

## 第二部分

### 圆锥曲线与几何变换

All Rights Reserved.

## 第六章 圆锥曲线的基本射影性质

第三章中我们讲了射影几何中的基本概念, 本章我们将用射影几何的方法来研究圆锥曲线.

### 6.1 极点与极线

本章用射影几何的方法来研究圆锥曲线. 由于通过射影变换可以将圆锥曲线变为圆, 因此之前我们介绍的与圆相关的一些性质可以直接推广到圆锥曲线上. 例如, 我们曾在 §3.6 中研究了关于圆的极点与极线, 我们容易将它推广至一般的圆锥曲线的情形.

**Definition 6.1.1.** 定义:

a.) 给定圆锥曲线  $\alpha$  与平面内一点  $A$ , 通过射影变换  $f$ , 可以将  $\alpha$  变为一个圆  $\omega$ , 并将  $A$  变至  $A'$ . 设  $a'$  是点  $A'$  关于  $\omega$  的极线, 并令  $a$  为  $a'$  在射影变换下的原像, 则称直线  $a$  为点  $A$  关于圆锥曲线  $\alpha$  的极线, 点  $A$  为直线  $a$  关于  $\alpha$  的极点, 下简记  $a = p_\alpha(A)$ ,  $A = p_\alpha^{-1}(a)$ , 在不引起歧义的情况下可简记  $a = p(A)$ ,  $A = p^{-1}(a)$ .

b.) 给定圆锥曲线  $\alpha$ , 则可将平面内一点  $A$  与它的极线  $a$  对应, 将平面内一直线  $a$  与它的极点  $A$  对应, 这种对应关系叫做配极对应 (polar correspondence), 配极对应给出了点与线之间的一种一一对应的变换, 因而我们又称之为配极[变换].

上述定义中,  $\alpha$  经过射影变换得到的圆  $\omega$  可以有无数种. 实际上, 无论取哪一个  $\omega$ ,  $p_\alpha(A)$  都是一样的, 我们稍后将用(6.1.3)说明这一点.

由上述定义立即可以得到:

**Theorem 6.1.2.** 射影变换保持极点极线的关系. 即, 若  $a$  是点  $A$  关于圆锥曲线  $\alpha$  的极线, 射影变换下  $a, A, \alpha$  分别变为  $a', A', \alpha'$ , 则  $a'$  是  $A'$  关于  $\alpha'$  的极线.

*proof.* 通过射影变换, 可将  $\alpha, \alpha'$  变为同一个圆, 利用极点极线的定义即证. □

由此, 通过射影变换, 将圆锥曲线变为圆, 就能知道下面的命题成立:

**Theorem 6.1.3.** 对于圆锥曲线  $\alpha$  与一点  $A$ ,  $p(A)$  可如下获得:

- (1) 若  $A \in \alpha$ , 则  $p(A)$  就是  $\alpha$  在  $A$  点处的切线;<sup>(1)</sup>
- (2) 若  $A$  在  $\alpha$  外, 过  $A$  作  $\odot O$  的两条切线, 两切点的连线即为  $p(A)$ ;
- (3) 若  $A$  在  $\alpha$  内, 过点  $A$  作  $\odot O$  的弦  $PQ$ ,  $\odot O$  在点  $P, Q$  处的切线交于点  $S$ ; 过点  $A$  作  $\odot O$  的另一条弦  $P'Q'$ ,  $\odot O$  在点  $P', Q'$  处的切线交于点  $S'$ , 则直线  $SS'$  即为点  $A$  的极线.

*proof.* (1)(2)(3) 分别是(3.6.3)(3.6.4)(3.6.7)的推广. □

(1) 由此, 对于圆锥曲线  $\alpha$ , 若  $A \in \alpha$ , 则我们也可以用  $p_\alpha(A)$  表示  $\alpha$  在  $A$  处的切线. 不过, 今后当我们强调曲线的切线时, 会使用记号  $t_\alpha(A)$  表示切线 (不引起歧义时简作  $t(A)$ ), 这一记号也会用于表示一般的曲线的切线.

**Remark.** 对于结论 (2), 我们要求  $A$  在  $\alpha$  外, 它的意思是过  $A$  可以作  $\alpha$  的两条切线. 这是在实射影平面内考虑的. 若在复射影平面内考虑, 过  $\alpha$  内也能作  $\alpha$  的两条切线 [利用解析的方法容易证明], 只不过它们是虚直线, 但此时 (2) 仍然成立.

根据上述结果, 对任意一点, 我们可以用上述结果作出它关于一圆锥曲线的极线, 而显然上述做法是确定的, 故对于任意一点, 其极线都是唯一确定的.

极点极线还有如下性质, 它们依次为(3.6.5)(3.6.6)(3.6.8)(3.6.10)(3.6.12)的推广:

**Theorem 6.1.4** (配极原则 (polarity principle)). 对于关于某圆锥曲线的配极变换, 若点  $A$  的极线过点  $B$ , 则点  $B$  的极线过点  $A$ .

**Theorem 6.1.5.** 对于某一圆锥曲线, 一条直线的极点是所有直线上的点的极线的共同交点, 一个点的极线是所有过该点的直线的极点所同在的直线.

**Theorem 6.1.6.** 点列中四点关于某圆锥曲线的极线形成线束中的四直线, 且点列中四点的交比等于对应极线的交比.

**Theorem 6.1.7** (极点极线的调和性质). 设  $p$  是点  $P$  关于圆锥曲线  $\alpha$  的极线, 过  $P$  的任意一条直线交  $\alpha$  于点  $A, B$ , 交  $p$  于点  $Q$ , 则点  $P, Q, A, B$  调和共轭, i.e.  $(P, Q; A, B) = -1$ .

**Theorem 6.1.8** (Châles). 若  $\triangle ABC$  的三个顶点  $A, B, C$  关于圆锥曲线  $\alpha$  的极线分别为  $EF, FD, DE$ , 它们围成  $\triangle DEF$ , 则:

(1)  $\triangle DEF$  的三个顶点关于  $\alpha$  的极线也围成  $\triangle ABC$ , 因此下称  $\triangle DEF$  与  $\triangle ABC$  关于  $\alpha$  互为配极三角形;

(2)  $\triangle DEF, \triangle ABC$  透视, 称此透视的透视中心为  $\alpha$  关于  $\triangle ABC$  的透视中心或  $\triangle ABC$  关于  $\alpha$  的透视中心.

