.18.**  $\triangle ABC$  的垂三角形  $\triangle H_a H_b H_c$  的内切圆半径为  $\rho = 2R|\cos A \cos B \cos C|$ , 其中  $R$  为外接圆半径.

*proof.*  $\triangle H_a H_b H_c$  的外接圆为九点圆, 其半径为  $R/2$ , 利用(0.6.16), 同时注意  $A, H_b, H_c, H$  共圆,  $B, H_c, H_a, H$  共圆,  $C, H_a, H_b, H$  共圆, 可知

$$\begin{aligned}
 \rho &= 2R \prod_{\text{cyc}} \sin \frac{\angle H_b H_a H_c}{2} = 2R \sin \angle H_c H_a H \sin \angle H_a H_b H \sin \angle H_b H_c H \\
 &= 2R \sin \angle ABH \sin \angle BCH \sin \angle CAH = 2R|\cos A \cos B \cos C|.^{(28)} \quad \square
 \end{aligned}$$

## 练习

**Problem 0.60.** 证明(0.6.14)以及(0.6.15)(2).

**Problem 0.61.** 设  $\triangle ABC$  的  $B$ -旁心为  $I_b$ ,  $BI_b$  与  $AC$  的第二交点为点  $E$ , 证明: 线段  $EI_b$  在边  $AB$  上的投影的长度等于  $\frac{AC}{2}$ .

**Problem 0.62** (Euler-Chapple 公式). 设  $\triangle ABC$  的外接圆半径为  $R$ , 内切圆半径为  $r$ , 内心与外心的距离为  $d$ , 证明:  $d^2 = R^2 - 2Rr$ . 由此证明: 若存在一个三角形内接于圆  $\omega_1$  并外切于圆  $\omega_2$ , 则还存在无数个三角形内接于圆  $\omega_1$  并外切于圆  $\omega_2$ .

**Problem 0.63.** 设  $\triangle ABC$  的外接圆半径为  $R$ , 垂三角形的内切圆半径为  $\rho$ , 垂心与外心的距离为  $d$ , 证明:  $d^2 = R^2 - 4R\rho$ .

**Problem 0.64.** 设  $\triangle ABC$  的  $C, I, I_a, I_b, I_c$  的半径分别为  $R, r, r_a, r_b, r_c$ , 证明:  $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ .

(28) 倒数第二个等号应用了正弦定理.

# 第一章 圆锥曲线的基本性质

从本章开始,我们将正式进入第一部分的学习. 不同于通常讲述平面几何的方式, 我们将从圆锥曲线开始, 先学习圆锥曲线的定义与基本性质, 并将圆锥曲线的观点渗透到后面各方面的知识中去.

## 1.1 圆锥曲线的定义

**Definition 1.1.1.** 定义:

a.) 如图 1.1, 椭圆 (ellipse) 是到两个 [相异的] 定点  $F_1, F_2$  的距离之和为定值的  $P$  的轨迹, 定点  $F_1, F_2$  称为椭圆的两个焦点 (focus, pl. -ci), 两个焦点的距离称为椭圆的焦距 (focal distance).

b.) 椭圆有两条对称轴  $a, b$ , 一条是直线  $a: F_1F_2$ , 称为椭圆的长轴 (major axis)<sup>(1)</sup>; 另一条是线段  $F_1F_2$  的中垂线  $b$ , 称为椭圆的短轴 (minor axis). 椭圆的长轴与椭圆的两个交点称为椭圆的短轴顶点, 椭圆的短轴与椭圆的两个交点称为椭圆的短轴顶点. 直线  $a, b$  的交点为椭圆的中心 (center).

c.) 以椭圆的长轴为直径的圆称为椭圆的 [外] 辅助圆 ([major] auxiliary circle), 以椭圆的短轴为直径的圆称为椭圆的内辅助圆 (minor auxiliary circle).

d.) 椭圆的焦距与椭圆的长轴长度之比称为椭圆的离心率 (eccentricity).

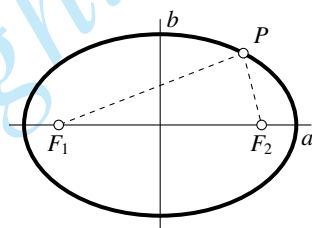


Figure 1.1

**Remark.** 在上述定义中, 可以看到, 当点  $F_1, F_2$  趋向于重合于一点  $O$  时, 椭圆趋的离心率趋于 0, 且它趋于一个以  $O$  为圆心的圆. 因此, 有的地方会将圆也算作一种特殊的椭圆; 在本书中, 许多情况下所说的椭圆并不包括圆, 但读者可以通过取极限将椭圆的性质迁移到圆上; 而另一些情况下的椭圆并不包括圆, 读者容易从上下文中判断所谓的“椭圆”是否包括圆. 至少在开始第三章之前, 我们所说的“椭圆”均不包括圆.

**Proposition 1.1.2.** 设点  $F_1, F_2$  为椭圆的两个焦点, 则对于该椭圆内的一点  $X$ ,  $XF_1 + XF_2$  小于长轴长度; 对于该椭圆外一点  $X$ ,  $XF_1 + XF_2$  大于长轴长度.

*proof.* 设直线  $F_1X$  交该椭圆于点  $Y$ , 则当点  $X$  在椭圆内时,  $XF_1 + XF_2 < XF_1 + XY + YF_2 = YF_1 + YF_2 =$  长轴长度; 当点  $X$  在椭圆外时,  $XF_1 + XF_2 = F_1Y + YX + YF_2 > YF_1 + YF_2 =$  长轴长度.  $\square$

(1) 有时椭圆的长轴指椭圆的长轴被椭圆所截得的线段, 后面椭圆的“短轴”、双曲线的“实轴”同理. 总可以通过上下文方便地区分我们所说的是线段还是直线, 例如在下面的“d.)”中, “长轴长度”中的“长轴”显然是指线段.

**Definition 1.1.3.** 定义:

- a.) 如图 1.2, 双曲线 (hyperbola) 是到两个 [相异的] 定点  $F_1, F_2$  的距离之差的绝对值为定值的  $P$  的轨迹, 定点  $F_1, F_2$  称为双曲线的两个焦点, 两焦点的距离称为双曲线的焦距.
- b.) 双曲线存在两渐近线 (asymptote)  $l_1, l_2$  (2), 当它们互相垂直时称该双曲线为等轴的 (equilateral).
- c.) 双曲线也有两条对称轴  $a, b$ , 一条是直线  $a: F_1F_2$ , 称为实轴 (real axis); 另一条是线段  $F_1F_2$  的中垂线  $b$ , 称为虚轴 (imaginary axis). 双曲线的实轴与双曲线的两个焦点称为双曲线的实轴顶点; 双曲线的虚轴分双曲线为两个不连通的部分, 其中的一部分称为双曲线的一 [个] 支. 直线  $a, b$  的交点为双曲线的中心 (center).
- d.) 以双曲线的实轴为直径的圆称为双曲线的 [外] 辅助圆 (auxiliary circle).
- e.) 双曲线的焦距与双曲线的实轴长度之比称为双曲线的离心率 (eccentricity).
- f.) 双曲线、椭圆和圆统称为有心圆锥曲线.

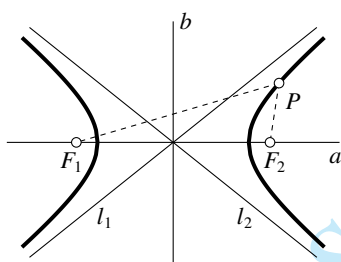


Figure 1.2

**Proposition 1.1.4.** 设点  $F_1, F_2$  为椭圆的两个焦点, 则对于该双曲线内一点  $X$ ,  $|XF_1 - XF_2|$  小于实轴长度; 对于该双曲线外一点  $X$ ,  $|XF_1 - XF_2|$  大于实轴长度.

**Definition 1.1.5.** 定义:

- a.) 如图 1.3, 抛物线 (hyperbola) 是到定点  $F$  的距离与到定直线  $l$  的距离相等的点  $P$  的轨迹, 定点  $F$  称为抛物线的焦点, 定直线  $l$  称为抛物线的准线 (directrix, pl. -ices).
- b.) 抛物线有一对称轴  $l'$ , 称为抛物线的轴 (axis, pl. axes), 它与抛物线的交点称为抛物线的顶点.
- c.) 椭圆、双曲线与抛物线统称为圆锥曲线 (conic [section]). 离心率 (eccentricity) 是圆锥曲线的基本几何特征, 抛物线的离心率为 1, 圆的离心率为 0.

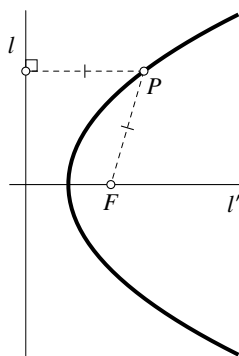


Figure 1.3

**Proposition 1.1.6.** 对于抛物线内一点  $X$ ,  $XF$  小于  $X$  到准线的距离; 对于抛物线外一点  $X$ ,  $XF$  大于  $X$  到准线的距离.

(2) 即, 当双曲线上一点  $P$  [沿某一方向] 不断远离原点时, 点  $P$  与直线  $l_1$  或  $l_2$  的距离趋于零.

在本章中我们先介绍圆锥曲线的最重要的性质, 它们与我们后续讨论的内容密切相关; 而关于圆锥曲线的更多的初等性质, 在第二章中会进一步介绍.

另外, 上面关于三种圆锥的定义中, 对称性是显然的; 但其他的一些定义实际上还依赖于更严格的讨论, 比如双曲线的渐近线的存在性, 这些内容的严格论证会在第二章中进行, 对这些严格的论证并不感兴趣的读者可以直接略过.

## 练习

**Problem 1.1.** 证明(1.1.4)(1.1.6).

**Problem 1.2.** 证明:

(1) 设椭圆的两个焦点分别为点  $F_1, F_2$ , 点  $P$  为椭圆上一点 (不在长轴上), 则  $\triangle PF_1F_2$  的  $F_1$ -旁切圆与椭圆的长轴切于更靠近  $F_1$  的长轴顶点处.

(2) 设双曲线的两个焦点分别为点  $F_1, F_2$ , 点  $P$  为双曲线上一点 (不在实轴上), 则  $\triangle F_1PF_2$  的内切圆与双曲线的实轴切于与点  $P$  在同一支上的顶点处.

**Problem 1.3.** 设点  $A, B$  均在某一抛物线上, 且直线  $AB$  过该抛物线的焦点  $F$ , 证明:  $\odot(AB)$  与抛物线的准线相切.

**Problem 1.4.** 证明:

(1) 所有抛物线均相似.

(2) 两条具有相同的顶点和对称轴的抛物线位似.

**Problem 1.5.** 设点  $A, B$  为某抛物线上两点, 直线  $AB$  过抛物线的焦点, 证明:  $\odot(AB)$  恒与抛物线的准线相切.

## 1.2 二次曲线的标准方程与分类

本节从解析的角度来讨论圆锥曲线的概念, 内容与主体部分关系不大, 但有助于说明一些概念.

从解析的角度, 我们可以给出如下定义:

**Definition 1.2.1.** 一条圆锥曲线 (conic)/二次曲线 (curve of second degree) 是在某直角坐标系  $xOy$  内坐标满足方程 (系数  $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c$  为实数且  $a_{11}, a_{12}, a_{13}$  不同时为零)

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0 \quad (1.1)$$

的点的轨迹. 称一条二次曲线是退化的 (degenerate), 如果(1.1)式左侧 [在复数域内] 可以分解成两个一次式的乘积.

通过旋转和平移坐标系, 可以把非退化的二次曲线的方程转化为以下的几种标准形式<sup>(3)</sup>:

a.) 方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0) \quad (1.2)$$

表示一个长、短轴分别在  $x$  轴和  $y$  轴上的 [实] 椭圆, 其中  $a, b$  分别称为半长轴 (semi-major axis) 和半短轴 (semi-minor axis), 即它们分别为长、短轴的长度的一半, 且该椭圆的焦点位于点  $(\pm c, 0)$  ( $c \triangleq \sqrt{a^2 - b^2}$ ) 处.

(3) 一般性的转化方法会在第四部分介绍



b.) 方程

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0) \quad (1.3)$$

表示一条实轴和虚轴分别在  $x$  轴和  $y$  轴上的双曲线, 其中  $a, b$  分别为半实轴 (semi-real axis)(即实轴长度的一半) 和半虚轴 (semi-imaginary axis), 且焦点位于点  $(\pm c, 0)$  ( $c \triangleq \sqrt{a^2 + b^2}$ ) 处. 以半虚轴为半径、圆心在双曲线中心的圆称为双曲线的内辅助圆 (minor auxiliary circle).

上式表示的双曲线的渐进线为直线  $y = \frac{b}{a}x$  和  $y = -\frac{b}{a}x$ . 当  $a = b$  时, 它表示一条等轴双曲线.

c.) 方程

$$y^2 = 2px \quad (p > 0) \quad (1.4)$$

表示一条顶点在坐标原点、轴在  $x$  轴上 (且开口向右) 的抛物线, 其焦点为点  $(\frac{p}{2}, 0)$ , 准线为直线  $x = -\frac{p}{2}$ .

d.) 方程

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (r > 0) \quad (1.5)$$

表示一个中心在坐标原点、半径为  $r$  的圆.

e.) 方程

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (a, b > 0) \quad (1.6)$$

表示两相交直线  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$  和  $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ , 这是因为上式左侧可分解为  $(\frac{x}{a} + \frac{y}{b})(\frac{x}{a} - \frac{y}{b})$ . 它是退化的.

f.) 方程

$$y^2 = a^2 \quad (a > 0) \quad (1.7)$$

表示两平行直线  $y = a$  和  $y = -a$ , 这是因为上式可以写成  $(y+a)(y-a) = 0$ . 它是退化的.

g.) 方程

$$y^2 = 0 \quad (1.8)$$

表示直线  $y = 0$ , 由于  $y = 0$  是上式的二重根, 所以称上式表示两重合直线. 它是退化的.

h.) 方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad (a > b > 0) \quad (1.9)$$

表示一个虚椭圆 (imaginary ellipse).

i.) 方程

$$x^2 + y^2 = -r^2, \quad (r > 0) \quad (1.10)$$

表示一个虚圆 (imaginary circle)<sup>(4)</sup>.

j.) 方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad (a, b > 0) \quad (1.11)$$

表示一个点, 或称为两相交于实点的共轭虚直线. 上式可以分解为  $(\frac{x}{a} + i\frac{y}{b})(\frac{x}{a} - i\frac{y}{b}) = 0$ , 是退化的.

当  $a = b$  时, 上式化为  $x^2 + y^2 = 0$ , 它可以视为一个半径为零的圆, 有时也称之为点圆.

k.) 方程

$$y^2 = -a^2 \quad (a > 0) \quad (1.12)$$

表示两平行共轭虚直线. 上式可以写成  $(y+ai)(y-ai) = 0$ , 是退化的.

(4) 同样地, 有的地方会将它算作一种特殊的虚椭圆, 即在(1.9)中令  $a, b$  趋于同一正数.



所有的二次曲线都可以通过坐标的平移和旋转化为上述 11 种标准形式, 其中 a.)b.)d.)e.)h.)i.)j.) 为有心二次曲线, c.)f.)g.)k.) 为无心二次曲线; a.)b.)c.)d.)e.)f.)g.) 为实二次曲线, h.)i.)j.)k.) 为虚二次曲线; a.)b.)c.)d.)h.)i.) 为非退化二次曲线, e.)f.)g.)j.)k.) 为退化二次曲线.

今后, 在大多数情况下, 我们所说的“二次曲线”指的是非退化的实二次曲线, 不过有时会可能会包括退化二次曲线, 或包括上述所有的 11 种二次曲线, 读者总能够从上下文中知道我们指的是哪种二次曲线.

此外, 今后, 我们不会严格地区分“二次曲线”与“圆锥曲线”两种称呼, 它们将作为同义词使用, 不过在纯几何的场景下我们更倾向于使用“圆锥曲线”一词. 亦即“圆锥曲线”将不再仅限于称呼 a.)b.)c.)d.) 四种曲线 (不过绝大多数情况下是如此), 也有可能包括其他类型的二次曲线, 读者也总能够从上下文中知道我们指的是哪种圆锥曲线.

最后, 对于虚二次曲线, 我们作如下说明: 与通常我们考虑的 Εὐκλείδης(Euclidean, 欧氏) 平面不同, 这些虚二次曲线, 实际上已将  $x, y$  的取值范围延拓到了复数集  $\mathbb{C}$  上了, 此时, 我们称对于所有的点  $(x, y)(x, y \in \mathbb{C})$  构成的平面为复 Εὐκλείδης 平面 ( $\mathbb{C}^2$ ), 其中两点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  间的距离仍与通常的实 Εὐκλείδης 平面 ( $\mathbb{R}^2$ ) 中一样可按  $d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$  定义 (称两点之间的距离按如此方式计算的度量结构为 Εὐκλείδης 度量). 此外, 复 Εὐκλείδης 平面中, 方程  $Ax + By + C = 0 (A, B \text{ 为复数且不同时为零})$  仍与通常的实 Εὐκλείδης 平面 ( $\mathbb{R}^2$ ) 中一样表示一条直线, 且当  $B \neq 0$  时斜率  $k = -\frac{A}{B}$ , 当  $B = 0$  时说它的斜率不存在或为无穷大. 以后, 除非特别说明, “Εὐκλείδης 平面” (或“欧氏平面”) 均指通常的实 Εὐκλείδης 平面.

这样, (1.9) 式表示的虚椭圆就是到点  $(-i\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$  与  $(i\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$  的距离之和为  $ai$  的点的轨迹; (1.10) 就表示一个中心在坐标原点、半径为  $ri$  的圆; (1.11) 式就表示两虚直线  $\frac{x}{a} + i\frac{y}{b} = 0$  与  $\frac{x}{a} - i\frac{y}{b} = 0$ , 它们交于实点  $(0, 0)$ <sup>(6)</sup>; (1.12) 式就表示直线  $y = ai$  与  $y = -ai$ . 这也解释了虚二次曲线的名称的来源.

另外, 对于最一般的复 Εὐκλείδης 平面中的二次曲线, 其系数可以取复数, 也可对它们作进一步的分类, 但与本书内容关联不大, 故不在此作进一步的介绍, 感兴趣的读者可以查阅相关文献.

**Problem 1.6.** 证明:

- (1) 式(1.2)表示一个焦距为  $2\sqrt{a^2 - b^2}$  的椭圆;
- (2) 式(1.3)表示一条焦距为  $2\sqrt{a^2 + b^2}$  的双曲线;
- (3) 式(1.4)表示一条焦点与准线的距离为  $p$  的抛物线.

**Problem 1.7.** 对于下列二次曲线的方程, 证明它们均表示一条实的有心二次曲线, 判断其具体类型并求出其离心率以及焦点的坐标:

- (1)  $y = \frac{1}{x}$ ;
- (2)  $x^2 + xy + y^2 = 1$ .

**Problem 1.8.** \* 证明: 过平面上任意四点不共线的五点有且仅有一条 (可能退化的) 二次曲线, 过平面上任意三点不共线的五点有且仅有一条 (非退化的) 圆锥曲线.

## 1.3 圆锥曲线的光学性质

本节将探讨圆锥曲线的最重要的几何性质——光学性质.

(5) 在复数域中, 根式函数为多值函数, 因此我们一般的做法是取主值, 例如规定宗量辐角的取值范围为  $[0, 2\pi)$ ; 不过本书中基本不会涉及这一点, 读者不必深究, 只需知道, 对  $a > 0$ , 取  $\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$  (而非等于  $-i\sqrt{a}$ ).

(6) 对于复 Εὐκλείδης 平面中的点  $(x, y)$ , 称它是一个实点, 当且仅当  $x, y$  均是实数; 否则称它为一个虚点. 类似地, 可将其中的直线分为实直线和虚直线, 其中实直线上有无数个实点, 而其余的直线则是虚直线. 可以证明 (why?): 对于直线  $Ax + By + C = 0 (A, B, C \text{ 不同时为零})$ , 它是实直线的充要条件为, 存在非零常数  $\lambda$ , 使得  $\lambda A, \lambda B, \lambda C$  均为实数; 一条虚直线上最多有一个实点.

为方便起见, 在本节中, 若无特殊说明,  $F_1, F_2$  均用于表示椭圆或双曲线的焦点,  $F$  均用于表示抛物线的焦点.

### 1.3.1 圆锥曲线的光学性质

**Theorem 1.3.1** (圆锥曲线的光学性质 (optical property)). 圆锥曲线有以下性质:

- (1) 直线  $l$  过椭圆  $\alpha$  上一点  $P$ , 则  $l$  平分  $\angle F_1PF_2$  的外角  $\Leftrightarrow l$  与  $\alpha$  相切.
- (2) 直线  $l$  过双曲线  $\alpha$  上一点  $P$ , 则  $l$  平分  $\angle F_1PF_2 \Leftrightarrow l$  与  $\alpha$  相切.
- (3) 直线  $l$  过抛物线  $\alpha$  上一点  $P$ , 设  $P'$  为点  $P$  在准线上的射影, 则  $l$  平分  $\angle FPP'$   $\Leftrightarrow l$  与  $\alpha$  相切.

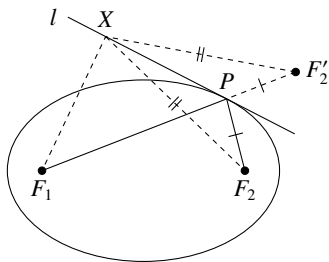


Figure 1.4

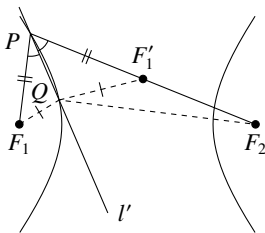


Figure 1.5

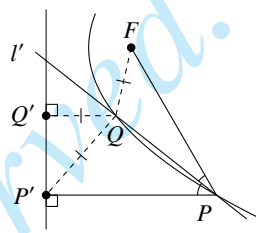


Figure 1.6

*proof.* 只证明 “ $\Rightarrow$ ” 方向, “ $\Leftarrow$ ” 方向的证明类似.

(1) 如图 1.4, 取  $l$  上的点  $X$ , 由相切知  $X$  在  $\alpha$  外, 则由 (1.1.2) 得  $F_1X + F_2X \geq F_1P + F_2P (\forall X)$ , 且等号成立当且仅当  $P=X$ , 即  $P$  是满足  $F_1P + F_2P$  最小的点  $X$  的唯一位置. 这表明  $l$  平分  $\angle F_1PF_2$  的外角, 若否, 则点  $F_1, P, F'_2$  不共线, 作  $F_2$  关于  $l$  的对称点  $F'_2$ , 设  $F_1F'_2 \cap l = X$ , 则  $F_1X + F_2X = F_1X + F'_2X = F_1F'_2 < F_1P + TP = F_1P + F_2P$ , 矛盾!

(2) 用反证法. 如图 1.5, 设若不然,  $\angle F_1PF_2$  的平分线  $l'$  与  $C$  的另一交点为点  $Q$ , 并取  $F_1$  关于直线  $l'$  的对称点  $F'_1$ , 则容易证明  $\triangle F_1QP \cong \triangle F'_1QP$ , 且点  $P, F'_1, F_2$  共线. 由此有  $F_2Q - QF'_1 = F_2Q - QF_1 = F_2P - PF_1 = F_2P - PF'_1 = F_2F'_1$ , 与  $F'_1 + QF'_1 > QF_2$  矛盾!

(3) 用反证法. 如图 1.6, 设若不然,  $\angle FPP'$  的平分线  $l'$  与  $C$  的另一交点为点  $Q$ , 并取  $Q$  在准线上的射影  $Q'$ . 由  $\triangle FPQ \cong \triangle P'Q$  可得  $QP' = QF$ , 但  $QF = QF'$ , 矛盾!  $\square$

**Remark.** 在上述证明中, 我们默认了以下命题成立: 直线与一条圆锥曲线相切等价于它们有且仅有一个焦点. 事实上, 这几乎是对的, 但对于双曲线和抛物线而言, 直线与它们仅有一个交点时不一定相切——对直线平行于双曲线的渐近线以及直线平行于抛物线的情况即是如此. 对上述情况, 可以考虑直线与圆锥曲线交于两点的情形, 然后让其中一点趋于无穷.

**Corollary 1.3.2.** 共焦点的椭圆与双曲线在其交点处正交<sup>(7)</sup>.

下面的几个定理是圆锥曲线的光学性质的推论.

**Theorem 1.3.3.** 椭圆  $C$  在弦  $PQ$  的端点处的切线交于点  $R$ , 若弦  $PQ$  过焦点  $F_1$ , 则点  $R$  为  $\triangle PQF_2$  的  $\angle F_2$  内的旁心, 且该旁切圆切  $PQ$  于点  $F_1$  (i.e.  $RF_1 \perp PQ$ ).

(7) 曲线的交角定义为两曲线在它们的交点处的切线的夹角, 正交即交角为  $90^\circ$ .

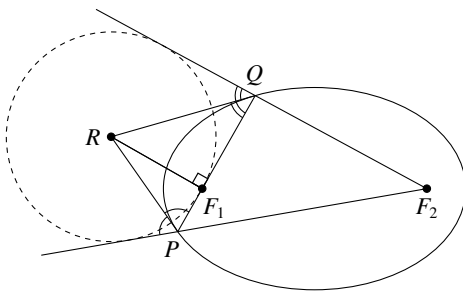


Figure 1.7

*proof.* 由(1.3.1) 可知点  $R$  为该三角形的旁心. 设旁切圆切  $PQ$  于点  $X$ , 则由几何知识可得  $XP + PF_2 = XQ + QF_2$ , 满足这一条件的点  $X$  只能为点  $F$ .  $\square$

双曲线也有类似的性质, 其证明是类似的:

**Theorem 1.3.4.** 过双曲线的焦点  $F_1$  的直线交双曲线于点  $P, Q$ , 双曲线在点  $A, B$  处的切线交于点  $R$ , 则点  $R$  为  $\triangle PQF_2$  的旁心或内心, 且  $RF_1 \perp PQ$ . 其中, 当点  $P, Q$  在双曲线的同一支上时  $R$  为内心, 在双曲线的异支上时  $R$  为旁心.

下面的两个定理描述了有心圆锥曲线的辅助圆的性质.

**Theorem 1.3.5.** 设点  $F_1$  为椭圆或双曲线  $\alpha$  的某一焦点, 则点  $F_1$  在  $\alpha$  的任一切线上的射影在  $\alpha$  的辅助圆上.

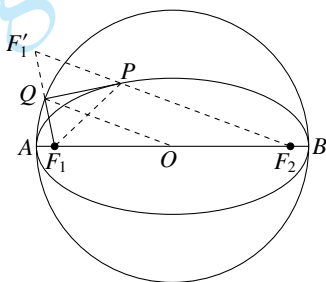


Figure 1.8

*proof.* 仅证椭圆的情形, 对双曲线是类似的. 如图1.8, 设  $\alpha$  的另一焦点为点  $F_2$ , 中心为点  $O$ , 两长轴顶点为点  $A, B$ ,  $\alpha$  的一条切线的切点为点  $P$ ,  $F_1$  在切线上的射影为  $Q$ . 只要证  $OQ$  恒等于半长轴半.

作  $F_1$  关于切线  $PQ$  的对称点, 由光学性质知点  $F'_1, P, F_2$  共线, 显然  $QO$  为  $\triangle F_1F'_1F_2$  的中位线, 故

$$OQ = \frac{F'_1F_2}{2} = \frac{PF_1 + PF_2}{2} = \text{const} = \frac{AF_1 + AF_2}{2} = \frac{AF_1 + BF_1}{2} = \text{半长轴}. \quad \square$$

**Proposition 1.3.6.** 设椭圆(双曲线) $\alpha$  的焦点为  $F_1, F_2$ , 中心为  $O$ .  $F_1, F_2$  在  $\alpha$  的任一切线上的射影分别为  $A, B$ , 则  $\overline{F_1A} \cdot \overline{F_2B} = a^2 - c^2$ , 其中  $a$  为半长轴(半实轴),  $c$  为半焦距.

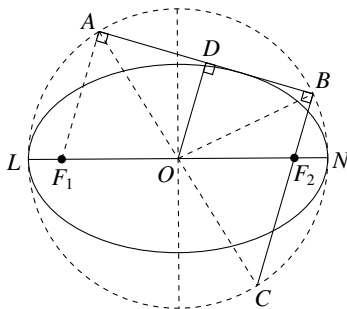


Figure 1.9

*proof.* 只证椭圆的情形, 双曲线的情形类似. 如图1.26, 设  $O$  在  $AB$  上的射影为点  $D$ , 长轴顶点为点  $L, N$ , 则由(1.3.5)知  $OA=OB=a$ . 根据对称性, 直线  $OA, BF_2$  的交点  $C$  到  $O$  的距离也为  $a$ , 点  $A, B, C, L, N$  均在辅助圆上, 因此  $AF_1 \cdot BF_2 = CF_2 \cdot BF_2 = LF_2 \cdot NF_2 = (a-c)(a+c) = a^2 - c^2$ .  $\square$

### 练习

#### Problem 1.9.

- (1) 证明圆锥曲线的光学性质的“ $\Leftarrow$ ”方向;
- (2) 证明(1.3.2);
- (3) 证明双曲线的情形下(1.3.4)(1.3.5)(1.3.6).

**Problem 1.10.** 若两个椭圆有一个焦点重合, 证明: 两椭圆相切的充要条件是它们有共同的外辅助圆.

**Problem 1.11.** 设点  $A, B$  为椭圆  $\alpha$  的两个长轴顶点,  $\alpha$  在其上一动点  $P$  处的切线交外辅助圆于点  $M, N$ , 且直线  $AM$  与  $BN$  交于椭圆外, 证明:  $\tan \angle BAM \cdot \tan \angle ABN = \text{const.}$

### 1.3.2 圆锥曲线的等角性质

在本小节中, 对于有心圆锥曲线, 我们将再介绍几个由圆锥曲线的光学性质导出的重要定理. 当然对抛物线而言, 也有一些类似的性质, 但具有一定特殊性, 我们将在 §1.5 中统一讲解.

**Theorem 1.3.7** (Poncelet 小定理). 过椭圆或双曲线  $\alpha$  外一点作  $\alpha$  的两条切线, 切点分别为点  $X, Y$ , 则  $\angle F_1PX + \angle F_2PY = 0$ . 具体而言:

- (1) 若  $\alpha$  为椭圆, 则  $\angle F_1PX = \angle F_2PY$  (如图1.10所示).
- (2) 若  $\alpha$  为双曲线, 则当点  $X, Y$  在同一支上时,  $\angle F_1PX + \angle F_2PY = 180^\circ$  (如图1.11所示); 当点  $X, Y$  不在同一支上时,  $\angle F_1PX = \angle F_2PY$ .

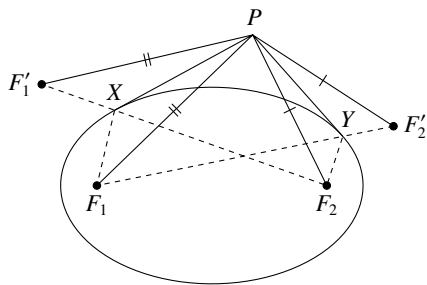


Figure 1.10

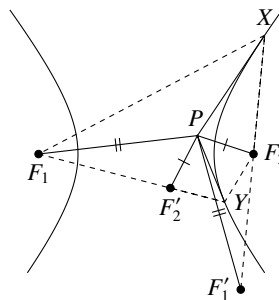


Figure 1.11

*proof.* (1) 对椭圆的情形, 如图 1.10, 分别作  $F_1$  关于  $PX$  的对称点  $F'_1$  和  $F_2$  关于  $PY$  的对称点  $F'_2$ , 则由光学性质可知  $F'_1, X, F_2$  共线,  $F'_2, Y, F_1$  共线, 由此易证  $\triangle F'_1PF_2 \cong \triangle F_1PF'_2$ , 那么  $\angle F'_1PF_2 = \angle F_1PF'_2$ , 从而  $\angle F'_1PF_1 = \angle F_2PF'_2$ , 因此  $\angle F_1PX = \angle F_2PY$ .

(2) 双曲线时的证明是类似的, 在图 1.11 中已将一种情形的辅助线作出, 具体过程留作习题.  $\square$

在上面的定理的证明过程中, 利用同样的一对全等三角形, 我们还可以得到如下的两个定理:

**Theorem 1.3.8.** 过椭圆或双曲线  $\alpha$  外一点作  $\alpha$  的两条切线, 切点分别为点  $X, Y$ , 则  $\angle PF_1X + \angle PF_1Y = 0$ . 具体而言:

(1) 若  $\alpha$  为椭圆, 则  $\angle PF_1X = \angle PF_1Y$ ;

(2) 若  $\alpha$  为双曲线, 则当点  $X, Y$  在同一支上时  $\angle PF_1X = \angle PF_1Y$ , 当  $X, Y$  在异支上时  $\angle PF_1X + \angle PF_1Y = 180^\circ$ .

下面的两个定理是 Poncelet 小定理的应用.

**Theorem 1.3.9** (Monge 圆定理). 记椭圆 (双曲线) 的半长轴 (半实轴) 为  $a$ , 半焦距为  $c$ , 则:

(1) 过椭圆  $\alpha$  外一点作  $\alpha$  的两条切线, 切点分别为点  $X, Y$ , 则满足  $XP \perp YP$  的点  $P$  的轨迹为一个中心在椭圆的中心  $O$  点处的圆, 其半径的平方  $r^2 = 2a^2 - c^2$ .

(2) 过双曲线  $\alpha$  外一点作  $\alpha$  的两条切线, 切点分别为点  $X, Y$ , 若双曲线的离心率小于  $\sqrt{2}$ , 则满足  $XP \perp YP$  的点  $P$  的轨迹为一个中心在双曲线的中心  $O$  点处的圆, 其半径的平方  $r^2 = 2a^2 - c^2$ ; 当双曲线的离心率大于等于  $\sqrt{2}$  时这样的点  $P$  不存在<sup>(8)</sup>.

上面  $P$  的轨迹形成的圆称为椭圆或双曲线的 Monge 圆 (Monge's circle).

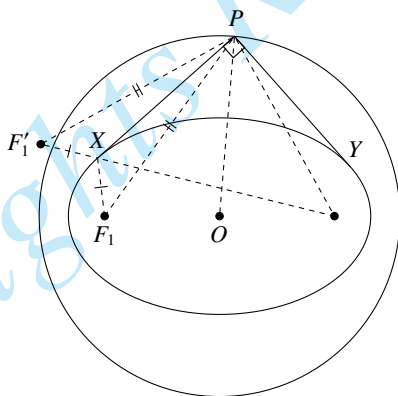


Figure 1.12

*proof.* 对椭圆的情形, 如图 1.12, 作点  $F_1$  关于  $PX$  的对称点  $F'_1$ , 则

$$\angle F'_1PF_2 = \angle F'_1PF_2 + \angle XPF_2 = \angle XPF_1 + \angle XPF_2 \stackrel{(1.3.7)}{=} \angle XPY = 90^\circ,$$

从而

$$F_1P^2 + F_2P^2 = PF_1'^2 + PF_2^2 = F_1F_1'^2 = (2a)^2 = \text{const},$$

利用中线长公式可知

$$PO^2 = (PF_1^2 + PF_2^2)/2 - F_1F_2^2/4 = \text{const} = 2a^2 - c^2,$$

从而原命题得证. 双曲线时的证明是类似的.  $\square$

**Remark.** 上面的证明中, 我们通过  $PF_1^2 + PF_2^2 = \text{const}$  推知  $P$  的轨迹为一个圆, 实际上, 可以证明<sup>(9)</sup>:

给定点  $P_1, \dots, P_n$  及常数  $k_1, \dots, k_n$ , 则满足  $k_1XP_1^2 + \dots + k_nXP_n^2 = \text{const}$  的点  $X$  的轨迹为一个圆 (实圆或虚圆或点圆), 该圆被称为 Fermat-Απολλώνιος 圆.

(8) 此处我们仅考虑普通的 Εὐκλείδης 平面; 若允许在复 Εὐκλείδης 平面中考虑, 这样的点  $P$  总是存在.

(9) 请你想一想, 这是为什么?

**Theorem 1.3.10** (Graves). 如图 1.13 所示, 对于椭圆  $\alpha$  外一点  $X$ , 可作椭圆的两条切线, 切点为  $M, N$ , 则当  $\widehat{MLN} + MX + XN = \text{const}$  时, 点  $X$  的轨迹为一个与  $\alpha$  共焦点的椭圆.<sup>(10)</sup>

*proof.* 可以知道, 曲线  $\beta$  应该是光滑的. 我们只需要证明对于曲线  $\beta$  上的任意一点  $X$ ,  $X$  处的切线为  $\angle F_1 X F_2$  的平分线. 由(1.3.7),  $\angle F_1 X N = \angle F_2 X M$ , 从而  $\angle M X N, \angle F_1 X N$  的外角平分线重合, 记之为  $l$ . 取直线  $l$  上任意一点  $Y$ , 过  $Y$  作  $\alpha$  的切线, 切点为点  $L, R$ . 不妨设  $Y$  在  $X$  的左侧, 记  $Y L \cap X M = P$ .

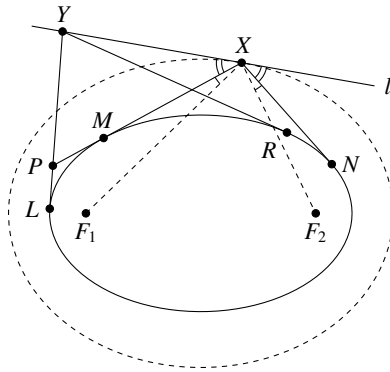


Figure 1.13

易知  $YN < \widehat{RN} + YR, \widehat{LM} < LP + PM^{(11)}$ , 由  $l$  为  $\angle NXP$  外角平分线可知  $PX + PN < PY + YN$ , 从而

$$\begin{aligned} MX + XN + \widehat{NLM} &< MX + XN + \widehat{NL} + LP + PM \\ &= PX + XN + \widehat{NL} + LP < PY + YN + \widehat{NL} + LP = LY + YN + \widehat{NL} \\ &< LY + YR + \widehat{RN} + \widehat{NL} = LY + YR + \widehat{RNL}. \end{aligned}$$

由此可知点  $Y$  必定在曲线  $\beta$  之外, 由此  $l$  与  $\beta$  仅有一个交点, 进而可知原命题成立.  $\square$

顺便一提, 圆锥曲线可以用于解决看似与之无关的问题, 下面便是这样的例子.

**Theorem 1.3.11** (Urquhart). 对于凸四边形  $ABCD$ ,  $AB \cap CD = E, AD \cap CB = F$ , 若  $AB + BC = AD + DC$ , 则  $AE + EC = AF + FD$ .

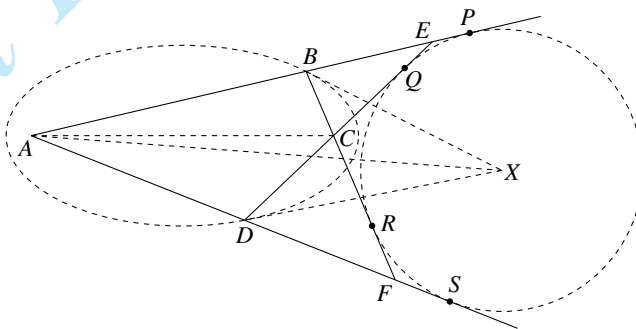


Figure 1.14

*proof.* 如图1.14, 由条件, 存在以  $A, C$  为焦点且同时过点  $B, D$  的椭圆  $\alpha$ , 设  $\angle ABC, \angle ADC$  的外角平分线交于点  $X$ , 则由光学性质可知  $BX, DX$  均为  $\alpha$  的切线, 则由(1.3.8)可知  $AX$  平分  $\angle EAF$ .

(10) 如果不追求语言的精确性, 这一定理可以用如下的方式较为通俗地叙述: 一根不可伸长的软绳套在椭圆  $\alpha$  上, 用一支笔套在软绳中并将软绳绷紧, 则当用笔在软绳的约束下绕椭圆  $\alpha$  转过一圈时, 笔在纸上划过一个与  $\alpha$  共焦点的椭圆  $\beta$ .

(11) 第二个不等式从直观上看是显然的, 至于如何完全严谨地证明, 并不在本课程的讨论范围内. 如果读者知道 Cauchy-Crofton 定理, 这一结果就是其直接推论.



由  $BX, FX, AX$  分别平分  $\angle CBE, \angle CDF, \angle BAD$ , 点  $X$  到直线  $AB, BC, CD, DE$  的距离相等, 故  $ABCD$  存在以  $X$  为圆心的旁切圆, 设切点为  $P, Q, R, S$ , 则由切线长定理:

$$AE + EC = AE + EP - EA + EC = AP + QC = AS + RC = AS - FS + FR + CR = AF + CF. \quad \square$$

感兴趣的读者可以再尝试用常规的平面几何方法来证明.

## 练习

### Problem 1.12.

- (1) 证明(1.3.8);
- (2) 证明(1.3.7)(1.3.9)的双曲线的情形.

**Problem 1.13.** 一个  $2n$  边形 ( $2n$ -polygon) 外切于圆锥曲线, 点  $F$  为圆锥曲线的一个焦点. 将该  $2n$  边形的边交替涂上黑色和白色, 证明: 所有黑色边相对于点  $F$  的张角之和为  $180^\circ$ .

**Problem 1.14.** 一椭圆内接于一凸四边形 (convex quadrilateral), 且其两个焦点分别在该四边形的两条对角线 (diagonal) 上, 证明: 该四边形的对边长度之积相等.

**Problem 1.15.** 给定  $\triangle ABC$ ,  $D$  为其外接圆上  $\widehat{BC}$  的中点, 在线段  $BD, CD$  上分别取点  $E, F$  使得  $2\angle EAF = \angle BAC$ . 过点  $A$  作  $AG \perp EF$  于点  $G$ . 证明: 点  $G$  在一个半径为  $(AB+AC)$  的定圆上.

**Problem 1.16.** 设平面内有一光滑的椭圆形镜面, 椭圆内有一点光源, 它向椭圆形镜面上的某处发出一束细光束, 且该光束所在直线不过椭圆的两个焦点. 今后, 这一光束会在椭圆形镜面上发生无穷次反射, 证明: 今后所有的反射光线均与某一有心圆锥曲线相切.

## 1.4 立体几何视角下的圆锥曲线

在本节中, 我们借助立体几何的方法, 来探究圆锥曲线的性质.

### 1.4.1 投影观点下的圆锥曲线

#### 中心投影

我们在 §1.1 中就知道, 圆锥曲线是圆、椭圆、双曲线、抛物线的总称, 那么聪明的读者一定会想: 这四种曲线与“圆锥”又有什么关系呢? 在本节中, 我们将探究四种圆锥曲线与圆锥之间的关系, 这也将解释“圆锥曲线”这一称呼的来源.

考虑如下的一个问题:

给定一个圆  $\omega$ , 过其中心作垂直于圆所在平面的垂线, 并在其上选定一个点  $S$ , 则所有连接  $S$  与圆上一点的直线 (称为圆锥的一条母线 (ruling)) 形成了一个圆锥 (cone). 那么, 对于一个平面  $\pi$ ,  $\pi$  截此圆锥所得的曲线<sup>(12)</sup>  $\alpha$  会是什么形状呢?

a.) 若  $\pi$  平行于圆  $\omega$  所在的平面, 则显然  $\alpha$  是一个圆.

b.) 若  $\pi$  与圆锥的所有母线均相交, 如图1.15所示, 在圆锥内内接两个与截面  $\pi$  分别相切于点  $F_1, F_2$ . 对于截线上的任意一点  $X$ , 记直线  $SX$  与两个球的切点分别为点  $Y_1, Y_2$ , 则  $Y_1X = F_1X, Y_2X = F_2X$ , 从而  $F_1X + F_2X = Y_1X + Y_2X = Y_1Y_2$  为定值, 因此截线  $\alpha$  为一个椭圆.

c.) 对于恰有两条母线与  $\pi$  平行的情形, 如图1.16, 辅助线已经在图中作出, 类似地可以证明  $\alpha$  为双曲线, 具体过程留给读者.

(12) 即  $\pi$  与圆锥  $S-\omega$  的所有公共点的集合.

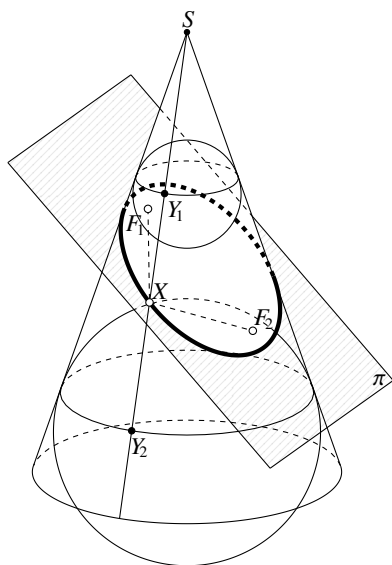


Figure 1.15

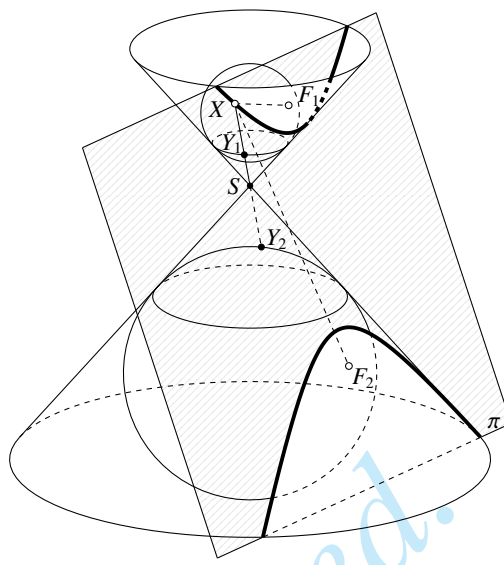


Figure 1.16

在上面的 b.)c.) 中, 我们通过作两个内切球的方法证明了截线分别为椭圆和双曲线, 这种方法最先由数学家 Germinal Pierre Dandelin, 故称这两个内切球为 Dandelin 双球 (Dandelin spheres).

d.) 对于恰有两条一线与  $\pi$  平行的情形, 我们下面来证明截线为抛物线.

如图1.17, 在圆锥内内接一个与平面  $\pi$  相切于点  $F$  的球, 该球与圆锥相切于一圆, 该圆所在的平面记为  $\sigma$ . 令  $l = \sigma \cap \pi$ . 对于  $\pi$  上的任意一点  $X$ , 记直线  $SX$  与所接球切于点  $Y$ , 则  $XY = XF$ ; 同时, 记点  $X$  在  $l$  上的射影为点  $Z$ , 注意  $\pi$  与圆锥的某一母线平行, 则直线  $XF$  与平面  $\sigma$  的夹角和圆锥的母线与平面  $\sigma$  的夹角相等, 特别地, 直线  $XZ, XY$  与  $\sigma$  的夹角相等, 故  $XZ = XY$ . 从而  $XF = XZ$ , 即证.

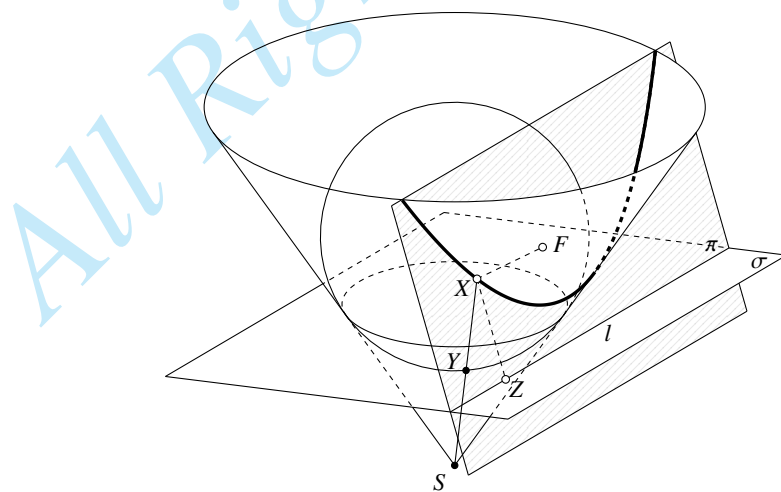


Figure 1.17

上面的讨论也正说明了“圆锥曲线”这一称呼的来源. 此外, 由此可知, 若在圆锥顶点  $S$  处放置一点光源, 则它会将圆锥底面的圆投影到平面  $\pi$  上而变成一般的圆锥曲线. 因此, 我们说, 圆锥曲线是圆的中心投影 (central projection).



## 平行投影

除了圆锥之外, 若将圆锥换成圆柱 (cylinder), 如图1.18, 可以类似地内接两个球, 从而证明: 一平面斜截圆柱所得的截线仍然为椭圆. 那么, 光源从这个圆柱正上方的无穷远出照射下来, 可以将圆柱底面的圆投影到平面  $\pi$  上而变成椭圆. 因此, 我们说, 椭圆又可以看成是圆的平行投影 (parallel projection).

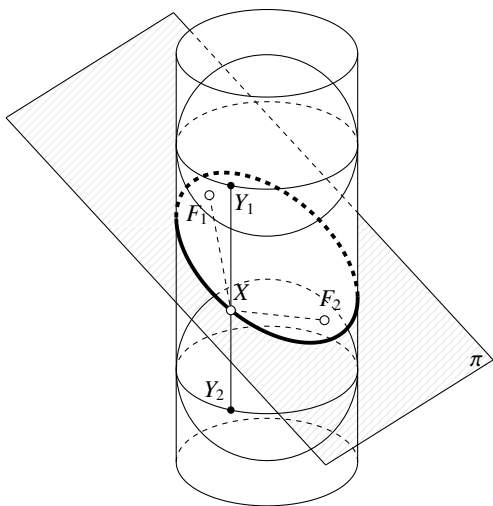


Figure 1.18

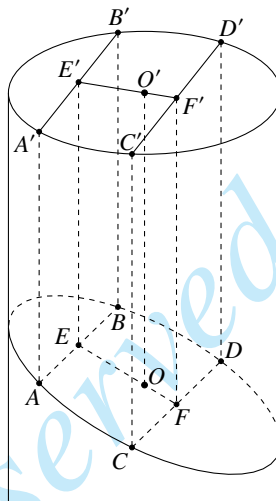


Figure 1.19

**Proposition 1.4.1.** 椭圆的一族平行弦<sup>(13)</sup>的轨迹为一条过中心的直线, 称上述直线为椭圆的一条直径 (diameter).

*proof.* 设椭圆  $\alpha$  有两条互相平行的弦  $AB$  和  $CD$ ,  $\alpha$  的中心为点  $O$ , 弦  $AB, CD$  的中点分别为点  $E, F$ , 则只要证明点  $E, F, O$  共线.

如图1.19, 利用平行投影, 将  $\alpha$  视为  $\odot O'$  在平行投影后的像, 即取以  $\odot O'$  为底面的圆柱, 使得  $\alpha$  为圆柱与某一平面的交线, 过点  $A, B, C, D, E, F, O$  作圆柱母线<sup>(14)</sup>的平行线, 分别与  $\odot O'$  交于点  $A', B', C', D', E', F', O'$ , 则这些点在平行投影之后就是  $\alpha$  上的对应点.

注意平面  $A'ABB' \parallel$  平面  $C'CDD'$ , 而这两个平面同时垂直于  $\odot O'$  所在平面, 故平面  $A'ABB'$ , 平面  $C'CDD'$  与  $\odot O'$  平面的交线  $A'B', C'D'$  互相平行. (\*)

由  $AA' \parallel EE' \parallel BB'$  得  $\frac{A'E'}{B'E'} = \frac{AE}{BE} = 1$ , 则点  $E'$  是  $A'B'$  的中点, 同理点  $F'$  也是  $C'D'$  的中点. (\*\*)

注意  $A'B', C'D'$  是  $\odot O'$  的弦, 则由垂径定理可知点  $O'E' \perp A'B', O'F' \perp C'D'$ .

而已证  $A'B' \parallel C'D'$ , 因此点  $E', O', F'$  共线, 则在中心投影至椭圆上之后, 点  $E, O, F$  共线.  $\square$

实际上, 在上述证明过程中, 我们可以将其中的几个证明步骤进行推广与总结, 得到以下的结论:

**Proposition 1.4.2.** 中心投影具有如下性质:

- (1) 共线的点在中心投影后仍共线, 交于一点的线在中心投影后仍交于一点;
- (2) 共线线段的长度之比在中心投影后保持不变;
- (3) 平行的直线在中心投影之后仍然平行.

(13) 类似于圆中的情形, 称一条线段为一圆锥曲线的弦, 如果该线段的两个端点均在该圆锥曲线上.

(14) 圆柱表面平行于圆柱中轴线的直线称为圆柱的母线.

在(1.4.2)中, (1) 是显然的, (2) 由(1.4.1)的 “(\*\*)” 部分的证明推广得到, (3) 由(1.4.1)的 “(\*)” 部分的证明推广得到.

根据(1.4.1), 给定椭圆, 可用如下方法用直尺和圆规作出椭圆的焦点:

1. 利用(1.4.1), 作出椭圆的两条直径, 其交点便是椭圆的中心  $O$ .
2. 以  $O$  为圆心, 作一圆, 与椭圆交于四点, 这四个点形成一个矩形 (rectangle). 由对称性, 矩形的两条对角线所成角的两条平分线即为椭圆的长轴和短轴.
3. 以椭圆的一个短轴顶点为圆心, 半长轴为半径作圆, 与长轴的交点即为椭圆的两个焦点.

## 练习

### Problem 1.17.

- (1) 证明: 中心投影的情形 b.) 得到的截线  $\alpha$  为双曲线.
- (2) 证明: 平行投影将圆投影为椭圆.

### Problem 1.18. 证明平行投影的下列性质:

- (1) 平行线段的长度之比在平行投影后保持不变;
- (2) 对应三角形的面积之比在平行投影后保持不变.

**Problem 1.19.** 过椭圆  $\alpha$  外一点  $P$  作  $\alpha$  的两条切线, 切点分别为点  $X, Y$ . 设点  $O$  为  $\alpha$  的中心, 证明:  $OP$  平分线段  $XY$ .

**Problem 1.20.** 在中心投影和平行投影中, 圆锥或圆柱被一个平面所截, 均能得到一条圆锥曲线. 那么这两种情形中, 被平面截的几何体有何共同点? 更进一步地, 对于一般的具有柱对称性的几何体, 它在满足什么条件时, 它被平面截得的曲线总是一条圆锥曲线?

## 1.4.2 圆锥曲线的第二定义

利用与上一节中的 Dandelin 双球类似的构造, 我们还可以得出另外一些有趣的结论.

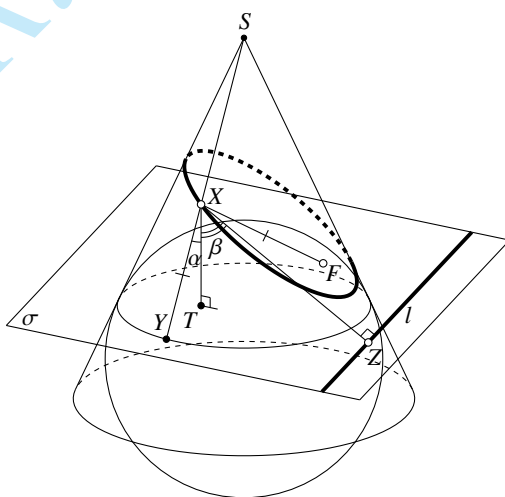


Figure 1.20

如图1.20, 平面  $\pi$  截一以  $S$  为顶点的圆锥得到的交线为圆锥曲线<sup>(15)</sup>, 我们来继续探究它的性质.

(15) 图中作出的是椭圆的情形, 但下述讨论对任意的圆锥曲线均成立

圆锥的一个内切球与  $\pi$  相切于点  $F$ . 与上一节中的抛物线的情形类似, 记圆锥与所作球相切而得的圆所在的平面为  $\sigma$ ,  $\sigma \cap \pi = l$ , 并记  $Y$  为直线  $SX$  与所作球的切点,  $Z$  为点  $X$  在  $l$  上的射影.

作  $XT \perp \sigma$  于点  $T$ , 则  $XF_1 = XY$ , 且  $\alpha \triangleq \angle YXT, \beta \triangleq \angle ZXT$  均为定值, 从而  $\frac{XY}{XZ} = \frac{XY}{XT} \cdot \frac{XT}{XZ} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \text{const.}$  也就是说, 点  $X$  到焦点  $F$  的距离与到直线  $l$  的距离的比值为一定值.

由上述讨论, 我们可以用另一种方式定义圆锥曲线, 称之为圆锥曲线的第二定义, 而称 §1.1 中的定义方式为圆锥曲线的第一定义:

**Definition 1.4.3** (圆锥曲线的第二定义). 定义:

a.) 给定一直线  $l$  与一定点  $F$ , 称到点  $F$  的距离与平面上到直线  $l$  的距离之比为定值  $e$  的点  $P$  的轨迹为一条圆锥曲线, 定点  $F$  称为该圆锥曲线的焦点, 定直线  $l$  称为该圆锥曲线的准线 (directrix, pl-ices), 定值  $e$  称为该圆锥曲线的离心率 (eccentricity).

b.) 称离心率  $e=0$  的圆锥曲线为圆,  $0 < e < 1$  的圆锥曲线为椭圆,  $e=1$  的圆锥曲线为抛物线,  $e > 1$  的圆锥曲线为双曲线.

c.) 称圆锥曲线的一个焦点到 [对应的] 准线的距离为圆锥曲线的焦准距 (focal parameter).

此外, 根据图 1.20 中的作法可知, 第二定义对抛物线而言与第一定义是完全一样的; 对于椭圆或双曲线, 第二定义中的焦点  $F$  为第一定义中的两个焦点之一, 且第一定义中的两个焦点均可作为第二定义中的焦点  $F^{(16)}$ , 因此它们有两组对应的焦点和准线.

## 练习

**Problem 1.21.** 给定圆锥曲线  $\alpha$ ,  $AB$  是它的一条过焦点  $F$  的弦, 证明:  $\left| \frac{1}{FA} - \frac{1}{FB} \right| = \frac{2}{ep}$ , 其中  $e, p$  分别为  $\alpha$  的离心率和焦准距.

**Problem 1.22.** 设点  $A, B$  为定点, 动点  $P$  满足  $\angle PBA + 2\angle PAB = 0$ , 证明: 点  $P$  在一条离心率为 2 的双曲线上运动.

**Problem 1.23.** 证明: 对于其中一个焦点为定点  $F$  且过定点  $P$  的所有等轴双曲线, 其渐近线与两个定圆相切. (一条双曲线有两条渐近线, 这样可以生成两族渐近线, 每一族渐近线分别对应于一个圆.)

**Problem 1.24.** 证明: 给定一圆与一直线, 对该圆引切线所得切线长与到该直线的距离之比为  $e$  的点的轨迹为一条离心率为  $e$  的圆锥曲线.

## 1.5 抛物线的基本性质

在本章的最后, 作为一种最特殊的圆锥曲线, 让我们来探讨抛物线的性质.

为方便起见, 本节统一以  $F$  表示抛物线的焦点, 以  $l$  表示抛物线的准线.

**Lemma 1.5.1.** 抛物线的焦点  $F$  关于某一切线  $l'$  的对称点在准线上, 且该对称点为该切线与抛物线的切点在准线上的射影.

(16) 在之前的讨论中, 内切球作于平面  $\pi$  下方, 在平面  $\pi$  上方作出另一个内切球 (即 Dandelin 双球中的另一个球), 便可得到另一组对应的焦点与准线.

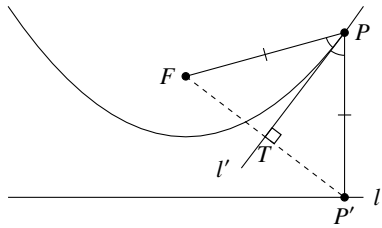


Figure 1.21

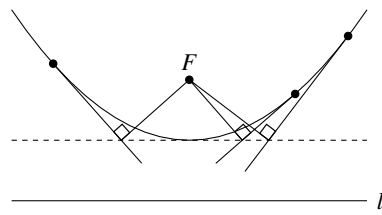


Figure 1.22

*proof.* 设抛物线上一点  $P$  在准线上的射影为点  $P'$ , 如图1.21所示, 则由光学性质可知  $P$  处的切线平分  $\angle FPP'$ , 而由定义可知  $PF=PP'$ , 从而显然点  $F, P'$  关于切线  $l'$  对称.  $\square$

**Corollary 1.5.2.** 抛物线的焦点在其切线上的射影均在一条定直线上, 该定直线与抛物线相切于其顶点, 如图1.22所示.

*proof.* 在(1.5.1)的证明中, 由点  $F, P$  关于切线  $l'$  对称可知, 焦点在切线上的射影  $T$  为线段  $FP'$  的中点. 因此, 当点  $P$  在抛物线上运动时, 射影  $T$  的轨迹就是  $\mathbf{h}_{F, 1/2}$ (准线).  $\square$

上边的性质(1.5.2)与椭圆和双曲线的辅助圆的性质完全类似, 因而为了方便刻画圆锥曲线的统一性质, 本书中也把抛物线在其顶点处的切线称为它的“辅助圆”, 尽管它是直线. 实际上, 抛物线的辅助圆的结论可视为是令椭圆中心趋于无穷远时的极限, 此时椭圆辅助圆的圆心趋于无穷远, 从而变为一条直线.

**Lemma 1.5.3.** 抛物线上一点  $P$  处的切线交轴于点  $T$ , 则  $TF=FP$ , 如图1.23所示.

*proof.* 设点  $P$  在  $l$  上的射影为点  $P'$ , 则由  $FT \parallel PP'$  知  $\angle FTP = \angle TPP' = \angle FPT$ , 故  $TF=FP$ .  $\square$

**Lemma 1.5.4.** 设抛物线上的两点  $X, Y$  在准线上的射影分别为点  $X', Y'$ , 抛物线在点  $X, Y$  处的切线交于点  $P$ , 则点  $P$  为三角形  $X'Y'F$  的外接圆圆心, 如图1.24所示.

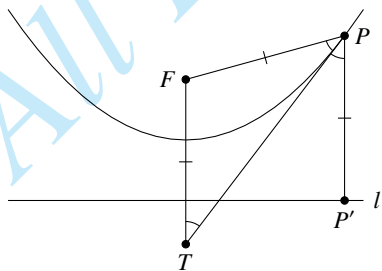


Figure 1.23

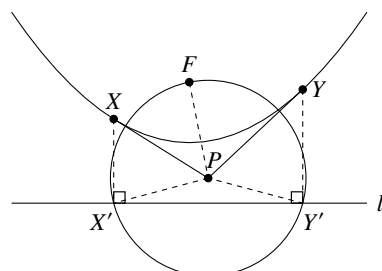


Figure 1.24

*proof.* 由(1.5.1)可知  $PY, XP$  分别为  $FY', FX'$  的中垂线, 从而点  $P$  为  $\triangle X'FY'$  的外心.  $\square$

**Corollary 1.5.5.** 过点  $P$  作抛物线的两条切线, 切点分别为点  $X, Y$ , 点  $X, Y$  在准线上的射影分别为点  $X', Y'$ , 则点  $P$  在准线上的射影  $P'$  平分  $X'Y'$ . (如图1.25)

*proof.* 由(1.5.4)可知点  $P$  在  $X'Y'$  的中垂线上, 从而命题得证.  $\square$

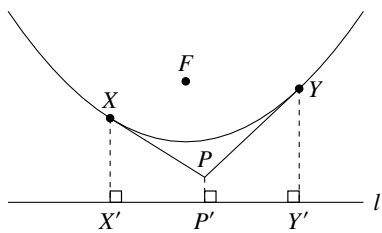


Figure 1.25

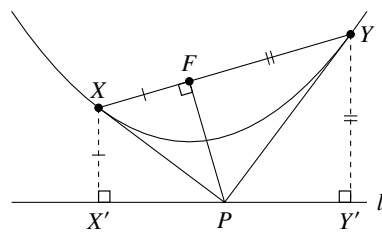


Figure 1.26

**Theorem 1.5.6.** 过抛物线外一点  $P$  作抛物线的两条切线, 切点分别记为点  $X, Y$ . 满足  $XP \perp YP$  的点  $P$  的轨迹为抛物线的准线, 且在此条件下,  $F \in XY$  且  $FP \perp XY$ , 如图 1.26 所示.

*proof.* 设点  $X, Y$  在准线上的射影分别为  $X', Y'$ , 由于  $F, X'$  关于  $XP$  对称, 故  $\angle X'PX = \angle FPX$ , 同理  $\angle Y'PY = \angle FPY$ , 从而  $\angle X'PY' = 2\angle XPF + 2\angle YPF = 180^\circ$ , 因此点  $P$  在准线  $X'Y'$  上. 由于  $X, F$  关于  $XP$  对称, 从而  $\angle XFP = \angle XX'P = 90^\circ$ , 同理  $\angle YFP = \angle YY'P = 90^\circ$ , 因此  $\angle XFY = \angle XFP + \angle YFP = 180^\circ$ , 从而弦  $XY$  过点  $F$  且  $PF \perp XY$ .  $\square$

**Theorem 1.5.7.** 给定钝角  $\phi$ , 过抛物线  $\alpha$  外一点  $P$  作  $\alpha$  的两条切线, 切点分别为点  $X, Y$ , 则满足  $\angle XPY = \phi$  or  $180^\circ - \phi$  的点  $P$  的轨迹为一条 [其中一组] 焦点与准线与  $\alpha$  的相同的双曲线. (如图 1.27)

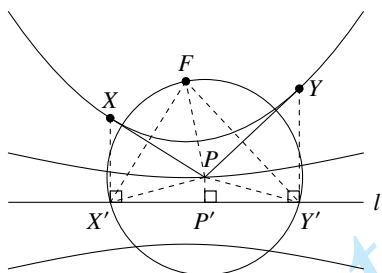


Figure 1.27

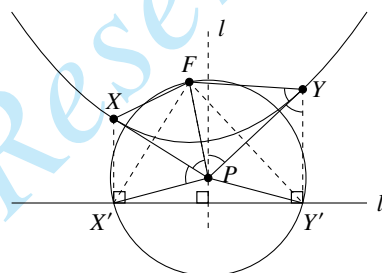


Figure 1.28

*proof.* 先考虑  $\angle XPY = \phi$  的点  $P$ . 作  $X, Y, P$  在准线上的射影  $X', Y', P'$ . 由于  $FX' \perp XP, FY' \perp YP$ , 故  $\angle X'FY' = 180^\circ - \phi$ . 由 (1.5.4), 点  $P$  为  $X'Y'F$  的外接圆圆心, 故  $\angle X'PP' = \angle X'PY' / 2 = \angle X'FY' = \text{const}$ , 则  $\frac{PF}{PP'} = \frac{PX'}{PP'} = \sec \angle X'PP' = -\sec \phi = \text{const}$ . 因此点  $P$  在一条双曲线上. 同理可证,  $\angle XPY = 180^\circ - \phi$  时, 点  $P$  在同一双曲线上, 不过是它的另一支 (远离抛物线的一支).  $\square$

最后一个定理相当于有心圆锥曲线的定理 (1.3.7) 和 (1.3.8) 在抛物线情形下的推广:

**Theorem 1.5.8.** 过抛物线  $\alpha$  外一点  $P$  作  $\alpha$  的两条切线, 切点分别为点  $X, Y$ . 记  $l$  为过点  $P$  且平行于抛物线的轴的直线, 则: (如图 1.28)

- (1)  $PY$  与  $l$  的夹角与  $\angle XPF$  相等;
- (2)  $\angle XFP = \angle PFY$ ;
- (3)  $\triangle XFP \sim \triangle PFY$ .

*proof.* 注意  $\angle XPF \stackrel{(1.5.4)}{=} \angle X'Y'F \stackrel{l \perp X'Y', FY' \perp PY}{=} \angle(l, PY) = \angle PYY' \stackrel{(1.5.1)}{=} \angle PYF$  (这也表明性质 (1) 成立), 同理有  $\angle FXP = \angle FPY$ , 故可证 (3) 中的相似, 由此可得 (2) 成立.  $\square$

## 练习

**Problem 1.25.** 对于抛物线  $\alpha$  上一点  $X$ ,  $\alpha$  在点  $X$  处的法线<sup>(17)</sup>交  $C$  的轴于点  $Y$ , 点  $X$  在轴上的射影为点  $Z$ , 证明: 线段  $YZ$  的长度与  $X$  的位置无关.

(17) 曲线在一点处的法线为过该点且垂直于该点处切线的直线.

**Problem 1.26.** 证明: 抛物线在其某一条弦的两个端点处的切线的交点与该弦的中点的连线平行于抛物线的轴.

**Problem 1.27.** 两质点分别在两相交直线上匀速运动, 且不同时通过两直线的交点. 证明两质点的连线包络一条抛物线<sup>(18)</sup>.

**Problem 1.28.** 设抛物线  $\alpha$  的焦点为点  $F$ , 过点  $P$  作抛物线的两条切线, 切点分别为点  $X, Y$ ,  $\angle XPY$  的平分线交  $\alpha$  的轴于点  $S$ , 证明:  $PF=PS$ .

**Problem 1.29.** 设  $\alpha$  为一条给定的离心率为 2 的双曲线, 正三角形  $ABC$  内接于  $\alpha$ , 证明: 直线  $AB$  恒与两定抛物线之一相切.

---

(18) 所谓“包络一条抛物线”, 即指该动直线恒与一条抛物线相切.

## 第二章 圆锥曲线的初等性质

在上一章中, 我们大致地介绍了圆锥曲线最重要的几何性质, 但也忽略了一些细节, 而本章主要用初等平面几何的方法严谨地推导圆锥曲线的性质, 所有圆锥曲线的性质均只从统一定义出发开始推导.

### 2.1 双曲线的初等性质

我们先来看双曲线的情形.

**Definition 2.1.1.** 双曲线是到定点  $F$  (称为焦点) 的距离与到定直线  $l$  (称为准线) 的距离为定值  $e (e > 1)$  的点的轨迹  $\alpha$ .

过双曲线  $\alpha$  的交点  $F$  作  $l$  的垂线, 垂足记为  $X$ , 则由上述定义, 显然双曲线关于直线  $FX$  对称. 此外, 直线  $FX$  上存在两点  $A, A'$  在双曲线上, 称它们为[实轴] 顶点, 点  $A, A'$  的中点  $O$  称为双曲线的中心, 并称  $AA'$  为实轴, 且容易知道点  $A, A'$  在准线  $l$  的两侧, 如图2.1. 以线段  $AA'$  为直径的圆称为双曲线的[外] 辅助圆.

为了方便, 以下统一沿用上述定义中使用的记号, 且约定用  $A'$  表示左侧的顶点, 称为左顶点; 相应地, 用  $A$  表示右顶点.

**Proposition 2.1.2.** 点  $P, P'$  在双曲线  $\alpha$  上,  $PP'$  交焦点  $F$  对应的准线  $l$  于点  $K$ , 则  $FK$  平分  $\angle PFP'$  或其外角. (当线段  $PP'$  与  $l$  不相交时, 平分  $\angle PFP'$  的外角; 当线段  $PP'$  与  $l$  相交时, 平分  $\angle PFP'$ .)

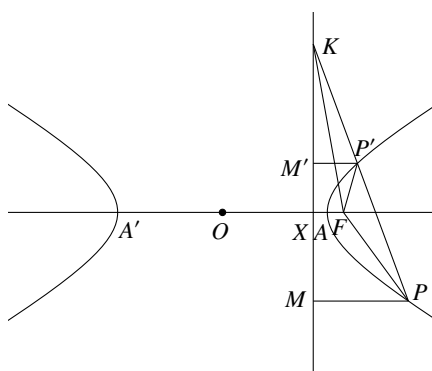


Figure 2.1

*proof.* 仅证线段  $PP'$  与  $l$  不相交时, 另一情形类似. 如图2.1所示, 设  $P, P'$  在准线  $l$  上的射影分别为点  $M, M'$ , 则由定义,  $\frac{FP}{FP'} = \frac{PM}{P'M} = \frac{PK}{P'K}$ . 由外角平分线定理知  $FK$  平分  $\angle PFP'$  的外角.  $\square$

**Proposition 2.1.3.** 过  $\alpha$  上一点  $P$  向实轴引垂线, 垂足为点  $N$ , 则  $\frac{PN^2}{AN \cdot A'N} = \text{const.}$



*proof.* 如图2.2, 不妨设  $P$  在右支.  $PA, PA'$  分别交右准线  $l$  于点  $K, K'$ ,  $l$  交长轴于点  $X$ . 由(2.1.3)可知  $FK$  平分  $\angle ASP$  的外角,  $FK'$  平分  $\angle AFP$ , 从而  $\angle KFK' = 90^\circ$ . 由射影定理,  $KX \cdot K'X = FX^2$ . 由于  $PN \parallel l$ , 故  $\frac{PN^2}{AN \cdot A'N} = \frac{PN}{AN} \cdot \frac{PN}{A'N} = \frac{K'X}{A'X} \cdot \frac{KX}{AX} = \frac{FX^2}{AX \cdot A'X} = \text{const.}$   $\square$

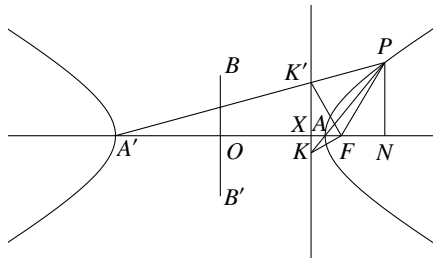


Figure 2.2

由(2.1.3), 可以在  $AA'$  的中垂线上找到关于  $O$  对称的两点  $B, B'$ , 满足  $\frac{OB^2}{OA^2} = \frac{OB'^2}{OA^2} = \frac{FX^2}{AX \cdot A'X}$ , 即等于(2.1.3)中的定值. 称  $B, B'$  为双曲线的两个虚轴顶点. 为了方便, 以下统一用  $B$  表示上方的虚轴顶点, 称为上顶点, 相应地, 用  $B'$  表示下顶点, 称直线  $BB'$  为虚轴<sup>(1)</sup>, 如图2.2. 以线段  $BB'$  为直径的圆称为双曲线的内辅助圆.

**Proposition 2.1.4.** 过  $B, B'$  分别作垂直于虚轴的直线, 过  $A, A'$  分别作垂直于实轴的直线, 四直线形成一矩形, 则该矩形的对角线即为双曲线的渐近线.

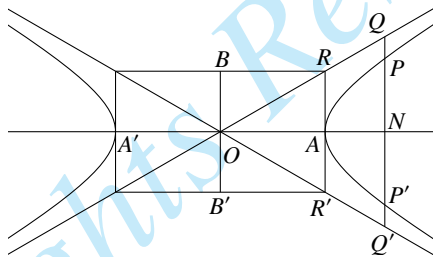


Figure 2.3

*proof.* 如图2.3, 过  $P$  作垂直于实轴的直线, 与实轴交于点  $N$ , 与双曲线的另一个交点为  $P'$ , 与题述两条对角线交于点  $Q, Q'$ ; 上述矩形的一个顶点为  $R$ ,  $RB \parallel OA, RA \parallel OB$ . 由对称性,  $PP', QQ'$  的中点均为  $N$ .

$$\text{由(2.1.4)可知 } \frac{PN^2}{ON^2 - OA^2} = \frac{PM^2}{(ON + OA)(ON - OA)} = \frac{PN^2}{AN \cdot A'N} = \frac{OB^2}{CA^2}, \text{ 同时 } \frac{QN^2}{ON^2} = \frac{AR^2}{OA^2} = \frac{OB^2}{OA^2}.$$

由上两式利用比例的性质有  $\frac{QN^2 - PN^2}{OA^2} = \frac{QN^2 - PN^2}{ON^2 - (ON^2 - OA^2)} = \frac{OB^2}{OA^2}$ , 从而  $OB^2 = QN^2 - PN^2 = (QN - QP) \cdot (QN + QP) = PQ \cdot Q'P$ .

由于  $PQ \cdot PQ'$  为定值, 故随着  $P$  不断往远处运动<sup>(2)</sup>,  $PQ'$  可以任意大, 从而  $PQ$  任意小但大于零, 从而  $P$  到直线  $OR$  的距离也可以任意小但大于零, 因此  $OR$  为一条渐近线. 类似地可知另一条对角线  $OR'$  也是渐近线.  $\square$

**Proposition 2.1.5.**  $\alpha$  关于虚轴对称.

*proof.* 过双曲线上一点  $P$  作实轴的射影  $N$ , 取  $N$  关于  $O$  的对称点  $N'$ , 则由于  $ON > OA$ , 故  $ON' > OA'$ , 从而过  $N$  作双曲线的垂线, 必与  $\alpha$  交于两点  $P', P''$ . 由(2.1.4)可知  $P'N' = P''N' = PN$  成立, 即关于虚轴对称.  $\square$

(1) 类似于 §1.1 中曾提到的, 有时“虚轴”也指线段  $BB'$ , 读者容易根据上下文进行区分.

(2) 请你思考: 如何说明  $P$  点可以趋于无穷远处?

**Corollary 2.1.6.** 双曲线有第二条对应的焦点与准线; 过  $O$  的  $\alpha$  的弦被点  $O$  平分.

*proof.* 这是对称性的直接结论. □

下用  $F'$  表示与  $F$  对称的焦点, 用  $X'$  表示与  $l$  对称的准线  $l'$  与实轴的交点, 如图2.4.

**Proposition 2.1.7.**  $FA=e \cdot AX, OA=e \cdot CX, OF=e \cdot OA, OA^2=OF \cdot OX$ .

*proof.* 利用对称性结合定义, 经过简单的计算容易证明. □

**Proposition 2.1.8.** 对于双曲线上一点  $P$ ,  $|PF' - PF| = AA'$ .

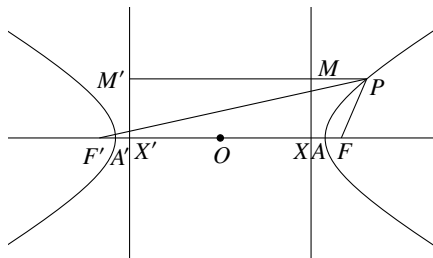


Figure 2.4

*proof.* 如图2.4, 利用(2.1.6),  $P$  在左、右准线上的射影分别为点  $M'$  和  $M$ , 则  $|PF' - PF| = |e \cdot PM - e \cdot PM'| = e \cdot MM' = AA$ , 其中最后一步利用了(2.1.7). □

至此, 我们已经建立起双曲线的基本体系, 下面再给出几个重要性质的初等证明.

**Proposition 2.1.9.**  $\alpha$  上一点  $P$  的切线交  $l$  于  $Z$ , 则  $ZF \perp PF$ .

*proof.* 如图2.5, 取  $\alpha$  上  $P$  附近的一点  $P'$ , 设  $PP' \cap l = K'$ , 则由(2.1.2)可知  $FK$  平分  $\angle PFP'$  的外角. 令  $P' \rightarrow P$ ,  $PP'$  趋于切线,  $K' \rightarrow K$ , 此时  $\angle KSP \rightarrow 90^\circ$ . □

**Corollary 2.1.10.**  $\alpha$  在过焦点  $F$  的弦  $PP'$  两端的切线交于准线  $l$  上一点.

*proof.* 设两切线分别交准线于点  $K, K'$ , 则  $KF, K'F$  均垂直于  $PP'$ , 从而  $K = K'$ . □

**Proposition 2.1.11** (Adams).  $\alpha$  上一点  $P$  处的切线上有一点  $C$ , 过点  $C$  作  $CI \perp l, CU \perp FP$ , 垂足分别为点  $I, U$ , 则  $FU = e \cdot CI$ .

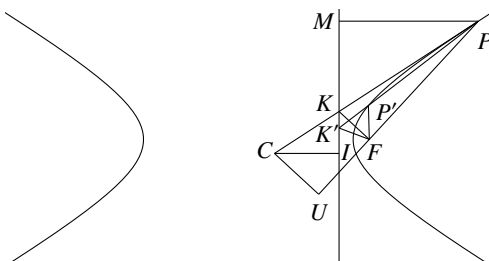


Figure 2.5

*proof.* 如图2.5, 设  $PC \cap l = Z$ , 由(2.1.9),  $FZ \perp FP$ , 从而  $FZ \parallel CU$ , 因此  $\frac{FU}{FP} = \frac{ZC}{ZP} = \frac{CI}{MP}$ , 其中  $M$  为  $P$  在  $l$  上的射影. 因此  $\frac{FU}{CI} = \frac{FP}{MP} = e$ . □

**Proposition 2.1.12.** 过  $\alpha$  上一点  $P$  作实轴的平行线, 分别交两渐近线于点  $Q, Q'$ , 则  $PQ \cdot PQ' = OA^2$ ; 若过  $P$  作虚轴的平行线, 分别交两渐近线于点  $Q, Q'$ , 则  $PQ \cdot PQ' = OB^2$ .

*proof.* 已在证明(2.1.4)的证明过程中证明了后一种情形, 前一种的证明是类似的.  $\square$

**Proposition 2.1.13.** 过  $\alpha$  上两点  $P, Q$  作两条互相平行的直线, 分别交渐近线于点  $R, R'$  和  $S, S'$ , 则  $PR \cdot PR' = QS \cdot QS'$ .

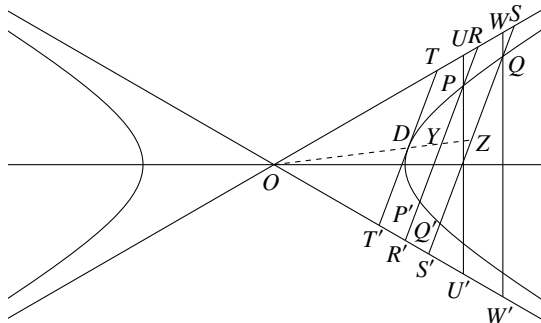


Figure 2.6

*proof.* 如图2.6所示, 过点  $P, Q$  分别作两条平行于虚轴的直线, 分别交渐近线于点  $U, U'$  和  $W, W'$ . 由相似可得  $\frac{PR}{QS} = \frac{PU}{QW}, \frac{PR'}{QS'} = \frac{PU'}{QW'}$ , 从而  $\frac{PR \cdot PR'}{QS \cdot QS'} = \frac{PU \cdot PU'}{QW \cdot QW'} = \frac{OB^2}{OB^2} = 1$ , 上式中的倒数第二个等号利用了(2.1.12).  $\square$

**Proposition 2.1.14.** 作  $\alpha$  的割线, 交两渐近线于点  $R, R'$ , 交  $\alpha$  于  $P, P'$ , 则  $PQ = P'Q'$ ; 作  $\alpha$  在  $D$  处的切线, 交渐近线于  $T, T'$ , 则  $DT = DT'$ .

*proof.* 如图2.6所示, 应用(2.1.13), 可知  $PQ \cdot PQ' = P'Q \cdot P'Q'$ , 由此可以推出  $PQ = P'Q'$ . 令切线的平行弦  $PP'$  平行移动使得  $P, P'$  趋于点  $D$ , 可以证明  $DT = DT'$ .  $\square$

在学完第三章的相应章节之后, 我们还将 在 §3.3 中用仿射变换证明这一性质.

最后, 我们来建立双曲线的直径的概念与相应的性质:

**Proposition 2.1.15.** 双曲线的一族平行弦的中点的轨迹是一条过中心的直线 (称为双曲线的直径, 它与双曲线的交点称为直径的端点), 且双曲线在该直径的端点处的切线平行于这族弦.

*proof.* 如图2.6所示, 设  $PP', QQ'$  是双曲线的两条互相平行的弦, 中点分别为点  $Y, Z$ . 直线  $PP', QQ'$  分别与两条渐近线交于  $R, R'$  和  $S, S'$ , 由(2.1.15)可知  $RR', SS'$  的中点分别为  $Y, Z$ . 由于  $RR' \parallel SS'$ , 由相似得  $O, Y, Z$  共线. 令  $P, P'$  不断移动趋于直径的端点  $D$ , 可知在  $D$  处的切线也平行于  $QQ'$ .  $\square$

**Proposition 2.1.16.** 双曲线在其某一条弦两端处的切线的交点在平分该弦的直径上.

*proof.* 考虑双曲线的两条互相平行的弦  $AB, A'B'$ ,  $AA' \cap BB' = P$ , 则由相似三角形易知点  $P$  在线段  $AB, A'B'$  的中点的连线上, 即点  $P$  在平分  $AB, A'B'$  的直径上. 令  $A'B' \rightarrow AB$ , 则  $AA', BB'$  趋向于双曲线的切线, 从而命题成立.  $\square$

**Remark.** 在上面处理切线相关的问题时, 我们应用了如下的思路: 设点  $A$  为曲线  $\gamma$  上一点,  $A'$  是  $\gamma$  上异于点  $A$  的一点, 令  $A'$  点沿  $\gamma$  趋于  $A$  点, 则直线  $AA'$  就趋于  $\gamma$  在点  $A$  处的切线. 实际上, 这就是一般曲线在某点处的切线的定义.

而我们也将在之后多次使用类似的思路来处理切线的问题, 即可将圆锥曲线的切线视为与圆锥曲线的两个交点重合的直线, 这可用上述极限的思路来理解. 因而, 在之后, 在不引起歧义的情况下, 对于圆锥曲线  $\alpha$  上一点  $P$ , 我们直接用直线  $PP$  来表示  $\alpha$  在点  $P$  处的切线.