对于上面的定理, 我们补充如下两点.

其一, 根据(6.1.7), 我们还可以用下面的方式定义极点与极线 (易知它与之前的定义等价):

**Definition 6.1.9** (极点极线的射影定义). 对于圆锥曲线  $\alpha$ , 给定一点  $P$ , 对于过  $P$  的  $\alpha$  的动割线  $l$ , 在其上取一点  $Q$ , 使得  $P, Q$  被  $l$  与  $\alpha$  的两个交点调和分割, 则点  $Q$  在一定直线上运动, 该直线称为点  $P$  的极线, 点  $P$  称为该直线的极点.

其二, 利用配极原则, 我们还可以有如下定义:

**Definition 6.1.10.** 给定圆锥曲线, 若一条直线的极点在另一条直线上, 则另一直线的极点也在这一直线上, 此时称这两条直线关于此圆锥曲线共轭; 若一个点的极线过另一个点, 则另一个点的极线也过这个点, 称这两个点关于圆锥曲线共轭.

共轭点有以下性质:

**Theorem 6.1.11.** 圆锥曲线的一对共轭点的连线与圆锥曲线的交点被这对共轭点调和分离.

*proof.* 设点  $A, B$  共轭,  $AB$  交圆锥曲线于  $P, Q$ , 则  $B = p(A) \cap PQ$ , 则  $(AB, PQ) = -1$ . □

类似地, 共轭直线有以下性质, 其证明留给读者:

**Theorem 6.1.12.** 过圆锥曲线的一对共轭直线的交点引它的两条切线, 两切线被这对共轭直线调和分离.

我们再引入如下概念:

**Definition 6.1.13.** 称一个三角形关于某一圆锥曲线是自极的 (self-polar), 如果它的三个顶点均分别是其对边的极线.

由此, (3.6.11)(3.6.21)可推广为如下结论:

**Theorem 6.1.14** (Brocard). 圆锥曲线的内接完全四点形的对顶三点形是自极三角形.

**Remark.** 注意, 如果圆锥曲线退化为两相交直线  $l_1 \cup l_2$ , 我们也可以作类似的构造, 见图3.29, 过  $A$  作此退化二次曲线的两条截线  $\overline{ABC}, \overline{ADE}$ ,  $BE \cap CD = P, BD \cap CE = O = l_1 \cap l_2$ , 由上述定理即知此时点  $A$  的“极线”为  $PO$ . 那么, (3.5.10)亦可从退化二次曲线的角度来理解.

**Theorem 6.1.15.** 圆锥曲线的外切完全四线形的对顶三线形是自极三角形.

顺便一提, 从自极三角形的定义中, 我们还能引申出一个三角形几何学中的概念:

**Theorem 6.1.16.** 给定  $\triangle ABC$ , 存在一个以其垂心  $H$  为圆心的圆  $\omega$ , 使得  $\triangle ABC$  关于  $\mathcal{P}$  自配极, 且  $C$  与  $\mathcal{N}$  关于它互为反演, 并且该圆的半径

$$r_\omega = \overline{AH} \cdot \overline{H_aH} = \overline{BH} \cdot \overline{H_bH} = \overline{CH} \cdot \overline{H_cH} = 2R\sqrt{-\cos A \cos B \cos C},$$

其中  $R$  为外接圆半径,  $\triangle H_aH_bH_c$  为垂心三角形. 称  $\mathcal{P}$  为  $\triangle ABC$  的极圆 (polar circle), 下记  $\triangle ABC$  的极圆为  $\mathcal{P}_{\triangle ABC}$ , 在不引起歧义时记为  $\mathcal{P}$ .

*proof.* 以  $r_\omega$  为半径、 $H$  为垂心作圆, 则根据自极三角形的定义,  $\triangle ABC$  关于此圆自极是(0.5.22)的直接推论. 又易知  $\triangle ABC, \triangle H_aH_bH_c$  的顶点在  $i_\mathcal{P}$  下互为反演, 从而其外接圆  $C, \mathcal{N}$  也互为反演.  $\square$

**Remark.** 容易知道, 对于钝角、锐角、直角三角形, 其极圆分别为实圆、虚圆、点圆.

此外, 关于圆锥曲线的极点极线, 还有如下特别且重要的性质:

**Theorem 6.1.17.** 圆锥曲线的焦点 (关于该圆锥曲线) 的极线为与之对应的准线.

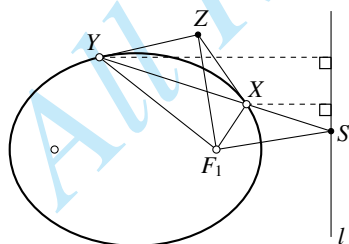


Figure 6.1

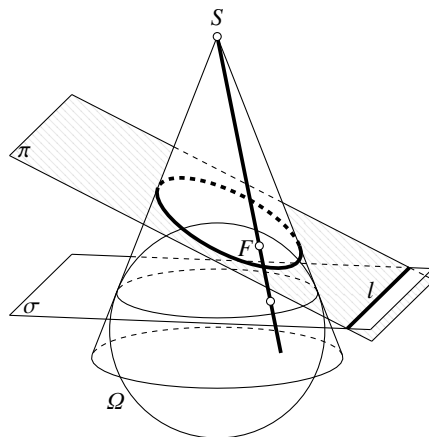


Figure 6.2

*proof.* 只要利用(1.5.6)就能证明抛物线的情形, 下证椭圆时的情形, 对双曲线是类似的. 如图6.1所示, 设  $F_1$  为椭圆的一个焦点, 我们证明其极线  $l$  为准线.

令  $S$  为椭圆的任一割线  $XY$  与  $l$  的交点,  $X, Y$  处的切线交于点  $Z$ . 由配极原则知  $ZF_1 = p(S)$ , 故由(1.3.3)知  $ZF_1 \perp SF_1$ ; 又(1.3.7)知  $ZF_1$  平分  $\angle XF_1Y$ . 因此,  $F_1S$  为  $\angle YF_1X$  的外角平分线, 由外角平分线定理,  $\frac{F_1X}{F_1Y} = \frac{SX}{SY} = \frac{\text{dist}(X, l)}{\text{dist}(Y, l)}$ , 故直线  $l$  必为准线.  $\square$

*another proof.* 在三维空间也可以有类似的配极原则(可参考 [prb7.40]): 在三维空间中, 点的平面互为配极, 直线的配极是直线. 从而, 我们可以利用 Dandelin 双球证明这一结论.