## 练习

**Problem 2.1.** 现已作出一条双曲线, 如何通过尺规作图找到它的焦点与准线?

**Problem 2.2.** 一双曲线的中心为点  $O$ , 双曲线的弦  $PP'$  被双曲线的直径  $OM$  平分于点  $M$ . 射线  $OM$  交双曲线于点  $Q$ , 交双曲线在点  $P$  处的切线于点  $R$ . 证明:  $OM \cdot OR = OP^2$ .

**Problem 2.3.** 给定双曲线  $\alpha$ , 设双曲线  $\beta$  的实轴恰为  $\alpha$  的虚轴,  $\beta$  的虚轴恰为  $\alpha$  的实轴 (此处“实轴”“虚轴”指相应的线段), 则称  $\beta$  为  $\alpha$  的共轭双曲线. 证明:

(1) 双曲线和它的共轭双曲线有完全相同的渐近线;

(2) 点  $P$  为某一双曲线上一点, 点  $Q$  是该双曲线的共轭双曲线上的一点, 过点  $P, Q$  分别作互相平行的直线, 与双曲线的渐近线分别交于点  $P_1, P_2$  和点  $Q_1, Q_2$ , 则  $PP_1 \cdot PP_2 = QQ_1 \cdot QQ_2$ .

**Problem 2.4.** 给定双曲线  $\alpha$ , 其渐近线为  $l_1, l_2$ , 中心为  $O$ ,  $P$  为  $\alpha$  上一点. 证明:

(1) 过  $P$  分别作  $l_1, l_2$  的平行线, 与  $l_1, l_2$  分别交于点  $A, B$ , 则  $S_{\square PAOB}$  为定值;

(2) 过  $P$  作  $\alpha$  的切线, 与  $l_1, l_2$  分别交于点  $A, B$ , 则  $S_{\triangle AOB}$  为定值.

**Problem 2.5.** 设  $\alpha$  为一条给定的双曲线, 动点  $A$  在其一支上, 动点  $B, C$  在另一支上, 且满足  $\triangle ABC$  的重心  $G$  也在  $\alpha$  上. 证明  $S_{\triangle ABC}$  取最小值的充要条件为直线  $AG$  过  $\alpha$  的中心.

**Problem 2.6.** 设双曲线  $\alpha$  的中心为  $O$ , 其上两点  $A, B$  满足  $OA \perp OB$ <sup>(3)</sup>, 证明:

(1)  $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \text{const.}$ ;

(2) 直线  $AB$  包络一定圆.

**Problem 2.7.** 设某双曲线的中心为点  $O$ ,  $AA', BB'$  为它的两条弦, 平分  $AA'$  的直径交双曲线于点  $P$ , 平分  $BB'$  的直径交双曲线于点  $Q$ , 且  $OP \parallel BB'$ , 证明:

(1)  $OQ \parallel AA'$ ;

(2)  $|OP^2 - OQ^2| = \text{const.}$

## 2.2 椭圆的初等性质

本节讨论椭圆的性质.

**Definition 2.2.1.** 椭圆是到一个定点  $F$  (称为焦点) 与一定直线  $l$  (称为准线) 的距离之比为定值  $e (e < 1)$  的点的轨迹  $\alpha$ .

过  $F$  作  $l$  的垂线, 下记垂足为  $X$ . 容易知道, 椭圆  $\alpha$  关于直线  $FX$  对称. 容易知道, 在直线  $FX$  上可以找到两点  $A, A'$  在椭圆上, 且在  $l$  的同侧, 称  $A, A'$  为椭圆的长轴顶点,  $AA'$  的中点  $O$  称为椭圆的中心; 过点  $O$  作  $AA'$  的垂线, 交  $\alpha$  于点  $B, B'$ , 点  $B, B'$  称为椭圆的短轴顶点, 如图 2.7 所示. 以线段  $AA'$  为直径的圆称为椭圆的 [外] 辅助圆, 以线段  $BB'$  为直径的圆称为椭圆的内辅助圆.

为了方便, 以下统一沿用上述定义中使用的记号, 且约定用  $A$  表示左侧的长轴顶点, 称为左顶点, 用  $A'$  表示右侧的长轴顶点, 称为右顶点; 类似地, 用  $B$  表示上顶点, 用  $B'$  表示下顶点.

与双曲线的情形类似, 我们用以下命题逐步建立起椭圆的性质. 下面许多命题的证明与双曲线的情形类似, 这里不再赘述, 但在部分命题的配图中作出辅助线供读者参考.

(3) 显然, 若只考虑实欧氏平面, 则  $e < \sqrt{2}$  时  $\alpha$  上才能有符合要求的点  $A, B$ . 不过, 在复欧氏平面中, 总是存在符合题意的点  $A, B$ .

**Proposition 2.2.2.** 椭圆的弦  $PP'$  的延长线交  $l$  于点  $K$ , 则  $FK$  平分  $\angle PFP'$  的外角.(如图2.7)

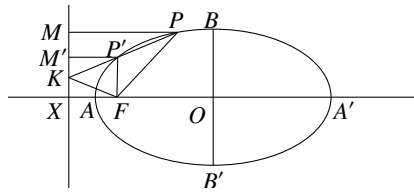


Figure 2.7

**Proposition 2.2.3.** 椭圆  $\alpha$  上一点  $P$  在长轴上的射影为点  $N$ , 则  $\frac{PN^2}{NA \cdot NA'} = \frac{OB^2}{OA^2}$ , 且  $OB < OA$ . (参考图2.8)

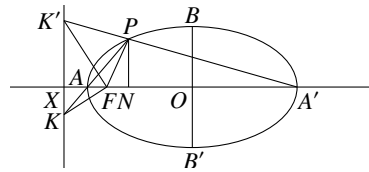


Figure 2.8

**Proposition 2.2.4.** 椭圆  $\alpha$  关于短轴  $BB'$  对称, 从而有第二个焦点  $F'$  以及对应的准线  $l'$ .

下记另一准线  $l'$  与  $AA'$  交于点  $X'$ .

**Proposition 2.2.5.**  $OA = e \cdot OX$ ,  $OF = e \cdot OA$ ,  $OF \cdot OX = OA^2$ .

**Proposition 2.2.6.** 对于  $\alpha$  上一点  $P$ ,  $PF + PF' = AA'$ . (参考图2.9)

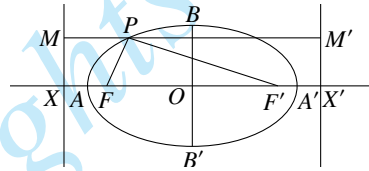


Figure 2.9

至此, 我们建立起椭圆的一些基本的性质. 椭圆还具有以下的性质:

**Proposition 2.2.7.** 椭圆在其上一点  $P$  处的切线交准线  $l$  于点  $K$ , 则  $KF \perp FP$ .

**Corollary 2.2.8.** 椭圆在过焦点  $F$  的弦  $PP'$  两端的切线交于准线  $l$  上一点.

**Proposition 2.2.9** (Adams).  $\alpha$  上一点  $P$  的切线上有一点  $C$ , 作  $CI \perp l$ ,  $CU \perp PF$ , 垂足分别为点  $I, U$ , 则  $FU = e \cdot CI$ . (参考图2.10)

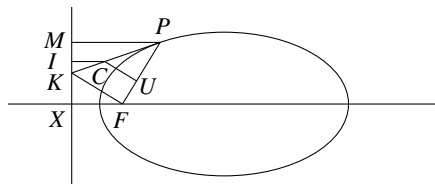


Figure 2.10

在双曲线时, 我们借助渐近线建立了直径的性质, 对于椭圆我们需要换一种方式, 即利用辅助圆. 下面的命题给出了辅助圆的一个重要性质:

**Proposition 2.2.10.** 对于  $\alpha$  上一点  $P$ , 它在  $AA'$  上的射影为点  $N$ , 延长  $NP$  至点  $Q$  使得  $\frac{QN}{PN} = \frac{OA}{OB}$ , 则  $OQ = OA$ . (参考图 2.11)

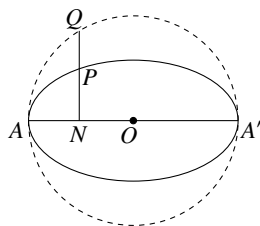


Figure 2.11

*proof.* 由(2.2.3),  $QN^2 = PN^2 \cdot \frac{OA^2}{OB^2} = \left[ \frac{OB^2}{OA^2} (AN \cdot A'N) \right] \cdot \frac{OA^2}{OB^2} = AN \cdot A'N$ , 由射影定理可知  $\angle APA' = 90^\circ$ , 从而点  $P$  在以  $O$  为圆心,  $OA$  为半径的圆上.  $\square$

利用辅助圆, 我们可以用初等的方法建立起直径的概念:

**Proposition 2.2.11.** 椭圆的一族平行弦的轨迹为一条过中心的直线 (称为直径, 直径与椭圆的交点称为直径的端点), 且椭圆在该直径的端点处的切线平行于这一族弦.

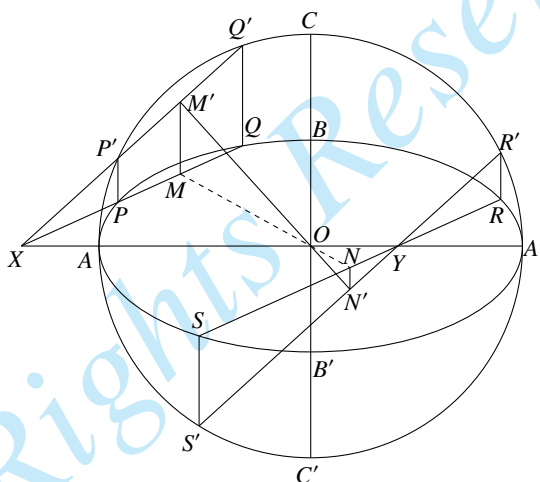


Figure 2.12

*proof.* 如图 2.12, 弦  $PQ \parallel RS$ , 我们证明它们的中点  $M, N$  与椭圆的中心  $O$  共线, 这样便证明了命题的前半部分, 切线的情形可以通过取极限得到.

过  $P, Q, R, S$  分别作短轴的平行线, 交辅助圆分别于点  $P', Q', R', S'$  (在长轴上方的点向上作平行线, 在长轴下方的点向下作平行线), 过  $M, N$  分别作短轴的平行线, 与  $P'Q', R'S'$  分别交于点  $M', N'$ .

利用辅助圆的性质,  $\frac{\text{dist}(P, AA')}{\text{dist}(P', AA')} = \frac{\text{dist}(Q, AA')}{\text{dist}(Q', AA')} = \frac{\text{dist}(R, AA')}{\text{dist}(R', AA')} = \frac{\text{dist}(S, AA')}{\text{dist}(S', AA')} = \frac{OB}{OA}$ , 利用相似易证  $M', N'$  分别为  $P'Q', R'S'$  的中点, 直线  $PQ, P'Q'$  与长轴交于同一点  $X$ , 直线  $SR, S'R'$  与长轴交于同一点  $Y$ , 且  $\frac{\tan \angle Q'XA'}{\tan \angle R'YA'} = \frac{\tan \angle QXA' \cdot (OA/OB)}{\tan \angle RYA' \cdot (OA/OB)} = 1$ , 即  $P'Q' \parallel R'S'$ . 由垂径定理可知  $M', N', O$  共线, 从而由相似可知  $M, O, N$  共线.  $\square$

利用辅助圆的做法, 实际上与我们在 §1.4.1 中用的平行投影的方法, 以及将在第三章中介绍的仿射变换的本质是相同的.

最后是椭圆的直径的性质, 其证明与双曲线的情形类似.

**Proposition 2.2.12.** 椭圆在其某一条弦两端处的切线的交点在平分该弦的直径上.

## 练习

**Problem 2.8.** 证明(2.2.2)(2.2.3)(2.2.4)(2.2.5)(2.2.6)(2.2.7)(2.2.8)(2.2.9)(2.2.12).

**Problem 2.9.** 设椭圆的长轴上有一定点  $M$ , 椭圆的某一焦点为点  $F$ , 点  $P$  是椭圆上的动点. 过点  $F$  作椭圆在点  $P$  处的切线的垂线, 与直线  $PF$  交于点  $K$ , 求点  $K$  的轨迹.

**Problem 2.10.** 设椭圆  $\alpha$  的中心为  $O$ , 其上两点  $A, B$  满足  $OA \perp OB$ , 证明:

- (1)  $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \text{const};$
- (2) 直线  $AB$  包络一定圆.<sup>(4)</sup>

**Problem 2.11.** 一椭圆的中心为点  $O$ , 椭圆的弦  $PP'$  被椭圆的直径  $OM$  平分于点  $M$ . 射线  $OM$  交椭圆于点  $Q$ , 交椭圆在点  $P$  处的切线于点  $R$ . 证明:  $OM \cdot OR = OP^2$ .

**Problem 2.12.** 设椭圆  $\alpha$  的中心为点  $O$ , 点  $A, B$  在  $\alpha$  上, 且  $\alpha$  在点  $A$  处的切线与直线  $OB$  平行. 证明:

- (1) 点  $B$  处的切线与直线  $OA$  平行.
- (2)  $OA^2 + OB^2 = \text{const};$
- (3) 以点  $A$  为圆心, 半长轴为半径作圆, 交直线  $OB$  于点  $T, T'$ , 则直线  $AT, AT'$  分别过椭圆的两个焦点之一.

**Problem 2.13.** 刚性轻杆  $BC$  的两端  $B, C$  分别在射线形滑槽  $AM, AN$  内运动, 证明点  $B, C$  的定比分点  $P$  的运动轨迹是一个椭圆 (的一部分).

## 2.3 抛物线的初等性质

本节讨论抛物线的性质.

**Definition 2.3.1.** 抛物线是到定点  $F$  (称为焦点) 与到定直线  $l$  (称为准线) 的距离相等的点的轨迹  $\alpha$ .

过  $F$  作  $FX \perp l$  于  $X$ , 则显然  $\alpha$  关于直线  $FX$  对称. 显然  $FX$  的中点  $A$  在抛物线上, 称点  $A$  为抛物线的顶点, 直线  $FX$  为抛物线的轴, 如图2.13.

为了方便, 以下统一沿用上述定义中使用的记号.

**Proposition 2.3.2.** 设  $\alpha$  上一点  $P$  在  $\alpha$  的轴上的射影为点  $N$ , 则  $PN^2 = 4AF \cdot AN$ . (参考图2.13)

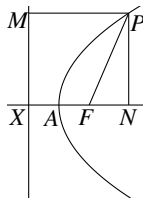


Figure 2.13

*proof.* 设  $P$  在准线上的射影为  $M$ , 则  $PN^2 = PF^2 - FN^2 = PM^2 - (AN - AF)^2 = (AN + AF)^2 - (AN - AF)^2 = 4AF \cdot AN$ . □

**Proposition 2.3.3.** 设过  $F$  且垂直于轴的直线交  $\alpha$  于点  $L, L'$ , 则  $LF = L'F = 2AF$ .

*proof.* 在(2.3.2)中取  $N = F$  即可. □

(4) 根据练习 [??], 双曲线也有类似的性质. 我们称该圆为有心圆锥曲线的内准圆.



下面的两个命题分别与双曲线的性质(2.1.2)和(2.2.10)类似, 证明留给读者.

**Proposition 2.3.4.**  $\alpha$  的弦  $PP'$  所在直线交  $l$  于点  $K$ , 则  $FK$  平分  $\angle PFP'$  的外角.

**Proposition 2.3.5.** 在  $\alpha$  上某点  $P$  处的切线上有点  $C$ , 作  $CI \perp l, CU \perp FP$ , 垂足分别为点  $I, U$ , 则  $FU = CI$ .

抛物线的结构比较简单, 在第一章中我们也均是从初等几何的角度建立的抛物线的性质, 因此这里不再过多地叙述.

下面我们将用初等方法证明关于抛物线的直径的性质. 今后, 我们还将 [3.22] 中用仿射变换、在(5.10.13)中用射影几何证之.

**Proposition 2.3.6.**  $\alpha$  的一族平行弦的中点的轨迹为一条平行于轴的直线 (称为直径), 且该直径通过  $\alpha$  的平行于这些弦的切线.

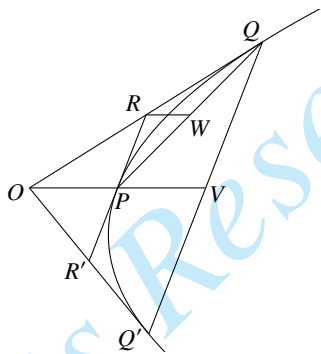


Figure 2.14

*proof.* 如图2.14,  $QQ'$  为一条弦,  $RR' \parallel QQ'$  且切  $\alpha$  于点  $P$ , 其中  $R, R'$  分别为  $RR'$  与  $Q, Q'$  处的切线的交点. 过点  $P$  作平行于轴的直线  $OV$ , 交  $QQ'$  于点  $V$ , 交  $QR$  于点  $O$ . 取  $PQ$  中点  $W$ .

由(1.5.5)可推知  $RW \parallel OV$ , 则点  $R$  为  $OQ$  的中点, 故  $PR \parallel QV$ , 故点  $P$  为  $OV$  的中点.

若过点  $Q'$  的切线交  $OV$  于点  $O'$ , 则类似的讨论表明  $P$  为  $O'V$  的中点, 因此  $O' = O$ .

因此, 若设  $PQ'$  的中点为  $V'$ , 则由(1.5.5)可以推知  $V'O \parallel$  轴, 从而  $V = V'$ , 因此  $V$  为弦  $QQ'$  的中点, 从而命题得证.  $\square$

**Proposition 2.3.7.**  $\alpha$  的弦  $QQ'$  被平行于轴的直线  $l_Q$  平分,  $l_Q$  交  $Q$  处的切线于点  $O$ , 交  $QQ'$  于点  $V$ , 交  $\alpha$  于点  $P$ , 则  $OP \parallel PV$ . (参考图2.14)

*proof.* 这是在(2.3.6)的证明过程中得出的顺带结论.  $\square$

**Proposition 2.3.8.** 过  $\alpha$  上一点  $P$  作  $\alpha$  的法线, 交轴于点  $V$ , 点  $P$  在轴上的射影为点  $U$ , 则  $UV = 2AF$ .

*proof.* 设  $P$  处的切线交轴于点  $W$ , 由对称性, 显然  $PU$  所在的弦对应的直径就是抛物线的轴, 故由(2.3.7)可知  $UA = WA$ , 由射影定理,  $UV = \frac{PU^2}{UW} = \frac{PU^2}{2AU} = \frac{4AF \cdot AU}{2AU} = 2AF$ .  $\square$

**Proposition 2.3.9.**  $\alpha$  的直径  $PV$  平分  $\alpha$  的弦  $QQ'$  于点  $V$  且交  $\alpha$  于点  $P$ , 则  $QV^2 = 4FP \cdot PV$ .



**Problem 2.16.** 设某抛物线的焦点为点  $F$ , 抛物线的一条直径交准线于点  $P$ , 证明: 直线  $PF$  垂直于所有被该直径平分的弦.

**Problem 2.17.** 设点  $A$  为某抛物线的顶点, 该抛物线上的两点  $P, Q$  满足  $PA \perp QA$ , 证明: 直线  $PQ$  过定点.

**Problem 2.18.** 已作出一条抛物线  $\alpha$  与不在  $\alpha$  上的一点  $P$ , 以及在同一直线上的三点  $C, D, E$ , 试用尺规作出抛物线的弦  $AB$ , 使得直线  $AB$  过点  $P$ , 且  $\frac{PA}{PB} = \frac{CE}{DE}$ .

**Problem 2.19.** 过  $\alpha$  的弦  $QQ'$  上一点  $V$  作轴的平行线,  $Q$  处切线于  $O$ , 交  $\alpha$  于  $P$ , 证明:  $\frac{QV}{Q'V} = \frac{OP}{VP}$ .

## 2.4 圆锥曲线幂定理

在本节的最后, 我们再介绍一个定理——圆锥曲线幂定理, 它也是三种圆锥曲线的统一性质.

**Theorem 2.4.1** (圆锥曲线幂定理). 给定圆锥曲线  $\alpha$  及交于  $P$  的两条直线  $l_1, l_2$ ,  $l_1, l_2$  分别交  $\alpha$  于点  $A, B$  和  $C, D$ <sup>(6)</sup>, 则  $\frac{PA \cdot PB}{PC \cdot PD}$  仅与  $l_1, l_2$  的方向有关 (i. e. 若  $l_1, l_2$  分别平行于定直线  $m, n$ , 则上述比值恒定).

*proof.* 下分椭圆、双曲线与抛物线三种情况讨论.

1. 椭圆的情形. 如图2.17所示, 过点  $A, B, C, D$  分别作短轴的平行线, 交辅助圆于点  $A', B', C', D'$ , 交长轴于点  $A'', B'', C'', D''$ ,  $A'B' \cap C'D' = P'$ , 过  $P'$  作短轴的平行线, 交长轴于点  $P''$ ; 过椭圆的中心  $O$  分别作  $AB, CD$  的平行线, 交椭圆于  $M, N$ , 过点  $M, N$  分别作短轴的平行线, 交辅助圆于点  $M', N'$ , 交长轴于点  $M'', N''$ .

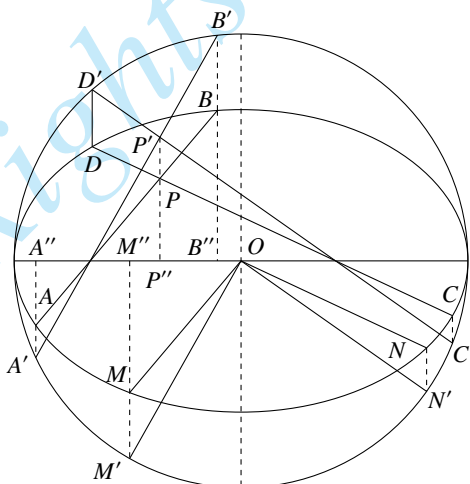


Figure 2.17

类似于(2.2.11)中的证明, 可知  $A'B' \parallel OM'$ ,  $C'D' \parallel ON'$ , 则由相似知

$$\frac{A'P' \cdot B'P'}{OM'^2} = \frac{A''P'' \cdot B''P''}{OM''^2} = \frac{AP \cdot BP}{OM^2},$$

同理有

$$\frac{C'P' \cdot D'P'}{ON'^2} = \frac{CP \cdot DP}{ON^2},$$

(6) 如前在 §2.1 中的最后所说的, 对于切线的情形, 例如  $l_1$  切  $\alpha$  于点  $A$ , 则将点  $B$  视为与  $A$  点重合即可. 今后, 对于曲线的割线退化为切线的情形, 也可类似看待, 将不再特别说明.

利用圆幂定理可知

$$\frac{A'P' \cdot B'P'}{C'P' \cdot D'P'} \cdot \frac{OM'}{ON'} = 1,$$

因而  $\frac{AP \cdot BP}{CP \cdot DP} = \frac{OM^2}{ON^2}$ . 而显然  $OM, ON$  的长度仅与直线  $AB, CD$  的方位有关.

2. 双曲线的情形. 如图2.18所示, 设  $AB$  交两条渐近线分别于点  $Q, R$ ,  $CD$  分别交两条渐近线于点  $S, T$ , 过  $D$  作  $AB$  的平行线, 分别交两条渐近线于点  $F, G$ .

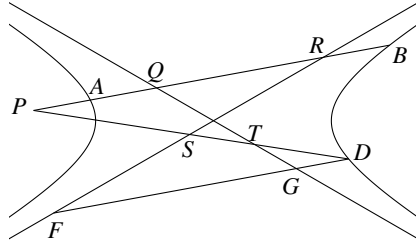


Figure 2.18

注意  $AB \parallel FG$ , 故由相似三角形可得

$$\frac{FD}{SD} \cdot \frac{GD}{TD} = \frac{PR}{PS} \cdot \frac{PQ}{PT},$$

结合(2.1.13), 可得

$$\frac{AQ \cdot AR}{SD \cdot TD} = \frac{FD \cdot GD}{SD \cdot TD} = \frac{PQ \cdot PR}{PS \cdot PT},$$

由比例的性质即有

$$\frac{FD \cdot GD}{SD \cdot TD} = \frac{PQ \cdot PR - AQ \cdot AR}{PS \cdot PT - SD \cdot TD}.$$

另一方面, 若取  $QR$  中点  $E$ , 则由(2.1.14)可知  $E$  也是  $PB$  的中点, 从而

$$PQ \cdot PR = (PE - QE)(PE + QE) = PE^2 - QE^2,$$

$$PA \cdot PB = (PE - AE)(PE + BE) = PE^2 - AE^2,$$

两式相减可得

$$PQ \cdot PR - PA \cdot PB = AE^2 - QE^2 = (AE - QE)(AE + QE) = AQ \cdot AR,$$

从而

$$PQ \cdot PR - AQ \cdot AR = PA \cdot PB.$$

同理

$$PS \cdot PT - DS \cdot DT = PA \cdot PB.$$

因此, 我们得到

$$\frac{PA \cdot PA}{PC \cdot PD} = \frac{PQ \cdot PR - AQ \cdot AR}{PS \cdot PT - DS \cdot DT} = \frac{FD \cdot GD}{SD \cdot TD}.$$

注意上式右侧仅与直线  $CD, FD$  的方向有关, 因而对于方向一定的直线  $AB$  与  $CD$ ,  $\frac{PA \cdot PA}{PC \cdot PD} = \text{const.}$

特别地, 设双曲线上有两点  $M, N$  满足  $MO \parallel AB, NO \parallel CD$ , 则  $\frac{PA \cdot PA}{PC \cdot PD} = \frac{OM^2}{ON^2}$  <sup>(7)</sup>.

3. 抛物线的情形. 我们证明  $P$  在抛物线内的情形, 其余情形同理. 如图2.19, 作与  $AB$  对应的直径  $SX$ , 交抛物线于点  $S$ , 交  $AB$  于点  $X$ . 过  $P$  作轴的平行线, 交抛物线于点  $U$ . 作  $CD$  对应直径  $TY$ , 交抛物线于点  $T$ , 交  $CD$  于点  $Y$ .

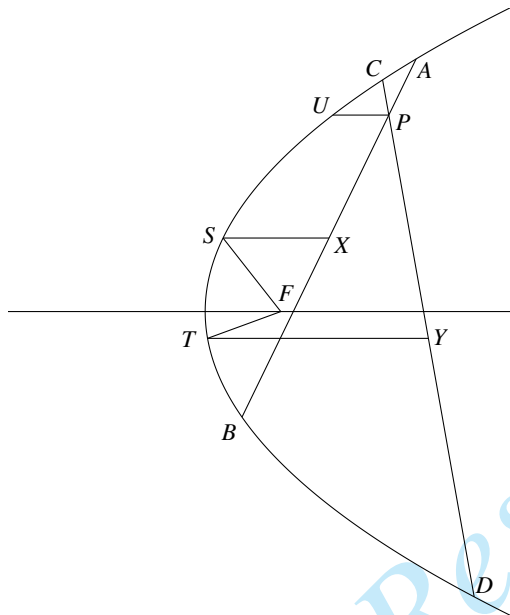


Figure 2.19

□

由(2.3.10)知  $\frac{AP \cdot BP}{CP \cdot DP} = \frac{4SF \cdot UP}{4TF \cdot UP} = \frac{SF}{TF}$ , 而由直径的性质, 点  $S, F$  的位置只与  $AB, CD$  的方向有关.

### 练习

**Problem 2.20.** 在平面直角坐标系中, 圆锥曲线  $\alpha$  的主轴<sup>(8)</sup>平行于  $x$  轴, 证明  $\alpha$  上四点  $A, B, C, D$  共圆当且仅当  $k_{AB} + k_{CD} = 0$ .

**Problem 2.21.** 在平面直角坐标系中, 圆锥曲线  $\alpha$  的主轴平行于  $x$  轴,  $P$  为  $\alpha$  上一定点,  $\alpha$  上的定点  $A, B$  满足  $k_{CA} + k_{CB} = 0$ , 证明: 直线  $AB$  的斜率为定值.

**Problem 2.22.** 给定平面内的一条双曲线, 点  $P$  是平面内任意一点, 过点  $P$  作直线, 交双曲线于点  $A, B$ ; 过点  $P$  再作双曲线的某一条渐近线的平行线, 分别交双曲线与另一渐近线于点  $C, D$ . 证明:  $\frac{PA \cdot PB}{PC \cdot PD}$  仅与直线  $l$  的方向有关.

(7) 此处利用了(2.1.13), 这是与两渐近线的交点重合的特殊情形, 此时  $OM^2 = DF \cdot DG, ON^2 = DS \cdot DT$ , 当然前提是  $M, N$  两点存在.

(8) 为了方便, 我们将椭圆的长轴、双曲线的实轴以及抛物线的轴统称为圆锥曲线的主轴; 相应地, 将椭圆的短轴和双曲线的虚轴统称为圆锥曲线的副轴.

## 第三章 射影几何基础

本章主要介绍射影几何中的基本概念,以便今后作进一步地应用.

### 3.1 射影变换及其基本性质

本节先介绍一般的射影变换.

#### 3.1.1 射影几何的基本概念

在开始正题之前,我们先来回顾映射的概念:

**Definition 3.1.1.** 定义:

a.) 给定集合  $X, Y$ , 从  $X$  到  $Y$  的一个映射 (mapping)  $f: X \rightarrow Y$  是指, 对每个  $x \in X$ , 都指定唯一确定的  $y \in Y$  与之对应, 把  $Y$  中与  $X$  对应的元素记作  $f(x)$ , 称  $f(x)$  为  $x$  在  $f$  下的像 (image), 称  $x$  为  $f(x)$  在  $f$  下的原像 (pre-image). 可以记号  $f: x \mapsto f(x)$  表示此映射.

b.) 对于映射  $f: X \rightarrow Y$ , 称  $f$  是满射 (surjection), 如果  $\forall y \in Y, \exists x \in X$  使得  $f(x) = y$ ; 称  $f$  是单射 (injection), 如果  $\forall x \neq x',$  有  $f(x) \neq f(x')$ ; 称  $f$  是双射 (bijection) 或一一对应 (one-to-one correspondence), 如果  $f$  既是单射又是满射.

c.) 给定集合  $X$ , 定义  $X$  上的恒同映射 (identical mapping)  $f: X \rightarrow X$  为:  $f(x) = x, \forall x \in X$ . 记此恒同映射为  $\text{id}_X$ , 在不引起歧义的情况下可简记为  $\text{id}$ .

d.) 给定映射  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ , 定义  $g$  与  $f$  的复合映射  $g \circ f: X \rightarrow Z$  为:  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ .

e.) 对于映射  $f: X \rightarrow Y$ , 若存在映射  $g$  使得  $g \circ f = \text{id}_X$  且  $f \circ g = \text{id}_Y$ , 则称  $g$  是  $f$  的逆映射 (inverse mapping), 记为  $f^{-1}$ .

可以证明映射有下列性质:

**Proposition 3.1.2.** 给定映射  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z, h: Z \rightarrow W$ , 则  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .

**Proposition 3.1.3.** 映射  $f$  是双射, 当且仅当  $f$  的逆映射存在.

我们先引入仿射平面与射影平面的概念:

**Definition 3.1.4.** 定义:

a.) 对于一个  $\text{Eukleidēs}$  平面中的每一条直线, 可以在其上引入一个新的元素——无穷远点 (point at infinity), 即直线上的在无穷远处的一点, 下记直线  $l$  上的无穷远点为  $\infty_l$ ; 相应地, 直线上原有的点称为有穷远点. 原来  $\text{Eukleidēs}$  平面中的一条直线上有且仅有一个无穷远点, 两平行直线交于同一个无穷远点.

b.) 一平面内所有的无穷远点构成一条直线, 称为无穷远直线 (line at infinity), 下记为  $l_\infty$ ; 相应地, 将非无穷远直线称为有穷远直线.

c.) 称添加了无穷远点后的  $\text{E}\ddot{\upsilon}\kappa\lambda\epsilon\acute{\iota}\delta\eta\varsigma$  平面中的直线为一条仿射直线, 称添加了无穷远直线后的  $\text{E}\ddot{\upsilon}\kappa\lambda\epsilon\acute{\iota}\delta\eta\varsigma$  平面为一个[实] 仿射平面 (affine plane)( $\mathbb{A}^2$ ), 即  $\mathbb{A}^2 = \mathbb{R}^2 \cup l_\infty$ .

**Remark.** 对上述定义作如下几点说明:

a.) 有的读者可能会想, 一条直线上的点可以沿着两个方向趋于无穷远, 那么为何规定一条直线上有且仅有一个无穷远点呢? 这是因为, 若一条直线上有两个无穷远点, 则两平行直线交于两无穷远点, 与原来  $\text{E}\ddot{\upsilon}\kappa\lambda\epsilon\acute{\iota}\delta\eta\varsigma$  平面中的“两不平行直线交于唯一一点”的性质相比差别较大; 但如果我们将两个无穷远方向上的无穷远处的点视为同一点, 则两平行直线也交于唯一一点, 这样仿射平面中任意两直线有且仅有一个交点, 这与原来  $\text{E}\ddot{\upsilon}\kappa\lambda\epsilon\acute{\iota}\delta\eta\varsigma$  平面的结构相容性较好, 便于我们作进一步地讨论.

b.) 让所有无穷远点构成一条直线的约定是自洽的, 因为我们规定原来  $\text{E}\ddot{\upsilon}\kappa\lambda\epsilon\acute{\iota}\delta\eta\varsigma$  平面中的一条直线上有且仅有一个无穷远点, 这样无穷远点的轨迹与任意直线均有且只有一个交点.

c.) 当然, 也可以在复  $\text{E}\ddot{\upsilon}\kappa\lambda\epsilon\acute{\iota}\delta\eta\varsigma$  平面上添加无穷远直线, 这样就得到一个复仿射平面 ( $\mathbb{CA}^2$ ). 今后, “仿射平面”一般指实仿射平面<sup>(1)</sup>. 我们可以把其中的点分为实点和虚点, 其中实点是对应的  $\text{E}\ddot{\upsilon}\kappa\lambda\epsilon\acute{\iota}\delta\eta\varsigma$  平面中的实点或对应的  $\text{E}\ddot{\upsilon}\kappa\lambda\epsilon\acute{\iota}\delta\eta\varsigma$  平面中的实直线上的无穷远点, 而将其余点称为虚点; 同理, 可把其中的直线分为实直线和虚直线, 其中实直线是其上有无数个实点的直线, 而另外的直线便是虚直线. 类似于  $\text{E}\ddot{\upsilon}\kappa\lambda\epsilon\acute{\iota}\delta\eta\varsigma$  平面中的讨论, 容易知道一条虚直线上最多有一个实点.

d.) 对一般的  $n$  维空间, 也可以类似地定义  $n$  维的仿射空间 ( $\mathbb{A}^n$ ), 这与仿射平面是完全类似的: 只要规定  $n$  维空间中每条直线上有一个无穷远点、所有的无穷远点组成一个  $(n-1)$  维的平面 (例如, 三维的仿射空间中所有的无穷远点构成了一个平面), 即得到了  $n$  维仿射空间  $\mathbb{A}^n$ . 在一般的  $n$  维仿射空间中, 仍有两平行直线交于同一无穷远点.

从仿射平面的概念中, 我们可以引出射影平面的概念:

**Definition 3.1.5.** 对于 [实] 仿射平面 ( $\mathbb{A}^2$ ), 若不区分其中的有穷远元素和无穷远元素, 认为它们的地位等价, 则该仿射平面变成了一个[实] 射影平面 (projective plane)( $\mathbb{P}^2$ ).

**Remark.** 对于复仿射平面, 我们可以相应地定义复射影平面 ( $\mathbb{RP}^2$ ), 并把其中的点分为实点和虚点, 把其中的直线分为实直线和虚直线.

如无特殊说明, 今后所称的“射影平面”默认为实射影平面<sup>(2)</sup>. 另外, 类似于  $n$  维仿射空间, 我们还可以将射影平面的概念推广到一般维数的空间, 得到  $n$  维射影空间的概念 ( $\mathbb{P}^n$ ).

此外, 今后在应用射影几何的知识时, 可能不会严格区分射影平面和仿射平面, 例如先将几何图形视为射影平面中的图形利用射影几何的知识进行推导, 然后将其中的无穷远元素和有穷远元素区分开来以作进一步地推理. 在本课程的范围内, 不对这两者作严格地区分不会有问题.

我们可以用如下的  $\text{E}\ddot{\upsilon}\kappa\lambda\epsilon\acute{\iota}\delta\eta\varsigma$  空间中的几何模型来理解射影平面与仿射平面:<sup>(3)</sup>

如图3.1, 设有一个以  $O$  点为球心的单位球面 ( $S^2$ ), 其赤道为一大圆  $c$ , 我们规定: 将  $c$  上的一组对径点视为同一点, 且将它们看作是一个无穷远点 (例如图中的  $\infty_l$ ), 并将球面的下半球面  $S$  除去赤道  $c$  后的每一个点视为是有穷远点.

根据上述规定, 球面的赤道  $c$  即相当于无穷远直线  $l_\infty$ ; 下半球面上的半个大圆弧即相当于一条有穷远直线  $l$ , 但它与赤道  $c$  的两个交点视为同一点, 即  $l$  上的无穷远点  $\infty_l$ .

这样, 我们便得到了  $\text{E}\ddot{\upsilon}\kappa\lambda\epsilon\acute{\iota}\delta\eta\varsigma$  空间中的仿射平面的模型. 设平面  $\pi$  与上述的下半球面  $S$  的南极点  $S_0$  相切, 点  $A$  是  $S$  上的任意一点,  $OA \cap \pi = A'$ , 则得到映射  $\varphi: S \rightarrow \pi, A \mapsto A'$ .  $\varphi$  是  $S$  上的点与  $\pi$  上的点的一一对应, 且将  $S$  上的无穷远直线 (赤道  $c$ ) 对应为  $\pi$  上的无穷远直线.

(1) 当强调仿射平面为实仿射平面时, 可用  $\mathbb{RA}^2$  表示之.

(2) 当强调射影平面为实射影平面时, 可用  $\mathbb{RP}^2$  表示之.

(3) 这一段的文字或许有些难以理解, 读者完全可以忽略它, 它只是一个补充性的论述, 对理解后面的内容并无什么帮助.



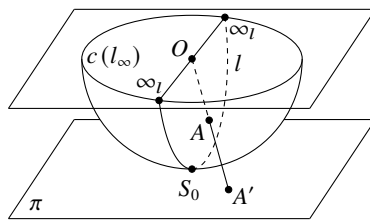


Figure 3.1

而在上述模型中, 我们将  $S$  的赤道和其他点明显地区分开来, 为得到射影平面, 我们需要让它们处于同一地位. 为此, 我们直接考虑整个单位球面 ( $\mathbb{S}^2$ ), 但将它上面的一组对径点视为同一点, 可以记这样处理后得到的几何对象为  $\mathbb{S}^2/(x \sim -x)$ .

这样, 在  $S$  上选取一个大圆作为赤道后, 由于一组对径点视为同一点, 则上半平面 (除去赤道) 的点与下半平面 (除去赤道) 的点完全等同, 则可仅考虑下半平面, 且赤道上的对径点也被视为了一组对径点, 从而回到了上述仿射平面的模型.

另外, 容易验证前述映射  $\varphi$  及其逆映射  $\varphi^{-1}$  都是连续的. 故形式化地, 下述定理总结了前述讨论:

**Theorem 3.1.6.**  $\mathbb{RP}^2 \cong \mathbb{S}^2/(x \sim -x)$ .

它的意思是, 认为  $\mathbb{S}^2$  上的对径点是等同的, 则得到空间  $\mathbb{S}^2/(x \sim -x)$  (称为一个  $\mathbb{S}^2$  的商空间 (quotient space)), 它同胚<sup>(4)</sup>于  $\mathbb{RP}^2$ .

在射影平面的基础上, 我们可以定义射影变换 (对应):

**Definition 3.1.7.** 设  $\pi, \pi'$  为 [可以重合的] 两射影平面, 一一对应映射  $f: \pi \rightarrow \pi'$  将  $\pi$  中的点映射为  $\pi'$  中的点, 且在同一条直线上的点在映射后仍在同一直线上, 则称  $f$  为一个射影对应 (projective correspondence); 特别地, 如果平面  $\pi, \pi'$  重合, 则称此射影对应为一个射影变换 (projective transformation).

**Remark.** 事实上, 在上述定义中, 我们需要  $f$  及其逆映射是连续的, 即  $\forall P \in \pi$ , 当  $\pi$  上的点  $P' \rightarrow P$  时,  $\pi'$  上  $f(P') \rightarrow f(P)$ .<sup>(5)</sup> 但是在本书中, 我们主要介绍几何的图像, 而不会很在意这些细节; 因而, 本书中映射的连续性是默认的, 除非特别说明.

由上述定义, 我们立即得到如下的结果:

**Theorem 3.1.8.** 射影对应的复合仍是射影对应, 射影对应可逆; 射影变换的复合仍是射影变换, 射影变换可逆.

*proof.* 射影对应是一一对应, 从而可逆; 射影对应保直线, 从而其复合也是保直线的, 故仍是射影对应. 类似地, 射影变换是一一对应, 从而可逆; 射影变换保直线且定义域和值域相同, 则射影变换的复合也保直线且定义域和值域相同.  $\square$

根据上述定理, 射影平面  $\pi$  上的所有射影变换 [关于变换的复合] 构成一个群. 所谓一个群指:

**Definition 3.1.9.** 设  $G$  为一个集合, 对集合  $G$  中的元素定义运算 “ $\cdot$ ” (即  $\forall a, b \in G, (a \cdot b) \in G$ ), 若这个运算 “ $\cdot$ ” 满足以下条件, 则称集合  $G$  [关于运算 “ $\cdot$ ”] 构成一个群 (group):

- ① 满足结合律, 即  $\forall a, b, c \in G, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ;
- ② 存在单位元 “1”, 使得  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ ;
- ③ 每个  $G$  中的元素  $a$  均有逆元  $b$ , 使得  $a \cdot b = b \cdot a = 1$ , 记  $a$  的逆元为  $a^{-1}$ .

(4) 称 [拓扑] 空间  $X, Y$  是同胚的 (homeomorphic) ( $X \cong Y$ ), 如果存在映射  $f: X \rightarrow Y$ , 满足: ①  $f$  是双射; ②  $f$  连续; ③  $f$  的逆映射  $f^{-1}$  连续.

(5) 更严谨地叙述是  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得对任意满足  $|P'P| < \epsilon$  的点  $P$ , 均有  $|f(P')f(P)| < \delta$ .

**Example 3.1.10.** 整数集  $\mathbb{Z}$  关于加法 “+” 构成一个群, 单位元为 0, 每个元素  $n$  的逆元为  $(-n)$ ; 但正整数集  $\mathbb{N}_+$  关于加法不构成一个群, 因为不存在单位元与逆元.

**Example 3.1.11.** 所有的非零实数集构成的集合  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  关于乘法 “ $\times$ ” 构成一个群, 单位元为 1, 每个元素  $a$  的逆元为  $\frac{1}{a}$ ; 但实数集  $\mathbb{R}$  关于乘法不构成一个群, 因为 0 无逆元.

几何变换群的引入是代数观点在几何中的应用的体现, 也反应了最初等的几何像高等的几何的过渡, 具有很高的重要性. 关于群的知识, 我们在此处暂时不会用到, 但在今后讲到三次曲线的加法群时会有一定的应用.

最后, 我们定义 “透视对应”:

**Definition 3.1.12.** 对于两不重合的射影平面  $\pi, \pi'$ , 一一对应映射  $f: \pi \rightarrow \pi'$  将  $\pi$  中的点映射为  $\pi'$  中的点, 且  $\forall P \in \pi$ , 点  $P$  与  $f(P)$  的连线恒过 [平面  $\pi, \pi'$  外的] 一定点  $O$ , 则称映射  $f$  为一个透视对应 (perspective correspondence), 称点  $O$  为这一透视对应的透视中心 (perspector). 设  $\pi \cap \pi' = l$ , 称直线  $l$  为这一透视对应的透视轴 (perspectrix/perspective axis).

显然, 透视轴上的点在透视对应下不变; 透视对应保持直线, 故透视对应是一种特殊的射影对应.

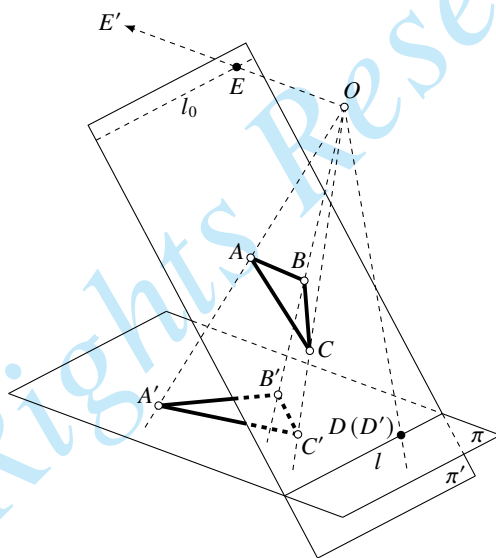


Figure 3.2

透视对应与 §1.4.1 中的中心投影是完全一样的, 图 3.2 给出了一个透视对应的例子, 平面  $\pi$  上的点  $A, B, C, D, E'$  在  $O$  为透视中心的透视对应下变为  $\pi'$  上的点  $A', B', C', D', E'$ , 其中由于点  $D$  在透视轴  $l$  上, 点  $D'$  与  $D$  重合; 此外, 由于  $EO \parallel \pi$ , 则点  $E'$  为平面  $\pi'$  上的无穷远点, 我们称这样的点  $E$  是平面  $\pi$  在此透视对应下的影消点, 平面  $\pi$  上的所有的影消点构成的轨迹为影消线. 显然, 过透视中心  $O$  作平面  $\pi'$  的平行平面, 与平面  $\pi$  的交线  $l_0$  就是影消线.

利用透视对应, 我们可以证明下面的结论:

**Proposition 3.1.13.** 证明:

- (1) 椭圆 (或圆) 与无穷远直线相离, 椭圆 (或圆) 上没有无穷远点;
- (2) 双曲线与无穷远直线相交, 双曲线上有两个 [不同的] 无穷远点;
- (3) 抛物线与无穷远直线相切, 抛物线上有一个无穷远点.

*proof.* 从直观上来看, 上述结论是容易理解的. 我们用略严格的方式来证明之.

(1) 见 §1.4.1 的图 1.15, 在中心投影 (也就是透视对应)  $f$  下, 圆锥底面的圆  $\omega$  变为平面  $\pi$  中的椭圆  $\alpha$ . 为得到  $\pi$  上的无穷远点, 该无穷远点的原像在  $\omega$  所在平面的影消线上, 而显然, 过点  $S$  作平面  $\pi$  的平行平面, 与  $\omega$  所在平面的交线在  $\omega$  外, 即圆  $\omega$  上没有  $\pi$  上无穷远点的原像. 那么, 在透视对应下,  $\alpha$  上没有无穷远点.

(2) 见 §1.4.1 的图 1.16, 在透视对应  $f$  下, 圆锥底面的圆  $\omega$  变为平面  $\pi$  中的双曲线  $\alpha$ . 与 (1) 类似地寻找  $\omega$  所在平面的影消线, 而显然过点  $S$  作平面  $\pi$  的平行平面与  $\omega$  所在平面的交线会与圆  $\omega$  相交于 [不重合的] 两点, 即圆  $\omega$  上有两个  $\pi$  上无穷远点的原像. 那么, 在透视对应下,  $\alpha$  有两个 [相异的] 无穷远点.

(3) 见 §1.4.1 的图 1.17, 在透视对应  $f$  下, 圆锥底面的圆  $\omega$  变为平面  $\pi$  中的抛物线  $\alpha$ . 类似地寻找  $\omega$  所在平面的影消线, 由于此种情况下圆锥  $S-\omega$  恰有一条母线  $l_0$  与  $\pi$  平行, 则过点  $S$  作平面  $\pi$  的平行平面与  $\omega$  所在平面的交线会与圆  $\omega$  相切, 且切点也是  $l_0$  与  $\omega$  的切点, 即影消线与  $\omega$  相切 (切点为  $l_0$  与  $\alpha$  的切点). 那么, 在透视对应下,  $\alpha$  与无穷远直线相切,  $\alpha$  上有一个无穷远点.  $\square$

**Remark.** 在上面的问题中, 我们是在实射影平面中考虑的, 如果考虑复射影平面, 由于椭圆 (或圆) 的方程是二次的, 而 [有穷远] 直线的方程是一次的, 则由代数基本定理可知直线与圆恒有两个交点 (相切视为两交点重合). 让有穷远直线趋于无穷, 则可知无穷远直线也与椭圆 (或圆) 也有两个交点, 只不过它们是虚点.

## 练习

**Problem 3.1.** \* 证明 (3.1.2)(3.1.3).

**Problem 3.2.** 判断下述集合  $G$  关于运算 “ $\cdot$ ” 是否构成一个群, 并说明理由:

- (1)  $G = \mathbb{R}_+$ , “ $\cdot$ ” 为乘法;
- (2)  $G$  是  $\mathbb{E}^2$  平面上所有向量的集合, “ $\cdot$ ” 为向量的加法;
- (3)  $G$  是所有  $n$  阶可逆矩阵的集合, “ $\cdot$ ” 是矩阵乘法;
- (4)  $G$  是  $\mathbb{E}^2$  平面上的所有旋转变换的集合, “ $\cdot$ ” 是变换的复合;
- (5)  $G$  是  $\mathbb{E}^2$  平面上的所有平移变换的集合, “ $\cdot$ ” 是变换的复合;
- (6)  $G$  是  $\mathbb{E}^2$  平面上的所有相似变换的集合, “ $\cdot$ ” 是变换的复合;
- (6)  $G$  是  $\mathbb{E}^2$  平面上的所有位似变换的集合, “ $\cdot$ ” 是变换的复合;
- (7)  $G$  是  $\mathbb{E}^2$  平面上的所有旋转变换的集合, “ $\cdot$ ” 是变换的复合;
- (8)  $G$  是射影平面上所有射影变换的集合, “ $\cdot$ ” 是变换的复合.

**Problem 3.3.** 透视对应的复合是否仍然为透视对应? 请说明理由.

**Problem 3.4.** 设一透视对应将射影平面  $\pi$  上的三角形  $\triangle ABC$  变为平面  $\pi'$  上的三角形  $\triangle A'B'C'$ , 设  $P = BC \cap B'C'$ ,  $Q = CA \cap C'A'$ ,  $R = AB \cap A'B'$ , 则点  $P, Q, R$  是否在同一直线上? 请说明理由.

**Problem 3.5.** 给定平面  $\pi, \pi'$ , 有透视对应  $f: \pi \rightarrow \pi'$ , 点  $O$  为透视中心,  $l$  是平面  $\pi$  上的影消线. 证明:

- (1) 相交于  $l$  上的二直线在  $f$  下变成二平行直线;
- (2) 设定点  $P, Q \in l$ ,  $R$  为  $\pi$  内的任意一点, 则  $\angle f(P)f(R)f(Q)$  为定值;
- (3) 设  $p$  是平面  $\pi$  中的定直线,  $f(p) = p'$ , 则对于任意的点  $O$ , 直线  $p'$  过一定点.

**Problem 3.6.** \* 设点  $O$  是射影平面  $\mathbb{RP}^2$  中的一点, 证明:  $\mathbb{RP}^2 \setminus \{O\} \cong M$ . 其中,  $M$  是所谓的 Möbius 带, 它的严格定义为  $M = ([0, 1] \times (1, 1)) / ((0, y) \sim (1, -y))$ .

### 3.1.2 射影对应的基本性质

对于射影对应, 我们有如下的一些基本性质.

**Theorem 3.1.14.** 射影对应下, 点仍然是点, 直线仍然是直线, 在同一直线上的点仍然在同一直线上, 过同一点的直线仍然过同一点.

*proof.* 这是射影对应的定义的要求.  $\square$

**Theorem 3.1.15.** 射影对应后, 相交的曲线仍相交, 相离的曲线仍相离, 相切的曲线仍相切.

*proof.* 对于两条曲线, 若它们有某一公共点, 则显然这一公共点在射影对应下的像也同时在这两条曲线在射影对应下的像, 则相交的曲线仍然相交. 对于相离的曲线, 若它们在射影对应后相交, 由射影对应可逆以及相交的曲线仍相交可知原来它们也相交, 产生矛盾, 从而相离的曲线仍然相离.

下证相切的曲线仍相切.

设有两条曲线  $\alpha, \beta$ , 它们在射影对应后变为  $\alpha', \beta'$ . 若  $\alpha, \beta$  有一个公共点  $O$ , 则可分别取  $\alpha, \beta$  上  $O$  点附近的一点  $A, B$ , 点  $A, B, O$  在射影对应后分别变为点  $A', B', C'$ .

令  $A \rightarrow O$ , 则  $AO$  趋于  $\alpha$  在  $O$  点处的切线; 由射影对应的连续性, 此时  $A' \rightarrow O'$ , 则  $A'O'$  趋于  $\alpha'$  在  $O'$  点处的切线. 同理, 令  $B \rightarrow O$ , 则  $BO$  趋于  $\beta$  在  $O$  点处的切线,  $B'O'$  趋于  $\beta'$  在  $O'$  点处的切线. 由于原来  $\alpha, \beta$  相切, 则直线  $AO, BO$  趋于重合, 则射影对应后直线  $A'O', B'O'$  也趋于重合, 因此  $\alpha', \beta'$  相切于点  $O'$ .

相离的曲线仍相离, 相交的曲线仍相交是显然的, 我们证明相切的曲线仍相切: 若原曲线  $\alpha$  与一直线  $l$  在点  $A$  处相切, 取曲线上相近的一点  $B$ , 射影对应后对应的曲线  $\alpha'$  上也有相应的两点  $A', B'$ , 当  $B \rightarrow A$  时  $AB$  即为  $\alpha$  的切线  $l$ , 此时相应地有  $B' \rightarrow A'$ , 则  $A'B'$  变为  $\alpha'$  的切线, 而  $A'B'$  即  $l$  在射影对应下的像. 曲线与曲线相切的情形类似.  $\square$

**Theorem 3.1.16.** 任三点不共线的四点唯一确定一个射影对应. 即, 给定射影平面  $\pi$  上四点  $A, B, C, D$  (任意三点不共线) 和它们在某一射影对应  $f$  后的像点  $A', B', C', D'$  (任意三点不共线), 则存在唯一的  $f$  满足上述条件.

*proof.* <sup>(6)</sup> 设射影对应  $f: \pi \rightarrow \pi'$  将四边形  $ABCD$  变为四边形  $A'B'C'D'$ . 记  $AB \cap CD = E, AD \cap BC = F, f(E) = E', f(F) = F'$ . 由于射影对应保直线, 则  $E', F'$  也必为四边形  $A'B'C'D'$  的两组对边的交点, 即若  $f$  存在, 则点  $E', F'$  被唯一确定.

(一) 先证明存在性. 由于射影对应的复合仍是射影对应, 且射影对应可逆, 我们只需证明: 存在射影对应把任意四边形  $ABCD$  变为一个单位正方形  $A'B'C'D'$ .

这是容易的, 先取一个透视对应  $g: \pi \rightarrow \pi'$ , 设透视中心为点  $O$ . 总可以选取  $g$  使得  $OE, OF \parallel \pi'$ , 且  $OE \perp OF$ . 此时  $EF$  为影消线, 则  $g(EF)$  为  $\pi'$  上的无穷远直线, 而由  $OE \perp OF$  可知  $g(E), g(F)$  是互相垂直的方向上的无穷远点, 因此四边形  $ABCD$  在  $g$  下变为一个矩形.

然后对所得的矩形沿矩形的边的方向上作伸缩变换, 这样就得到了一个正方形. 显然伸缩变换保持直线从而为射影对应, 而透视对应也是一个射影对应, 由此即给出了一个将四边形  $ABCD$  变为矩形的射影对应.

(二) 然后证明唯一性. 由于射影对应的复合仍是射影对应, 且射影对应可逆, 我们只需证明: 把一个单位正方形  $ABCD$  变为任意四边形  $A'B'C'D'$  一定唯一. 由于  $ABCD$  为正方形, 则此时点  $E, F$  为两个无穷远点.

如图3.3, 连接  $BD, AC$  交于点  $Z_1$ , 直线  $FZ_1$  分别交  $AB, CD$  于点  $Y_{11}, X_{11}$ , 由于  $F$  为  $BC$  方向上的无穷远点, 则  $X_{11}Y_{11} \parallel BC$ , 则易知  $Y_{11}, X_{11}$  分别为线段  $AB, CD$  的中点. 此时, 对所得的两个小矩形

(6) 本定理的证明比较繁琐且实际意义不大, 不感兴趣的读者可以略过.

$AY_{11}X_{11}D, BY_{11}X_{11}C$  分别作类似操作, 连接  $DY_{11}, AX_{11}$  交于点  $Z_{21}$ , 连接  $FZ_{21}$  分别交  $AB, CD$  于点  $Y_{21}, X_{21}$ ; 连接  $BX_{11}, CY_{11}$  交于点  $Z_{22}$ , 连接  $FZ_{22}$  分别交  $AB, CD$  于点  $Y_{22}, X_{22}$ , 则得到了线段  $AB, CD$  各自的四等分点  $Y_{21}, Y_{22}$  与  $X_{21}, X_{22}$ . 继续对所得的四个小矩形  $AY_{21}X_{21}D, Y_{21}Y_{11}X_{11}X_{21}, Y_{22}Y_{11}X_{11}X_{22}, BY_{22}X_{22}C$  作类似操作, 则可得到  $AB, CD$  各自的八等分点……不断类似操作, 可得到线段  $AB, CD$  各自的  $2^n$  等分点, 其中  $n$  为正整数且趋于无穷.

按上述做法, 易知线段  $AB, CD$  上的任意一点都可以通过这样的  $2^n$  等分点进行逼近. 由  $f$  保持直线且为连续映射可知, 对于线段  $A'B', C'D'$  上的任意一点  $P$ , 必能按上述作法进行逼近, (只不过在操作时需要把上述步骤中的每一点改成对应的在  $f$  下的像), 由此可知  $f(P)$  必须满足上述条件, 而通过取极限, 上述做法能唯一确定  $f(P)$ , 从而  $f(P)$  是唯一的.

同理, 对于线段  $BC, DA$  上的任意一点, 我们也能唯一确定其像点. 由此, 我们完全确定了正方形  $ABCD$  的边上的任意一点在  $f$  下的像. 那么, 可在线段  $CD$  上取一点  $M$ , 在线段  $BC$  上取一点  $N$ . 设  $FM \cap EN = L$ , 由于  $f(M), f(N), f(E), f(F)$  是唯一确定的, 所以根据  $f$  保直线可知  $f(L) = f(M)f(F) \cap f(E)f(N)$ , 即  $f(L)$  也唯一确定. 而当点  $M, N$  在边上运动时, 点  $L$  可以遍历整个一个正方形的内部, 故正方形  $ABCD$  边上或内部一点在  $f$  下的像可以被唯一确定.

这样, 如图3.4, 可在线段  $CD$  上取点  $S', T'$ , 在正方形  $A, B, C, D$  内取点  $S, T$ , 设  $SS' \cap TT' = Q$ . 由于  $f(S), f(S'), f(T), f(T')$  已唯一确定, 则根据  $f$  保直线可知  $f(Q) = f(S)f(S') \cap f(T)f(T')$ , 即  $f(Q)$  是唯一确定的. 由于点  $S', T'$  可为线段  $CD$  上任意两点, 且点  $S, T$  可以任意地靠近线段  $CD$ , 则点  $Q$  可以遍历线段  $CD$  上方 (除去线段  $CD$ ) 的任意一点, 即线段  $CD$  上方任意一点在  $f$  下的像是唯一确定的.

同理, 线段  $AB$  下方、线段  $AD$  左侧、线段  $BC$  右侧的任意一点在  $f$  下的像也是唯一确定的. 至此, 我们唯一确定了平面  $\pi$  中任意一点在  $f$  下的像.  $\square$

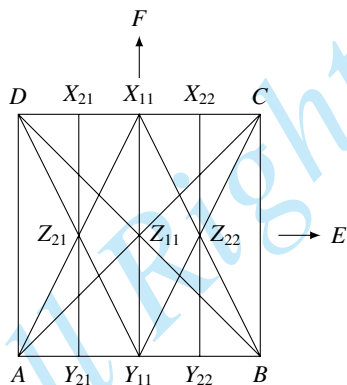


Figure 3.3

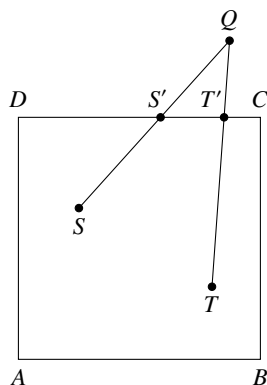


Figure 3.4

**Theorem 3.1.17.** 透视对应是一种射影对应, 而射影对应必可由有限次透视对应复合得到.

*proof.* 透视对应是一种射影对应是显然的, 我们证明射影对应必可由透视对应复合得到. 设有射影对应  $f: \pi \rightarrow \pi'$ , 它由  $\pi$  上四点  $A, B, C, D$  与  $\pi'$  上四点  $A', B', C', D'$  唯一确定. 我们只需证明存在透视对应的复合, 使得  $A, B, C, D$  四点分别变为  $A', B', C', D'$  四点.

不妨设平面  $\pi, \pi'$  不重合, 且点  $A, B, C, D$  与对应的  $A', B', C', D'$  间任意一组均是不重合的. 否则, 先将平面  $\pi$  以及其上的点平移至平面  $\pi^*$ , 使得它们均不重合, 注意这一平移变换可以看作是透视中心在无穷远、且原平面  $\pi$  和像点所在的平面  $\pi^*$  重合的透视对应.

首先, 连接  $AA', BB'$  交于点  $O_1$ , 取平面  $\pi''$  使得  $\pi''$  与  $\pi'$  的交线为直线  $A'B'$ , 但平面  $\pi''$  与  $\pi'$  和  $\pi$  均不重合. 则以  $O_1$  为透视中心的透视对应  $g: \pi \rightarrow \pi''$  将点  $A, B$  分别变为点  $A', B'$ , 设此时  $C, D$  分别变为点  $C'', D''$ .



然后, 设  $C'C'', D'D''$  交于点  $O_2$ , 则以  $O_2$  为透视中心的透视对应  $h: \pi'' \rightarrow \pi'$  将点  $C'', D''$  分别变为点  $C', D'$ ; 同时, 由于  $A', B'$  点在此透视对应的透视轴上, 它们在  $h$  下不变.

这样, 在透视对应的复合  $h \circ g$  下  $A, B, C, D$  四点就变为了  $A', B', C', D'$  四点. 若最开始还需要平移, 那么一共是三次透视对应.  $\square$

**Remark.** 根据上述定理, 我们也可以用透视对应的复合来定义射影对应.

**Theorem 3.1.18.** 射影对应将圆锥曲线变为圆锥曲线, 但其类型可能改变. 特别地, 射影对应必能将任意圆锥曲线变为圆.

*proof.* 由 §1.4.1 的中心投影的知识, 中心投影下圆、椭圆、双曲线、抛物线可以互相转化, 而所谓的“中心投影”就是一种透视对应, 则由 (3.1.17) 可知射影对应下圆锥曲线还是圆锥曲线.

为将圆锥曲线变为圆, 只需采用 §1.4.1 中的中心投影即可 (只不过 §1.4.1 中的中心投影是将圆变为圆锥曲线, 这里只要反过来即可).  $\square$

利用射影变换, 可以方便地证明一些命题:

**Example 3.1.19.** 如图 3.5, 三直线  $P_1P_2, Q_1Q_2, R_1R_2$  交于一点  $S$ , 且点  $P_1, Q_1, R_1$  与点  $P_2, Q_2, R_2$  分别在直线  $l_1, l_2$  上,  $l_1 \cap l_2 = O$ . 设  $Q_1R_2 \cap Q_2R_1 = X, R_1P_2 \cap P_1R_2 = Y, P_1Q_2 \cap P_2Q_1 = Z$ , 证明: 点  $O, X, Y, Z$  在同一条直线上.

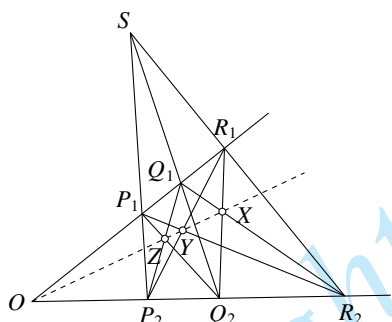


Figure 3.5

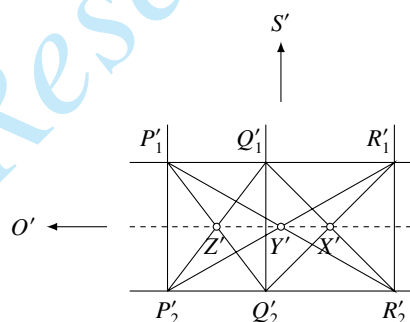


Figure 3.6

*solution.* 通过射影变换, 将点  $S, O$  变为互相垂直的方向上的无穷远点, 以撇号标记变换后的点, 则变换后的图形如图 3.6 所示. 由于  $P'_1P'_2, Q'_1Q'_2, R'_1R'_2$  过同一无穷远点  $S'$ , 则  $P'_1P'_2 \parallel Q'_1Q'_2 \parallel R'_1R'_2$ ; 同理  $l'_1 \parallel l'_2$ , 且这两条直线与前述三条直线是垂直的.

那么, 显然, 点  $X', Y', Z'$  均在  $l'_1, l'_2$  的对称轴上, 故点  $X', Y', Z'$  共线, 且所共直线与  $l'_1, l'_2$  平行, 从而也过点  $O'$ . 根据 (3.1.14) 可知, 射影变换前  $O, X, Y, Z$  四点也在同一直线上.  $\square$

### 练习

**Problem 3.7.** 设直线  $OX, OY, OZ$  为三条定直线, 点  $A, B$  为两定点, 且直线  $AB$  过点  $O$ , 点  $R$  为直线  $OZ$  上的动点,  $RA \cap OX = P, RB \cap OY = Q$ . 证明: 直线  $PQ$  过  $AB$  上一定点.

**Problem 3.8.** 设点  $A, B$  为两定点,  $l$  为定直线, 在  $l$  上任取两点  $P, Q, AP \cap BQ = L, AQ \cap BP = M$ , 证明: 直线  $LM$  通过  $AB$  上一定点.

**Problem 3.9 (Pappus).** 点  $A_1, B_1, C_1$  在直线  $l_1$  上, 点  $A_2, B_2, C_2$  在直线  $l_2$  上,  $T_1 = A_1B_2 \cap A_2B_1, T_2 = B_1C_2 \cap B_2C_1, T_3 = C_1A_2 \cap C_2A_1$  在同一直线上.

**Problem 3.10.** 给定不共线三点  $A, B, C$ , 圆锥曲线  $\alpha$  分别切直线  $BC, CA, AB$  于点  $A_1, B_1, C_1$  分别在直线上, 证明: 直线  $AA_1, BB_1, CC_1$  交于一点.

## 3.2 交比与调和比

### 3.2.1 射影变换的不变量

本节来考虑射影变换<sup>(7)</sup>中的不变量. 为此先引入如下的基本概念:

**Definition 3.2.1.** 定义:

① 点列 (range of points) 是一条直线  $l$  上的点  $A, B, C, \dots$  的集合, 可记为  $l(A, B, C, \dots)$ , 这些点所在的直线  $l$  称为这一点列的底<sup>(8)</sup>;

② 线束 (pencil of lines) 是过一个点  $O$  的直线  $a, b, c, \dots$  的集合, 可记作  $O(a, b, c, \dots)$ <sup>(9)</sup>, 这些直线所共的点称为这一线束的顶点.

根据点列和线束的定理, 我们立即可以得到下面的结论:

**Theorem 3.2.2.** 射影变换将点列变为点列, 将线束变为线束.

下面我们来看射影变换的不变量, 为此, 我们引入交比的概念:

**Definition 3.2.3.** 定义:

① 对于点列中三点  $A, B, C$ , 定义其单比  $(A, B, C) \triangleq \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ , 其中点  $A, B$  称为基点, 点  $C$  称为分点; 对于点列中四点  $A, B, C, D$ , 定义其交比  $(A, B; C, D) \triangleq \frac{(A, B, C)}{(A, B, D)} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \div \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$ , 其中点  $A, B$  称为基点偶, 点  $C, D$  称为分点偶.

② 对于线束中三直线  $a, b, c$ , 定义其单比  $(a, b, c) \triangleq \frac{\sin \angle(a, c)}{\sin \angle(b, c)}$ , 其中直线  $a, b$  称为基线, 直线  $c$  称为分线; 对于线束中四直线  $a, b, c, d$ , 定义其交比  $(a, b; c, d) \triangleq \frac{(a, b, c)}{(a, b, d)} = \frac{\angle(a, c)}{\angle(b, c)} \div \frac{\angle(a, d)}{\angle(b, d)}$ , 其中直线  $a, b$  称为基线偶, 直线  $c, d$  称为分线偶.

**Remark.** 在不引起歧义的情况下, 可将单比  $(A, B, C)$  和  $(a, b, c)$  分别简记为  $(ABC)$  和  $(abc)$ , 将交比  $(A, B; C, D)$  和  $(a, b; c, d)$  分别简记为  $(AB, CD)$  和  $(ab, cd)$ .

需要注意的是, 涉及无穷远元素时可以利用极限的思想定义相关的量:

**Proposition 3.2.4.** 若点列  $l(A, B, C, D)$  中, 点  $A, B$  为有穷远点, 点  $D$  为无穷远点, 则  $(A, B, D) = 1$ ,  $(A, B; C, D) = (A, B, C)$ .

$$\text{proof. } (A, B, D) = \lim_{\substack{C' \in AB, \\ |AC'| \rightarrow +\infty}} \frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}} = 1, (A, B; C, D) = \frac{(A, B, C)}{(A, B, D)} = (A, B, C). \quad \square$$

**Remark.** 对于含有无穷远直线的线束的交比计算, 一般是通过下面的(3.2.5)将其转化为点列的交比进行计算; 需要注意的是, 含无穷远直线的线束的单比不是良定义的, 因为难以定义无穷远直线与有穷远直线间的夹角, 也不能将其转化为点列的单比进行计算.

下面的定理保证了交比就是射影变换的不变量:

(7) 从本节起, 我们不再严格区分射影对应与射影变换的概念, 因为在实际的应用中并不会造成什么影响. 读者容易根据上下文进行区分.

(8) 在不引起歧义的情况下, 点列的记号中可以省略表示底的  $l$ ; 此外, 我们用“点列”一词时, 对点列中点的个数并没有要求, 例如可以称直线  $l$  上  $A, B, C, D$  形成了一个点列, 也可以称直线  $l$  上的所有点形成了一个点列. 对后面“线束”同理.

(9) 为了方便, 若这些直线上分别有点  $(A, B, C, \dots)$ , 亦可记此线束为  $O(A, B, C, \dots)$ .



**Theorem 3.2.5.** (如图 3.7) 设过点  $P$  的四直线  $a, b, c, d$  分别交直线  $l_1$  于点  $A, B, C, D$ , 交  $l_2$  于点  $A', B', C', D'$ , 则

$$(A, B; C, D) = (a, b; c, d) = (A', B'; C', D'). \quad (3.1)$$

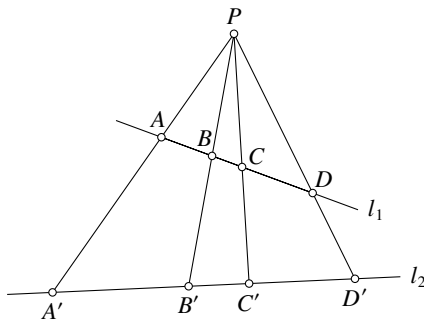


Figure 3.7

*proof.* 由分角定理,  $(A, B; C, D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \div \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{PA \sin \angle(a, c)}{PB \sin \angle(b, c)} \div \frac{PA \sin \angle(a, d)}{PB \sin \angle(b, d)} = (a, b; c, d)$ . 同理可知  $(A', B'; C', D') = (a, b; c, d)$ , 即证.  $\square$

**Remark.** 提醒读者注意, 线束的单比不能简单地转化为点列的单比, 因为  $(A, B, C) = \frac{PA \sin \angle(a, c)}{PB \sin \angle(b, c)} = \frac{PA}{PB} (a, b, c)$ , 这也解释了前面所述“含无穷远直线的线束的单比无法通过转化为点列的单比进行计算”. 实际上, 我们定义线束的单比更多地是为了定义的形式上的对称, 但线束的单比在实际的应用上并无很大的意义.

**Corollary 3.2.6.** 射影变换保持交比不变. 即, 若点列  $(A, B, C, D)$  在射影变换下变为点列  $(A', B', C', D')$ , 则  $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$ ; 若线束  $(a, b, c, d)$  在射影变换下变为线束  $(a', b', c', d')$ , 则  $(a, b; c, d) = (a', b'; c', d')$ .

*proof.* 在上面的(3.2.5), 将  $l_1$  看作平面  $\pi$  中的直线,  $l_2$  看作平面  $\pi'$  中的直线, 将  $P$  看作某一透视对应  $f: \pi \rightarrow \pi'$  的透视中心, 则  $f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C', f(D) = D'$ , 则(3.2.5)表明透视对应下点列的交比不变, 而(3.2.5)又表明线束的交比可以转化为点列的交比, 从而透视对应下线束的交比也不变. 而(3.1.17)说明射影变换是透视对应的复合.  $\square$

**Remark.** 根据上述结果, 射影对应也定义为: 保持直线且保持点列的交比的射影变换.<sup>(10)</sup>

利用射影变换的不变量, 我们可以用射影变换证明一些结论, 例如下面的 Carnot 定理.

**Theorem 3.2.7 (Carnot).** 给定不共线三点  $A, B, C$ , 设点  $A_1, A_2 \in BC$ ,  $B_1, B_2 \in AC$ ,  $C_1, C_2 \in AB$ . 则六点  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  在同一圆锥曲线上的充要条件为

$$\frac{\overline{BA_1} \cdot \overline{BA_2}}{\overline{CA_1} \cdot \overline{CA_2}} \cdot \frac{\overline{CB_1} \cdot \overline{CB_2}}{\overline{AB_1} \cdot \overline{AB_2}} \cdot \frac{\overline{AC_1} \cdot \overline{AC_2}}{\overline{BC_1} \cdot \overline{BC_2}} = 1. \quad (3.2)$$

在证明上述定理时, 我们的想法是, 通过射影变换将所共的圆锥曲线变为圆, 而对于圆的情形的处理是容易的. 但(3.2)式的左侧并非交比乘积的形式, 我们需要构造一个新的射影变换的不变量:

**Lemma 3.2.8.** 给定三点  $A, B, C$ , 设点  $A_1 \in BC$ ,  $B_1 \in AC$ ,  $C_1 \in AB$ , 则  $s = \frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}}$  在射影变换下保持不变.

(10) 注意与(3.1.7)不同, 参见(3.1.7)的 Remark, 我们在之前实际上要求映射及其逆映射的连续性.

*proof.* 由于射影变换可分解为透视对应的复合, 我们只需证明  $s$  在透视对应下不变. 下考虑透视对应  $f: \pi \rightarrow \pi'$ , 透视中心为点  $P$ , 以撇号标记某一点在透视对应下的像, 例如  $f(A)=A'$ , 并设透视对应下  $s$  变为  $s'$ .

与(3.2.5)类似地使用分角定理, 可知

$$s = \frac{PB \sin \angle BPA_1}{PC \sin \angle CPA_1} \cdot \frac{PC \sin \angle CPB_1}{PA \sin \angle APB_1} \cdot \frac{PA \sin \angle APC_1}{PB \sin \angle BPC_1} = \frac{\sin \angle BPA_1 \cdot \sin \angle CPB_1 \cdot \sin \angle APC_1}{\sin \angle CPA_1 \cdot \sin \angle APB_1 \cdot \sin \angle BPC_1},$$

同理有

$$s' = \frac{\sin \angle B'PA'_1 \cdot \sin \angle C'PB'_1 \cdot \sin \angle A'PC'_1}{\sin \angle C'PA'_1 \cdot \sin \angle A'PB'_1 \cdot \sin \angle B'PC'_1}.$$

由透视对应, 点  $B, B', P, A_1, A'_1, P$  分别共线, 故  $\angle BPA_1 = \angle B'PA'_1$ , 同理其他对应角也相等, 故  $s = s'$ .  $\square$

有了上述构造出的射影变换的不变量, 我们可以证明 Carnot 定理:

*proof of (3.2.7).* 先证明必要性. 设点  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  在同一圆锥曲线  $\alpha$ , 则可用射影变换将  $\alpha$  变为一个圆. 由圆幂定理易知  $\alpha$  为圆的情形下(3.2)显然成立, 而由(3.2.8)可知射影变换下

$$\text{LHS of (3.2)} = \left( \frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} \right) \cdot \left( \frac{\overline{BA_2}}{\overline{CA_2}} \cdot \frac{\overline{CB_2}}{\overline{AB_2}} \cdot \frac{\overline{AC_2}}{\overline{BC_2}} \right) = \text{const},$$

因此对任意的  $\alpha$  此式均成立.

再证明充分性. 由于五点确定一条二次曲线<sup>(11)</sup>, 考虑过点  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1$  的圆锥曲线  $\alpha$ , 设  $\alpha$  与  $AB$  的另一个交点为  $C'_2$ , 则  $C'_2$  满足(3.2)式中  $C_2$  的条件. 易知当点  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1$  给定时, 满足(3.2)的点  $C_2$  唯一, 从而必有  $C_2 = C'_2$ , 即证.  $\square$

实际上, 上述的 Carnot 定理还可以用圆锥曲线幂定理来证明:

*another proof of (3.2.7) using (2.4.1).* 只证必要性. 设此六点共圆锥曲线  $\alpha$ . 由圆锥曲线幂定理, (3.2)中

$$\text{LHS} = \frac{\overline{AC_1} \cdot \overline{AC_2}}{\overline{AB_1} \cdot \overline{AB_2}} \cdot \frac{\overline{BA_1} \cdot \overline{BA_2}}{\overline{BC_1} \cdot \overline{BC_2}} \cdot \frac{\overline{CB_1} \cdot \overline{CB_2}}{\overline{CA_1} \cdot \overline{CA_2}},$$

它只与直线  $AB, BC, CA$  的方向有关, 因此可以分别平移三直线  $AB, BC, CA$ , 使之与  $\alpha$  均相切, 此时  $A_2 = A_1, B_2 = B_1, C_2 = C_1$ , 由 [3.10] 的结论可知  $AA_1, BB_1, CC_1$  交于一点, 则由 Ceva 定理可知, 此时

$$\text{LHS of (3.2)} = \left( \frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} \right)^2 = (-1)^2 = 1,$$

则必要性得证.  $\square$

## 练习

**Problem 3.11.** 利用射影变换证明 Ceva 定理与 Μενέλαος 定理.

**Problem 3.12.** 设点  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$  是平面中  $n$  点, 点  $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}, B_n$  分别在直线  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$  上, 证明:  $\frac{A_1B_1}{A_2B_1} \cdot \frac{A_2B_2}{A_3B_2} \cdot \dots \cdot \frac{A_{n-1}B_{n-1}}{A_nB_{n-1}} \cdot \frac{A_nB_n}{A_1B_n}$  是射影变换下的不变量. <sup>(12)</sup>

(11) 这是 [1.8] 的结论, 我们也将之后给出一个几何的证明.

(12) 实际上, 交比的不变性可以看作本题在  $n=2$  下的特例, 而(3.2.8)可看作本题在  $n=3$  下的特例.

**Problem 3.13.** 求下列平面直角坐标系中的点列或线束的交比:

- (1) 点  $P_1(3,1), P_2(7,5), Q_1(6,4), Q_2(9,7)$ , 求  $(P_1, P_2; Q_1, Q_2)$ ;
- (2) 直线  $l_1: 2x-y+1=0, l_2: 3x+y-2=0, l_3: 7x-y=0, l_4: 5x-1=0$ , 求  $(l_1, l_2; l_3, l_4)$ .

**Problem 3.14.** 在平面直角坐标系中, 若某一线束中四直线  $a, b, c, d$  的斜率分别为  $k_a, k_b, k_c, k_d$ , 证明:

$$(a, b; c, d) = \frac{k_a - k_c}{k_b - k_c} \div \frac{k_a - k_d}{k_b - k_d}.$$

### 3.2.2 交比的性质

交比是射影几何中非常重要的一个概念, 因而在本节中, 我们将介绍交比的一些性质.

**Proposition 3.2.9.** 对于点列中四点  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , 其交比具有如下的性质:

- (1)  $(P_3, P_4; P_1, P_2) = (P_1, P_2; P_3, P_4)$ ;
- (2)  $(P_2, P_1; P_3, P_4) = (P_1, P_2; P_4, P_3) = \frac{1}{(P_1, P_2; P_3, P_4)}$ ;
- (3)  $(P_2, P_1; P_4, P_3) = (P_1, P_2; P_3, P_4)$ ;
- (4)  $(P_1, P_3; P_2, P_4) = (P_4, P_2; P_3, P_1) = 1 - (P_1, P_2; P_3, P_4)$ .

*proof.* (1) 由交比的定义,

$$\begin{aligned} (P_1 P_2, P_3 P_4) &= \frac{\overline{P_1 P_3}}{\overline{P_2 P_3}} \div \frac{\overline{P_1 P_4}}{\overline{P_2 P_4}} = \frac{\overline{P_1 P_3} \cdot \overline{P_2 P_4}}{\overline{P_2 P_3} \cdot \overline{P_1 P_4}}, \\ (P_3 P_4, P_1 P_2) &= \frac{\overline{P_2 P_1}}{\overline{P_4 P_1}} \div \frac{\overline{P_3 P_2}}{\overline{P_4 P_2}} = \frac{\overline{P_3 P_1} \cdot \overline{P_4 P_2}}{\overline{P_4 P_1} \cdot \overline{P_3 P_2}} = \frac{\overline{P_1 P_3} \cdot \overline{P_2 P_4}}{\overline{P_2 P_3} \cdot \overline{P_1 P_4}} = (P_1 P_2, P_3 P_4). \end{aligned}$$

(2) 由交比的定义,

$$\begin{aligned} (P_1 P_2, P_4 P_3) &= \frac{(P_1 P_2 P_4)}{(P_1 P_2 P_3)} = \left( \frac{(P_1 P_2 P_3)}{(P_1 P_2 P_4)} \right)^{-1} = \frac{1}{(P_1 P_2, P_3 P_4)}, \\ (P_2 P_1, P_3 P_4) &\stackrel{(1)}{=} (P_3 P_4, P_2 P_1) = \frac{1}{(P_3 P_4, P_1 P_2)} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{(P_1 P_2, P_3 P_4)}. \end{aligned}$$

(3) 由 (2) 可知,

$$(P_2 P_1, P_4 P_3) = \frac{1}{(P_1 P_2, P_4 P_3)} = (P_1 P_2, P_3 P_4).$$

(4) 由交比的定义展开,

$$\begin{aligned} (P_1 P_3, P_2 P_4) &= \frac{\overline{P_1 P_2} \cdot \overline{P_3 P_4}}{\overline{P_3 P_2} \cdot \overline{P_1 P_4}} = \frac{(\overline{P_1 P_3} + \overline{P_3 P_2})(\overline{P_3 P_4} + \overline{P_2 P_4})}{\overline{P_1 P_4} \cdot \overline{P_3 P_2}} \\ &= \frac{\overline{P_1 P_3} \cdot \overline{P_2 P_4} + \overline{P_3 P_2}(\overline{P_1 P_3} + \overline{P_3 P_2} + \overline{P_2 P_4})}{\overline{P_1 P_4} \cdot \overline{P_3 P_2}} \\ &= \frac{\overline{P_1 P_3} \cdot \overline{P_2 P_4} - \overline{P_2 P_3} \cdot \overline{P_1 P_4}}{-\overline{P_2 P_3} \cdot \overline{P_1 P_4}} = -\frac{\overline{P_1 P_3} \cdot \overline{P_2 P_4}}{\overline{P_2 P_3} \cdot \overline{P_1 P_4}} + 1 \\ &= 1 - (P_1 P_2, P_3 P_4), \end{aligned}$$

$$(P_4 P_2, P_3 P_1) \stackrel{(1)}{=} (P_3 P_1, P_4 P_2) \stackrel{(3)}{=} (P_1 P_3, P_2 P_4) = 1 - (P_1 P_2, P_3 P_4). \quad \square$$

**Proposition 3.2.10.** 对于线束中四直线  $l_1, l_2, l_3, l_4$ , 其交比具有如下性质:

- (1)  $(l_3, l_4; l_1, l_2) = (l_1, l_2; l_3, l_4)$ ;
- (2)  $(l_2, l_1; l_3, l_4) = (l_1, l_2; l_4, l_3) = \frac{1}{(l_1, l_2; l_3, l_4)}$ ;
- (3)  $(l_2, l_1; l_4, l_3) = (l_1, l_2; l_3, l_4)$ ;
- (4)  $(l_1, l_3; l_2, l_4) = (l_4, l_2; l_3, l_1) = 1 - (l_1, l_2; l_3, l_4)$ .