如图6.2所示, 点  $S$  关于球  $\Omega$  的“极面”为  $\sigma$ , 点  $F$  关于  $\Omega$  的“极面”为  $\pi$ , 从而直线  $SF$  的“极线”为  $\sigma, \pi$  的交线, 即准线  $l$  (请回忆 §1.4 中的相关知识). 显然  $l$  关于圆  $(\sigma \cap \Omega)$  的极点为  $(SF \cap \sigma)$ , 则用中心投影将这些元素投影至平面  $\pi$  即知原命题成立.  $\square$

### 练习

**Problem 6.1.** 证明(6.1.12).

**Problem 6.2.** 给定圆锥曲线  $\alpha$  与一点  $A$ , 证明  $p(A)$  可按如下方法作出: 过  $A$  作两直线, 分别交  $\alpha$  于点  $X_1, X_2$  和  $Y_1, Y_2$ ,  $\alpha$  在  $X_1, Y_1$  处的切线交于点  $X$ ,  $\alpha$  在  $Y_1, Y_2$  处的切线交于点  $Y$ , 则  $XY = p(A)$ .

**Problem 6.3** (Brocard 逆定理). 若  $\triangle ABC$  关于圆锥曲线  $\alpha$  自极, 则它必是  $\alpha$  的某一内接完全四点形的对顶三点形.

**Problem 6.4.** 设点  $P, Q$  是椭圆  $\alpha$  上两点, 点  $Q$  关于  $\alpha$  的长轴的对称点为  $Q'$ , 直线  $PQ, PQ'$  与  $\alpha$  的长轴分别交于点  $M, N$ , 证明:  $\alpha$  的长轴长等于  $\alpha$  的中心对  $\odot(MN)$  的切线长.

**Problem 6.5.** 设  $F, l$  是椭圆  $\alpha$  的一对对应的焦点与准线,  $\alpha$  的弦  $PQ$  过点  $F$ , 在  $l$  上取点  $F', P', Q'$ , 满足  $PP' \parallel QQ' \parallel FF'$ , 证明:  $S_{\triangle PQF'}^2 = 4S_{\triangle PP'F'}S_{\triangle QQ'F'}$ .

**Problem 6.6.** 证明: 设  $l_1, l_2$  为有心圆锥曲线  $\alpha$  的一组共轭直径<sup>(2)</sup>, 则  $\alpha$  在  $l_1$  与  $\alpha$  的交点处的切线平行于  $l_2$ .

**Problem 6.7** (Hesse). 设点  $A, A'$  以及  $B, B'$  是两组关于圆锥曲线  $\alpha$  的共轭直线,  $C = AB \cap A'B', C' = AB' \cap A'B$ , 证明: 点  $C, C'$  关于  $\alpha$  共轭.

**Problem 6.8** (Gaskin). 证明: 一个圆锥曲线的自极三角形的外接圆与圆锥曲线的外准圆正交.

## 6.2 二次点列

本节我们利用二次点列的概念建立圆锥曲线的体系.

### 6.2.1 二次点列的基本概念

下面的定理引出了二次点列的概念.

**Theorem 6.2.1.** 设点  $A_1, A_2, A_3, A_4$  是圆锥曲线  $\alpha$  上四点, 点  $P$  是  $\alpha$  上任意一点, 则  $(PA_1, PA_2; PA_3, PA_4)$  不依赖于点  $P$  的选取.

*proof.* 通过射影变换可以将  $\alpha$  变为圆, 而射影变换保持交比. 对于  $\alpha$  为圆的情形, 由圆周角定理,  $\angle A_i P A_j$  与点  $P$  的选取无关, 则由交比的定义可知  $(PA_1, PA_2; PA_3, PA_4)$  不依赖于点  $P$  的选取.  $\square$

**Remark.** 允许  $P$  与点  $A_1, A_2, A_3, A_4$  重合, 此时考虑极限意义下的连线, 将它视为切线即可. 例如, 若点  $P$  与  $A_1$  重合, 则  $PA_1$  视为  $t_\alpha(A_1)$ .

由此可以定义二次点列:

(2) 即互为共轭的直径.

**Definition 6.2.2.** 定义:

- a.) 二次点列是一条圆锥曲线  $\alpha$  上的点  $A, B, C, \dots$  的集合, 可记为  $\alpha(A, B, C, \dots)^{(3)}$
- b.) 对于一条圆锥曲线  $\alpha$  上给定的四点  $A, B, C, D$ , 利用(6.2.1)可以定义它们的交比  $\alpha(A, B; C, D) \triangleq (AP, BP; CP, DP)$ , 其中  $P$  为  $\alpha$  上的任意一点. 在不引起歧义时, 可简记  $\alpha(A, B; C, D)$  为  $\alpha(AB, CD)$ , 乃至  $(A, B; C, D)$  或  $(AB, CD)$ .
- c.) 若圆锥曲线  $\alpha$  上的二次点列  $\alpha(A, B, C, D)$  满足  $\alpha(AB, CD) = -1$ , 则称二次点列  $\alpha(A, B, C, D)$  为一个调和二次点列, 又称 [四点形]  $ACBD$  为一个调和四边形.<sup>(4)</sup>

我们先给出二次点列的几个简单的性质:

**Proposition 6.2.3.** 若四边形  $ABCD$  是圆内接调和四边形, 则  $AB \cdot CD = BC \cdot AD$ .

*proof.* 在  $ABCD$  的外接圆上任取一点  $P$ , 则  $(PA, PC; PB, PD) = -1$ , 由交比的定义知  $\angle BPA \cdot \angle DPC = -\angle BPC \cdot \angle DPA$ , 由正弦定理知这意味着  $BA \cdot DC = BC \cdot DA$ .  $\square$

**Proposition 6.2.4.** 若直线  $a_1$  在反演下变为  $a_2$  (直线或圆),  $a_1$  上的点  $A, B, C, D$  在反演后分别变为  $A', B', C', D'$ , 则  $a_1(AB, CD) = a_2(A'B', C'D')$ .