*proof.* (2)(3) $\Rightarrow$ (1)(4): 此时  $\angle APC = -\angle BPC$ ,  $\angle APD = \angle BPD$ , 则有  $(A, B; C, D) = (PA, PB; PC, PD) = \frac{\sin \angle APC}{\sin \angle BPC} \div \frac{\sin \angle APD}{\sin \angle BPD} = (-1) \div 1 = -1$ . 而由角平分线,  $CP \perp DP$  是显然的.

(1)(3) $\Rightarrow$ (2)(4): 取  $\angle APB$  的角平分线, 交  $AB$  于  $C'$  点, 则点  $A, B, C', D$  调和共轭. 而给定点  $A, B, D$  的情况下, 易知满足  $(AB, CD) = -1$  的点  $C$  唯一, 则  $C = C'$ , 即证 (2). 而显然 (2)(3) $\Rightarrow$ (4).

(1)(2) $\Rightarrow$ (3)(4): 取  $\angle APB$  的外角平分线, 交  $AB$  于  $D'$  点, 则点  $A, B, C, D'$  调和共轭. 而给定点  $A, B, C$  的情况下, 易知满足  $(AB, CD) = -1$  的点  $D$  唯一, 则  $D = D'$ , 即证 (2). 而显然 (2)(3) $\Rightarrow$ (4).

(2)(4) $\Rightarrow$ (1)(3): 显然 (2)(4) $\Rightarrow$ (3), 进而可推知 (1).

(3)(4) $\Rightarrow$ (1)(2): 显然 (3)(4) $\Rightarrow$ (2), 进而可推知 (1).

(1)(4) $\Rightarrow$ (2)(3): 由于  $CP \perp DP$ , 则  $\angle APD = \angle APC + 90^\circ$ ,  $\angle BPD = \angle BPC + 90^\circ$ , 故

$$-1 = (A, B; C, D) = (PA, PB; PC, PD) = \frac{\sin \angle APC}{\sin \angle BPC} \div \frac{\sin \angle APD}{\sin \angle BPD} = \frac{\sin \angle APC}{\sin \angle BPC} \div \frac{\sin(\angle APC + 90^\circ)}{\sin(\angle BPC + 90^\circ)} = \frac{\tan \angle APC}{\tan \angle BPC},$$

故  $\angle APB = -\angle BPC$ , 即证 (2), 而 (2)(4) $\Rightarrow$ (3).  $\square$

**Proposition 3.2.16.** 若  $A, B, C, D$  四点共线, 且  $O$  为  $A, C$  中点, 则以下任两者等价:

(1)  $A, C, B, D$  成调和点列;

(2)  $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{BC} \cdot \overline{AD}$ ;

(3)  $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 2\overline{AB} \cdot \overline{CD}$ ;

(4)  $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 2\overline{BC} \cdot \overline{AD}$ ;

(5)  $\overline{OA}^2 = \overline{OC}^2 = \overline{OB} \cdot \overline{OD}$ ;

(6)  $\overline{DA} \cdot \overline{DC} = \overline{DB} \cdot \overline{DO}$ .

*proof.* 利用交比的定义以及(3.2.9)可分别证明 (1) 与 (2)(3)(4) 等价; 利用有向线段的加减计算展开可证 (2) 与 (5)(6) 等价, 具体过程留给读者完成.  $\square$

### 练习

**Problem 3.15.** 证明: 若点  $A, B, C, D$  为某一点列中相异的四点, 则  $(A, B; C, D) \neq 1$ .

**Problem 3.16.** 点列中的四点  $P_1, P_2, P_3, P_4$  的交比  $(P_1, P_2; P_3, P_4) = k$ , 设  $i, j, k, l$  为 1, 2, 3, 4 的某种排列.

(1) 对于所有可能的  $i, j, k, l$  的取法, 求  $(P_i, P_j; P_k, P_l)$  的值;

(2) 特别地, 当  $k$  为调和比时, 请重新解答上一小问.

**Problem 3.17.** 设点  $A, B, C, D, E, F$  是同一直线上的六点, 证明:

(1)  $(A, B; C, D)(A, B; E, F) = (A, B; C, F)(A, B; E, D)$ ;

(2) 若  $(A, B; C, D) = (B, C; D, A)$ , 则  $(A, C; B, D) = -1$ .

**Problem 3.18.** 证明(3.2.16).

## 3.3 仿射变换及其基本性质

本节来研究一种特殊的射影变换——仿射变换.

**Definition 3.3.1.** 设  $\pi, \pi'$  为两 [可以重合的] 仿射平面, 一一对应映射  $f: \pi \rightarrow \pi'$  将  $\pi$  中的点映射为  $\pi'$  中的点, 且满足下列条件, 则称  $f$  为一个仿射对应 (affine correspondence):

(1) 在同一条直线上的点在映射后仍在同一直线上;

(2)  $f$  保持  $l_\infty$ , 即无穷远直线上的点在映射后仍在同一直线上.

特别地, 若平面  $\pi, \pi'$  重合, 则称此仿射对应为一个仿射变换 (affine transformation).

由上述定义, 我们立即得到如下的结果:

**Theorem 3.3.2.** 仿射对应 (变换) 是保持无穷远直线的射影对应 (变换).

*proof.* 相较于(3.1.7), 仿射对应的定义中只多了“保持无穷远直线”的要求.  $\square$

**Remark.** 根据此定理, 我们也可将仿射变换定义为保持无穷远直线的射影对应.

**Theorem 3.3.3.** 仿射对应的复合仍是仿射对应, 仿射对应可逆; 仿射变换的复合仍是仿射变换, 仿射变换可逆.

*proof.* 射影对应是一一对应, 从而可逆; 射影对应保直线, 从而其复合也是保直线的, 故仍是射影对应. 类似地, 射影变换是一一对应, 从而可逆; 射影变换保直线且定义域和值域相同, 则射影变换的复合也保直线且定义域和值域相同.  $\square$

由上述定理, 仿射平面  $\pi$  上的所有仿射变换构成一个群.

我们可以定义所谓的“透视仿射对应”:

**Definition 3.3.4.** 对于两不重合的仿射平面  $\pi, \pi'$ , 一一对应映射  $f: \pi \rightarrow \pi'$  将  $\pi$  中的点映射为  $\pi'$  中的点, 且  $\forall P, Q \in \pi$ , 点  $P, f(P)$  的连线与点  $Q, f(Q)$  的连线互相平行, 则称映射  $f$  为一个透视仿射对应 (perspective affine correspondence). 设  $\pi \cap \pi' = l$ , 称直线  $l$  为这一透视仿射对应的仿射轴 (affine axis).

根据上述定义, 显然, 仿射轴上的点在透视仿射对应下不变.

**Theorem 3.3.5.** 透视仿射对应是一种特殊的仿射变换.

*proof.* 由定义, 透视仿射对应保持直线, 下面说明透视仿射变换  $f: \pi \rightarrow \pi'$  保持无穷远直线, 且  $f$  下  $\pi$  中的任意一点与  $\pi'$  上对应的像点的连线均平行于直线  $l$ .

用反证法, 设  $f$  将  $\pi$  上的无穷远点  $P$  映射为  $\pi'$  上的有穷远点  $P'$ , 而由于  $PP' \parallel l$ ,  $PP'$  又过  $l$  上的无穷远点  $O$ . 由于同一直线上只能有一个无穷远点, 则必有  $O = P$ . 但这表明  $l$  过  $\pi$  上的无穷远点, 那么对于任意一点  $Q$ ,  $Q, f(Q)$  的连线也过这一  $\pi$  上的无穷远点, 则  $Qf(Q)$  是平面  $\pi$  内的直线, 因此  $f$  最多只能将  $\pi$  中的点映射到  $\pi, \pi'$  的交线上, 即  $f$  不是一一对应, 矛盾!

同理可知,  $f$  不能将  $\pi$  上的有穷远点映射为  $\pi'$  上的无穷远点. 即证,  $\square$

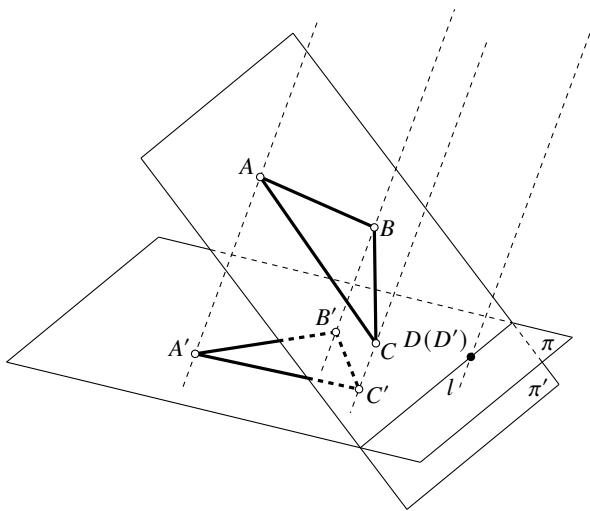


Figure 3.9



透视仿射对应与 §1.4.1 中的平行投影是完全一样的, 图3.9 给出了一个透视仿射对应的例子, 平面  $\pi$  中的三点  $A, B, C, D$  在透视仿射对应下分别变成了平面  $\pi'$  中的点  $A', B', C', D'$ . 其中, 由于点  $D$  在仿射轴上, 故点  $D'$  与点  $D$  重合.

显然, 我们有如下结果:

**Theorem 3.3.6.** 透视仿射对应是透视中心在无穷远处的射影对应.

*proof.* 当透视中心在无穷远处时, 一点与其像点的连线是互相平行的, 即变成了透视仿射对应.  $\square$

我们下面来研究仿射对应的性质. 由于仿射对应是特殊的射影对应, 我们可以把射影对应的一些性质直接迁移过来:

**Theorem 3.3.7.** 仿射对应下, 点仍然是点, 直线仍然是直线, 点列仍是点列, 线束仍是线束, 在同一直线上的点仍然在同一直线上, 过同一点的直线仍然过同一点.

**Theorem 3.3.8.** 仿射对应下, 相交的曲线仍相交, 相离的曲线仍相离, 相切的曲线仍相切.

下面我们研究仿射对应特有的一些性质:

**Theorem 3.3.9.** 仿射对应下, 圆锥曲线还是圆锥曲线. 特别地, 椭圆会变成椭圆或圆, 圆会变成圆或椭圆, 且存在仿射对应将任意椭圆变为一个圆; 双曲线还是双曲线; 抛物线还是抛物线.

*proof.* 由(3.1.13), 结合仿射变换保持无穷远点还是无穷远点可知, 椭圆或圆还是椭圆或圆, 双曲线还是双曲线, 抛物线还是抛物线.

而为了把椭圆变成圆, 只需使用 §1.4.1 的中心投影即可.(§1.4.1 的中心投影是把圆变为椭圆, 这里只要反过来即可.)  $\square$

**Remark.** 上面的定理表明, 圆与椭圆可通过仿射对应互相转化, 即它们是“射影等价”的. 因此, 在射影几何的框架下, 圆与椭圆有很大的共通之处, 因而下面我们很多时候 (特别是用射影几何处理圆锥曲线的问题时), 常常把圆当做是圆的一种来处理, 而不再特别说明. 以下, 读者容易根据上下文判断所说的“椭圆”是否包括圆.

**Theorem 3.3.10.** 仿射对应保持平行关系.

*proof.* 由于仿射对应将无穷远点变为无穷远点, 则交于无穷远点的直线在仿射对应下仍交于无穷远点.  $\square$

**Theorem 3.3.11.** 仿射对应保持 [点列的] 单比不变.

*proof.* 设点列  $(A, B, C)$  在仿射对应下变为点列  $(A', B', C')$ , 直线  $AB$  上的无穷远点  $D$  在仿射对应下变为  $D'$ , 则  $D'$  也是无穷远点. 那么  $(ABC) = (AB, CD) = (A'B', C'D') = (A'B', C')$ .  $\square$

**Remark.** 请读者务必注意, 仿射变换并不保持线束的单比! 这是因为, 在之前已经强调过, 虽然线束的交比可以转化为点列的交比, 但线束的单比不能直接对应为点列的单比!

**Corollary 3.3.12.** 仿射对应保持平行 (或共线) 线段的长度之比不变.



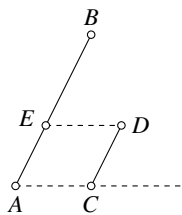


Figure 3.10

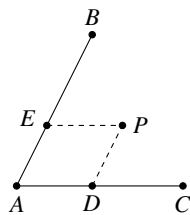


Figure 3.11

*proof.* 仿射对应保持点列的单比不变, 即表明此命题对共线线段成立, 下证平行线段的情形.

如图3.10, 设线段  $AB \parallel CD$ , 下证  $\frac{AB}{CD}$  在仿射对应下不变.

过点  $D$  作  $DE \parallel AC$  交  $AB$  于点  $E$ , 则  $AE \parallel CD$ . 由于  $ED \parallel AC, AE \parallel CD$ , 而仿射对应保持平行关系, 故  $\square ACDE$  在仿射对应后仍为平行四边形, 从而仿射对应保持  $AE \parallel CD$  这一关系. 另一方面  $\frac{AB}{AE}$  在仿射对应下不变, 故  $\frac{AB}{CD}$  在仿射对应下不变.  $\square$

**Theorem 3.3.13.** 仿射对应保持对应图形的面积之比不变. 即, 设图形  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  的面积分别为  $S_1, S_2$ , 仿射对应后变为图形  $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$ , 其面积分别为  $S'_1, S'_2$ , 则  $\frac{S'_1}{S'_2} = \frac{S_1}{S_2}$ .

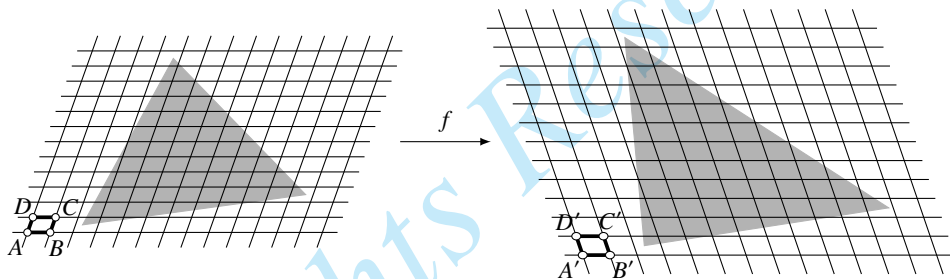


Figure 3.12

*proof.* 考虑仿射对应  $f: \pi \rightarrow \pi'$ . 如图3.12所示, 仿射对应  $f$  前, 在  $\pi$  中取  $\square ABCD$ , 无穷多个这样的平行四边形在平移后可以无重叠地紧密铺满平面  $\pi$ ; 仿射对应  $f$  下,  $\square ABCD$  变为  $\square A'B'C'D'$ , 且无穷多个这样的平行四边形在平移后可以无重叠地紧密铺满平面  $\pi'$ .

当这样的  $\square ABCD$  趋于无穷小时,  $\pi$  中的某图形  $\mathcal{A}$  可被平移后的  $\square ABCD$  剖分; 相应地,  $\pi'$  中的图形  $\mathcal{A}'$  可被平移后的  $\square A'B'C'D'$  用相应地方式剖分. 当  $\square ABCD$  趋于无穷小时, 由于仿射变换下,  $\mathcal{A}'$  与  $\mathcal{A}$  的剖分方式是相对应的, 则  $\mathcal{A}$  被剖分成平移后的  $\square ABCD$  的个数与  $\mathcal{A}'$  被剖分成  $\square A'B'C'D'$  的个数是相同的.

因此  $\frac{S_1}{S'_1} = \lim_{\substack{|AB| \rightarrow 0 \\ |AD| \rightarrow 0}} \frac{S_{\square ABCD}}{S_{\square A'B'C'D'}}$ . 类似地, 对于任意图形  $\mathcal{B}$  以及相应的  $\mathcal{B}'$ , 有  $\frac{S_2}{S'_2} = \lim_{\substack{|AB| \rightarrow 0 \\ |AD| \rightarrow 0}} \frac{S_{\square ABCD}}{S_{\square A'B'C'D'}}$ ,

故而  $\frac{S_1}{S'_1} = \frac{S_2}{S'_2}$ , 即  $\frac{S'_1}{S'_2} = \frac{S_1}{S_2}$ .  $\square$

**Theorem 3.3.14.** 三个不在同一直线上的有穷远点唯一确定一个仿射对应. 即, 给定点平面  $\pi$  上的不共线的有穷远点  $A, B, C$  以及它们在某一仿射对应  $f: \pi \rightarrow \pi'$  下的像  $A', B', C'$ , 则  $f$  被唯一确定.

*proof.* 设已知平面  $\pi$  上的不共线的有穷远点  $A, B, C$  以及它们在某一仿射对应  $f: \pi \rightarrow \pi'$  下的像  $A', B', C'$ , 我们证明  $f$  存在且唯一.

下面(3.3.15)中的透视对应的构造给出了此仿射对应的一种构造方式, 从而存在性得证. 对唯一性的证明如下.

如图3.11, 对于  $\pi$  中的任意一点  $P$ , 作  $PD \parallel AB$  交  $BC$  于点  $E$ , 作  $PE \parallel AC$  交  $AB$  于点  $E$ , 由于仿射对应保共线线段之比, 则点  $D' \triangleq f(D), E' \triangleq f(E)$  唯一确定. 注意仿射对应保平行关系, 则只要过点  $D'$  作  $A'B'$  的平行线, 过点  $E'$  作  $A'C'$  的平行线, 两者的交点必为点  $P' \triangleq f(P)$ , 则点  $P'$  也被唯一确定. 由点  $P$  的任意性, 唯一性得证.  $\square$

**Theorem 3.3.15.** 透视仿射对应是特殊的仿射对应; 任意一个仿射对应均可由有限个透视仿射对应复合而成.

*proof.* 前半部分是我们已证的结论, 下证后半部分. 在(3.3.14)中我们知道, 给定平面  $\pi$  上的不共线的有穷远点  $A, B, C$  以及它们在某一仿射对应  $f: \pi \rightarrow \pi'$  下的像  $A', B', C'$ ,  $f$  至多唯一. 我们来证明存在若干仿射对应, 使它们的复合为  $f$  (从而也完成了(3.3.14)中存在性的构造.)

不妨设平面  $\pi, \pi'$  不重合, 且点  $A, A'$ , 点  $B, B'$ , 点  $C, C'$  均不重合, 否则平移平面  $\pi$  至  $\pi^*$  使得满足上述要求. 容易知道平移前后对应点连线互相平行, 且平移保直线, 则这次平移也是一次透视仿射对应. 由此, 我们可只考虑满足前述条件的情形.

首先, 取过点  $A'$  且不与  $\pi, \pi'$  重合的平面  $\pi_1$ , 且点  $B, C, B', C'$  均不在  $\pi$  上. 构造透视仿射对应  $f_1: \pi \rightarrow \pi_1$ , 使  $f_1$  下原像点与对应像点的连线均平行于  $AA'$ , 则  $f_1(A) = A'$ . 记此透视仿射对应将  $B, C$  两点分别变为  $B_1, C_1$ .

然后, 取过点  $A', B'$  且不与  $\pi_1, \pi'$  重合的平面  $\pi_2$ , 且点  $B, C, B', C'$  均不在  $\pi$  上. 构造透视仿射对应  $f_2: \pi_1 \rightarrow \pi_2$ , 使  $f_2$  下原像点与对应像点的连线均平行于  $B_1B'$ , 则  $f_2(B_1) = B'$ ; 由于  $A' \in \pi_1 \cap \pi_2$  即它在仿射轴上, 故点  $A'$  在  $f_2$  下不变. 记此透视仿射对应将  $C$  点变为点  $C_2$ .

最后, 构造透视仿射对应  $f_3: \pi_2 \rightarrow \pi'$ , 使  $f_3$  下原像点与对应像点的连线均平行于  $C_2C'$ , 则  $f_3(C_2) = C'$ ; 由于  $A', B' \in \pi_2 \cap \pi$ , 则  $f_3(A') = A', f_3(B') = B'$ .

这样, 只要取  $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ , 即满足要求.  $\square$

利用仿射变换<sup>(13)</sup>也可以快速地证明一些结论, 比如下面例子:

**Example 3.3.16.** 已知梯形  $ABCD$  中,  $AB \parallel CD$ ,  $AB, CD$  的中点分别为  $M_1, M_2$ ,  $AC \cap BD = P$ ,  $AD \cap BC = Q$ , 证明: 点  $P, Q, M_1, M_2$  共线.

*solution.* 由于题中平行、中点、共线等条件在仿射变换下保持不变, 故可考虑一个仿射变换, 将梯形  $ABCD$  变为以  $BC, AD$  为腰的等腰梯形, 这只需将  $\triangle M_1CD$  变为以  $CD$  为底的等腰三角形, 故是可以做到的. 而对于  $ABCD$  为等腰梯形的情形, 结果是显然的.  $\square$

**Example 3.3.17.** 求平面直角坐标系中椭圆  $\alpha: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的面积.

*solution.* 通过仿射变换, 可以将椭圆变为圆  $\alpha': x^2 + y^2 = a^2$ , 这只需要将  $y$  轴拉长为原来的  $a/b$ . 在此仿射变换下, 原椭圆右顶点  $A(a, 0)$ 、上顶点  $B(0, b)$  以及坐标原点  $O(0, 0)$  分别变为点  $A'(a, 0)$ 、 $B'(0, a)$  以及  $O'(0, 0)$ , 由(3.3.13),  $\frac{S_\alpha}{S_{\triangle AOB}} = \frac{S_{\alpha'}}{S_{\triangle A'O'B'}} = \frac{\pi a^2}{a^2/2} = 2\pi a$ , 则  $S_\alpha = 2\pi a \cdot S_{\triangle AOB} = 2\pi a \cdot \frac{ab}{2} = \pi ab$ .  $\square$

**Example 3.3.18.** (如图3.13) 直线  $l$  交双曲线  $\alpha$  于两点  $P, Q$ , 交  $C$  的渐近线于点  $X, Y$ , 利用仿射变换证明:  $PX = QY$ .

(13) 与介绍射影变换时的做法类似, 从现在起, 我们不再严格区分射影变换与射影对应, 除非有必要.

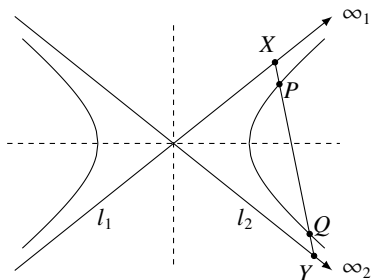


Figure 3.13

*solution.* 我们说明, 存在仿射对应, 使得双曲线在仿射变换后其实轴垂直平  $PQ$  [在仿射变换后的像], 这样由对称性可知仿射变换后  $XP=YQ$ , 由仿射变换保共线线段之比知原来  $XP=YQ$  也成立.

由于双曲线上有两个无穷远点, 而双曲线与其渐近线无限接近但 [在  $Eukleidēs$  平面内] 不相交, 则双曲线与渐近线交于无穷远点, 因此双曲线上的无穷远点就是两个渐近线上的无穷远点  $\infty_1, \infty_2$ .<sup>(14)</sup>

设原平面为  $\pi$ , 我们取平面  $\pi'$ , 使得  $P, Q \in \pi' \cap \pi$ , 设有透视仿射对应  $f: \pi \rightarrow \pi'$ , 则  $f(P)=P, f(Q)=Q$ , 记  $f(\infty_1)=\infty'_1, f(\infty_2)=\infty'_2$ . 我们想要找到满足要求的仿射对应, 只需要  $\infty'_1, \infty'_2$  对应的分别过这两个无穷远点的直线的交角的 [某一] 平分线垂直于  $PQ$ . 容易取定这样的点  $\infty'_1, \infty'_2$ .

找到直线  $\infty_1\infty'_1, \infty_2\infty'_2$  的交点  $P$ , 由于  $\infty_1, \infty'_1, \infty_2, \infty'_2$  均是空间中无穷远平面上的点, 则  $P$  也是无穷远平面上的点, 只要  $f$  是以  $P$  为透视中心的透视对应即可 (注意透视中心在无穷远的透视对应就是透视仿射对应.). 这样便完成了证明.  $\square$

最后, 我们对仿射变换作一些补充说明. 如果考虑复仿射平面, 则可用复的仿射变换将双曲线变为圆, 对于双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ , 将  $y$  轴 “拉伸” 为原来的  $\frac{a}{b}i$  倍, 则它变成了圆  $x^2 + y^2 = a^2$ , 而显然伸缩变换是一种仿射变换. 使用复仿射变换时, 需要特别小心, 此时仿射变换保平行 (或共线) 线段之比的性质仍然成立<sup>(15)</sup>; 但由于在虚数的情况下我们无法良好地定义面积, 所以无法继续使用面积之比不变的性质.

### 练习

**Problem 3.19.** 透视仿射对应的复合还是透视仿射对应吗? 若是, 请证明; 若不是, 请举出反例.

**Problem 3.20.** 下列哪些变换是一种仿射变换? 哪些变换是一种射影变换?

- (1) 平移变换; (2) 相似变换; (3) 位似变换; (4) 旋转变换.

**Problem 3.21.** 已知梯形  $ABCD$  中,  $AB \parallel CD$ , 作  $AP \parallel BC$  交  $BD$  于点  $P$ , 作  $BQ \parallel AD$  交  $AC$  于点  $Q$ , 证明: 点  $PQ \parallel AB$  共线.

**Problem 3.22.** 利用仿射变换证明: 抛物线的一族平行弦的轨迹为一条平行于轴的直线.

**Problem 3.23.** 在平面直线坐标系中, 点  $A, B$  是椭圆  $\alpha: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  上关于坐标原点对称的两点, 点  $C$  是  $\alpha$  上不与点  $A, B$  重合的任意一点. 证明: 当直线  $AC, BC$  的斜率均存在时,  $k_{AC}k_{BC} = -\frac{b^2}{a^2}$ .

**Problem 3.24.** 给定椭圆, 求椭圆内接三角形的面积的最大值与椭圆的面积之比, 并证明: 椭圆的内接三角形的面积取到最大值, 当且仅当三角形的重心与椭圆的中心重合.

(14) 有的读者可能会认为基于这样的直观的论述不够严谨, 那么我们在之后会给出另一种证明.

(15) 即使是在复的平面的情况下, 平行线段之比实际上也无需通过度量来定义, 因为它可通过向量来给出. 例如对于共线三点  $A, B, C$ , 若  $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{BC}$ , 则单比  $(ABC) = \lambda$ ; 类似地, 复的平面中也可以自然地计算点列的交比.

**Problem 3.25.** 给定双曲线  $\Gamma$  与直线  $l$ ,  $P_0$  是  $\Gamma$  上一点, 往后依次如下构造点  $P_n$ : 过点  $P_{n-1}$  作  $l$  的平行线, 与  $\Gamma$  的另一交点为  $Q_n$ ,  $P_n, Q_n$  关于  $\Gamma$  的虚轴对称. 证明:  $S_{\Delta P_{n-1}P_nP_{n+1}}$  为定值.

**Problem 3.26.**

(1) 给定圆锥曲线  $\alpha$ , 点  $P$  为其内一定点,  $\alpha$  的弦  $AB$  恒过点  $F$ , 证明: 线段  $AB$  中点的轨迹为一条离心率与  $\alpha$  相同的圆锥曲线.

(2) 利用 (1) 中的结论, 进一步证明: 对于有心二次曲线  $\alpha$ , 设  $F$  为它的一个焦点, 则以  $\alpha$  的一条过点  $F$  的弦为直径的圆恒与两个定圆相切. 若  $\alpha$  为抛物线又会如何?

**Problem 3.27.** 称椭圆的两条直径为一对共轭直径 ([a pair of] conjugate diameters), 如果椭圆在它与其一条直径的交点处的切线平行于另一条直径. 证明: 给定椭圆  $C$ , 则所有圆心在  $C$  上且相切于  $C$  的一对共轭直径的圆有相同的半径.

**Problem 3.28** (Napoléon-Barlotti). \* 设  $P$  是一个  $n$  边形, 分别以  $P$  的  $n$  条边为底, 向  $P$  的外侧作正  $n$  边形, 顺次连接这  $n$  个作出的正  $n$  边形的中心, 形成  $n$  边形  $P'$ . 证明:  $P'$  是正  $n$  边形, 当且仅当存在一个将  $P$  变为正  $n$  边形的仿射变换. *Hint.* 此题可能无法完全用纯几何的方式处理, 可以借助向量解决.

### 3.4 射影几何中的重要定理

在本章的前几节中, 我们介绍了射影几何中最重要的基本概念. 从这一节开始, 我们更深入地介绍一些射影几何中的重要内容.

在本节中, 我们先介绍几个重要的射影几何的定理.

**Theorem 3.4.1** (Pappus). 点  $A_1, B_1, C_1$  在直线  $l_1$  上, 点  $A_2, B_2, C_2$  在直线  $l_2$  上,  $T_3 = A_1B_2 \cap A_2B_1, T_1 = B_1C_2 \cap B_2C_1, T_2 = C_1A_2 \cap C_2A_1$ , 则点  $T_1, T_2, T_3$  在同一直线上. (如图 3.14)

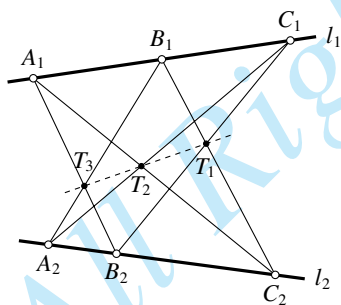


Figure 3.14

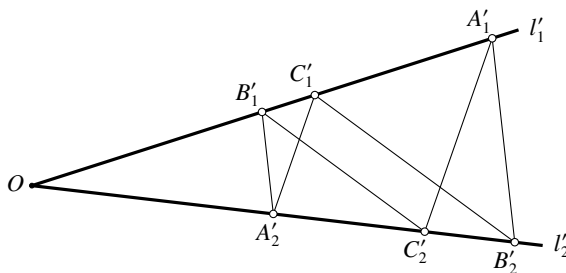


Figure 3.15

*proof.* 通过射影变换将点  $T_1, T_2$  变换至无穷远, 以撇号记射影变换后的对应点, 如图 3.15 所示. 此时  $A'_1C'_2 \parallel A'_2C'_1, B'_1C'_2 \parallel B'_2C'_1$ , 我们证明  $A'_2B'_1 \parallel A'_1B'_2$ , 从而  $T'_3$  也是无穷远点, 则点  $T'_1, T'_2, T'_3$  共线, 则射影变换前点  $T_1, T_2, T_3$  共线.

设直线  $l'_1, l'_2$  交于点  $O$ , 若点  $O$  在无穷远处, 则  $B'_1C'_1 \parallel B'_2C'_2, A'_1C'_1 \parallel A'_2C'_2$ , 故  $A'_1B'_1 \parallel A'_2B'_2$ , 则  $A'_1B'_2 \parallel A'_2B'_1$  显然成立.

若点  $O$  不在无穷远处, 则

$$\frac{\overline{B'_1A'_1}}{\overline{A'_2B'_2}} = \frac{\overline{B'_1C'_1} + \overline{C'_1A'_2}}{\overline{A'_2C'_2} + \overline{C'_2B'_2}} \cdot \frac{\overline{C'_1A'_2} \parallel A'_1C'_2}{\overline{C'_2B'_1} \parallel B'_2C'_1} = \frac{\overline{B'_1C'_1} + \frac{\overline{A'_2C'_2}}{\overline{OA'_2}} (\overline{OB'_1} + \overline{B'_1C'_1})}{\overline{A'_2C'_2} + \frac{\overline{B'_1C'_1}}{\overline{OB'_1}} (\overline{OA'_2} + \overline{A'_2C'_2})}$$

$$= \frac{\overline{OB'_1}}{\overline{OA'_2}} \cdot \frac{\overline{OA'_2} \cdot \overline{B'_1C'_1} + \overline{A'_2C'_2} \cdot \overline{OB'_1} + \overline{A'_2C'_2} \cdot \overline{B'_1C'_1}}{\overline{OB'_1} \cdot \overline{A'_2C'_2} + \overline{B'_1C'_1} \cdot \overline{OA'_2} + \overline{B'_1C'_1} \cdot \overline{A'_2C'_2}} = \frac{\overline{OB'_1}}{\overline{OA'_2}},$$

这表明  $A'_1B'_2 \parallel A'_2B'_1$ . □

**Theorem 3.4.2** (Desargues). 两三角形对应顶点的连线交于一点, 则它们对应边的交点共线. 即, 对于  $\triangle A_1B_1C_1$  与  $\triangle A_2B_2C_2$ , 设  $P=B_1C_1 \cap B_2C_2, Q=A_1C_1 \cap A_2C_2, R=A_1B_1 \cap A_2B_2$ , 若  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$  交于一点  $S$ , 则点  $P, Q, R$  共线. (如图 3.16)

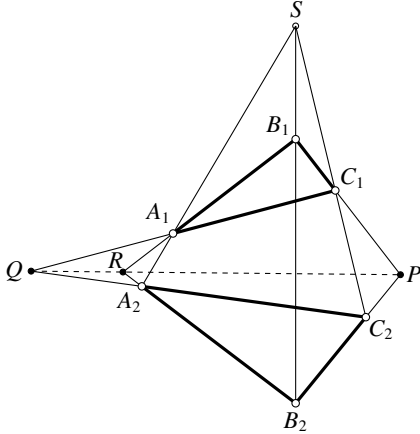


Figure 3.16

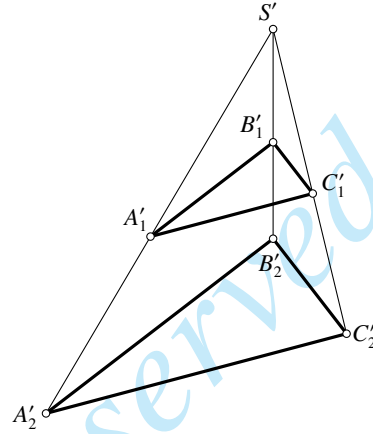


Figure 3.17

*proof.* 通过射影变换将点  $P, Q$  变换至无穷远, 以撇号记射影变换后的对应点, 如图 3.15 所示. 此时  $B'_1C'_1 \parallel B'_2C'_2, A'_1C'_1 \parallel A'_2C'_2$ , 我们证明  $A'_1B'_1 \parallel A'_2B'_2$ , 从而  $R'$  也是无穷远点, 则点  $P'Q'R'$  共线, 则射影变换前点  $P, Q, R$  共线.

若点  $S'$  在无穷远处, 则显然  $\triangle A'_1B'_1C'_1$  经平移后得到  $\triangle A'_2B'_2C'_2$ , 此时  $A'_1B'_1 \parallel A'_2B'_2$  显然成立; 若  $S'$  点在有穷远处, 则  $\frac{\overline{S'A'_1}}{\overline{S'A'_2}} \frac{\overline{A'_1C'_1} \parallel A'_2C'_2}{\overline{S'C'_1}} \frac{\overline{S'C'_1}}{\overline{S'C'_2}} \frac{\overline{B'_1C'_1} \parallel B'_2C'_2}{\overline{S'B'_1}} \frac{\overline{S'B'_1}}{\overline{S'B'_2}}$ , 这表明  $A'_1B'_1 \parallel A'_2B'_2$ . □

**Theorem 3.4.3** (Desargues 定理的逆定理). 两三角形对应边的交点共线, 则它们对应顶点的连线交于一点. 即, 对于  $\triangle A_1B_1C_1$  与  $\triangle A_2B_2C_2$ , 设  $P=B_1C_1 \cap B_2C_2, Q=A_1C_1 \cap A_2C_2, R=A_1B_1 \cap A_2B_2$ , 若点  $P, Q, R$  共线, 则  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$  交于一点  $S$ .

*proof.* 类似于 (3.4.2) 的证明, 将直线  $PQR$  变为无穷远直线后易证; 或者, 对  $\triangle A_1RA_2$  与  $\triangle C_1PC_2$  应用 Desargues 定理, 由  $P, Q, R$  三点共线知  $A_1C_1, RP, A_2C_2$  交于一点, 则点  $B_1, B_2, (A_1R \cap C_1P)$  共线, 即直线  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$  交于一点. □

根据 Desargues 定理, 我们可以引出如下的重要的定义:

**Definition 3.4.4.** 若两个三角形满足 Desargues 定理的条件, 则称它们是一对透视三角形 (perspective triangles), Desargues 定理中的点  $P$  称为它们的透视中心 (perspector/center of perspective), 直线  $l$  称为它们的透视轴 (perspectrix/ perspective axis).

需要注意的是, 上述透视中心与透视轴的概念这与之前我们介绍的透视对应中的透视中心与透视轴的概念是不同的, 尽管它们名称相同. 读者容易根据上下文判断其具体含义.

下面我们来看几个圆有关的定理. 需要指出的是, 我们下面介绍的 Pascal、Brianchon 以及 Newton 定理实际上是它们的弱化版本, 我们将在之后介绍它们在一般情况下的形式.

**Lemma 3.4.5.** 给定一圆以及不与之相交的直线  $l$ , 存在一个射影变换, 将该圆变为一个圆, 并将直线  $l$  变为无穷远直线.

*proof.* 先通过射影变换将  $l$  变为无穷远直线, 此时圆变为椭圆 (因为它与无穷远直线不相交), 再通过仿射变换可以将椭圆变为圆.  $\square$

**Theorem 3.4.6 (Pascal).** (如图3.18) 圆内接六边形 (hexagon) 的主对边<sup>(16)</sup>的交点共线. 即, 设六边形  $ABCDEF$  内接于一个圆,  $AB \cap DE = P, BC \cap EF = Q, CD \cap FA = R$ , 则点  $P, Q, R$  共线.

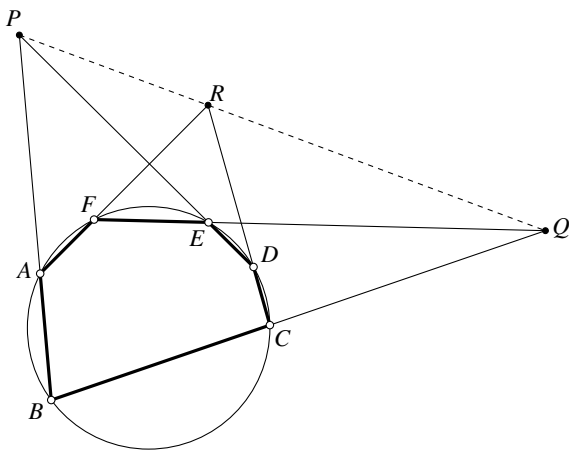


Figure 3.18

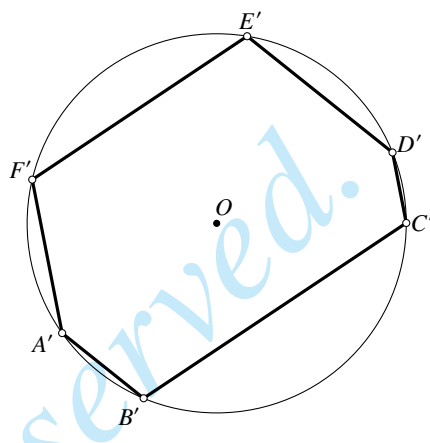


Figure 3.19

*proof.* 利用(3.4.5), 存在射影变换保持圆不变, 并将点  $P, Q$  变为无穷远点. 以撇号记射影变换后的点, 设圆的中心为点  $O$ , 如图3.19所示. 则  $A'B' \parallel D'E', B'C' \parallel E'F'$ .

由  $A'B' \parallel D'E'$  知  $\widehat{A'B'C'D'E'} = \widehat{B'A'F'E'D'}$ , 由  $B'C' \parallel E'F'$  知  $\widehat{C'D'E'} = \widehat{B'A'F'}$ , 由此得  $\widehat{A'B'C'} = \widehat{A'B'C'D'E'} - \widehat{C'D'E'} = \widehat{B'A'F'E'D'} - \widehat{B'A'F'} = \widehat{F'E'D'}$ , 则  $C'D' \parallel F'A'$ , 则点  $R$  在射影变换下的像也在无穷远处, 故射影变换前点  $P, Q, R$  共线.  $\square$

实际上, 若上述 Pascal 定理中的六边形的某两个相邻顶点趋于重合, 则它们的连线趋于圆的切线. 因此对于有顶点重合的“六边形”, 也可以写出相应的 Pascal 定理的退化形式. 例如下面的命题即是有一对相邻顶点重合时的 Pascal 定理的例子:

**Proposition 3.4.7.** (如图3.20) 设  $ABCDE$  是圆内接五边形, 圆在  $A$  点处的切线交直线  $CD$  于点  $P$ ,  $AB \cap DE = Q, BC \cap EA = R$ , 则点  $P, Q, R$  共线.

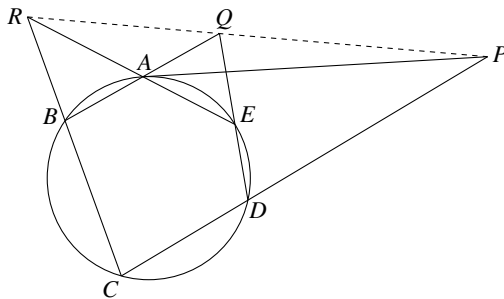


Figure 3.20

**Lemma 3.4.8.** 给定一圆及其内部的一点  $C$ , 存在一个射影变换将该圆变为一个圆, 并将点  $C$  变为所得圆的圆心.

(16) 指相隔两条边的对边.



*proof.* We'll prove it later. □

**Theorem 3.4.9 (Brianchon).** (如图3.21) 圆的外切六边形的主对角线<sup>(17)</sup>. 即, 设  $ABCDEF$  是圆内接六边形, 圆在点  $A, B$  处的切线交于点  $P$ , 在点  $B, C$  处的切线交于点  $Q$ , 在点  $C, D$  处的切线交于点  $R$ , 在点  $D, E$  处的切线交于点  $S$ , 在点  $E, F$  处的切线交于点  $T$ , 在点  $F, A$  处的切线交于点  $U$ , 则直线  $PS, QT, RU$  交于一点.

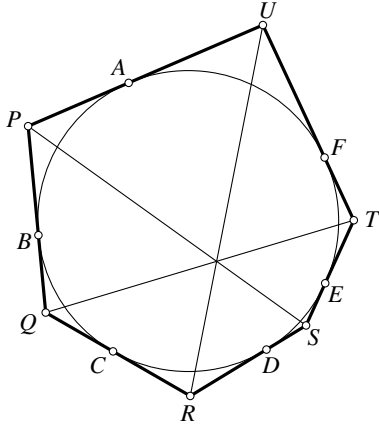


Figure 3.21

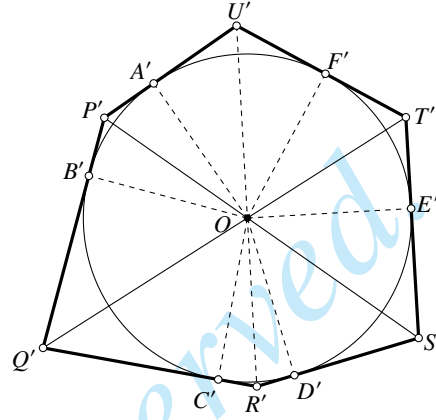


Figure 3.22

*proof.* 利用(3.4.8), 用射影变换保持圆不变并将直线  $PS, QT$  的交点移动到圆心  $O$  处, 以撇号记射影变换后的点, 如图3.22. 只要证明点  $U', O, R'$  共线, 则射影变换前点  $U, R, (PS \cap QT)$ , 则命题得证.

由相切知  $\angle A'OP' = \angle B'OP'$ ,  $\angle E'OS' = \angle D'OS'$ , 结合  $P'S'$  过圆心  $O$  得  $\angle A'OE' = 180^\circ - \angle A'OP' - \angle E'OS' = 180^\circ - \angle B'OP' - \angle D'OS' = \angle B'OD'$ ; 同理, 由直线  $Q'T'$  过点  $O$  可知  $\angle E'OC' = \angle F'OB'$ .

因此,  $\angle A'OC' = 360^\circ - \angle A'OE' - \angle E'OC' = 360^\circ - \angle B'OD' - \angle F'OB' = \angle F'OD'$ . 而由相切,  $\angle A'OU' = \angle F'OU'$ ,  $\angle C'OR' = \angle D'OR'$ , 故  $\angle U'OR' = \angle U'O A' + \angle A'OC' + \angle C'OR' = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$ , 即点  $U', O, R'$  共线. □

Brianchon 定理也有其退化的版本, 当圆的两条切线趋于重合时, 它们的交点趋于圆于此切线的切点. 下面的 Newton 定理便是有两组切线分别重合时的 Brianchon 定理的应用.

**Proposition 3.4.10 (Newton).** (如图3.23) 圆的外切四边形的两条对角线与两组相对的切点的连线交于一点.

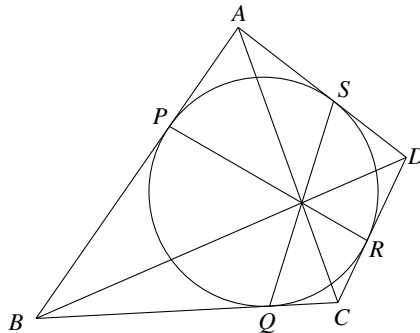


Figure 3.23

(17) 即相隔两个顶点的对角线.



*proof.* 如图3.23, 四边形  $ABCD$  为圆的外切四边形, 切点为点  $P, Q, R, S$ , 对 [有两组分别是重合的] 六切线  $AB, AB, BC, CD, CD, DA$  应用 Brianchon 定理, 可知直线  $PR, BD, AC$  交于一点, 同理可知直线  $QS$  也过此交点.  $\square$

### 练习

**Problem 3.29.**  $\triangle ABC$  和  $\triangle A'B'C'$  中心对称, 过点  $A', B', C'$  分别作一条直线  $l_1, l_2, l_3$ , 且  $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ . 证明:  $(l_1 \cap BC), (l_2 \cap CA), (l_3 \cap AB)$  三点共线.

**Problem 3.30.** 设点  $A, B, C$  不共线, 点  $P$  是过点  $C$  的某一定直线上的动点, 设  $AP \cap BC = X, AC \cap BP = Y$ , 证明: 直线  $XY$  过一个定点.

**Problem 3.31.** 对于各种切点或切线重合的情况, 写出退化版本的 Pascal 定理与 Brianchon 定理并作图.

**Problem 3.32.** 在  $\triangle ABC$  三边  $BC, CA, AB$  所在直线上分别取点  $A', B', C'$ , 设  $B'C' \cap BC = F, C'A' \cap CA = G, A'B' \cap AB = H, FH \cap BB' = M, FG \cap CC' = N$ . 证明: 直线  $MG, NH, BC$  交于一点.

**Problem 3.33.** 证明 Pascal 定理的逆定理: 设六边形点  $ABCDEF$  的某五个顶点在圆  $\omega$  上, 若其三组主对边的交点共线, 则它的第六个顶点也在  $\omega$  上.

**Problem 3.34.** 双曲线在点  $A$  处的切线交渐近线于点  $A_1, A_2$ , 在点  $B$  处的切线交渐近线于点  $B_1, B_2$ , 证明:  $A_1B_2, A_2B_1, AB$  交于一点.

**Problem 3.35.** 过不在圆上的一定点  $C$  作圆的四条弦  $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$ ,  $D = A_1A_2 \cap A_3A_4$ ,  $E = B_1B_2 \cap B_3B_4$ , 证明: 点  $C, D, E$  在同一直线上.

## 3.5 一维射影变换

本节我们来进一步研究射影几何中点列与线束相关的性质.

### 3.5.1 一维基本形的射影对应

一维基本形是指点列和线束, 下面的定义给出了它们之间的对应关系.

**Definition 3.5.1.** 一维基本形之间有三种透视对应关系:

① (如图 3.24) 通过连接点列  $(A, B, C, D)$  与它们所在直线外一点  $P$ , 得到点列  $(A, B, C, D)$  与线束  $(PA, PB, PC, PD)$  间的一个透视对应, 记为  $(A, B, C, D) \bar{\wedge} (PA, PB, PC, PD)$ .

② (如图 3.24) 点列  $(A, B, C, D)$  与  $(A', B', C', D')$  的对应点交于一点  $P$ , 得到点列  $(A, B, C, D)$  与  $(A', B', C', D')$  间的一个对应关系, 称这两个点列为一组透视点列, 记为  $(A, B, C, D) \stackrel{(P)}{\bar{\wedge}} (A', B', C', D')$ , 点  $P$  称为这个透视对应的透视中心.

③ (如图 3.25) 线束  $(a, b, c, d)$  与  $(a', b', c', d')$  的对应直线的交点在同一条直线  $l$  上, 则我们可以得到线束  $(a, b, c, d)$  与点列  $(a', b', c', d')$  间的一个对应关系, 称这两个线束为一组透视线束, 记为  $(A, B, C, D) \stackrel{(l)}{\bar{\wedge}} (a', b', c', d')$ , 直线  $l$  称为这个透视对应的透视轴.

若对于两个一维基本形  $[\pi]$  和  $[\pi']$ , 存在  $n$  个一维基本形  $[\pi_1], \dots, [\pi_n]$ , 使得  $[\pi] \bar{\wedge} [\pi_1] \bar{\wedge} \dots \bar{\wedge} [\pi']$ , 则称  $[\pi]$  与  $[\pi']$  射影对应, 记作  $[\pi] \bar{\wedge} [\pi']$ .

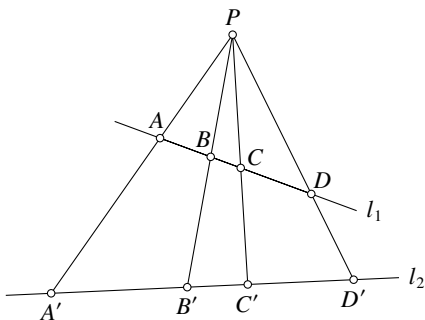


Figure 3.24

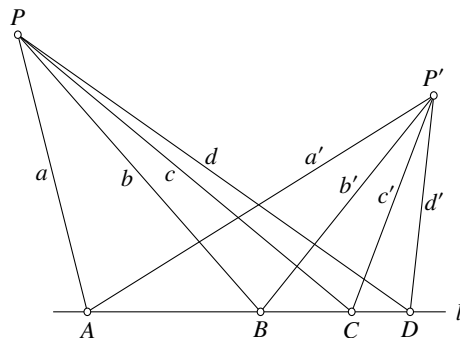


Figure 3.25

由上述定义, 我们立即得到下面的定理.

**Theorem 3.5.2.** 一维的射影对应保持交比基本形间的射影对应保持交比. 即, 设  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  为点列或线束,  $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$  为点列或线束, 若  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \sim (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ , 则  $(\alpha, \beta; \gamma, \delta) = (\alpha', \beta'; \gamma', \delta')$ .

*proof.* 这是(3.2.5)的直接推论. □

我们下面来研究一维射影对应与透视对应的一些性质.

**Theorem 3.5.3 (Staudt).** 三个对应元素确定一个一维基本形间的射影对应.

*proof.* 给定三个元素  $\alpha, \beta, \gamma$  以及它们在一维基本形射影对应的像  $\alpha', \beta', \gamma'$ , 我们证明它们确定了唯一一个射影对应.

先证存在性. 我们证明  $\alpha, \beta, \gamma$  与  $\alpha', \beta', \gamma'$  均是点列的情形. 对于线束, 我们可以先用一维基本形间的透视对应将其转化为点列.

假设点列  $l(\alpha, \beta, \gamma)$  与  $l'(\alpha', \beta', \gamma')$  的底  $l, l'$  不重合, 否则平移点列  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , 显然平移可视作一种透视中心在无穷远处的透视对应. 平移后, 先在  $\alpha, \alpha'$  的连线上任取一点作为透视中心, 并取一过  $\alpha'$  且不与  $l, l'$  重合的直线  $l''$ , 考察透视对应  $g: l \rightarrow l''$ , 则显然  $g(\alpha) = \alpha'$ . 然后, 考虑透视对应  $h: l'' \rightarrow l'$ , 透视中心为  $\beta', g(\beta)$  的连线与  $\gamma', g(\gamma)$  的连线的交点, 则显然  $h(g(\beta)) = \beta', h(g(\gamma)) = \gamma'$ , 而由于  $\alpha' = l \cap l'$ , 则  $h(\alpha') = \alpha'$ . 这样,  $g \circ h$  这一透视对应就满足要求.

再证唯一性. 由于一维射影对应保持交比, 故第四个元素  $\delta$  在射影对应下的像  $\delta'$  需要满足  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ , 这样  $\delta'$  是唯一确定的. □

**Corollary 3.5.4.** 一个一维基本形间的射影对应必可表示为一维基本形间的透视对应的复合; 一维基本形间保交比的变换<sup>(18)</sup>必定为一维射影对应<sup>(19)</sup>.

*proof.* 前半部分在上述定理的证明过程中已经完成, 我们说明后半部分: 显然, 两一维基本形间的保交比的变换由三个对应元素唯一确定, 因为假设已经保交比的变换  $f$  下已有对应的元素  $\alpha, \beta, \gamma$  与  $\alpha', \beta', \gamma'$ , 则对于任意的元素  $\delta$ , 按  $(\alpha, \beta; \gamma, \delta) = (\alpha', \beta'; \gamma', f(\delta))$  可唯一确定一个元素  $\delta$  从而唯一确定变换  $f$ , 且可验证  $f$  满足保交比的条件; 而按上述定理的证明, 已知三组对应元素, 可用其中的方法用透视对应的复合来得到一个射影变换  $f'$ , 且由于透视对应保交比, 故  $f'$  也保交比, 而  $f$  是唯一确定的, 从而  $f = f'$ . □

**Theorem 3.5.5.** 两个点列间的射影对应是透视对应的充要条件是这两个点列的底的交点是这一射影对应的自对应点.

(18) 对于变换  $f: [\pi] \rightarrow [\pi']$ , 称其保交比, 若  $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in [\pi], (\alpha, \beta; \gamma, \delta) = (f(\alpha), f(\beta); f(\gamma), f(\delta))$ .

(19) 因此, 有的地方也将一维射影对应定义为一维基本形间保交比的变换.

*proof.* 必要性是显然的, 下证充分性. 设在射影对应  $f$  下直线  $l$  上的点列  $(A, B, C, X)$  与直线  $l'$  上的点列  $(A', B', C', X)$  射影对应, 其中  $X = l \cap l'$  是满足  $f(X) = X$  为自对应点, 我们证明  $(A, B, C, X) \bar{\wedge} (A', B', C', X)$ . 设直线  $AA', BB'$  交于点  $S$ , 则以  $S$  为透视中心, 可得到  $l$  上的点列到  $l'$  上的点列的透视对应  $g$ . 此时  $X, A, B$  在  $f$  和  $g$  这两个射影对应下均分别对应于  $X, A, B$ , 而三个对应点确定一个一维射影对应, 从而  $f = g$ , 因此  $f$  是一个透视对应.  $\square$

类似地, 我们有如下结论, 其证明留给读者:

**Theorem 3.5.6.** 两个线束间的射影对应是透视对应的充要条件是这两个线束的顶点的连线是这一射影对应的自对应线.

我们发现, 上面(3.5.6)和(3.5.5)有一种对偶的关系, 将点与线互换, 就从一个命题得到了另一个命题. 我们将在下一节中详细讨论这一关系.

下面我们来看一维基本形间的射影对应的一些应用:

**Example 3.5.7.** 一直线依次交  $\triangle P_1 P_2 P_3$  三边  $P_2 P_3, P_3 P_1, P_1 P_2$  所在直线于点  $Q_1, Q_2, Q_3$ , 点  $R_1, R_2, R_3$  分别在直线  $P_2 P_3, P_3 P_1, P_1 P_2$  上,  $(P_2, P_3; R_1, Q_1) = k_1, (P_3, P_1; R_2, Q_2) = k_2, (P_1, P_2; R_3, Q_3) = k_3$ , 证明:

- (1)  $R_1, R_2, R_3$  共线的充要条件为  $k_1 k_2 k_3 = 1$ ;
- (2)  $P_1 R_1, P_2 R_2, P_3 R_3$  共点的充要条件为  $k_1 k_2 k_3 = -1$ .

*solution.* (1) 如图3.26, 设  $R_3 Q_1 \cap P_1 P_3 = T$ . 必要性: 三点共线时  $(P_2, P_3; R_1, Q_1) \stackrel{(R_3)}{\bar{\wedge}} (P_1, P_3; R_2, T)$ , 对点  $P_1, P_3, R_2, T, Q_2$  应用(3.2.11)知  $(P_1, P_2; R_2, T)(P_3, P_1; R_2, Q_2)(P_1, P_3; T, Q_2) = 1$ , 由透视对应交比相等可知这等价于  $k_1 k_2 k_3 = 1$ .

充分性: 类似地, 由  $k_1 k_2 k_3 = 1$  反过来可得  $(P_2, P_3; R_1, Q_1) = (P_1, P_3; R_2, T)$ , 由(3.5.5)知这是透视对应, 从而对应点的连线交于一点, 故  $R_1, R_2, R_3$  共线.

(2) 如图3.27, 设  $R_3 P_3 \cap R_2 P_2 = R, P_1 R \cap Q_1 Q_2 = T$ . 必要性: 分别对  $\triangle P_1 P_2 R_1$  与  $\triangle P_1 P_3 R_1$  使用(1)的结论, 可得  $\begin{cases} (P_1, P_2; R_3, Q_3)(P_2, R_1; P_3, Q_1)(R_1, P_1; R, T) = 1 \\ (P_1, P_3; R_2, Q_2)(P_3, R_1; P_2, Q_1)(R_1, P_1; R, T) = 1 \end{cases}$ , 上式比下式, 按交比定义展开化简即得  $k_1 k_2 k_3 = -1$ .

充分性: 设  $P_1 R \cap P_2 P_3 = R'$ , 则类似于上面的计算, 可得  $(P_1, P_3; R_1, Q_1) = (P_2, P_3; R', Q_1)$ , 由交比的定义与同一性可得  $R' = R_1$ .  $\square$

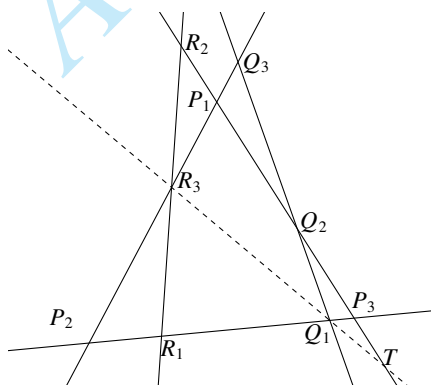


Figure 3.26

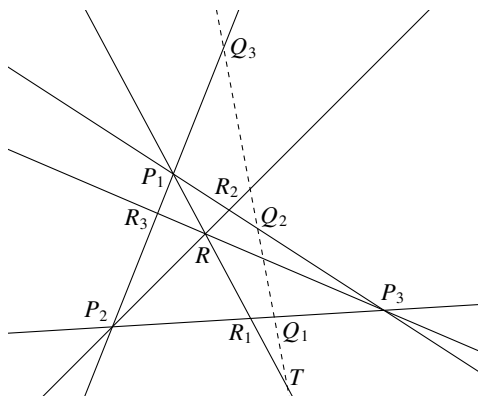


Figure 3.27

根据上面的例子的结论, 我们又有一种新的方法来证明 Ceva 定理与 Menelaos 定理:

another proof of (0.1.14) and (0.1.15). (3.5.7)中取直线  $Q_1Q_2Q_3$  为无穷远直线, 则 (1)(2) 分别转化为 Μενέλαος 定理与 Ceva 定理.  $\square$

**Example 3.5.8.** 利用一维基本形的射影对应的知识证明 Pappus 定理.

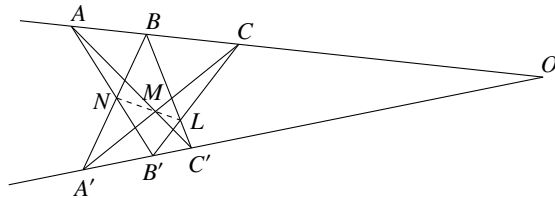


Figure 3.28

*solution.* 如图3.28, 点  $A, B, C; A', B', C'$  分别共线, 它们所共的直线共于点  $O$ .  $AB' \cap A'B = N, AC' \cap A'C = M, BC' \cap B'C = L$ , 我们来证明  $N, M, L$  共线. 注意到

$$(B, D, N, A') \stackrel{(A)}{\bar{\wedge}} (O, C', B', A') \stackrel{(C)}{\bar{\wedge}} (B, C', L, E),$$

故  $(B, D, N, A') \bar{\wedge} (B, C', L, E)$ , 但这两的点列的底交点  $B$  是这一射影对应的自对应点, 从而由(3.7)可知  $(B, D, N, A') \bar{\wedge} (B, C', L, E)$ , 从而对应点的连线交于一点, 由此可得  $N, M, L$  共线.  $\square$

最后, 我们引入完全四线形与完全四点形, 并用一维基本形的射影对应的知识证明它们的性质.

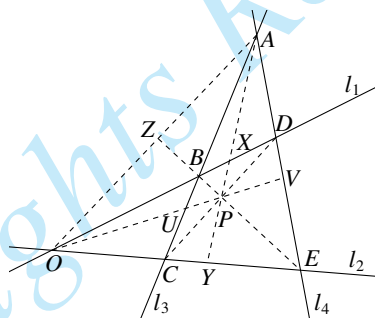


Figure 3.29

**Definition 3.5.9.** 定义:

a.) 射影平面内的 (任意三者不共点的) 四条直线以及它们的形成的六个交点组成的图形叫做完全四线形 (complete quadrilateral), 六个点称为它的顶点, 四条直线称为它的边, 没有公共边的顶点的连线称为它的对角线, 三条对角线组成的三角形称为对边三角形.

b.) 射影平面内的 (任意三点不共线的) 四点以及所有连接其中两点的六条直线形成的图形叫做完全四点形 (complete quadrangle), 四个点称为它的顶点, 六条线称为它的边, 没有公共顶点的两边的交点称为它的对边点, 三个对边点组成的三角形叫做对顶三角形.<sup>(20)</sup>

如图3.29所示, 直线  $l_1, l_2, l_3, l_4$  与它们的交点  $A, B, C, D, E, O$  构成了一个完全四线形, 其对角线为  $AO, CD, BE$ ; 点  $B, C, D, E$  和直线  $BD, BC, CE, DE, EB, CD$  构成了一个完全四点形, 其对边点为点  $A, O, P$ , 对顶三点形为  $\triangle AOP$ .

实际上, 我们可以将完全四点/线形的概念推广到完全  $n$  点/线形: 设平面中有任意三者不共点的  $n$  条直线, 则这  $n$  条直线与其中任意两条直线相交所成的  $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$  个交点组成的图形称为完全  $n$

(20) 有时会出现“完全四边形”的称呼, 大多数时候它指完全四线形, 读者容易从上下文中进行区分.

点形, 其中的  $n$  条直线称为它的边,  $\frac{n(n-1)}{2}$  个点称为它的顶点; 设平面中有任意三者不共线的  $n$  个点, 则这  $n$  个点与连接其中任意两个点得到的  $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$  条直线组成的图形称为完全  $n$  点形, 其中的  $n$  个点称为它的顶点,  $\frac{n(n-1)}{2}$  条直线称为它的边.

顺便一提, 相对于“完全”, 我们可以有“简单”的概念: 设平面中有任意三者不共点的  $n$  条直线  $l_1, l_2, \dots, l_n$ , 作出它们顺次的交点 (即点  $(l_1 \cap l_2), (l_2 \cap l_3), \dots, (l_{n-1} \cap l_n), (l_n \cap l_1)$ ) 共  $n$  个点, 这  $n$  条直线与  $n$  个点组成的图形为简单  $n$  线形, 其中的  $n$  条直线称为它的边,  $n$  个点称为它的顶点; 设平面中有任意三者不共线的  $n$  个点  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , 顺次连接这些点得到  $n$  条直线  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ , 这  $n$  个点与  $n$  条直线组成的图形称为完全  $n$  点形, 其中的  $n$  个点称为它的顶点,  $n$  条直线称为它的边.

由上述定义可以发现, 对  $n=3$  的情况, 简单三点形、简单三线形、完全三点形、完全三线形对应了完全相同的图形, 我们下面直接用“三角形”称之.

另外, 对于今后我们将使用的术语作一定的说明: 完全  $n$  点形内接于一圆锥曲线指它的  $n$  个顶点均在圆锥曲线上, 完全  $n$  线形外切于一圆锥曲线指它的  $n$  条边均与圆锥曲线相切; 完全  $n$  点形  $A_1A_2 \cdots A_n$  指以点  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为顶点的完全  $n$  点形, 完全  $n$  线形  $\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$  指以直线  $l_1, l_2, \dots, l_n$  为边的完全  $n$  线形.

**Theorem 3.5.10** (完全四点/线形的调和性质). 如图3.29, 直线  $l_1, l_2, l_3, l_4$  组成的完全四边形中, 它的两条对角线  $BE, CD$  交于点  $P$ , 则直线  $l_1, l_2, OA, OP$  调和共轭.

*proof.* 记  $U = AC \cap OP, V = AE \cap OP, X = OD \cap AP, Y = OE \cap AP, Z = BE \cap AO$ , 则

$$(l_1, l_2, OA, OP) \bar{\wedge} (D, E, A, V) \stackrel{(O)}{\bar{\wedge}} (X, Y, A, P) \stackrel{(O)}{\bar{\wedge}} (B, E, Z, P) \stackrel{(A)}{\bar{\wedge}} (U, V, O, P) \stackrel{(C)}{\bar{\wedge}} (A, V, E, D) \bar{\wedge} (OA, OP, l_2, l_1),$$

从而要求  $(l_1, l_2; OA, OP) = (D, E; A, V) = (A, V; E, D)$ , 但利用(3.2.9)可知  $(A, V; E, D) = 1/(D, E; A, V)$ , 而上式成立要求有调和共轭 (注意交比不能为 1, 见 [3.15]).  $\square$

### 练习

**Problem 3.36.** 已知同一线束中的三条直线  $a, b, c$ , 试仅用直尺作出直线  $d$ , 使得  $(a, b; c, d) = -1$ .

**Problem 3.37.** 利用一维射影变换的知识证明 Desargues 定理.

**Problem 3.38.** 设点  $B, A, A', B'$  在直线  $l$  上依次排列, 且  $AA', BB'$  有共同的中点  $M$ . 在某一维对应变换下, 以“\*”记射影对应下的对应元素, 若在射影变换后这些点在  $l^*$  上的排列顺序为  $B^*, A^*, M^*, A'^*, B'^*$ , 且  $A^*A'^*, B^*B'^*$  也有相同的中点  $M'$ , 则  $M' = M^*$ .

**Problem 3.39.** 给定点  $P$  与  $\triangle ABC$ ,  $PA \cap BC = A_1, PB \cap AC = B_1, PC \cap AB = C_1, AA_1 \cap B_1C_1 = A_2$ , 试求出  $(A, A_2; A_1, P)$  的值.

**Problem 3.40.** 在  $\triangle ABC$  的边  $BC, CA, AB$  所在直线上分别取点  $P, Q, R$ , 使得点  $P, Q, R$  共线, 若点  $P, Q, R$  为定点且点  $B, C$  分别在一条定直线上, 证明: 点  $A$  也在一条定直线上.

**Problem 3.41.** \* 设点  $A, B, C$  是点列中不同的三点, 点  $P, Q, R, X$  也在此点列中, 且  $(A, B, C, P, Q, R) \bar{\wedge} (B, C, A, Q, R, X)$ , 证明:  $X = P$ .

**Problem 3.42.** \* 设点列  $[P], [P']$  成射影对应  $[P] \bar{\wedge} [P']$ ,  $P_r, P'_r$  与  $P_s, P'_s$  是两组对应元素, 证明:  $P_rP'_s$  与  $P_sP'_r$  的交点在一条定直线上.



### 3.5.2 一维射影变换与对合变换

从一维基本形的射影对应中可以引申出“射影变换”的概念:

**Definition 3.5.11.** 对于两个一维基本形, 如果它们是同底的点列或是同中心的线束, 则称这两个一维基本形是重叠的. 称两个重叠的一维基本形间的射影对应为一个一维射影变换.<sup>(21)</sup>

可以看到, 一维射影变换与前面所讲的 [二维的] 射影变换的定义是完全类似的. 容易知道一维射影变换有如下的性质:

**Proposition 3.5.12.** 一维射影变换保持对应四元素间的交比; 重叠的一维基本形间保交比的变换必为一维射影变换.

*proof.* 这是一种特殊的一维射影对应, 而一维射影对应保交比; 由(3.5.4), 保交比的一维基本形间的变换必为射影对应, 结合“重叠”的条件知为一维射影变换.  $\square$

**Theorem 3.5.13.** 一个非恒等的一维射影变换最多有两个不变元素<sup>(22)</sup>.

*proof.* 若一个一维射影变换有三个不变元素, 容易知道恒等变换  $id$  满足这一要求, 但根据(3.5.3), 三个对应元素确定一个一维射影对应<sup>(23)</sup>, 则这一一维射影变换必为恒等变换  $id$ .  $\square$

由此可以引出下面的定义:

**Definition 3.5.14.** 对于一个非恒等的一维射影变换, 可按不变元素的数目进行分类:

- ① 若它有 [且仅有] 两个不变元素, 则称这一一维射影变换是双曲型的;
- ② 若它有 [且仅有] 一个不变元素, 则称这一一维射影变换是抛物型的;
- ③ 若它没有不变元素, 则称这一一维射影变换是椭圆型的.

**Remark.** 对于一个一维射影变换, 不妨设它是 [重叠的] 点列间的一维射影变换<sup>(24)</sup>, 假如它有三组对应的点  $A, B, C$  和  $A', B', C'$ , 设点  $D$  为该变换下的不变元素, 则  $(A, B, C, D) = (A', B', C', D)$ , 设  $\overline{AD} = x$ , 则这表明

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \div \frac{x}{x - \overline{AD}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}} \div \frac{x - \overline{AA'}}{x - \overline{AB'}}, \quad (*)$$

将上式整理后可得一个关于  $x$  的二次方程<sup>(25)</sup>, 它有两个不同实根、有两个相同实根、没有实根的情形分别对应于上述(3.5.14)中的 ①②③ 三种情形.

此外, 由上述讨论, (3.5.14)的定义是建立在实射影平面中讨论的, 对于复射影平面, 上述关于  $x$  的方程中,  $x$  取值范围为  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , 则  $x$  必有两解, 只不过可能是相同的根或是两个虚数. 因此在复射影平面中, 我们说一个一维射影变换有且仅有两个不变元素 (但可能重合), 上面(3.5.14)的三种情况可分别表述为: 有两个不同的实的不变元素、有两个相同的不变元素、有两个不同的虚的不变元素.

下面我们研究一种特殊的射影变换——对合在一维的情形.

(21) 若某一射影变换将以  $l$  为底的点列的变为另一个以  $l$  为底的点列, 也称之为直线  $l$  上的射影变换; 若某一射影变换将以  $P$  为顶点的线束变为另一个以  $P$  为顶点的线束, 也称之为点  $P$  上的射影变换.

(22) 即在一维射影变换下保持不变的元素.

(23) 从而三个对应元素也确定一个一维射影变换

(24) 对 [重叠的] 线束的情形可以将其转化为点列间的射影变换, 这只需要作一条不过线束顶点的直线  $l$ , 将线束中的直线转化为线束与  $l$  上的交点即可.

(25) 若  $A=A', B=B', C=C'$ , 此时(\*)式恒成立; 若(\*)化为二次方程时  $x$  的二次方系数消去变为零, 则取一个解为无穷大, 所得一次方程也可得到一个解, 此时也可按有两个根来处理.

**Definition 3.5.15.** 一个对合[变换](involution)是指一个射影变换  $f \neq \text{id}$ , 满足  $f \circ f = \text{id}$ . 特别地, 若  $f$  是一个一维射影变换, 则称该对合是一个一维对合变换.<sup>(26)</sup>

容易知道, 某一直线 (或某一点) 上的所有对合变换加上恒等变换后也构成了一个群. 一维对合变换有如下重要性质:

**Theorem 3.5.16.** 两组对应元素唯一确定一个一维对合变换. 即, 设已知一维对合变换  $f$  中的元素  $\alpha, \beta$  与它们对应元素  $\alpha', \beta'$ <sup>(27)</sup>, 则  $f$  存在且唯一.

*proof.* 设某直线  $l$  或点  $P$  上的变换  $f: [\pi] \rightarrow [\pi]$  有两对对应元素  $\alpha, \beta$  与对应的  $\alpha', \beta'$ , 且  $f(\alpha') = \alpha, f(\beta') = \beta$ . 设  $\gamma$  是  $[\pi]$  上的任意元素.

① 若  $\alpha = \alpha', \beta = \beta'$  不同时成立, 不妨设  $\alpha \neq \alpha'$ , 对合要求  $f$  必定满足法则  $(\alpha, \alpha'; \beta, \gamma) = (\alpha', \alpha; \beta', f(\gamma))$ , 而按上述法则可唯一确定  $f(\gamma)$ , 上述法则确定的一维基本形上的变换保交比, 故为射影变换, 又可以验证在上述法则确定的变换下  $f(f(\gamma)) = \gamma (\forall \gamma)$ , 这样就唯一确定了一个对合变换.

② 对于  $\alpha, \beta$  均为对合的不变元素的情况, 对合要求  $f$  必定满足法则  $(\alpha, \beta; \gamma, f(\gamma)) = (\alpha, \beta; f(\gamma), \gamma)$ , 可以验证只有两种可能的解  $f(\gamma) = \gamma$  或  $\alpha, \beta, \gamma, f(\gamma)$  成调和点列 (或线束), 而对合要求排除前者. 按  $\alpha, \beta, \gamma, f(\gamma)$  的法则可唯一确定  $f(\gamma)$ , 易知这样的  $f$  保交比且  $f(f(\gamma)) = \gamma (\forall \gamma)$ , 从而可知, 这样就唯一确定了一个对合变换.  $\square$

**Corollary 3.5.17.** 已知对合的两 [不重合的] 不变元素, 则另外两元素为这一对合中的一对对应元素的充要条件是, 这两个元素与两不变元素成调和关系.

*proof.* 这是(3.5.16)的证明中情形 ② 中得到的结论.  $\square$

类似于之前对一维射影变换的讨论, 显然一个对合不可以有三个自对应点, 否则它是一个恒等变换, 由此可以有如下的定义:

**Definition 3.5.18.** 对于直线  $l$  上或点  $P$  上的一个对合, 若它有两个对合的不变元素, 则称之为双曲型的对合; 若它有且仅有一个对合的不变元素, 则称之为抛物型的对合; 若它没有对合的不变元素, 则称之为椭圆型的对合.

**Remark.** 类似于(3.5.14)的 Remark 中的讨论, 在法则  $(\alpha, \alpha'; \beta, \gamma) = (\alpha', \alpha; \beta', f(\gamma))$  中令  $f(\gamma) = \gamma$ , 可以得到一个二次方程. 因此, 类似地, 若在复射影平面内考虑, 且考虑“重根”, 则所有对合均有两个自对应点, 上述定义中的三种情况分别对应于有两个不同的实的不变元素、有两个相同的不变元素、有两个不同的虚的不变元素.

**Theorem 3.5.19** (Desargues 对合定理). 一直线交完全四点形的三对对边于三对交点, 这三对点是该直线上的同一个对合的三对对应点.

(26) 若某一对合变换将以  $l$  为底的点列的变为另一个以  $l$  为底的点列, 也称之为直线  $l$  上的对合变换; 若某一对合变换将以  $P$  为顶点的线束变为另一个以  $P$  为顶点的线束, 也称之为点  $P$  上的对合变换.

(27) 此处要求这两对元素不重合, 注意对合变换与自身的复合是恒等变换, 故除了  $\alpha \neq \beta, \alpha' \neq \beta'$  之外, 还应该要求  $\alpha \neq \beta', \beta \neq \alpha'$ .



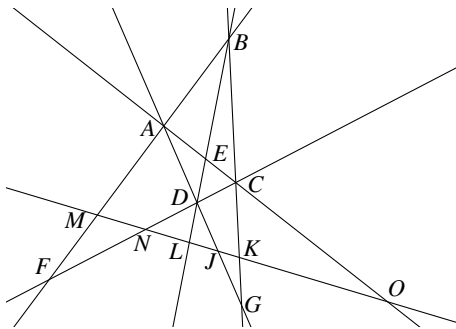


Figure 3.30

*proof.* 设一直线  $l$  与完全四点形  $A, B, C, D$  的三组对边分别交于  $M, N; J, K; L, O$ , 如图3.30, 则只需证明  $(L, O; N, J) = (O, L; M, K)$ . 注意到  $(L, O, N, J) \stackrel{(D)}{\sim} (E, O, C, A) \stackrel{(B)}{\sim} (L, O, K, M)$ , 而  $(L, O; K, M) = (O, L; M, K)$ , 命题显然成立.  $\square$

最后, 我们利用对合, 可以用射影方法定义垂直关系.

**Definition 3.5.20.** 在平面中的无穷远直线上给定一组椭圆型的绝对对合<sup>(28)</sup>, 若两直线交于绝对对合的一组对应点, 则称这两条直线垂直. 在复射影平面中, 给出垂直关系的这一绝对对合有两个虚的不变点, 我们将这两个虚无穷远点称为圆环点 (circular point).

我们说明, 这一定义与传统的对垂直的定义是一致的.

在传统定义下, 对于过  $P$  点的所有直线, 考虑变换  $g$ , 它将任一过  $P$  点的直线  $l$  变为另一过  $P$  点且垂直于  $l$  的直线  $g(l)$ . 可以知道, 它是一个一维射影变换, 因为它将所有直线同时转过  $90^\circ$ , 从而对应直线的交角在变换  $g$  下不变, 因而  $g$  保持交比; 另一方面, 若  $a \perp b$ , 则  $b \perp a$ , 故  $g(g(a)) = a$ , 即  $g$  是一个一维对合变换.

由于透视对应不改变交比, 将过点  $P$  的每一直线转化为它与  $l_\infty$  的交点, 这样就诱导了  $l_\infty$  上的对合  $f$ , 且一组对应直线与  $l_\infty$  的交点为一组  $f$  下的对应点.

对于另一点  $P'$ , 可类似定义对合变换  $g'$ , 设过  $P$  的直线  $l$  与过  $P'$  的直线  $l'$  交于  $l_\infty$  上的同一点, 则  $l \parallel l'$ , 则  $g(l) \parallel g(l')$ , 因此  $g(l), g(l')$  也交于  $l_\infty$  上的同一点. 因此, 不同的  $g$  诱导了同一个  $l$ .

另外, 显然变换  $g$  下没有不变的直线, 因此  $g$  是椭圆型对合, 则  $f$  也是一个椭圆型对合.

这样, 先选定某一无穷远点  $P$ , 便给出了  $l_\infty$  上的一个椭圆型对合  $f$ , 且这一对合给出了所有的垂直关系.  $\square$

或许有的读者会疑惑, 根据(3.5.20), 无穷远直线上的绝对对合的选取似乎是任意的, 那么这样一来直线的垂直不就是与这一对合有关了吗? 确实是这样, 这正是射影平面与普通  $E\ddot{u}k\lambda\epsilon\iota\delta\eta\varsigma$  平面的区别. 射影变换不保持角度性质, 从而垂直并不是纯射影的定义, 它涉及到了度量. 对于一个射影平面, 其中的任意元素都是视为地位均等的, 因而无法直接定义垂直; 因而, 选取了绝对对合, 相当于给射影平面加上了一种度量, 而由射影平面中元素的地位平等添加度量的方法是随意的, 不同的方法可以得到不同的度量结构. 但反过来, 对于某一已经给定的  $E\ddot{u}k\lambda\epsilon\iota\delta\eta\varsigma$  平面, 它对应的这样的椭圆型对合是唯一确定的.

利用(3.5.17), 根据定义(3.5.20), 我们立即可以得到如下的结论:

**Theorem 3.5.21.** 两直线垂直的充要条件为, 它们与无穷远直线的两交点和两圆环点成调和共轭关系.

(28) 所谓“绝对”, 即事先已经选定的, 是在射影平面上事先给定的附加结构, 在给定这一对合后, 再据此考虑射影平面上的各种几何关系, 且给定对合后这一对合不再改变.

下面给出了一个垂直的射影定义的应用实例.

**Example 3.5.22.** 用射影方法证明: 三角形的内心、外心、重心在同一条直线上.

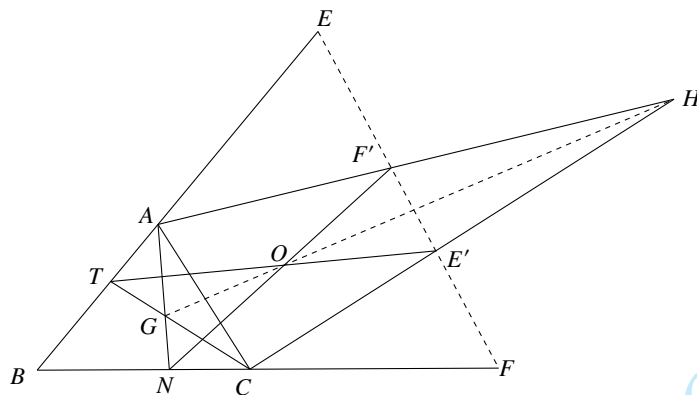


Figure 3.31

*solution.* 如图3.31, 设  $\triangle ABC$  的边  $BA, BC$  上的无穷远点分别为  $E, F$ , 它们在无穷远直线上的绝对对合中的对应点为  $E', F'$ . 由射影几何中关于垂直的定义,  $BA \perp CE', BC \perp AF'$ , 故  $H = CE' \cap AF'$  为  $\triangle ABC$  的垂心.

设  $BA, BC$  边上的中点分别为点  $T, N$ , 则  $G = CT \cap AN$  为重心. 注意  $BA \perp TE', BC \perp NF'$ , 故  $TE', NF'$  为边  $BA, BC$  上的中垂线, 从而  $O = TE' \cap NF'$  为外心.

由于  $TN$  为  $\triangle ABC$  的中位线, 故  $TN, AC$  交于一无穷远点, 即有  $TN, AC, E'F'$  共线, 对  $\triangle NAF'$  与  $\triangle TCE'$  应用 Desargues 定理可知对应边的交点  $G, O, H$  共线.  $\square$

### 练习

**Problem 3.43.** 设两重叠的点列间的射影变换  $f$  是抛物型的, 点  $E$  是  $f$  下的不变点. 对于点列中任意一点  $P$ , 证明:  $(P, f(P); P, f(f(P))) = -1$ .

**Problem 3.44.** 证明: 在一维射影变换  $f$  中, 若有一对非不变的对应元素  $\alpha, \alpha'$  符合对合的条件 (即  $f(\alpha) = \alpha', f(\alpha') = \alpha, \alpha \neq \alpha'$ ), 则这个射影变换一定是对合变换.

**Problem 3.45.** 设点  $A, B, C, A', B', C'$  共线, 且  $(AA', BC) = (BB', CA) = (CC', AB) = -1$ , 证明: 点  $A, B, C$  与  $A', B', C'$  是同一对合中的三组对应点.

**Problem 3.46.** 设点  $P$  是  $\triangle ABC$  所在平面上的一点,  $l$  是过点  $P$  的一条直线, 分别作直线  $PA, PB, PC$  关于  $l$  的对称直线, 与直线  $BC, CA, AB$  分别交于点  $A', B', C'$ . 证明: 点  $A', B', C'$  在同一直线上. *Hint.* 利用 Desargues 对合定理.

**Problem 3.47.** \* 证明: 任何一维射影变换必可由至多两个一维对合变换复合得到.

**Problem 3.48.** 证明: 两个圆环点分别是直角坐标系中斜率为  $+i, -i$  的两直线上的无穷远点.

**Problem 3.49 (Laguerre).** \* 设点  $I, J$  是两圆环点, 直线  $l_1, l_2$  交  $l_\infty$  于点  $P, Q$ , 记  $\mu = (PQ, IJ)$ , 证明:  $\angle(l_1, l_2) = \frac{1}{2i} \ln \mu$ . *Hint.* 利用习题 [3.48] 的结论.

## 3.6 圆上的配极变换

### 3.6.1 圆上的配极变换

我们先讨论配极变换的弱化版本——圆的情形, 之后我们会将其推广到一般的情形.

**Definition 3.6.1.** 一个关于半径为  $r$  且中心在  $O$  的圆的配极 [对应/变换] (polar correspondence), 将平面上不与  $O$  点重合的一点  $A$ , 变为一条垂直于  $OA$  的直线  $a$ , 且垂足  $A'$  满足  $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2$ ; 同时该配极变换把直线  $a$  变为点  $A$ . 直线  $a$  称为点  $A$  关于圆  $O$  的极线 (polar), 点  $A$  称为直线  $a$  关于圆  $O$  的极点 (pole).