*proof.* 若  $a_1, a_2$  均为直线, 则(4.2.13)保证结论成立.

若  $a_1$  是直线,  $a_2$  是圆, 则此结论与(3.6.8)基本一致, 见图3.34, 关于  $\odot O$  的反演下, 点  $A, B, C, D$  分别变为图中的  $A', B', C', D'$ , 从而  $(AB, CD) = (PA', PB'; PC', PD') = (A', B'; C', D')$ .  $\square$

**Proposition 6.2.5** (调和二次点列的性质). 设  $\alpha$  上有调和二次点列  $A, B, P, Q$ , 则  $p^{-1}(PQ) \in AB$ .

*proof.* 设  $R = p^{-1}(PQ)$ , 则  $R = t(P) \cap t(Q)\alpha$ . 由极点极线的调和性质, 若  $AR \cap \alpha = A, B'$ ,  $AR \cap PQ = T$ , 则  $(A, B'; R, T) = -1$ , 故  $(PA, PB'; PR, PT) = -1$ ; 而由题设  $(A, B, P, Q) = -1$ , 因而  $(PA, PB; PP, PQ) = -1$ , 注意  $PT = PQ$ ,  $PP = t(P) = PR$  表示  $\alpha$  在  $P$  处的切线.  $\square$

**Proposition 6.2.6.** 设点  $P$  关于圆锥曲线  $\alpha$  的极线交  $\alpha$  于  $M, N$ , 过  $P$  的任一直线交  $\alpha$  于  $A, B$ , 则  $A, B, M, N$  为  $\alpha$  上的调和二次点列.

*proof.* 由(6.1.3),  $PM$  与  $\alpha$  相切于  $M$ , 而由(6.1.7),  $MA, MB, MM, MN$  ( $MM = t(M)$ ) 与  $AB$  的交点为调和点列, 故  $(MA, MB; MM, MN) = -1$ , 从而  $(A, B; M, N) = -1$ .  $\square$

根据二次点列的交比, 我们可以给出圆锥曲线的一种射影几何下的定义:

**Definition 6.2.7** (圆锥曲线的射影定义 1). 定义:

- a.) 射影对应  $f$  将以点  $A$  为顶点的线束变换为以点  $B$  为顶点的线束, 则以  $A$  为顶点的线束中的直线与它在  $f$  下的像的交点的轨迹是一条圆锥曲线/二次曲线. 如果射影对应  $f$  是透视对应, 则这一圆锥曲线是退化的.
- b.) 对于一条 [非退化的] 圆锥曲线<sup>(5)</sup>, 如果它与无穷远直线相离, 则它是一个椭圆<sup>(6)</sup>; 如果它与无穷远直线相切, 则它是一条抛物线; 如果它与无穷远直线相交, 则它是一条双曲线.

(3) 在不引起歧义的情况下, 二次点列的记号中可以省略表示所在圆锥曲线的  $\alpha$ ; 此外, 与之间介绍“点列”时类似, 我们用“二次点列”一词时, 对点列中点的个数并没有要求.

(4) 请注意点的顺序, 四点形  $ABCD$  为调和四边形, 意味着  $(A, C, B, D)$  为调和二次点列.

(5) 与之前的圆锥曲线的定义方式下一样, 我们所说的“圆锥曲线”常常指非退化圆锥曲线, 以后所称的“圆锥曲线”可能包括退化圆锥曲线也可能不包括, 读者容易根据上下文区分.

(6) 此处所称的“椭圆”就包括圆.



我们说明这一定义与之前给出的定义是等价的.

先看定义 a.). 若  $f$  为透视对应, 则必有自对应直线, 它只能是直线  $AB$ , 而由(3.5.6), [除了自对应直线  $AB$  之外, 其余的] $f$  下的对应直线的交点形成了一条直线  $l$ ; 而由于  $f(AB)=f(AB)$ , 则  $AB$  上的所有点也满足交点的要求, 因而此圆锥曲线便退化为了直线  $l, AB$  之并.

反之, 由(3.5.6), 若  $f$  不是透视对应, 则交点的轨迹必不会形成直线. 若已知异于  $A, B$  的三点  $C, D, E$  在圆锥曲线上, 则对于其余一点  $F$ , 若它也在圆锥曲线上, 则保持交比要求  $(AD, AC; AE, AF) = (BD, BC; BE, BF)$ , 设 [按之前定义得到的] 过点  $A, B, C, D, E$  的圆锥曲线为  $\alpha^{(7)}$ , 若  $F \notin \alpha$ , 记  $AF \cap \alpha = A, F'$ , 则  $(AD, AC; AE, AF) = (AD, AC; AE, AF') = (BD, BC; BE, BF')$ , 但由于  $F \notin \alpha$  上, 从而  $BF \neq BF'$ , 因此显然  $(BD, BC; BE, BF') \neq (BD, BC; BE, BF)$ , 矛盾! 故  $F$  必在  $\alpha$  上.

对于定义 b.), 在给出定义 a.) 后, 另外, 在承认关于圆锥曲线的整体的定义之后, 上述关于圆锥曲线的分类与之前定义的等价性由(3.6.21)保证.  $\square$

**Remark.** 用上面这种射影对应的方法似乎无法得到两重合直线的这种退化圆锥曲线, 但在极限意义下, 它可由两不重合直线不断趋于重合来得到.

对于圆锥曲线的射影定义, 我们可以得到如下结果:

**Proposition 6.2.8.** 在圆锥曲线的射影定义中, 点  $A, B$  上的线束间的射影对应给出的圆锥曲线必过点  $A, B$ .

*proof.* 这在上面的论述中已经证明了.  $\square$

**Theorem 6.2.9.** 射影平面上的五点 (任意三点不共线) 确定一条二次曲线. 即, 过五点 (任意三点不共线) 有且仅有一条 [非退化的] 二次曲线, 过五点 (任意四点不共线) 有且仅有一条 [允许退化的] 二次曲线.

*proof.* 设有任意四点不共线的五点  $A, B, C, D, E$ , 考虑以  $A, B$  为顶点的线束, 射影对应  $f$  将以  $A$  为顶点的线束变为以  $B$  为顶点的线束, 且  $f(AC)=BC, f(AD)=BD, f(AE)=BE$  (三组对应元素确定一个一维基本形间的射影对应, 因而  $f$  一定存在). 这样, 由圆锥曲线的射影定义 (以及(6.2.8)),  $f$  确定了一条过  $A, B, C, D, E$  的圆锥曲线  $\alpha$ .

对一点  $F$ , 若  $F$  在某一过点  $A, B, C, D, E$  的圆锥曲线  $\alpha'$  上, 由(6.2.1)可得  $(AC, AD; AE, AF) = (BC, BD; BE, BF)$ , 故线束  $A(C, D, E, F) \bar{\wedge} B(C, D, E, F)$ , 而对应直线  $(AC, BC), (AD, BD), (AE, BE)$  唯一确定了这一射影对应, 则这一射影对应必为前述的  $f$ , 则  $F \in \alpha$ , 故必有  $\alpha' = \alpha$ .

特别地, 若进一步要求这五点中任意三点不共线, 则由(3.5.6),  $f$  必不是透视对应, 从而无自对应直线, 因而  $\alpha$  非退化.  $\square$

根据上述定理, 以下我们用  $\mathfrak{C}(ABCDE)$  来表示过点  $A, B, C, D, E$  的圆锥曲线.

下面的定理便是一个圆锥曲线的射影定义的应用的例子:

**Theorem 6.2.10.** 给定  $\triangle ABC$  和定点  $Z$ , 对于过点  $Z$  的动直线  $l, A' = l \cap BC, B' = l \cap AC, AA' \cap BB' = Q$ , 则点  $Q$  的轨迹是一条过点  $A, B, C$  且与同时与  $AZ, BZ$  相切的圆锥曲线.

(7) 容易知道, 过这五点必定存在  $\alpha$ , 因为显然  $A, B, C, D, E$  任意三者不共线, 则可通过射影变换将  $ABCD$  变为正方形, 使其在平面直角坐标系中的位置分别为点  $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$ , 此时设  $E$  点变为点  $(a, b)$ , 由于  $a, b \neq \pm 1$ , 则显然曲线  $(b^2 - 1)x^2 - (a^2 - 1)y^2 = b^2 - a^2$  满足要求. 若读者想要纯粹几何的论述, 可在 §6.4.2 中找到.



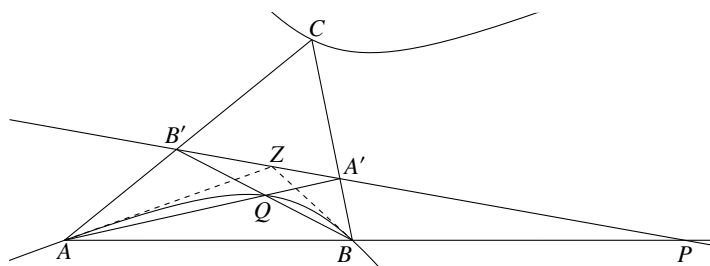


Figure 6.3

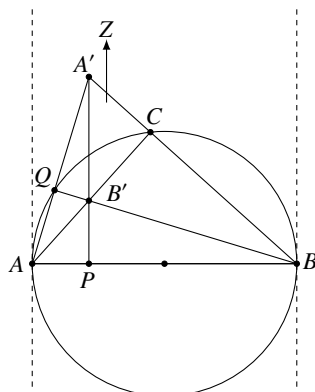


Figure 6.4

*proof.* 当  $A'$  在直线  $BC$  上运动时, 显然对应关系串  $AA' \mapsto A' \mapsto A'Z \mapsto B'B$  中的每一者均是一维基本形间的射影对应, 则  $f: AA' \mapsto BB'$  是点  $A$  上的线束到点  $B$  上的线束间的射影对应, 因而由圆锥曲线的射影定义可知  $AA', BB'$  的交点的轨迹是过  $A, B$  的圆锥曲线  $\alpha$ .

令  $l$  为直线  $CZ$ , 此时  $Q=C$ , 故  $C \in \alpha$ ; 令  $A'$  趋于  $AZ, BC$  的交点, 此时  $Q$  不断趋向于与点  $A$  重合, 则  $QA$  趋于  $\alpha$  的切线, 因此  $ZA$  为  $\alpha$  的切线, 同理  $ZB$  也是  $\alpha$  的切线. 即证.  $\square$

当然, 我们还可以给出一个不利用圆锥曲线射影定义的证法:

*another proof.* 如图6.4, 用射影变换将  $\triangle ABC$  变为以  $C$  为直角顶点的等腰直角三角形, 并将点  $Z$  变为垂直于  $AB$  方向的无穷远点. (由于射影变换可以由四个对应点唯一确定, 这是可以办到的.)

这样,  $A'B' \perp AB$ , 从而  $B'$  为  $\triangle A'AB$  的垂心, 因而  $AA' \perp BB'$ , 因此  $Q$  在  $\triangle ABC$  的外接圆上, 而该外接圆显然相切于  $AZ, BZ$ .  $\square$

最后一提, 利用射影几何的方式, 还有另一种方式可以生成圆锥曲线, 它实际上是(6.2.1)的逆命题, 证明留给读者:

**Theorem 6.2.11.** 给定任意三点不共线的四点  $A, B, C, D$ , 平面内满足  $(PA, PB; PC, PD)$  为某一给定的定值的点  $P$  的轨迹是一条过点  $A, B, C, D$  的圆锥曲线.

**Remark.** 从定义上看,  $P$  的轨迹应挖去  $A, B, C, D$  四点, 但在极限意义下,  $P$  的轨迹可以通过  $A, B, C, D$  四点.

练习

**Problem 6.9.** 利用二次点列证明 Pascal 定理.

**Problem 6.10.** 证明: 给定任意三线不共点的五线, 存在唯一一条与它们同时相切的圆锥曲线.

**Problem 6.11.** 动直线  $AB, BC, CA$  分别过定点  $P, Q, R$ , 且点  $A, B$  分别在定直线  $l_1, l_2$  上运动. 证明: 点  $C$  的轨迹为一条圆锥曲线. 该圆锥曲线在什么时候退化?