由上述定义, 我们立即可以得到如下结论:

**Theorem 3.6.2.** 中心  $O$  的极线为无穷远直线; 无穷远直线上一点的极线为圆的一条直径, 且该直径垂直于所有过该无穷远点的非无穷远的直线.

*proof.* 在(3.6.1)中, 分别考虑  $\overline{OA} \rightarrow 0$  和  $\overline{OA} \rightarrow \infty$  的极限即可.  $\square$

**Theorem 3.6.3.** 圆上一点关于该圆的极线为圆在该点处的切线.

*proof.* 在(3.6.1)中, 令点  $A$  在圆上, 则  $\overline{OA} = r$ , 故  $\overline{OA'} = r$ , 则  $A' = A$ ; 另一方面, 过圆上一点  $A$  且垂直于  $OA$  的直线就是圆在点  $A$  处的切线.  $\square$

**Theorem 3.6.4.** 过  $\odot O$  外一点  $A$ , 作  $\odot O$  的两条切线, 两切点的连线即为点  $A$  的极线  $a$ .

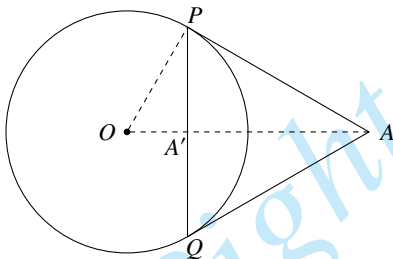


Figure 3.32

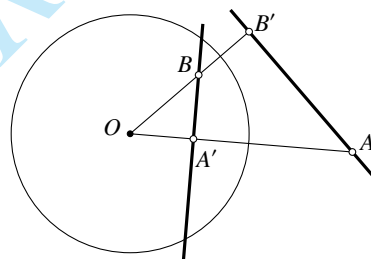


Figure 3.33

*proof.* 如图3.32, 设两切点分别为点  $P, Q$ , 直线  $PQ, AO$  交于点  $A'$ , 则显然  $PQ \perp OA$ , 因此只要证  $\overline{OA'} \cdot \overline{OA} = r^2 = PO^2$ , 而这是显然的, 对  $\triangle OPA$  应用射影定理即可.  $\square$

**Theorem 3.6.5** (配极原则 (polarity principle)). 对于关于某圆的配极变换, 若点  $A$  的极线过点  $B$ , 则点  $B$  的极线过点  $A$ .

*proof.* 如图3.33, 在点  $A$  的极线上取点  $B$ , 设点  $A$  的极线交  $OA$  于点  $A'$ , 点  $B$  的极线交  $OB$  于点  $B'$ , 我们证明直线  $AB'$  就是点  $B$  的极线, 从而命题成立.

利用配极的定义,  $\overline{OA'} \cdot \overline{OA} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$ , 由此  $\triangle AB'O \sim \triangle BA'O$ , 则  $\angle AB'O = \angle BA'O = 90^\circ$ , 结合  $\overline{OB} \cdot \overline{OB'}$  即知直线  $AB'$  就是  $O$  的极线.  $\square$

**Corollary 3.6.6.** 对于某一个圆, 一条直线的极点是所有直线上的点的极线的共同交点, 一个点的极线是所有过该点的直线的极点所同所在的直线.

**Corollary 3.6.7.** 对于  $\odot O$  内一点  $A$ , 可如下作出点  $A$  的极线: 过点  $A$  作  $\odot O$  的弦  $PQ$ ,  $\odot O$  在点  $P, Q$  处的切线交于点  $S$ ; 过点  $A$  作  $\odot O$  的另一条弦  $P'Q'$ ,  $\odot O$  在点  $P', Q'$  处的切线交于点  $S'$ , 则直线  $SS'$  即为点  $A$  的极线.

利用配极原则, 我们还可以给出(3.6.4)的另一个证明:

*another proof of (3.6.4).* 在图3.32中, 点  $P, Q$  的极线分别是  $\odot O$  在这两点处的切线, 而点  $P$  的极线过点  $A$ , 从而点  $A$  的极线过点  $P$ , 同理点  $A$  的极线过点  $Q$ , 因此直线  $PQ$  即是点  $A$  的极线.  $\square$

**Theorem 3.6.8.** 点列中四点的交比等于与之对应的四条极线的交比.

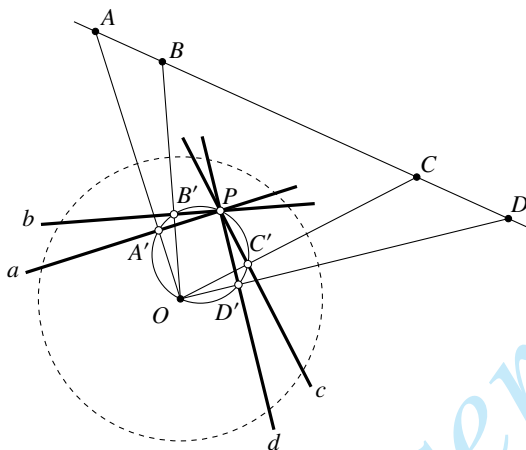


Figure 3.34

*proof.* 如图3.34, 给定  $\odot O$ , 设共线四点  $A, B, C, D$  的极线分别为直线  $a, b, c, d$ , 它们分别与直线  $OA, OB, OC, OD$  交于点  $A', B', C', D'$ . 设点  $A, B, C, D$  所在直线的极点为按(3.6.1)中  $A'$  的定义类似地取出  $A', B', C', D'$ , 记点  $P$  为直线  $AD$  的极点为点  $P$ , 则由(3.6.6)可知直线  $a, b, c, d$  均过点  $P$ .

由极线的定义可知  $PA' \perp A'O$ , 对点  $B', C', D'$  也有类似性质, 则点  $A', B', C', D'$  同在  $\odot(OP)$  上, 故

$$(A, B; C, D) = (AO, BO; CO, DO) = (PA', PB'; PC', PD'),$$

其中的最后一个等号是因为: 线束  $(OA, OB, OC, OD)$  与  $(PA', PB', PC', PD')$  中的对应直线的夹角均为  $90^\circ$ , 则线束  $(OA, OB, OC, OD)$  中任意两直线的交角等于线束  $(PA', PB', PC', PD')$  中对应两直线的交角, 从而原四直线的交比等于对应四直线的交比.  $\square$

下面我们考虑极点极线在射影变换下的性质, 我们有如下结论:

**Theorem 3.6.9.** 若某一射影变换保持圆, 则射影变换下关于该圆的配极关系不变. 即, 设点  $P$  关于圆  $\omega$  的极线为  $p$ , 射影变换  $f$  保持  $\omega$  不变, 则点  $f(P)$  关于圆  $\omega$  的极线为  $f(p)$ , 直线  $f(p)$  关于  $\omega$  的极点为  $f(P)$ .

*proof.* 利用(3.6.3)(3.6.4)(3.6.7)可作出任意一点关于  $\omega$  的极线, 而这些做法只通过作切线、作直线、取两直线的交点等方法来完成, 又射影变换保持相切等的这些曲线/直线以及点间的关系, 则射影变换后仍可通过这一方法作出一点的极线, 因此射影变换保持配极关系.  $\square$

利用上述结论, 我们可以证明下面的重要结论:

**Theorem 3.6.10** (极点极线的调和性质). (如图3.35) 设  $p$  是点  $P$  关于圆  $\omega$  的极线, 过  $P$  的任意一条直线交  $\alpha$  于点  $A, B$ , 交  $p$  于点  $Q$ , 则  $(PQ, AB) = -1$ .

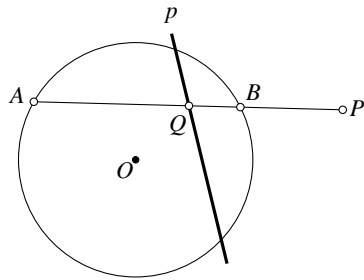


Figure 3.35

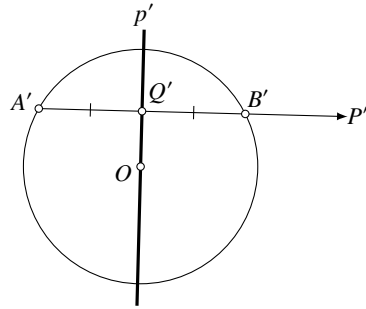


Figure 3.36

*proof.* 取射影变换  $f$  保持  $\omega$  不变, 并将点  $P$  变为无穷远点, 这只需要先用射影变换将  $P$  变为无穷远点, 此时圆变为椭圆, 再用仿射变换将椭圆变为原来的圆. 以撇号记  $f$  下对应的点或线, 如图3.36.

由(3.6.9), 直线  $p'$  仍为点  $P'$  的极线, 而由(3.6.2)可知  $p'$  过圆心  $O$  且垂直于  $A'B'$ , 即  $P'$  垂直平分  $A'B'$ , 故  $Q'$  为  $A'B'$  的中点, 则  $(P'Q', A'B') = -1$ , 相应地, 射影变换前  $(PQ, AB) = -1$ .  $\square$

**Proposition 3.6.11.** 圆内接完全四点形的对顶三点形的每一顶点关于圆的极线就是它在对顶三线形的对边. 即, 如图3.37, 点  $A, B, C$  的极线分别为直线  $BC, CA, AB$ .

*proof.* 利用(3.4.5), 通过射影变换可将直线  $A, B$  变为无穷远直线并保持圆, 以撇号记射影变换后的对应元素.

此时  $A', B'$  点为无穷远点, 则圆的内接完全四点形的四个顶点组成平行四边形, 而圆的内接平行四边形必为矩形, 则易知点  $C'$  为圆的中心, 故点  $C'$  的极线为  $A'B'$ , 结合  $A'C' \perp B'C'$  知点  $A'$  的极线为  $B'C'$  且点  $B'$  的极线为  $A'C'$ .  $\square$

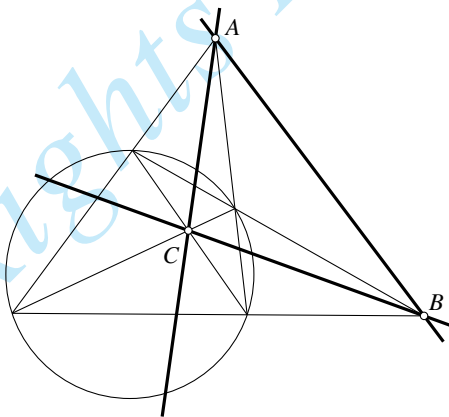


Figure 3.37

### 练习

**Problem 3.50.** 设  $ABCD$  是圆  $\omega$  的内接四边形,  $AC \cap BD = X, AB \cap CD = Z$ , 证明:  $\omega$  在点  $B, C$  处的切线交于直线  $XY$  上一点.

**Problem 3.51.** 设点  $P$  关于  $\omega$  的极线交  $\omega$  于点  $A, B$ , 过点  $P$  的任一直线交  $\omega$  于点  $C, D$ , 证明:

- (1) 对  $\omega$  上任意一点  $Q, (QA, QB; QC, QD) = -1$ ;
- (2)  $AC \cdot BD = AD \cdot BC$ ;
- (3) 点  $M$  为线段  $AB$  的中点, 则  $\angle CMD$  被直线  $AB$  平分.

**Problem 3.52.** 设  $\triangle ABC$  内接于圆  $\omega$ ,  $\omega$  在点  $A, B, C$  处的切线组成  $\triangle A'B'C'$ , 点  $S$  为任意一点, 直线  $AS, BS, CS$  分别交直线  $BC, CA, AB$  于点  $A_1, B_1, C_1$ , 证明:  $\triangle A_1B_1C_1$  与  $\triangle A'B'C'$  透视.

**Problem 3.53.** 设点  $A$  是  $\text{Rt}\triangle ABC$  的直角顶点, 点  $D, E$  分别在线段  $AB, AC$  上,  $BE \cap CD = G, ED \cap CB = H$ , 作  $HI \perp AG$  于点  $I, ID \cap AH = M$ . 若  $BG = BH$ , 证明:  $GM \perp GH$ .

### 3.6.2 圆与对偶原则

我们可以看到, 配极变换将点变为线, 又将线变为点, 这体现了点线之间的对偶关系. 由此可以引申出对偶原则. 为此, 我们先作如下的关于“对偶”的定义:

**Definition 3.6.12.** 在射影平面中, 对于仅由下表中元素、关系及操作构成的图形 (或命题), 通过互换每一行中的两个元素、关系或操作, 得到的新的图形 (或命题) 称为原来的图形 (或命题) 的对偶图形 (或对偶命题):

①	点	直线
②	过一点作一条直线	在直线上取一点
③	一点在一直线上	一直线过一点
④	一点不在一直线上	一直线不过一点
⑤	作过两点的直线	取两直线的交点
⑥	(某 $n$ 个) 点在同一直线上	(某 $n$ 条) 直线过同一点
⑦	(某四个) 点的交比为 $t$ 特别地, (某四个点) 成调和点列	(某四条) 直线的交比为 $t$ 特别地, (某四条直线) 成调和线束

Table 3.1

**Example 3.6.13.** 简单三点形与简单三线形互为对偶图形 (或者说三角形的对偶图形还是三角形).

这是因为, 简单三点形先取三个点  $A, B, C$ , 相应地, 简单三线形先取三条直线  $a, b, c$ ; 简单三点形再分别连接  $AB, BC, CA$ , 对偶地, 就是简单三线形取出了交点  $a \cap b, b \cap c, c \cap a$ .

**Example 3.6.14.** 简单  $n$  点形与简单  $n$  线形为对偶图形 (或者说  $n$  边形的对偶图形还是  $n$  边形), 完全  $n$  点形与完全  $n$  线形为对偶图形. (与(3.6.13)同理.)

**Example 3.6.15.** *Desargues* 定理和它的逆定理互为对偶命题.

*Desargues* 定理: 若两三角形的对应顶点的连线交于一点, 则它们对应边的交点共线;

*Desargues* 逆定理: 若两三角形的对应边的交点共线, 则它们对应顶点的连线交于一点.

上面已经将对应的元素或操作用不同的下划线标出, 读者容易发现它们确实是对偶命题.

关于对偶命题, 我们有如下结论:

**Theorem 3.6.16** (对偶原则 (The duality principle)). 如果一个射影几何下的命题成立, 则其对偶命题同样成立.

*proof.* 考虑将原命题的构造关于一个圆作配极变换, 利用前述配极变换的各性质, 易知定义(3.6.12)中 ① 至 ⑦ 中每组的两个元素/关系/构造互换.  $\square$

上面我们考虑的是最基本的对偶, 由于我们考虑的是关于圆的配极变换, 则容易知道还可以有以下对偶关系:



⑧	圆	圆
⑨	圆心	无穷远直线
⑩	一点在圆上	一直线与圆相切
⑪	一点不在圆上	一直线不与圆相切
⑫	一点是一直线关于圆的极点	一直线是一点关于圆的极线

Table 3.2

这样, 可以将表3.2中的对偶关系补充至3.1中, 此时对偶原则仍然成立.

需要注意的是, 这里圆的对偶图形是圆, 要求图形或命题中只有一个圆, 对于多个圆的情形并不成立. 这是因为, 对偶原则的成立是由关于某一个圆的配极变换保证的, 对于多个圆的情形, 需要将其他圆关于一个选定的圆作配极, 而圆关于圆的配极就不再是一个圆了<sup>(29)</sup>. 例如(0.4.10)与后面将介绍的(0.4.10)看上去有对偶之感, 但实际上并不是对偶原则下的一组对偶命题.

**Example 3.6.17.** Brianchon 定理和 Pascal 定理互为对偶命题.

Brianchon 定理: 圆外切六边形的主对角线交于一点;

Pascal 定理: 圆内接六边形的主对边的交点共线.

上面已经将对应的元素或操作用不同的下划线标出, 其中, “外切六边形”是六条边所在直线均与圆相切的六边形, 因此对偶为六个顶点均在圆上的六边形, 即“内接六边形”; 而“主对角线”是相隔两个顶点的顶点的连线, 因此对偶是相关两条边的边所在直线的交点, 即“主对边的交点”.

**Example 3.6.18.** (3.4.8)就是(3.4.5)的对偶命题.

**Remark.** 这里的命题出现了“存在射影变换”这样的关系, 容易知道它的可以有对偶, 其对偶也是“存在射影变换”, 这由关于圆的配极容易证明.

下面给出一个利用对偶原则证明命题的例子:

**Proposition 3.6.19.** 圆外切完全四形的对顶三点形的每一顶点关于圆的极线就是它在对顶三线形的对边. 即, 如图4.47, 点  $A, B, C$  的极线分别为直线  $BC, CA, AB$ .

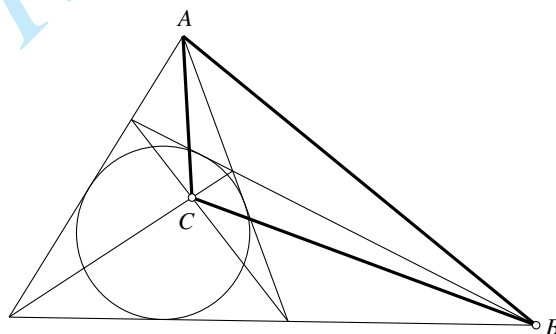


Figure 3.38

*proof.* 这是(3.6.11)的对偶命题, 因此成立. □

练习

**Problem 3.54.** 请分别作出下列图形的对偶图形:

(29) 具体为什么图形, 读者继续学习第六时就会知道.



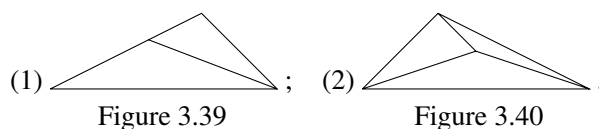


Figure 3.39

Figure 3.40

**Problem 3.55.** 请分别写出下列定理 (命题) 的对偶命题:

- (1) 练习 [3.30];
- (2) Newton 定理;
- (3) (3.6.10).

**Problem 3.56.** “两重叠点列间的射影变换必可由至多两个一维对合变换复合而得”可以有对偶命题吗? 请说明理由.

**Problem 3.57.** 利用对偶原则证明如下结论: 设有顶点不同的线束  $(a, b, c)$  与  $(a', b', c')$ ,  $a \cap b' = C_1, b \cap a' = C_2, b \cap c' = A_1, b \cap c' = A_2, c \cap a' = B_1, c \cap a' = B_2$ , 证明: 直线  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$  交于一点.

**Problem 3.58.** \* 一般维数的射影空间中也可以有对偶原则. 本题来考虑三维射影空间  $\mathbb{P}^3$  中的对偶.

(1) 类似于本节的思路, 先考虑关于一个球的配极. 类似于本节的(3.6.1), 我们可以作如下定义:

给定半径为  $r$  的球  $O$ , 对于空间中一点  $P$ , 在射线  $OP$  上取点  $P'$ , 使得  $\overline{OP'} \cdot \overline{OP} = r^2$ , 过点  $P'$  作平面  $\pi$ , 则称  $\pi$  为点  $P$  的“极面”, 点  $P$  为  $\pi$  的“极点”.

根据上述定义, 请你仿照 §3.6.1 的讨论, 证明以下结论:

- (i) 若点  $P$  在球  $O$  上, 则点  $P$  的极面就是球  $O$  在  $P$  点处的切平面;
- (ii) 若点  $P$  在球  $O$  外, 过点  $P$  作球  $O$  的所有切线, 则所有切点所共的平面就是点  $P$  的极面;
- (iii) [配极原则] 若点  $A$  的极面过点  $B$ , 则点  $B$  的极面过点  $A$ ;
- (iv) 当点  $P$  在定直线  $p$  上运动时, 恒有定直线  $p'$  在  $P$  的极面上 (称为直线  $p$  的“极线”).

(2) 接下来, 我们来考虑  $\mathbb{P}^3$  中的对偶原则, 注意对偶原则应该可由配极变换的性质导出. 请填写下面的对偶原则的表格:

①	点	平面
②	直线	直线
③	过一点作平面	在平面上取一点
④	过一直线作平面	(i) <u>▲</u>
⑤	作过三个点的平面	(ii) <u>▲</u>
⑥	(iii) <u>▲</u>	取平面上一直线
⑦	(iv) <u>▲</u>	作两平面的交线
⑧	(某 $n$ 个) 点在同一平面内	(v) <u>▲</u>
⑨	(vi) <u>▲</u>	(某 $n$ 个) 平面有公共的交线
⑨	(vii) <u>▲</u>	(某 $n$ 条) 直线在同一平面上

Table 3.3

(3) 最后, 我们对 (2) 中得到的结论作一定的应用. 请完成下面的小问.

- (i) 作出平面上的完全四点形在  $\mathbb{P}^3$  中的对偶图形;
- (ii) 写出 Desargues 定理在  $\mathbb{P}^3$  中的对偶命题;

(iii) 利用  $\mathbb{P}^3$  中的对偶原则证明: 设  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  是四个不同的平面, 若  $\alpha, \beta$  的交线与  $\gamma, \delta$  的交线在同以平面内, 则平面  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  有一个共同的交点, 且  $\alpha, \gamma$  的交线与  $\beta, \delta$  的交线共面,  $\alpha, \delta$  的交线与  $\beta, \gamma$  的交线也共面.

(4) 有兴趣的读者可以进一步地讨论一般的  $\mathbb{P}^n$  中的对偶原则.

All Rights Reserved.

## 第四章 近代 Εὐκλείδης 几何基础

### 4.1 Simson 线

#### 4.1.1 Simson 线与 Steiner 线

本节先介绍 Simson 定理与 Steiner 定理, 以及相关的 Simson 线与 Steiner 线. 虽然它们比较简单, 但是颇为重要, 在之后会有较大的作用. 下面的 Simson 定理引出了 Simson 线的概念:

**Theorem 4.1.1** (Simson). 一点到三角形三边的射影共线当且仅当该点在三角形的外接圆上.

当这三个射影共线时, 它们所在的直线称为 Simson 线 (Simson's line). 下记  $\triangle ABC$  外接圆上一点  $P$  关于  $\triangle ABC$  的 Simson 线为  $S_{\triangle ABC}(P)$ , 在不引起歧义的情况下简记为  $S(P)$ .

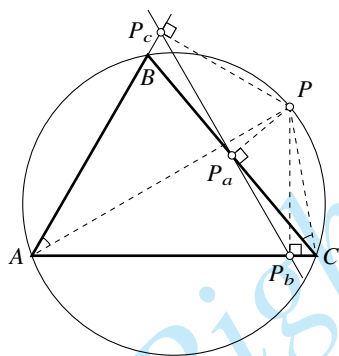


Figure 4.1

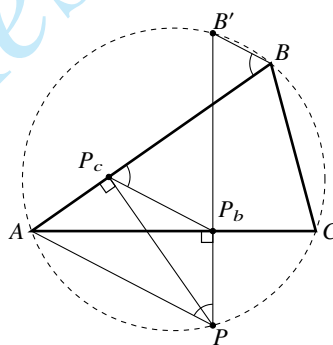


Figure 4.2

*proof.* 如图4.1, 设点  $P$  在  $\triangle ABC$  的三边上的射影分别为点  $P_a, P_b, P_c$ . 点  $P, C, P_b, P_a$  四点共圆, 从而  $\angle PP_bP_a = \angle PCP_a = \angle PCB$ , 同理  $\angle PP_bP_c = \angle PAB$ . 因此  $P_a, P_b, P_c$  三点共线  $\Leftrightarrow \angle PP_bP_a = \angle PP_bP_c \Leftrightarrow \angle PCB = \angle PAB \Leftrightarrow P, A, B, C$  四点共圆.  $\square$

Simson 线还有一些有趣的性质.

**Lemma 4.1.2.** 设  $P \in C_{\triangle ABC}$ , 作  $PB' \perp AC$  交  $AC$  于点  $B'$ , 则  $BB' \parallel S(P)$ .

*proof.* 如图4.2, 设点  $P$  在三角形的边  $AC, AB$  上的射影分别为点  $P_b, P_c$ , 则  $S(P) = P_bP_c$ , 由  $\angle ABB' = \angle APB' \xrightarrow{A, P, P_b, P_c \text{ 共圆}} \angle BP_cP_b$ , 则  $BB' \parallel P_bP_c = S(P)$ .  $\square$

**Proposition 4.1.3.** 设点  $P_1, P_2 \in C_{\triangle ABC}$ , 则  $\angle(S(P_1), S(P_2)) = \frac{\angle P_2OP_1}{2}$ . <sup>(1)</sup>

*proof.* 由(4.1.2), 当  $C$  上一点  $P$  绕  $C$  的中心沿逆时针方向转过  $\theta$  角时, (4.1.2)中的  $B'$  点相应地沿顺时针方向转过  $\theta$  角, 而由圆周角定理可知  $BB'$  会绕  $B$  点瞬时针转过  $\frac{\theta}{2}$  角, 而  $S(P) \parallel BB'$ , 则  $S(P)$  会顺时针转过  $\frac{\theta}{2}$  角, 即证明了命题.  $\square$

(1) 另一种表述是, 当一点在某三角形的外接圆上匀角速运动时, 其 Simson 线以一半的角速度反方向转动.

**Lemma 4.1.4.** 设  $\triangle ABC$  外心为  $O$ ,  $A', P \in C$ , 则  $\angle(S_{\triangle ABC}(P), S_{\triangle A'BC}(P)) = \frac{1}{2} \angle AOA'$ .

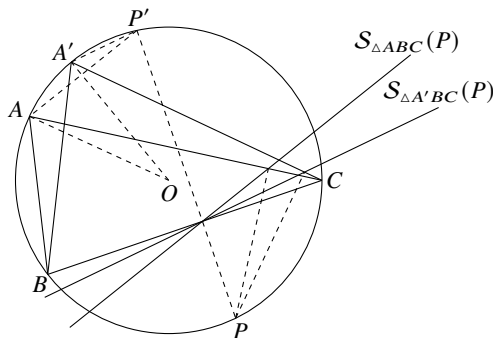


Figure 4.3

*proof.* 如图4.3, 过  $P$  作  $PP' \perp BC$  交  $\odot O$  于  $P'$ , 由(4.1.2)知  $S_{\triangle ABC}(P) \parallel AP'$ ,  $S_{\triangle A'BC}(P) \parallel A'P'$ , 而  $\angle(AP', A'P') = \angle AP'A' = \angle AOA'/2$ .  $\square$

**Theorem 4.1.5.** 若  $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$  共外接圆  $C$ , 则  $\forall P \in C$ , 有

$$\angle(S_{\triangle ABC}(P), S_{\triangle A'B'C'}(P)) = \frac{1}{2}(\angle AOA' + \angle BOB' + \angle COC').$$

*proof.* 注意到

$$\text{LHS} = \angle(S_{\triangle ABC}(P), S_{\triangle A'BC}(P)) + \angle(S_{\triangle A'BC}(P), S_{\triangle A'B'C'}(P)) + \angle(S_{\triangle A'B'C'}(P), S_{\triangle A'BC'}(P)),$$

结合(4.1.4)即证.  $\square$

**Corollary 4.1.6.** 若  $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$  有共同的外接圆  $C$ , 且  $C$  上存在一点  $P$ , 使得  $P$  对两三角形的 Simson 线的夹角为  $\theta$ , 则外接圆上任意一点对两三角形的 Simson 线的夹角也为  $\theta$ .

*proof.* 由(4.1.5)可知夹角与  $P$  的位置无关.  $\square$

下面的 Steiner 定理与 Simson 定理密切相关, 它又引出了 Steiner 线的概念.

**Theorem 4.1.7 (Steiner).** 对于  $\triangle ABC$  外接圆上一点  $P$ , 其 Simson 线平分线段  $PH$ , 其中点  $H$  为  $\triangle ABC$  的垂心.

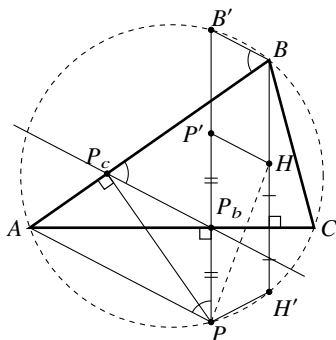


Figure 4.4

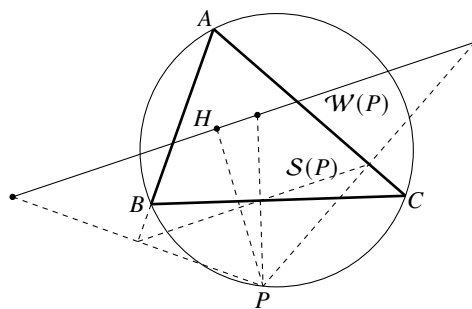


Figure 4.5

*proof.* 如图4.4, 由(0.5.21)知  $H$  关于  $BC$  的对称点  $H'$  在外接圆上. 注意  $PB', BH' \perp AC$ , 四边形  $BH'PB'$  必为一个梯形, 而它又内接于圆  $C$ , 故此梯形一定是等腰的.

由此, 作  $P$  关于  $BC$  的对称点  $P'$ , 则  $P'H \parallel BB'$ , 而由(4.1.2)知  $BB' \parallel S(P)$ , 故  $S(P) \parallel P'H$ , 结合  $P_b$  为  $PP'$  中点可知  $S(P)$  为  $\triangle P'HP$  的中位线, 则  $S(P)$  平分线段  $PH$ . 即证.  $\square$

**Theorem 4.1.8.** 对  $\triangle ABC$  外接圆上一点  $P$ , 作  $P$  关于三边的对称点, 所得三点共一条过垂心  $H$  的直线, 且它就是  $\mathfrak{h}_{P,2}(S(P))$ (参考图4.5).

称该直线为点  $P$  关于  $\triangle ABC$  的 Steiner 线 (Steiner line), 下记为  $\mathcal{W}_{\triangle ABC}(P)$ , 在不引起歧义的情况下简记为  $\mathcal{W}(P)$ .

*proof.* 将 Simson 定理中的三个射影关于  $P$  取位似  $\mathfrak{h}_{P,2}$  可知三对称点共线; 结合 Steiner 定理知这一直线也过点  $H$ .  $\square$

*proof.* 显然.  $\square$

**Theorem 4.1.9.** 对过  $\triangle ABC$  垂心  $H$  的直线  $l$ , 作  $l$  关于三边的对称直线, 所得三线交于  $\odot(ABC)$  上一点  $P$ (参考图4.6). 称  $P$  为直线  $l$  关于  $\triangle ABC$  的逆 Steiner 点 (anti-Steiner point), 下记为  $\mathcal{W}_{\triangle ABC}^{-1}(l)^{(2)}$ , 在不引起歧义的情况下简记为  $\mathcal{W}^{-1}(l)$ .

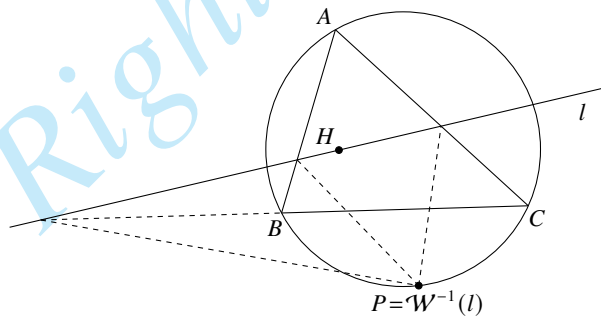


Figure 4.6

*proof.* 显然若  $\mathcal{W}(P)=l$ , 则三条对称直线交于点  $P$ , 由同一法知定理成立.  $\square$

利用 Steiner 定理, 还可以得到如下的结论:

**Proposition 4.1.10.** 对于  $\triangle ABC$ , 设  $P$  为  $C$  上一点,  $H$  为垂心,  $M_a, M_b, M_c$  为三边中点, 若  $K=PH \cap S(P)$ , 则  $K$  在  $C_{\triangle M_a M_b M_c}$  (即  $N$ ) 上且  $S_{\triangle M_a M_b M_c}(K) \perp S(P)$ .

(2) 有时, 对于一点  $P$ , 也把  $\mathcal{W}^{-1}(PH)$  称为  $P$  的逆 Steiner 点.

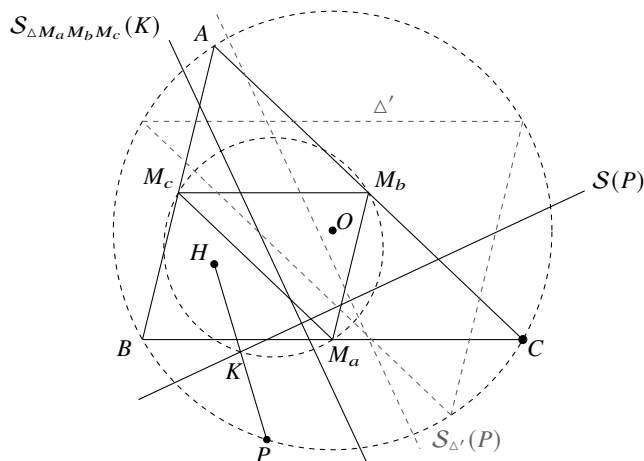


Figure 4.7

*proof.* 如图4.7根据 Steiner 定理, 点  $K$  即是  $PH$  的中点. 由位似变换  $\mathfrak{h}_{H,1/2}$ ,  $K$  在  $C_{\Delta M_a M_b M_c}$  上显然. 由(0.5.20),  $\Delta ABC$  的对径点三角形  $\Delta'$  与  $\Delta M_a M_b M_c$  关于  $H$  称 2:1 位似, 注意  $P, K$  为这一位似的对应点, 因而  $S_{\Delta'}(P) \parallel S_{\Delta M_a M_b M_c}(K)$ .

由(4.1.5)结合对径点三角形的定义,  $S_{\Delta'}(P) \perp S(P)$ , 则  $S(P) \perp S_{\Delta M_a M_b M_c}(K)$ .  $\square$

最后, 我们介绍抛物线的两个有趣的性质, 它们可以利用 Simson 定理与 Steiner 定理得到.

**Theorem 4.1.11.** 抛物线的外切三角形<sup>(3)</sup>的外接圆过抛物线的焦点.

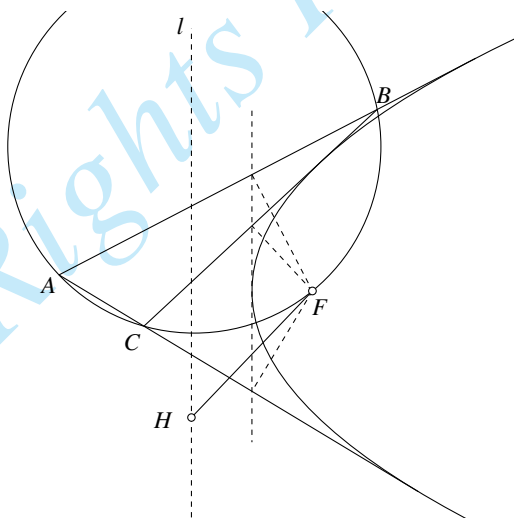


Figure 4.8

*proof.* 如图4.8, 利用(1.5.2), 由于点  $F$  在直线  $AB, BC, CA$  上的射影在同一条直线上, 由 Simson 定理可知  $F \in C$ .  $\square$

**Theorem 4.1.12.** 抛物线的外切三角形的垂心在准线上.

*proof.* 如图4.8, 利用(4.1.11), 注意  $S(F)$  就是抛物线在其顶点处的切线, 准线  $l = \mathfrak{h}_{F,2}(S(F))$ , 而由 Steiner 定理知  $\Delta ABC$  的垂心  $H$  与焦点  $F$  的连线被  $S(F)$  平分, 从而点  $H$  必在准线  $l$  上.  $\square$

(3) 一曲线的外切三角形是指, 三边所在直线均与给定曲线相切的三角形, 不一定要切点在三角形三边的这三条线段上, 例如这里抛物线的外接三角形的情形.

## 练习

**Problem 4.1.** 给定  $\triangle ABC$  以及  $C$  上的一点  $P$ , 请用尺规作出直线  $l$ , 使得以点  $P$  为焦点、 $l$  为准线的抛物线与直线  $AB, BC, CA$  均相切.

**Problem 4.2.** 设  $\triangle ABC$  满足  $AB < BC$ , 点  $H$  是  $\triangle ABC$  的垂心, 点  $M$  为线段  $BC$  的中点, 点  $N$  为  $C$  上  $\widehat{BAC}$  的中点. 设边  $CA$  上一点  $D$  满足  $MD$  垂直平分  $HN$ , 证明:  $CD = DA + AB$ .

**Problem 4.3.** 给定  $\triangle ABC$ , 点  $P_1, P_2, P_3 \in C$ , 证明:  $S(P_1), S(P_2), S(P_3)$  共点的充要条件为  $\angle ABP_1 + \angle BCP_2 + \angle CAP_3 = 0$ .

**Problem 4.4.** 设点  $H$  为  $\triangle ABC$  的垂心, 点  $P \in C$ , 线段  $HP$  的中垂线分别交  $CA, AB$  于点  $Q, R$ , 证明: 点  $A, P, Q, R$  共圆.

**Problem 4.5.** 若抛物线与一定角的两边恒相切, 求抛物线与该角的两边的两个切点的中点的轨迹.

**Problem 4.6.** 设四边形  $ABCD$  存在内切圆, 设直线  $l$  过点  $A$ , 且  $l$  与线段  $BC$  交于点  $M$ , 与直线  $CD$  交于点  $N$ . 设  $\triangle ABM, \triangle MNC, \triangle NDA$  的内心分别为点  $I_1, I_2, I_3$ , 证明:  $\triangle I_1 I_2 I_3$  的内心在直线  $l$  上.

## 4.1.2 摆线与 Steiner 三尖瓣线 \*

本小节是摆线相关的知识, 摆线的内容并非是我们标准的《平面几何导论》课程的内容, 且之后也几乎不会用到, 因此作为选学内容. 在这里介绍这一方面的知识, 一方面是想介绍著名的 Steiner 三尖瓣线, 另一方面也想告诉读者: 传统的平面几何不仅仅只能研究点、直线、圆以及圆锥曲线!

**Definition 4.1.13.** 设  $\odot A$  是一半径确定的圆,  $P$  为  $\odot A$  上一 [相对于  $\odot A$  而言] 固定的点, 则:

- 当  $\odot A$  在定直线  $l$  上无滑动滚动时,  $P$  的轨迹为一条摆线 (cycloid).
- 当  $\odot A$  在定圆  $\odot O$  内侧无滑动滚动时,  $P$  的轨迹为一条内摆线 (hypocycloid). 特别地, 当  $r_{\odot O} = 3r_{\odot A}$  时, 这一内摆线称为三尖瓣线 (deltoid); 当  $r_{\odot O} = 4r_{\odot A}$  时, 这一内摆线称为星形线 (astroid) 或四尖瓣线 (tetracuspid).
- 当  $\odot A$  在定圆  $\odot O$  外侧无滑动滚动时,  $P$  的轨迹称为一条外摆线 (epicycloid). 特别地, 当  $r_{\odot A} = r_{\odot O}$  时的外摆线称为心脏线 (cardioid).



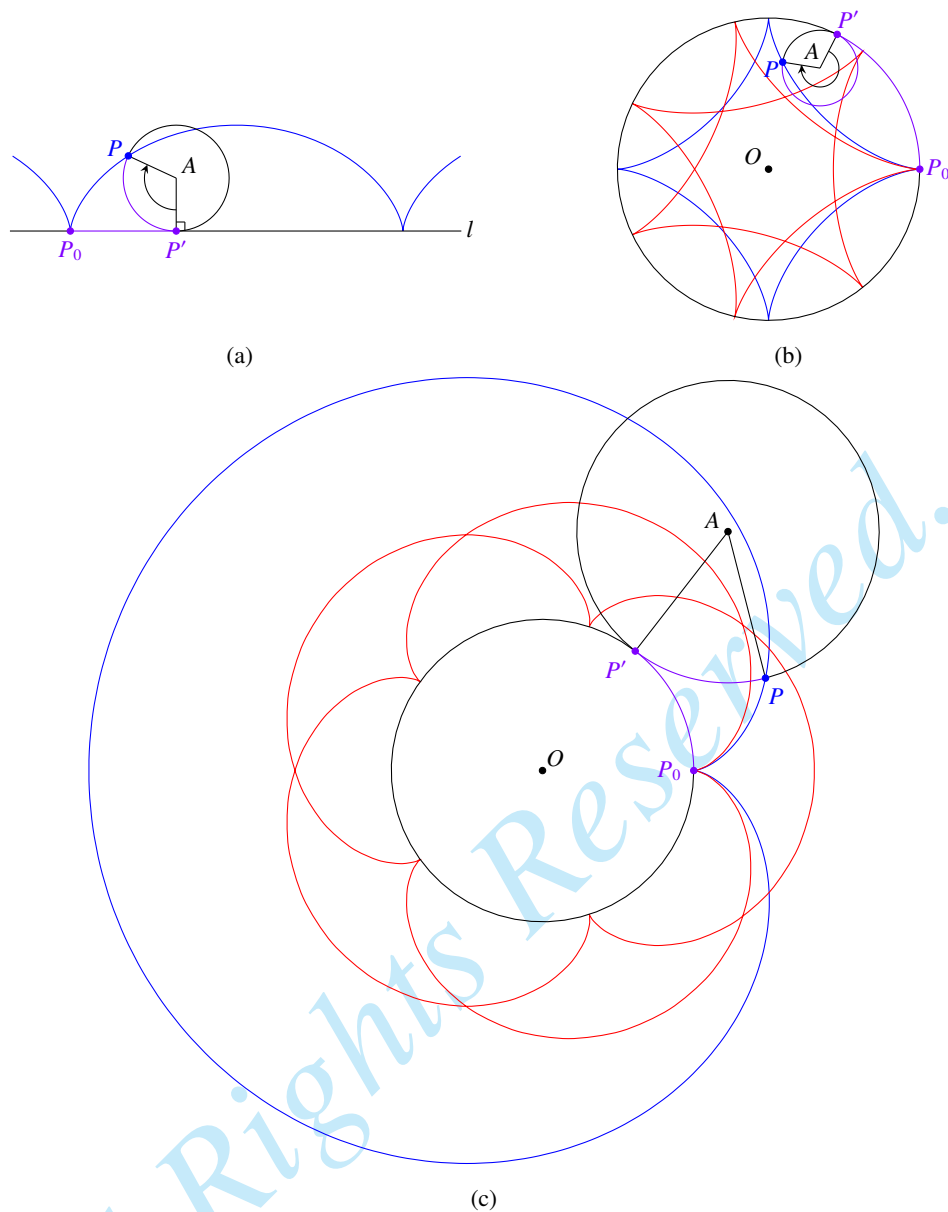


Figure 4.9

图4.9中展示了几种摆线<sup>(4)</sup>:

图4.9a中的蓝色曲线是摆线, 它由  $\odot A$  在直线  $l$  上滚动形成, 初始时刻点  $P$  与图中的点  $P_0$  重合,  $\odot A$  滚动到与直线  $l$  的切点为点  $P'$  时点  $P$  即移动到图中的位置, 无滑动滚动要求  $\odot A$  上的弧  $\widehat{P'P}$  与  $l$  上的线段  $P_0P'$  (图中的两段紫色线段) 的长度相等.

图4.9b中的蓝色与红色的曲线均是内摆线. 其中, 蓝色的内摆线是星形线, 它由  $\odot A$  在  $\odot O$  上滚动形成, 且  $r_{\odot O}/r_{\odot A}=4$ , 初始时刻点  $P$  与图中的点  $P_0$  重合,  $\odot A$  滚动到与  $\odot O$  的切点为点  $P'$  时点  $P$  即移动到图中的位置, 无滑动滚动要求  $\odot A$  上的弧  $\widehat{P'P}$  与  $l$  上的弧  $\widehat{P_0P'}$  (图中两段紫色线段) 的长度相等; 红色的内摆线对应的  $\odot O, \odot A$  的半径之比为  $7/2$ . 此外, 之后的图4.11中的蓝色曲线是三尖瓣线.

图4.9c中的蓝色与红色的曲线均是外摆线. 其中, 蓝色的外摆线是心脏线, 它由  $\odot A$  在  $\odot O$  上滚动形成, 且  $r_{\odot O}/r_{\odot A}=1$ , 初始时刻点  $P$  与图中的点  $P_0$  重合,  $\odot A$  滚动到与  $\odot O$  的切点为点  $P'$  时点  $P$  即移动到图中的位置, 无滑动滚动要求  $\odot A$  上的弧  $\widehat{P'P}$  与  $l$  上的弧  $\widehat{P_0P'}$  (图中两段紫色线段) 的长度相

(4) 有时, 也用“摆线”统称摆线、内摆线和外摆线, 读者容易从上下文中理解其具体指代含义.

等; 红色的外摆线对应的  $\odot O, \odot A$  的半径之比为  $5/2$ .

另外, 对内摆线的情形, 当  $r_{\odot O} = 2r_{\odot A}$  时,  $\odot A$  上的  $P$  点在  $\odot O$  的某一直径 (线段) 上往复运动, 此时内摆线退化为 [两重合的] 线段<sup>(5)</sup>, 称为一个 نصير 对 (Tusi couple)<sup>(6)</sup>.

从图中可以看到, 对于摆线, 当形成摆线的动圆在定直线或定圆上滚动时, 在动圆上的定点同时也在定直线或定圆上的位置处, 摆线具有“尖点”, 摆线在此处不可微. 例如, 三尖瓣线有三个尖点, 星形线有四个尖点, 而心脏线有一个尖点.

本节的主要目标是证明 Simson 线包络一条三尖瓣线. 所谓包络 (envelope) 是指与一族动曲线 (或直线) 恒相切的曲线. 为此我们先给出三尖瓣线的几个性质, 其他内、外摆线可以类似地研究.

**Proposition 4.1.14.** 设半径为定圆  $\odot O$  的三分之一的  $\odot A$  在  $\odot O$  上运动,  $\odot A$  上一点  $D$  的轨迹形成三尖瓣线,  $B$  为三尖瓣线与  $\odot A$  的某一交点. 若在某一特定位置,  $\odot A$  切  $\odot O$  于点  $C$ , 则  $\angle CAD = 3\angle COB$ .

*proof.* 由无滑滚动,  $\widehat{CD}$  与  $\widehat{CB}$  长度相同, 这两段圆弧对应的半径为  $1:3$  的关系, 故这两段圆弧对应的圆心角为  $3:1$  的关系, 即证.  $\square$

**Proposition 4.1.15.** 设圆  $\omega$  上有定点  $M$  与两动点  $Q, R$ , 则满足  $\angle RQM = -2\angle QRM$ , 则所有的  $QR$  包络一条三尖瓣线.

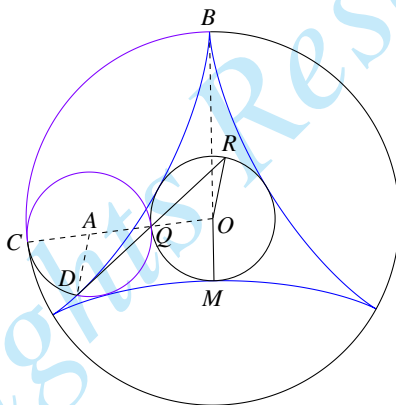


Figure 4.10

*proof.* 如图4.10, 设  $\omega$  以  $O$  为圆心, 作圆  $\gamma = \odot(O, 3OM)$ ,  $B$  为  $\gamma$  一点且满足  $\overline{OB} = 3\overline{MO}$ . 延长  $OQ$  至  $A$  使得  $Q$  是  $AD$  中点, 并作  $\odot(A, AQ)$ , 则显然  $\odot O$  切  $\omega$  于一点  $C$ , 且  $C, A, Q, O$  共线. 在  $\odot A$  上找到一点  $D$ , 使得  $\widehat{CB}$  的长等于  $\widehat{CD}$  (未必为劣弧) 的长.

利用(4.1.14)可知  $D$  在内接于  $\gamma$  的一个以点  $B$  为尖点的三尖瓣线  $\alpha$  上运动, 且  $\angle CAD = 3\angle AOB$ . 由角度关系,  $\angle CAD = -3\angle COB = 3\angle MOQ = -\angle QOR$ , 故  $AD \parallel OR$ , 则  $D, Q, R$  共线.

当  $D$  运动到此处时,  $C$  为  $\odot A$  滚动的瞬时心, 因而  $\alpha$  在此处的切线垂直于  $CD$ , 而  $QR \perp CD$ , 故  $QR$  为切线. 由  $Q$  的任意性, 所有的  $QR$  均是  $\alpha$  的切线; 由于  $\odot A$  与  $Q$  一一对应, 故所有的  $Q$  点确定了  $\alpha$  的所有切线.  $\square$

为了证明 Simson 线的包络为三尖瓣线, 我们先证明几个与 Simson 线相关的引理. 在本小节中, 为方便起见, 下面约定分别用点  $H, O$  分别表示  $\triangle ABC$  的垂心和外心.

(5) 点  $P$  是在线段上往复运动的, “往”和“反”的轨迹均为一条线段, 而往返的轨迹是重合的, 这就是“两重合的线段”的含义. 具体证明留给读者.

(6) 点  $P$  的全名为 نصير الدين محمد بن محمد بن حسن الطوسي (Naṣīr al-Dīn Muḥammad bin Muḥammad bin Ḥasan al-Ṭūsī), 阿拉伯人名字中的 “بن(bin)” 表示 “……之子”, 所以用 “الطوسي([al-]Ṭūsī)” 表示此人的名称并不是很恰当, 但在英文中已经约定俗成地使用 “Tusi couple” 的名称. 在本书中, 笔者用 “نصير(Naṣīr)” 称呼此人, 似更为恰当.



**Theorem 4.1.19.** 给点  $\triangle ABC$ ,  $C$  上有一动点  $P$ , 则  $S(P)$  包络一条三尖瓣线, 称为  $\triangle ABC$  的 Steiner 三尖瓣线.

*proof.* 设  $S(P) \cap N = R, Q$  且  $Q$  为  $HP$  中点, 按(4.1.17)的要求取出  $\triangle UVW$ , 并取  $UH$  中点  $M$ , 则由(4.1.18)可知  $\angle RQM = -2\angle QRM$ . 再由(4.1.15)可知  $QR$  包络一条三尖瓣线.  $\square$

此外, 根据之前关于三尖瓣线性质的讨论, 容易知道 Steiner 三尖瓣线还有以下性质: 该三尖瓣线的大小由  $N$  决定, 从而对于同一个圆的内接三角形, Steiner 三尖瓣线的大小一定. 下面的图4.12展现了 Simson 线的包络.

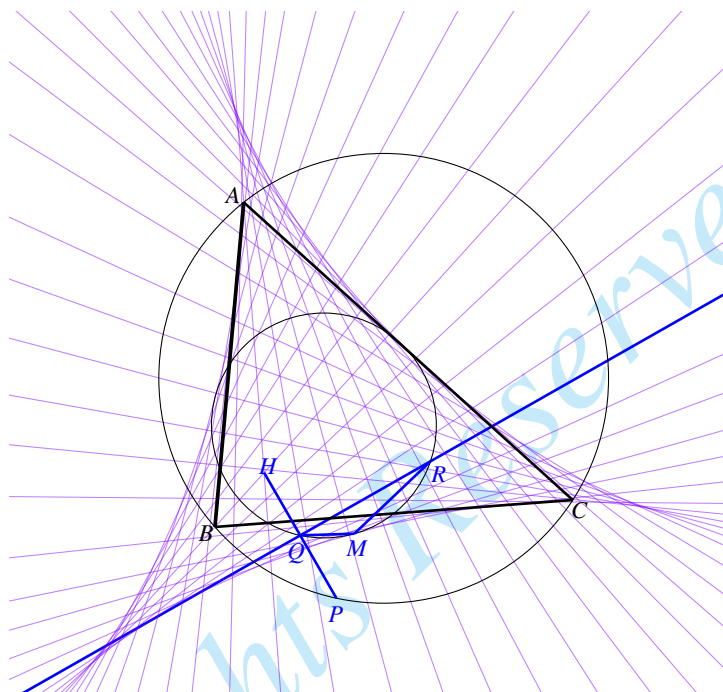


Figure 4.12

### 练习

**Problem 4.7.** 设  $\odot O, \odot A$  的半径之比为  $k(k > 0)$ , 当  $\odot A$  在  $\odot O$  的内(外)侧无滑动滚动时,  $\odot A$  上一点的轨迹便是内(外)摆线  $\alpha$ . 证明: 曲线  $\alpha$  闭合的充要条件为  $k \in \mathbb{Q}$ , 且当  $k = p/q$  ( $p, q$  为互质的正整数) 时, 曲线  $\alpha$  有  $p$  个尖点.

**Problem 4.8.** 在  $\odot A$  沿直线  $l$  无滑动滚动时,  $\odot O$  上某点  $P$  的轨迹就是摆线  $\alpha$ . 对于  $\alpha$  上一点  $Q$ , 设它到直线  $l$  的距离为  $h$ ,  $\alpha$  在点  $Q$  处的切线与直线  $l$  的夹角为  $\theta$ , 证明:  $\frac{\cos \theta}{\sqrt{h}} = \text{const.}$

**Problem 4.9.** 给定  $\odot O$ ,  $A$  为  $\odot O$  上一个定点, 动点  $B$  在  $\odot O$  上. 设  $C$  为  $A$  关于  $OB$  的对称点, 证明: 直线  $BC$  包络一条心脏线.

**Problem 4.10.** 定直线  $OP, OQ$  互相垂直, 点  $A, B$  分别为  $OP, OQ$  上的动点, 且  $A, B$  间的距离恒定. 证明: 直线  $AB$  包络一星形线.

**Problem 4.11.** 本题研究 نصير 对的相关性质. 设  $\odot O, \odot A$  的半径之比为 2,  $\odot A$  在  $\odot O$  的内侧无滑动滚动. 证明:

- (1)  $\odot A$  上的一定点  $P$  的在一线段上运动;
- (2)  $\odot A$  内的一 [相对  $\odot A$ ] 固定的点  $P'$  在一椭圆上运动.

### 4.1.3 斜 Simson 线 \*

本部分可以看作对 Simson 定理的推广.

**Theorem 4.1.20.** 给定  $\triangle ABC$  与角度  $\alpha$ , 对于  $C$  上一点  $P$ , 在直线  $BC, CA, AB$  上分别取点  $D, E, F$ , 使得  $\angle(PD, BC) = \angle(PE, CA) = \angle(PF, AB) = \alpha$ , 则点  $D, E, F$  共线 (如图 4.13), 所共直线称为点  $P$  关于  $\triangle ABC$  的  $\alpha$ -斜 Simson 线或  $\alpha$ -Carnot 线 (Carnot line). 下记为  $S(P, \alpha)$ .

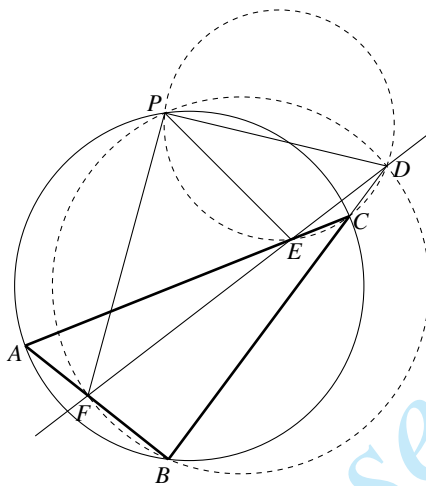


Figure 4.13

*proof.* 与 Simson 定理的证明类似, 注意  $P, D, B, F$  共圆,  $P, D, E, C$  共圆, 则  $\angle PDE = \angle PCE = \angle PBA = \angle PDF$ , 故点  $D, E, F$  共线.  $\square$

$\alpha$ -Simson 线具有以下性质.

**Proposition 4.1.21.** 给定  $\triangle ABC$  与  $C$  上一点  $P$ , 当  $\alpha$  变化时,  $S(P, \alpha)$  的包络是一条抛物线.

*proof.* 记  $l_\alpha = S(P, \alpha)$ , 设  $l_\alpha$  截三边分别于点  $D, E, F$ . 作一条与直线  $AB, BC, CA, l_\alpha$  均相切的抛物线  $\gamma$ , 则由 (4.1.11) 易知  $\odot(ABC), \odot(DBF), \odot(DEC)$  交于抛物线的焦点, 而这三个圆的公共交点正是点  $P$ , 从而  $\gamma$  的焦点为  $P$ . 易知以给定点  $P$  为焦点且与定直线  $AB, BC, CA$  均相切的抛物线只有一条 (参考习题 [4.1]), 从而对于任意  $\alpha, l_\alpha$  均与  $\gamma$  相切.  $\square$

**Proposition 4.1.22.** 给定  $\triangle ABC$  与定值角  $\alpha$ , 对于  $C$  上一点  $P$ , 当  $P$  在  $C$  上匀速转动时, 其  $\alpha$ -Carnot 线以一半的角速度反方向转动.

*proof.* 仿 (4.1.3) 显然.  $\square$

**Proposition 4.1.23.** 设  $\triangle ABC$  外心为  $O$ , 则对于  $P_1, P_2 \in C$ ,  $\angle(S(P_1, \alpha_1), S(P_2, \alpha_2)) = \alpha_1 - \alpha_2 - \frac{\angle P_1 O P_2}{2}$ .

*proof.*  $\angle(S(P_1, \alpha_1), S(P_2, \alpha_2)) = \angle(S(P_1, \alpha_1), S(P_1, \alpha_2)) + \angle(S(P_1, \alpha_2), S(P_2, \alpha_2))$ , 而显然前者等于  $\alpha_1 - \alpha_2$ , 又利用 (4.1.22) 知后者等于  $-\frac{1}{2}\angle P_1 O P_2$ .  $\square$

类似于 Simson 线,  $\alpha$ -Simson 线也有包络三尖瓣线的性质:

**Proposition 4.1.24.** 给定  $\triangle ABC$  与非零定值角度  $\alpha$ , 则对于  $C$  上的动点  $P$ ,  $S(P, \alpha)$  包络一条三尖瓣线, 不妨称之为  $\alpha$ -Steiner 三尖瓣线.

在这里, 我们并不打算完整地证明这一定理, 但会简要地介绍一下证明思路.

$\alpha$ -Simson 线与 Simson 线有很多类似之处, 我们只需要将 Simson 线的几个关键性质作一个推广, 便可方便地证明这一定理. 在之前证明 Simson 线的包络为三尖瓣线时, 关键在于利用了(4.1.5)与 Steiner 定理. 此处, 以  $\alpha=90^\circ$  作为过渡, 利用(4.1.23)容易得到(4.1.5)的推广; 另一方面, 注意 Steiner 定理可以表述为“关于垂心的位似变换  $\mathfrak{h}_{H,1/2}$  将  $C$  变为  $N$  且将外接圆上一点  $P$  变换至  $S(P)$  上”, 因而我们可以给出下面的命题作为(4.1.25)的推广形式. 有了这两个定理的推广形式, 仿照之前的讨论, “转一下”后即可证明所有  $\alpha$ -Carnot 线也包络了一条三尖瓣线.

**Proposition 4.1.25.** 给定  $\triangle ABC$  与非零定值角度  $\alpha$ , 设  $H$  为  $\alpha$  的垂心, 则存在一定圆  $\odot K$  与一个以  $H$  为中心的旋似变换  $\mathfrak{s}$ , 使得以下两个条件同时成立:

- (1)  $\mathfrak{s}(C) = \odot K$ ;
- (2)  $\forall P \in C, \mathfrak{s}(P) \in S(P, \alpha)$ .

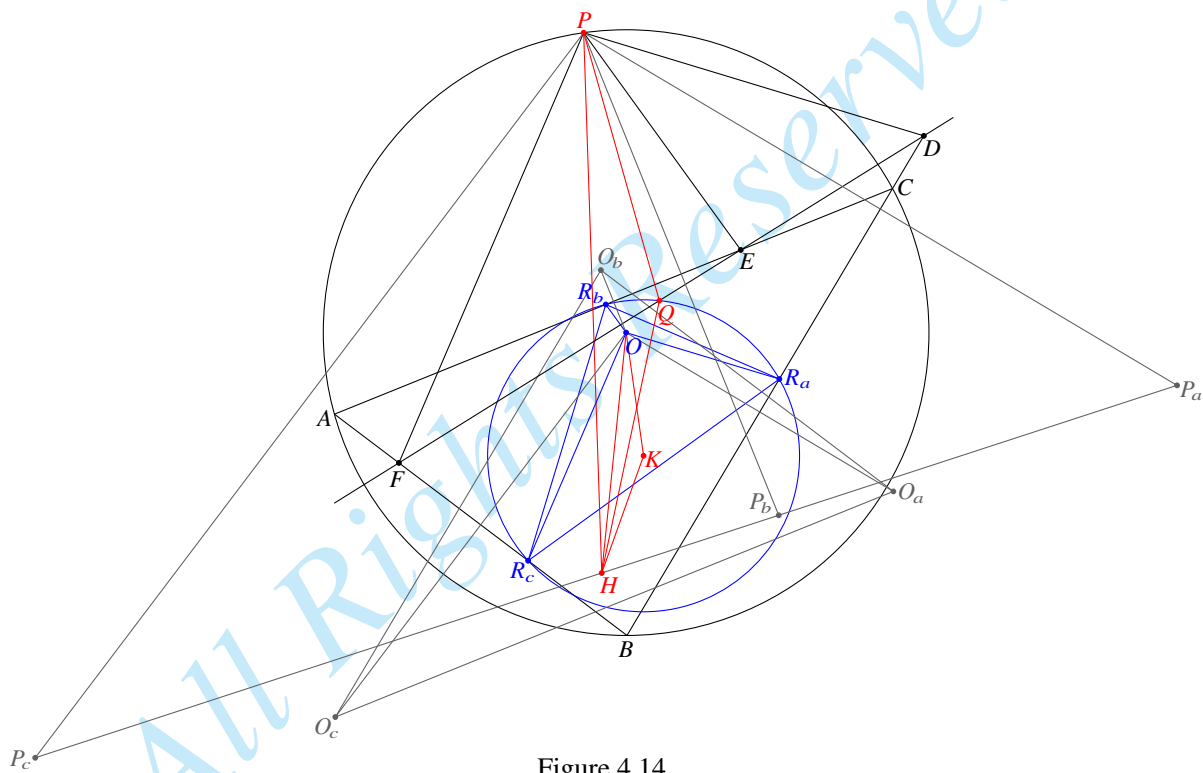


Figure 4.14

*proof.* 如图4.14, 设  $\triangle ABC$  外心为  $O$ , 分别在  $BC, CA, AB$  上取点  $R_a, R_b, R_c$ , 使得  $\angle(OR_a, BC) = \angle(OR_b, CA) = \angle(OR_c, AB) = \alpha$ , 注意  $O, R_a, R_b, C; O, R_b, R_c, A; O, R_c, R_a, B$  为三组四点共圆, 由此计算角度易证  $\triangle R_a R_b R_c \cup O \triangleq \triangle ABC \cup H$ .

令  $\odot K = \odot(R_a R_b R_c)$ , 并定义  $\forall P \in C, \mathfrak{s}(P)$  为使得  $\triangle HPQ \triangleq \triangle HOK$  的点  $Q$ , 注意  $\frac{HP}{HQ} = \frac{HO}{HK}$  为定值且  $\angle QHP$  为定值, 故  $\mathfrak{s}$  确为一旋似. 下证这一旋似满足条件.

设  $O$  的反射三角形为  $\triangle O_a O_b O_c$ , 由于反射三角形与垂足三角形 2:1 位似而  $O$  的垂足三角形为与原三角形顺相似的中点三角形, 故  $\triangle O_a O_b O_c \triangleq \triangle ABC \triangleq \triangle R_a R_b R_c$ , 由(0.5.28)知  $H$  为  $\triangle O_a O_b O_c$  的外心, 而  $K$  为  $\triangle R_a R_b R_c$  的外心, 从而  $\triangle O_a O_b O_c \cup H \triangleq \triangle R_a R_b R_c \cup K$ .

由此可得  $\triangle HOO_b \triangleq \triangle KOR_b$ , 从而  $\triangle KOH \triangleq \triangle R_b O O_b$ , 而显然  $OR_b = O_b R_b$ , 故  $HK = OK$ , 即  $K$  在  $OH$  的中垂线上.



由  $\triangle HPQ \triangleq \triangle HOK$  知  $\triangle KHQ \triangleq \triangle OHP$ , 则  $\frac{KQ}{OP} = \frac{HK}{HO} = \frac{OK}{OH} \frac{\triangle HOO_b \triangleq \triangle KOR_b}{\frac{KR_b}{HO_b}}$ . 注意由  $\triangle ABC \cup O \triangleq \triangle O_a O_b O_c \cup H$  可得  $OP = HO_a$ , 故  $KQ = KR_b$ , 从而  $Q \in \odot K$ , 即条件 (1) 成立.

设  $S(P, \alpha)$  截三边分别于点  $D, E, F$ , 容易注意到

$$\triangle PFP_c \triangleq \triangle PDP_a \triangleq \triangle PEP_b \triangleq \triangle OR_b O_b \triangleq \triangle OKH \triangleq \triangle PQH,$$

由此  $P_a P_b P_c \cup H \triangleq DEF \cup Q$ , 而  $P_a, P_b, P_c, H$  共线于  $\mathcal{W}(P)$ , 故  $D, E, F, Q$  共线, 即 (2) 成立.  $\square$

## 练习

**Problem 4.12.** 证明(4.1.24).

**Problem 4.13.** 给定  $\triangle ABC$  与非零角度  $\alpha$ , 点  $P_1, P_2, P_3 \in C$ , 记  $s_i = S(P_i, \alpha)$ , 并令  $\beta = \angle AOP_1 + \angle BOP_2 + \angle COP_3 - 2\alpha$ , 证明:

- (1) 若  $\beta = 0$ , 则  $s_1, s_2, s_3$  交于一点;
- (2) 若  $\beta \neq 0$ , 则  $s_1, s_2, s_3$  不交于一点, 且  $s_1, s_2, s_3$  围成的三角形的  $\beta$ -Steiner 三尖瓣线就是  $\triangle ABC$  的  $\alpha$ -Steiner 三尖瓣线.

**Problem 4.14** (清宮(Seimiya)). 证明 Simson 定理的另一种推广形式 (当其中的  $P=Q$  时即 Simson 定理):

给定  $\triangle ABC$ , 设点  $P, Q$  是  $C$  上两点, 点  $P$  的反射三角形为  $\triangle LMN$ ,  $PL, PM, PN$  分别与直线  $BC, CA, AB$  交于点  $X, Y, Z$ , 则点  $X, Y, Z$  共线.

## 4.2 反演变换

### 4.2.1 反演变换及其基本性质

**Definition 4.2.1.** 一个关于中心为点  $O$ , 半径为  $r$  的圆  $\omega$  的反演 (inversion), 将平面上一点  $A$  变换到直线  $OA$  上的一点  $A'$ , 满足  $\overline{OA'} \cdot \overline{OA} = r^2$ ; 无穷远处的点的反演点在  $O$  点处. 也称  $r^2$  为这一反演的反演幂,  $\omega$  为这一反演的基圆.

下简记此反演为  $i_{\odot O}(\cdot)$ , 不引起歧义的情况下可写为  $i(\cdot)$ ; 特别地, 将点  $P$  关于  $\triangle ABC$  外接圆的反演点记为  $i_{\triangle ABC} P$ , 在不引起歧义的情况下可写为  $iP$ .

**Remark.** 实际上,  $r \in \mathbb{I}$  的取值范围也是允许的, 即反演变换的反演幂可以取任意非零实数. 对  $r \in \mathbb{I}$  的情形, 圆变成一个虚圆, 但仍可以定义反演点  $A'$ , 它满足  $\overline{OA'} \cdot \overline{OA} = r^2 < 0$ , 此时点  $A, A'$  在点  $O$  的异侧. 对于关于圆心为  $O$ 、半径  $r \in \mathbb{I}$  的虚圆的反演, 可先作对圆心为  $O$ 、半径为  $|r|$  的圆的反演, 再关于  $O$  取中心对称.

反演变换有如下的基本性质.

**Theorem 4.2.2.** 反演变换  $i$  可逆, 且其逆变换就是它自身, 即  $i^{-1} = i$ .

*proof.* 由定义显然.  $\square$

**Theorem 4.2.3.** 反演变换将过反演中心  $O$  的直线变为它本身.

*proof.* 由定义显然.  $\square$

**Remark.** 反演变换中, 反演中心  $O$  的像是不被定义的, 但可以考虑极限意义下的结果. 对于一过  $O$  的曲线  $\gamma$ , 可以考虑其上一一点  $P$ , 令  $P$  沿着  $\gamma$  趋向于点  $O$ , 则得到此种情况下  $\gamma$  上的点  $O$  在反演变换下的像, 它是一个无穷远点. 注意对于不同的  $\gamma$ , 对应的无穷远像是不同的. 对于过  $O$  的直线, 在极限意义下,  $O$  在反演下变为该直线上的无穷远点.

**Lemma 4.2.4.** 若以  $O$  为中心的反演变换将 (不与中心  $O$  共线的) 点  $A, B$  分别变为点  $A', B'$ , 则  $\triangle AOB \sim \triangle B'OA'$ , 且  $A', B', A, B$  四点共圆.

*proof.* 由反演的定义,  $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$  故有四点共圆以及三角形相似.  $\square$

**Theorem 4.2.5.** 反演变换将不过反演中心  $O$  的圆变为一个 (不过  $O$  的) 圆.

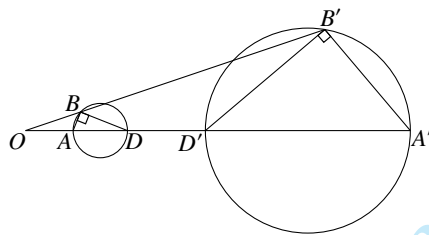


Figure 4.15

*proof.* 如图4.15, 设某一圆上三点  $A, B, D$  在反演变换下分别变为点  $A', B', D'$ , 其中直线  $AD$  过反演中心  $O$ . 由(4.2.4)可知  $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$ ,  $\triangle ODB \sim \triangle OB'D'$ , 从而  $\angle D'B'A' = \angle OB'A' - \angle OB'D' = \angle OAB - \angle ODB = \angle ABD = 90^\circ$ , 从而点  $B'$  在以  $A'D'$  为直径的原上, 因此反演变换将这样一个以  $AD$  为直径的圆变为以  $A'D'$  为直径的圆.  $\square$

**Theorem 4.2.6.** 反演变换将过反演中心  $O$  的圆  $\omega$  变为不过  $O$  的直线  $l$ , 且点  $O$  在  $\omega$  上的对径点变为点  $O$  在  $l$  上的射影; 它也将不过  $O$  的直线  $l$  变为过  $O$  的圆  $\omega$ , 且点  $O$  在  $l$  上的射影变为点  $O$  在  $\omega$  上的对径点.

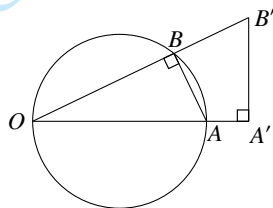


Figure 4.16

*proof.* 如图4.15, 设反演中心  $O$  在过这一点的圆上的对径点为  $A$ , 点  $A$  的反演点为  $A'$ , 则对于圆上一点  $B$ , 设其反演点为  $B'$ , 由(4.2.4)可知  $\triangle AOB \sim \triangle B'OA'$ , 从而  $\angle B'A'O = \angle ABO = 90^\circ$ , 因此点  $B'$  在过  $A'$  且垂直于  $OA$  的直线上, 从而过反演中心的圆的反演像为一条不过  $O$  的直线, 且  $A' = f(A)$  就是点  $O$  在  $A'B'$  上的射影. 反之同理.  $\square$

**Theorem 4.2.7.** 相切的曲线<sup>(9)</sup>在反演变换后仍相切, 相离的曲线在反演变换后仍相离, 相交的曲线在反演变换后仍相交.

*proof.* 证明是容易的, 可仿照(3.1.15)的证明完成, 具体留给读者.  $\square$

(9) 这里的曲线也包括直线, 后同.

**Theorem 4.2.8.** 反演变换保角, 即两曲线的交角在反演前后相同.

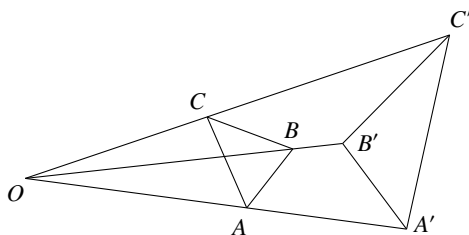


Figure 4.17

*proof.* 设两曲线交于点  $B$ , 在两曲线上分别取临近的一点  $A, C$ , 考虑如图4.17所示的位形. 设点  $A, B, C$  在反演变换下的像分别为点  $A', B', C'$ .

由(4.2.4)可知  $\triangle OCB \sim \triangle OB'C'$  且  $\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$ , 从而

$$\angle C'B'A' = \angle A'B'C' = \angle A'OC' + \angle B'A'O + \angle B'C'O = \angle AOC + \angle ABO + \angle ACO = \angle AOC + \angle ABC.$$

令点  $A, C$  分别沿两曲线趋近于  $B$ , 则  $AB, BC$  趋近于两曲线的切线, 同时  $A'B', B'C'$  也趋近于两曲线的反演像在点  $B'$  处的切线, 而此时  $\angle AOC \rightarrow 0$ , 从而  $\angle ABC$  与  $\angle A'B'C'$  相等.  $\square$

**Remark.** 更进一步地, 在上述证明中,  $\angle ABC = -\angle A'B'C'$ . 因此, 更准确地, 若用有向角的语言, (4.2.8)可表述为“交角变为原来的相反数”.

**Theorem 4.2.9.** 若  $\odot O_1$  与  $\odot O$  正交, 则关于  $\odot O$  的反演保持  $\odot O_1$  不变; 反之, 若  $\odot O_1$  在关于  $\odot O$  的反演下不变, 则  $\odot O_1$  与  $\odot O$  正交.

*proof.* 设  $\odot O_1$  与  $\odot O$  交于点  $X, Y$ , 则显然  $X, Y$  在反演变换下不变, 故  $\odot O_1$  的反演像  $\odot O'_1$  必过点  $X, Y$ .

若两圆正交, 则  $\odot O_1$  在  $X, Y$  处的切线均过点  $O$ , 则反演后  $\odot O'_1$  在  $X, Y$  处的切线也均过点  $O$ , 这只能有  $\odot O'_1 = \odot O_1$ .

若两圆不正交, 则  $\odot O'_1$  在  $X, Y$  处的切线方向改变, 这是因为反演变换将有向角变为了相反数<sup>(10)</sup>, 从而  $\odot O'_1$  必定与  $\odot O_1$  不同. 因此由反演下不变也可推出正交.  $\square$

**Theorem 4.2.10.** (如图4.18) 点  $P, Q$  关于  $\odot O$  互为反演点, 线段  $PQ$  与圆的交点为  $R$ , 则对于圆上任意一个 (不在直线  $PQ$  上的) 一点  $A$ ,  $AR$  平分  $\angle PAQ$ .

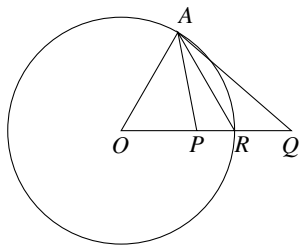


Figure 4.18

*proof.* 由反演的定义可知  $OA^2 = OP \cdot OQ$ , 则  $\triangle OAP \sim \triangle QOA$ , 故  $\angle OAP = \angle OQA$ . 而由  $OA = OR$  得  $\angle OAR = \angle ORA$ , 故  $\angle PAR = \angle OAR - \angle OAP = \angle ORA - \angle Q = \angle QAR$ .  $\square$

下面我们看几个与射影几何相关的性质.

(10) 但正交的情形下, 由于有向角下  $\angle -90^\circ$  与  $\angle 90^\circ$  是等价的, 所以切线方向不改变.

**Theorem 4.2.11.** 给定  $\odot O$ , 对于点  $P$ , 设  $Q$  是直线  $OP$  与点  $P$  的极线  $p$  的交点, 则  $OQ \perp p$  且  $Q = i_{\odot O} P$ .

*proof.* 由极线的定义和反演的定义显然.  $\square$

**Corollary 4.2.12.** 设点  $P, Q$  关于  $\odot O$  互为反演,  $PQ$  与  $\odot O$  交于两点  $M, N$ , 则点  $P, Q, M, N$  成调和点列.

*proof.* 上述结论结合(3.6.10)即证.  $\square$

**Theorem 4.2.13.** 对于关于  $\odot O$  的反演,  $l$  为过  $O$  的直线, 则  $l$  上的点列在反演下交比不变从而为射影变换, 进一步地, 它给出了  $l$  上的一个对合.

*proof.* 设  $\odot O$  半径为  $r$ , 对于  $l$  上四点  $A, B, C, D$ , 以撇号记反演后的对应点, 则

$$\begin{aligned} (A'B', C'D') &= \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}} \div \frac{\overline{A'D'}}{\overline{B'D'}} = \frac{\overline{OC'} - \overline{OA'}}{\overline{OC'} - \overline{OB'}} \div \frac{\overline{OD'} - \overline{OA'}}{\overline{OD'} - \overline{OB'}} = \frac{r^2/\overline{OC} - r^2/\overline{OA}}{r^2/\overline{OC} - r^2/\overline{OB}} \div \frac{r^2/\overline{OD} - r^2/\overline{OA}}{r^2/\overline{OD} - r^2/\overline{OB}} \\ &= \frac{\overline{OB} \cdot (\overline{OA} - \overline{OC})}{\overline{OA} \cdot (\overline{OB} - \overline{OC})} \div \frac{\overline{OB} \cdot (\overline{OA} - \overline{OD})}{\overline{OA} \cdot (\overline{OB} - \overline{OD})} = \frac{-\overline{OB} \cdot \overline{AC}}{-\overline{OA} \cdot \overline{BC}} \div \frac{-\overline{OB} \cdot \overline{AD}}{-\overline{OA} \cdot \overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \div \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = (AB, CD), \end{aligned}$$

从而验证了保交比, 故为一维射影变换 (由(3.5.12)). 进一步, 这一变换关于自身的复合是恒等变换 (由(4.2.3)), 从而此射影变换为对合变换.  $\square$

由上面的定理可以得到如下的结论:

**Proposition 4.2.14.** 设以  $Q$  为圆心的圆  $\omega$  在以  $P$  为中心的反演  $f$  下变为以  $S$  为圆心的  $\omega'$ , 点  $Q$  在反演下变为  $Q'$ , 则点  $P, Q'$  关于  $\omega'$  互为反演.

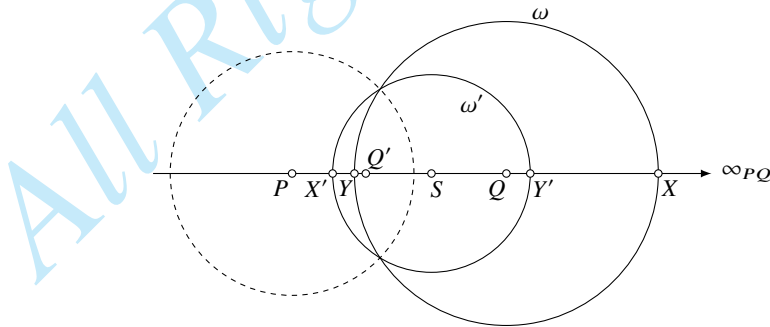


Figure 4.19

*proof.* 设  $PQ$  与  $\omega$  交于  $X, Y$ , 与  $\omega'$  交于  $X', Y'$ , 则显然  $X' = f(X), Y' = f(Y)$ ; 考虑  $PQ$  上的无穷远点  $\infty_{PQ}$ , 则显然  $f(\infty_{PQ}) = P$ .

由(4.2.13)知  $(X'Y', PQ') = (XY, \infty_{PQ}Q) = -1$ , 结合(3.2.16)的“(1) $\Rightarrow$ (5)”知点  $\overline{SP} \cdot \overline{SQ'} = r_{\omega'}^2$  的中关于  $\omega'$  互为反演.  $\square$

最后, 提醒读者注意, 反演变换并不将圆锥曲线变为圆锥曲线, 读者可以在下面的习题中找到这样的例子.

## 练习

**Problem 4.15.** 给定  $\triangle ABC$ ,  $\odot A$  的半径为  $\sqrt{AB \cdot AC}$ , 记  $\angle BAC$  的平分线为  $l$ , 证明: 在变换  $f_l \circ i_{\odot A}^{(11)}$  下:

- (1) 点  $B, C$  的位置互换;
- (2)  $\triangle ABC$  的内心变为  $A$ -旁心.

**Problem 4.16.** 给定  $\odot O$ , 设  $\omega$  是一个不过点  $O$  的圆, 证明:  $i_{\odot O}(\omega)$  的中心为点  $i_{\odot O}(i_{\omega}(O))$ .

**Problem 4.17.** 给定点  $A, B$  以及圆  $\omega$ , 证明下面三个条件是等价的:

- (1) 点  $A, B$  关于  $\omega$  互为反演;
- (2)  $\omega$  是一个关于点  $A, B$  的圆;
- (3) 直线  $AB$  以及  $\odot AB$  均与  $\omega$  正交.

**Problem 4.18.** 设  $\odot O$  的半径为  $R$ ,  $\odot P$  是一个不过点  $O$  的半径为  $r$  的圆, 记  $OP=d$ , 证明:  $i_{\odot O}(\odot P)$  的半径为  $\left| \frac{rR^2}{d^2 - r^2} \right|$ .

**Problem 4.19.** 如下定义三维空间中的反演: 关于半径为  $r$  的球  $O$  的反演变换将空间中一点  $A$  变为直线  $OA$  上满足  $\overline{OA'} \cdot \overline{OA} = r^2$  的一点  $A'$ . 试讨论直线、圆、平面、球面在三维反演下的像的形状.

**Problem 4.20.** \* 设平面中两定点  $A, B$  的距离为  $2a(a > 0)$ , 则称满足  $PA \cdot PB = a^2$  的动点  $P$  的轨迹为一条 Bernoulli 双纽线 (Bernoulli lemniscate). 证明: 等轴双曲线在关于其辅助圆的反演变换下将变为一条 Bernoulli 双纽线 (如图4.20).

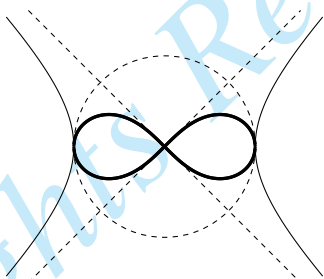


Figure 4.20

## 4.2.2 反演变换的应用

本小节我们来看反演变换的应用. 利用反演变换, 我们可以快速地证明平面几何中的一些结论. 我们首先介绍两个可以用反演快速证明的平面几何中的著名的定理.

**Theorem 4.2.15** (Πτολεμαῖος(Ptolemy)). 对于四边形  $ABCD$ ,  $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$ , 其中等号成立当且仅当  $A, B, C, D$  四点共圆.

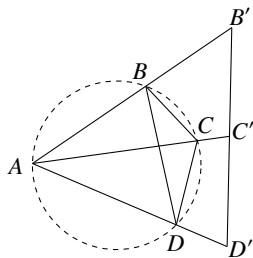


Figure 4.21

(11) 以下用  $f_\gamma$  表示关于元素  $\gamma$  的反射变换 (reflection), 当  $\gamma$  为一个点时,  $f_\gamma$  表示关于该点的中心对称变换; 当  $\gamma$  为一条直线时,  $f_\gamma$  表示关于该直线的轴对称变换.

*proof.* 如图4.21, 以点  $A$  为中心, 任意长度为反演半径作反演, 点  $B, C, D$  的反演点分别为点  $B', C', D'$ . 利用(4.2.4)可得  $C'D' = \frac{CD}{AC \cdot AD}$ ,  $D'B' = \frac{DB}{AD \cdot AB}$ ,  $B'C' = \frac{BC}{AB \cdot AC}$ , 注意  $B'C' + D'C' \geq B'D'$ , 将  $B'C', D'C', B'D'$  的表达式代入即证. 上面的式子中, 等号成立当且仅当点  $B', C', D'$  共线, 则由(4.2.6)知这表明等号成立当且仅当  $A, B, C, D$  四点共圆.  $\square$

**Corollary 4.2.16** (三弦定理 (three-chord lemma)). 设  $AB, AC, AD$  为同一圆上的三条弦, 其中  $AD$  在  $AB, AC$  之间, 则  $AB \sin \angle CAD + AC \sin \angle BAD = AD \sin \angle BAC$ .

*proof.* 根据正弦定理,  $\sin \angle CAD = \frac{2R}{CD}$ ,  $\sin \angle BAD = \frac{2R}{BD}$ ,  $\sin \angle BAC = \frac{2R}{BC}$ , 由此可知这就是 Πτολεμαῖος 定理的直接推论.  $\square$

**Theorem 4.2.17** (Casey). 设  $\odot O_1, \odot O_2, \odot O_3, \odot O_4$  均内切于  $\odot O$  且依次排列, 记  $t_{ij}$  为  $\odot O_i, \odot O_j$  的外公切线长, 则  $t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14} = t_{13}t_{24}$ . (如图4.22)<sup>(12)</sup>

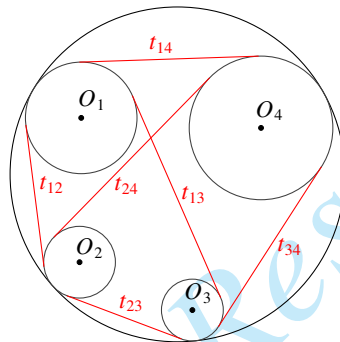


Figure 4.22

为此, 我们先证明如下引理:

**Lemma 4.2.18.** 设  $\odot_1, \odot_2$  的半径分别为  $r_1, r_2$ , 其外公切线长为  $t$ , 则  $\frac{t}{\sqrt{r_1 r_2}}$  在反演变换下不变.

*proof.* 设两圆圆心距离为  $d$ . 若两圆相交, 设其交角的余弦为  $k$ , 由余弦定理可知  $k = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2}$ , 而由几何关系易知  $t = d^2 - (r_1 - r_2)^2$ , 则  $\frac{t}{\sqrt{r_1 r_2}} = 1 - k$ . 由(4.2.8)可知反演时  $k$  不变, 则  $\frac{t}{\sqrt{r_1 r_2}}$  也不变.