**Problem 6.12.** 给定  $\triangle ABC$ , 其内心为  $I$ , 切点三角形为  $\triangle DEF$ , 在直线  $DI, EI, FI$  上分别取点  $D', E', F'$ , 满足  $\frac{ID}{ID'} = \frac{IE}{IE'} = \frac{IF}{IF'}$ , 证明: 直线  $AD', AE', AF'$  交于一点  $Y$ , 且  $Y$  在一条过  $A, B, C, I, Ge, Na$  的圆锥曲线上运动.

### 6.2.2 二次点列的射影变换与对合

直线上的点列可以有透视对应、射影对应以及对合, 那么我们可以类似地研究圆锥曲线上的二次点列的相应性质.

**Definition 6.2.12.** 定义:

a.) 给定圆锥曲线  $\alpha$ , 对于二次点列  $\alpha(A, B, C, \dots)$  与  $\alpha$  上的任意一点  $O$ , 连接  $O$  与点列中的点得到线束  $O(A, B, C, \dots)$ , 这得到了二次点列与线束的一个透视对应, 记为  $\alpha(A, B, C, \dots) \bar{\wedge} O(A, B, C, \dots)$ .

b.) 给定圆锥曲线  $\alpha$ , 若对于  $\alpha$  上的二次点列  $\alpha_1(A, B, C, \dots)$  与  $\alpha(A', B', C', \dots)$  及  $\alpha$  上一点  $O$ ,  $O(A, B, C, \dots) \bar{\wedge} O(A', B', C', \dots)$ , 则称这两个点列成射影对应, 记为  $\alpha(A, B, C, \dots) \stackrel{(O)}{\bar{\wedge}} \alpha(A', B', C', \dots)$ , 其中的  $O$  称为此射影对应的中心; 这一射影对应将  $\alpha$  上的一个点对应  $\alpha$  上的另一个点, 故称这一变换方式为  $\alpha$  上的射影对应/射影变换,  $\alpha$  称为这一射影对应的底.

**Remark.** 在“b.)”中, 对  $\forall P \in \alpha$ , 若  $O(A, B, C, \dots) \bar{\wedge} O(A', B', C', \dots)$ , 则由(6.2.1)知  $(PA, PB; PC, PD) = (OA, OB; OC, OD) = (OA', OB'; OC', OD') = (PA', PB'; PC', PD')$ , 因此  $\alpha(A, B, C, D) \stackrel{(P)}{\bar{\wedge}} \alpha(A', B', C', D')$  也成立. 故我们可以直接记  $\alpha(A, B, C, D) \bar{\wedge} \alpha(A', B', C', D')$ , 而省略记号中的“(O)”.

与一维射影变换类似地, 我们可以证明如下结论 (证明留给读者):

**Theorem 6.2.13.** 对于圆锥曲线  $\alpha$ ,  $\alpha$  上的两个二次点列间的射影变换由三组对应点完全确定.

下面我们考虑二次点列间的射影变换的特有性质.

**Proposition 6.2.14.** 若  $\alpha(A, B, C, D) \bar{\wedge} \alpha(A', B', C', D')$ , 则  $A'(A, B, C, D) \bar{\wedge} A(A', B', C', D')$ .

*proof.*  $A'(A, B, C, D) \bar{\wedge} \alpha(A, B, C, D) \bar{\wedge} \alpha(A', B', C', D') \bar{\wedge} A(A', B', C', D')$ , 注意这两个线束的射影对应中, 两顶点的连线  $AA'$  自对应, 从而, 这是个透视对应, 由(3.5.6)可知这一射影对应的其余直线的交点在同一直线上.  $\square$

进一步地, 我们有如下结果:

**Theorem 6.2.15.** 设  $f$  是一个圆锥曲线  $\alpha$  上的二次点列间的射影变换, 则  $\forall A, B \in \alpha$ , 直线  $Af(B), Bf(A)$  的交点在一定直线上, 称为射影变换  $f$  的射影轴.

*proof.* 设  $\alpha(A_1, A_2, A_3, \dots) \bar{\wedge} \alpha(A'_1, A'_2, A'_3, \dots)$ , 由(6.2.14), 对给定的  $i$ ,  $A'_i(A_1, A_2, \dots) \bar{\wedge} A_i(A'_1, A'_2, \dots)$ , 记此线束间的透视对应为  $f_i$ , 由(3.5.6)知, 对于选定的  $i$ ,  $A'_i A_j \cap A_i A'_j (\forall j)$  均在  $f_i$  的透视轴上.

因此, 我们只要证明对不同的  $i$ , 透视对应  $f_i$  有相投的透视轴. 下证  $f_1, f_2$  有相同的透视轴, 对其余  $f_i$  是类似的.

设  $X = A'_1 A_2 \cap A_1 A'_2, Y = A'_2 A_3 \cap A_2 A'_3, Z = A'_3 A_1 \cap A_3 A'_1$ , 则易知  $f_1$  的透视轴为  $XZ$ ,  $f_2$  的透视轴为  $XY$ , 而由 Pascal 定理可知  $X, Y, Z$  共线, 即证.  $\square$

**Corollary 6.2.16.** 圆锥曲线  $\alpha$  上的射影变换  $f$  的射影轴与  $\alpha$  的交点是  $f$  下的自对应点.

类似于一维射影变换, 我们也可以将圆锥曲线上的对合按自对应点的个数分类: 无 [实] 自对应点时是椭圆型的, 有且仅有一个自对应点时是抛物型的, 有两个自对应点时是双曲型的, 它们分别对应于射影轴与圆锥曲线相离、相切、相交的情形.

下面, 我们考虑二次曲线上的对合:

**Definition 6.2.17.** 对于圆锥曲线  $\alpha$  的射影变换  $f$ , 如果  $f \neq \text{id}$  且  $f \circ f = \text{id}$ , 则称  $f$  为  $\alpha$  上的二次点列的对合 [变换], 简称为  $\alpha$  上的对合, 此时  $f$  的射影轴称为这一对合的对合轴.