对于两圆相离的情形, 直接延拓到复平面即可, 或用之后将在 §4.5 提到的立体几何方法解决.  $\square$

下面回到 Casey 定理的证明.

*proof of (4.2.17).* 设圆  $\odot O_i$  半径为  $r_i$ ,  $R$  为  $\odot O$  上一点, 考虑关于以  $R$  为圆心的任意半径的圆的反演. 则反演后  $\odot O$  变为一直线  $l$ , 四圆在反演后与  $l$  相切, 设切依次为  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , 以撇号表示反演后相应的长度, 显然  $t'_{ij} = A_i A_j$ . 由于  $A_1, A_2, A_3, A_4$  共线, 容易验证  $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$  恒成立<sup>(13)</sup>, 则  $t'_{12}t'_{34} + t'_{23}t'_{14} = t'_{13}t'_{24}$ , 故

$$\frac{t'_{12}}{\sqrt{r'_1 r'_2}} \cdot \frac{t'_{34}}{\sqrt{r'_3 r'_4}} + \frac{t'_{23}}{\sqrt{r'_2 r'_3}} \cdot \frac{t'_{14}}{\sqrt{r'_1 r'_4}} = \frac{t'_{13}}{\sqrt{r'_1 r'_3}} \cdot \frac{t'_{24}}{\sqrt{r'_2 r'_4}},$$

由(4.2.18)知反演前

$$\frac{t_{12}}{\sqrt{r_1 r_2}} \cdot \frac{t_{34}}{\sqrt{r_3 r_4}} + \frac{t_{23}}{\sqrt{r_2 r_3}} \cdot \frac{t_{14}}{\sqrt{r_1 r_4}} = \frac{t_{13}}{\sqrt{r_1 r_3}} \cdot \frac{t_{24}}{\sqrt{r_2 r_4}},$$

则定理中的等式成立.  $\square$

(12) 当四个圆均退化为点时, 就是 Πτολεμαῖος 定理.

(13) 也可借助 Πτολεμαῖος 定理理解, 共线可视为共于一半径无穷大的圆.



**Remark.** 可以知道 Casey 定理有如下的推广:

a.) 设  $\odot O_1, \odot O_2, \odot O_3, \odot O_4$  均与  $\odot O$  相切且依次排列, 若  $O_i, O_j$  与  $\odot O$  均为内切或外切, 记  $t_{ij}$  为  $\odot O_i, \odot O_j$  的外公切线长; 若  $O_i, O_j$  与  $\odot O$  一内切一外切, 记  $t_{ij}$  为  $\odot O_i, \odot O_j$  的内公切线长. 那么,  $t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14} = t_{13}t_{24}$ .

b.) Casey 定理的逆定理也成立, 即若有  $t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14} = t_{13}t_{24}$ , 则这四个圆  $O_1, O_2, O_3, O_4$  同时与某一个圆相切<sup>(14)</sup>. 有时, 若不确定  $O_1O_2O_3O_4$  是否为常规意义上的四边形<sup>(15)</sup>, 我们将定理的等式表达为, 存在某种正负号的选取, 使得  $|t_{12}t_{34} \pm t_{23}t_{14}| = t_{13}t_{24}$ .

c.) 当其中一个或多个圆退化为点时, Casey 定理仍然成立, 此时, 对于一点和一圆, “公切线长”即变为过点引圆的切线的切线长; 对于两个点, “公切线长”即变为两点的距离. 注意, 在实欧氏平面内, 过圆内一点无法引圆的切线, 此时可通过拓展到复欧氏平面中进行处理: 由切割线定理, 过某圆  $O$  外一点  $P$  任引  $\odot O$  的一条割线, 交  $\odot O$  于  $A, B$  两点, 则  $P$  点对  $\odot O$  引切线得到的切线长为  $\sqrt{PA \cdot PB}$ ; 将上述结论拓展, 对于  $\odot O$  内一点  $P$ , 任作一弦  $AB$ , 则点  $P$  对  $\odot O$  引切线的切线长就可视为  $\sqrt{PA \cdot PB}$ <sup>(16)</sup>.

下面我们再来看两个用反演变换解决几何问题的例子, 第一个例子与圆锥曲线有关.

**Example 4.2.19.** 给定抛物线, 证明: 若它的某内接三角形的垂心为其焦点, 则其内切圆为一个定圆.

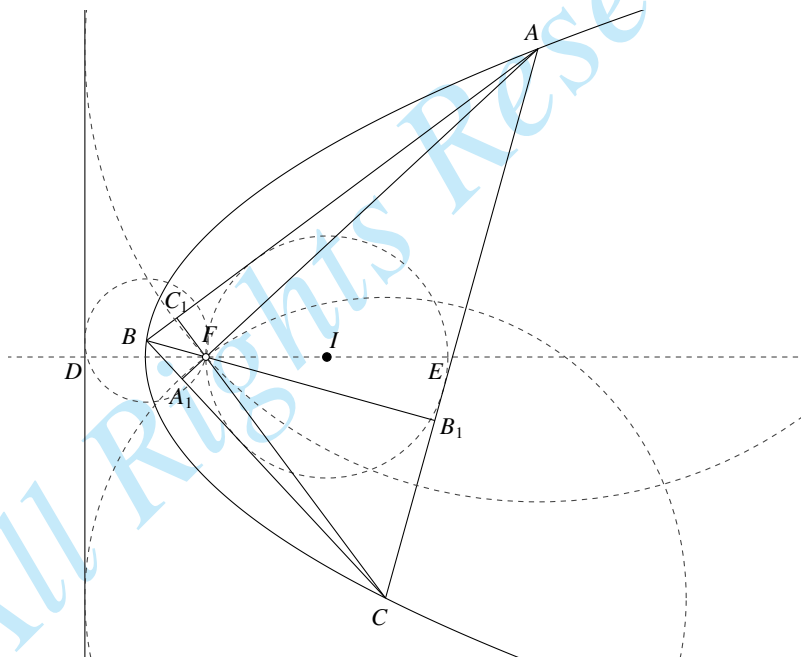


Figure 4.23

**solution.** 由(0.5.22),  $AF \cdot FA_1 = BF \cdot FB_1 = CF \cdot FC_1 = t$ , 其中  $t = 4R^2 \cos A \cos B \cos C$ ,  $R$  为  $\odot(ABC)$  半径. 另一方面, 由抛物线的定义,  $\odot(A, AF), \odot(B, BF), \odot(C, CF)$  均与准线相切, 如图4.23.

考虑一个以  $F$  为中心, 反演半径为  $\sqrt{-2t}$  的反演变换<sup>(17)</sup>, 利用(4.2.6), 并注意点  $F$  在  $\odot A, \odot B, \odot C$  上的对径点在反演下分别变为点  $A_1, B_1, C_1$ , 可知  $i(\odot A) = BC, i(\odot B) = AC, i(\odot C) = AB$ . 由于反演前准线  $l$  与这三个圆相切, 则反演下  $i(l)$  与  $AB, BC, CA$  均相切, 即  $i(l)$  为  $\triangle ABC$  的内切圆  $\odot I$ , 同时由(4.2.6)知  $F \in i(l)$ , 从而  $\triangle ABC$  的垂心  $F$  在  $\odot I$  上.

(14) 其中的公切线长已经过“a.”的推广, 具体是内切还是外切需结合实际图形以及“a.”中的说明来判断.

(15) 例如线段  $O_1O_2, O_3O_4$  相交的“扭四边形”.

(16) 注意这是一个虚数; 在复平面中直接计算也可以证明这一表达式的正确性.

(17) 这就是一个反演半径为虚数的例子

记内切圆半径为  $r$ , 则由(0.6.17)知  $FI^2 = 2r^2 - t$ , 但  $FI = r$ , 从而  $r^2 = t$ . 令点  $D$  为  $l$  与抛物线的轴的交点,  $E$  为  $\odot I$  与轴的另一个交点, 注意点  $D, E$  互为反演, 则  $DF \cdot FE = 2t = 2r^2$ , 代入  $EF = 2r$  可知  $EF = r$ . 从而  $\odot I$  为定圆, 它的圆心在抛物线的轴上且到焦点的距离等于焦点到准线的距离, 它的半径等于焦点到准线的距离.  $\square$

下面再给出一个三角形中的例子.

**Example 4.2.20.** (如图4.24) 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A$  的平分线交线段  $BC$  于点  $D$ , 点  $N$  是线段  $BC$  上异于点  $D$  的一点, 取出线段  $AD$  的中垂线与  $\odot(ABN), \odot(ACN)$  的交点中相距最远的两者  $X, Y$ , 证明: 点  $X, Y, N, D$  共圆.

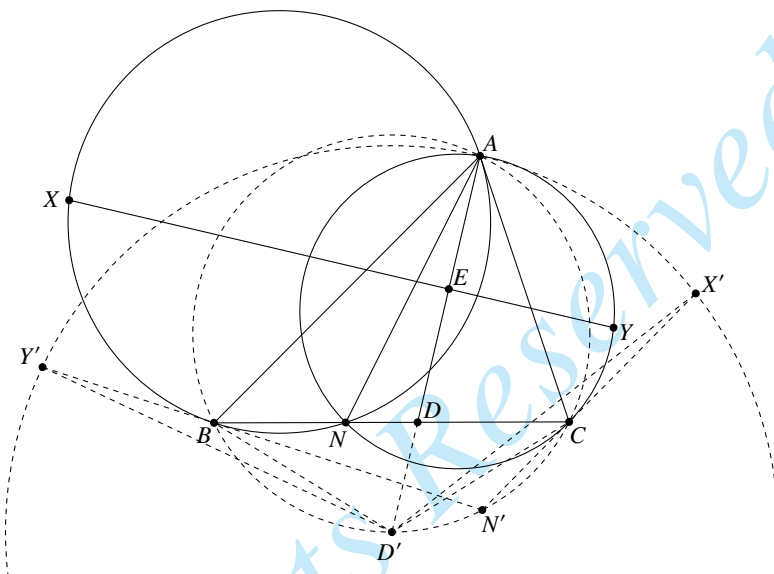


Figure 4.24

*solution.* 设  $\omega$  是一个以  $A$  为圆心, 半径为  $r = \sqrt{AB \cdot AC}$  的圆. 设变换  $f = f_{AD} \circ i_\omega$ , 则易知  $f(B) = C, f(C) = B^{(18)}, f(BC) = \odot(ABC), f(AD) = AD$ , 注意  $D = BC \cap AD$ , 则  $D \triangleq f(D)$  是直线  $AD$  与  $\odot ABC$  的另一交点; 类似地,  $N' \triangleq f(N)$  是  $f_{AD}(AN)$  与  $\odot ABC$  的另一交点. 由于  $\odot(ABN), \odot(ACN)$  过反演中心  $A$  且过点  $N$ , 则它们在  $f$  下分别变为直线  $N'C, N'B$ .

设  $AD \cap XY = E$ , 则  $\overline{Af(E)} \cdot \overline{AE} = \overline{AD} \cdot \overline{AD'}$ , 而  $\overline{AD} = 2\overline{AE}$ , 故  $\overline{Af(E)} = 2\overline{AD'}$ . 又注意  $AE \perp XY$  于点  $E$ , 则  $f(E)$  即是圆  $f(XY)$  上点  $A$  的对径点, 则  $f(XY)$  就是圆心在点  $D'$  处且过点  $A$  的圆  $\odot D'$ . 那么, 点  $X' \triangleq f(X), Y' \triangleq f(Y)$  分别为射线  $N'C, N'B$  与  $\odot D'$  的交点.

由于  $AD$  为  $\angle BAC$  的平分线, 则  $D'$  为  $\widehat{BD'C}$  的中点, 则  $BD' = CD'$ . 由于  $B, C, D', N'$  共圆, 则  $\angle D'BN' = \angle D'CN'$ , 即  $\angle Y'BD' = \angle X'CD'$ , 结合  $Y'D' = X'D'$  可得  $\triangle Y'BD' \cong \triangle X'CD'$ . 这表明  $\triangle X'CD'$  可由  $\triangle Y'BD'$  绕点  $D'$  旋转得到, 而旋转变换下对应直线转过的角相同, 即有  $\angle(Y'D', X'D') = \angle(Y'B, X'C)$ , 即  $\angle Y'D'X' = \angle Y'N'X'$ , 则有  $X', Y', N', D'$  共圆, 对应的原像点  $X, Y, N, D$  共圆.  $\square$

由上述例子可知, 利用反演变换解决几何问题的关键便是找好反演的基圆, 使原本复杂的结构变得简单. 而在上述例子中, 我们应用了与 [4.15] 一致的变换: 用反射去复合反演. 这种变换方式被称为轴反射反演<sup>(19)</sup>, 它可以将三角形的两个顶点互换, 从而具有很多好的性质. 我们也将之后介绍“伪圆”时再次应用这种轴反射反演变换.

(18) 这也是 [4.15] 中的结论.

(19) 在一些地方也被称为 Iran 式反演 或  $\sqrt{bc}$ -反演 (当然, 类似地, 若是关于  $\angle ABC$  的平分线的反射复合一个以点  $B$  为中心的反演, 则应该称作  $\sqrt{ac}$ -反演, 同理可以有  $\sqrt{ab}$ -反演).

## 练习

**Problem 4.21.** 设锐角  $\triangle ABC$  的垂三角形为  $\triangle A'B'C'$ , 圆  $\omega$  同时与  $\odot(B'C'A), \odot(C'BA'), \odot(A'CB')$  外切, 证明:  $\omega$  也与  $\odot(ABC)$  相切.

**Problem 4.22.** 给定  $\triangle ABC$ , 设点  $B'$  为点  $B$  关于  $AC$  对称点, 点  $C'$  为点  $C$  关于  $AB$  的对称点, 设  $\odot(ABB') \cap \odot(ACC') = A, P$ , 证明: 直线  $AP$  过  $\triangle ABC$  的外心.

**Problem 4.23.** 证明: 对于给定的三角形, 其内心、外心以及切点三角形的垂心共线. *Hint.* 考虑关于内切圆的反演.

**Problem 4.24.** 设点  $K$  为  $\triangle ABC$  的  $\angle A$  的平分线上的一点,  $\triangle ABC$  的南极点三角形为  $\triangle DEF$ ,  $ED, FD$  与  $C$  的另一交点分别为点  $G, H$ , 在射线  $AB, AC$  上分别取点  $M, N$ , 使得点  $A, I, G, M; A, I, H, N$  分别共圆, 其中点  $I$  为  $\triangle ABC$  的内心. 证明:  $BC \parallel MN$ .

**Problem 4.25.** 给定平面中三圆, 如何利用直尺和圆规作出同时与这三个圆相切的圆?

**Problem 4.26.** 设  $ABCDEFGH$  为正七边形, 证明:  $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$ .

**Problem 4.27.** 设  $\odot O_1, \odot O_2, \odot O_3, \odot O_4$  两两外切, 它们的半径分别为  $r_1, r_2, r_3, r_4$ , 证明:  $\sum_{i=1}^4 \frac{2}{r_i^2} = \left( \sum_{i=1}^4 \frac{1}{r_i} \right)^2$ .

**Problem 4.28.** 证明: 圆锥曲线的内接三角形的某一等心在它的主轴上, 当且仅当该三角形的外接圆与该圆锥曲线的辅助圆相切.<sup>(20)</sup> *Hint.* Casey 定理.

### 4.3 Ceva 三角形与垂足三角形

在本节中, 我们将介绍两个平面几何中的重要概念——Ceva 三角形与垂足三角形.

#### Ceva 三角形

**Definition 4.3.1.** (如图4.25) 给定  $\triangle ABC$  及点  $P$ , 设  $A_1 = AP \cap BC, B_1 = BP \cap AC, C_1 = CP \cap AB$ , 则  $\triangle ABC$  称为点  $P$  关于  $\triangle ABC$  的 Ceva 三角形 (cevia triangle),  $AA_1, BB_1, CC_1$  称为点  $P$  关于  $\triangle ABC$  的三条 Ceva 线 (Cevian),  $\triangle A_1B_1C_1$  的外接圆称为点  $P$  关于  $\triangle ABC$  的 Ceva 圆 (cevia circle); 同时称  $\triangle ABC$  为点  $P$  关于  $\triangle A_1B_1C_1$  的 反 Ceva 三角形 (anticevia triangle).

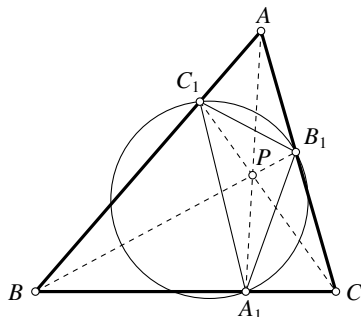


Figure 4.25

根据上述定义, 显然一点的 Ceva 三角形与原三角形是透视的, 因此它们有透视轴, 故而我们可以引入如下的定义, 尽管我们暂时还不会用到它:

(20) 请记得, 为统一三种圆锥曲线的某些性质, 我们将抛物线在其顶点处的切线也称为它的“辅助圆”; 抛物线的“主轴”就是它的轴.

**Definition 4.3.2.** 给定  $\triangle ABC$  及一点  $P$ , 设  $P$  点关于  $\triangle ABC$  的 Ceva 三角形为与  $\triangle ABC$  的透视轴为直线  $l$ , 则称  $l$  为点  $P$  关于三角形  $ABC$  的三线性极线 (trilinear polar), 称点  $P$  称为  $l$  的三线性极点 (trilinear pole).

从 Ceva 三角形的定义中, 作 Ceva 三角形是直接的, 那么如何作出反 Ceva 三角形呢? 下面的命题给出了一种作法:

**Proposition 4.3.3.** 可用如下方法作出点  $P$  关于  $\triangle ABC$  的反 Ceva 三角形:

作点  $P$  的 Ceva 三角形  $\triangle A_1B_1C_1$ ,  $A_1B_1 \cap AB = M$ ,  $AA_1 \cap CM = A'$ ,  $BB_1 \cap CA' = B'$ ,  $CC_1 \cap BA' = C'$ , 则  $\triangle A'B'C'$  即为所求.

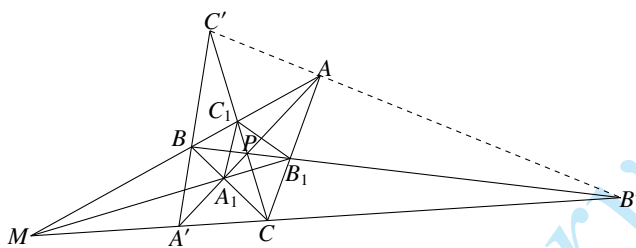


Figure 4.26

*proof.* 如图4.26所示, 我们只需要证明点  $C', B', A$  共线, 而这几乎是显然的, 只要对  $\triangle MBA'$  与  $\triangle B_1CP$  应用 Desargues 定理即可, 注意它们的透视中心为  $A_1$ , 即证.  $\square$

利用射影几何的知识, Ceva 三角形还有如下的重要性质:

**Theorem 4.3.4** (Ceva 三角形的调和性质). 给定点  $P$  与  $\triangle ABC$ , 设点  $P$  的 Ceva 三角形<sup>(21)</sup>为  $\triangle A_1B_1C_1$ ,  $\triangle A_1B_1C_1$  各边与对应的 Ceva 线的交点分别为点  $A_2, B_2, C_2$ , 则  $(A, P, A_2, A_1), (B, P, B_2, B_1), (C, P, C_2, C_1)$  分别为调和点列 (如图4.27).

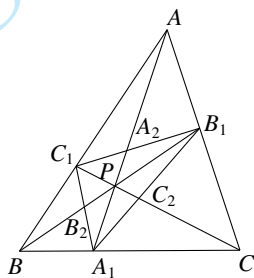


Figure 4.27

*proof.* 对于完全四点形  $ABCP$ , 由完全四点形的调和性质(3.5.10)得直线  $B_1C, B_1B, B_1A_1, B_1C_1$  是调和线束<sup>(22)</sup>, 而  $B_1C, B_1B, B_1A_1, B_1C_1 \bar{\cap} (P, A, A_1, A_2)$ , 则  $P, A, A_1, A_2$  为调和点列, 同理有另两组调和.  $\square$

另外, 我们还有外接 Ceva 三角形的概念:

(21) 提醒读者注意, 我们之前已经讲过, 在不引起歧义的情况下, 可省略参考三角形, 在此处即指点  $P$  关于  $\triangle ABC$  的 Ceva 三角形. 以后也是如此.

(22) 这里的四点  $A, B, C, P$  构成了一个凹四边形, 但完全四点形的调和性质仍然存在, 因为射影几何中的定理与这种位置关系无关. 一些读者可能对这样来使用定理感到不大习惯, 但这样的应用是很常见的, 需要读者快速地适应.

**Definition 4.3.5.** (如图4.28) 对于  $\triangle ABC$  内一点  $P$ ,  $AP \cap \odot(ABC) = A, A'$ , 类似定义点  $B', C'$ , 则称  $\triangle A'B'C'$  为点  $P$  关于  $\triangle ABC$  的外接 Ceva 三角形/圆 Ceva 三角形 (circumcevian triangle).

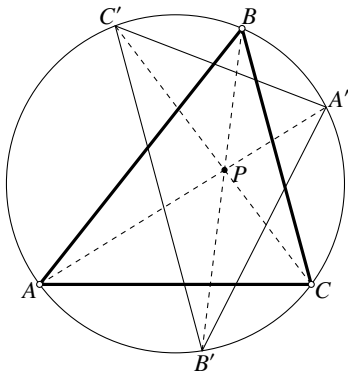


Figure 4.28

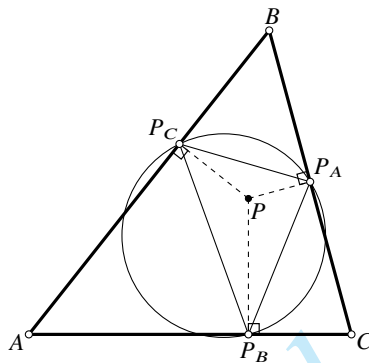


Figure 4.29

### 垂足三角形

**Definition 4.3.6.** (如图4.29) 给定  $\triangle ABC$  及点  $P$ , 过点  $P$  作  $\triangle ABC$  三边的垂线, 以三个垂足为顶点的  $\triangle P_A P_B P_C$  称为点  $P$  关于  $\triangle ABC$  的垂足三角形 (pedal triangle), 其外接圆称为点  $P$  关于  $\triangle ABC$  的垂足圆 (pedal circle);  $\triangle ABC$  称为  $P$  关于  $\triangle P_A P_B P_C$  的反垂足三角形 (antipedal triangle).

实际上, 并非平面中的所有点都能有传统意义上的垂足三角形, 由 Simson 定理可知有如下结论:

**Theorem 4.3.7.** 对于  $\triangle ABC$  与一点  $P$ , 点  $P$  垂足三角形退化 (此时三个垂足共线) 当且仅当  $P \in C$ .

利用位似的定义, 显然有以下的结论:

**Theorem 4.3.8.** 一点 [关于某三角形] 的反射三角形与该点的垂足三角形关于该点 2:1 位似.

对于垂足三角形, 我们还有如下与 Ceva 三角形相联系的重要定理.

**Theorem 4.3.9.** 点  $P$  关于  $\triangle ABC$  的垂足三角形与外接 Ceva 三角形顺相似.(如图 4.30)

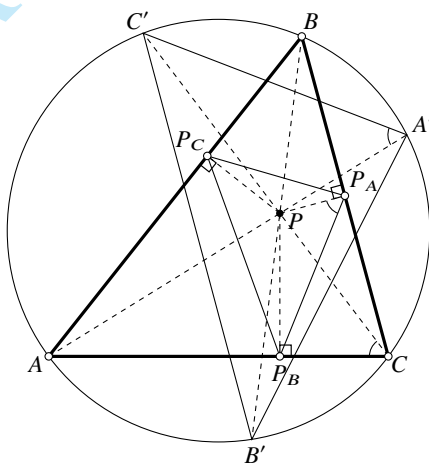


Figure 4.30

*proof.* 考虑图4.30的位形, 设垂足三角形为  $\triangle P_A P_B P_C$ , 外接 Ceva 三角形为  $\triangle A'B'C'$ , 则  $\angle AA'C' = \angle ACC' \stackrel{P, P_A, C, P_B \text{ 共圆}}{=} \angle P_B P_A P$ . 同理  $\angle AA'B' = \angle P_C P_A P$ , 从而  $\angle P_C P_A P_B = \angle C' A' B'$ . 同理有另外两个内角对应相等, 从而  $\triangle P_C P_A P_B \sim \triangle A'B'C'$ .  $\square$

**Theorem 4.3.10.** 给定  $\triangle ABC$ , 关于  $C$  互为反演的两点的 [关于  $\triangle ABC$  的] 外接 Ceva 三角形逆相似.

*proof.* 如图 4.31, 设点  $P, Q$  互为反演点, 其外接 Ceva 三角形分别为  $\triangle A'B'C'$  和  $\triangle A''B''C''$ , 线段  $PQ \cap \odot(ABC) = R$ . 由(4.2.10)可知  $\angle PAR = \angle QAR$ , 从而  $\widehat{A'R} = \widehat{A''R}$ , 则点  $A', A''$  关于  $PQ$  对称. 对  $B', B''$  与  $C', C''$  是同理的, 从而  $\triangle A'B'C'$  与  $\triangle A''B''C''$  关于  $PQ$  对称, 从而原命题得证.  $\square$

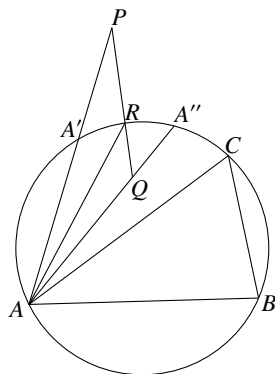


Figure 4.31

**Corollary 4.3.11.** 关于  $\triangle ABC$  的外接圆互为反演的两点的垂足三角形逆相似.

*proof.* 由(4.3.9)(4.3.10)即证.  $\square$

#### 练习

**Problem 4.29.** 证明: 无穷远直线关于  $\triangle ABC$  的三线性极点就是  $\triangle ABC$  的重心.

**Problem 4.30.** 给定  $\triangle ABC$  与一点  $P$ , 点  $P$  的 Ceva 圆与三边的 [异于  $P$  的 Ceva 三角形的三个顶点的] 第二交点分别为点  $A', B', C'$ , 证明: 直线  $AA', BB', CC'$  交于一点  $P'$ . (称点  $P'$  是  $P$  关于  $\triangle ABC$  的 Ceva 圆共轭点 (cyclocevian conjugate).)

**Problem 4.31.** 设  $\triangle ABC$  的垂心为点  $H$ , 不在  $C$  上的点  $P, Q$  的连线过点  $H$  且它们在点  $H$  的同侧. 若  $HP > HQ$ , 证明: 点  $P$  的垂足三角形的周长大于点  $Q$  的垂足三角形

**Problem 4.32.** 给定  $\triangle ABC$ , 请用尺规确定点  $S$ , 使得点  $S$  关于  $\triangle ABC$  的垂足三角形为正三角形

**Problem 4.33 (Boutté).** 证明: 三角形的映像三角形与九点圆圆心的垂足三角形关于重心 4:1 位似.

**Problem 4.34.** 给定  $\triangle ABC$  与一点  $P$ , 设  $\triangle ABC$  的外接圆半径为  $R$ , 外心为  $O$ , 证明:  $P$  的垂足三角形的面积等于  $\frac{|PO^2 - R^2|}{4R^2} \cdot S_{\triangle ABC}$ .

**Problem 4.35.** 给定  $\triangle ABC$  与一点  $P$ , 由(4.3.9)可知  $P$  的垂足三角形与外接 Ceva 三角形旋似, 设将此外接 Ceva 三角形变为垂足三角形的旋似变换的对应的旋转角 (有向) 为  $\theta$ , 证明:

- (1)  $\angle PBA + \angle PCB + \angle PAC = 90^\circ + \theta$ ;
- (2)  $|\theta|$  等于  $N$  与点  $P$  的垂足圆间的交角.

## 4.4 等角共轭和等截共轭

本节三角形中的两种特殊的几何关系——等角共轭和等截共轭.



### 4.4.1 等角共轭及其基本性质

**Definition 4.4.1.** (如图4.32) 对于异于  $\triangle ABC$  的顶点的一点  $P$ , 分别作直线  $PA, PB, PC$  关于  $\angle A, \angle B, \angle C$  的平分线的反射直线, 则三条直线交于一点  $P'$  ( $P'$  可以为无穷远点). 称点  $P'$  是点  $P$  关于  $\triangle ABC$  的等角共轭点 (isogonal conjugate); 这样的变换方式将一点变为另一点, 称这样的变换为等角共轭变换. 同时, 将直线  $AP', BP', CP'$  分别称为直线  $AP, BP, CP$  关于  $\angle A, \angle B, \angle C$  的等角线.

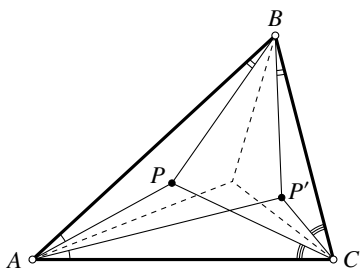


Figure 4.32

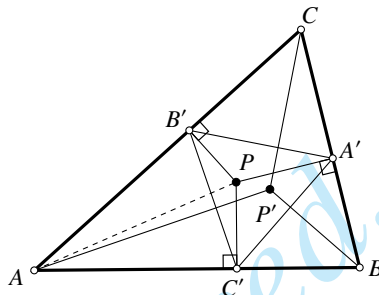


Figure 4.33

上述定义中, 若点  $P'$  存在, 则其必定唯一, 而点  $P'$  的存在性由下述命题保证:

**Proposition 4.4.2.** (如图4.33) 对于  $\triangle ABC$  内一点  $P$ , 从点  $A, B, C$  分别向  $P$  的垂足三角形的对应边引垂线, 则三条垂线交于点  $P$  的等角共轭点  $P'$ .

*proof.*  $\angle PAB' \xrightarrow{P, B', A, C' \text{ 共圆}} \angle PC'B' \xrightarrow{PC' \perp AB, P'A \perp B'C'} \angle P'AC'$ , 同理有另两个角度关系, 则  $P'$  满足等角共轭点的定义.  $\square$

以下, 我们用  $\mathcal{Q}\triangle ABC P$  表示点  $P$  关于  $\triangle ABC$  的等角共轭点, 在不引起歧义的情况下可简记为  $\mathcal{Q}P$ . 我们先给出等角共轭的最基本的性质.

**Theorem 4.4.3.** 关于  $\triangle ABC$  的等角共轭变换具有如下性质:

- (1) 若点  $P$  不在三角形的边上, 则  $\mathcal{Q}(\mathcal{Q}P) = P$ , 即  $\mathcal{Q}^2 = \text{id}$ .<sup>(23)</sup>
- (2) 三角形边上一点的等角共轭像为与其相对的顶点.
- (3) 在等角共轭变换下, 平面内有且仅有四个不变的点——三角形的内心和三个旁心.
- (4) 若  $P \in \odot(ABC)$ , 则点  $\mathcal{Q}P$  为一无穷远点, 且  $\mathcal{Q}P$  在垂直于  $S(P)$  的方向上.

*proof.* (1)(2)(3) 是显然的, 而 (4) 可通过(4.4.2)取  $P$  在外接圆上的极限来得到. 下面给出 (4) 的另一种证明.

考虑图4.34所示的位形, 对于  $\triangle ABC$ , 设点  $P$  在  $AC, AB$  上的射影分别为  $P_b, P_c$ , 直线  $AP$  关于  $\angle BAC$  的平分线的对称直线与  $S(P) = P_bP_c$  交于点  $X$ .

注意  $A, P_c, P_b, P$  四点共圆, 可得  $\angle AP_cP_b = 180^\circ - \angle APP_b = 90^\circ + \angle PAP_b = 90^\circ + \angle XAP_c$ , 故  $\angle AXP_b = \angle AP_cP_b - \angle XAP_c = 90^\circ$ . 同理  $PB, PC$  的关于对应角平分线的对称像也垂直于  $S(P)$ , 即证.

(23) 因此, 在等角共轭变换下, 点  $P$  与  $\mathcal{Q}P$  的地位是平等的, 我们可以说点  $P, \mathcal{Q}P$  是等角共轭的, 或说点  $P, \mathcal{Q}P$  是一组等角共轭点.



等角共轭点还有如下度量性质:

**Proposition 4.4.8.** 对于  $\triangle ABC$ , 设  $AA_1, AA_2$  是  $\angle A$  的一对等角线, 且与  $BC$  边分别交于点  $A_1, A_2$ , 则  $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{BA_2}{CA_2}$ .

*proof.* 由分角定理,  $\frac{AB \sin \angle BAA_1}{AC \sin \angle CAA_1} = \frac{BA_1}{CA_1}$ , 同理  $\frac{AB \sin \angle BAA_2}{AC \sin \angle CAA_2} = \frac{BA_2}{CA_2}$ , 两式相乘, 注意  $\angle BAA_2 = -\angle CAA_1, \angle CAA_2 = -\angle BAA_1$  即得  $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{BA_2}{CA_2}$ .  $\square$

**Theorem 4.4.9.** 对于  $\triangle ABC$ , 设一点  $P$  到三边  $BC, CA, AB$  的有向距离之比为  $\alpha:\beta:\gamma$ , 则  $gP$  到三边的有向距离之比为  $\alpha^{-1}:\beta^{-1}:\gamma^{-1}$ .

*proof.* 利用张角定理得

$$\begin{aligned} \text{dist}(gP, AB) : \text{dist}(gP, AC) &= \overline{AgP} \sin \angle BA gP : \overline{AgP} \sin \angle gPAC \\ &= \sin \angle BA gP : \sin \angle gPAC = \sin \angle PAC : \sin \angle BAP \\ &= \overline{AP} \sin \angle PAC : \overline{AP} \sin \angle BAP = \beta : \gamma = \gamma^{-1} : \beta^{-1}, \end{aligned}$$

到其余边的距离之比同理.  $\square$

**Proposition 4.4.10.** 给定  $\triangle ABC$ , 外接圆半径为  $R$ ,  $O$  为外心. 设  $Q = gP$ ,  $P, Q$  的垂足三角形分别为  $\triangle P_A P_B P_C, \triangle Q_A Q_B Q_C$ , 则  $R^2 - OP^2 = 2R \cdot \frac{PP_B \cdot PP_C}{QQ_A}$ .

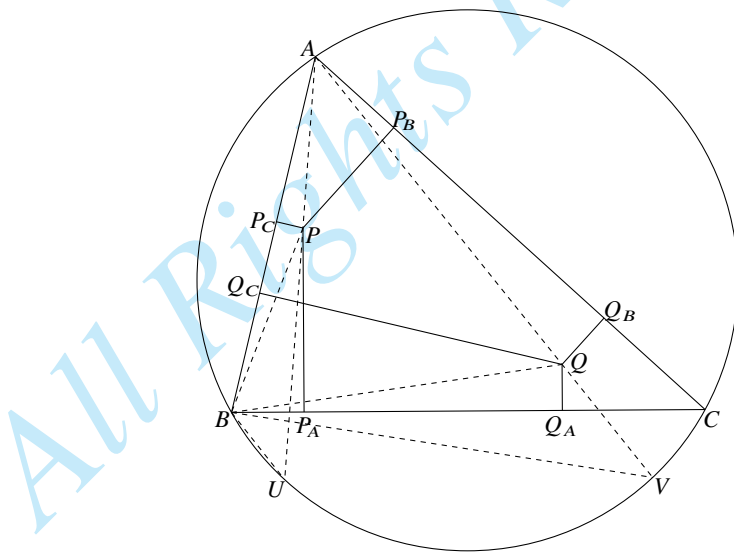


Figure 4.36

*proof.* 如图4.36, 延长  $AP, AQ$ , 与外接圆的第二交点分别为  $U, V$ . 由于  $\angle BUP = \angle QVB, \angle BPU = \angle ABP + \angle BAP = \angle QBC + \angle QAC = \angle QBC + \angle VBC = \angle QBV$ , 故  $\triangle BPU \sim \triangle QBV$ . 因此

$$\begin{aligned} R^2 - OP^2 &\stackrel{\text{圆幂定理}}{=} AP \cdot PU = AP \cdot \frac{BV \cdot BP}{BQ} \stackrel{\triangle BPP_C \sim \triangle BQQ_A}{=} AP \cdot BV \cdot \frac{PP_C}{QQ_A} \stackrel{UV \parallel BC \Rightarrow BV = CU}{=} AP \cdot CU \cdot \frac{PP_C}{QQ_A} \\ &\stackrel{\text{正弦定理}}{=} AP \cdot 2R \sin \angle UAC \cdot \frac{PP_C}{QQ_A} = 2R \cdot PP_B \cdot \frac{PP_B \cdot PP_C}{QQ_A}. \end{aligned} \quad \square$$

**Remark.** 在上述结论中, 令  $P=Q=I$  为内心, 即得 Euler-Chapple 公式 ([0.62]):  $OI^2 = R^2 - 2Rr$ , 其中  $r$  为内切圆半径.

**Proposition 4.4.11.** 对于  $\triangle ABC$ ,  $Q = \varrho P$ ,  $AP, AQ$  与外接圆的第二交点分别为点  $D, E$ ,  $AQ \cap BC = K$ , 则  $\frac{AP}{PD} = \frac{QK}{KE}$ .

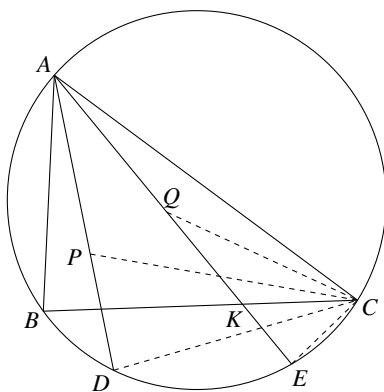


Figure 4.37

*proof.* 如图4.37, 与(4.4.10)的证明同理有  $\triangle PDC \sim \triangle CEQ$ , 则  $\frac{PD}{DC} = \frac{CE}{EQ} \Rightarrow PD \cdot EQ = DC \cdot CE$ .

由  $\angle ADC = \angle CEK$  以及  $\angle DAC = \angle BEA = \angle ECK$  知  $\triangle ADC \sim \triangle CEK$ , 则  $\frac{AD}{DC} = \frac{CE}{EK} \Rightarrow AD \cdot EK = DC \cdot CE$ . 故  $AD \cdot EK = PD \cdot EQ \Rightarrow \frac{AD}{PD} = \frac{EQ}{EK}$ .

那么  $\frac{AP}{PD} = \frac{AD - PD}{PD} = \frac{AD}{PD} - 1 = \frac{EQ}{EK} - 1 = \frac{EQ - EK}{EK} = \frac{QK}{KE}$ .  $\square$

在本节的最后, 我们给出等角共轭的一个应用的例子——著名的 Morley 定理.

**Theorem 4.4.12 (Morley).**  $\triangle ABC$  的相邻角的三等分线的交点组成正三角形 (如图4.38,  $\triangle A_1B_1C_1$  为正三角形).

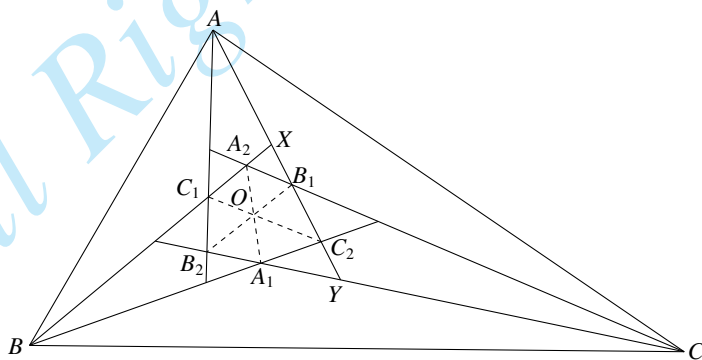


Figure 4.38

*proof.* 如图4.38, 设六条角平分线交于  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  六点. 由三等分线知  $A_1, A_2$  等角共轭, 故  $C_2(B, C_1, A_2, X) \stackrel{(BX)}{\bar{\cap}} A_2(B, C_1, A_2, X) \bar{\cap} A_2(C, Y, A_1, B_2) \stackrel{(CB_2)}{\bar{\cap}} B_1(C, Y, A_1, B_2) \bar{\cap} B_1(A_1, B_2, C, Y)$ , 其中第二个射影对应是由于将所有直线关于角平分线作对称后交比不变, 最后一者利用了(3.2.9)(1).<sup>(26)</sup>

注意, 在  $C_2(B, C_1, A_2, X) \bar{\cap} B_1(A_1, B_2, C, Y)$  这一线束间的射影对应中, 顶点的连线  $C_2B_1$  自对应, 从而由(3.5.6)知它是一个透视对应, 故对应直线的交点共线, 即  $A_1 = C_2B \cap B_1A_1, O = C_1C_1 \cap B_1B_2, A_2 = C_1A_2 \cap B_1C$  共线, 从而  $C_1C_2, B_1B_2, A_1A_2$  交于一点.

(26) 请记得, 保交比的一维基本形间的变换就是一维射影变换.

注意  $C_1$  为  $\triangle ABC_2$  的内心, 从而  $\angle AC_1C_2 = 90^\circ + \frac{\angle ABC_2}{2} = 90^\circ + \frac{\angle ABC}{3}$ ;

注意  $B_1$  为  $\triangle AB_2C$  的内心, 故  $\angle AB_2B_1 = 90^\circ - \frac{\angle B_2AC}{2} - \frac{\angle B_2CA}{2} = 90^\circ - \frac{\angle BAC}{3} - \frac{\angle BCA}{3}$ .

由此有  $\angle B_2OC_1 = \angle AC_1C_2 - \angle AB_2B_1 = \frac{\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB}{3} = 60^\circ$ , 同理可得  $\angle C_1OA_2 = \angle A_2OB_1 = \angle B_1OC_2 = \angle C_2OA_1 = \angle A_1OB_2 = 60^\circ$ .

注意  $A_1$  为  $\triangle BA_2C$  的内心, 故  $\angle BA_2A_1 = \angle CA_2A_1$ , 结合  $\angle C_1OA_2 = \angle B_1OA_2$  可知  $\triangle C_1A_2O \cong \triangle B_1A_2O$ , 故  $C_1O = B_1O$ , 同理  $A_1O = B_1O$ , 故  $\triangle A_1B_1C_1$  为以  $O$  为中心的等边三角形.  $\square$

在上面的 Morley 定理中, 所得的正三角形  $\triangle A_1B_1C_1$  称为  $\triangle ABC$  的 [第一]Morley 三角形 (first Morley triangle), Morley 三角形的中心被称为  $\triangle ABC$  的 [第一]Morley 中心 (first Morley center). 而三角形的三个角的角平分线两个的交点一共有六个, 除去 Morley 三角形的三个顶点外的三个交点组成的三角形称为  $\triangle ABC$  的 [第二]Morley 副三角形 (first Morley adjunct triangle), 即图 4.38 中的  $\triangle A_2B_2C_2$ .

另外, 由上述定理的证明过程还可知道:

**Proposition 4.4.13.** Morley 三角形与 Morley 副三角形透视, 且透视中心为 Morley 中心.

#### 练习

**Problem 4.36.** 给定  $\triangle ABC$ , 对于点  $P, Q$ , 证明: 它们等角共轭, 当且仅当  $\angle CPA + \angle CQA = \angle CBA$  且  $\angle APB + \angle AQB = \angle ACB$ .

**Problem 4.37.** 等边三角形的内切圆的等角共轭像是以三角形三个顶点为尖点的三尖瓣线.

**Problem 4.38.** \* 给定  $\triangle ABC$ , 证明:

(1) 存在唯一的与  $\triangle ABC$  共外接圆的  $\triangle XYZ$ , 使得  $\triangle XYZ$  的每一顶点与其等角共轭点的连线均与外接圆相切, 称  $\triangle XYZ$  为  $\triangle ABC$  的外接切线三角形 (circumtangential triangle);

(2)  $\triangle ABC$  的外接切线三角形、 $\triangle ABC$  的 Steiner 三尖瓣线的三个尖点组成的三角形位似、 $\triangle ABC$  的 Morley 三角形两两位似.

**Problem 4.39.** 给定  $\triangle ABC$  与角  $\alpha \in (0, 90^\circ)$ , 对两点  $P, Q$ , 在直线  $BC, CA, AB$  上分别取点  $P_1, Q_1; P_2, Q_2$  及  $P_3, Q_3$  使得  $\angle(BC, PP_1) = \angle(CA, PP_2) = \angle(AB, PP_3) = \alpha = -\angle(BC, QQ_1) = -\angle(CA, QQ_2) = -\angle(AB, QQ_3)$ , 试证明:

(1) 点  $P, Q$  等角共轭, 当且仅当点  $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$  共圆于  $\omega$ ;

(2) 若点  $P, Q$  等角共轭, 则 (1) 中的圆  $\omega$  的圆心  $R$  在线段  $PQ$  的中垂线上, 且  $\angle RPQ = 90^\circ - \alpha$ .

**Problem 4.40.** 设  $P, Q$  是关于  $\triangle ABC$  等角共轭的两点, 直线  $AP$  与  $C$  的另一交点为点  $D$ ,  $DQ \cap BC = T$  上一点, 证明:  $PT \parallel AQ$ .

**Problem 4.41.** 设  $P, Q$  是关于  $\triangle ABC$  等角共轭的两点, 直线  $BP, CQ$  与  $C$  的另一交点分别为点  $D, E$ ,  $DE$  与  $AB, AC$  分别交于点  $K, L$ , 证明:  $PK \parallel AB, QL \parallel AC$ .

**Problem 4.42.** 设  $P, Q$  是关于  $\triangle ABC$  等角共轭的两点, 直线  $AP, AQ$  与  $C$  的另一交点分别为点  $D, E$ ,  $F$  是  $C$  上一点,  $EF \cap BC = L$ , 证明:  $\triangle FPD \sim \triangle QLE$ .

**Problem 4.43.** 设  $P, Q$  是关于  $\triangle ABC$  等角共轭的两点, 直线  $AQ$  与  $C$  的另一交点为点  $D$ ,  $f_{BC}(Q) = Q'$ ,  $Q'D \cap C = D, E$ , 证明:  $AE \perp OP$ , 其中点  $O$  是  $\triangle ABC$  的外心.

### 4.4.2 等角共轭与圆锥曲线

我们先来看等角共轭与圆锥曲线间的关系.

**Theorem 4.4.14.** 给定三角形, 对于 [均不在三角形的边上的] 点  $P, P'$ :  $P' = \mathcal{Q}P \Leftrightarrow$  存在以  $P, P'$  为焦点且与三角形三边均相切的圆锥曲线. (在极限的意义下, 当点  $P'$  趋于无穷远时, 可将该圆锥曲线视为抛物线, 此时点  $P'$  也是抛物线上的无穷远点<sup>(27)</sup>)

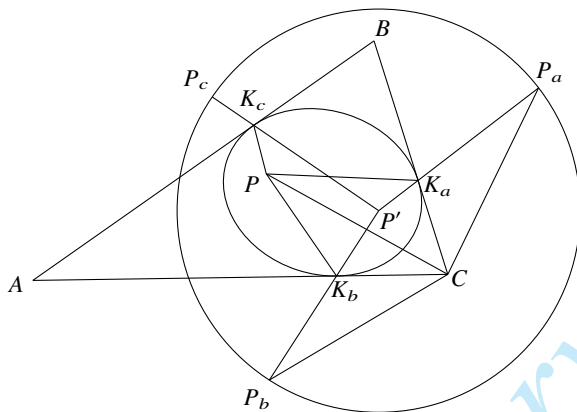


Figure 4.39

*proof.* 只证 “ $\Rightarrow$ ” 考虑如图4.39所示的位形, 其他情形类似. 设点  $P$  的反射三角形为  $\triangle P_a P_b P_c$ , 记  $K_a = P' P_a \cap BC$ , 类似定义  $K_c, K_b$ , 那么如图易知  $\angle PK_a B = \angle P' K_a C$ , 同理有另外两组等角, 且对于  $i \in \{a, b, c\}$ ,  $PK_i + P' K_i = P_i K_i + P' K_i = P' P_i$  是相等的, 则由光学性质即知命题成立.  $\square$

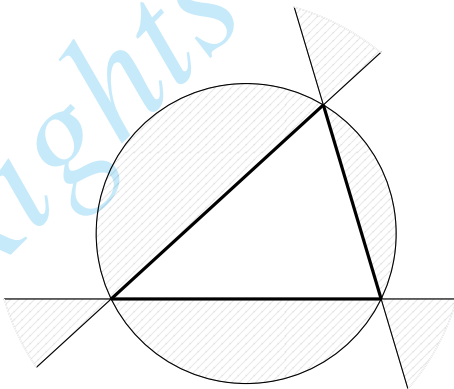


Figure 4.40

图4.40显示了点  $P$  的位置与所得圆锥曲线的类型间的关系: 在空白区域内的点  $P$  生成椭圆, 在阴影区域内的点  $P$  生成双曲线, 在外接圆上的点  $P$  生成抛物线.(为什么?)

**Corollary 4.4.15.** 给定  $\triangle ABC$ , 对于互为等角共轭的点  $P, Q$ , 以它们为焦点且与三角形三边均相切的圆锥曲线记为  $\alpha$ , 则  $\alpha$  的辅助圆是  $P, Q$  公共的垂足圆.

*proof.* 注意  $P, P'$  为焦点, 这是(1.3.5)的直接推论.  $\square$

**Corollary 4.4.16.** 设有一对关于  $\triangle ABC$  等角共轭的点  $P, Q$ ,  $P, Q$  的垂足三角形分别为  $\triangle P_A P_B P_C$  与  $\triangle Q_A Q_B Q_C$ , 则  $\overline{PP_A} \cdot \overline{QQ_A} = \overline{PP_B} \cdot \overline{QQ_B} = \overline{PP_C} \cdot \overline{QQ_C}$ .

(27) 将抛物线的一个焦点视为无穷远点可以得到一些正确的结论, 比如抛物线的光学性质, 从而下述证明对抛物线的情形也成立. 但是, 需要指出的是, 这种观点并不总是正确, 使用时需要小心.



*proof.* 结合(1.3.6), 这是(4.4.15)的直接推论.  $\square$

值得一提的是, 对于上边(4.4.14)的一种特殊情形——这样内切于一个三角形的椭圆的中心为三角形的重心的情形下, 这一椭圆还有一些奇妙的性质. 为此, 我们需要在复平面中考虑: 对于平面直角坐标系上一点  $(a, b)$ , 我们同时也可以用一个复数  $(a+ib)$  来表示它.

**Theorem 4.4.17** (Marden). 设  $\triangle ABC$  的三个顶点的复数表示分别为  $z_a, z_b, z_c$ , 令多项式  $P(z) = (z - z_a)(z - z_b)(z - z_c)$ , 并令  $p, q$  为  $P'(z)$  的两根, 则  $p, q$  对应的点  $P, Q$  等角共轭; 且可以以  $P, Q$  为焦点作  $\triangle ABC$  的内切椭圆, 使得椭圆与三边的切点分别为三边的中点, 并且其中心  $G$  为三角形的重心. 这一椭圆称为  $\triangle ABC$  的内切 Steiner 椭圆 (inscribed Steiner ellipse).<sup>(28)</sup>

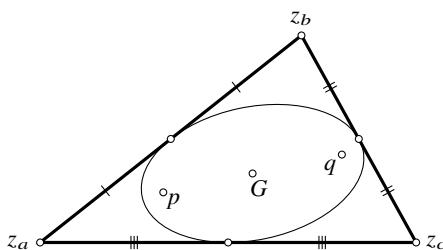


Figure 4.41

*proof.* 我们证明  $\angle BAP = \angle CAQ$ , 从而有等角共轭. 不失一般性地, 不妨设  $z_a = 0$ , 且  $\overrightarrow{AC}$  为复平面横轴的正方向. 这样  $P(z) = z^3 - (z_b + z_c)z^2 + z_c z_b z$ ,  $P'(z) = 3z^2 - 2(z_b + z_c)z + z_b z_c$ .

利用 Viète 定理,  $pq = \frac{z_b z_c}{3}$ , 这表明  $pq, z_b z_c$  有相同的辐角, 而  $\arg(pq) = \arg(p) + \arg(q) = \angle PAC + \angle QAC$ ,  $\arg(z_b z_c) = \arg(z_b) + \arg(z_c) = \angle BAC + 0$ , 故  $\angle QAC = \angle BAC - \angle PAC = \angle PAB$ .

再证  $G$  为重心: 由 Viète 定理, 椭圆的中心  $G$  对应的复数  $g = \frac{p+q}{2} = \frac{z_a + z_b + z_c}{3}$ , 即证.

最后我们证明椭圆与三边的切点为三边的中点. 考虑一个仿射变换使得一个正三角形变为题述椭圆, 此时正三角形的内切圆变为新三角形的内切椭圆, 且其中心为重心, 与三边的切点为三边的中点. 我们将会证明, 给定中心且与三条给定直线相切的圆锥曲线唯一(7.3.4), 因此命题得证.  $\square$

**Remark.** 类似于 Marden 定理, 实际上, 任意一个复多项式  $P(z)$  的所有零点 (计重数, 后同) 对应的点的重心与  $P'(z)$  的所有零点对应的点的重心重合. 最方便的证法是, 通过平移坐标系使得  $P(z)$  的所有零点的重心为 0, 从而  $P(z)$  的次高阶项的系数为 0, 那么  $P'(z)$  的次高阶项也为 0, 由 Viète 定理知这表明  $P'(z)$  的所有零点的重心也为 0.

我们在之前对三角形等角共轭的讨论可以类似地推广至多边形:

**Definition 4.4.18.** 给定  $n$  边形  $A_1 A_2 \cdots A_n$ , 对平面内一点  $P$ , 对  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 作直线  $PA_i$  关于  $\angle A_i$  的平分线的对称直线, 若所得的  $n$  条直线交于一点  $P'$ , 则称点  $P'$  为点  $P$  关于  $n$  边形  $A_1 A_2 \cdots A_n$  的等角共轭点, 下记  $P' = \mathcal{Q}_{A_1 A_2 \cdots A_n} P$ .

前面等角共轭点的性质也可以推广至多边形的等角共轭, 例如我们有如下结论:

**Theorem 4.4.19** ((4.4.6)推广). 给定多边形  $\mathcal{A}$ , 对于一点  $P$ ,  $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}} P$  存在, 当且仅当点  $P$  在  $\mathcal{A}$  的各边上的射影共圆于  $\omega$ ; 此时  $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}} P$  在  $\mathcal{A}$  的各边上的射影也均在  $\omega$  上, 圆  $\omega$  的中心即点  $P, \mathcal{Q}_{\mathcal{A}} P$  的中点.

**Theorem 4.4.20** ((4.4.14)推广). 给定多边形  $\mathcal{A}$ , 对于一点  $P$ ,  $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}} P$  存在, 当且仅当存在以点  $P$  为一个焦点且与  $\mathcal{A}$  的各边均相切的圆锥曲线  $\alpha$ ; 此时  $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}} P$  是  $\alpha$  的另一焦点.

(28) 顺便, 类似于内接 Steiner 椭圆, 还有所谓的外接 Steiner 椭圆 (circumscribed Steiner ellipse), 它是中心在重心的外接椭圆. 将三角形通过仿射变换变为正三角形的同时, 外接 Steiner 椭圆变为所得正三角形的外接圆. 我们在之后还会进一步介绍它.

**Remark.** 根据这一结论, 对于一般的五边形, 我们将证明它唯一确定一条与之各边均相切的圆锥曲线 ((5.10.10)), 从而一般的五边形仅有一对等角共轭点; 对于更多边数的多边形, 除去若干特殊情形, 一般不存在等角共轭点; 而对于一个四边形, 我们将在之后证明所有的等角共轭点形成一条三次曲线, 并讨论这一三次曲线的性质.

**Theorem 4.4.21** ([4.39] 推广). 给定多边形  $\mathcal{A}$  与角  $\alpha \in (0, 90^\circ)$ , 对于一点  $P$ , 在  $\mathcal{A}$  的每条边上各取一点, 使得每一条边到点  $P$  与该边上所取的点间的连线间的有向角为  $\alpha$ , 则点  $Q = q_{\mathcal{A}} P$  存在, 当且仅当所取的这  $n$  个点在同一个圆  $\omega$  上; 此时, 对于  $Q$ , 在  $\mathcal{A}$  的每条边上也各取一点, 使得每一条边到  $Q$  与该边上所取的点间的连线间的有向角为  $-\alpha$ , 则所取的这  $n$  个点也均在  $\omega$  上, 且  $\omega$  的圆心  $R$  在线段  $PQ$  的中垂线上, 且  $\angle RPQ = 90^\circ - \alpha$ .

上面的三个推广后的定理的证明留给读者完成.

最后, 利用等角共轭, 我们可以证明一般情形下的 Pascal 定理:

**Theorem 4.4.22** (Pascal). 对于圆锥曲线上任意六点  $A, B, C, D, E, F$ , 设  $X = AB \cap DE, Y = BC \cap EF, Z = CD \cap FA$ , 则点  $X, Y, Z$  在同一条直线上.

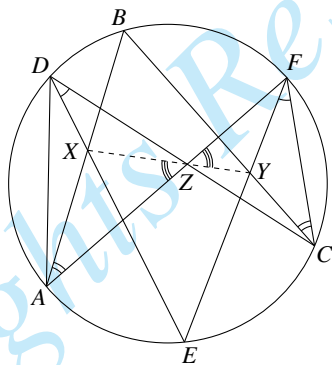


Figure 4.42

*proof.* 通过射影变换可以将圆锥曲线变为圆, 从而只需考虑圆的情形. 下证明图4.42所示的位形, 其余情形类似.

注意  $\triangle ADZ \sim \triangle CFZ$ , 设将  $\triangle ADZ$  变成的相似变换  $\triangle CFZ$  将点  $X$  变为点  $X'$ , 则  $\angle X'FZ = \angle XDZ = \angle YFC$ , 同理  $\angle X'CZ = \angle YCF$ , 故点  $Y, X'$  关于  $\triangle ZFC$  等角共轭, 从而  $\angle AZX = \angle CZX' = \angle FZY$ , 即有点  $X, Y, Z$  共线.  $\square$

与之前证明的 Pascal 定理不同, 前面的 Pascal 定理要求  $ABCDEF$  为常规意义上的凸六边形, 而此处一般情形的 Pascal 定理可以对任意位置的六点  $A, B, C, D, E, F$  使用. 另外, 提醒读者: 正如之前所说, Pascal 定理还可以用于其中六点中的某几对点趋于重合的退化情形.

我们给出一个应用 Pascal 定理的例子:

**Example 4.4.23.** 设  $ABC$  的外接圆的  $\widehat{ABC}$  的中点为  $N_B$ ,  $\widehat{ACB}$  的中点为  $N_C$ ,  $\triangle ABC$  的旁心三角形为  $\triangle I_a I_b I_c$ ,  $AC \cap N_B N_C = X$ , 证明: 点  $I_c, X, M_c$  共线, 其中  $M_c$  为  $AB$  的中点.



## 4.4.3 等截共轭

一个与等角共轭类似的概念是等截共轭:

**Definition 4.4.24.** (如图 4.44) 对于不与  $\triangle ABC$  的顶点重合的一点  $P$ , 设其 Ceva 三角形为  $\triangle A_1B_1C_1$ , 作点  $A_1$  关于  $BC$  边中点的对称点为  $A_2$ , 类似定义  $B_2, C_2$ , 则直线  $AA_2, BB_2, CC_2$  交于一点  $P'$  ( $P'$  可以为无穷远点), 称点  $P'$  为点  $P$  关于  $\triangle ABC$  的等截共轭点 (isotomic conjugate), 这样的变换方式将一点变为另一点, 称这样的变换为等截共轭变换.

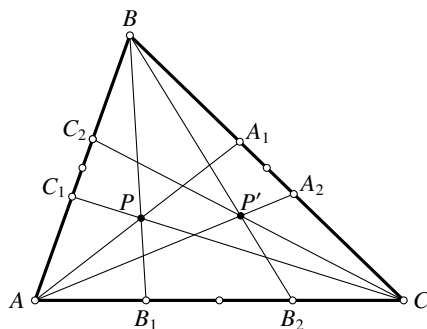


Figure 4.44

作仿射变换, 使得三角形变为正三角形, 注意仿射变换保持共线线段之比, 从而保持等截共轭的性质, 而仿射变换后的等截共轭就是关于该正三角形的等角共轭, 则由等角共轭点的存在性可知等截共轭点存在且唯一. 当然, 从 Ceva 定理也可证明等截共轭点的存在性.

以下, 我们用  $t_{\triangle ABC}P$  表示点  $P$  关于  $\triangle ABC$  的等角共轭点, 在不引起歧义的情况下可简记为  $tP$ . 我们给出等截共轭的最基本的性质.

**Theorem 4.4.25.** 关于  $\triangle ABC$  的等截共轭变换具有如下性质:

- (1) 若点  $P$  不在三角形的边上, 则  $t(tP)=P$ , 即  $t^2=\text{id}$ .<sup>(29)</sup>
- (2) 三角形边上一点的等截共轭像为与其相对的顶点.
- (3) 在等截共轭变换下, 平面内有且仅有四个不变的点——三角形的重心和三个顶点关于各自的对边的中点的对称点, 亦即重心及其反 Ceva 三角形的三个顶点.
- (4) 一对等截共轭点在仿射变换后 [关于  $\triangle ABC$  在仿射变换下的像] 也是等截共轭的.
- (5) 所有等截共轭点为无穷远点的点的轨迹为  $\triangle ABC$  的一个外接椭圆<sup>(30)</sup>, 将  $\triangle ABC$  变为正三角形的仿射变换同时也将它变为三角形的外接圆, 且它与  $\triangle ABC$  的内切 Steiner 椭圆关于三角形的重心 2:1 位似, 称为  $\triangle ABC$  的外接 Steiner 椭圆 (circumscribed Steiner ellipse).

*proof.* 上面几条性质是比较显然的, 其中, 为证明 (5), 只需将三角形仿射变换为正三角形, 而等截共轭的性质被保持, 但正三角形的情况下等截共轭与等角共轭是一回事, 而等角共轭是无穷远点的点在三角形的外接圆上, 从而命题是成立的.  $\square$

**Theorem 4.4.26.** 对于  $\triangle ABC$ , 设一点  $P$  到三边  $BC, CA, AB$  的有向距离之比为  $\alpha:\beta:\gamma$ , 则  $tP$  到三边的有向距离之比为  $(a^2\alpha)^{-1}:(b^2\beta)^{-1}:(c^2\gamma)^{-1}$ , 其中  $a, b, c$  为三边的长度.

*proof.* 显然

$$\begin{aligned} \text{dist}(tP, AB) : \text{dist}(tP, AC) &= \frac{[\triangle ABtP]}{c} : \frac{[\triangle ACtP]}{b} = \frac{[\triangle ACP]}{c} : \frac{[\triangle ABP]}{b} = (c[\triangle ABP])^{-1} : (b[\triangle ACP])^{-1} \\ &= [c \cdot c \text{dist}(P, AB)]^{-1} : [b \cdot b \text{dist}(P, AC)]^{-1} = (c^2\gamma)^{-1} : (b^2\beta)^{-1}, \end{aligned}$$

(29) 因此, 在等截共轭变换下, 点  $P$  与  $tP$  的地位是平等的, 我们可以说点  $P, tP$  是等截共轭的, 或说点  $P, tP$  是一组等截共轭点.

(30) 严格地说, 应除去三个顶点.

到其余边的距离之比同理. □

总体而言, 等截共轭点的性质比较简单, 并没有等角共轭点那么多优美的性质.

### 练习

**Problem 4.53.** 证明: 三角形的面积最小的外接椭圆为其外接 Steiner 椭圆, 并求三角形的外接 Steiner 椭圆与三角形的面积之比.

**Problem 4.54.** 给定  $\triangle ABC$ , 其重心为点  $G$ , 点  $P_1, P_2$  等截共轭, 它们的 Ceva 三角形的中心分别为点  $G_1, G_2$ , 证明:  $G$  为  $G_1G_2$  的中点.

**Problem 4.55.** 给定  $\triangle ABC$ , 设垂心、外心、重心分别为点  $H, O, G$ , 设  $H' = tH$ , 证明:

- (1)  $H'$  为点  $f_O(H)$  的垂足三角形与  $\triangle ABC$  的透视中心;
- (2) 设点  $A$  在  $BC$  上的射影为点  $H_a$ , 点  $A'$  为  $H_aA$  的中点, 类似定义点  $B', C'$ , 则  $\triangle A'B'C'$  与点  $H'$  的 Ceva 三角形有透视中心  $G$ ;
- (3) 点  $G$  关于  $\triangle ABC$  的中点三角形的反射三角形与  $\triangle ABC$  有透视中心  $H'$ .

**Problem 4.56.** 给定  $\triangle ABC$ , 设其内心为点  $I$ , 且  $I' = tI, I^* = oI'$ , 证明:

- (1) 点  $I$  到三角形三边的距离之比等于三边边长的二次方反比;
- (2) 过点  $I'$  作  $BC$  边的平行线, 被直线  $AB, AC$  所截得的部分为线段  $a$ , 类似地过点  $I'$  作边  $CA, AB$  的平行线, 从而得到线段  $b, c$ , 则  $a, b, c$  的长度相等. (因此点  $I'$  被称为全等平行点 (congruent-parallel point).)

**Problem 4.57** (Гринберг(Grinberg)). \* 给定三角形, 证明: Ceva 圆共轭  $= t \circ a \circ g \circ c \circ t$ .

## 4.5 圆幂、根轴与圆束

在本节中, 我们介绍平面几何中的重要工具——圆幂与根轴

**Definition 4.5.1.** 给定一个半径为  $r$ , 圆心在  $O$  点的圆, 则对于平面上一点  $P$ ,  $OP^2 - r^2$  叫做点  $P$  关于圆  $O$  的幂 (power), 记为  $\text{pow}_{\odot O}(P)$ .

**Proposition 4.5.2.** 关于一个圆  $O$  的幂为定值  $k$  的点  $P$  的轨迹是一个与  $\odot O$  同心的圆.

*proof.* 显然. □

**Theorem 4.5.3** (圆幂定理). 给定一个圆  $O$  以及一个定点  $P$ , 对于任意过  $P$  的直线, 若它交圆于两点  $X, Y$  (相切则视切点  $= X=Y$ ), 则  $\overline{XP} \cdot \overline{YP} = \text{pow}_{\odot O}(P)$ .

*proof.* 设直线  $OP$  交  $\odot O$  于点  $A, B$ , 则  $\overline{XP} \cdot \overline{YP} = \overline{AP} \cdot \overline{BP} = (OP + r_{\odot O})(OP - r_{\odot O}) = \text{pow}_{\odot O}(P)$ . □

**Proposition 4.5.4.** 若  $\odot O_1, \odot O_2$  正交, 则  $\text{pow}_{\odot O_1}(O_2) = r_{\odot O_2}^2$ .

*proof.* 根据正交的定义,  $r_{\odot O_1}^2 + r_{\odot O_2}^2 = O_1O_2^2$ , 故  $\text{LHS} = O_1O_2^2 - r_{\odot O_1}^2 = r_{\odot O_2}^2$ . □

**Theorem 4.5.5.** 给定两个不同心的圆, 对两个圆的幂相同的点的轨迹为一条直线, 该直线称为两个圆的根轴 (radical axis).

*proof.* 若两个圆相交于点  $X, Y$ , 则显然  $X, Y$  关于两圆等幂. 对于任意一点  $P$ , 取直线  $XP$ , 与两圆分别交于点  $Y_1, Y_2$ , 由圆幂定理知它相对于两个圆的幂分别为  $\overline{PX} \cdot \overline{PY_1}$ ,  $\overline{PX} \cdot \overline{PY_2}$ , 故等幂  $\Leftrightarrow PY_1 = PY_2$ , 这等价于  $Y_1 = Y_2 = Y$ , 因此等幂点的轨迹即是直线  $XY$ .

若两圆相切于点  $X$ , 则对于它们在点  $X$  处的公切线  $l$  上的一点  $P$ , 有圆幂定理可知它们对两圆的圆幂等于  $PX^2$ ; 对于不在  $l$  上的一点  $P'$ , 设  $XP'$  与两圆分别交于  $Y_1, Y_2$ , 则由圆幂定理知  $P'$  对两圆得到幂分别为  $\overline{P'Y_1} \cdot \overline{PX}$ ,  $\overline{P'Y_2} \cdot \overline{PX}$ , 但  $Y_1 \neq Y_2$ , 不符合条件. 因此, 这样的点的轨迹便是直线  $l$ .

对于两个圆不相交的情形, 若考虑复欧氏平面, 可以将这一情况看作两个圆交于两个虚点, 从而证明该命题对不相交的圆也成立; 但我们同时也给出一种不利用复欧氏平面的方法.

若两个圆  $\odot A_1, \odot B_1$  不相交, 我们可以将其升维至三维空间, 将  $\odot A_1, \odot B_1$  视为两相交球  $A, B$  与某一平面  $\pi$  的交线, 且  $AB \parallel \pi$ , 如图4.45所示. 此时我们如二维中一样地定义一点对球体的幂, 则对两个球等幂的点组成两球交线所在平面  $\sigma$ . 易知  $\forall P \in \pi$ ,  $\text{pow}_{\odot A_1}(P) = \text{pow}_{\text{sphere } A}(P) + AA_1^2$ ,  $\text{pow}_{\odot B_1}(P) = \text{pow}_{\text{sphere } B}(P) + BB_1^2$ , 而  $AA_1 = BB_1$ , 则对两球等幂与对两圆等幂是一回事, 故  $\sigma$  与  $\pi$  的交线即是所求轨迹.  $\square$

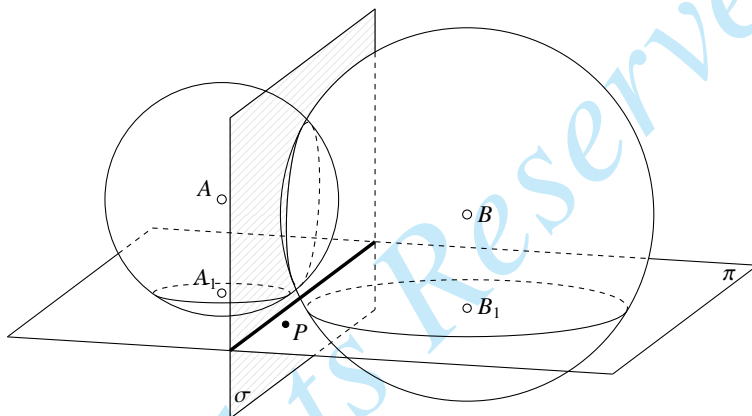


Figure 4.45

**Remark.** 对于两圆不相交的情形, 也可用平面几何的方法来证明: 对于  $\odot A, \odot B$ , 在线段  $AB$  上必有一个满足条件的点  $P_0$ , 则对任意点  $P$ , 由圆幂定理可得  $\text{pow}_{\odot A}(P) = \text{pow}_{\odot B}(P) \Leftrightarrow AP_0^2 - BP_0^2 = AP^2 - BP^2$ , 由等差幂线定理可知等幂的点  $P$  在过点  $P_0$  且垂直于  $AB$  的直线上.

不过, 对于后面的一些与圆幂相关的定理, 这种平面几何的方法难以直接推广过去, 而上面的立体几何的方法则是容易推广的.

根轴具有如下的性质:

**Proposition 4.5.6.** 两相交圆的根轴就是它们的公共弦 [所在的直线]; 两相切圆的根轴就是它们在其切点处的公切线.

**Remark.** 若在复欧氏平面中考虑, 则两相离的圆交于两个虚点, 这两个虚点的连线也就是它们的根轴; 对于相切圆的情形, 可视之为两交点趋于重合的极限情况.

*proof.* 由(4.5.5)的证明过程易知.  $\square$

**Theorem 4.5.7** (根心定理<sup>(31)</sup>). 三个圆心不在同一直线上的圆, 其中任意两个圆均有一条根轴, 则三条根轴交于一点, 称为这三个圆的根心 (radical center).<sup>(32)</sup>

(31) 有时候也被称为 Monge 定理.

(32) 对三圆圆心共线的情形, 易知三根轴互相平行; 因此, 若在射影平面的范畴下考虑, 则可去掉圆心不在同一直线上的限制.



*proof.* 对于  $\odot O_1, \odot O_2, \odot O_3$ , 记  $\odot O_i, \odot O_j$  间的根轴为  $l_{ij}$ , 则由根轴的定义,  $l_{12}, l_{23}$  的交点对三个圆等幂, 从而该点也在  $l_{13}$  上.  $\square$

**Remark.** 对于三个圆两两相交的情形, 此定理可表述为: 三个两两相交的圆, 取出两两的公共弦, 则三条这样的弦交于一点. 对于此种情况, 可以利用立体几何的方式快速地证明: 作三个两两相交的球  $A, B, C$ , 则三者必有一公共点  $P$ , 从点  $A, B, C$  确定的平面的正上方看下去, 三个球变为三个圆  $\odot A_1, B_1, C_1$ , 三个球两两间交出的圆变为  $\odot A_1, B_1, C_1$  间两两的公共弦, 而点  $P$  变为了这三条弦的交点.

我们给出根轴的两个应用.

**Theorem 4.5.8 (Davis).** 给定  $\triangle ABC$ , 在直线  $BC, CA, AB$  上分别取点  $A_1, A_2; B_1, B_2$  和  $C_1, C_2$ , 若已知点  $B_1, B_2, C_1, C_2$  共圆,  $C_1, C_2, A_1, A_2$  共圆且  $A_1, A_2, B_1, B_2$  共圆, 则  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  六点共圆.

*proof.* 设  $B_1, B_2, C_1, C_2; C_1, C_2, A_1, A_2; A_1, A_2, B_1, B_2$  所共之圆分别为  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ . 用反证法, 设六点不共圆, 则  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  互不相同, 易知  $\omega_2, \omega_3$  的根轴为  $A_1A_2$ ,  $\omega_3, \omega_1$  的根轴为  $B_1B_2$ ,  $\omega_1, \omega_2$  的根轴为  $C_1C_2$ , 则显然  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$  不交于一点, 与根心定理矛盾!  $\square$

另一个应用则是一般情形下的 Brianchon 定理:

**Theorem 4.5.9 (Brianchon).** 六直线  $l_i (i=1, \dots, 6)$  与同一个圆锥曲线相切, 记  $A_{ij} = l_i \cap l_j$ , 则  $A_{12}A_{45}, A_{23}A_{56}, A_{34}A_{61}$  交于一点.

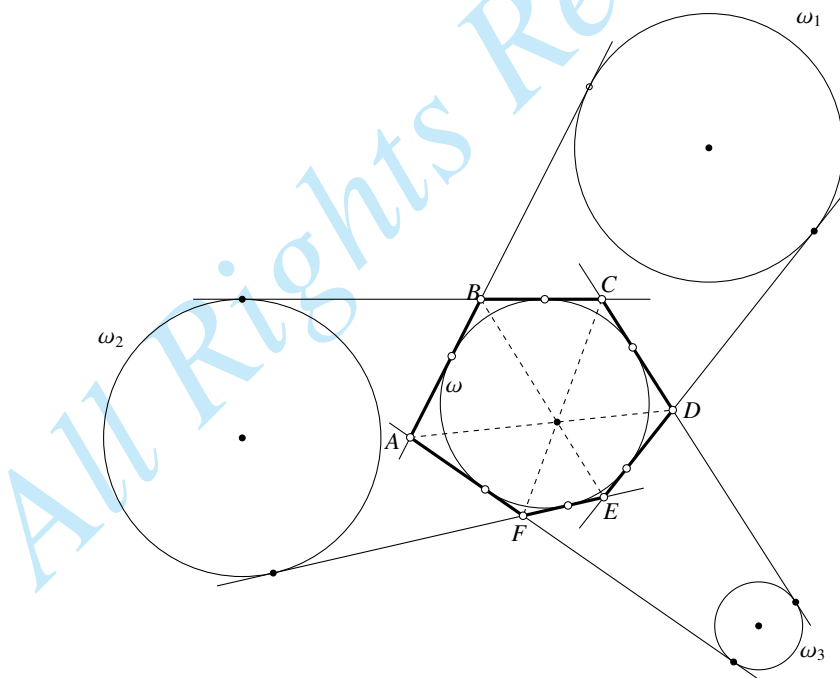


Figure 4.46

*proof.* 通过射影变换可以把圆锥曲线变为一个圆, 从而只需考虑圆的情形. 为此, 我们考虑如图 4.46 所示的位形, 其余情形是类似的. 设  $ABCDEF$  外切于圆  $\omega$ , 我们只要证明  $AD, BE, CF$  交于一点.

作  $\omega_1$  同时与直线  $AB, DE$  相切, 类似作  $\omega_2, \omega_3$ , 并令  $\omega$  与  $\omega_i$  的外公切线长均为  $a$ . 由此易知  $B$  到  $\omega_1, \omega_2$  的切线长相等, 则点  $B$  对  $\omega_1, \omega_2$  等幂, 同理点  $E$  对  $\omega_1, \omega_2$  等幂, 故  $BE$  为它们的根轴.

同理  $AD, CF$  分别为  $\omega_1, \omega_3$  和  $\omega_2, \omega_3$  的根轴, 由根心定理知  $AD, BE, CF$  交于一点.  $\square$

提醒读者, 与之前介绍的弱版本的 Brianchon 类似, 它也可以用于有若干对切线趋于重合的情形.

## 练习

**Problem 4.58.** 给定两圆, 如何用尺规作出其根轴? 你能想到几种方法?

**Problem 4.59.** 设圆  $\omega_1, \omega_2$ , 且它们互不过对方的圆心, 它们的根轴为  $l$ , 圆  $\omega = i_{\omega_1}(\omega_2)$ , 证明:  $\omega, \omega_1$  的根轴以及  $\omega, \omega_2$  的根轴也均为直线  $l$ .

**Problem 4.60.**  $\odot O_2$  内切  $\odot O_1$  于点  $T$ ,  $\odot O_2$  又与  $\odot O_1$  的弦  $AB$  相切于点  $P$ ,  $TK \cap \odot O_1 = T, M$ , 证明:  $\text{pow}_{\odot O_2}(M) = MA^2 = MB^2$ .

**Problem 4.61.** 设点  $C$  为  $\odot(AB)$  上一点,  $C$  在  $AB$  上的射影为点  $D$ ,  $\odot P$  同时与线段  $CD, DB$  相切, 且内切于  $\widehat{BC}$ . 证明:  $AC = AG$ , 其中点  $G$  为  $\odot P$  与  $DB$  的切点.

**Problem 4.62.**  $\triangle ABC$  中, 线段  $AC, AB$  上分别有点  $D, E$ ,  $\odot(BD) \cap \odot(CE) = P, Q$ , 点  $H$  为  $\triangle ABC$  的垂心, 证明: 点  $P, Q, H$  共线.

**Problem 4.63.** 半径不相等的  $\odot O_1, \odot O_2$  交于  $P, Q$  两点,  $\odot O_1, \odot O_2$  分别与  $\odot O$  内切于点  $A, B$ , 证明:  $OP \perp PQ$  的充要条件为点  $A, B, Q$  共线.

**Problem 4.64.** 设  $AD$  是  $\text{Rt}\triangle ABC$  的斜边  $BC$  上的高线, 点  $T$  为  $AD$  的中点, 过点  $T$  作  $BC$  的平行线, 分别交  $AB, AC$  于点  $A_1, A_2$ ; 过点  $T$  作  $CA$  的平行线, 分别交  $BC, BA$  于点  $B_1, B_2$ ; 过点  $T$  作  $AB$  的平行线, 分别交  $CA, CB$  于点  $C_1, C_2$ . 证明: 点  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  共圆.

**Problem 4.65.** 设四边形  $ABCD$  内接于  $\odot O$ ,  $AC \cap BD = J$ ,  $AB \cap CD = E$ ,  $AD \cap BC = F$ , 证明:

(1)  $\text{pow}_{\odot O}(E) + \text{pow}_{\odot O}(J) = EJ^2$ ; (Hint. 设  $\odot(JCD) \cap EJ = J, L$ , 则  $E, B, L, J$  共圆.)

(2)  $OJ \perp EF$ .

**Problem 4.66.** 已知某圆锥曲线的五条切线, 如何用仅用无刻度的直尺作出这五条切线与圆锥曲线的切点?

## 4.6 圆束

本节我们介绍圆束的相关知识, 有如下定义:

**Definition 4.6.1.** 定义:

a.) 若三个圆的圆心在同一条直线上, 则它们两两的根轴或平行或重合. 对于三条根轴重合的情形, 我们称这三个圆共轴 (coaxial).

b.) 给定两个圆, 所有与这两个圆共轴的圆的集合 (包括这两个圆本身) 称为一个圆束 (pencil of circles), 这些圆间有共同的根轴, 称为这一圆束的根轴/等幂轴.

c.) 若生成一圆束的两个圆相交于相异的两点, 则圆束中的圆均经过它们的这两个交点, 此时称此圆束是双曲型的 (hyperbolic); 若生成这一圆束的两个圆相切, 则圆束中的所有圆公切于这一点, 此时称此圆束是抛物型的 (parabolic); 若生成这一圆束的两圆不相交, 则这一圆束中的所有圆两两相离, 此时称此圆束是椭圆型的 (elliptic).

d.) 椭圆型圆束中存在两退化为点的点圆<sup>(33)</sup>, 称这两个点为圆束的极限点 (limit point); 抛物型圆束中存在一个退化为点的点圆, 它就是其中的圆的公共切点, 也将它称为此圆束的极限点.

图4.47a中的红色圆同属一双曲型圆束; 图4.47a中的蓝色圆同属一椭圆型圆束, 且点  $Q, Q'$  为这一圆束的极限点; 图4.47b中的红色圆与蓝色圆分别同属一抛物型圆束, 且点  $Q$  同时是它们的极限点.

(33) 圆束的定义中, 所说的圆可以包括退化为点的点圆, 将它们按半径为零的圆处理即可, 例如, 一点  $P$  对点圆  $O$  的幂  $\text{pow}_O(P) = OP^2$ .

**Remark.** 上述定义是基于实欧氏平面考虑的, 若在复欧氏平面中考虑, 则两个相离的圆实际上交于两个虚点, 由此, 可以说: 复欧氏平面中的两个相异点生成了一个圆束 (椭圆型或双曲型), 它们是同时过这两个点的圆的集合, 它的根轴就是这两个点的连线.

考虑两个点趋于重合的极限情形, 则“两个重合的点生成一个抛物型圆束”, 这样生成的圆束公切于这一对重合的点处, 不过此时需要额外给定一条过这一对重合点直线才能完全确定这一圆束, 这一直线是此抛物型圆束的公切线, 同时也是它的根轴, 即这一圆束是过这一对重合点且与此给定直线相切的圆的几何. (34)

此外, 当考虑一圆束中的一系列半径不断增大的圆, 当其半径趋于无穷大、圆心趋于无穷远时, 在极限的意义下, 它就变为了圆束的根轴, 因此, 有时, 我们亦可将圆束的根轴这一广义上的“圆”算作是圆束中的一者.

另外, 在常规的  $Eukleidēs$  平面中, 同心的圆并不存在根轴; 但是, 若考虑射影平面, 我们可以认为, 两个同心圆的根轴是一无穷远直线, 通过非同心的圆取极限容易验证这一点. 那么, 在极限的意义下, 我们可以认为, 一族同心圆也是一个圆束, 但它没有圆心轴, 也没有下面将讲到的共轭圆束.

下面我们来考虑圆束的一些基本性质.

**Proposition 4.6.2.** 对于一个圆束  $\mathcal{O}$ , 其中所有的圆的圆心组成一条垂直于  $\mathcal{O}$  的根轴的直线, 称为  $\mathcal{O}$  的 圆心轴.

*proof.* It's obvious. □

**Proposition 4.6.3.** 对于一个圆束  $\mathcal{O}$ , 对于其根轴上的一点  $P$ , [若点  $P$  在圆束中的圆之外, (35)] 那么:

- (1) 点  $P$  对  $\mathcal{O}$  中所有圆的切线长是相等的;
  - (2) 若以  $P$  为圆心、(1) 中所述切线长为半径作圆  $\odot P$ , 则  $\odot P$  与  $\mathcal{O}$  中所有圆正交;
  - (3) 当点  $P$  在  $\mathcal{O}$  的根轴上运动时, 所有 (2) 中所述的  $\odot P$  的集合同样构成了一个圆束  $\mathcal{O}'$ .
- 称 (3) 中给出的圆束  $\mathcal{O}'$  为  $\mathcal{O}$  的 共轭圆束 (conjugate pencil [of circles]) 或 伴随圆束.

*proof.* (1) 点  $P$  对圆束中的圆的幂均相等, 而由圆幂定理可知圆幂等于切线长的平方.

(2) 由 (1), 结合 (4.5.4) 知有正交关系.

(3) 若  $\mathcal{O}$  是椭圆型的, 设它的极限点为  $Q, Q'$ , 则  $Q, Q'$  视为半径为零的点圆, 那么  $P$  对  $\mathcal{O}$  中圆的切线长  $= PQ = PQ'$ , 故  $\odot P$  必过点  $Q, Q'$ , 从而所有的  $\odot P$  形成一个双曲型圆束;

若  $\mathcal{O}$  是抛物型的, 则它们有一个公切点  $Q$ , 显然  $\odot P$  过点  $Q$  且和  $\mathcal{O}$  的圆心轴相切, 则所有的  $\odot P$  生成了一个抛物型圆束;

若  $\mathcal{O}$  是双曲型的, 设其中的圆有公共点  $Q, Q'$ ,  $Q, Q'$  的中点为  $M$ , 则

$$r_{\odot P}^2 = P \text{ 对 } \mathcal{O} \text{ 中圆的切线长的平方} = PQ \cdot PQ' = (PM + MQ)(PM - MQ) = PM^2 - MQ^2,$$

那么  $\text{pow}_{\odot P}(M) = MP^2 - (PM^2 - MQ^2) = MQ^2$  与  $P$  无关. 而点  $P$  在直线  $QQ'$  上运动, 故可取出过点  $M$  且垂直于  $QQ'$  的直线  $l$  (即  $\mathcal{O}$  的圆心轴), 则  $l$  就是不同的  $\odot P$  的共同根轴. □

上面的性质有如下的某种意义上的逆命题, 我们将其证明交给读者:

**Proposition 4.6.4.** 设  $\alpha, \beta$  是圆束  $\mathcal{O}$  中的两圆, 若一圆  $\omega$  同时与  $\alpha, \beta$  正交, 则  $\omega$  与  $\mathcal{O}$  中的所有圆正交, 且  $\omega$  是  $\mathcal{O}$  的共轭圆束中的一者.

容易知道共轭圆束有如下性质:

(34) 但为了方便起见, 我们一般也不那么严谨地说“两个重合的点生成一个抛物型圆束”; 这样, 我们可以统一地说: 复欧氏平面中的两个 [可能重合的] 点确定了一个圆束.

(35) 若在复欧氏平面中考虑, 则圆内一点亦可作圆的切线, 可参考 Casey 定理后的 Remark.

**Proposition 4.6.5.** 椭圆型圆束的共轭圆束为过它的两个极限点的双曲型圆束, 双曲型圆束的共轭圆束为以它所过的两个公共点为极限点的椭圆型圆束, 抛物型圆束的共轭圆束为以它的极限点为极限点且与它的圆心轴相切的抛物型圆束.

**Proposition 4.6.6.** 共轭圆束的根轴为原圆束的圆心轴, 共轭圆束的圆心轴为原圆束的根轴.

**Proposition 4.6.7.** 一圆束的共轭圆束的共轭圆束是其本身.

关于共轭圆束, 我们再指出一个物理学中的有趣的事实: 设有两个平行的均匀带有线密度相同的异号电荷的无限长直导线, 则在一个垂直于直导线的横截面内, 静电场的等势线为一个以两根导线与该横截面的交点为极限点的椭圆型圆束, 电场线为其共轭圆束.

图4.47a中作出了一组互为共轭的椭圆型圆束与双曲型圆束, 图4.47b中作出了一组互为共轭的抛物型圆束.

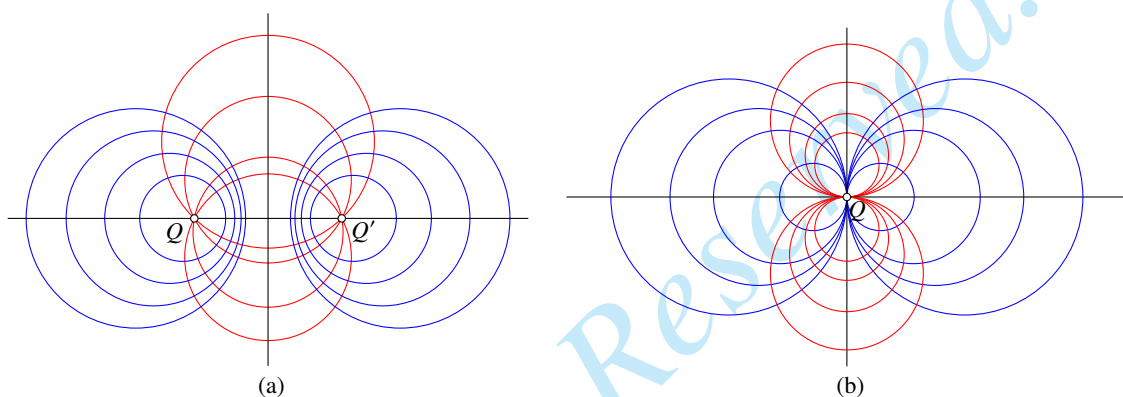


Figure 4.47

下面考虑圆束在反演变换下的性质:

**Proposition 4.6.8.** 关于一个圆的反演变换将圆束变为圆束 (包括同心圆族) 或线束, 特别地如果反演的参考圆是原来的圆束中的一者, 则此圆束在反演后与原来的圆束重合.

*proof.* 对于双曲型圆束, 由于其中的圆有两个公共点, 若反演中心不为其中之一, 则反演后它们变为同时过这两个公共点的反演像的圆束; 若反演中心为两公共点之一, 则反演后它们变为同时过另一公共点的直线. 若反演的参考圆为圆束中的一者, 则双曲型圆束的两个公共点在反演下不变, 从而反演后的圆束中的圆还是同时过那两个点.

对抛物型圆束的讨论是类似的; 对椭圆型圆束, 可以通过拓展到复 Εὐκλείδης 平面或利用类似于(4.5.5)中的立体几何的方式来解决<sup>(36)</sup>.  $\square$

特别地, 对于椭圆型圆束, 有如下结论:

**Proposition 4.6.9.** 对于一个椭圆型圆束:

- (1) 它关于圆束中的某一个圆的反演将一个极限点变为另一个极限点;
- (2) 若反演的参考圆的圆心在椭圆型圆束的一个极限点处, 它将原来的圆束变为中心在另一个极限点处的一族同心圆.

*proof.* (1) 将极限点看成点圆, 由(4.6.8), 反演后圆束不变, 则该点圆在反演后变为此圆束中的另一点圆, 这只能是另一个极限点.

(36) 可以类似地定义三维空间的反演, 参见 [(4.19)].

(2) 对于圆心在极限点的圆的反演, 它将其共轭圆束变为一个顶点在另一极限点的反演像线束, 且其该线束中的直线均过另一个极限点的反演点. 由于反演变换保角, 原来的圆束的反演像中的每一个圆必均与所得线束中的所有直线正交, 这只能是中心在另一个极限点处的同心圆族.  $\square$

**Corollary 4.6.10.** 对于两个相离的非同心圆, 存在反演变换, 将它们变为同心圆.

*proof.* 只需要反演中心在由这两个圆确定的椭圆型圆束的极限点处即可.  $\square$

下面的定理可以视为根轴的推广:

**Theorem 4.6.11.** (如图4.48) 给定两个圆  $\omega_1, \omega_2$ , 对于这两个圆的幂之比为不等于 1 的定值的点的轨迹为一个由这两个圆生成的圆束中的圆; 反之, 给定一个由这两个圆生成的圆束中的圆, 其上的点对  $\omega_1, \omega_2$  的幂之比是一个不等于 1 的定值.

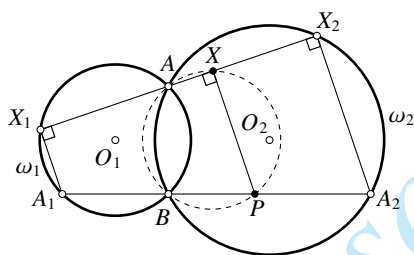


Figure 4.48

*proof.* 仅证前半部分. 我们仅证明两个圆相交的情况, 利用复 Eὐκλείδης 平面或与之之前类似的升维的方法可以将它推广至两圆相离的情形, 让相交的情形的两个交点趋于重合, 则可证明相切的情形.

设  $\omega_i$  的圆心为  $O_i$ , 两圆相交于  $A, B$ . 设点  $A_i$  分别为点  $A$  在  $\omega_i$  上的对径点, 由  $A_1B \perp AB, A_2B \perp AB$  知点  $A_1, A_2, B$  共线. 设一点  $X$  对两圆之幂的比值为定值  $k$ , 直线  $XA$  与  $\omega_i$  的另一个交点为点  $X_i$ .

由圆幂定理,  $k = \frac{XX_1 \cdot \overline{XA}}{XX_2 \cdot \overline{XA}} = \frac{XX_1}{XX_2}$ . 注意  $AA_1, AA_2$  分别为两圆的直径, 从而点  $X_i$  为点  $A_i$  在直线

$AX$  上的射影. 在直线  $A_1A_2$  上取点  $P$ , 使得  $\frac{\overline{PA_1}}{\overline{PA_2}} = k$ , 则由平行线截线段成比例可知,  $PX \perp XA$ , 故  $X \in \odot(AP)$ , 由  $AB \perp BP$  可知  $B \in \odot(AP)$ , 因此  $\odot(AP)$  过点  $A, B$ , 即它与  $\omega_1, \omega_2$  同属一圆束.  $\square$

最后一个定理与配极相关.

**Proposition 4.6.12.** 给定圆束  $\mathcal{O}$  及其外一点  $P$ , 则对  $\mathcal{O}$  中的不同的圆,  $P$  关于它们的极线交于一点.

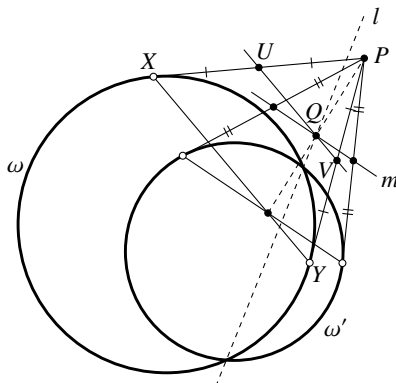


Figure 4.49



*proof.* (如图4.49) 设  $\mathcal{O}$  根轴为  $l$ . 过点  $P$  向  $\mathcal{O}$  中的某个圆  $\omega$  作切线, 设切点为  $X, Y$ , 则  $XY$  即为点  $P$  的极线; 另一方面, 分别取出  $PX, PY$  的中点  $U, V$ , 则  $\text{pow}_{\omega}(U) \stackrel{\text{圆幂定理}}{=} UX^2 = UP^2 = \text{pow}_P(U)$  (视  $P$  为一个点圆), 同理  $\text{pow}_{\omega}(V) = \text{pow}_P(V)$ , 故  $UV$  为  $\omega$  和点圆  $P$  的根轴.

由上述讨论,  $P$  对  $\mathcal{O}$  中的圆  $\omega$  的极线为点圆  $P$  与  $\omega$  中的根轴在位似  $\mathbf{h}_{P,2}$  下的像.

记点圆  $P$  与圆  $\omega$  的根轴为  $UV$  与  $l$  交于点  $Q$  则  $\forall \omega' (\neq \omega) \in \mathcal{O}$ , 设点圆  $P$  与  $\odot O'$  的根轴为  $m$ , 由根心定理  $m$  过点  $Q$ .

因此, 由位似关系可知所有极线均过点  $\mathbf{h}_{P,2}(Q)$ . □

## 练习

**Problem 4.67.** 证明: 对一抛物型圆束,

- (1) 若作反演中心在其极限点处的反演, 则该抛物型圆束变为一族平行直线;
- (2) 其中的圆的两两的外位似中心相同.

**Problem 4.68.**

- (1) 证明(4.6.7)(4.6.5)(4.6.6)(4.6.4);
- (2) 利用立体几何的方法证明(4.6.11)的两个圆相离的情形.

**Problem 4.69.** 设两内含的圆的半径分别为  $R_1, R_2$ , 圆心距  $d > 0$ , 一关于某半径为  $r$  的圆的反演将这两个圆变为同心圆, 求反演后两圆的半径.

**Problem 4.70.** 给定同属一圆束的圆  $\alpha, \beta, \gamma$ , 且  $\alpha$  的弦  $AB$  与  $\beta$  相切, 过点  $A, B$  分别引  $\gamma$  的切线, 切线长分别为  $a, b$ , 证明:  $\frac{a+b}{AB} = \text{const.}$

**Problem 4.71.** 给定圆束  $\mathcal{O}$ , 对于点  $X, Y$ , 设点  $X$  关于  $\mathcal{O}$  中的圆的极线交于一点  $X'$ , 点  $Y$  关于  $\mathcal{O}$  中的圆的极线交于一点  $Y'$ , 记  $Z = XY \cap X'Y', Z' = XY' \cap X'Y$ . 证明: 点  $Z$  关于  $\mathcal{O}$  中的圆的极线交于点  $Z'$ .

**Problem 4.72.** 设四边形  $ABCD$  内接于圆  $\omega_1$ , 且线段  $AC, BD$  均与某圆  $\omega_2$  相切, 切点分别为  $X, Y$ , 直线  $AB, CD$  均与另一圆  $\omega$  相切, 切点分别为  $U, V$ . 证明: 可以找到  $\omega$ , 使得点  $X, Y, U, V$  共线且  $\omega_1, \omega_2, \omega$  同属一圆束.

## 4.7 闭合定理

本节我们应用前一节的知识, 来介绍平面几何中的一些美妙的定理, 它们被称为“闭合定理”. 对于“闭合”一词的含义, 读者在学习完下面的四个定理之后, 一定能够理解之.

为了方便, 在本节中, 对于圆  $\omega_1, \omega_2$ , 我们用  $\mathcal{M}_0(\omega_1, \omega_2)$  表示所有同时与  $\omega_1, \omega_2$  外切或内切的圆的集合, 用  $\mathcal{M}_1(\omega_1, \omega_2)$  表示所有与  $\omega_1, \omega_2$  之一内切、而与其中的另一者外切的圆的集合.

### Steiner 闭合定理

**Theorem 4.7.1** (Steiner 闭合定理). 给定相离的圆  $\omega_1, \omega_2$  与  $k \in \{0, 1\}$ , 对于某一  $M_1 \in \mathcal{M}_k(\omega_1, \omega_2)$ , 相继取出  $\alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathcal{M}_k(\omega_1, \omega_2)$ , 使得  $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$ , 有  $\alpha_i, \alpha_{i+1}$  相切. 若对于某一  $\alpha_1, \alpha_n$  又与  $\alpha_1$  相切, 则满足这样的条件的一组圆  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  有无数组, 且  $\mathcal{M}_k(\omega_1, \omega_2)$  中的任意一者均可作为  $\alpha_1$ .



Figure 4.50

*proof.* 由(4.6.10), 存在反演变换, 将  $\omega_1, \omega_2$  变为同心圆, 此种情况下命题是显然的.  $\square$

图4.50中展示了上述命题在  $k=1$  且  $n=9$  的情形<sup>(37)</sup>. 对于满足定理所述条件的这样的  $\mathcal{M}_k(\omega_1, \omega_2)$  的一组圆  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , 我们说它们满足 Steiner 闭合条件, 它们被称为一个 Steiner 链.

### Poncelet 闭合定理

下面, 我们将利用圆束的知识证明著名的“Poncelet 定理”在圆下的情形. 在之后, 我们会将它推广至一般的情形.

**Theorem 4.7.2** (Poncelet). 给定圆  $\omega_1, \omega_2$ , 对在  $\omega_1$  上一点  $A_0$ , 作  $\omega_2$  的一条切线  $A_0A_1$  再次交  $\omega_1$  于  $A_1$ , 作  $\omega_2$  的一条切线  $A_1A_2 (\neq A_0A_1)$  再次交  $\omega_1$  于  $A_2, \dots$ , 作  $\omega_2$  的一条切线  $A_{n-1}A_n (\neq A_{n-2}A_{n-1})$  再次交  $\omega_1$  于  $A_n$ . 若对于某一  $A_0$ , 最后  $A_n$  与  $A_0$  重合, 则能使得最后  $A_n = A_0$  的一组点  $(A_0, \dots, A_n)$  可以有无数组, 且任何在  $\omega_2$  外的  $\omega_1$  上的一点均能作为  $A_0$ <sup>(38)</sup>.

*proof.* 这是下面定理的特例.  $\square$

**Theorem 4.7.3** (Poncelet 大定理/Poncelet 闭合定理). 设  $I$  除  $\omega_0$  外, 其余任意两者或多者均可以相同的  $I$  圆  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  属于同一个圆束, 对于  $\omega_0$  上的一点  $A_0$ , 作  $\omega_1$  的一条切线  $A_0A_1$  再次交  $\omega_0$  于  $A_1$ , 作  $\omega_2$  的一条切线  $A_1A_2$  再次交  $\omega_0$  于  $A_2, \dots$ , 作  $\omega_n$  的一条切线  $A_{n-1}A_n$  再次交  $\omega_0$  于  $A_n$ . 若对于某一  $A_0$ , 最后  $A_n$  与  $A_0$  重合, 则能使得最后  $A_n = A_0$  的一组点  $(A_0, \dots, A_n)$  可以有无数组, 且任何能使  $(A_1, \dots, A_n)$  被作出的  $\omega_0$  上的点均能作为  $A_0$ <sup>(39)</sup>.

(37) 在电子版的讲义中, 笔者嵌入了一个动图以展示此闭合定理, 即展示了: 当  $\alpha_0$  改变时, 始终有这样一组满足条件的圆. 为了能看到动态的图片, 读者需要使用支持 JavaScript 的 PDF 阅读器, 例如 Adobe Acrobat Reader. 当然, 动图只是为了更形象地让读者理解这一漂亮的定理, 无法查看动图并不会影响阅读. 在本节中, 下面还会有几张这样的动图: 图4.51、4.54与4.57.

(38) 要求在  $\omega_2$  外是为了切线能被作出, 当考虑复  $\text{Εὐκλείδης}$  平面时, 由于总是能作出切线, 我们可以去掉这一限制.

(39) 当点  $A_{i-1}$  在  $\omega_i$  内部时, 此时无法再继续作  $\omega_i$  的切线  $A_{i-1}A_i$ . 因此, 这句话的意思是, 只要能按上述依次作切线的方法, 不断取出点  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , 则最后  $A_n$  必与  $A_0$  重合. 当然, 当考虑复  $\text{Εὐκλείδης}$  平面时, 由于总是能作出切线, 我们可以去掉这一限制.

另外, 对于点  $A_{i-1}$ , 由于可以作两条  $\omega_i$  的切线, 对于  $\omega_0$  上不同的点  $A_0$ , 在这两条切线中选取出一条的要求是: 当  $A_0$  在  $\omega_0$  上连续地变动时, 所有的  $A_i$  均在  $\omega_i$  上连续地变动.

Figure 4.51

图4.51给出了一个  $n=4$  的 Poncelet 大定理的示意图. 对满足定理所述条件的  $n$  点形  $A_0A_1\cdots A_{n-1}$ , 我们说它满足 Poncelet 闭合条件.

我们先证明如下结果:

**Lemma 4.7.4.** (如图4.52) 圆  $\omega_0$  上有四点  $A_0, A_1, B_0, B_1$ ,  $A_0A_1, B_0B_1$  与圆  $\omega_1$  分别切于  $X, Y$ , 则存在圆  $\omega'$ , 同时与  $A_0B_0, A_1B_1$  相切, 且两个切点均在直线  $XY$  上.

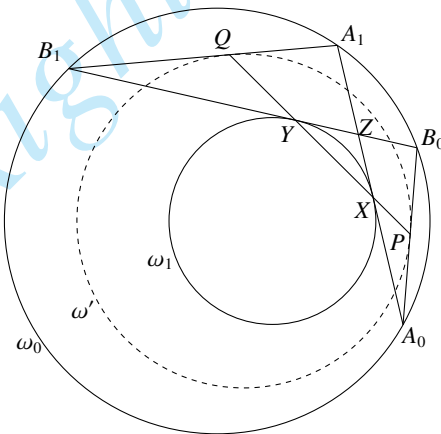


Figure 4.52

*proof.* 设  $Z=A_0A_1\cap B_0B_1$ ,  $P=XY\cap A_0B_0$ ,  $Q=XY\cap A_1B_1$ , 则  $\triangle XZY$  为等腰三角形, 从而  $\angle ZYX=\angle ZXY$ . 而  $\triangle B_1A_1A_0=\triangle B_1B_0A_0$ , 从而  $\triangle XQA_1\sim\triangle YPB_0$ . 故  $\angle PQA_1=\angle QPB_0$ , 因此存在一个圆  $\omega'$ , 切  $A_1B_1$  于  $Q$  且切  $A_0B_0$  于  $P$ .

对于点  $A_0, A_1, B_0, B_1$ , 由圆幂定理, 它们关于  $\omega_1, \omega'$  的圆幂之比依次为  $\frac{A_0X^2}{A_0P^2}, \frac{A_1X^2}{A_1Q^2}, \frac{B_0Y^2}{B_0P^2}, \frac{B_1Y^2}{B_1Q^2}$ .  
 由  $\triangle XQA_1\sim\triangle YPB_0$  知  $\frac{A_1X^2}{A_1Q^2}=\frac{B_0Y^2}{B_0P^2}$ ; 由  $\triangle B_1QY\sim\triangle A_0PX$  (因为  $\angle A_1B_1B_0=\angle A_1A_0B_0$ ) 得  $\frac{A_0X^2}{A_0P^2}=\frac{B_1Y^2}{B_1Q^2}$ ;  
 由正弦定理得  $\frac{A_0X}{A_0P}=\frac{\sin\angle A_0PX}{\sin\angle A_0XP}=\frac{\sin\angle B_0PY}{\sin\angle B_0YP}=\frac{B_0Y}{B_0P}$ .

因此  $\frac{\text{pow}_{\omega_1}(A_0)}{\text{pow}_{\omega'}(A_0)} = \frac{\text{pow}_{\omega_1}(A_1)}{\text{pow}_{\omega'}(A_1)} = \frac{\text{pow}_{\omega_1}(B_0)}{\text{pow}_{\omega'}(B_0)} = \frac{\text{pow}_{\omega_1}(B_1)}{\text{pow}_{\omega'}(B_1)}$ . 由(4.6.11), 知点  $A_0, A_1, B_0, B_1$  同在一属于由  $\omega'$  和  $\omega_1$  确定的圆束中的圆上, 即  $\omega_0, \omega_1, \omega'$  同属一圆束. 即证.  $\square$

*proof of (4.7.3).* 假设有  $n$  点形  $A_0A_1\cdots A_{n-1}$  满足 Poncelet 闭合条件, 在  $\omega_0$  上再任取一点  $B_0$ , 作  $\omega_1$  的一条切线  $B_0B_1$  再次交  $\omega_0$  于  $B_1$ , 作  $\omega_2$  的一条切线  $B_1B_2$  再次交  $\omega_0$  于  $B_2, \cdots$ , 作  $\omega_n$  的一条切线  $B_{n-1}B_n$  再次交  $\omega_0$  于  $B_n$ <sup>(40)</sup>. 我们证明  $B_n=B_0$ .

我们说明: 给定的  $A_0, B_0$ , 则之后所有的  $A_iB_i$  均与同一个圆  $\omega'$  相切, 且  $\omega_0, \omega_i, \omega'$  同属一圆束.

由(4.7.4), 存在圆束中的圆  $\omega'$  同时与  $A_0B_0, A_1B_1$  相切. 类似地,  $A_1B_1, A_2B_2$  同时与圆束中的圆  $\omega''$  相切, 但易知这样的同时与  $A_1B_1$  相切的圆束中的圆只能有一个<sup>(41)</sup>, 则  $\omega''=\omega'$ . 进而, 之后的  $A_3B_3, A_4B_4, \cdots, A_nB_n$  均与  $\omega'$  相切.

那么, 当  $A_i$  与  $A_n$  重合时, 过  $A_0, A_n$  所作的  $\omega'$  的切线也重合 (向同一侧作切线), 那么这两条切线与  $\omega_0$  的另一个交点重合, 而这两个交点就分别是  $B_0, B_n$ , 故  $B_0$  与  $B_n$  重合.  $\square$

Poncelet 定理表明, 如果一个多边形内接于一个圆且外切于另外一个圆, 那么它可以“绕内切圆‘旋转’”; 并且, 在“旋转”过程中, 它的每一条对角线包络一个定圆 (可以是退化的点圆), 该定圆与内切圆和外接圆共轴, 图4.53便给出了这样的例子.

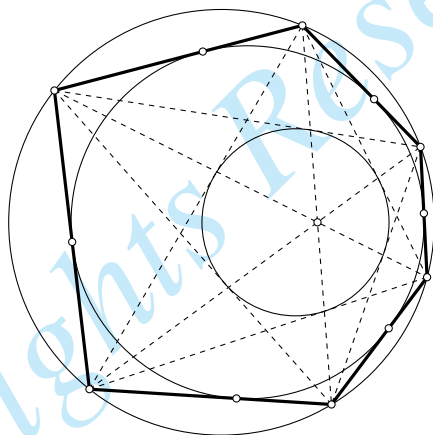


Figure 4.53

### Emch 闭合定理 \*

下面我们介绍所谓的 Emch 闭合定理.

**Theorem 4.7.5 (Emch).** 设平面中有给定的三个 [任意一者均可以是退化为点的点圆的] 圆  $\omega_1, \omega_2, \delta$ , 给定  $k \in \{0, 1\}$ , 对于  $\alpha_1 \in \mathcal{M}_k(\omega_1, \omega_2)$ , 可以依次取出圆  $\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n \in \mathcal{M}_k(\omega_1, \omega_2)$ , 使得  $\forall i=1, 2, \cdots, n-1$ , 有  $\alpha_i, \alpha_{i+1}$  的两交点之一在  $\delta$  上. 若对于某一  $\alpha_1$ , 且  $\alpha_n, \alpha_1$  的交点之一也在  $\delta$  上, 则满足这一条件的一组圆  $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$  可以有无数组, 且  $\mathcal{M}_k(\omega_1, \omega_2)$  中的任意一者均可作为  $\alpha_1$ .

*proof.* 我们将证明它的推广形式——Протасов(Protasov) 定理.  $\square$

图4.54展示了 Emch 定理  $k=1$  且  $n=12$  的一种情形.

(40) 其中, 每次作切线时可以有两种选择, 我们应选取与  $A_0A_1\cdots A_{n-1}$  方向一致的那一条切线, 即当点  $B_0$  连续地趋于  $A_0$  时,  $n$  点  $B_1, B_2, \cdots, B_n$  会连续地趋于  $A_1, A_2, \cdots, A_n$ .

(41) 实际上, 圆束中与给定直线相切的圆可以有两个, 但结合这些圆间的位置关系, 只能有一个圆满足要求.

Figure 4.54

另外, 我们指出, Poncelet 定理可视为 Emch 定理的一种极限情形. 保持外侧的  $\omega_1$  圆心不动, 令其半径趋于无穷大; 同时, 令这些  $\alpha_i$  在  $\delta$  上的交点不动, 但让它们的圆心趋于无穷远、半径趋于无穷大. 这样, 这些  $\alpha_i$  被  $\delta$  所截得的部分就趋于一段线段, Emch 定理变成了  $\delta, \omega_1$  间的 Poncelet 定理的形式. 下面的定理是 Emch 定理的推广:

**Theorem 4.7.6** (Προτάσιον<sup>(42)</sup>). 设有两族圆束  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ , 且它们间有一个公共圆  $\delta$ ; 圆  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathcal{O}_1$ , 圆  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathcal{O}_2$ , 且  $\forall i=1, 2, \dots, n$ , 圆  $\delta$  夹在  $\alpha_i, \beta_i$  之间; 给定  $k_1, k_2, \dots, k_n \in \{0, 1\}$ , 并记  $\mathcal{M}_i = M_{k_i}(\alpha_i, \beta_i)$ .

对于  $\omega_1 \in \mathcal{M}_1$ , 可以取出一系列圆  $\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$ , 使得  $\forall i=1, 2, \dots, n-1$ , 有  $\omega_i \in \mathcal{M}_i$  且  $\omega_i, \omega_{i+1}$  的交点之一在  $\delta$  上. 若对某一  $\omega_1$ , 圆  $\omega_n, \omega_1$  的交点也在  $\delta$  上, 则满足这样的条件的一组圆  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  可以有无数组, 且  $\mathcal{M}_1$  中的任意一者均可作为  $\omega_1$ .<sup>(43)</sup>

我们先证明如下引理:

**Lemma 4.7.7.** 设  $\alpha, \beta, \gamma$  同属圆束  $\mathcal{O}$ ,  $\alpha$  的弦  $AC$  与  $\beta$  相切,  $\omega$  是过点  $A, C$  且与  $\gamma$  以事先约定好的方式 (内切或外切) 相切. 那么, 对所有的  $\omega$ , 它与一个和  $\alpha$  同心的定圆  $\xi$  相切, 且  $\omega \in \mathcal{M}_0(\xi, \gamma)$ .

(42) 这一定理之于 Emch 定理的关系正如 Poncelet 大定理之于 Poncelet 定理, 因此, 我们也把它称作 Emch 大定理/Emch 闭合定理.

(43) 在确定  $\omega_{i-1}$  的情况下, 可以有两种  $\omega_i$  的选择, 对此, 我们要求实际选择的  $\omega_i$  满足与 Poncelet 大定理中的注中类似的条件: 对于不同的  $\omega_1$ , 当  $\omega_1$  连续的变动时, 所选取的  $\omega_i$  也连续变动.

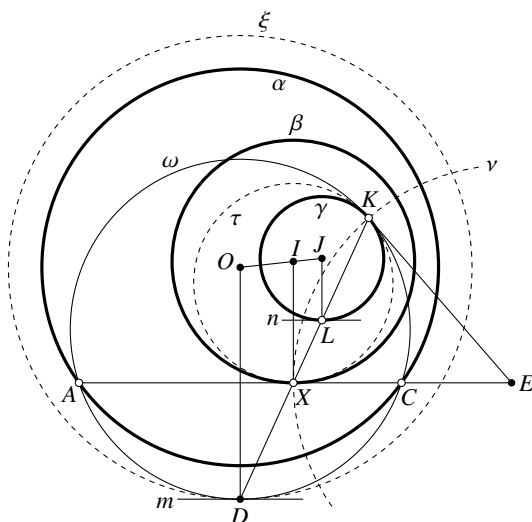


Figure 4.55

*proof.* 以  $\omega, \gamma$  内切为例, 如图4.55, 记  $\omega, \gamma$  的切点为  $K$ , 设它们在  $K$  处的公切线交直线  $AC$  于点  $E$ , 对  $\omega$  应用切割线定理得  $KE^2 = AC \cdot CE \stackrel{\text{圆幂定理}}{=} \text{pow}_\alpha(E)$ . 考虑圆  $v = \odot(E, EK)$ , 则由(4.5.4)得  $\alpha, v$  正交, 而显然  $\gamma, v$  正交, 则由(4.6.4)知  $v$  与  $\mathcal{O}$  中所有的圆正交.

因此,  $v$  与  $\beta$  正交, 故  $v$  过  $AC$  与  $\beta$  的切点  $X$ , 则  $KE = XE$ . 故存在圆  $\tau$ , 切  $KE$  于  $E$  且切  $AE$  于  $X$ .

那么,  $\omega, \tau, \gamma$  三者公切于  $K$ , 即  $K$  为三者共同的 [外] 位似中心. 记  $KX$  与  $\omega, \gamma$  的另一交点分别为  $D, L$ , 则点  $D, X, L$  是三圆  $\omega, \tau, \gamma$  的位似的一组对应点, 所以  $\omega$  在  $D$  处的切线  $m$ 、 $\tau$  在  $X$  处的切线  $AC$ 、 $\gamma$  在  $L$  处的切线  $n$  互相平行.

记  $\alpha, \beta, \gamma$  的圆心分别为  $O, I, J$ , 则显然  $JL \perp n, IX \perp AC$ ; 又由  $AC \parallel m$  可得  $D$  为  $\widehat{AC}$  的中点, 故  $OD \perp m$ . 因此,  $OD \parallel IX \parallel JL$ .

故  $\frac{OD - JL}{OD - IX} = \frac{OJ}{OI}$ , 则  $OD = \frac{IX \cdot OJ - JL \cdot OI}{OJ - OI} = \text{const}$ , 则  $\omega$  恒与圆  $\odot(O, OD)$  相切, 且为内切.  $\square$

其逆命题也成立:

**Lemma 4.7.8.** 给定圆  $\alpha, \gamma, \xi$  满足  $\alpha, \xi$  共圆, 圆  $\omega \in \mathcal{M}_0(\gamma, \xi)$  交  $\alpha$  于点  $A, C$ . 对于任意的  $\omega$ , 弦  $AC$  总是与一个定圆  $\beta$  相切, 且  $\alpha, \beta, \gamma$  同属一圆束.

*proof.* 对于某一  $\omega$ , 在由  $\alpha, \gamma$  确定的圆束中有唯一一个圆  $\beta$  与弦  $AB$  相切, 由(4.7.7)知它与一和  $\alpha$  同心的定圆  $\xi'$  相切, 且  $\omega \in \mathcal{M}(\xi, \gamma)$ , 而与  $\omega$  以特定方式相切的与  $\alpha$  同心的圆只有一个, 则  $\xi' = \xi$ . 而易知, 若固定  $\beta$ , (4.7.7)中的弦  $AC$  取遍所有可能的情形时, 其中的  $\omega$  遍历了  $\mathcal{M}_0(\xi, \gamma)$ ; 那么反过来, 本引理中的  $\omega$  取遍  $\mathcal{M}_0(\xi, \gamma)$  时, 它恒与定圆  $\beta$  相切.  $\square$

回到 Emch 大定理的证明:

*proof of (4.7.6).* 利用(4.6.9)(2), 可以通过反演变换将  $\mathcal{O}_1$  变为一族同心圆. 此时, 设圆  $\omega_i, \omega_{i+1}, \delta$  交于一点  $X_i$ , 则由(4.7.8)知  $X_i X_{i+1}$  与一个  $\mathcal{O}_2$  中的圆  $\beta'_i$  相切. 从而, 由 Poncelet 大定理可推知 Emch 大定理成立.

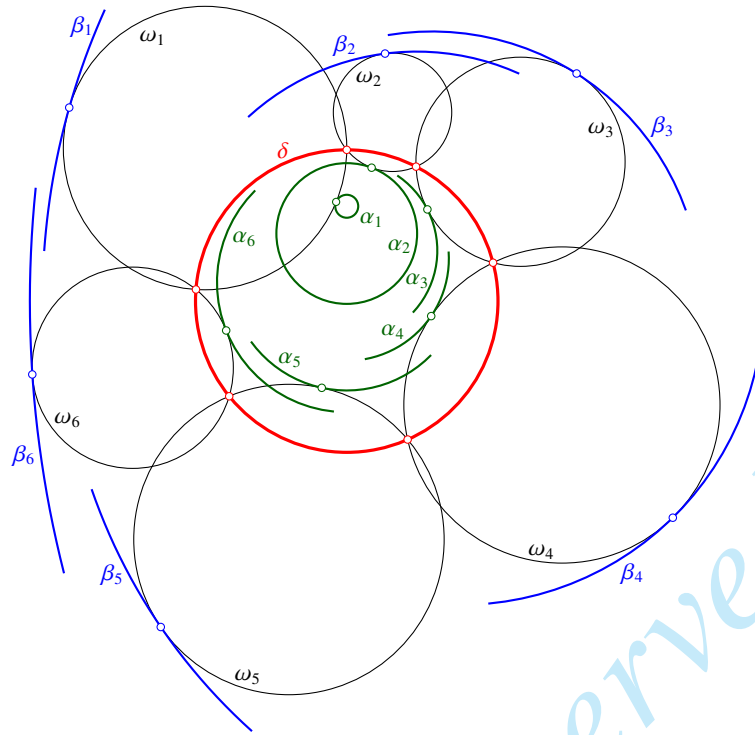


Figure 4.56

□

图4.56给出了 Emch 大定理在  $n=6$  且  $k_i=1(\forall i)$  时的示意<sup>(44)</sup>.

#### zig-zag 闭合定理 \*

最后的 zig-zag 定理是 Emch 定理的直接推论:

**Theorem 4.7.9** (zig-zag). 给定两个圆  $\omega_1, \omega_2$  以及定长  $d > 0$ , 对于  $\omega_1$  上一点  $A_0$ , 依次取出互不相同的  $2n$  个点  $B_1, A_1, B_2, A_2, \dots, B_n, A_n$ , 满足:  $\forall i=1, 2, \dots, n$ , 有  $A_i \in \omega_1, B_i \in \omega_2$ , 且  $A_{i-1}B_i = B_iA_i = d$ . 若对于某一个  $\omega_1$  上的点  $A_0$ , 最终  $A_n$  与  $A_1$  重合, 则存在无数个这样的一组点  $(A_0, \dots, A_n; B_1, \dots, B_n)$ , 使得  $A_n$  与  $A_1$  重合, 且  $\omega_1$  上的任何一点均可作为初始的  $A_0$ , 只要  $A_0$  到  $\omega_1$  上的点的距离的最小值小于  $d$ .<sup>(45)</sup>

*proof.* 在各  $A_i$  处作圆  $\alpha_i = \odot(A_i, d)$ , 则  $\alpha_i, \alpha_{i+1}$  的交点在  $\omega_2$  上. 同时, 以  $\omega_1$  上任意一点为圆心、半径为  $d$  作圆, 所作的圆必定恒与两定圆  $\gamma_1, \gamma_2$  相切, 这两个圆与  $\omega_1$  同心, 半径分别为  $r_{\omega_1} + d, |r_{\omega_1} - d$ . 这样, 存在  $k \in \{0, 1\}$ , 使得  $\forall i, \alpha_i \in \mathcal{M}_k(\gamma_1, \gamma_2)$ . 于是便转化为了 Emch 定理.

(44) 很遗憾, 由于页面及作图技术的限制, 此图无法展示为动图.

(45) 形象 [却不那么严谨] 地说, 如果一只每次跳  $d$  的距离的跳蚤在两圆间 [不走回头路地] 反复横跳, 最终回到了原来的位置, 则它从一圆上的任意位置出发, 最终都能跳回它出发的位置.



Figure 4.57

□

如图4.57展示了  $n=3$  的一种情形的示意图.

### 练习

**Problem 4.73.** 证明: 一个 Steiner 链中的圆的圆心在同一有心圆锥曲线上.

**Problem 4.74.** Steiner 闭合定理可以推广至三维, 请写出之.

**Problem 4.75.** 给定相内含的圆  $\omega_1, \omega_2$ , 设存在四边形同时内接于  $\omega_1$  且外切于  $\omega_2$ , 证明: 对于所有同时内接于  $\omega_1$  且外切于  $\omega_2$  的四边形, 其对角线的交点为一个定点, 且该定点是  $\omega_1, \omega_2$  确定的椭圆型圆束的某一极限点.

**Problem 4.76.** 给定相内含的圆  $\omega_1, \omega_2$ , 设存在六边形同时内接于  $\omega_1$  且外切于  $\omega_2$ , 对于任意的所同时内接于  $\omega_1$  且外切于  $\omega_2$  的六边形  $ABCDEF$ , 设它与  $\omega_2$  的切点组成六边形  $A'B'C'D'E'F'$ , 证明: 直线  $AD, BE, CF, A'D', B'E', C'F'$  交于一点, 且该交点为定点.

**Problem 4.77.** \* 在 Emch 定理中, 设闭合定理的条件被满足, 此时  $\mathcal{M}_k(\omega_1, \omega)$  的一组圆中,  $\forall i=1, 2, \dots, n$ , 圆  $\alpha_i, \alpha_{i+1}$  的一个交点在  $\delta$  上, 证明: 它们的另一交点恒在一定圆上 (且对所有的  $i$ , 该定圆是相同的).

**Problem 4.78** (АВКСЕНТЬЕВ(Avksentyev)). \* 证明下面的“闭合定理”<sup>(46)</sup>:

设  $\alpha, \gamma, \eta$  为共轴圆, 且三者两两为内含关系,  $\xi$  是一个与  $\alpha$  同心的圆. 设  $\delta \in \mathcal{M}_0(\xi, \eta)$ , 它与  $\alpha$  交于两点  $A, B$ , 过  $A, B$  分别作  $\gamma$  的一条切线, 与  $\delta$  的另一交点分别为  $A', B'$ . 若对某一  $\delta$ , 点  $A', B'$  重合, 则对  $\mathcal{M}_0(\xi, \eta)$  中的任意的  $\delta$ , 也可以得到的重合的点  $A', B'$ .

*Hint.* 利用 [0.61][4.70]; 可能需要用到之后的 [5.6.11] 的结果 (允许直接使用).

(46) 实际上, 这一定理与本节介绍的四个闭合定理的“闭合”有一些区别, 不过在 АВКСЕНТЬЕВ 发表这一定理时, 他如此称呼这一定理, 那我们姑且承认之.

## 第五章 三角形特征点选讲 (I)

本节我们介绍一些三角形的特征点及其相关性质. 在“Encyclopedia of Triangle Centers (ETC)”上可以查询三角形的数以万计的特征点, 并给它们赋予了编号, 我们只是选取其中的一些著名的点进行介绍.

为了体系的清晰性, 先将本书中涉及的三角形特征点的名称、本书所采用的字母标号、ETC 编号、首次出现的章节列举如下一边读者查阅, 其中有一些特征点会在第十章中介绍.<sup>(1)</sup>

另外, 对于用两个字母表示的点, 例如  $Fe, Ni$  等, 这样的符号已经有足够的辨识度. 因此, 为方便起见, 在给出其定义后, 当参考三角形明确时, 我们可能直接使用它们的符号来表示这些点, 而不会再次强调其含义.

ETC 编号	名称	符号	英文名/ETC 定义	章节
1	内心	$I$	incenter	0.6.1
2	重心	$G$	centroid	0.5.1
3	外心	$O$	circumcenter	0.5.1
4	垂心	$H$	orthocenter	0.5.2
5	九点圆圆心	$Ni$	nine-point center	0.5.3
6	Lemoine 点	$L$	Lemoine point	5.3.1
7	Gergonne 点	$Ge$	Gergonne point	5.2
8	Nagel 点	$Na$	Nagel point	5.2
9	中聚点 <sup>‡</sup>	$Mi$	Mittenpunkt	5.3.2
10	Spieker 中心	$Sp$	Spieker center	5.2
11	Feuerbach 点	$Fe$	Feuerbach point	5.1
12	Feuerbach 透视中心 <sup>†</sup>	$Fp$	harmonic conjugate of Feuerbach point with respect to incenter and nine-point center	5.1
13	第一 Torricelli 点	$T_1$	1st Torricelli point	5.9.1
14	第二 Torricelli 点	$T_2$	2nd Torricelli point	5.9.1
15	第一 $\text{\AA}\rho\omicron\lambda\lambda\acute{o}\nu\iota\omicron\varsigma$ 点	$Ap_1$	1st Apollonius point	5.8
16	第二 $\text{\AA}\rho\omicron\lambda\lambda\acute{o}\nu\iota\omicron\varsigma$ 点	$Ap_2$	2nd Apollonius point	5.8
17	第一 Napoléon 点	$Np_1$	1st Napoleon point	5.9.1
18	第二 Napoléon 点	$Np_1$	2nd Napoleon point	5.9.1
19	Clawson 点	$Cl$	Clawson point	5.5
22	Exeter 点	$Et$	Exeter point	5.3.2

(1) 下面有一些点的称呼是笔者取的, 这些点用“<sup>†</sup>”标出; 一般的文献上直接用  $X$  加上 ETC 编号表示这些点, 如  $X_{12}$  表示下面的 Feuerbach 透视中心. 另外, 还有一些中文称呼不是官方的, 但它们在中文语境中存在, 这些点用“<sup>‡</sup>”标出.

(续表)

ETC 编号	名称	符号	英文名	章节
25	垂聚点 <sup>‡</sup>	$Ht$	homothetic center of the orthic and tangential triangles	5.3.2
26	切外心 <sup>†</sup>	$To$	circumcenter of the tangential triangle	5.3.2
33	内 Clawson 点 <sup>†</sup>	$Ic$	perspector of the orthic and intangents triangles	5.5
39	Brocard 中点	$Br_m$	Brocard midpoint	5.7.2
40	Bevan 点	$Be$	Bevan point	5.4
54	Coşniţă 点	$Ko$	Kosnita point	5.1
55	[外接圆与内切圆的] 内位似中心	$In$	insimilicenter of circumcircle and incircle	5.2
56	[外接圆与内切圆的] 外位似中心	$Ex$	exsimilicenter of circumcircle and incircle	5.2
57	切聚点 <sup>†</sup>	$Ta$	isogonal conjugate of Mittenpunkt	5.4
69	Lemoine 反补点 <sup>†</sup>	$Al$	Lemoine point of the anti-complementary triangle	5.3.2
76	第三 Brocard 点	$Br_3$	third brocard point	5.8
485	外 Vecten 点	$Vc_1$	Vecten point	5.9.1
486	内 Vecten 点	$Vc_2$	inner Vecten point	5.9.1
—	旁心	$I_{a,b,c}$	excenter	0.6.2
—	第一 Brocard 点	$Br_1$	1st Brocard point	5.7.1
—	第二 Brocard 点	$Br_2$	2nd Brocard point	5.7.1

Table 5.1

## 5.1 九点圆与 Feuerbach 点

我们之前已经介绍过九点圆, 本节我们来进一步地来探讨它的一些性质. 我们先探究九点圆圆心  $N$  的等角共轭点.

**Theorem 5.1.1** (Coşniţă(Kosnita)). 设  $\triangle ABC$  的外心为  $O$ , 点  $O$  的 Carnot 三角形为  $\triangle O_A O_B O_C$ , 则  $\triangle ABC$  与  $\triangle O_A O_B O_C$  有透视中心  $Ko$ , 称为 Coşniţă 点 (Kosnita point).

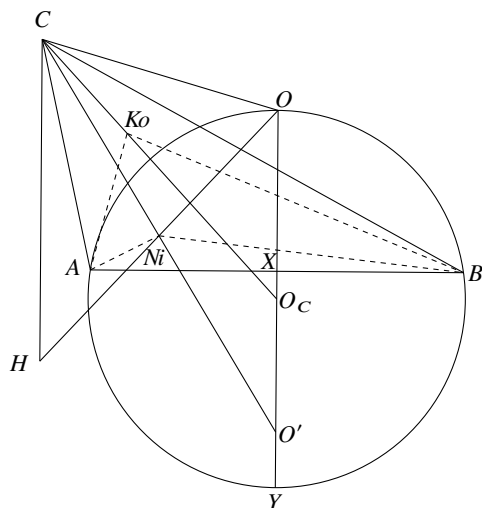


Figure 5.1

*proof.* 下记外心为  $O$ , 垂心为  $H$ . 设  $O' = f_{AB}(O)$  为  $O$  关于  $AB$  的对称点,  $OO' \cap AB = X$ , 点  $O$  在  $\odot O_C$  上的对径点为  $Y$ , 如图 5.1 所示.

由 (0.5.18) 知四边形  $CHO'O$  为平行四边形, 而  $Ni$  为对角线  $HO$  的中点, 从而  $C, Ni, O'$  共线.

由于  $OC^2 = OA^2 \stackrel{\text{射影定理}}{=} OX \cdot OY = (2OX) \cdot \frac{OY}{2} = OO' \cdot OO_C$ , 因此  $\triangle COO_C \sim \triangle O'OC$ , 从而  $\angle O_CCO = \angle CO'O = \angle HCNi$ . 另一方面, 由于  $H, O$  为等角共轭点, 因而  $\angle HCA = \angle OCB$ , 所以  $\angle ACNi = \angle BCO_C$ .

同理证明  $\angle BANi = \angle CAO_A, \angle ABNi = \angle CBO_B$ , 由等角共轭点的存在性可知点  $Ko$  存在.  $\square$

由上面的证明可知, 我们有这样的结论:

**Proposition 5.1.2.** 对于一个三角形,  $Ni = \varrho Ni$ .

另一与九点圆相关的著名定理便是 Feuerbach 定理.

**Theorem 5.1.3 (Feuerbach).** 三角形的九点圆与三角形的内切圆以及三个旁切圆均相切. (对于等边三角形, 它与内切圆重合.)

*proof.* (如图 5.2) 设  $\triangle ABC$  三边的长分别  $a, b, c$ , 中点三角形为  $\triangle M_a M_b M_c$ , 内切圆为  $\odot I$ . 考虑三个退化为点  $M_a, M_b, M_c$  的点圆  $\odot M_a, \odot M_b, \odot M_c$  与圆  $\odot I$ , 记  $t_{ij}$  为  $\odot M_i, \odot M_j$  的公切线长, 则易知

$$t_{M_a M_b} = \frac{c}{2}, t_{M_b M_c} = \frac{a}{2}, t_{M_c M_a} = \frac{b}{2}, t_{M_a I} = \frac{|b-c|}{2}, t_{M_b I} = \frac{|a-c|}{2}, t_{M_c I} = \frac{|b-a|}{2},$$

从而选取合适的正负号,  $|t_{M_a M_b} t_{M_c I} \pm t_{M_b M_c} t_{M_a I}| = t_{M_c M_a} t_{M_b I}$  必能成立, 则由 Casey 定理的逆定理可知  $\odot M_a, \odot M_b, \odot M_c, \odot M_c$  与同一个圆相切, 而前三者均为点圆, 故所公切的圆就是  $\odot(M_a M_b M_c) = \mathcal{N}$ .  $\square$

我们将三角形的 Euler 圆和内切圆的切点  $Fe$  称为三角形的 Feuerbach 点 (Feuerbach point), 三角形旁切圆与 Euler 圆的切点被称作三角形的 (三个) 旁 Feuerbach 点, 三个旁 Feuerbach 点组成的三角形称为 Feuerbach 三角形.

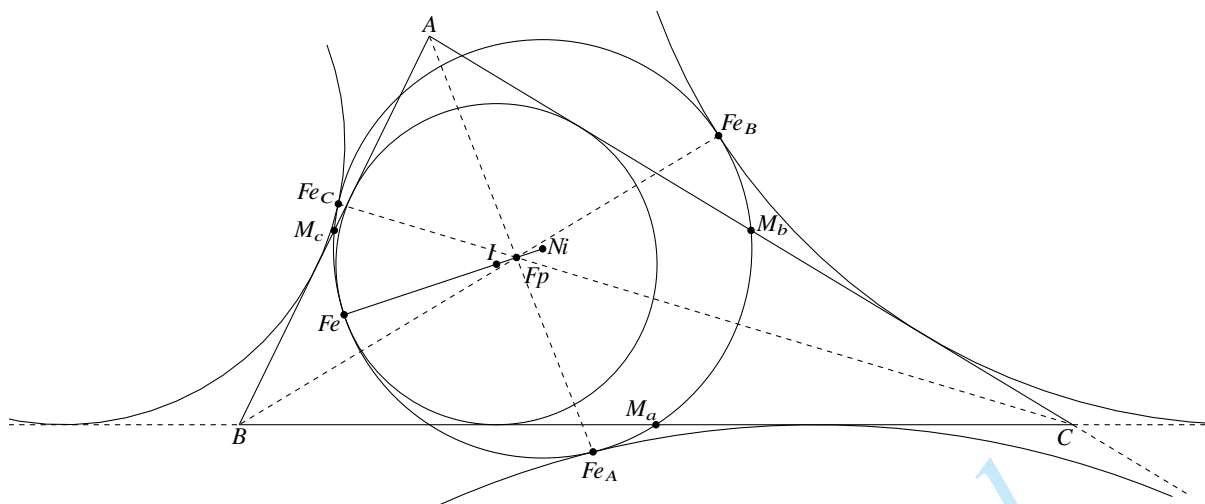


Figure 5.2

**Proposition 5.1.4.** (如图5.2) 对于  $\triangle ABC$ , 其 Feuerbach 三角形  $\triangle Fe_A Fe_B Fe_C$  与  $\triangle ABC$  透视, 下称此透视的透视中心  $Fp$  为 Feuerbach 透视中心.

*proof.* 由于九点圆与  $A$ -旁切圆切于  $Fe_A$ , 故  $Fe_A$  为两者的内位似中心, 注意  $A$  为  $A$ -旁切圆与内切圆的外位似中心, 故由(0.4.10)可知  $AFe_A$  过九点圆与内切圆的内位似中心  $Fp$  (外位似中心为垂心  $H$ ). 同理  $Fp \in BFe_B, CFe_C$ .  $\square$

由上述证明, 我们顺便知道:

**Proposition 5.1.5.**  $Fp$  为九点圆与内切圆的内位似中心.

此外, Feuerbach 透视中心还有如下性质:

**Proposition 5.1.6.** (如图5.2) 对于一个三角形,  $I$  (内心),  $Ni$ ,  $Fe$ ,  $Fp$  共线且成调和点列.

*proof.* 由于九点圆与内切圆切于点  $Fe$ , 故显然  $Ni, I, Fe$  共线, 而由(5.1.5)可知  $Ni, I, Fp$  共线, 故而这四点共线. 注意  $Fp$  为内位似中心, 故  $\frac{FpNi}{FpI} = -\frac{r_{\odot Ni}}{r_{\odot I}} = -\frac{FeNi}{FeI}$ , 故  $(Fp, Fe; Ni, I) = -1$ .  $\square$

练习

**Problem 5.1.** 证明: 对于一个三角形, 当  $Ko$  为无穷远点时, 映像三角形退化为一 条线.

**Problem 5.2.** 证明: 一个三角形的映像三角形的外心是原三角形的外心关于  $Ko$  的对称点. *Hint.* *Boutté 定理.*

**Problem 5.3.** 给定  $\triangle ABC$ , 设外心为  $O$ , 映像三角形为  $\triangle A'B'C'$ , 证明:  $\odot(AOA'), \odot(BOB'), \odot(COC')$  共轴, 且  $Ko$  在它们共同的根轴上.

**Problem 5.4.** 设  $\triangle ABC$  满足  $AB+AC=BC$ ,  $AFe \cap BC = P$ ,  $C$  上  $\widehat{BC}$  的中点为  $S$ , 证明:  $AFe = PS$ .

**Problem 5.5.** 设  $\triangle ABC$  的内心为  $I$ ,  $BC$  边中点为  $M_a$ ,  $\triangle DEF$  是切点三角形,  $FE \cap BC$  与点  $Q$ ,  $AFe \cap DI = P$ . 证明:  $MI$  是  $\odot(IPFe)$  与  $\odot(IDP)$  的根轴.

**Problem 5.6.** 设  $\triangle ABC$  的中点三角形为  $\triangle M_a M_b M_c$ , 垂心为点  $H$  作  $M_a D \perp AI$  交  $AH$  于点  $D$ ,  $M_b E \perp BI$  交  $BH$  于点  $E$ ,  $M_c F \perp CI$  交  $CH$  于点  $F$ . 证明:  $Fe \in \odot(DEF)$ .

**Problem 5.7.** 设  $\triangle ABC$  的重心为  $G$ ,  $FeG$  与  $C$  的一个交点为  $K$ , 证明: 在线段  $AK, BK, CK$  中, 最长的一者的长度等于其余两者的长度之和.

## 5.2 Gergonne 点与 Nagel 点

本节我们介绍著名的 Gergonne 点与 Nagel 点.

**Definition 5.2.1.** 定义:<sup>(2)</sup>

记  $\triangle ABC$  的内切圆与三边的切点分别为  $G_a, G_b, G_c$ , 则直线  $AG_a, BG_b, CG_c$  交于一点  $Ge$ , 称为  $\triangle ABC$  的 Gergonne 点 或 切心, 如图 5.3;

记  $\triangle ABC$  的三个旁切圆与三角形对应边(指线段)的切点分别为点  $N_a, N_b, N_c$ , 则直线  $AN_a, BN_b, CN_c$  交于一点  $Na$ , 称为  $\triangle ABC$  的 Nagel 点 或 界心, 如图 5.4.

下面证明点  $Ge, Na$  的存在性:

记  $\triangle ABC$  三边长分别为  $a, b, c$ , 半周长  $p = \frac{a+b+c}{2}$ , 则由(0.6.14),

$$\begin{aligned}\frac{CG_a}{BG_a} \cdot \frac{BG_c}{AG_c} \cdot \frac{AG_b}{CG_b} &= \frac{p-c}{p-b} \cdot \frac{p-b}{p-a} \cdot \frac{p-a}{p-c} = 1, \\ \frac{CN_a}{BN_a} \cdot \frac{BN_c}{AN_c} \cdot \frac{AN_b}{CN_b} &= \frac{p-b}{p-c} \cdot \frac{p-a}{p-b} \cdot \frac{p-c}{p-a} = 1.\end{aligned}$$

因此, 由 Ceva 定理可知  $Ge, Na$  的存在性.

另外, 对于  $Ge$ , 可以通过射影变换来证明其存在性, 这只需要保持内切圆不变并把  $AG_a, BG_b$  的交点移动至内切圆圆心处即可.  $\square$

我们下面给出  $Ge, Na$  的几个重要性质.

**Proposition 5.2.2.**  $\triangle ABC$  的一个顶点与  $Na$  的连线将  $\triangle ABC$  分为周长相等的两部分. 即, 若  $AN_a \cap BC = D$ , 则  $AB + BD = AC + CD$ , 对于其他顶点与  $Na$  的连线同理.<sup>(3)</sup>

*proof.* 由(0.6.14)显然.  $\square$

**Proposition 5.2.3.** 对于一个三角形,  $Ge = gNa$ .

*proof.* 由(0.6.14)以及等截共轭的定义, 命题显然.  $\square$

下面我们研究  $Ge$  与  $Na$  的等角共轭点. 为此, 我们先引入两个三角形的特征点: 三角形的内切圆与外接圆的内位似中心  $In$  以及外位似中心  $Ex$ . 今后, 在不引起歧义的情况下, 我们将  $In, Ex$  分别简称为三角形的 内位似中心 和 外位似中心.

首先, 由定义, 我们可以得到  $In, Ex$  的如下性质:

**Proposition 5.2.4.** 设三角形的内心和外心分别为点  $I, O$ , 则  $O, In, I, Ex$  成调和点列.

*proof.* 由位似可知  $\frac{\overline{InO}}{\overline{InI}} = -\frac{R}{r}$ ,  $\frac{\overline{ExO}}{\overline{ExI}} = \frac{R}{r}$ , 故  $(O, In, I, Ex) = -1$ .  $\square$

下面的定理给出了  $Ge, Na$  的等角共轭点与  $In, Ex$  间的关系:

(2) 简单地讲, Gergonne 点是切点三角形与原三角形的透视中心, Nagel 点是旁切点三角形与原三角形的透视中心.

(3) 这一性质便是 Nagel 点“界心”这一称呼的来源, “界”即“分界”, 取“平分周长之意”.



**Proposition 5.2.5.** 对于一个三角形,  $In = gGe$ ,  $Ex = gNa$ .

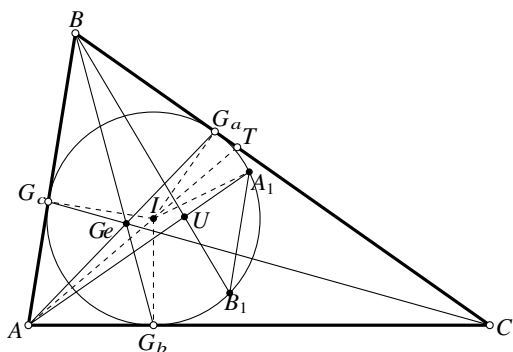


Figure 5.3

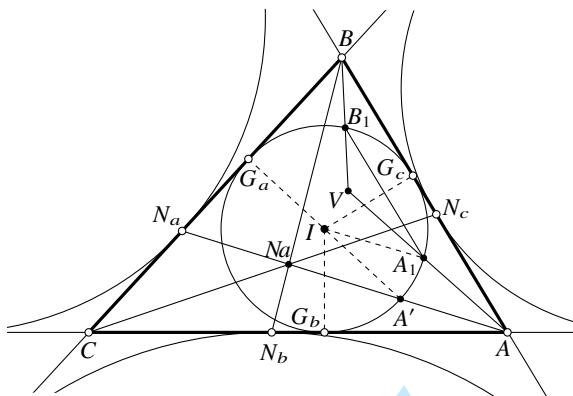


Figure 5.4

*proof.* i. 先证明  $In = gGe$ . 如图5.3, 设  $I$  是内心,  $U = gGe$ , 切点三角形为  $\triangle G_a G_b G_c$ . 直线  $AU, BU, CU$  与  $I$  的较远的一个交点分别为点  $A_1, B_1, C_1$ . 作  $\angle BAC$  的平分线交  $BC$  于点  $T$ . 那么:

$$\angle G_a I A_1 = 2\angle G_a I T = 2(\angle A I C - 90^\circ) = 2\left(\angle ABC + \frac{\angle BAC}{2} - 90^\circ\right),$$

$$\angle G_c I A_1 = \angle G_a I G_c + \angle G_a I A_1 = (180^\circ - \angle ABC) + 2\left(\angle ABC + \frac{\angle BAC}{2} - 90^\circ\right) = \angle BAC + \angle ABC.$$

同理  $\angle G_c I B_1 = \angle BAC + \angle ABC$ , 故  $AB \parallel A_1 B_1$ .

类似地,  $A_1 C_1 \parallel AC, B_1 C_1 \parallel BC$ , 故  $\triangle ABC$  与  $\triangle A_1 B_1 C_1$  关于  $U$  位似. 而  $\odot(ABC) = C, \odot(A_1 B_1 C_1) = I$  为这一位似的对应图形, 故  $C, I$  关于  $U$  位似. 结合位置关系可知  $U$  为内位似中心  $In$ .

ii. 再证  $Ex = gNa$ . 如图5.4, 设  $I$  是内心,  $V = gN$ , 切点三角形为  $\triangle G_a G_b G_c$ , 旁切点三角形为  $\triangle N_a N_b N_c$ , 线段  $VA, VB, VC$  分别交  $I$  于点  $A_1, B_1, C_1$ . 我们需要下面的引理:  $\square$

**Lemma 5.2.6.** 设  $\triangle ABC$  在  $\angle A$  内的旁切圆以及内切圆分别切边  $BC$  于点  $N_a, G_a$ , 则点  $G_a$  在内切圆上的对径点  $A'$  在点  $A$  与点  $N_a$  的连线上.

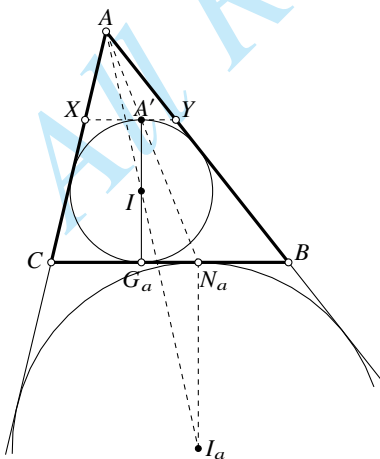


Figure 5.5

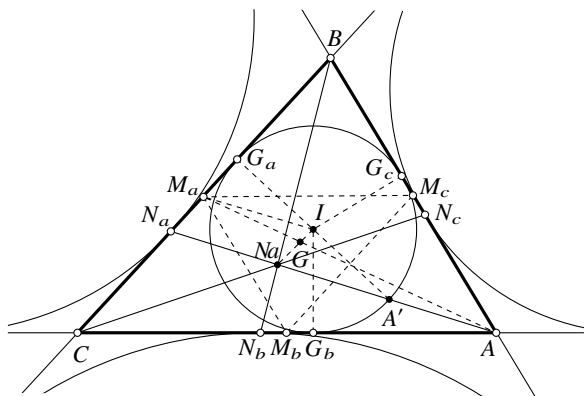


Figure 5.6

*proof.* 如图5.5, 过点  $A'$  作  $XY \parallel CB$ , 分别与边  $AB, AC$  交于点  $Y, X$ , 则  $I_{\triangle ABC} = I_{\triangle XYA}$ .

由此, 考虑以  $A$  为中心的位似变换, 它将  $\triangle XYA$  变为  $\triangle CBA$ , 则  $I_{\triangle ABC} = I_{\triangle XYA}$  变为  $I_{\triangle BCA}$ , 对应圆与对应边的切点  $A', N_a$  为位似下的对应的, 从而  $A, A', N_a$  三点共线.  $\square$

回到命题的证明.

back to the proof of (5.2.5). 由(5.2.6), 线段  $N_aA$  与  $I$  的靠近  $A$  一侧的交点  $A'$  为  $G_a$  在  $I$  上的对径点. 那么:

$$\begin{aligned}\angle A'IA_1 &= 2\angle A'VA = 2(\angle N_aA'G_a - \angle A'AI) = 2(90^\circ - \angle G_aN_aA - \angle A'AI) \\ &= 2(90^\circ - \angle BCA - \angle CAN_a - \angle N_aAI) = 2\left(90^\circ - \angle BCA - \frac{\angle CAB}{2}\right), \\ \angle G_cIA_1 &= \angle 180^\circ - \angle G_aIG_c - \angle A'IA_1 = \angle ABC - 2\left(90^\circ - \angle BCA - \frac{\angle CAB}{2}\right) \\ &= \angle ABC + \angle CAB + 2\angle BCA - 180^\circ = \angle BCA.\end{aligned}$$

同理  $\angle G_cIB_1 = \angle BCA$ , 因而有  $A_1B_1 \parallel AB$ .

同理我们有另两组平行, 从而存在以  $V$  为中心的位似变换将  $\triangle ABC$  变成  $\triangle A_1B_1C_1$ , 而  $\odot(ABC) = C$  与  $\odot(A_1B_1C_1) = I$  为这一位似下的位似图形, 故  $C$  与  $I$  关于  $V$  位似, 结合位置关系可知  $V$  为外位似中心  $Ex$ .  $\square$

关于 Nagel 点, 我们还有下面的有趣的结果:

**Proposition 5.2.7.** 对于一个三角形, 内心  $I$ 、重心  $G$  与  $Na$  共线, 且  $I = eNa$ . 此三点所共直线称为 Nagel 线.

*proof.* 如图5.6, 对于  $\triangle ABC$ , 设  $\triangle G_aG_bG_c, \triangle N_aN_bN_c, \triangle M_aM_bM_c$  分别为切点三角形、旁切点三角形、中点三角形. 由(5.2.6)可知  $G_a$  的对径点  $A'$  在  $AN_a$  上.

由于  $N_i, G_e$  等截共轭, 故  $M_a$  为  $N_aG_a$  的中点, 而  $I$  为  $A'G_a$  的中点, 从而  $M_aI \parallel AN_a$ .

考虑中点三角形  $M_aM_bM_c$  与原三角形  $\triangle ABC$  的位似, 由于  $M_a, A$  为一组对应点, 且  $M_aI \parallel AN_a$ , 故  $M_aI, AN$  为这一位似的对应直线, 从而  $M_aI$  过  $\triangle M_aM_bM_c$  的 Nagel 点.

同理  $M_bI, M_cI$  也过  $\triangle M_aM_bM_c$  的 Nagel 点, 故  $M_aI, M_bI, M_cI$  的交点  $I$  即  $\triangle M_aM_bM_c$  的 Nagel 点.

因此, 点  $I, Na$  为  $\triangle M_aM_bM_c$  与  $\triangle ABC$  的位似的一组对应点, 故  $I = eNa$ .  $\square$

**Corollary 5.2.8.** 三角形的内心为其中点三角形的 Nagel 点.

在本节的最后, 我们介绍一个与 Nagel 点有一定关联的点——Spieker 中心.

**Definition 5.2.9.**  $\triangle ABC$  的中点三角形的内心  $Sp$  称为  $\triangle ABC$  的 Spieker 中心 (Spieker center).  $\triangle ABC$  的中点三角形的内切圆称为  $\triangle ABC$  的 Spieker 圆.

根据定义, 我们立即可以得到如下结论:

**Proposition 5.2.10.** 三角形的 Spieker 中心为内心的补点.

*proof.* 利用中点三角形与原三角形的位似即证.  $\square$

下面的几个命题揭示了 Spieker 心与 Nagel 点的联系:

**Proposition 5.2.11.** 三角形的 Spieker 中心为 Nagel 点与内心的中点.

*proof.* 这是(5.2.7)与(5.2.11)的直接推论.  $\square$

**Proposition 5.2.12.** 一个三角形的 Nagel 点与重心分别为为 Spieker 圆与内切圆的外位似中心和内位似中心.

*proof.* 由中点三角形与原三角形的位似, Spieker 圆与内切圆半径之比为 1:2, 记重心与内心分别为点  $G, I$ ,  $\frac{\overline{GI}}{\overline{GSp}} = -\frac{1}{2}$ ,  $\frac{\overline{NaI}}{\overline{NaSp}} = 2$ , 由此原命题成立.  $\square$

**Proposition 5.2.13.** (如图5.7) 对于  $\triangle ABC$ , 设中点三角形为  $\triangle M_a M_b M_c$ , 线段  $NaA, NaB, NaC$  的中点分别为  $A_1, A_2, A_3$ , 则  $\triangle A_1 A_2 A_3$  的内切圆为 Spieker 圆且  $\triangle A_1 B_1 C_1$  与  $\triangle M_a M_b M_c$  关于  $Sp$  中心对称, 且 Spieker 圆与  $\triangle ABC$  以及  $\triangle M_a M_b M_c$  的边的六个切点形成了 Spieker 圆上的三对对径点.

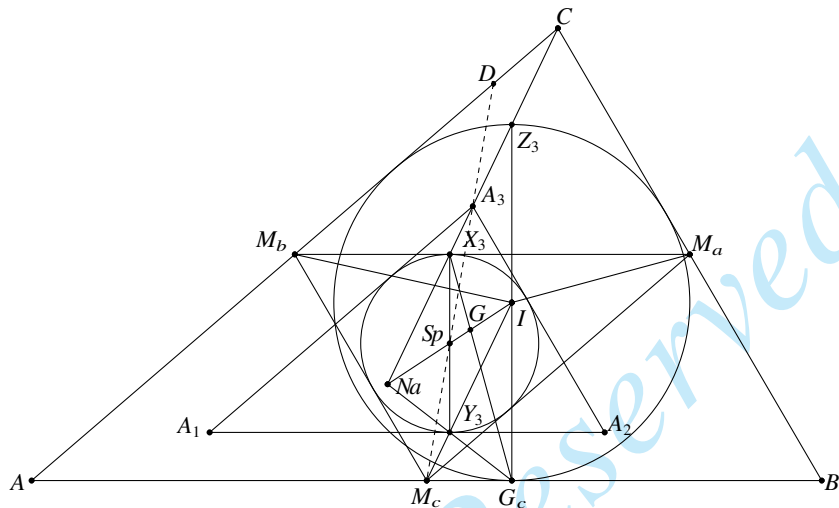


Figure 5.7

*proof.*  $Na$  为 Spieker 圆与内切圆的外位似中心, 且位似比为  $\frac{1}{2}$ , 而同时  $\mathfrak{h}_{Na, 1/2}(\triangle ABC) = \triangle A_1 B_1 C_1$ , 故由位似知 Spieker 圆为  $\triangle ABC$  的内切圆.

此外, 显然  $A_1 A_2 \parallel M_a M_b$ , 而它们均与 Spieker 圆均相切, 故而两个切点  $X_3, Y_3$  为 Spieker 圆的对径点, 同理有另两组对径点. 这样  $\triangle A_1 B_1 C_1$  与  $\triangle M_a M_b M_c$  的对称性就是显然的了.  $\square$

**Proposition 5.2.14.** 一个三角形的 Nagel 点与三角形顶点的连线与中点三角形对应边的交点为 Spieker 圆与中点三角形的这条边的切点. 即, 如图5.7, 设  $\triangle ABC$  的中点三角形为  $\triangle M_a M_b M_c$ , 则  $NaC$  与  $M_a M_b$  的交点  $X_3$  为  $M_a M_b$  与 Spieker 圆的切点.

*proof.*  $CNa$  平分  $\triangle ABC$  的周长, 而  $\triangle CM_b M_a$  与  $\triangle CAB$  关于  $C$  点位似, 从而  $CNa$  也平分  $\triangle CM_a M_b$  的周长, 设  $M_a M_b \cap NaC = X'_3$ , 则  $CM_b + M_b X'_3 = CM_a + M_a X'_3$ .

注意四边形  $CM_b M_c M_a$  为平行四边形, 故上式表明  $M_b M_c + M_a X'_3 = M_a M_c + M_b X'_3$ , 而由(0.6.14)可知 Spieker 圆与  $M_a M_b$  的切点  $X_3$  满足  $M_b M_c + M_a X_3 = M_a M_c + M_b X_3$ , 故  $X_3 = X'_3$ .  $\square$

**Proposition 5.2.15.** 连接三角形一条边的中点与 Spieker 中心的直线平分三角形的周长.

*proof.* 考虑如图5.7的位形,  $\triangle M_a M_b M_c$  为  $\triangle ABC$  的中点三角形, 下  $SpM_c$  平分  $\triangle ABC$  的周长. 设  $M_c Sp \cap AC = D$ , 作  $BE \parallel M_c Sp$  交  $AC$  的延长线于点  $E$  (图中未画出).

由于  $\triangle M_a M_b M_c$  与  $\triangle ABC$  位似,  $M_c Sp$  为  $\triangle A_1 B_1 C_1$  的一条角平分线, 故  $M_c Sp$  平行于  $\angle ACB$  的平分线, 故  $BE$  平行于  $\angle ACB$  的平分线, 由此易得  $CB = CE$  (4), 注意  $M_c D$  为  $\triangle ABE$  的中位线, 故  $AM_c + AD = BM_c + ED = BM_c + DC + CE = BM_c + DC + CB$ .  $\square$

(4) 这是因为, 若设  $\angle ACB$  的平分线交  $AB$  于  $T$ , 则  $\angle CBE \stackrel{CT \parallel BE}{=} \angle BCT = \angle ACT \stackrel{CT \parallel BE}{=} \angle CEB$ .

## 练习

**Problem 5.8.** 将一根质量分布均匀的细铁丝弯折形成一个三角形, 证明: 此三角形的质心为它的 Spieker 中心.

**Problem 5.9.** 设  $\triangle ABC$  的  $I$  切  $BC$  于  $D$ ,  $Ge^*$  是  $\triangle ABD$  的 Gergonne 点,  $Na^*$  是  $\triangle ABD$  的 Nagel 点, 证明:  $(BGe^* \cap CNa^*) \in I$ .

**Problem 5.10.** 设  $\triangle ABC$  的垂心为  $H$ , 南极点三角形为  $\triangle A'B'C'$ , 称点  $f_{BC}(A')$ ,  $f_{CA}(B')$ ,  $f_{AB}(C')$  组成的三角形为 Fuhrmann 三角形, 其外接圆称为 Fuhrmann 圆. 证明:  $HNa$  为 Fuhrmann 圆的直径.

**Problem 5.11.** 设  $\triangle ABC$  的内心为  $I$ , 中点三角形为  $\triangle M_a M_b M_c$ , 切点三角形为  $\triangle G_a G_b G_c$ , 取  $\triangle A_1 B_1 C_1$  使得它的各边与  $\triangle ABC$  的各边对应平行且内切圆为 Spieker 圆, 证明: 直线  $A_1 A_2, M_c I, NG_c$  交于一点, 且交点为 Spieker 圆与  $A_1 A_2$  的切点  $Y_3$ .

**Problem 5.12.** 证明: 对于一个三角形,  $\epsilon$  就是内心的三线性极线关于  $C$  的极点.

**Problem 5.13.** 证明: 一个三角形的内心的外接 Ceva 三角形的切线三角形与原三角形透视, 且透视中心为原三角形的  $Ex$ .

**Problem 5.14.** 对于  $\triangle ABC$ , 点  $A', B', C'$  分别是  $A, B, C$  在某一以  $Na$  为中心的反演点,  $\triangle PQR$  是  $Na$  关于  $\triangle A'B'C'$  的反垂足三角形,  $\triangle XYZ$  是  $Na$  关于  $\triangle PQR$  的 Ceva 三角形. 证明:  $Na$  是  $\triangle XYZ$  的外心.

**Problem 5.15.** 若一个动三角形的内心  $I$  与外心  $O$  为定点, 证明:  $Sp$  的轨迹是一个以  $I, O$  的中点为圆心的圆.

**Problem 5.16.** \* 设  $\triangle ABC$  的内心、垂心、外心分别为点  $I, H, O$ , 证明:  $Ge, I, f_O(H)$  共线.

## 5.3 Lemoine 点

### 5.3.1 Lemoine 点

本节我们介绍一个重要的点——Lemoine 点.

**Definition 5.3.1.** (如图5.8) 设  $\triangle ABC$  的中点三角形为  $\triangle M_a M_b M_c$ , 中线  $AM_a, BM_b, CM_c$  关于  $\angle A, \angle B, \angle C$  的  $\angle BAC$  的平分线的对称直线分别为  $AA', BB', CC'$ , 则将  $AA', BB', CC'$  称为三角形  $ABC$  的三条类似中线/陪位中线 (symmedian). 三角形的三条类似中线交于一点, 称为三角形的类似重心/陪位重心/共轭重心 (symmedian point) 或 Lemoine 点 (Lemoine point).

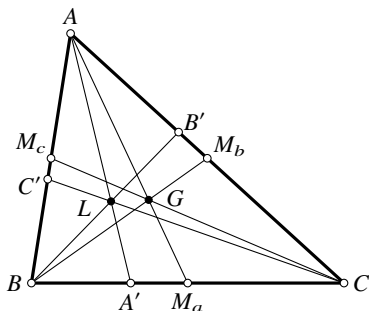


Figure 5.8

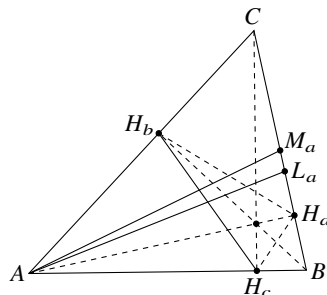


Figure 5.9

由上述定义, 显然有如下结果:

**Proposition 5.3.2.** 三角形的 Lemoine 点与重心等角共轭.

我们先给出几个类似中线的性质.

**Proposition 5.3.3.** 类似中线分对边所成比例等于两条邻边的长度之比的平方. 即, 设三角形  $ABC$  的类似中线  $AA'$  交  $BC$  于点  $A'$ , 则  $\frac{BA'}{CA'} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$ .

*proof.* 设  $\triangle ABC$  的一条中线  $AM$  交  $BC$  于点  $M$ , 则  $BM=CM$ , 利用(4.4.8)即证.  $\square$

**Proposition 5.3.4.** 三角形的一条类似中线平分它的垂三角形的对应边. 即, 若  $\triangle ABC$  垂三角形为  $\triangle H_a H_b H_c$ , 则  $\triangle ABC$  的类似中线  $AL_a$  平分  $H_b H_c$ , 如图5.9.

*proof.* 设  $M_a A$  为  $\triangle ABC$  的一条中线. 注意点  $C, B, H_c, H_b$  四点共圆, 从而  $\angle AH_b H_c = -\angle ABC$ ,  $\angle AH_c H_b = -\angle ACB$ , 故  $\triangle AH_b H_c \sim \triangle ACB$ . 又  $\angle L_a AB = \angle M_a AC$ , 则直线  $AL_a, AM_a$  是这一逆相似下的对应直线, 而  $AM_a$  是  $\triangle ABC$  的中线, 则  $AL_a$  是  $\triangle AH_b H_c$  的中线.  $\square$

接下来我们将给出几个 Lemoine 点的重要性质.

**Theorem 5.3.5** (Grebe 第一定理). Lemoine 点到三角形三边的 [有向] 距离之比等于对应边的长度之比; 反之, 到三角形三边的 [有向] 距离之比等于对应边的长度之比的点就是 Lemoine 点.

*proof.* 由(0.5.3)(4.4.9)即证.  $\square$

**Theorem 5.3.6** (Grebe 第二定理). 给定三角形  $ABC$ , Lemoine 点到三角形三边的距离的平方和最小.

*proof.* 设点  $P$  到三边的距离分别为  $d_a, d_b, d_c$ , 三边长度分别为  $a, b, c$ . 易知取最小值时  $P$  在三角形内, 由 Cauchy 不等式<sup>(5)</sup>得  $(a^2 + b^2 + c^2)(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2) \geq (ad_a + bd_b + cd_c)^2 = 4S_{\triangle ABC}^2$ , 根据 Cauchy 不等式的取等条件, 结合(5.3.5)即证.  $\square$

**Lemma 5.3.7.** 三角形的一边关于其外接圆的极点与它所对的顶点的连线是一条类似中线.

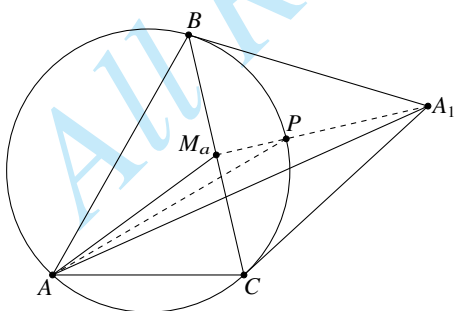


Figure 5.10

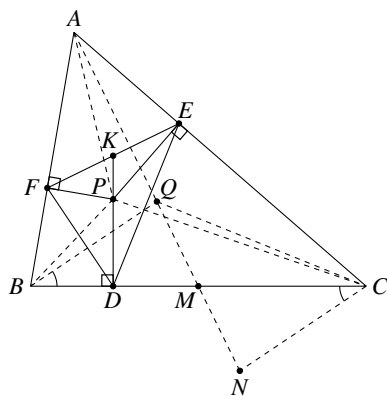


Figure 5.11

*proof.* 如图5.10, 对于  $\triangle ABC$  的边  $BC$ , 它关于  $C$  的极点  $A_1$  是  $BC$  边中点  $M_a$  关于  $C$  的反演点. 设  $\widehat{BC}$  中点为  $P$ , 则显然  $M_a, P, A_1$  共线, 由(4.2.10)知  $AP$  平分  $\angle M_a A A_1$ . 而显然  $AP$  平分  $\angle BAC$ , 则  $AM_a, AA_1$  是  $\angle A$  的等角线, 即证.  $\square$

(5) Cauchy 不等式称,  $\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2$ , 等号成立当且仅当: 对所有不等于零的  $b_i$ ,  $\frac{a_i}{b_i}$  均相等; 且对所有等于零的  $b_i$ ,  $a_i = 0$ . 它的几何含义是  $\mathbb{R}^n$  中的两向量的模长平方之积大于等于它们的内积之平方.

**Proposition 5.3.8.** 三角形的切线三角形为 Lemoine 点的反 Ceva 三角形.

*proof.* 由(5.3.7)显然.  $\square$

**Corollary 5.3.9.** 保持三角形的外接圆不变的射影变换将原三角形的 Lemoine 点变为新三角形的 Lemoine 点.

*proof.* 利用(5.3.8), 为作出三角形的类似重心, 只需作切线三角形与原三角形的透视中心, 而上述构造中的“作切线”“取透视中心”等操作均在射影变换下保持不变, 因此若保持其外接圆不变, Lemoine 点在射影变换还是 Lemoine 点.  $\square$

**Corollary 5.3.10.** 对于一个三角形, 点  $G_e$  为切点三角形的 Lemoine 点.

*proof.* 由切点三角形的定义以及(5.3.8)即知.  $\square$

最后, Lemoine 点还有如下重要性质:

**Theorem 5.3.11** (Lemoine). 给定  $\triangle ABC$ , 一点是其垂足三角形的重心的充要条件该点是  $\triangle ABC$  的 Lemoine 点.

*proof.* 如图5.11, 设点  $P, Q$  是一对等角共轭点, 点  $P$  的垂足三角形为  $\triangle DEF$ ,  $AQ \cap BC = M$ , 过点  $C$  作  $CN \parallel BQ$  交  $AM$  于点  $N$ ,  $DP \cap EF = K$ . 此时:

$$\begin{aligned}\angle CNQ &= \angle BQM = \angle QBA + \angle QAB \stackrel{P=Q}{=} \angle PBC + \angle PAC \stackrel{P,D,B,F \text{共圆}}{=} \angle PFE + \angle PFD = \angle DFE, \\ \angle NCQ &= \angle NCB + \angle QCB = \angle QBC + \angle QCB \stackrel{P=Q}{=} \angle PBA + \angle PAC \stackrel{P,D,B,F \text{共圆}}{=} \angle PDF + \angle PDE = \angle FDE.\end{aligned}$$

因此,  $\triangle CNQ \sim \triangle DFE$ . 又  $\angle NCM = \angle QBC \stackrel{P=Q}{=} \angle PBA \stackrel{P,D,B,F \text{共圆}}{=} \angle PDF = \angle FDK$ , 则直线  $CM, DK$  是这一相似的对应直线, 点  $M, K$  是这一相似的对应点.

充分性: 此时点  $P$  即 Lemoine 点, 点  $Q$  即重心, 点  $M$  为  $BC$  边的中点, 四边形  $BNCQ$  为平行四边形, 故  $CM$  为  $\triangle CNQ$  的中线, 则  $DK$  为  $\triangle DEF$  的中线. 同理  $FP, EP$  是  $\triangle DEF$  的另两条中线, 即证.

必要性: 此时  $K$  为  $EF$  的中点, 则  $M$  为  $CQ$  中点, 故四边形  $BNCQ$  为平行四边形, 故  $M$  为  $BC$  中点,  $AM$  为  $\triangle ABC$  的中线. 同理  $BQ, CQ$  是  $\triangle ABC$  的另两条中线, 故  $Q$  为重心,  $P$  为 Lemoine 点.  $\square$

## 练习

**Problem 5.17.** 设点  $G, L$  分别为  $\triangle ABC$  的重心和 Lemoine 点, 点  $H'$  为点  $L$  的垂足三角形的垂心. 证明: 点  $G, K, H$  共线, 且  $GK = KH$ .