与一维基本形间的射影对应类似地, 可以证明如下两个结论 (证明留给读者):

**Theorem 6.2.18.** 对于圆锥曲线  $\alpha$ ,  $\alpha$  上一个对合由两组组对应点完全确定.

**Theorem 6.2.19.** 设圆锥曲线  $\alpha$  上的对合  $f$  有自对应点  $X, Y$ ,  $f$  下有对应点  $P, P'$ , 则点  $P, P', X, Y$  成调和二次点列.

另外, 圆锥曲线上的对合具有如下性质:

**Proposition 6.2.20.** 圆锥曲线  $\alpha$  上的对合的一对对应点处的切线的交点在这一对合的对合轴上.

*proof.* 若  $\alpha(A, B, C, D) \bar{\wedge} \alpha(A', B', C', D')$  是对合, 则  $\alpha(A, B, C, A') \bar{\wedge} \alpha(A', B', C', A)$ , 利用(6.2.14)知  $A'(A, B, C, A') \bar{\wedge} A(A', B', C', A')$ , 从而直线  $AA, A'A'$  交于射影轴上, 而这样的直线  $AA, A'A'$  应理解为切线.  $\square$

**Proposition 6.2.21.** 圆锥曲线  $\alpha$  上的对合的自对应元素是对合轴与  $\alpha$  的交点.

*proof.* 由(6.2.16)即知.  $\square$

同样的, 按对合的自对应点的数目, 可以对圆锥曲线上的对合进行分类: 无 [实] 自对应点时是椭圆型的, 有两个自对应点时是双曲型的, 它们分别对应于射影轴与圆锥曲线相离、相交的情形.

注意圆锥曲线上的对合没有只有一个自对应点的抛物型对合, 若不然, 设  $\alpha$  上的对合  $f$  恰有一个自对应点  $T$ , 则  $t(T)$  是  $f$  的对合轴. 对于  $t(T)$  上任意一点  $P$ , 过  $P$  作  $\alpha$  的切线, 两切点分别为  $T, P'$ , 则  $T, P'$  是  $f$  下的一组对应点, 而由  $P$  的任意性知  $f$  下  $T$  与  $\alpha$  上任意一点对应, 则  $f$  不是一一对应, 矛盾!

**Proposition 6.2.22.** 给定二次曲线  $\alpha$ , 一条对合轴确定了一个对合变换.

*proof.* 设对合轴交  $\alpha$  于  $C, D$  (考虑复射影平面), 由(6.2.14),  $C, D$  显然是这个对合的自对应点, 而两组对应点确定一个对合.  $\square$

**Definition 6.2.23.**  $\alpha$  上的两个二次点列的对合的对合轴的极点称为这一对合的对合中心.

**Proposition 6.2.24.** 圆锥曲线  $\alpha$  上的对合  $f$  的对应点的连线过一定点, 它是  $f$  的对合轴关于  $\alpha$  的极点, 称为这一对合的对合中心.

*proof.* 设这组对合中有对应点  $A, A'$ , 则  $t(A) \cap t(A')$  在对合轴, 即  $p^{-1}(AA')$  的极点在射影轴上, 从而由配极原则知  $AA'$  过对合轴的极点.  $\square$

注意, 由于对合轴不能与二次曲线相切, 则对合中心不能在二次曲线上, 否则显然这无法形成一个射影对应.

## 练习

**Problem 6.13.** 证明(6.2.13)(6.2.18)(6.2.19).

**Problem 6.14.** 给定圆锥曲线  $\alpha$ , 点  $A, B$  是  $\alpha$  上两定点,  $l$  是一定直线. 点  $P$  是  $\alpha$  上一动点,  $PA \cap l = R$ ,  $BR$  与  $\alpha$  的另一交点为  $Q$ , 证明: 变换  $f: P \mapsto Q$  是  $\alpha$  上的射影变换.

**Problem 6.15.** 若已知圆锥曲线  $\alpha$  上成射影对应的两个二次点列  $(A, B, C, D), (A', B', C', D')$  间的三组对应点  $(A, A'), (B, B'), (C, C')$  的位置, 则  $D \in \alpha$ , 证明: 可由如下方法作出对应的  $D'$ : 设  $AB' \cap A'B = B_0$ ,  $AC' \cap A'C = C_0$ ,  $A'D \cap B_0C_0 = D_0$ , 则  $D$  是  $AD_0$  与  $\alpha$  的另一交点.

**Problem 6.16.** 对于平面直角坐标系中的二次曲线  $\alpha$  及其上的一定点  $P$ , 动直线  $l$  交  $\alpha$  于点  $A, B$ , 记直线  $PA, PB$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ , 若  $l$  满足  $a(k_1+k_2)+b(k_1k_2)+c=0$  ( $a, b, c$  为常数系数), 则直线  $AB$  过定点 (或斜率为定值, 斜率为定值可视为过一个固定的无穷远点).

**Problem 6.17.** 给定圆锥曲线  $\alpha$  与不在其上的两点  $A, B$ , 点  $P$  是  $\alpha$  上一动点,  $PA$  与  $\alpha$  的另一交点为  $P'$ ,  $P'B$  与  $\alpha$  的另一交点为  $P''$ , 则变换  $f_1: P \mapsto P', f_2: P' \mapsto P'', f_3: P \mapsto P''$  中, 哪些是  $\alpha$  上的对合变换?

**Problem 6.18.** 给定圆锥曲线  $\alpha_1, \alpha_2$ , 点  $A$  是两者的某一个交点, 点  $O$  为  $\alpha_2$  外的定点,  $\alpha_2$  的动弦  $PQ$  始终过点  $O$ , 直线  $AP, AQ$  与  $\alpha_1$  的另一交点分别为  $P', Q'$ , 证明: 直线  $P'Q'$  过定点.

### 6.3 圆锥曲线的重要定理

本节我们介绍射影几何中与圆锥曲线相关的几个重要定理.

其中, 最基本的定理莫过于 Pascal 定理与 Brianchon 定理, 让我们来复习一遍:

**Theorem 6.3.1 (Pascal).** 对于圆锥曲线上任意六点  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ , 点  $(X_1X_2 \cap X_4X_5), (X_2X_3 \cap X_5X_6), (X_3X_4 \cap X_6X_1)$  共线.

**Theorem 6.3.2 (Brianchon).** 对于与同一圆锥曲线相切的六直线  $l_i (i=1, \dots, 6)$ , 记点  $A_{ij} = l_i \cap l_j$ , 则直线  $A_{12}A_{45}, A_{23}A_{56}, A_{34}A_{61}$  交于一点.