**Problem 5.18.** 给定  $\triangle ABC$ , 动点  $D, E, F$  分别在直线  $BC, CA, AB$  上运动, 证明: 当  $DE^2 + EF^2 + FD^2$  取最小值时,  $\triangle DEF$  为 Lemoine 点  $L$  的垂足三角形.

**Problem 5.19.** 设  $\triangle ABC$  的垂三角形为  $\triangle H_a H_b H_c$ , 点  $M$  为  $BC$  中点,  $AM \cap H_b H_c = X$ , 证明: 直线  $XH_a$  过  $\triangle ABC$  的 Lemoine 点  $L$ .

**Problem 5.20.** 给定  $\triangle ABC$ , 点  $L$  为  $\triangle ABC$  的 Lemoine 点.

(1) 过  $P$  作  $BC$  的平行线, 分别交  $AB, AC$  于点  $D_1, D_2$ , 过  $P$  作  $CA$  的平行线, 分别交  $BC, BA$  于点  $E_1, E_2$ , 过  $P$  作  $AB$  的平行线, 分别交  $AP, BP$  于点  $F_1, F_2$ . 证明: 点  $D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2$  共圆 (称为  $\triangle ABC$  的第一 Lemoine 圆).

(2) 过  $P$  作  $BC$  的逆平行线, 分别交  $AB, AC$  于点  $D_1, D_2$ , 过  $P$  作  $CA$  的逆平行线, 分别交  $BC, BA$  于点  $E_1, E_2$ , 过  $P$  作  $AB$  的逆平行线, 分别交  $AP, BP$  于点  $F_1, F_2$ . 证明: 点  $D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2$  共圆 (称为  $\triangle ABC$  的第二 Lemoine 圆).



**Problem 5.21.** 设  $\triangle ABC$  的中点三角形为  $\triangle DEF$ ,  $\odot(AED) \cap \odot(CEF) = P, E$ ,  $\odot(BDE) \cap \odot(CDF) = Q, D$ ,  $PE \cap DQ = K$ . 证明:  $CK$  是  $\triangle ABC$  的一条类似中线.

### 5.3.2 Lemoine 点的应用

本节我们应用 Lemoine 点的知识, 来看几个相关的特征点.

#### 中聚点

**Theorem 5.3.12.** 一个三角形的旁心三角形与中点三角形透视, 称透视中心  $M_i$  为三角形的 Mittenpunkt/中聚点 (middles-point)<sup>(6)</sup>.

*proof.* 注意三角形的旁心三角形的垂三角形就是原三角形, 对旁心三角形使用(5.3.4), 可知旁心三角形与中点三角形对应顶点的连线组成原三角形的类似中线, 则三组对应顶点的连线组成旁心三角形的 Lemoine 点.  $\square$

由上述证明过程, 我们知道:

**Proposition 5.3.13.** 三角形的中聚点为它的旁心三角形的 Lemoine 点.

#### Lemoine 反补点

**Definition 5.3.14.** 下称一个三角形的反补三角形的 Lemoine 点  $Al$  为原三角形的 Lemoine 反补点.

**Proposition 5.3.15.**  $\triangle ABC$  的垂心  $H = tAl$ .

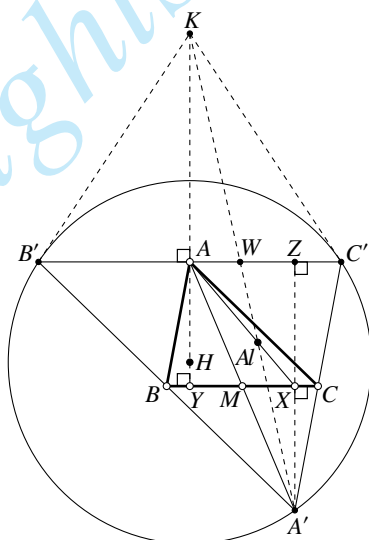


Figure 5.12

*proof.* 如图5.12, 设  $\triangle ABC$  的反补三角形  $\triangle A'B'C'$  的外接圆在  $B', C'$  处的切线交于  $K$ , 由(5.3.7)知  $Al \in KA'$ . 作  $A'X \perp BC$  于点  $X$ ,  $AY \perp BC$  于点  $Y$ . 记  $A'X \cap B'C' = Z$ ,  $KA' \cap B'C' = W$ . 设  $\triangle ABC$  的垂心为  $H$ , 则  $H \in AY$ ; 设  $BC$  边的中点为  $M$ , 显然  $A, M, M'$  共线.

(6) Mittenpunkt 这一称呼源于德语, 在德语中, mitten (adv.) 在……中间, Punkt (m.) 点, 它不是人名, 故称之为“Mitten 点”是不合适的; 由于 Mittenpunkt 一词中已经含有“点”的含义, “Mittenpunkt 点”的叫法是不合适的. “中聚点”是中文的俗称, 在中文语境下一些地方也会直接沿用德文的 Mittenpunkt 这一称呼.

$\triangle A'B'C'$  的切线三角形正是  $Al$  关于  $\triangle A'B'C'$  的反 Ceva 三角形, 故由(4.3.4)知  $(M^a, Z, Al, Al^a)$  调和, 故由(3.2.9),  $(A', K; Al, W) = (A', K; W, Al)^{-1} = \frac{1}{1 - (A', W; Al, K)} = \frac{1}{2}$ . 从而  $\frac{AlA'}{AK} = \frac{WA'}{2WK} = \frac{A'Z}{2AK} = \frac{A'X}{AK}$ . 因此点  $X, Al, A$  共线, 而  $X, Y$  关于  $M$  对称. 由对称性, 上述讨论表明  $Al, H$  等截共轭.  $\square$

### 垂聚点

下面的定理引出了垂聚点的概念.

**Proposition 5.3.16.** 三角形的切线三角形与垂三角形位似, 下称此位似的位似中心  $Ht$  为垂聚点.

*proof.* 设  $\triangle ABC$  的切线三角形为  $\triangle L^a L^b L^c$ , 垂三角形为  $\triangle H_a H_b H_c$ , 垂心与外心分别为  $H, O$ . 显然  $L^b L^c \perp AO$ ; 另一方面,  $H = \mathcal{Q}O$ , 利用(4.4.2)得  $H_b H_c \perp AO$ . 因此  $L^b L^c \parallel H_b H_c$ , 同理其余对应边亦平行, 故有位似.  $\square$

**Proposition 5.3.17.** 对于一个三角形,  $Ht = \mathcal{Q}Al$ .

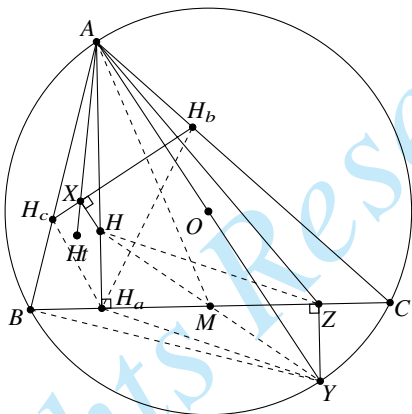


Figure 5.13

*proof.* 如图5.13, 设  $\triangle ABC$  的垂三角形为  $\triangle H_a H_b H_c$ , 过  $H$  作  $HX \perp H_b H_c$  于  $X$ , 注意  $H$  为垂三角形的内心且  $X$  为垂三角形的内切圆与  $H_b H_c$  的切点, 外心  $O$  为切线三角形的内心且  $A$  为切线三角形的内切圆与一边的切点, 故由位似知  $Ht, X, A$  共线.

设  $A$  在外接圆上的对径点为  $Y$ ,  $YZ \perp BC$  于  $Z$ , 则由(0.5.16)知四边形  $HB_YC$  为平行四边形, 因而  $H, Y$  关于  $BC$  边中点  $M$  对称,  $H_a, Z$  关于  $M$  对称,  $H_a H \parallel YZ$ .

利用(0.5.22)(0.6.18)可知  $HX \cdot AY = AH \cdot H_a H = AH \cdot YZ$ , 即有  $\frac{XH}{ZY} = \frac{AH}{AY}$ ; 另一方面, 由于  $XH \parallel AZ$  且  $AH \parallel YZ$ , 故  $\angle XHA = \angle ZYA$ . 两者结合得  $\triangle AXH \sim \triangle AZY$ .

因而  $\angle XAH = \angle ZAY$ , 而  $\angle BAH = \angle OAC$ , 故  $\angle BAX = \angle CAZ$ , 即  $AH$  与  $AZ$  为  $\angle A$  的等角线. 同理有另两组等角线, 则上述讨论表明  $Ht = \mathcal{Q}tH$ , 而  $Al = tH$ , 故  $Ht = \mathcal{Q}Al$ .  $\square$

**Proposition 5.3.18.** 对于一个三角形,  $Ht \in \mathcal{E}$ .

*proof.* 显然切线三角形的内心为原三角形的外心  $O$ , 垂足三角形的内心为原三角形的垂心  $H$ , 由位似知  $O, H, Ht$  共线, 明所欲证.  $\square$

### Exeter 点

在介绍 Exeter 点之前, 我们先引入一个新的概念: 称三角形的重心的外接 Ceva 三角形为外接中线三角形 (circummedial triangle). 下面的定理引出了 Exeter 点的概念:

**Theorem 5.3.19.** 一个三角形的切线三角形与外接中线三角形透视, 称透视中心  $Et$  为三角形的 Exeter 点.

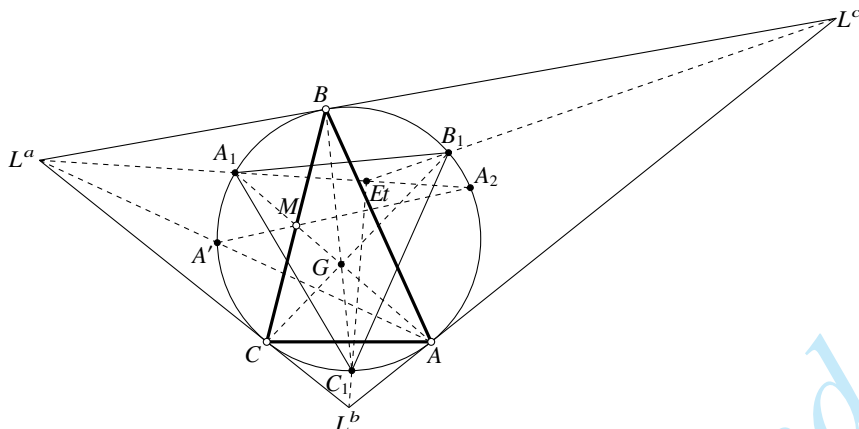


Figure 5.14

*proof.* 如图5.14所示, 设  $\triangle ABC$  的切线三角形为  $\triangle L^a L^b L^c$ ,  $AL^a$  与  $C$  的另一交点为  $A'$ , 作  $AL^a$  关于  $\angle CL^a B$  的等角线, 交  $C$  于点  $A_1, A_2$ , 其中  $A_1, A$  在直线  $BC$  的异侧.

设  $AA_1' \cap A'A_2' = M$ , 由(3.6.11),  $M$  在点  $L^a$  关于  $C$  的极线  $BC$  上; 另一方面,  $L^a A', L^a A_1$  是  $\angle BL^a C$  的等角线, 故  $M$  必在  $\angle BL^a C$  的平分线上. 结合两者可知点  $M$  就是  $BC$  的中点.

由于  $AM$  过  $\triangle ABC$  的重心  $G$ , 则  $A_1$  就是  $\triangle ABC$  的外接中线三角形的一个顶点, 同理取出外接中线三角形的另两个顶点  $B_1, C_1$ , 有另两组等角线关系. 而由(5.3.8),  $AL^a, BL^b, CL^c$  交于  $\triangle ABC$  的 Lemoine 点  $L$ , 由等角线关系,  $L^a A_1, L^b B_1, L^c C_1$  交于点  $Et = \mathcal{G}_{\triangle L^a L^b L^c}(L)$ .  $\square$

由上述证明, 我们顺便得到了如下结论:

**Proposition 5.3.20.** 对于一个三角形,  $Et$  与 Lemoine 点  $L$  关于切线三角形等角共轭.

另外, Exeter 点还有如下性质:

**Proposition 5.3.21.** 对于一个三角形,  $Et \in \mathcal{E}$ .

为了证明这一点, 我们需要引入三角形的又一个特征点: 切线三角形的外心  $To$ , 下称之为切外心.

**Lemma 5.3.22.** 对于一个三角形,  $To \in \mathcal{E}$ .

*proof.* 考虑切线三角形与垂足三角形的位似, 位似中心为垂触点  $Ht$ . 易知切线三角形与垂足三角形的外心分别为  $To, Ni$ , 故  $Ht, To, Ni$  共线. 而  $Ht, Ni \in \mathcal{E}$ , 故  $To \in \mathcal{E}$ .  $\square$

回到命题的证明.

*back to the proof of (5.3.21).* 易知  $\triangle ABC$  的 Lemoine 点  $L$  为切线三角形的 Gergonne 点, 而  $Et$  与  $L$  关于切线三角形等角共轭, 因此  $Et$  为切线三角形的内位似中心. 而切线三角形的外心为  $To$ , 内心为原三角形的外心  $O$ , 故  $Et \in OT_o$ . 由(5.3.22)知  $To \in \mathcal{E}$ , 而  $O \in \mathcal{E}$ , 从而  $Et \in \mathcal{E}$ .  $\square$

练习

**Problem 5.22.** 证明: 一个三角形的旁心三角形的中点三角形与原三角形有透视中心  $Mi$ .

**Problem 5.23.** 证明以下 Exeter 点的推广: 给定  $\triangle ABC$ , 对于平面中一点  $P$ ,  $P$  的外接 Ceva 三角形与  $\triangle ABC$  的切线三角形透视. (称透视中心  $P'$  为点  $P$  的 Exeter 变换点.)

**Problem 5.24.** 设  $\triangle ABC$  的反补三角形为  $\triangle A'B'C'$ , 点  $A'', B'', C''$  分别为点  $A', B', C'$  在  $BC, CA, AB$  上的射影, 证明:  $\triangle ABC$  与  $\triangle A''B''C''$  有透视中心  $AI$ .

**Problem 5.25.** 证明:  $\triangle ABC$  的垂心的三线性极线关于  $C$  的极点就是  $Ht$ .

**Problem 5.26.** 证明: 若  $\triangle ABC$  的外心为点  $O$ , 则  $Ni, To, O, Ht$  成调和点列.

**Problem 5.27.** 设  $\triangle ABC$  的重心和外心分别为  $G, O$ , 证明: 点  $G, Et, O, Ht$  成调和点列.

**Problem 5.28.** \* 证明: 对于一个三角形,  $Mi = cGe$ .

**Problem 5.29.** \* 证明: 对于一个三角形,  $AI, Ge, Na$  共线.

## 5.4 切聚点

在 §5.3 中, 我们给出了中聚点的定义, 在本节中我们着重介绍其等角共轭点——切聚点. 我们先给出切聚点的定义以及它的相关性质, 稍后再证明它与中聚点等角共轭.

根据(0.6.7), 旁心三角形与切点三角形位似, 从而我们可以给出如下定义:

**Definition 5.4.1.** (如图5.15) 三角形的旁心三角形与切点三角形的位似中心  $Ta$  称为原三角形的切聚点.

由于位似, 我们可以得到切聚点的一些简单的性质:

**Proposition 5.4.2.** (如图5.15) 设  $\triangle ABC$  的切点三角形为  $\triangle G_a G_b G_c$ ,  $\widehat{BAC}$  的中点为  $N$ , 线段  $G_b G_c$  的中点为  $S$ ,  $G_a P \perp G_b G_c$  于  $P$ , 则点  $N, S, Ta$  共线, 点  $A, P, Ta$  共线.<sup>(7)</sup>

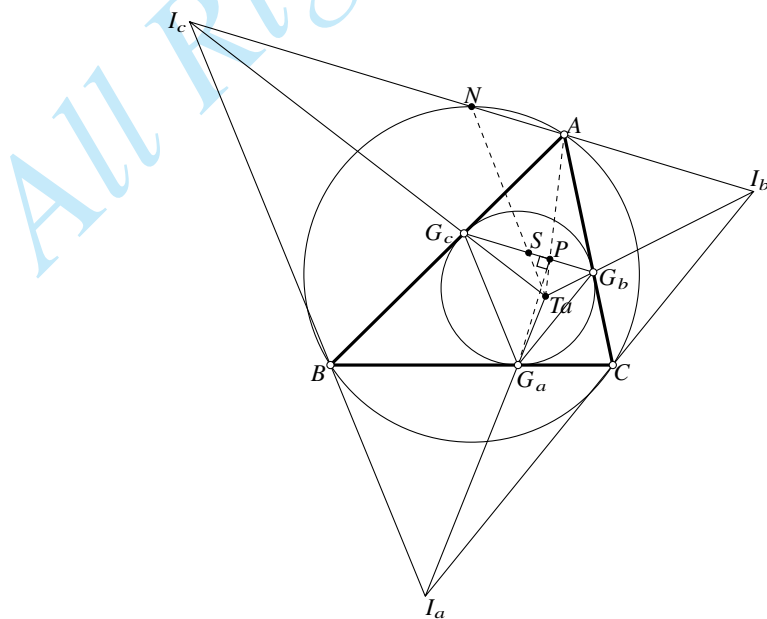


Figure 5.15

(7) 利用上面的性质刻画中聚点是一个好的方法, 这样我们可以避免把图画得很大!

*proof.* 设  $\triangle ABC$  的旁心三角形为  $\triangle I_a I_b I_c$ . 而  $N$  为  $I_b I_c$  的中点, 故在  $\triangle I_a I_b I_c$  与  $\triangle G_a G_b G_c$  的位似下,  $N, S, Ta$  共线.

由于  $I$  为  $\triangle I_a I_b I_c$  的垂心, 则  $I_a A \perp I_b I_c$ , 故  $A, P$  也是该位似的一对对应点, 则  $A, P, Ta$  共线.  $\square$

利用位似, 我们还可以证明如下的一个优美的结论:

**Proposition 5.4.3.** (如图5.16) 设  $G$  为三角形的重心, 则  $Mi, Ta, G, Ge$  共线, 且  $Mi = cGe$ .

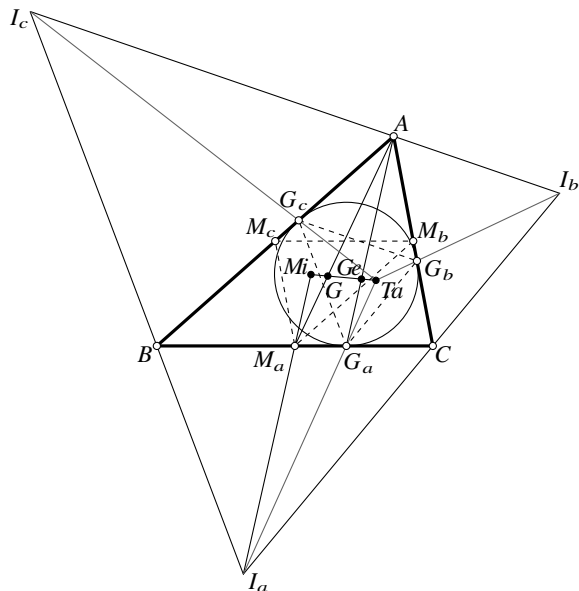


Figure 5.16

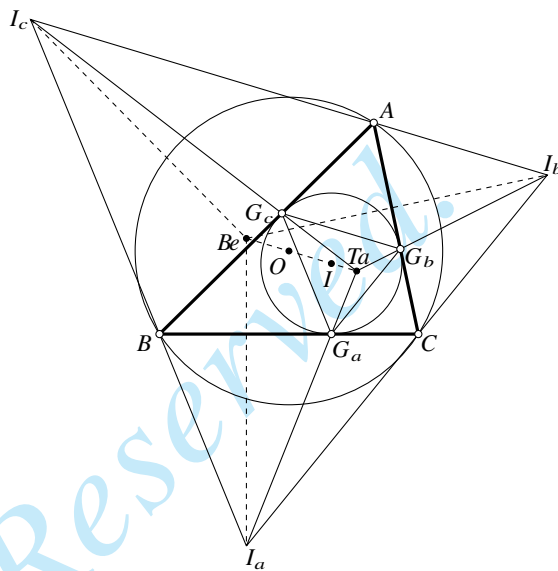


Figure 5.17

*proof.* 沿用(5.4.2)的记号, 由(5.3.10)(5.3.13),  $Ge, Mi$  分别为  $\triangle G_a G_b G_c$  与  $\triangle I_a I_b I_c$  的 Lemoine 点, 由于  $\triangle G_a G_b G_c$  和  $\triangle I_a I_b I_c$  的位似中心为  $Ta$ , 从而  $Mi, Ge, Ta$  共线.

记中点三角形为  $\triangle M_a M_b M_c$ , 如图5.16. 已证在  $\triangle I_a I_b I_c, \triangle G_a G_b G_c$  的位似下,  $Mi, G$  是对应点, 从而  $I_a Mi \parallel G_a Ge$ , 即  $I_a Mi \parallel AGe$ .

由中聚点的定义知  $M_a \in I_a Mi$ , 从而  $M_a Mi \parallel AGe$ . 同时,  $\triangle M_a M_b M_c$  与  $\triangle ABC$  位似而  $M_a, A$  为对应点, 故  $M_a Mi, AGe$  是该位似下的对应直线, 即  $M_a Mi$  过  $\triangle M_a M_b M_c$  的 Gergonne 点, 同理  $M_c Mi, M_b Mi$  也过  $\triangle M_a M_b M_c$  的 Gergonne 点, 故  $Mi$  就是  $\triangle M_a M_b M_c$  的 Gergonne 点.

因而,  $Mi$  与  $Ge$  为  $\triangle ABC$  与  $\triangle M_a M_b M_c$  的位似的一对对应点, 而这一位似的位似中心为  $G$ , 从而  $Mi, G, Ge$  共线, 且  $Mi = cGe$ .  $\square$

顺便, 由上述证明, 我们得到了中聚点的一个小性质:

**Proposition 5.4.4.** 对于一个三角形,  $Mi$  为中点三角形的 Gergonne 点.

在继续我们的讨论之前, 我们引入 Bevan 点:

**Proposition 5.4.5.** (如图5.17)  $\triangle ABC$  的旁心三角形为  $\triangle I_a I_b I_c$ , 过  $I_a$  作  $BC$  的垂线  $l_a$ , 类似作  $l_b, l_c$ , 则直线  $l_a, l_b, l_c$  交于一点  $Be$ , 称为  $\triangle ABC$  的 Bevan 点.

*proof.* 注意  $I$  为旁心三角形的垂心,  $ABC$  为  $\triangle I_a I_b I_c$  的垂心  $I$  的垂足三角形, 由(4.4.2)可知这样构造  $Be$  点的过程给出了  $I$  关于  $\triangle I_a I_b I_c$  的等角共轭点, 从而有三线共点.  $\square$

由上面的证明, 我们得到 Bevan 点的一个重要性质:







**Problem 5.34.** 设  $\triangle ABC$  的内心、外心分别为点  $I, O$ , 切线三角形的垂心为点  $H'$ , 则易知点  $I, O, H'$  共线. 设点  $K$  满足  $O, H', I, K$  为调和点列, 证明:

- (1)  $ln, H', I, Be$  为调和点列;
- (2)  $Ex, H', I, Ta$  为调和点列;
- (3)  $I, K, Be, Ta$  为调和点列.

**Problem 5.35.** 证明: 设  $\triangle ABC$  的  $C$  上  $\widehat{BAC}$  的中点为  $N$ ,  $I$  为  $\triangle ABC$  的内心, 证明:  $ATa, ND$  交于  $BC$  上一点.

**Problem 5.36.** 设  $\triangle ABC$  的切点三角形为  $\triangle DEF$ ,  $EF \cap BC = K$ ,  $AD \cap I = D, R$ ,  $\odot(BRC) \cap I = R, J$ ,  $DJ \cap AK = P$ , 点  $M$  为  $BC$  中点,  $PM \cap EF = Q$ , 证明:  $D, Q, Ta$  共线.

**Problem 5.37.** 证明: 对于一个三角形,  $Ta$  的三线性极线为  $C, I$  的根轴.

## 5.5 Clawson 点 \*

本节我们介绍所谓的 Clawson 点, 它与前面讲到的 Bevan 点及内、外位似中心有一定关联, 但之后内容关联不大, 因此是选学部分.

为了给 Clawson 点的定义, 我们先引入如下的概念:

**Definition 5.5.1.** (如图5.21a)  $\triangle ABC$  的内切线三角形 (intangents triangle)  $\triangle A_1B_1C_1$  是三边分别为  $I$  与  $I_a, I_b, I_c$  的异于  $AB, BC, CA$  的内公切线的三角形; (如图5.21b)  $\triangle ABC$  的外切线三角形 (extangents triangle)  $\triangle A_2B_2C_2$  是三边分别为  $I_a, I_b, I_c$  两两之间的异于  $AB, BC, CA$  的外公切线的三角形.

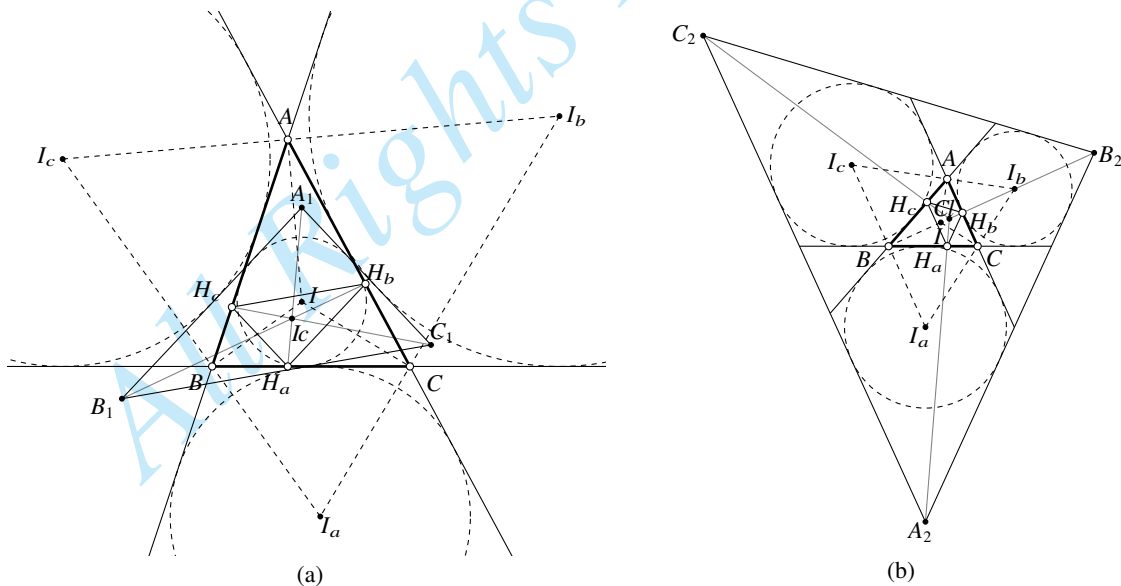


Figure 5.21

由上述定义, 设  $\triangle ABC$  内心为  $I$ , 旁心为  $I_a, I_b, I_c$ , 则内切线三角形的边  $B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1$  分别为  $BC$  关于  $II_a$ ,  $CA$  关于  $II_b$ ,  $AB$  关于  $II_c$  的对称直线; 外切线三角形的边  $B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2$  分别为  $BC$  关于  $I_bI_c$ ,  $CA$  关于  $I_cI_a$ ,  $AB$  关于  $I_aI_b$  的对称直线.

为方便起见, 在本节中统一采用如下的记号: 对于  $\triangle ABC$ , 记其内心和垂心分别为点  $I, H$ , 记垂三角形、内切线三角形、外切线三角形、旁心三角形、切线三角形、切点三角形、 $I$  的 Ceva 三角形分别为  $\triangle H_aH_bH_c, \triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2, \triangle I_aI_bI_c, \triangle L_aL_bL_c, \triangle G_aG_bG_c, \triangle X_aX_bX_c$ .  $\triangle ABC$  的内切圆半径与外接圆

半径分别为  $r, R$ .

下面是 Clawson 点的定义:

**Proposition 5.5.2.**  $\triangle A_2B_2C_2$  与  $\triangle H_aH_bH_c$  有位似中心  $Cl$ ,  $\triangle A_1B_1C_1$  与  $\triangle H_aH_bH_c$  也有位似中心  $Ic$ . 称  $Cl$  为  $\triangle ABC$  的 Clawson 点,  $Ic$  为  $\triangle ABC$  的 内 Clawson 点.

*proof.* 考虑图5.21的位形, 其余类似. 对于  $\triangle H_aH_bH_c$  与  $\triangle A_1A_2A_3$ : 由

$$\begin{aligned}\angle(A_1B_1, AB) &= 180^\circ - 2\angle(AB, CI_c) = 180^\circ - 2(180^\circ - \angle CBA - \angle ICB) \\ &= -180^\circ + 2\left[\angle CBA + \frac{180^\circ - \angle CBA - \angle BAC}{2}\right] = \angle CBA - \angle BAC, \\ \angle(H_aH_b, AB) &= \angle(H_aH_b, BH_b) - \angle(BH_b, AB) = (90^\circ - \angle BAC) - \angle H_cCB \\ &= 90^\circ - \angle BAC - (90^\circ - \angle CBA) = \angle CBA - \angle BAC,\end{aligned}$$

知  $A_1B_1 \parallel H_aH_b$ , 同理可知两者其余对应边也平行, 因而位似.

类似地, 对于  $\triangle H_aH_bH_c$  与  $\triangle A_2B_2C_2$ :

$$\begin{aligned}\angle(A_2B_2, AB) &= 2(\angle I_bI_a, AB) = 2(\angle AI_aI_b - \angle BAI_a) \stackrel{B, I, C, I_a \text{ 共圆}}{=} 2(\angle IBC - \angle BAI) \\ &= 2\left(\frac{\angle CBA}{2} - \frac{\angle BAC}{2}\right) = \angle CBA - \angle BAC,\end{aligned}$$

因而  $\triangle A_2B_2 \parallel AB$ , 同理可知其余对应边也平行, 因而位似. □

我们介绍几个 Clawson 点相关的性质:

**Proposition 5.5.3.** 对于一个三角形,  $H, I, Ic$  共线.

为此, 我们需要下面的引理:

**Lemma 5.5.4.** 对于  $\triangle ABC$ ,  $I$  也是  $\triangle A_1B_1C_1$  的内心, 且  $A_1I \perp BC, B_2I \perp CA, C_1I \perp AB$ .

*proof.*  $I$  为内心是显然的, 下证命题的后半部分. 如图5.22, 设  $\triangle A_1B_1C_1$  的切点三角形为  $G'_aG'_bG'_c$ ,  $Z = BC \cap A_1B_1, Y = BC \cap A_1C_1$ .

注意  $f_{II_c}(AC) = (BC)$ ,  $f_{II_c}(AB) = A_1B_1$ , 则  $f_{II_c}(A) = f_{II_c}(AC \cap AB) = A_1B_1 \cap BC = Z$ , 即线段  $AB, ZA_1$  关于  $II_c$  对称.

而显然  $G_c, G'_c$  也关于  $II_c$  对称, 故  $ZG'_c = AG'_c$ . 同理有  $YG'_b = AG'_b$ , 因此  $A_1Z = A_1G'_c + ZG'_c = A_1G'_c + AG'_c = A_1G'_b + AG'_b = A_1G'_b + YG'_b = A_1Y$ , 而  $A_1I$  平分  $\angle ZAY$ , 故必有  $A_1I \perp BC$ . 同理有另两组垂直. □

回到命题的证明:

*back to the proof of (5.5.3).*  $H, I, Ic$  分别为垂三角形和内切线三角形的内心, 由内切线三角形与垂三角形的位似可知  $H, I, Ic$  共线.

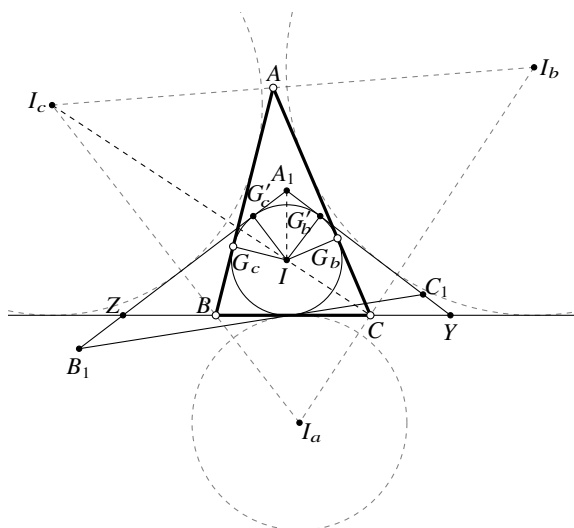


Figure 5.22

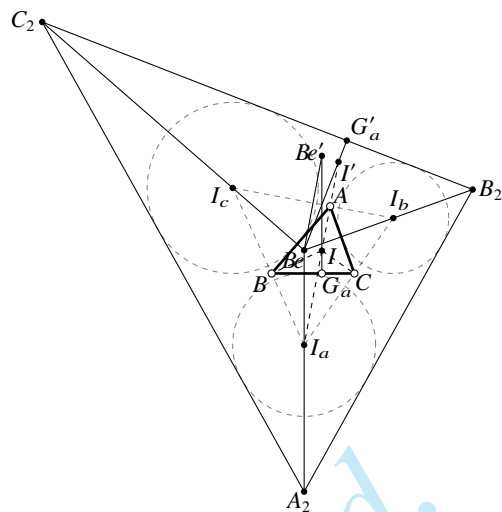


Figure 5.23

**Proposition 5.5.5.** 对于一个三角形,  $H, Mi, Sp, Cl, Be$  共线.

为此, 我们需要下面的引理:

**Lemma 5.5.6.** 对于  $\triangle ABC$ ,  $Be$  为  $\triangle A_2B_2C_2$  的内心, 且  $A_2Be \perp BC, B_2Be \perp CA, C_2Be \perp AB$ .

*proof.* 显然  $A_2I_a, B_2I_b, C_2I_c$  为  $\triangle A_2B_2C_2$  的三条角平分线, 又与(5.5.4)的证明类似地, 可得  $A_2I_a \perp BC, B_2I_b \perp CA, C_2I_c \perp AB$ , 则由(5.4.5)可知  $A_2I_a, B_2I_b, C_2I_c$  交于 Bevan 点, 即证.  $\square$

回到命题的证明:

*back to the proof of (5.5.6).* 之前已证  $H, Mi, Sp, Be$  共线. 注意  $Be, H$  分别为外切线三角形和垂三角形的内心, 由外切线三角形与垂三角形的位似可知  $Be, H, Cl$  共线, 即证.  $\square$

**Proposition 5.5.7.**  $\triangle L_aL_bL_c, \triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$  有共同的位似中心  $In$ , 且它们与  $\triangle X_aX_bX_c$  又有共同的透视中心  $In$

为此, 我们需要如下的引理:

**Lemma 5.5.8.**  $\triangle A_2B_2C_2$  的内切圆半径为  $2R+r$ .

*proof.* 如图5.23, 作  $Be$  关于  $I_bI_c$  的对称点  $Be'$ , 注意  $Be, I$  分别为  $\triangle I_aI_bI_c$  的外心和垂心, 则由(0.5.18)知  $Be'I \perp I_aBe$ , 而  $IBe \perp BC$ , 故  $Be'G_a \perp BC$ .

设  $\triangle A_2B_2C_2$  的切点三角形为  $\triangle G'_aG'_bG'_c$ , 由于  $f_{I_bI_c}(Be) = Be', f_{I_bI_c}(B_2C_2) = BC$ , 而  $G'_a, G_a$  分别为  $Be, Be'$  在  $B_2C_2, BC$  上的射影, 则  $f_{I_bI_c}(G'_a) = G_a$ , 那么  $I' \triangleq f_{I_bI_c}(I) \in BeG'_a$ .

由于  $I$  为  $\triangle I_aI_bI_c$  的垂心, 由(0.5.19)知  $I' \in \odot(I_aI_bI_c)$  上, 而  $\odot(ABC)$  为旁心三角形的九点圆, 而  $Be$  为  $\triangle I_aI_bI_c$  的外心, 故  $BeI' = r_{\odot(I_aI_bI_c)} = 2r_{\odot(ABC)} = 2R$ .

因此,  $\triangle A_2B_2C_2$  内切圆半径  $= BeG'_a = Be'I + I'Be = G_aI + I'Be = 2R + r$ .  $\square$

**Lemma 5.5.9.** 对于  $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$ , 设  $C_1A_1, A_1B_1, C_2A_2, A_2B_2$  与  $BC$  的交点分别为  $Y, Z, Y', Z'$  则  $\triangle AYZ'$  的外心为  $I_b, \triangle AY'Z$  的外心为  $I_c$ .

*proof.* 由于  $A_1B_2 = f_{I_aI_b}(AB)$ ,  $BC = f_{I_aI_b}(AC)$ , 故  $f_{I_aI_b}(A) = f_{I_aI_b}(AB \cap AC) = A_1B_2 \cap BC = Z$ , 则  $Z'A$  的中垂线即为  $I_aI_b$ . 类似地  $AY, ZA, AY'$  的中垂线分别为  $II_b, II_c, I_cI_a$ , 即证.  $\square$

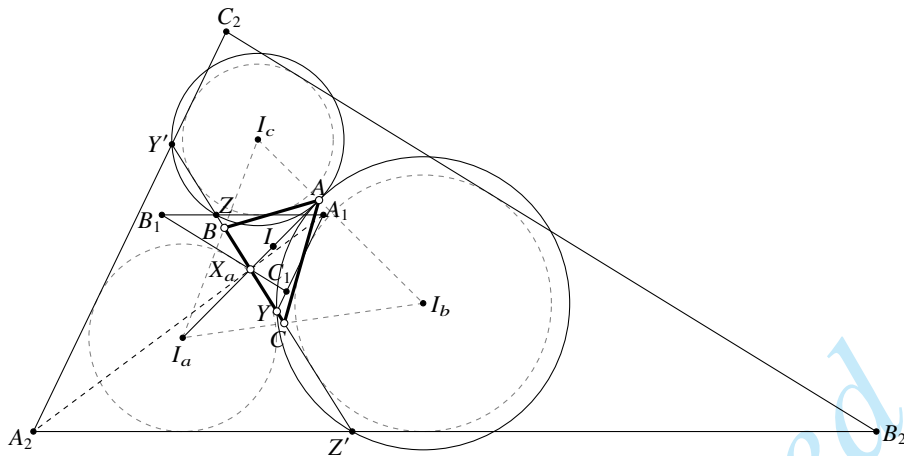


Figure 5.24

下面回到原命题的证明.

*back to the proof of (5.5.7).* 注意  $\triangle L_aL_bL_c$  与  $\triangle H_aH_bH_c$  位似, 结合(5.5.2)知  $\triangle L^aL^bL^c, \triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$  互为位似, 记它们的内切圆半径分别为  $r_L, r_1, r_2$ .

由于  $In$  为内位似中心,  $Be, I$  关于  $O$  对称(5.4.7), 从而

$$\overline{InO} = \frac{R}{OI}, \quad \overline{InI} = -\frac{r}{OI}, \quad \overline{InBe} = \overline{InO} + \overline{IO} = \frac{2R+r}{OI},$$

$\triangle L^aL^bL^c, \triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$  的内心分别为  $O, I, Be$ , 则利用(5.5.8)并结合上式, 可知:

$$\frac{r_L}{r_2} = \frac{R}{2R+r} = \frac{\overline{InO}}{\overline{InBe}}, \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{r}{2R+r} = -\frac{\overline{InI}}{\overline{InBe}},$$

故这三个三角形有共同的位似中心  $In$ . 特别地,  $L_a, A_1, A_2, In$  必共线.

再证  $\triangle X_aX_bX_c$  的透视关系. 如图5.24, 由(5.5.9),  $\odot(AYZ'), \odot(AY'Z)$  的圆心的连线为  $I_bI_c$ , 而  $A$  是两者的一个共同的交点, 因而过  $A$  且垂直于  $I_bI_c$  的直线, 即  $AI$ , 就是两个圆的根轴.

但注意  $X_a \in AI$ , 故  $\text{pow}_{\odot(AYZ')}(X_a) = \text{pow}_{\odot(AY'Z)}(X_a)$ , 即  $\overline{X_aY} \cdot \overline{X_aZ'} = \overline{X_aY'} \cdot \overline{X_aZ}$ , 即  $\frac{\overline{X_aY}}{\overline{X_aZ}} = \frac{\overline{X_aY'}}{\overline{X_aZ'}}$ .

注意  $\triangle A_1ZY, \triangle A_2Z'Y'$  是顶角相同的等腰三角形, 则  $\triangle A_1ZY \sim \triangle A_2Z'Y'$ , 进一步地, 显然两者位似. 由位似的定义, 位似中心  $X'_a = BC \cap AA_2$ , 由且位似知  $\frac{\overline{X'_aY}}{\overline{X'_aZ}} = \frac{\overline{X'_aY'}}{\overline{X'_aZ'}}$ , 故必有  $X'_a = X_a$ .

因此  $A_1, A_2, X_a$  共线, 结合之前得到的共线即有  $L_a, A_1, A_2, X_a, In$  共线, 同理有另两组共线, 故  $In$  为它们共同的透视中心.  $\square$

**Corollary 5.5.10.** 对于一个三角形,  $Cl, Ic, Ht, In$  共线.

*proof.* 证明留作习题.  $\square$

练习

**Problem 5.38.** 证明(5.5.10).

**Problem 5.39.** 三角形的  $Ex$  是三角形的内切线三角形关于中心对称图形与三角形的切线三角形的位似中心.

**Problem 5.40.** 证明: 对于一个锐角三角形, 其外切线三角形的面积至少是垂三角形的 100 倍.

**Problem 5.41.** 证明: 三角形的  $CI$  到三边的距离之比等于对应边所对角的正切值之比.

**Problem 5.42.** \* 对于  $\triangle ABC$  与两点  $U, V$ , 设  $U$  的三线性极线与  $\triangle ABC$  的三边所在直线分别交于点  $U_1, U_2, U_3$ , 点  $V$  的外接 Ceva 三角形为  $\triangle V_1V_2V_3$ , 直线  $U_1V_1, U_2V_2, U_3V_3$  与  $\odot(ABC)$  的另一交点分别为  $W_1, W_2, W_3$ .

(1) 证明:  $\triangle ABC$  与  $\triangle W_1W_2W_3$  有透视中心  $W$ .

(2) 由 (1) 的结果, 定义变换  $\varsigma$ :  $\varsigma(\triangle ABC, U, V) = W$ . 设  $\triangle ABC$  的外心、内心、垂心以及三个旁心分别为  $O, I, H$  以及  $I_a, I_b, I_c$ , 证明:  $\varsigma(\triangle ABC, I, O) = \varsigma(\triangle I_aI_bI_c, H, O) = CI$ .

## 5.6 伪圆 \*

下面我们介绍一类圆——“伪圆”的性质, 一般而言, 一个“伪切圆”是同时与两直线以及另一圆相切的圆, 一个“伪接圆”是同时过某两个点且与另一圆相切的圆. 虽然“伪圆”本身并非是三角形的特征点, 但与三角形的一些特征点 (例如  $In, Ex, Ta$ ) 有较大的关联, 且在一些竞赛题中十分常见, 因此在此作简要的介绍.

本节的知识对本课程的后续部分中并不会起什么作用, 不感兴趣的读者可以略过.

在开始正题之前, 让我们先介绍两个在伪圆相关的问题中常用的结论:

**Lemma 5.6.1.** (如图 5.25)  $T$  为大小两圆的一个公共点, 大圆的弦  $AB$  切小圆于点  $S$ , 直线  $ST$  与大圆的另一交点为  $M$ , 则以下四个条件等价:

- (1)  $T$  为两圆的切点;
- (2)  $ST$  平分  $\angle ATB$ ;
- (3) 点  $M$  平分大圆的弧  $\widehat{AMB}$ ;
- (4) 大圆在点  $M$  处的切线平行于  $AB$ .

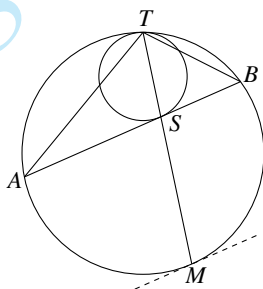


Figure 5.25

*proof.* 若 (1) 成立, 则显然两圆的外位似中心为点  $T$ , 点  $S, M$  为位似的一组对应点, 故小圆在  $S$  处的切线平行于大圆在  $M$  处的切线, 即 (4) 成立, 由此显然 (2)(3) 也成立.

若 (4) 成立, 考虑与大圆相切于  $T$  且与弦  $AB$  切于点  $S'$  的圆  $\omega$ , 则由上可知  $T, S', M$  共线, 故必有  $S = S'$ . 易知与线段  $AB$  切于  $S$  且过点  $T$  的圆是唯一的, 故  $\omega$  就是小圆, (1) 成立.

由上已证 (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (4)  $\Rightarrow$  (1), 则四者等价.  $\square$

**Lemma 5.6.2.** 给定  $\triangle ABC$ , 则在以  $A$  为中心的轴反射反演下, 对于点  $P, Q$ , 点  $P, Q$  互为像点的充要条件为  $\triangle ABP \pm \triangle AQC$ . 特别地:

- (1) 点  $B, C$  互为像点, 直线  $AB, AC$  在变换后分别变为直线  $AC, AB$ ,  $C$  在变换后变为直线  $BC$ ;

(2)  $\triangle ABC$  的内心  $I$  与  $A$ -旁心  $I_a$  互为像点;

(3)  $\triangle ABC$  的外心  $O$  与  $f_{BC}(A)$  互为像点.

*proof.* 由轴反射反演的定义, 若  $P, Q$  在这一变换下互为像点, 显然  $AB \cdot BC = AP \cdot AQ$ , 且  $AP, AQ$  为  $\angle A$  的一对等角线, 因此  $\triangle ABP \triangle AQC$ . 反之同理. 下证三种特例:

(1) 是显然的. (2) 简单计算角度可知  $\triangle ABI, \triangle AI_a C$  的对应角相等, 从而  $\triangle ABI \triangle AI_a C$ , 则  $I$  与  $A$ -旁心  $I_a$  互为像点.

(3) 记  $A' = f_{BC}(A)$ , 则  $AA' \perp BC$ , 故  $AA', AO$  为  $\angle A$  的等角线 (因为垂心和外心等角共轭). 同时, 记  $C$  半径为  $R$ , 则  $AA' \cdot AO = 2AB \sin B \cdot R \stackrel{\text{正弦定理}}{=} 2AB \sin B \cdot \frac{AC}{2 \sin B} = AB \cdot AC$ . 故点  $A', O$  互为像点.  $\square$

### 5.6.1 三角形的伪外接圆

我们先介绍三角形的伪外接圆:

**Definition 5.6.3.** 给定  $\triangle ABC$ , 称同时过点  $B, C$ 、且与  $I$  相内切的圆为  $\triangle ABC$  的  $A$ -伪外接圆 (图5.26的  $\omega_A$ ), 同理可定义  $B$ -伪外接圆与  $C$ -伪外接圆, 它们统称为  $\triangle ABC$  的伪外接圆 (mixtilinear circumcircle).

根据上述定义, 容易知道  $\triangle ABC$  的  $A$ -伪外接圆存在且唯一.

下面给出伪外接圆的最重要的几个性质.

**Proposition 5.6.4.** 设  $\triangle ABC$  的  $A$ -伪外接圆  $\omega_A$  与  $I$  切于点  $P$ ,  $I$  切  $BC$  于点  $D$ ,  $I_a$  为  $\triangle ABC$  的  $A$ -旁心, 则点  $P, D, I_a$  共线.

*proof.* 改令  $P$  为  $I_a D$  与  $I$  的另一交点, 我们证明  $\odot(BCP), I$  相切.

如图5.26, 分别取出  $DI_a, PD$  的中点  $M, N$ , 设  $I_a$  在  $BC$  上的射影为  $D'$ ; 记  $I$  为内心.

显然  $IN \perp NI_a$ , 而  $IB \perp BI_a, IC \perp CI_a$ , 故  $B, C, N, I_a, I$  共圆, 则由圆幂定理知  $DB \cdot DC = DI_a \cdot DN = DM \cdot DP$ , 故点  $M, B, C, P$  共圆.

由(0.6.14)知  $D'B = DC$ , 而  $M$  为  $I_a D$  中点且  $I_a D' \perp BC$ , 则  $M$  为  $\omega_A$  上  $\widehat{BC}$  的中点.

那么, 设与  $\omega_A$  内切于  $P$  且与  $BC$  相切的圆  $I'$  切  $BC$  于  $D_0$ , 由(5.6.1)知  $PD_0$  过点  $M$ , 因此  $D_0 = PM \cap BC = D$ , 则  $I' = I$ , 即证.

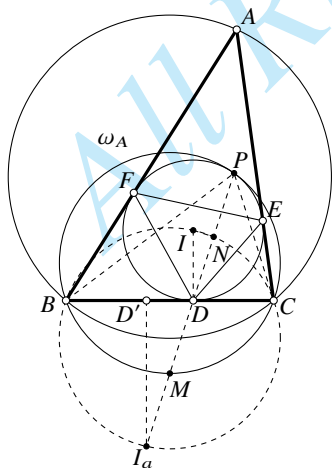


Figure 5.26

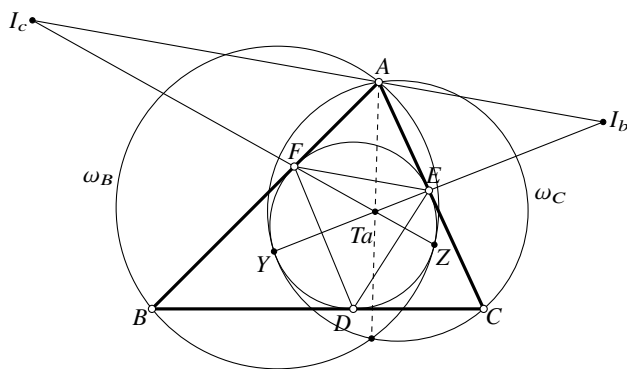


Figure 5.27

$\square$

**Corollary 5.6.5.** 设  $\triangle ABC$  的  $A$ -伪外接圆  $\omega_A$  与  $I$  切于点  $P$ ,  $I$  切  $BC$ ,  $I_a$  为  $\triangle ABC$  的  $A$ -旁心, 则  $PI_a$  平分  $\angle BPC$ .



*proof.* 由(5.6.4)结合(5.6.1), 结果显然.  $\square$

**Corollary 5.6.6.** 设  $\triangle ABC$  的  $A$ -伪外接圆为  $\omega_A$ ,  $I$  切  $BC$  于点  $D$ ,  $I_a$  为  $\triangle ABC$  的  $A$ -旁心, 线段  $PI_a$  交  $\omega_A$  于点  $M$ , 则  $M$  为  $PI_a$  中点, 同时也是  $\omega_A$  的  $\widehat{BC}$  的中点.

*proof.* 这里点  $M$  就是(5.6.4)的证明中的点  $M$ , 则此命题的结论已在(5.6.4)的证明中给出.  $\square$

**Proposition 5.6.7.** 三角形的三个伪外接圆的根心为  $T_a$ .

*proof.* 设  $\triangle ABC$  的三个伪外接圆分别为  $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ , 它们与  $I$  的切点分别为  $X, Y, Z$ ; 旁心三角形为  $\triangle I_a I_b I_c$ , 切点三角形为  $\triangle DEF$ . 由(5.4.1),  $I_b I_c \parallel EF$ , 且  $T_a = I_b E \cap I_c F$ .

由(5.6.4),  $Y \in I_b E, Z \in I_c F$ , 而显然  $Y, Z, E, F$  共圆于  $I$ , 则由 Reim 定理知  $Y, Z, I_b, I_c$  共圆.

而  $T_a = YI_b \cap ZI_c$ , 则  $\text{pow}_{\omega_B}(T_a) = \overline{T_a Y} \cdot \overline{T_a I_b} = \overline{T_a Z} \cdot \overline{T_a I_c} = \text{pow}_{\omega_C}(T_a)$ , 即  $T_a$  在  $\omega_B, \omega_C$  的根轴上. 同理它也在另外两根轴上, 即  $T_a$  为根心.  $\square$

**Proposition 5.6.8.** (如图10.2)  $\triangle ABC$  的  $A$ -伪外接圆  $\omega_A$  切  $I$  于  $P$ ,  $\omega_A$  与  $BC$  的另一交点为  $Q$ ,  $I$  分别切  $BC, AC$  于点  $D, E$ , 点  $T$  为  $DE$  的中点, 则:

- (1)  $\triangle PBD \sim \triangle PTE$ ;
- (2)  $\triangle PDT \sim \triangle PEQ$ ;
- (3) 点  $P, T, D, B$  以及点  $P, T, E, Q$  分别共圆;
- (4)  $\triangle PBT \sim \triangle PDE \sim \triangle PTQ$ ;
- (5)  $\triangle QET \sim \triangle TDB$ .

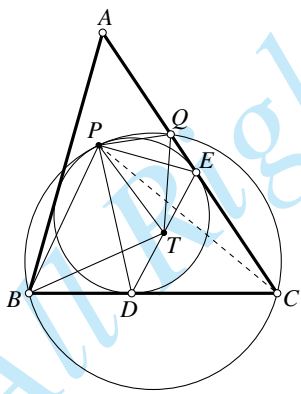


Figure 5.28

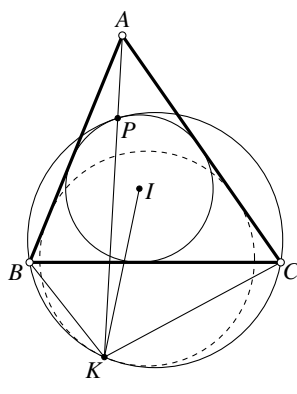


Figure 5.29

*proof.* (1) 由于  $\angle BPD \stackrel{(5.6.1)}{=} \angle CPD \stackrel{(5.3.7)}{=} \angle TPE$ ,  $\angle BDP \stackrel{\text{弦切角定理}}{=} \angle TEP$ , 故  $\triangle PBD \sim \triangle PTE$ .

(2) 由于  $\angle QPE \stackrel{(5.6.1)}{=} \angle CPE \stackrel{(5.3.7)}{=} \angle TPD$ ,  $\angle PEQ \stackrel{\text{弦切角定理}}{=} \angle PDT$ , 故  $\triangle PDT \sim \triangle PEQ$ .

(3) 由(1),  $\angle PBD = \angle PTE$ , 则  $P, B, D, T$  共圆; 由(2),  $\angle PTD = \angle PQE$ , 则  $P, T, E, Q$  共圆.

(4) 由(1),  $\angle BPT = \angle BPD + \angle DPT = \angle TPE + \angle DPT = \angle DPE$ ; 由(3),  $\angle PBT = \angle PDE$ , 则  $\triangle PBT \sim \triangle PDE$ .

类似易证  $\triangle PDE \sim \triangle PTQ$ .

(5) 由于  $\angle TQE \stackrel{(3)}{=} \angle TPE \stackrel{(1)}{=} \angle BPD \stackrel{(3)}{=} \angle TBD$ , 且显然  $\angle QET = \angle BDT$  (因为  $\triangle ECD$  等腰), 则  $\triangle QET \sim \triangle TDB$ .  $\square$

**Proposition 5.6.9.** 设  $\triangle ABC$  的  $A$ -伪外接圆  $\omega_A$  与  $I$  切于点  $P$ ,  $AP \cap \omega_A = A, K$ ,  $I$  为内心, 则  $KI$  平分  $\angle BKC$ .

*proof.* 如图5.29, 考虑异于  $I$  的圆  $\omega$ , 使得它也与  $AB, AC, \omega_A$  同时相切. 由(0.4.8)和(0.4.9): 圆  $I, \omega_A$  的外位似中心为  $P$ , 圆  $I, \omega$  的外位似中心为  $A$ , 圆  $\omega, \omega_A$  的外位似中心即为两者的切点  $K'$ . 则由(0.4.10)知  $A, P, K'$  共线, 故必有  $K=K'$ . 因此下面的命题保证了此命题成立.  $\square$

**Proposition 5.6.10.** 对于  $\triangle ABC$ , 一圆  $\omega_0$  同时与射线  $AB, AC$  相切, 切点分别为  $Y, X$ , 圆  $\omega$  同时过点  $B, C$  且与  $\omega_0$  相内切于点  $K$ , 且点  $A, K$  在  $XY$  的异侧, 则  $KI$  平分  $\angle BKC$ , 其中  $I$  为  $\triangle ABC$  的内心.

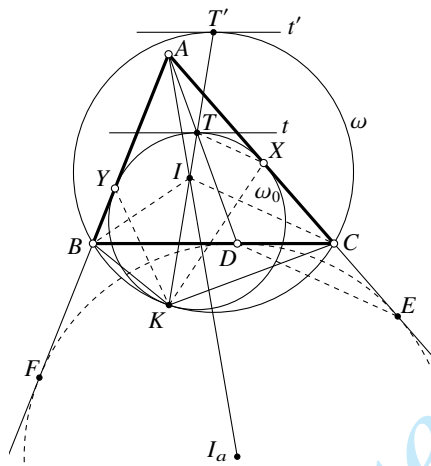


Figure 5.30

*proof.* 取  $\triangle ABC$  的  $I_a$ , 与三边的切点分别为  $D, E, F$ . 设  $AD$  与  $\omega_0$  的靠近  $A$  的交点为  $T$ , 重新定义  $K$  为  $IT$  与  $\omega_0$  的另一交点, 我们要证明  $\odot(BKC)$  与  $\omega_0$  相切且  $KI$  平分  $\angle BKC$ , 如图5.12.

易知  $A$  为  $\omega_0, I$  的外位似中心, 且  $T, D$  与  $X, E$  为这一位似的两组对应点, 故  $TX \parallel DE$ , 而易知  $IC \parallel DE^{(8)}$ , 故  $TX \parallel IC$ .

那么  $\angle CXK \stackrel{\text{弦切角定理}}{=} \angle XTK = \angle CIK$ , 故点  $I, X, C, K$  共圆,<sup>(9)</sup> 同理  $Y, I, B, K$  共圆.

因此,  $\angle CKI = \angle IXA \stackrel{\triangle IXA \cong \triangle IYA}{=} \angle IYA = \angle BKI$ .

由于  $T, D$  是  $\omega_0, I_a$  的位似的一组对应点, 则  $BC$  平行于  $\omega_0$  在  $T$  处的切线  $t$ . 延长  $KT$  交  $\omega$  于  $T'$ , 由于  $KT'$  平分  $\angle BKC$ , 则  $\omega$  在  $T'$  处的切线  $t' \parallel t$ . 由(5.6.1)知  $\omega, \omega_0$  切于  $K$ , 这便完成了证明.  $\square$

上面的命题可视为(5.6.9)的推广. 类似地可以证明(5.6.5)的推广形式, 具体证明留给读者:

**Proposition 5.6.11.** 对于  $\triangle ABC$ , 一圆  $\omega_0$  同时与射线  $AB, AC$  相切, 切点分别为  $Y, X$ , 圆  $\omega$  同时过点  $B, C$  且与  $\omega_0$  相内切于点  $K$ , 且点  $A, K$  在  $XY$  的同侧, 则  $KI_a$  平分  $\angle BKC$ , 其中  $I_a$  为  $\triangle ABC$  的  $A$ -旁心.

## 练习

**Problem 5.43.** 设  $\triangle ABC$  的  $A$ -伪外接圆  $\omega_A$  与  $I$  切于点  $P$ ,  $I$  切  $BC$  于点  $D$ ,  $A$  在  $BC$  上的射影为  $H_a$ , 则  $AH_a$  被  $PD$  平分.

**Problem 5.44.** 设  $I$  是  $\triangle ABC$  的内心,  $J$  是  $\triangle ABC$  的  $A$ -旁心, 点  $X, Y, B, C$  满足  $A, X, Y$  共线且  $B, C, X, Y$  共圆, 证明:  $\angle BXJ + \angle CXJ = 0 \Leftrightarrow \angle BYI + \angle CYI = 0$ .

**Problem 5.45.** 证明: 三角形的三个伪外接圆与  $I$  的切点组成的三角形与原三角形透视.

(8) 因为它们同时垂直于  $I_a C$ .

(9) 聪明的读者或许会发现, 这相当于 Reim 定理的一种退化情况: 视  $X$  为一对重合点,  $XX$  即  $\omega_0$  在  $X$  处的切线  $AC$ , 点  $T, K, X, X$  共圆, 则由 Reim 定理即知  $I, X, C, K$  共圆.

**Problem 5.46.** 设  $\triangle ABC$  的  $A$ -伪外接圆  $\omega_A$  与  $I$  切于点  $P$ ,  $AP \cap BC = X$ ,  $AP \cap \omega_A = P, K$ , 点  $I$  为  $\triangle ABC$  的内心,  $D$  为  $I$  与  $BC$  的切点, 证明:

(1) 点  $P, I, D, K$  共圆.

(2)  $\triangle PBK \sim \triangle CDK$ ,  $\triangle PCD \sim \triangle BDK$ ;

(3)  $\frac{BD}{CD} = \sqrt{\frac{BK}{CK}} = \sqrt[3]{\frac{BX}{CX}}$ .

**Problem 5.47.** 设  $\triangle ABC$  的  $A$ -伪外接圆  $\omega_A$  与  $I$  切于点  $P$ ,  $AP \cap BC = X$ ,  $AP \cap \omega_A = P, K$ , 点  $I$  为  $\triangle ABC$  的内心,  $D$  为  $I_a$  与  $BC$  的切点, 证明:  $\angle BID + \angle APC = 180^\circ$ .

**Problem 5.48.** 设  $\triangle ABC$  的  $A$ -伪外接圆  $\omega_A$  与  $I$  切于点  $P$ ,  $AP \cap \omega_A = P, K$ ,  $\triangle DEF$  是  $\triangle ABC$  的切点三角形,  $AD \cap EF = X$ ,  $I$  是内心. 证明:  $IK$  平分  $XD$ .

**Problem 5.49.** \* 设  $\triangle ABC$  的  $A$ -伪外接圆  $\omega_A$  与  $I$  切于点  $P$ ,  $P$  在  $BC$  上的射影为  $K$ ,  $D$  为  $I$  与  $BC$  的切点, 证明: 线段  $BC, PK, GeD$  的中点共线.

## 5.6.2 三角形的伪切圆

我们再来看三角形的伪内切圆与伪旁切圆.

### 伪内切圆

我们给出伪内切圆的定义, 依下述定义, 其存在性是显然的.

**Definition 5.6.12.** 给定  $\triangle ABC$ , 称同时与射线  $AB, AC$  相切、且与  $C$  相内切的圆为  $\triangle ABC$  的  $A$ -伪内切圆 (图5.31中的  $\omega_A$ ), 同理可定义  $B$ -伪内切圆与  $C$ -伪内切圆, 它们统称为  $\triangle ABC$  的伪内切圆 (mixtilinear incircle).

关于伪内切圆, 有如下的重要性质:

**Theorem 5.6.13 (Mannheim).** (如图5.31)  $\triangle ABC$  的  $A$ -伪内切圆  $\omega_A$  与  $AB, AC$  分别切于点  $D, E$ , 则  $DE$  的中点即为  $\triangle ABC$  的内心  $I$ .

*proof.* 只要证明点  $D, E, I$  共线, 结合  $I$  在  $\angle A$  的平分线上即知定理成立.

作以  $A$  为中心的轴反射反演. 与  $\omega_A$  相切的  $AB, AC, C$  分别变为直线  $AC, AB, BC$ , 由于反演保相切, 则反演后  $\omega_A$  变为  $I_a^{(10)}$ . 同时, 点  $D, E$  分别变为  $I_a$  与  $AC, AB$  的切点  $D', E'$ , 点  $I$  变为  $A$ -旁心  $I_a$ . 显然点  $A, I_a, D', E'$  共圆, 则变换前点  $I, D, E$  共线.  $\square$

**Proposition 5.6.14.** (如图5.31) 设  $\triangle ABC$  的  $A$ -伪内切圆  $\omega_A$  与  $AB, AC$  分别切于点  $D, E$ , 与  $C$  切于点  $T_a$ , 点  $I$  为  $\triangle ABC$  的内心, 则  $B, T_a, I, D$  与  $C, T_a, I, E$  分别共圆.

*proof.* 考虑以  $A$  为中心的轴反射反演,  $C$  变为直线  $BC$ ,  $\omega_A$  变为  $I_a$ ,  $T_a$  变为  $I_a$  与  $BC$  的切点  $T'_a$ , 点  $D$  变为  $I_a$  与  $AC$  的切点  $D'$ , 点  $I, B$  分别变为  $A$ -旁心  $I_a$  与点  $C$ . 显然  $I_a, C, D', T'_a$  共圆, 则反演前  $I, B, D, T_a$  共圆. 同理有另一个共圆.  $\square$

**Corollary 5.6.15.** (如图5.31)  $\triangle ABC$  的  $A, B, C$ -伪内切圆  $\omega_A$  与  $C$  的切点分别为  $T_a, T_b, T_c$ ,  $\triangle ABC$  的北极点三角形为  $\triangle N_a N_b N_c$ , 则  $\triangle T_a T_b T_c$  与  $\triangle N_a N_b N_c$  透视, 且透视中心为三角形的内心  $I$ .

*proof.* 设  $A$ -伪内切圆与  $AB, AC$  分别切于点  $D, E$ , 点  $I$  为  $\triangle ABC$  的内心, 由(5.6.14),  $\angle CT_a I = \angle CEI = -\angle BDI = -\angle BT_a I$ , 因此  $IT_a$  平分  $\angle BT_a I$ , 因此  $T_a, I, N_a$  共线, 同理有另两组共线, 即证.  $\square$

(10) 请你想一想, 为什么是旁切圆而非内切圆.

**Proposition 5.6.16.** (如图5.31) 设  $\triangle ABC$  的  $A$ -伪内切圆  $\omega_A$  与  $C$  切于点  $T_a$ ,  $I_a$  与  $BC$  切于点  $T'_a$ , 则  $AT_a, AT'_a$  是  $\angle A$  的一对等角线.

*proof.* 因为在以  $A$  为中心的轴反射反演下, 点  $T_a, T'_a$  互为像点. □

**Corollary 5.6.17.**  $\triangle ABC$  的三个伪内切圆与  $C$  的切点组成的三角形与  $\triangle ABC$  有透视中心  $Ex$ .

*proof.* 在(5.6.16)中,  $AT'_a$  过  $N_a$ , 而  $Ex = gNa$ , 故  $AT'_a$  的等角线  $AT_a$  过  $N_a$ . 同理另两组对应顶点的连线也过  $Ex$ . 即证. □

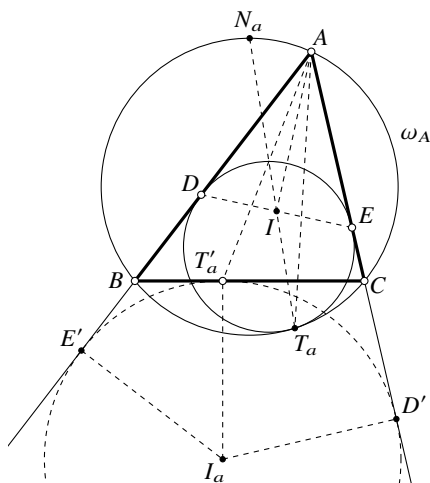


Figure 5.31

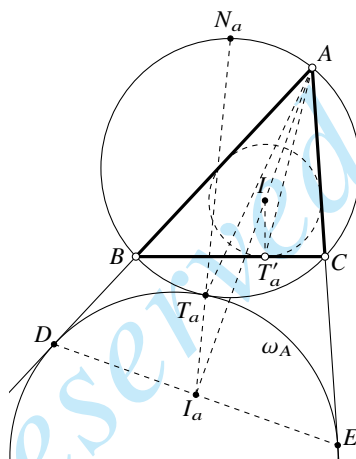


Figure 5.32

### 伪旁切圆

接下来我们介绍伪旁切圆:

**Definition 5.6.18.** 给定  $\triangle ABC$ , 称同时与射线  $AB, AC$  相切、且与  $C$  相外切的圆为  $\triangle ABC$  的  $A$ -伪旁切圆 (图5.32中的  $\omega_A$ ), 同理可定义  $B$ -伪旁切圆与  $C$ -伪旁切圆, 它们统称为  $\triangle ABC$  的伪旁切圆 (mixtilinear excircle).

伪旁切圆与伪内切圆有很多相似之处, 它的性质也与伪内切圆有很多类似之处, 我们列举如下. 其证明可仿照伪内切圆的情形完成, 我们将其留给读者.

**Theorem 5.6.19** (Mannheim). (如图5.32)  $\triangle ABC$  的  $A$ -伪旁切圆与射线  $AB, AC$  分别切于点  $D, E$ , 则  $DE$  的中点即为  $\triangle ABC$  的  $A$ -旁心  $I_a$ .

**Proposition 5.6.20.** (如图5.32) 设  $\triangle ABC$  的  $A$ -伪旁切圆与射线  $AB, AC$  分别切于点  $D, E$ , 与  $C$  切于点  $T_a$ , 点  $I_a$  为  $\triangle ABC$  的  $A$ -旁心, 则  $B, T_a, I, D$  与  $C, T_a, I, E$  分别共圆.

**Proposition 5.6.21.** (如图5.32) 设  $\triangle ABC$  的  $A$ -伪旁切圆与  $C$  的切点为  $T_a$ ,  $C$  上  $\widehat{BAC}$  的中点为  $N_a$ , 则直线  $T_a N_a$  过  $A$ -旁心  $I_a$ .<sup>(11)</sup>

**Proposition 5.6.22.** (如图5.32) 设  $\triangle ABC$  的  $A$ -伪旁切圆与  $C$  切于点  $T_a$ ,  $I$  与  $BC$  切于点  $T'_a$ , 则  $AT_a, AT'_a$  是  $\angle A$  的一对等角线.

**Corollary 5.6.23.**  $\triangle ABC$  的三个伪旁切圆与  $C$  的切点组成的三角形与  $\triangle ABC$  有透视中心  $In$ .

(11) 此定理与(5.6.15)类似, 但(5.6.15)中有透视关系而本性质中没有. 不过, (5.6.15)中有  $N_a T_a$  过点  $I$  的结论, 这与本性质是类似的.

## 练习

**Problem 5.50.** 证明(5.6.19)(5.6.20)(5.6.21)(5.6.22)(5.6.23).

**Problem 5.51.** 设  $\triangle ABC$  的  $A$ -伪内切圆与  $C$  切于点  $T$ , 与  $AB, AC$  分别切于点  $F, E$ , 线段  $AT$  与  $A$ -伪内切圆的另一交点为  $P$ . 点  $I$  为内心. 证明:

$$(1) \triangle TBI \sim \triangle TFE \sim \triangle TIC;$$

$$(2) \text{ 四边形 } TBF I \sim TFPE \sim TIEC;$$

$$(3) \frac{BF}{CE} = \frac{TB}{TC} = \left( \frac{IB}{IC} \right)^2;$$

$$(4) BF \cdot CE = \frac{EF^2}{4}.$$

**Problem 5.52.** 设  $\triangle ABC$  的  $A$ -伪旁切圆与  $C$  切于点  $T$ , 与射线  $AB, AC$  分别切于点  $F, E$ , 射线  $AT$  与  $A$ -伪内切圆的另一交点为  $P$ . 点  $I_a$  为  $A$ -旁心. 证明:

$$(1) \text{ 四边形 } TBF I_a \sim TFPE \sim T I_a EC;$$

$$(2) \frac{BF}{CE} = \frac{TB}{TC} = \left( \frac{I_a B}{I_a C} \right)^2;$$

$$(3) BF \cdot CE = \frac{EF^2}{4}.$$

**Problem 5.53.** 设  $\triangle ABC$  的三个伪内切圆分别为  $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ , 点  $I, O$  分别为内心和外心.

(1) 设  $C$  上  $\widehat{BC}$  的中点为  $L$ ,  $I$  切  $BC$  于点  $D$ ,  $X$  为  $ID$  的中点, 证明:  $XD$  为  $\omega_B, \omega_C$  的根轴, 点  $X$  是  $I, \omega_B, \omega_C$  的根轴.

(2) 设  $\omega_A, \omega_B, \omega_C$  的根心为点  $P$ , 证明:  $P \in OI$  且  $\frac{\overline{PO}}{\overline{PI}} = \frac{2R}{r}$ , 其中  $R, r$  分别为  $C, I$  的半径.

**Problem 5.54.** 设  $\triangle ABC$  的三个伪旁切圆分别为  $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ , 点  $I, O$  分别为内心和外心,  $I, C$  的半径分别为  $r, R$ . 证明:

$$(1) I, \omega_B, \omega_C \text{ 的根心 } X \text{ 满足 } IX \perp BC, \text{ 且 } IX = 2R - \frac{r}{2};$$

$$(2) \omega_A, \omega_B, \omega_C \text{ 的根心 } P \text{ 在直线 } OI \text{ 上, 且 } \frac{\overline{PO}}{\overline{PI}} = \frac{2R}{4R - r}.$$

### 5.6.3 四边形伪切圆

在本节的最后, 我们讨论四边形中的伪切圆作为推广. 之前介绍的三角形的伪圆的许多性质可视为四边形伪切圆的一种退化. 下面的定理是四边形伪切圆的最重要的结果, 许多伪圆相关的问题均可用它来解决.

**Theorem 5.6.24** (沢山(Sawayama)). (如图5.33) 四边形  $ABCD$  内接于圆  $\omega_0$ , 圆  $\omega$  内切于  $\omega_0$ , 且与  $AC, BD$  分别切于点  $X, Y$ , 并且与线段  $AD$  相交. 设  $I_1, I_2$  分别为  $\triangle BAD, \triangle CAD$  的内心, 则  $I_1, I_2, X, Y$  共线.

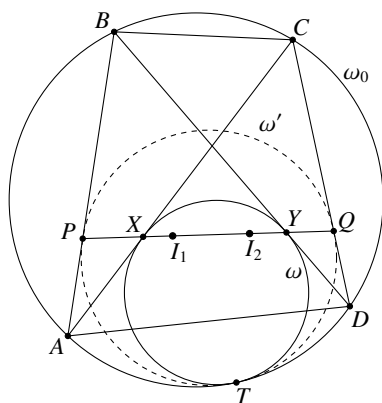


Figure 5.33

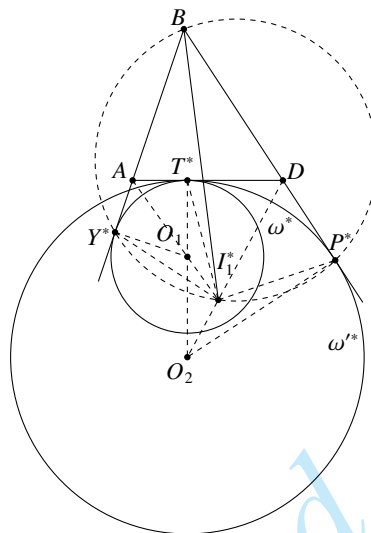


Figure 5.34

*proof.* 由(4.7.4), 存在与  $\omega_0, \omega$  相切于同一点  $T$  的圆  $\omega'$ , 它与  $AB, CD$  同时相切, 且切点  $P, Q$  与  $X, Y$  共线.

对于  $\triangle ABD$ , 考虑以  $B$  为中心的轴反射反演, 则  $AB, DB$  互换,  $\omega_0$  变为  $\triangle ABD$  的外接圆, 点  $T$  变为  $AD$  上的一点  $T^*$ ;  $\omega, \omega'$  分别变为  $\omega^*, \omega'^*$ , 且均与  $AD$  切于  $T^*$ ;  $P, Y$  分别变为射线  $BD, BA$  上的点  $P^*, Y^*$ , 它们分别为  $\omega'^*$  与  $\omega^*$  与射线  $BD, DA$  的切点; 由(5.4.9)  $I_1$  变为  $\triangle ABD$  的  $B$ -旁心  $I_1^*$ , 如图5.34.

易知  $\omega^*, \omega'^*$  的圆心  $O_1, O_2$  分别在  $AI_1^*, DI_1^*$  上, 且  $\triangle T^* I_1^* D \cong \triangle P^* I_1^* D, \triangle T^* I_1^* A \cong \triangle Y^* I_1^* A$ , 则  $\angle BP^* I_1^* = -\angle I_1^* T^* A = \angle BY^* I_1^*$ , 故  $B, Y^*, I_1^*, P^*$  共圆, 则反演前  $Y, I_1, P$  共线. 同理可得  $X, I_2, Q$  共线, 即证.  $\square$

上面的定理是沢山定理的最基本的形式, 在其中令点  $B, C$  趋于重合, 则得到了 Mannheim 定理.

上面的沢山定理的形式对这些圆与线的位置关系有一定的要求<sup>(12)</sup>, 实际上, 可以写出它对一般的圆与线的位置下的形式:

**Theorem 5.6.25** (沢山). 已知点  $A, B, C, D$  同在  $\odot O$  上,  $\odot P$  与  $\odot O$  相切, 且  $\odot P$  与直线  $DB, AC$  分别切于点  $X, Y$ . 点  $I_1$  为  $\angle BAC, \angle FCB$  的平分线的交点,  $I_2$  是  $\angle BDC, \angle EBC$  的平分线的交点, 则点  $I_1, I_2, X, Y$  共线.

另外, 在沢山定理的结构中, 我们还有如下的结论<sup>(13)</sup>:

**Proposition 5.6.26.** (如图5.33) 四边形  $ABCD$  内接于圆  $\omega_0$ , 圆  $\omega$  内切于  $\omega_0$ , 且与  $AC, BD$  分别切于点  $X, Y$ , 并且与线段  $AD$  相交. 设  $O = AC \cap BD$ , 点  $I, I_1, I_2$  分别为  $\triangle XBD, \triangle BAD, \triangle CAD$  的内心, 则:

- (1) 点  $B, D, I_1, I_2$  共圆;
- (2) 点  $B, X, I_1, I, C$  以及点  $D, Y, I_2, I, C$  分别共圆.

(12) 例如切点在线段上而非可以在整一直线上, 两圆是内切而非可以外切.

(13) 我们以(5.6.24)中线与圆的位置为例叙述结论, 读者可以尝试写出一般位置下的结论.





## 5.7 Brocard 点

我们在前面介绍了  $Ge, Na, Mi, Ta, Be, In, Ex$  等三角形特征点, 以及相关的 Clawson 点和伪圆, 它们是环环相扣的. 而从本节起, 我们将介绍所谓的 Brocard 点、 $\text{Απολλώνιος}$  点以及 Torricelli 点, 它们又是几个相互之间关联十分密切的三角形特征点.

### 5.7.1 Brocard 点

**Definition 5.7.1.** (如图5.37a、5.37b)  $\triangle ABC$  内存在一点  $Br_1$  满足  $\angle BAB_1 = \angle CBB_1 = \angle ACC_1$ , 又存在一点  $Br_2$  满足  $\angle ABB_2 = \angle BCB_2 = \angle CAB_2$ , 称点  $Br_1$  为第一 Brocard 点, 点  $Br_2$  为第二 Brocard 点, 它们统称为 Brocard 点.

我们来证明  $Br_1, Br_2$  存在且唯一, 为此我们给出如下构造  $Br_1$  的方法.

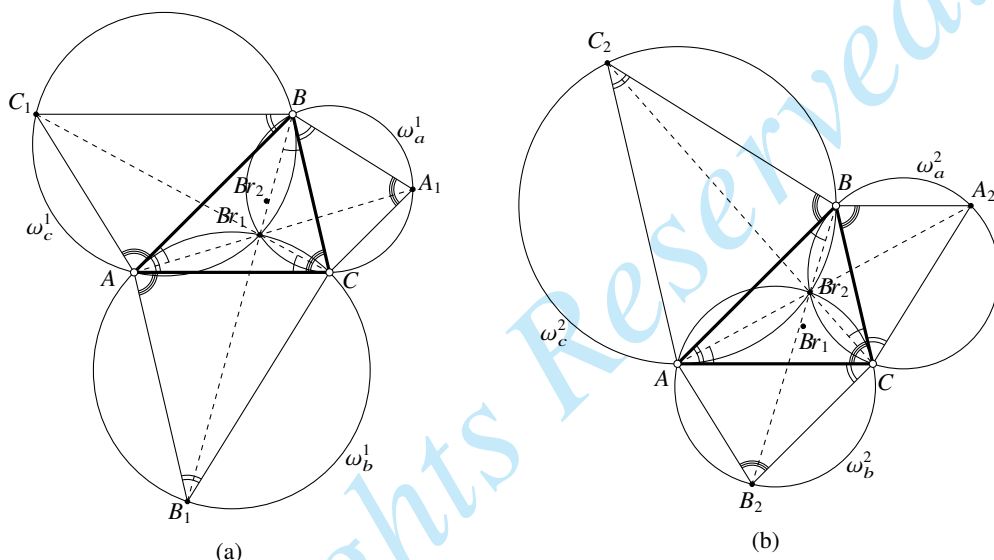


Figure 5.37

如图5.37a, 向  $\triangle ABC$  外侧作  $\triangle BCA_1, \triangle B_1CA, \triangle BC_1A$  与  $\triangle ABC$  逆相似, 记  $\omega_a^1, \omega_b^1, \omega_c^1$  分别为这三个三角形的外接圆. 下面我们证明三个圆交于一点, 且该交点满足第一 Brocard 点的要求.

令  $Br_1$  为  $\omega_a^1, \omega_b^1$  的异于点  $C$  的交点, 则

$$\angle ABr_1B = 360^\circ - \angle ABr_1C - \angle BBr_1C = \angle BA_1C + \angle AB_1C = \angle BAC + \angle BCA = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - \angle AC_1B,$$

从而  $Br_1 \in \omega_c^1$ . 同时,

$$\angle CBB_1 = 180^\circ - \angle BBr_1C - \angle BCB_1 = \angle BA_1C - \angle BCB_1 = \angle BCA - \angle BCB_1 = \angle ACBr_1,$$

同理  $\angle CBB_1 = \angle BAB_1$ , 从而点  $Br_1$  为第一 Brocard 点.

下证  $Br_1$  唯一. 若点  $Br'_1$  也为第一 Brocard 点, 则类似地有  $\angle BBr'_1A = 180^\circ - \angle ABC$ , 故  $Br'_1$  在  $\omega_c^1$  上, 同理  $Br'_1$  也在  $\omega_a^1, \omega_b^1$  上. 则  $Br'_1 = Br_1$ .

同理可证  $Br_2$  存在且唯一. □

下面给出 Brocard 点的几个有趣的性质.

**Proposition 5.7.2.** 三角形的第一 Brocard 点与第二 Brocard 点等角共轭.

*proof.* 对于  $\triangle ABC$ , 由等角共轭的定义,  $qBr_1$  满足  $Br_2$  的定义中的条件, 而  $Br_2$  唯一, 则必有  $qBr_1 = Br_2$ . □

**Corollary 5.7.3.** 对于  $\triangle ABC$ ,  $\angle BAB_1 = \angle CBB_1 = \angle ACB_1 = \angle ABB_2 = \angle BCB_2 = \angle CAB_2 \triangleq \varpi$ , 称角  $\varpi$  为 Brocard 角<sup>(14)</sup>.

**Corollary 5.7.4.** 对于  $\triangle ABC$ , 存在以  $Br_1, Br_2$  为焦点的内切椭圆, 该椭圆称为 Brocard 椭圆.

*proof.* 结合(4.4.14)即证. □

**Proposition 5.7.5.** (如图5.37a) 向  $\triangle ABC$  外侧作  $\triangle BCA_1, \triangle B_1CA, \triangle BC_1A$  与  $\triangle ABC$  逆相似, 则:

- (1)  $\triangle BCA_1, \triangle B_1CA, \triangle BC_1A$  的外接圆有公共点  $Br_1$ ;
- (2)  $AA_1, BB_1, CC_1$  共点于  $Br_1$ .

*proof.* (1) 在证明  $Br_1$  存在且唯一的过程中已经证明, 下证 (2).

计算角度得  $\angle ABr_1A_1 = \angle ABr_1C + \angle CBr_1A_1 = 180^\circ - \angle AB_1C + \angle CBA_1 = 180^\circ - \angle BAC + \angle BAC = 180^\circ$ , 故  $Br_1 \in AA_1$ . 同理可证  $Br_1 \in BB_1, CC_1$ . □

**Proposition 5.7.6.** (如图5.37b) 向  $\triangle ABC$  外侧作  $\triangle CA_2B, \triangle CAB_2, \triangle C_2AB$  与  $\triangle ABC$  逆相似, 则:

- (1)  $\triangle BCA_2, \triangle B_2CA, \triangle BC_2A$  的外接圆有公共点  $Br_2$ ;
- (2)  $AA_2, BB_2, CC_2$  共点于  $Br_2$ .

*proof.* 这与(5.7.5)是完全类似的, 具体证明留给读者. □

**Proposition 5.7.7.**  $\triangle ABC$  的 Brocard 点的垂足三角形和外接 Ceva 三角形与  $\triangle ABC$  相似.<sup>(15)</sup>

*proof.* 如图5.38, 设  $Br_1$  关于  $\triangle ABC$  的垂足三角形为  $\triangle A'B'C'$ , 注意点  $A, B', Br_1, C'$  共圆, 点  $A', C, B', Br_1$  也共圆, 则  $\angle C'B'Br_1 = \angle A'ABr_1 = \angle ACBr_1$ , 且  $\angle A'B'Br_1 = \angle A'CBr_1$ , 故  $\angle A'B'C' = \angle C$ .

同理,  $\angle B'A'C' = \angle B$ ,  $\angle A'C'B' = \angle A$ , 从而  $\triangle ABC \sim \triangle C'B'A'$ .

由(4.3.9)可知  $Br_1$  外接 Ceva 三角形也与原三角形相似. 对点  $Br_2$  同理.

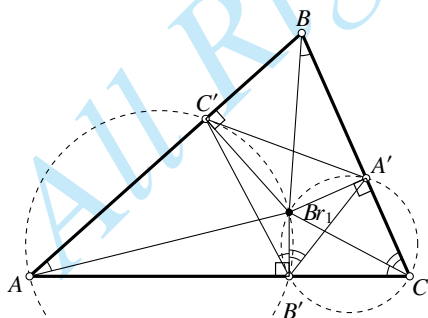


Figure 5.38

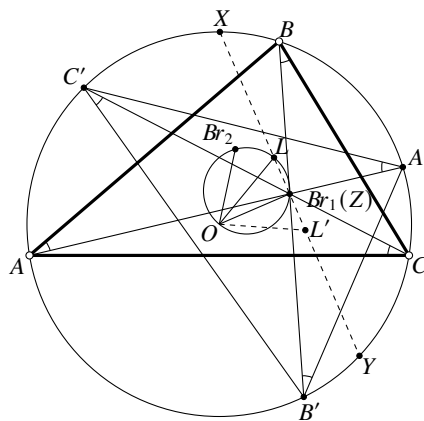


Figure 5.39

**Proposition 5.7.8.** 设点  $O$  为  $\triangle ABC$  的外心, 则  $OBr_1 = OBr_2$  且  $\angle Br_1OBr_2 = 2\varpi$ .

(14) 下均以  $\varpi_{\triangle ABC}$  记  $\triangle ABC$  的 Brocard 角, 在不引起歧义的情况下简作  $\varpi$ .

(15) 注意, 此处三角形相似的对对应顶点的顺序并非常规的顺序!! 例如, 设  $Br_1$  的垂足三角形为  $\triangle A'B'C'$ , 则相似的对对应关系不是  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ , 而是  $\triangle ABC \sim \triangle C'B'A'$ .

*proof.* 如图5.39, 设点  $Br_1$  的外接 Ceva 三角形为  $\triangle A'B'C'$ . 考虑旋转变换  $f \triangleq r_{O, -2\varpi}$ , 由于  $\angle AOC' = 2\angle ACC' = 2\varpi$ , 则  $f(A) = C'$ , 同理  $f(B) = A', f(C) = B'$ , 故  $f(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$ .

此时,  $f(Br_2)$  也变为  $\triangle A'B'C'$  的第二 Brocard 点; 但另一方面, 由于  $\angle C'A'Br_1 = \angle Br_1CA = \varpi$ , 同理  $\angle B'C'Br_1 = \angle A'B'Br_1 = \varpi$ , 则  $Br_1$  就是  $\triangle A'B'C'$  的第二 Brocard 点. 由上,  $f(Br_2) = Br_1$ , 即证.  $\square$

**Proposition 5.7.9.** 设  $\triangle ABC$  外心为  $O$ ,  $C$  半径为  $R$ , 则  $OB r_1 = OB r_2 = R\sqrt{1-4\sin^2\varpi}$ .

*proof.* 如图5.39, 由于  $\triangle C'A'B'$  可由  $\triangle ABC$  绕外心  $O$  顺时针旋转  $2\varpi$  得到, 我们有

$$\begin{aligned}\angle BBr_1A' &= \frac{\widehat{BA'} + \widehat{AB'}}{2} = \frac{\widehat{AB'}}{2} + \frac{\widehat{AC'}}{2} = \frac{\widehat{C'B'}}{2} = \angle Br_1CB', \\ \angle Br_1BA &= \angle Br_1BC + \frac{\widehat{CA'}}{2} = \angle Br_1B'A' + \frac{\widehat{CA'}}{2} = \angle Br_1B'C',\end{aligned}$$

从而  $\triangle Br_1B'C' \sim \triangle A'BB r_1$ , 故

$$\text{pow}_C(Br_1) = -BB r_1 \cdot B'Br_1 \stackrel{\text{相似}}{=} -BA' \cdot B'C = -BA'^2 \stackrel{\text{正弦定理}}{=} -(2R\sin\varpi)^2,$$

因此  $OB r_1 = R\sqrt{1-4\sin^2\varpi}$ .  $\square$

**Proposition 5.7.10.** Lemoine 点在  $\triangle OBr_1Br_2$  的外接圆上, 且为点  $O$  关于该外接圆的对径点.

*proof.* 如图5.39, 设  $Br_1$  的外接 Ceva 三角形为  $\triangle A'B'C'$ . 设  $\triangle ABC$  的外心为  $O$ ,  $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$  的 Lemoine 点分别为  $L, L'$ .

我们知道, 在旋转  $f \triangleq r_{O, -2\varpi}$  下,  $f(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$ , 从而  $f(L) = L'$ . 那么, 若设  $LL' \cap \odot O = X, Y$ , 则  $LX = L'Y$ , 即有  $XY$  与  $LL'$  的中点相同, 记之为  $Z$ .

由(3.4.8)知存在一个保持  $C = \odot(\triangle ABC)$  的外接圆不变的射影变换  $g$ , 使得  $g(Br_1) = O$ . 以 “\*” 记射影变换下的对应点, 则  $\triangle A^*B^*C^*, \triangle A'^*B'^*C'^*$  关于  $O$  中心对称, 则它们的 Lemoine 点与点  $O$  共线.

由(5.3.9)知变换  $g$  保持 Lemoine 点, 则射影变换前亦有点  $L, L', Br_1$  共线.

注意  $X^*, Y^*$  为  $L^*L'^*$  与  $C$  的交点而  $L^*, L'^*$  关于  $O$  中心对称, 故  $X^*, Y^*$  也关于  $O$  中心对称. 则由 [3.38] 的结论,  $O = Z^*$ .

但  $O = Br_1^*$ , 则必有  $Br_1 = Z$ , 即  $Br_1$  就是  $L, L'$  的中点. 而  $OL = OL'$ , 故  $OB r_1 \perp LL'$ , 从而  $OL$  为  $\odot(OBr_1Br_2)$  的直径.  $\square$

**Proposition 5.7.11.** 三角形的 Brocard 椭圆与三角形各边的切点组成的三角形与原三角形透视, 且透视中心为三角形的 Lemoine 点.

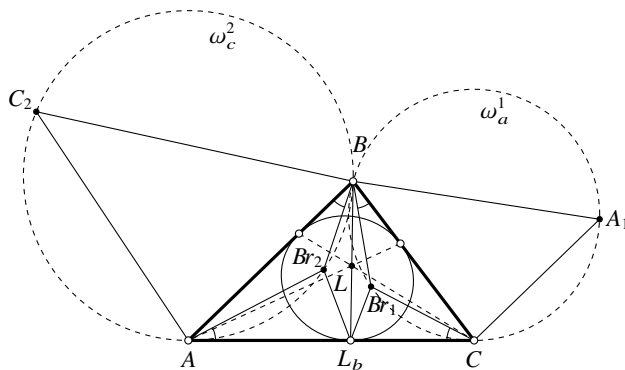


Figure 5.40

*proof.* 如图5.40所示, 记  $\triangle ABC$  的 Lemoine 点为  $L$ ,  $BL \cap AC = L_b$ . 向  $\triangle ABC$  外侧作  $\triangle BCA_1, \triangle C_2AB$  与  $\triangle ABC$  逆相似, 并分别记  $\triangle BCA_1, \triangle C_2AB$  的外接圆为  $\omega_a^1, \omega_c^2$ , 则  $Br_1 \in \omega_a^1, Br_2 \in \omega_c^2$ .

那么,  $\angle ABB_2 = \angle CBB_1$ , 从而由正弦定理  $\frac{CB_1}{AB_2} = \frac{2r_{\omega_a} \sin \angle ABB_2}{2r_{\omega_c} \sin \angle CBB_1} = \frac{r_{\omega_a}}{r_{\omega_c}}$ , 而两圆的半径之比又等于  $\triangle BCA_1$  和  $\triangle C_2AB$  的相似比, 从而

$$\frac{CB_1}{AB_2} = \frac{BC}{AC_2} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AB}{AC_2} = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 \stackrel{(5.3.3)}{=} \frac{CL_b}{AL_b}.$$

结合  $\angle Br_2AC = Br_1CA$ , 可知  $\triangle CL_bBr_1 \sim \triangle AL_bBr_2$ , 因此  $\angle Br_2L_bA = \angle Br_1L_bC$ , 则由椭圆的光学性质知 Brocard 椭圆在  $AC$  边上的切点为  $L_b$ . 对其余两个切点同理, 从而有透视关系, 且透视中心为  $L$ .  $\square$

### 练习

**Problem 5.60.** 证明:  $\varpi \leq 30^\circ$ .

**Problem 5.61.** 证明: 一个三角形的两个 Brocard 点的垂足三角形全等.

**Problem 5.62.** 考虑 Brocard 点在四边形中的推广. 证明凸四边形  $A_1A_2A_3A_4$  内存在一点  $P$ , 使得  $\angle PA_1A_2 = \angle PA_2A_3 = \angle PA_3A_4 = \angle PA_4A_1$  的充要条件为: 四边形存在外接圆, 且  $A_1A_2 \cdot A_3A_4 = A_1A_4 \cdot A_2A_3$ .

**Problem 5.63.** 设  $\triangle ABC$  的重心与 Lemoine 点分别为  $G, L$ , 证明:  $AB_1, BL, CG$  交于一点,  $AB_2, BG, CL$  也交于一点.

**Problem 5.64.** 设  $\triangle ABC \triangleq \triangle A'B'C'$ , 且  $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ ,  $\triangle ABC$  的第一 Brocard 点为  $Br_1$ ,  $\triangle A'B'C'$  的第二 Brocard 点为  $Br'_2$ , 证明:  $Br_1Br'_2 \parallel AA'$ .

**Problem 5.65.** \* 对于  $\triangle ABC$ , 证明:

$$(1) [\text{أبي خزام}] \varpi^3 \leq (A - \varpi)(B - \varpi)(C - \varpi);$$

$$(2) [\text{Yff 猜想}^{(16)}] 8\varpi^3 < ABC.$$

**Problem 5.66.** \* 证明: 三角形的 Brocard 椭圆的离心率为  $\sqrt{1 - 4\sin^2 \varpi}$ .

## 5.7.2 Brocard 三角形

本节我们介绍一些与 Brocard 点相关的知识, 特别是 Brocard 三角形. 我们先给出如下定义:

**Definition 5.7.12.** 设  $\triangle ABC$  的 Lemoine 点与外心分别为  $L, O$ , 称直线  $OL$  为  $\triangle ABC$  的 Brocard 轴, 称  $\odot(OL)$  为  $\triangle ABC$  的 Brocard 圆.

称  $Br_1Br_2$  的中点  $Br_m$  为 Brocard 中点, 称在三角形内且到三角形三边的距离之比为三边的三次方反比的点  $Br_3$  <sup>(17)</sup> 为 第三 Brocard 点.

我们已经知道, 一个三角形的 Brocard 点  $Br_1, Br_2$  均在 Brocard 圆上, 且点  $Br_1, Br_2$  关于 Brocard 轴对称. 我们下面再给出  $Br_3, Br_m$  的一些性质, 它们都是容易证明的.

**Proposition 5.7.13.** 一个三角形的 Brocard 中点为 Brocard 椭圆的中心.

*proof.* It's apparent.  $\square$

**Proposition 5.7.14.** 一个三角形的 Brocard 中点在 Brocard 轴上.

*proof.* 因为  $Br_1, Br_2$  关于 Brocard 轴对称, 而  $Br_m$  为  $Br_1, Br_2$  的中点.  $\square$

**Proposition 5.7.15.** 一个三角形的 Lemoine 点与第三 Brocard 点等截共轭.

(16) 此猜想的证明由 أبي خزام 完成.

(17) 即  $\text{dist}(Br_3, BC) : \text{dist}(Br_3, CA) : \text{dist}(Br_3, AB) = BC^{-3} : CA^{-3} : AB^{-3}$ .

*proof.* 由(4.4.9), 结合(5.3.5)与  $Br_3$  的定义即知.  $\square$

**Proposition 5.7.16.** 第三 Brocard 点的补点为 Brocard 中点.

*proof.* 我们需要再学习完 §7.3.1 后再证明这一结论, 它是后面的(7.3.3)的直接推论.  $\square$

接下来我们来讨论 Brocard 三角形. 下面的定理引出了第一 Brocard 三角形:

**Theorem 5.7.17.** 对于  $\triangle ABC$ , 设  $B_a = A_b Br_1 \cap A_c Br_2$ ,  $B_b = A_c Br_1 \cap A_a Br_2$ ,  $B_c = A_a Br_1 \cap A_b Br_2$ , 则  $\triangle B_a B_b B_c$  内接于 Brocard 圆. 称  $\triangle B_a B_b B_c$  为  $\triangle ABC$  的第一 Brocard 三角形.

*proof.* 如图5.41,  $\angle Br_2 B_b Br_1 = \angle ACB_b + \angle B_b AC = 2\varpi \stackrel{(5.7.8)}{=} \angle Br_1 O Br_2$ , 故点  $B_b, O, Br_1, Br_2$  共圆, 即  $B_b$  在 Brocard 圆上. 对点  $B_a, B_c$  同理.

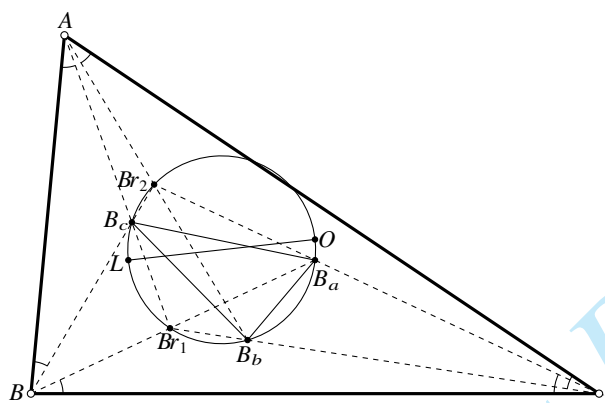


Figure 5.41

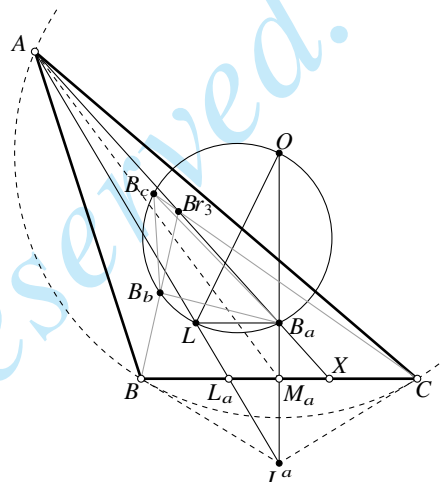


Figure 5.42

第一 Brocard 三角形有如下性质:

**Proposition 5.7.18.** 第一 Brocard 三角形与原三角形逆相似.

*proof.* 如图5.41, 设  $\triangle ABC$  的第一 Brocard 三角形为  $\triangle B_a B_b B_c$ , 则

$$\angle B_b B_a B_c \stackrel{(5.7.17)}{=} -\angle B_c Br_1 B_b = -\angle Br_1 AC - \angle AC Br_1 = -(\angle BAC - \varpi) - \varpi = \angle BAC,$$

对其余两个对应角角的讨论类似, 即得  $\triangle B_a B_b B_c \sim \triangle ABC$ .  $\square$

**Proposition 5.7.19.** 三角形与其第一 Brocard 三角形透视, 且透视中心为第三 Brocard 点.

*proof.* 设  $\triangle ABC$  的第一 Brocard 三角形为  $\triangle B_a B_b B_c$ , 记 Lemoine 点与外心分别为  $L, O$ ,  $BC$  边中点为  $M_a$ ,  $AB_a \cap BC = X$ ,  $AL \cap BC = L_a$ , 切线三角形为  $\triangle L^a L^b L^c$ , 如图5.42.

由第一 Brocard 三角形的定义易知  $\triangle BB_a C$  是底角为  $\varpi$  的等腰三角形, 则  $B_a \in OM_a$ . 由(5.7.10)可知  $LB_a \perp OB_a$ , 而  $OB_a \perp BC$ , 故  $LB_a \parallel BC$ .

由于  $\triangle L^a L^b L^c$  为  $L$  的反 Ceva 三角形, 则由(4.3.4)知  $(A, L_a; L, L^a) = -1$ . 注意  $(A, L_a, L, L^a) \stackrel{(B_a)}{\wedge} (X, L_a; \infty_{BC}, M_a)$ , 故  $(X, L_a; \infty_{BC}, M_a) = -1$ , 则  $M_a$  为  $XL_a$  的中点, 故  $tL \in AX$ , 即  $tL \in AB_a$ .

同理  $tL \in BB_b, CC_b$ , 而由(5.7.15)知  $Br_3 = tL$ , 故  $\triangle ABC, \triangle B_a B_b B_c$  有透视中心  $L$ .  $\square$

而下面的定理引出了第二 Brocard 三角形.

**Theorem 5.7.20.** 对于  $\triangle ABC$ , 作过点  $A, C$  且与  $AB$  相切的圆  $\omega_a^1$ , 过点  $A, B$  且与  $AC$  相切的圆  $\omega_a^2$ , 过点  $B, A$  且与  $BC$  相切的圆  $\omega_b^1$ , 过点  $B, C$  且与  $BA$  相切的圆  $\omega_b^2$ , 过点  $C, B$  且与  $CA$  相切的圆  $\omega_c^1$ , 过点  $C, A$  且与  $CB$  相切的圆  $\omega_c^2$ . 设  $\omega_a^1 \cap \omega_a^2 = A, C_a$ , 类似定义  $C_b, C_c$ , 则  $\triangle C_a C_b C_c$  内接于 Brocard 圆. 称  $\triangle C_a C_b C_c$  为  $\triangle ABC$  的第二 Brocard 三角形.

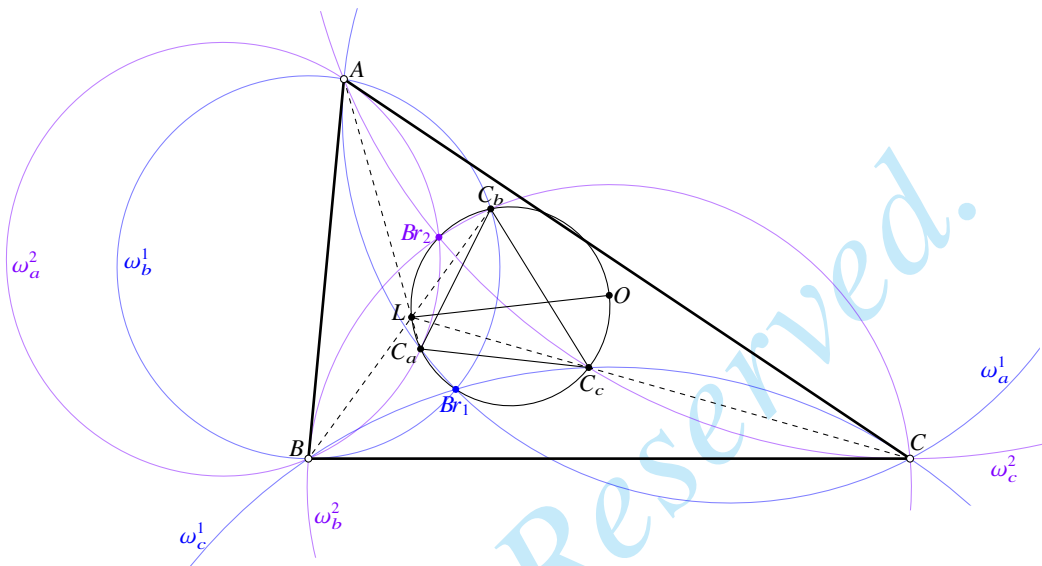


Figure 5.43

*proof.* 如图5.43, 易知  $\omega_a^1, \omega_b^1, \omega_c^1, \omega_a^2, \omega_b^2, \omega_c^2$  与图5.37a及5.37b中的圆是相同的, 圆  $\omega_a^1, \omega_b^1, \omega_c^1$  交于点  $Br_1$ , 圆  $\omega_a^2, \omega_b^2, \omega_c^2$  交于  $Br_2$ . 那么

$$\begin{aligned} \angle Br_1 C_a Br_2 &= \angle C_a Br_1 C + \angle B Br_2 C_a + \angle (C Br_1, B Br_2) = \angle C_a A C + \angle B A C_a + \angle (C Br_1, B Br_2) \\ &= \angle B A C + \angle (C Br_1, B Br_2) = -\angle A C Br_1 - \angle Br_1 B A = -2\omega \stackrel{(5.7.8)}{=} \angle Br_1 O Br_2, \end{aligned}$$

故点  $C_a$  在 Brocard 圆上. 对其余两个顶点同理. □

第二 Brocard 三角形有如下性质:

**Proposition 5.7.21.** 三角形与其第二 Brocard 三角形透视, 且透视中心为 Lemoine 点.

*proof.* 如图5.43, 使用与(5.7.20)中相同的记号. 由(5.7.20),  $O, Br_1, Br_2, C_a$  共圆, 而同时  $Br_2, B, A, C_a$  共圆于  $\omega'_a$ , 则  $\angle OC_a A = \angle OC_a Br_2 + \angle Br_2 C_a A = \angle O Br_1 Br_2 + \angle Br_2 B A$ .

则利用(5.7.8)可知  $\angle O Br_1 Br_2 = 90^\circ - \omega$ , 而  $\angle Br_2 B A = \omega$ , 因此  $\angle OC_a A = 90^\circ$ . 但由(5.7.10)可知  $\angle OC_a L = 90^\circ$ , 故  $A, C_a, L$  共线. 同理有另外两组共线, 故有透视关系, 且  $L$  为透视中心. □

**Proposition 5.7.22.** 三角形的第一、第二 Brocard 三角形透视, 且透视中心为三角形的重心.



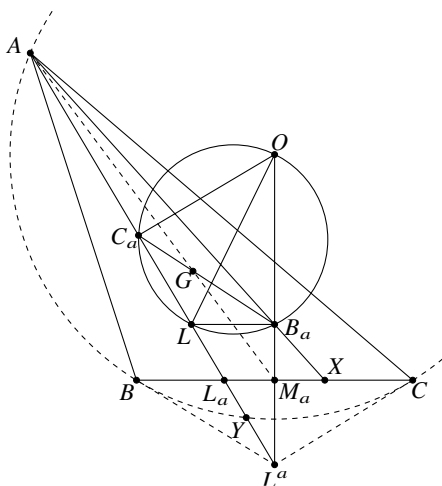


Figure 5.44

*proof.* 承(5.7.19)的证明, 如图5.44, 设第二 Brocard 三角形为  $\triangle C_a C_b C_c$ , 记  $AM_a \cap C_a B_a = G$ ,  $AL \cap C = A, Y$ . 由(5.7.21)(5.7.10)可知  $C_a$  就是  $AL$  与 Brocard 圆的交点且  $OC_a \perp AL$ .

对  $\triangle L_a L^a M_a$  与截线  $\overline{AB_a X}$  应用 Μενέλαος 定理得  $\frac{LX}{XM_a} \cdot \frac{M_a B_a}{B_a L^a} \cdot \frac{L^a A}{AL_a} = 1$ , 而  $M_a$  为  $L_a X$  的中点, 即  $\frac{LX}{XM_a} = 2$ , 故可得  $\frac{M_a B_a}{B_a L^a} = \frac{AL_a}{2AL^a}$ .

利用(4.3.4)得  $(A, L_a; L, L^a) = -1$ ; 点  $L^a$  对  $\odot(ABC)$  的极线为  $BC$ , 则由(3.6.10)有  $(A, Y; L, L^a) = -1$ ; 另外, 由  $OC_a \perp AL$  可知  $C_a$  为  $AY$  中点. 上述三个条件确定了直线  $AL$  上点  $A, C_a, L, L_a, Y, L^a$  的位置关系, 对线段比例作简单的推导, 可得  $AL_a \cdot L^a C_a = AL^a \cdot C_a A$ .

由此, 对  $\triangle AL^a M_a$  与截线  $\overline{C_a G B_a}$  应用 Μενέλαος 定理:

$$1 = \frac{AG}{GM_a} \cdot \frac{M_a B_a}{B_a L^a} \cdot \frac{L^a C_a}{C_a A} = \frac{AG}{GM_a} \cdot \frac{AL_a}{2AL^a} \cdot \frac{L^a C_a}{C_a A} = \frac{AG}{2GM_a}.$$

因此,  $\frac{B_a G}{GC_a} = 2$ , 则点  $G$  就是重心, 即  $G \in B_a C_a$ . 同理  $G \in B_b C_b, B_c C_c$ , 故有透视且透视中心为  $G$ .  $\square$

练习

**Problem 5.67.** 设  $H$  为  $\triangle ABC$  的垂心, 证明: 点  $H, AI, Br_3$  共线.

**Problem 5.68.** 证明: 垂足三角形的垂心在 Brocard 轴上.

**Problem 5.69.**  $\triangle ABC$  三边的长度分别为  $a, b, c$ , 对  $i=1, 2, 3$ , 分别计算  $[\triangle Br_i BC]:[\triangle Br_i CA]:[\triangle Br_i AB]$ . 你发现了什么? 据此猜测第三 Brocard 点得名的原因.

**Problem 5.70.** 证明: 三角形与其第一 Brocard 三角形有相同的重心.

**Problem 5.71.** 证明: 对于一个三角形,  $N_i$  的垂足三角形与第一 Brocard 三角形的中点三角形透视, 且透视中心就是  $N_i$ .

**Problem 5.72.** 设  $\triangle ABC$  的 Lemoine 点为  $L$ ,  $AL \cap C = A, P$ , 证明:  $AP$  的中点为  $\triangle ABC$  的第二 Brocard 三角形的某一顶点.

**Problem 5.73.** 给定  $\triangle ABC$ , 设第一 Brocard 三角形为  $\triangle B_a B_b B_c$ , 定义  $E_i = g B_i (i=a, b, c)$ , 称  $\triangle E_a E_b E_c$  为  $\triangle ABC$  的第三 Brocard 三角形.

(1) 证明: 第三 Brocard 三角形与原三角形透视, 且透视中心到三边的距离之比等于三边长度的立方之比 (因此此透视中心被称为三次幂点 (third power point)).

(2) 证明: 三次幂点与第三 Brocard 点等角共轭.

(3) 设  $B_a, B_b, B_c$  关于  $C$  的反演点分别为  $B'_a, B'_b, B'_c$ , 证明:  $\triangle B'_a B'_b B'_c$  与  $\triangle ABC$  透视, 且透视中心为三次幂点.

**Problem 5.74.** 给定  $\triangle ABC$ , 设第二 Brocard 三角形为  $\triangle C_a C_b C_c$ , 定义  $D_i = \varphi C_i (i=a, b, c)$ , 称  $\triangle D_a D_b D_c$  为  $\triangle ABC$  的第四 Brocard 三角形或  $D$ -三角形.

(1) 证明:  $\omega_b^1 \cap \omega_c^2 = A, D_a$ , 其中  $\omega_b^1, \omega_c^2$  如(5.7.20)中所定义.

(2) 设  $\triangle ABC$  的重心为  $G$ , 证明:  $G$  为  $\triangle ABC$  与  $\triangle D_a D_b D_c$  的透视中心.

(3) 证明: 以  $\triangle ABC$  的垂心与重心的连线段为直径的圆 (称为  $\triangle ABC$  的重垂圆 (orthocentroidal circle)) 是  $\triangle D_a D_b D_c$  的外接圆.

(4) 证明:  $\triangle D_a D_b D_c \sim \triangle ABC$ .

(5) 证明:  $\triangle D_a D_b D_c$  与  $\triangle ABC$  有相同的 Lemoine 点.

**Problem 5.75.** 给定  $\triangle ABC$ , 取点  $D$  使得  $\triangle BCD$  为正三角形, 且点  $A, D$  在  $BC$  的同侧,  $AD$  的中垂线交直线  $BC$  于点  $J$ ,  $AJ \cap C = A, T$ . 证明:  $S(T)$  平行于  $\triangle ABC$  的 Brocard 轴.

**Problem 5.76.** 设  $\triangle ABC$  的第一 Brocard 三角形为  $\triangle XYZ$ ,  $BX, CX$  分别与  $YZ$  交于点  $P, Q$ . 过  $P$  作  $AC$  的垂线, 过  $Q$  作  $AB$  的垂线, 两者交于点  $T$ . 证明:  $TB = TC$ .

## 5.8 Απολλώνιος 点

本节介绍著名的 Απολλώνιος 点.

请回忆的(0.3.7)中的 Απολλώνιος 圆: 给定  $\triangle ABC$ , 则所有满足  $\frac{PA}{PB} = \frac{AC}{BC}$  的点  $P$  的轨迹是一个关于点  $A, B$  的 Απολλώνιος 圆, 且  $\angle ACB$  的内外角平分线与直线  $AB$  的交点是这个圆的一对对径点, 我们将这一圆称为  $\triangle ABC$  的  $C$ -Απολλώνιος 圆. 同理可以定义  $\triangle ABC$  的  $A$ -Απολλώνιος 圆与  $B$ -Απολλώνιος 圆.

需要注意的是, 当  $CA = CB$  时, 所有满足  $\frac{PA}{PB} = \frac{AC}{BC}$  的点  $P$  的轨迹为  $AB$  的中垂线, 它不再是一个圆. 不过, 在极限的意义下, 可将它视为圆心在  $\infty_{AB}$  处、半径无穷大的圆, 我们仍可说它就是  $\triangle ABC$  的  $C$ -Απολλώνιος 圆.

利用 Απολλώνιος 圆, 我们可以证明下面的定理, 它引出了 Απολλώνιος 点的定义:

**Theorem 5.8.1.** 给定  $\triangle ABC$ , 同时满足  $PA \cdot BC = PB \cdot CA = PC \cdot AB$  的点  $P$  恰有两个. 它们称为  $\triangle ABC$  的 Απολλώνιος 点或等力点 (isodynamic points).

*proof.*  $PA \cdot BC = PB \cdot CA$  即  $\frac{PA}{PB} = \frac{CA}{CB}$ , 则  $P$  在  $\triangle ABC$  的  $C$ -Απολλώνιος 圆上; 同理,  $PB \cdot CA = PC \cdot AB$  即  $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$ , 则点  $P$  在  $\triangle ABC$  的  $A$ -Απολλώνιος 圆上.

当点  $P$  同时在  $\triangle ABC$  的  $B, C$ -Απολλώνιος 圆上时, 点  $P$  已经满足  $PA \cdot BC = PB \cdot CA = PC \cdot AB$ , 则  $P$  也满足  $\frac{PA}{PC} = \frac{BA}{BC}$ , 故  $P$  也在  $\triangle ABC$  的  $B$ -Απολλώνιος 圆上.

由上述讨论, 点  $P$  就是  $\triangle ABC$  的三个 Απολλώνιος 圆的两个公共点.  $\square$

**Remark.** 实际上, 应要求  $\triangle ABC$  不是等边三角形. 对等边三角形的情形, 三个 Απολλώνιος 圆分别退化为各边的中垂线, 则它们只有一个公共点, 即它的中心. 不过, 等边三角形的情形过于特殊, 我们一般不考虑, 以后也不会特别声明要排除这种情况.

关于三角形的 Απολλώνιος 点, 它有如下性质:

**Proposition 5.8.2.**  $\triangle ABC$  的三个 Απολλώνιος 圆有两个公共点  $Ap_1, Ap_2$ , 且其圆心在同一直线上, 并且均与  $C$  正交.

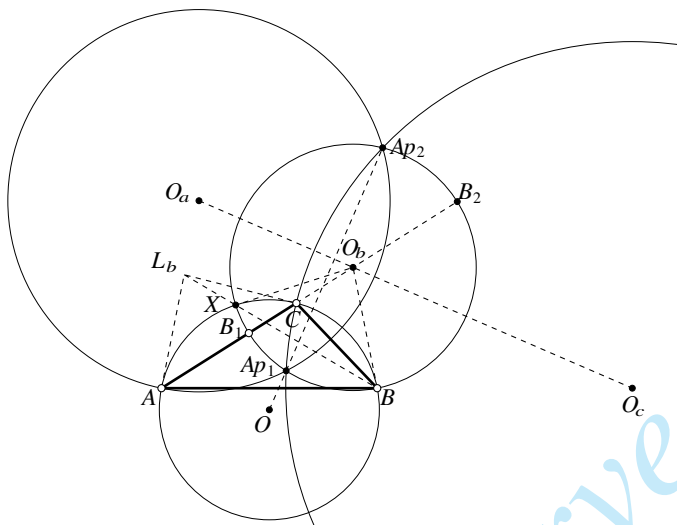


Figure 5.45

*proof.* 三个 Απολλώνιος 圆有两公共点在(5.8.1)的证明中已经给出, 从而显然圆心共线. 下证正交. 以  $B$ -Απολλώνιος 圆  $\odot O_b$  为例, 只需要证明  $OB \perp O_b B$ .

以图5.45的位形为例, 设  $AC \cap \odot O_b = B_1, B_2$ , 则  $BB_1, BB_2$  为  $\angle ABC$  的内、外角平分线, 从而

$$\begin{aligned} \angle O_b BC &= 180^\circ - \angle O_b CB - \angle CO_b B = 180^\circ - (\angle O_b B_1 B + \angle CBB_1) - (180^\circ - 2\angle O_b B_1 B) \\ &= \angle O_b B_1 B - \angle CBB_1 = \angle O_b B_1 B - \angle ABB_1 = \angle CAB = \frac{\angle COB}{2} = \frac{180^\circ - \angle 2CBO}{2} = 90^\circ - \angle CBO, \end{aligned}$$

从而  $\angle OBO_b = 90^\circ$ , 命题得证.  $\square$

**Corollary 5.8.3.**  $\triangle ABC$  的两个 Απολλώνιος 点关于  $C$  互为反演.

*proof.* 由于外接圆与 Απολλώνιος 圆正交, 由(4.2.9)知关于外接圆的反演保持三个 Απολλώνιος 圆不变. 但反演变换下某一 Απολλώνιος 点会改变, 它只能变成三个 Απολλώνιος 圆的另一公共点, 即变为另一 Απολλώνιος 点.  $\square$

**Corollary 5.8.4.**  $\triangle ABC$  的两个 Απολλώνιος 点中, 一个在  $C$  内, 一个在  $C$  外.

根据(5.8.4), 我们将  $\triangle ABC$  的两个 Απολλώνιος 点中在  $C$  内的一者  $Ap_1$  称为第一 Απολλώνιος 点或第一/正等力点, 在  $C$  外的一者  $Ap_2$  称为第二 Απολλώνιος 点或第二/负等力点.

Απολλώνιος 点有如下性质:

**Proposition 5.8.5.**  $\triangle ABC$  的两个 Απολλώνιος 点  $Ap_1 Ap_2$  在 Brocard 轴上, 且 Lemoine 点为  $Ap_1 Ap_2$  的中点关于  $C$  外接圆的反演点.

*proof.* 设  $\odot O$  为  $\triangle ABC$  的外接圆, 由(5.8.3), 点  $O, Ap_1, Ap_2$  共线, 我们还要证明 Lemoine 点  $L \in Ap_1 Ap_2$  以及反演关系.

我们先证明三个 Απολλώνιος 圆的圆心关于外接圆的极线分别为三条类似中线, 以  $\triangle ABC$  的  $B$ -Απολλώνιος 圆  $\odot O_b$  为例, 如图3.7.

设  $\odot O$  在点  $A, C$  处的切线交于  $L_b$ , 则由(5.3.7)知  $BL_b$  为  $\triangle ABC$  的一条类似中线.

注意  $L_b$  关于  $\odot O$  的极线过点  $O_b$ , 则由配极原则,  $O_b$  的极线过点  $L_b$ ; 另一方面, 由于  $\odot O, \odot O_b$  正交,  $O_b B$  与  $\odot O$  相切于点  $B$ , 则点  $O_b$  的极线过点  $B$ .

综上可知  $O_b$  的极线为类似中线  $L_b B$  (从而  $BL_b$  也过  $\odot O_b$  与  $\odot O$  的另一个交点  $X$ ).

回到原命题. 由(5.8.2), 三个  $\text{Apollonius}$  圆的圆心  $O_a, O_b, O_c$  共线, 而  $O_a, O_b, O_c$  对  $\odot O$  的极线分别为三条类似中线, 故直线  $O_a O_c$  的极点为三条类似中线的交点, 即 Lemoine 点  $L$ .

显然  $O_a O_c$  垂直平分  $Ap_1 Ap_2$ , 则由(4.2.11)可知  $L$  为  $Ap_1 Ap_2$  中点的反演点. 结合  $O, Ap_1, Ap_2$  共线知  $L \in Ap_1 Ap_2$ , 即证.  $\square$

**Corollary 5.8.6.** 设  $\triangle ABC$  的外心和 Lemoine 点分别为  $O, L$ , 则  $O, L, Ap_1, Ap_2$  成调和点列.

*proof.* 根据(5.8.5), 设  $M$  为  $Ap_1 Ap_2$  的中点, 则  $OL \cdot OM = OAp_1^2 = OAp_2^2$ , 由(3.2.16)即证.  $\square$

**Proposition 5.8.7.** 三角形的  $\text{Apollonius}$  点的垂足三角形是等边三角形.

*proof.* ( $Ap_1$  的情形见图5.47.) 设  $\triangle ABC$  的外接圆半径为  $R$ , 某一  $\text{Apollonius}$  点为  $Ap$ , 其垂足三角形为  $\triangle A'B'C'$ , 则  $A', Ap, B', C$  共圆于  $\odot(ApC)$ .

那么,  $A'B' = ApC \sin \angle ACB = ApC \cdot \frac{AB}{2R}$ , 同理可求出  $A'C' = ApB \cdot \frac{AC}{2R}, B'C' = ApA \cdot \frac{BC}{2R}$ .

注意  $ApC \cdot AB = ApB \cdot AC = ApA \cdot BC$ , 因此  $A'B' = A'C' = B'C'$ , 故垂足三角形为等边三角形.  $\square$

**Proposition 5.8.8.** 设  $\triangle ABC$  的 Lemoine 点为  $L$ , 则  $\angle ApBrL = 60^\circ$ .<sup>(18)</sup>

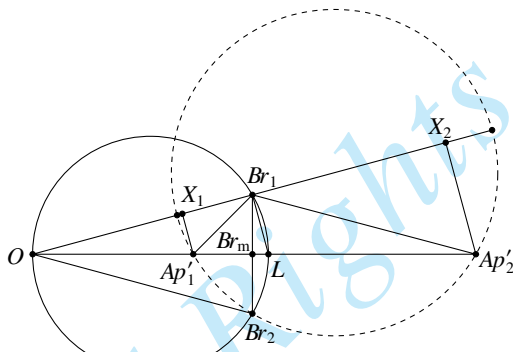


Figure 5.46

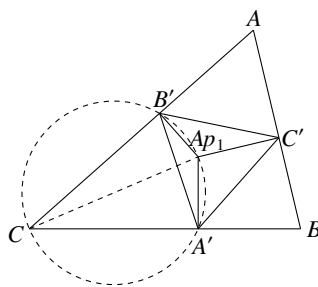


Figure 5.47

*proof.* 对于  $\triangle ABC$ , 设  $L$  为 Lemoine 点,  $O$  为外心. 由(5.7.8)(5.7.10),  $O, Br_1, Br_2, L$  共圆, 且  $OL$  为该圆的直径,  $Br_1, Br_2$  关于  $OL$  对称, 且  $Br_1 Br_2 \cap OL = Br_m$ , 如图5.46所示.

考察  $\triangle OBr_1 Br_2$ , 设它们的  $\text{Apollonius}$  点为  $Ap'_1, Ap'_2$ . 易知  $\triangle OBr_1 Br_2$  的  $O$ - $\text{Apollonius}$  退化为直线  $OL$ , 从而, 作  $\triangle OBr_1 Br_2$  的  $Br_2$ - $\text{Apollonius}$  圆, 它与  $OL$  的交点即为  $Ap'_1, Ap'_2$ .

那么,  $\frac{Ap'_1 O}{Ap'_1 Br_1} = \frac{O Br_2}{Br_1 Br_2} = \frac{O Br_1}{2 Br_m Br_1}$ ; 另一方面, 设  $Ap'_1, Ap'_2$  在  $O Br_1$  上的射影分别为  $X_1, X_2$ , 则  $\triangle OAp_1 X_1 \sim \triangle OBr_1 Br_m$ , 故  $\frac{O Br_1}{Br_m Br_1} = \frac{O Ap'_1}{X_1 Ap'_1}$ .

由上,  $Br_1 Ap'_1 = 2 Ap'_1 X_1$ , 故  $\angle O Br_1 Ap'_1 = 30^\circ$ , 而  $O Br_1 \perp L Br_1$ , 因此  $\angle Ap'_1 Br_1 L = 60^\circ$ .

类似地可证  $\angle Ap'_2 Br_2 L = 60^\circ$ . 结合  $Br_1, Br_2$  的对称性,  $\angle Ap' BrL = 60^\circ$ . 那么, 我们只要证明如下的命题(5.8.9), 原命题便成立:  $\square$

**Proposition 5.8.9.** 设  $\triangle ABC$  的外心为  $O$ , 则  $\triangle OBr_1 Br_2$  与  $\triangle ABC$  有相同的  $\text{Apollonius}$  点.

(18) 此处, 无论  $Ap$  为  $Ap_1$  还是  $Ap_2$ ,  $Br$  是  $Br_1$  还是  $Br_2$  (但注意不能为  $Br_3$ ), 结论均成立, 因此省略了下标.

*proof.* 承(5.8.8)的证明, 如图5.46. 由(5.8.3)可知点  $O, L, Ap'_1, Ap'_2$  成调和点列.

由(5.7.8)(5.7.10),  $\angle Br_1 OL = \varpi$ , 而已证  $\angle OBr_1 Ap'_1 = 30^\circ, \angle OBr_1 Ap'_2 = 150^\circ$ , 故  $\angle Br_1 Ap'_1 Ap'_2 = 30^\circ + \theta$ ,  $\angle Br_1 Ap'_2 Ap'_1 = 30^\circ - \theta$ .

那么, 对  $\triangle OBr_1 Ap'_1$  用正弦定理得  $OA p'_1 = \frac{\sin 30^\circ}{\sin(30^\circ + \theta)} OBr_1$ , 类似地  $OA p'_2 = \frac{\sin 30^\circ}{\sin(30^\circ - \theta)} OBr_1$ , 从而

$$OA p'_1 \cdot OA p'_2 = \frac{\sin^2 30^\circ}{\sin(30^\circ - \theta) \sin(30^\circ + \theta)} OBr_1^2 = \frac{OBr_1^2}{1 - 4\sin^2 \theta} \stackrel{(5.7.9)}{=} R^2,$$

其中  $R$  为  $\triangle ABC$  的外接圆半径. 因此  $Ap'_1 = i Ap'_2$ .

在给定  $O, L$  后,  $Ap'_1 = i Ap'_2$  与  $(O, L, Ap'_1, Ap'_2)$  两个条件就完全确定了  $Ap'_1, Ap'_2$  的位置因为这一条件和上面调和点列的条件唯一确定了点  $Ap'_1, Ap'_2$ . 而由(5.8.3)以及(5.8.6),  $\triangle ABC$  的  $Ap_1, Ap_2$  就满足这两个条件, 因而  $Ap'_1 = Ap_1, Ap'_2 = Ap_2$ , 即证.  $\square$

## 练习

**Problem 5.77.** 证明: 三角形的三个  $\Lambda\sigma\lambda\lambda\omega\nu\sigma$  圆上的点的垂足三角形为等腰三角形.

**Problem 5.78.** 证明: 外接 Ceva 三角形为等边三角形的点是原三角形的  $\Lambda\sigma\lambda\lambda\omega\nu\sigma$  点.

**Problem 5.79.** 设  $\omega$  是以  $\triangle ABC$  的某一  $\Lambda\sigma\lambda\lambda\omega\nu\sigma$  点  $Ap$  为圆心的圆, 在反演  $i_\omega$  下点  $A, B, C$  分别变为点  $A', B', C'$ , 证明:  $\triangle ABC$  为等边三角形.

**Problem 5.80.** 定义过三角形的两个  $\Lambda\sigma\lambda\lambda\omega\nu\sigma$  点以及三角形的重心的圆为三角形的 Parry. 证明:

- (1) 三角形的 Parry 圆同时与三角形的外接圆和 Brocard 圆正交;
- (2) 三角形的重心关于外接圆的反演点在三角形的 Parry 圆上.
- (3)\* 三角形的 Lemoine 点在三角形的外接圆和 Parry 圆的根轴上.

## 5.9 Torricelli 点

### 5.9.1 Torricelli 点

我们下面介绍与  $\Lambda\sigma\lambda\lambda\omega\nu\sigma$  点相关的 Torricelli 点. 下面的定理引出了 Torricelli 点:

**Theorem 5.9.1.** (如图5.48a) 以  $\triangle ABC$  三边为底边, 分别向外作等边三角形  $\triangle BCA_1, \triangle ACB_1, \triangle ABC_1$ , 则直线  $AA_1, BB_1, CC_1$  交于一点  $T_1$ ; (如图5.48b) 以  $\triangle ABC$  三边为底边, 分别向内作等边三角形  $\triangle BCA_2, \triangle ACB_2, \triangle ABC_2$ , 则直线  $AA_2, BB_2, CC_2$  交于一点  $T_2$ .

称  $T_1$  为  $\triangle ABC$  的第一 Torricelli 点,  $T_2$  为  $\triangle ABC$  的第二 Torricelli 点, 统称为 Torricelli 点.

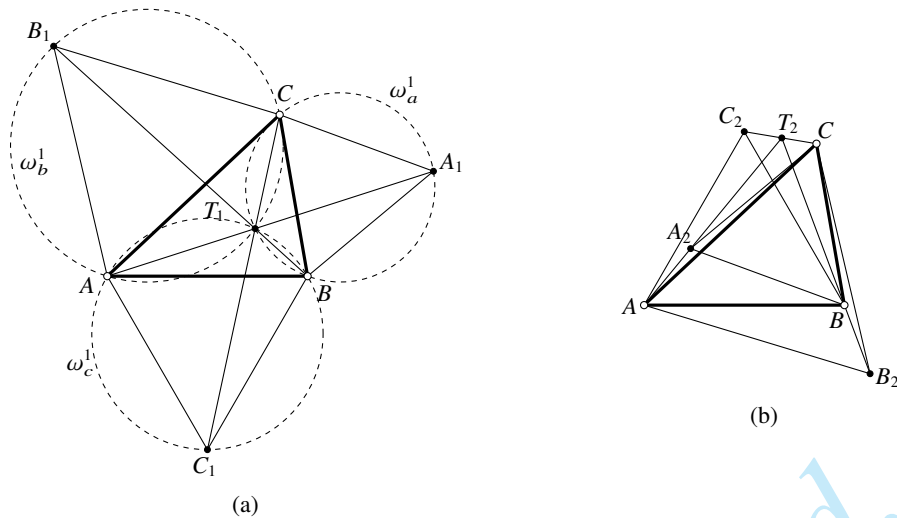


Figure 5.48

*proof.* 对向外作正三角形的情形, 如图5.48a, 分别作  $\triangle BCA_1, \triangle ACB_1, \triangle ABC_1$  的外接圆  $\omega_a^1, \omega_b^1, \omega_c^1$ , 先令  $T_1$  是  $\omega_b^1, \omega_c^1$  的异于  $A$  的交点, 则由四点共圆可知  $\angle CT_1A = 180^\circ - \angle AB_1C = 120^\circ$ , 同理  $\angle BT_1A = 120^\circ$ . 因此  $\angle CT_1A = 120^\circ$ , 则点  $T_1, C, A_1, B$  共圆, 故  $T_1 \in \omega_a^1$ . 即  $T_1$  是三圆的公共点.

由于  $\angle AT_1C = 120^\circ$ , 而  $\angle CT_1A_1 = \angle CBA_1 = 60^\circ$ , 故点  $A, T_1, A_1$  共线, 同理有另两组共线, 即证.

对向内作正三角形的情形是类似的, 留给读者完成.  $\square$

利用上述证明的构造, 我们可以顺便得到  $T_1, T_2$  的如下性质(5.9.2):

**Proposition 5.9.2.** 三角形的 Torricelli 点相对于三角形各边的张角均为  $120^\circ$  或  $60^\circ$ . <sup>(19)</sup>

反之, 对三角形各边的张角均为  $120^\circ$  或  $60^\circ$  的点必为 Torricelli 点.

根据上述性质, 我们又称  $T_1$  为  $\triangle ABC$  的第一/正等角中心,  $T_2$  为  $\triangle ABC$  的第二/负等角中心, 它们统称为  $\triangle ABC$  的等角中心 (isogonic points).

三角形的  $T_1$  还有如下重要性质:

**Proposition 5.9.3.** 若三角形的内角均小于  $120^\circ$ , 第一 Torricelli 点到它的三个顶点的距离之和最小.

*proof.* 如图5.49, 对于平面内任意一点  $X$ , 考虑旋转变换  $r_{A, 60^\circ}$ , 以撇号记旋转后的对应点, 且  $B'X' = BX$ , 从而  $XA + XB + XC = X'X + X'C' + XC \geq CC'$ , 取等号对应于  $X = T_1$ .  $\square$

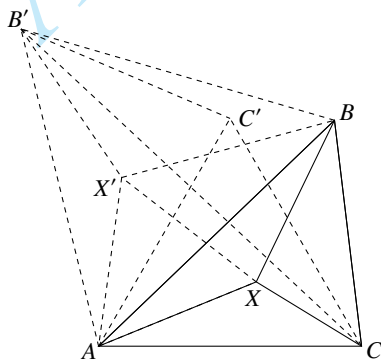


Figure 5.49

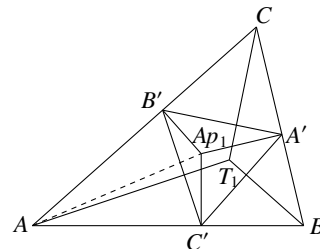


Figure 5.50

(19) 例如, 对如图5.48的情形,  $\angle AT_1C = \angle BT_1C = \angle BT_1A = 120^\circ$ ;  $\angle AT_2C = \angle BT_2C = 60^\circ$ ,  $\angle AT_2B = 120^\circ$ . 特别地, 对三个内角均小于  $120^\circ$  的三角形, 点  $T_1$  对三边的张角均为  $120^\circ$ .



这一性质最早由 Fermat 证明, 因此点  $T_1$  又被称作 [第一]Fermat 点, 而  $T_2$  则相应地称为 第二 Fermat 点.

关于图5.48中正三角形的构型, 我们还有如下结论:

**Proposition 5.9.4.** 以  $\triangle ABC$  的三边为底分别向外 (或向内) 作等边三角形, 三个等边三角形的顶点分别为  $A_1, B_1, C_1$ , 则  $AA_1 = BB_1 = CC_1$ .

*proof.* 易知  $\triangle ABA_1 \cong \triangle C_1BC$ , 从而  $AA_1 = CC_1$ , 同理  $BB_1 = AA_1$ . □

关于 Torricelli 点的等角共轭, 我们有如下结论:

**Proposition 5.9.5.** 对于一个三角形  $T_1 = gAp_1, T_2 = gAp_2$ .

*proof.* ( $T_1, Ap_1$  的情形如图5.50.) 设  $Ap$  的垂足三角形为  $\triangle A'B'C'$ , 过点  $A, B, C$  分别作  $B'C', C'A', A'B'$  的垂线, 由(4.4.2)知三条垂线交于点  $T \triangleq gAp$ . 我们说明它就是 Torricelli 点.

因为  $AT \perp B'C', BT \perp C'A'$ , 从而  $\angle(AT, BT) = \angle(B'C', A'C') \stackrel{(5.8.7)}{=} 60^\circ$ , 则  $\angle ATB = 60^\circ$  或  $120^\circ$ .

对  $T$  相对于其余边的张角也作类似的讨论, 可知  $T$  对  $\triangle ABC$  的三边的张角均为  $120^\circ$  或  $60^\circ$ . 由(5.9.2)知  $T$  为 Torricelli 点. 结合  $Ap$  是  $Ap_1$  还是  $Ap_2$  的具体位置关系读者不难分析出是  $T_1$  对应于  $Ap_1, T_2$  对应于  $Ap_2$ . □

在本小节的最后, 我们来讨论 Torricelli 点的推广.

**Theorem 5.9.6.** 给定  $\triangle ABC$  与一点  $P$ , 设  $f_A$  是点  $A$  上的保持  $PA$  且将  $AB, AC$  互换的对合变换,  $f_B$  是点  $B$  上的保持  $PB$  且将  $BC, BA$  互换的对合变换,  $f_C$  是点  $C$  上的保持  $PC$  且将  $CA, CB$  互换的对合变换. 设直线  $a, a'; b, b'$  与  $c, c'$  分别是对合  $f_A, f_B, f_C$  下的对应直线, 记  $A' = b' \cap c, B' = c' \cap a, C' = a' \cap b$ , 则  $\triangle ABC$  与  $\triangle A'B'C'$  透视.

在证明这一定理之前, 我们先来看它的几种常见的特例:

**Theorem 5.9.7.** 给定  $\triangle ABC$ , 设直线  $a, a'; b, b'$  与  $c, c'$  分别为  $\angle A, \angle B, \angle C$  的等角线, 记  $A' = b' \cap c, B' = c' \cap a, C' = a' \cap b$ , 则  $\triangle ABC$  与  $\triangle A'B'C'$  透视.

*proof.* 在(5.9.6)中, 令  $P = I$  为内心.  $f_A$  是关于  $AI$  的对称变换, 容易验证此时  $f_A$  交换  $AB, AC$  且保持  $AI$ , 并且保持对应直线的交比 (因为轴对称下对应直线的有向角均变为原来的相反数). 同理  $f_B, f_C$  分别是关于  $BI, CI$  的对称变换, 这样就得到了这一命题的结果. □

**Example 5.9.8.** 三角形与它的 Morley 三角形透视. (透视中心称为原三角形的 第二 Morley 中心 或 第一 Morley-Taylor-Marr 中心.)

容易知道(5.9.7)又可以有如下特例:

**Theorem 5.9.9.** (如图5.51) 分别以  $\triangle ABC$  的三边为底, 向外作底角均为  $\phi$  的等腰三角形  $\triangle A'BC, \triangle AB'C, \triangle ABC'$ , 则  $AA', BB', CC'$  交于一点  $X(\phi)$ .



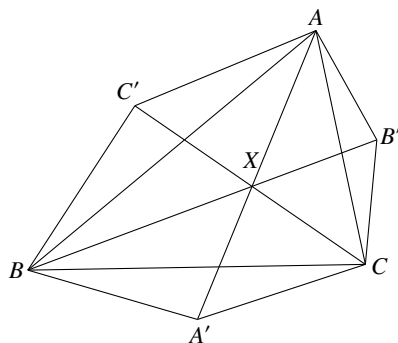


Figure 5.51

**Remark.** 这里的  $\phi$  的取法可以是广义上的, 设  $\phi \equiv \theta \pmod{180^\circ}$ , 其中  $\theta \in (-90^\circ, 90^\circ]$ , 并认为  $X(\phi) = X(\theta)$ . 当  $0 < \theta < 90^\circ$  时, 按正常方法作  $P(\theta)$  即可; 当  $-90^\circ < \theta < 0$  时, 改为向内作等腰三角形, 且等腰三角形的底角为  $-\phi$ ; 当  $\theta = 90^\circ$  时, 考虑极限意义下的等腰三角形的作图, 易知  $X(90^\circ)$  为  $\triangle ABC$  的垂心; 当  $\theta = 0$  时, 三个等腰三角形退化,  $A', B', C'$  即对应边的中点,  $X(0)$  为  $\triangle ABC$  的重心.

**Example 5.9.10.** 在(5.9.9)中,  $X(0)$  为重心,  $X(90^\circ)$  为垂心,  $X(60^\circ) = T_1$ ,  $X(-60^\circ) = T_2$ ,  $X(-\varpi) = Br_3$ .

**Example 5.9.11.** 分别以  $\triangle ABC$  的三边为底, 向外 (或内) 作正三角形, 则三个正三角形的中心组成的三角形与原三角形透视, 透视中心  $Np_1$  (或  $Np_2$ ) 称为  $\triangle ABC$  的第一 Napoléon 点 (或第二 Napoléon 点).

*proof.* 在(5.9.9)中取  $\phi = \pm 30^\circ$  即证. □

**Example 5.9.12.** 分别以  $\triangle ABC$  的三边为底, 向外 (或内) 作正方形, 则三个正方形的中心组成的三角形与原三角形透视, 透视中心  $Vc_1$  (或  $Vc_2$ ) 称为  $\triangle ABC$  的[外] Vecten 点 (或内 Vecten 点).

*proof.* 在(5.9.9)中取  $\phi = \pm 45^\circ$  即证. □

下面我们来证明(5.9.6)

*back to the proof of (5.9.6).* 作射影变换, 使点  $A, B$  变为相互垂直的方向上的无穷远点,  $\angle ACB = 90^\circ$ , 点  $P$  变为  $\angle ACB$  的角平分线上一点, 此时  $AB = l_\infty$ , 如图5.52所示. 设  $P$  在  $BC, AC$  上的射影分别为点  $P_1, P_2$ , 则  $PP_1 = PP_2 \triangleq q$ .

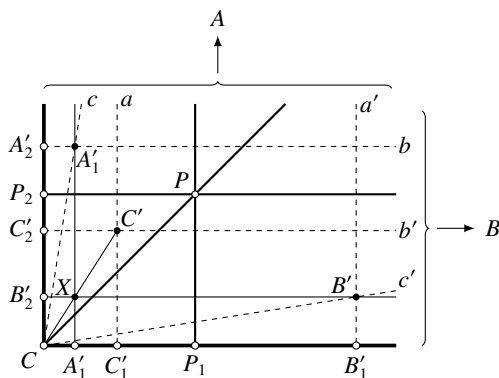


Figure 5.52

此时显然  $a \parallel a' \parallel PP_1 \parallel AC$ . 设动直线  $a$  与  $AC$  的距离为  $u$ . 考虑将  $a$  变为与  $AC$  相距  $\frac{p^2}{u}$  的直线  $a'$  (且  $a', a$  在  $AC$  的同侧) 的变换  $f'_A$ , 易知它保持直线  $PP_1$ 、互换直线  $AC, AB$ 、且是点  $A$  上的对合变

换<sup>(20)</sup>但两组对应的元素  $(AB, AC)$  与  $(AP, AP)$  已完全确定此对合, 故必有  $f_A = f'_A$ .

设动直线  $c$  与  $BC$  的距离为  $v$ , 则同理可证  $f_B$  将  $b$  变为到  $BC$  的距离为  $\frac{p^2}{v}$  的直线  $b'$ .

至于点  $C$  上的对合  $f_C$ , 注意  $AP$  是  $\angle ACB$  的角平分线, 则不难验证将直线  $c$  变为  $c$  关于  $AP$  的对称直线的变换满足条件. 不妨设  $\tan \angle(BC, c) = w$ , 则  $\tan \angle(BC, c') = \frac{1}{w}$ .

设  $A', B', C'$  在三角形的边上  $BC$  与  $AC$  上的射影分别为  $A'_1, A'_2; B'_1, B'_2$  与  $C'_1, C'_2$ , 那么由前述分析不难得到:

$$CA'_1 = \frac{v}{k}, A'_1A_1 = v; \quad CB'_1 = \frac{p^2}{u}, B'_1B'_2 = \frac{p^2}{uk}; \quad CC'_1 = u, C'_1C'_2 = \frac{p^2}{v}.$$

显然直线  $B'B'_2$  就是直线  $BB'$ , 直线  $A'A'_1$  就是直线  $AA'$ , 则设  $AA' \cap BB' = X$ , 则  $XA'_1 = B'B'_1 = \frac{p^2}{uk}$ . 由于  $\frac{XA'_1}{CA'_1} = \frac{p^2}{uv} = \frac{C'_1C'_2}{CC'_1}$ , 故点  $X$  在  $CC'$  上, 即证.  $\square$

## 练习

**Problem 5.81.** 对于一般的三角形, (5.9.2) 中 Torricelli 点对三边的张角何时为  $120^\circ$ , 何时为  $60^\circ$ ?

**Problem 5.82.** 证明: 三角形的 Torricelli 点的反垂足三角形为正三角形.

**Problem 5.83.** 证明: 三角形的  $T_1$  在  $T_2$  的反射三角形的外接圆上, 三角形的  $T_2$  在  $T_1$  的反射三角形的外接圆上.

**Problem 5.84.** 设  $\triangle ABC$  的内心和外心分别为  $I, O$ , 某一 Torricelli 点  $T$  的垂足三角形的内心为  $I'$ , 证明:  $TI' \parallel OI$ .

**Problem 5.85.** \* 试探究 Fermat 点的推广问题: 给定  $\triangle ABC$  与实数  $a, b, c$ , 试确定使得  $a|PA| + b|PB| + c|PC|$  取极值的点  $P$  的位置.

**Problem 5.86.** 证明:

- (1) 三角形与其第一 Morley 副三角形透视 (透视中心称为第二 Morley-Taylor-Marr 中心);
- (2)\* 三角形的第一、第二 Morley 中心与 Morley 中心共线.

## 5.9.2 Napoléon 三角形

本节我们介绍一个与 Torricelli 点相关的结构——Napoléon 三角形, 并利用它来证明 Torricelli 点的一些性质.

(20) 至于为什么是对合变换, 一种解释是: 由于  $\text{dist}(a, AC) \cdot \text{dist}(a', AC) = p^2$  的形式与反演变换的形式类似, 类比反演变换的性质(4.2.13)即知这一变换也是对合. 当然, 直接按定义也不难验证它保交比, 且关于自身的复合是恒等变换.

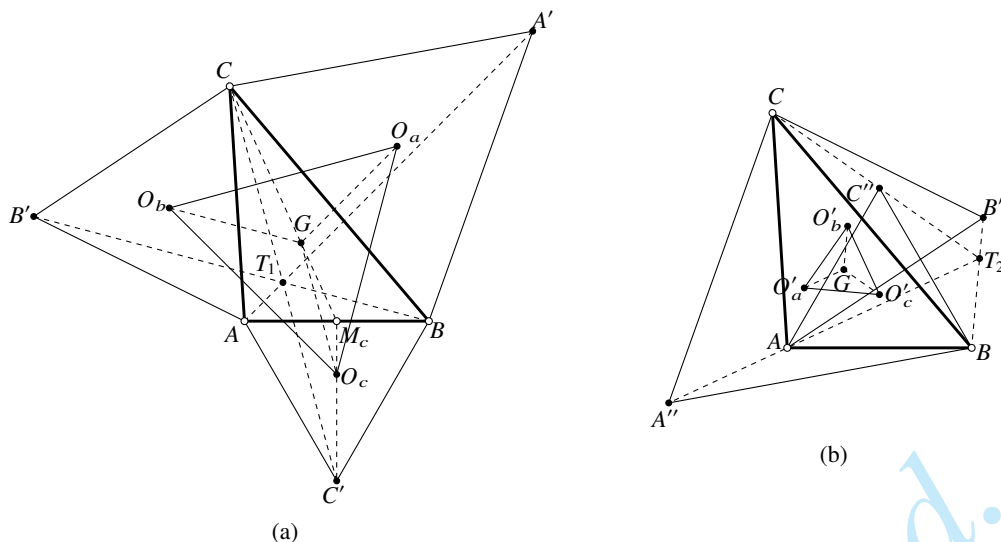


Figure 5.53

**Theorem 5.9.13** (Napoléon(Napoleon)). (如图5.53) 分别以  $\triangle ABC$  三边为底, 向外(或内)作三个正三角形, 则三个正三角形的中心构成了一个正三角形, 且该三角形的中心为原三角形的重心. 称这一正三角形为外 Napoléon 三角形 (或内 Napoléon 三角形).

*proof.* 我们仅证明向外作正三角形的情形, 向内作正三角形的情形类似. 如图5.53a, 设三个正三角形的第三个顶点分别为  $A', B', C'$ , 中心分别为  $O_a, O_b, O_c$ ,  $\triangle ABC$  的重心为  $G$ ,  $AB$  的中点为  $M_c$ , 第一 Torricelli 点为  $T_1$ .

由于  $O_c$  为正三角形  $\triangle ABC$  的中心, 故  $\frac{M_c O_c}{M_c C'} = \frac{1}{3}$ , 由于  $G$  为重心, 所以  $\frac{GM_c}{CM_c} = \frac{1}{3}$ , 因此  $\triangle GM_c O_c \sim \triangle CM_c O_c$ , 故  $GO_c \parallel \frac{1}{3} CC'$ . 同理有  $GO_a \parallel \frac{1}{3} AA'$ ,  $GO_b \parallel \frac{1}{3} BB'$ , 结合(5.9.4)可知  $GO_a = GO_b = GO_c$ , 即  $G$  为  $\triangle O_a O_b O_c$  外心.

另一方面, 由  $GO_a \parallel AA'$ ,  $GO_b \parallel BB'$  得  $\angle O_a G O_b = \angle A' T_1 B' \stackrel{(5.9.2)}{=} 120^\circ$ . 同理  $\angle O_b G O_c = \angle O_c G O_a = 120^\circ$ . 而  $G$  是  $\triangle O_a O_b O_c$  的外心, 因此  $\triangle O_a O_b O_c$  为等边三角形且其中心为  $G$ .  $\square$

**Remark.** 上面我们给出了一种依赖于 Torricelli 点的性质的证法. 实际上, 对于  $\triangle O_a O_b O_c$  为正三角形的结论, 它可视为是 Echols 第二定理的一个特例.

用 “Napoléon 三角形” 这一术语, 我们可以重新叙述(5.9.11):

**Theorem 5.9.14.** 三角形与其外 Napoléon 三角形有透视中心  $N_{p1}$ , 三角形与其内 Napoléon 三角形有透视中心  $N_{p2}$ .

我们先给出 Napoléon 三角形的一些性质.

**Proposition 5.9.15.** 第一  $\text{Apollónios}$  点的垂足三角形与外 Napoléon 三角形位似, 第二  $\text{Apollónios}$  点的垂足三角形与内 Napoléon 三角形位似, 且两个位似的位似中心均为 Lemoine 点.

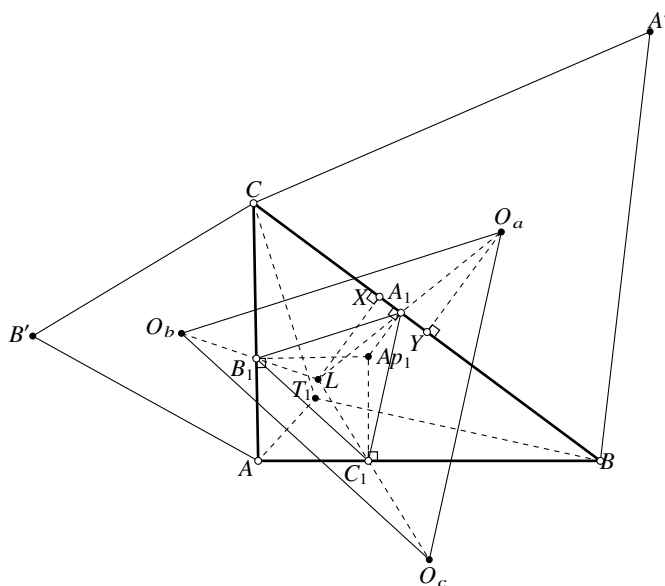


Figure 5.54

*proof.* 下证外 Napoléon 三角形的情形. 如图5.54, 记外 Napoléon 三角形为  $\triangle O_a O_b O_c$ ,  $A_{p_1}$  的垂足三角形为  $\triangle A_1 B_1 C_1$ . 根据(5.9.5),  $A_{p_1} = \varrho T_1$ , 从而依(4.4.2)得  $CT_1 \perp A_1 B_1$ .

另一方面, 注意  $O_b, O_a$  分别为  $\odot(AB'C)$  与  $\odot(A'BC)$  的中心, 而由(5.9.2)知这两个圆交于点  $C, T_1$ , 故  $CT_1 \perp O_a O_b$ .

由上可知  $A_1 B_1 \parallel O_a O_b$ , 同理有另两组平行. 因此  $\triangle O_a O_b O_c$  与  $\triangle A_1 B_1 C_1$  位似, 这一位似的位似比  $k = \frac{LO_a}{LA_1}$ , 设位似中心为  $L$ , 下证  $L$  就是 Lemoine 点.

设点  $L, O_a$  在  $BC$  上的射影分别为  $X, Y$ , 则  $k - 1 = \frac{A_1 O_a}{A_1 L} = \frac{O_a Y}{LX} = \frac{\text{dist}(L, BC)}{\frac{\sqrt{3}}{6} BC}$ . 同理有另两组等式, 最终得到  $\frac{\text{dist}(L, BC)}{BC} = \frac{\text{dist}(L, A, B)}{AB} = \frac{\text{dist}(L, AC)}{AC}$ , 由(5.3.5)知  $L$  是 Lemoine 点.  $\square$

**Proposition 5.9.16.** 三角形的第一、第二 Torricelli 点分别在内、外 Napoléon 三角形的外接圆上.

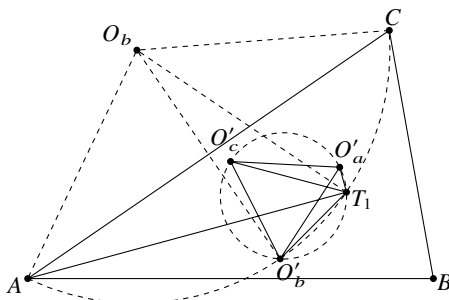


Figure 5.55

*proof.* 设  $\triangle ABC$  的内 Napoléon 三角形为  $\triangle O'_a O'_b O'_c$ , 我们证明  $T_1 \in \odot(O'_a O'_b O'_c)$ . 对  $T_2$  是类似的.

考虑如图5.55所示的位形, 设  $O_b$  与  $O'_b$  关于直线  $AC$  对称, 则显然  $\triangle AOB, \triangle BOB'$  为等边三角形, 从而点  $A, C, O_b$  均在以  $O_b$  为圆心的一个圆上, 而  $\angle AT_1 C = 120^\circ$ , 故  $T_1$  也在该圆上, 即  $A, C, T_1, O'_b$  共圆, 因而  $\angle AT_1 O_b = \angle ACO_b = 30^\circ$ .

同理  $\angle AT_1 O'_c = 30^\circ$ , 因此  $\angle O'_c T_1 O'_b = 60^\circ = \angle O'_c O'_a O'_b$ , 从而  $O'_a, O'_b, O'_c, T_1$  共圆.  $\square$

**Proposition 5.9.17.** 设  $\triangle ABC$  的外、内 Napoléon 三角形的外接圆半径分别为  $r_1, r_2$ , 则  $\frac{r_1}{r_2} = \frac{AAp_2}{AAp_1} = \frac{BAp_2}{BAp_1} = \frac{CAp_2}{CAp_1}$ .

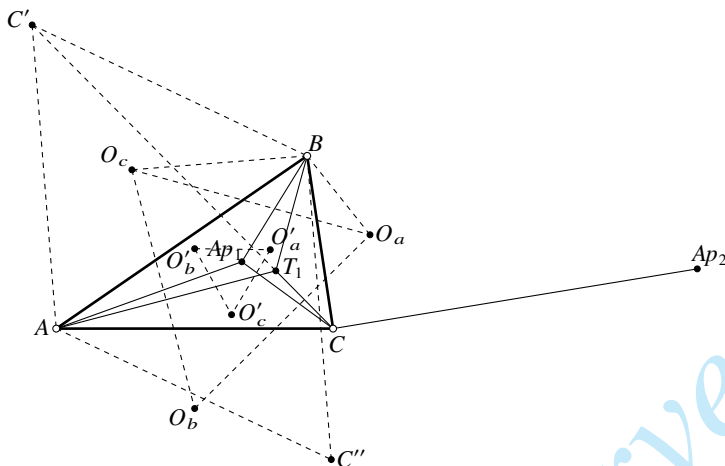


Figure 5.56

*proof.* 下仅证明  $\frac{r_1}{r_2} = \frac{CAp_2}{CAp_1}$ . 设内 Napoléon 三角形为  $\triangle O'_a O'_b O'_c$ , 外 Napoléon 三角形为  $\triangle O_a O_b O_c$ ,  $C', C''$  分别是以  $AB$  为底向外、内作的等边三角形的第三顶点, 如图5.56.

由  $A, B, C', T_1$  共圆、 $C', T_1, C$  共线且  $Ap_1 = gT_1$  等角共轭知  $\angle CAAp_1 = \angle BAT_1 = \angle CC'B$ , 同时  $\angle ACAp_1 = \angle C'CB$ , 故  $\triangle ACAp_1 \sim \triangle C'CB$ , 因此  $\frac{AC}{C'C} = \frac{CAp_1}{CB}$ . 同理  $\frac{AC}{C''C} = \frac{CAp_2}{CB}$ , 因此  $\frac{CAp_1}{CAp_2} = \frac{CC'}{CC''}$ .

由于  $\angle C'BO_c = \angle O_cBA = \angle O_aBC = 30^\circ$ , 故  $\angle C'BC = \angle O_cBO_a$ , 同时  $\frac{BO_c}{BC'} = \frac{BO_a}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , 故  $\triangle O_cO_aB \sim \triangle C'CB$ , 则  $\frac{O_aO_c}{CC'} = \frac{O_aB}{CB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . 同理可证  $\frac{O'_aO'_c}{CC''} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , 因此  $\frac{r_1}{r_2} = \frac{O_aO_c}{O'_aO'_c} = \frac{CC'}{CC''} = \frac{CAp_2}{CAp_1}$ .  $\square$

下面我们利用 Napoléon 三角形来证明 Torricelli 点的几个性质.

**Proposition 5.9.18.** 设  $L, G$  分别为  $\triangle ABC$  的 Lemoine 点与重心, 则  $LG$  平分  $Ap_1T_1$ , 也平分  $Ap_2T_2$ .

*proof.* 如图5.57, 设  $Q$  为  $T_1Ap_1$  的中点,  $O, G, L$  分别为  $\triangle ABC$  的外心、重心和 Lemoine 点.  $\triangle A_1B_1C_1$  为  $Ap_1$  的垂足三角形,  $\triangle O_aO_bO_c$  为 Napoléon 三角形.

由于  $T_1 = gAp_1$ , 则由(4.4.6)知  $Q$  为  $\triangle A_1B_1C_1$  的外心, 而  $\triangle A_1B_1C_1$  为正三角形, 故  $Q$  是它的中心.

由(5.9.15)知  $\triangle O_aO_bO_c, \triangle A_1B_1C_1$  关于  $L$  位似, 而由(5.9.13)知  $G$  为  $\triangle O_aO_bO_c$  的中心, 因此点  $Q, G$  为这一位似的一组对应点,  $Q, G, L$  共线. 即证.  $\square$

**Proposition 5.9.19.** 对于一个三角形,  $Ap_1T_1 \parallel Ap_2T_2 \parallel E$ .

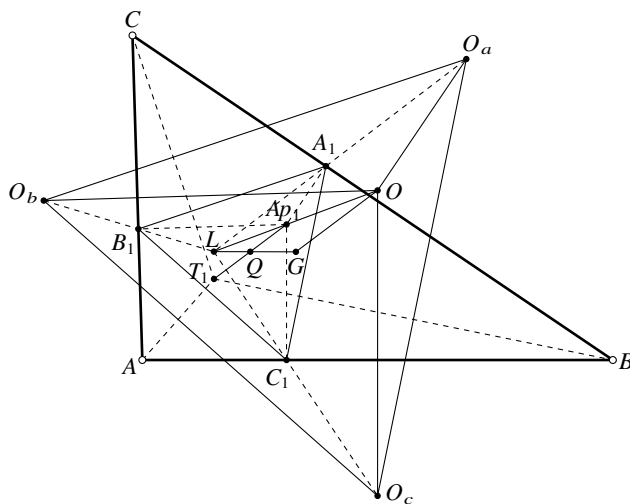


Figure 5.57

*proof.* 承(5.9.18)的证明. 显然点  $O, O_a$  均在  $BC$  的中垂线上, 因此  $OO_a \perp BC$ , 故  $A_1A_{p_1} \parallel OO_a$ , 同理  $B_1A_{p_1} \parallel OO_b, C_1A_{p_1} \parallel OO_c$ , 因此点  $A_{p_1}, O$  也是这一位似的一组对应点.

由此, 利用位似可知  $QA_{p_1} \parallel GO$ , 因此  $A_{p_1}T_1 \parallel \mathcal{E}$ . 对于  $Ap_2T_2 \parallel \mathcal{E}$  的证明是类似的.  $\square$

**Remark.** 上述证明的过程给我们提供了证明  $O, A_{p_1}, A_{p_2}, L$  共线的另一种方法: 由证明过程知  $O, A_{p_1}$  是 Napoléon 三角形与  $A_{p_1}$  的垂足三角形的位似的一组对应点, 故  $O, L, A_{p_1}$  共线, 同理可得  $O, L, A_{p_2}$  共线.

**Proposition 5.9.20.** 设  $L$  为  $\triangle ABC$  的 Lemoine 点, 则  $L, T_1, T_2$  共线; 进一步地,  $L = T_1T_2 \cap A_{p_1}A_{p_2}$ .

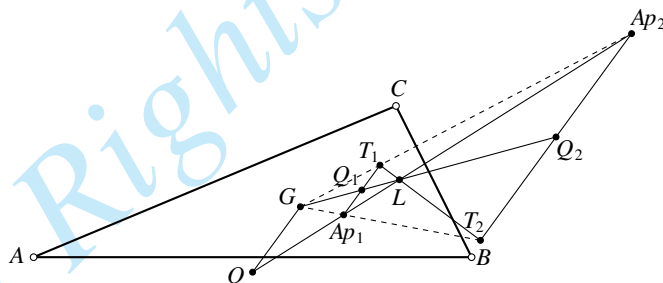


Figure 5.58

*proof.* 如图5.58所示, 设  $A_{p_1}T_1, A_{p_2}T_2$  的中点分别为  $Q_1, Q_2$ ,  $\triangle ABC$  的重心为  $G$ . 由(5.9.18)知  $G, Q_1, L$  共线, 同理可证点  $G, Q_2, L$  共线, 因此点  $G, Q_1, Q_2, L$  在同一条直线上.

而由(5.9.19)可知  $A_{p_1}T_1 \parallel A_{p_2}T_2$ , 利用(3.3.16)知  $A_{p_1}T_1, A_{p_2}T_2$  的交点必定在  $Q_1Q_2$  的连线上, 即  $T_1T_2, A_{p_1}A_{p_2}, GL$  共点.

而  $GL$  过点  $L$ , 由(5.8.5)知  $A_{p_1}A_{p_2}$  也过点  $L$ , 从而三线所共之点就是  $L$ . 即证.  $\square$

**Proposition 5.9.21.** 设  $G$  为  $\triangle ABC$  的重心, 则  $G = A_{p_1}T_2 \cap A_{p_2}T_1$ .

*proof.* 承(5.9.20)的证明, 设  $\triangle ABC$  的外心为  $O$ . 由(5.8.6)可知  $(A_{p_1}A_{p_2}, LO) = -1$ ; 而  $Q_1$  为  $T_1A_{p_1}$  的中点, 因而  $(A_{p_1}T_1, Q_1 \infty_{A_{p_1}T_1}) = -1$ .

因此,  $(A_{p_1}, A_{p_2}, L, O) \cap (A_{p_1}, T_1, Q_1, \infty_{A_{p_1}T_1})$ , 但其中  $A_{p_1}$  在射影对应下不变, 由(3.5.5)知这是一个透视对应, 因此其中的对应元素交于一点.

而  $G \in LQ_1$ , 由(5.9.19)又得  $G \in O \infty_{A_{p_1}T_1}$ , 故  $G \in A_{p_2}T_1$ . 同理  $G \in A_{p_1}T_2$ , 即证.  $\square$

**Theorem 5.9.22** (Lester). 三角形的两个 Torricelli 点、外心、九点圆圆心在同一个圆上, 所共之圆称为三角形的 Lester 圆.

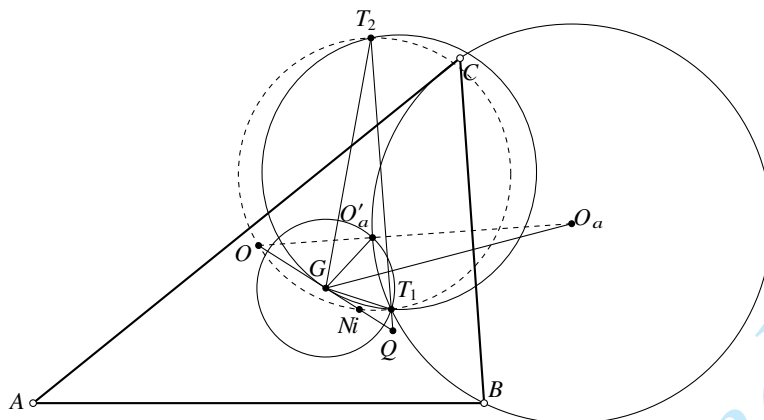


Figure 5.59

*proof.* 设  $\triangle ABC$  的重心为  $G$ , 内、外 Napoléon 三角形分别为  $\triangle O'_a O'_b O'_c, \triangle O_a O_b O_c$ , 如图 5.59.

由 (5.9.16), 点  $T_1, O'_a, O'_b, O'_c$  共圆于  $\omega_1$ , 由 Napoléon 定理知  $\omega_1$  的圆心为  $G$ ; 另一方面,  $\angle BT_1 C = \angle BO'_a C = 120^\circ$ , 故  $C, B, O'_a, T_1$  共圆于  $\omega_2$ , 而显然  $O_a C = O_a O'_a = O_a O_b$ , 故  $\omega_2$  以  $O_a$  为圆心.

由于  $\omega_1, \omega_2$  的公共弦为  $O'_a T_1$ , 故  $O'_a, T_1$  关于两圆圆心的连线  $GO_a$  对称. 同理可证点  $T_2, O_a$  关于  $GO'_a$  对称.

从而可对  $\triangle GT_1 T_2$  应用 (0.3.9): 设  $\odot(GT_1 T_2)$  在  $G$  处的切线交  $T_1 T_2$  于点  $Q$ , 点  $Q$  关于  $M$  的对称点为  $O$ , 则  $O \in O_a O'_a$ , 即  $O$  在  $BC$  的中垂线上.

同理可知  $O$  也在  $AB, AC$  的中垂线上, 因此  $O$  为  $\triangle ABC$  的外心. 而由 (0.5.25) 可知九点圆圆心  $Ni$  为  $GQ$  的中点.

对  $\odot(MT_1 T_2)$  应用圆幂定理可得  $QT_1 \cdot QT_2 = QG^2 = 2QG \cdot \frac{QM}{2} = QNi \cdot QO$ , 故点  $O, Ni, T_1, T_2$  共圆.  $\square$

最后, 我们再列举几个 Napoléon 点的性质, 我们将在之后证明它们.

**Proposition 5.9.23.** 设  $L$  为  $\triangle ABC$  的 Lemoine 点, 则  $L \in Np_1 Np_2$ .

**Proposition 5.9.24.** 设  $O$  为  $\triangle ABC$  的外心, 则  $O = Np_1 T_1 \cap Np_2 T_2$ .

**Proposition 5.9.25.** 对于一个三角形,  $Ni = Np_2 T_1 \cap Np_1 T_2$ .

### 练习

**Problem 5.87.** 对于  $\triangle ABC$ , 设  $T_1, T_2$  的垂足圆圆心分别为点  $O_1, O_2$ , 证明:  $O_1 T_1 \parallel O_2 T_2$ .

**Problem 5.88.** 给定  $\triangle ABC$ , 点  $D, E, F$  分别是线段  $BC, CA, AB$  上的点, 且  $\triangle DEF$  为正三角形. 求  $\triangle ABC$  的中心的轨迹

**Problem 5.89.** 证明: 三角形的两 Torricelli 点的连线平分垂心与重心的连线段.

**Problem 5.90.** 证明: 三角形的  $T_1$  点的 Ceva 三角形的 Euler 线平行于原三角形的 Euler 线.

**Problem 5.91.** 给定  $\triangle ABC$ , 且线段  $AB$  逆时针转  $\alpha$  后与线段  $AC$  重合. 对于平面内一动点  $D$ , 将线段  $AD$  绕  $A$  逆时针转  $90^\circ$  得到线段  $AE$ , 在线段  $BD, CD$  上分别取点  $M, N$ , 使得  $MN \parallel AD$ . 证明: 存在一个与  $D$  无关的定点, 使得  $EF \parallel \mathcal{E}_{\triangle DMN}$  恒成立.



**Problem 5.92.** 证明(5.9.23).

**Problem 5.93.** 对于  $\triangle ABC$ , 点  $D, E, F$  分别在线段  $BC, CA, AB$  上, 满足  $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB}$ .  $\triangle ABC$  的重心为  $G$ ,  $\triangle ABC$  与  $\triangle DEF$  的第一 Torricelli 点分别为点  $T_1, T_1'$ . 证明:  $\angle GQP = 2\angle GPQ$ .

All Rights Reserved.