我们再次提醒读者它们可以用于两点趋于重合/两切线趋于重合的退化情况.

本节中, 我们来证明它们的逆定理:

**Theorem 6.3.3 (Pascal 逆定理).** 对于六点  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ , 记  $A = X_1X_2 \cap X_4X_5, B = X_2X_3 \cap X_5X_6, C = X_3X_4 \cap X_6X_1$ , 若点  $A, B, C$  共线, 则点  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$  在同一圆锥曲线相切.

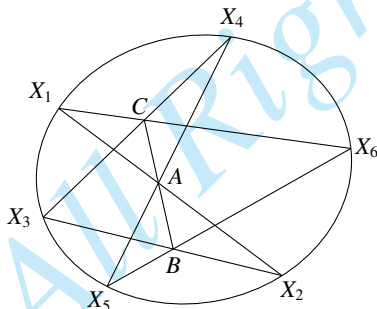


Figure 6.5

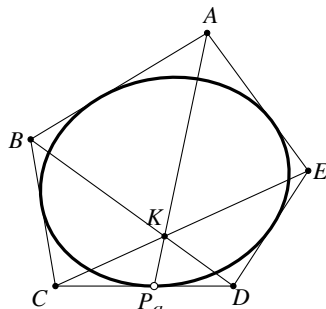


Figure 6.6

*proof.* 由(6.2.9)知, 圆锥曲线  $\alpha = \mathcal{C}(X_1X_2X_3X_4X_5)$  是唯一确定的. 记  $A = X_1X_2 \cap X_4X_5, B = X_2X_3 \cap X_5X_6, C = X_3X_4 \cap X_6X_1$ , 并令  $\alpha$  与  $BX_5$  的另一个交点为  $Y$ , 则由 Pascal 定理,  $(X_3X_4 \cap X_1Y) \in AB$ , 从而  $X_3X_4 \cap X_1Y = C$ , 因此点  $Y$  与点  $X_6$  重合.  $\square$

**Theorem 6.3.4 (Brianchon 逆定理).** 对于直线  $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$ , 记  $l_i \cap l_j = A_{ij}$ , 若  $A_{12}A_{45}, A_{23}A_{56}, A_{34}A_{61}$  交于一点, 则上述六条直线与同一条圆锥曲线相切.

*proof.* 它的证明与 Pascal 逆定理相似, 不过其中“五点确定一条圆锥曲线”的结论需要改成“五线确定一条二次曲线”, 即有如下定理. 剩余部分的证明留给读者.  $\square$

**Theorem 6.3.5.** 给定任意三点不共线的五条直线, 则存在唯一的 [非退化] 二次曲线与它们同时相切.

*proof.* 利用两切线趋于重合时的 Brianchon 定理, 我们可以构造出各条边上的切点: 如图6.6, 设五切线围成五边形  $ABCDE$ , 设  $BD \cap CE = K, AK \cap BD = P_a$ , 则对六线  $AB, BC, CP_a, P_aD, DE, EA$  应用 Brianchon 定理知, 若存在满足条件的圆锥曲线  $\alpha$ , 则  $\alpha$  与  $CD$  的切点必为点  $P_a$ .

类似地可构造出其余四边  $DE, EA, AB, BC$  上的切点  $P_b, P_c, P_d, P_e$ , 则若存在  $\alpha$ , 则  $\alpha$  必过这五个点, 故有  $\alpha = \mathfrak{C}(P_a P_b P_c P_d P_e)$ , 它是唯一满足条件的圆锥曲线.  $\square$

类似于之前的做法, 根据上述定理, 下用  $\mathfrak{C}(l_1 l_2 l_3 l_4 l_5)$  表示同时与五直线  $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5$  相切的圆锥曲线.

值得一提的是, 利用 Pascal 定理, 给定一圆锥曲线上五点, 可以仅用直尺作出该圆锥曲线上的任意多个点; 利用 Brianchon 定理, 给定与一条圆锥曲线相切的五条直线, 可以仅用直尺作出与该圆锥曲线相切的任意多条直线. 具体做法根据 Pascal/Brianchon 定理容易得出, 我们将其留给读者完成.

下面我们给出一个 Brianchon 定理的应用的例子.

**Example 6.3.6.** 利用 Brianchon 定理证明(4.1.12): 抛物线外切三角形的垂心在抛物线的准线上.

*solution.* 如图6.7所示, 设抛物线  $\alpha$  外切三角形  $ABC$  的垂心为  $H$ , 过  $H$  作  $\alpha$  的一条切线  $l_1$ , 并过点  $H$  作直线  $l_2 \perp l_1$ . 只要证明  $l_2$  同样与  $\alpha$  相切, 则由(1.5.6)可知点  $H$  在  $\alpha$  的准线上.

为此, 分别取出  $AC, l_2$  上的无穷远点  $Y, X$ , 并记  $P = AB \cap l_1$ . 注意六线形  $\{BP, PH, HX, XY, YC, CB\}$ , 主对角线  $BX, PY, HC$  交于一点 (因为它们均是  $\triangle HBP$  的高线), 则由 Brianchon 的逆定理可知存在一条圆锥曲线同时与  $AB, BC, CA, l_1, l_2, XY$  相切, 而直线  $AB, BC, CA, l_1, XY$  已经确定了该圆锥曲线为抛物线  $\alpha$ , 因而  $l_2$  与  $\alpha$  相切.  $\square$

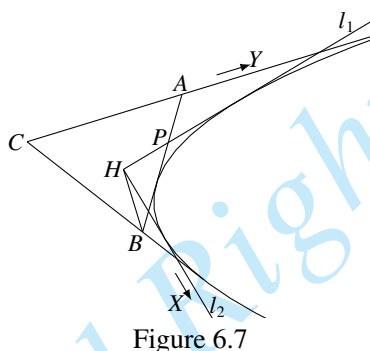


Figure 6.7

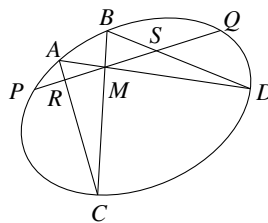


Figure 6.8

另一个射影几何中有关圆锥曲线的著名定理便是所谓的 Candy 定理.

**Theorem 6.3.7 (Candy).** (如图6.8)  $P, Q$  为圆锥曲线  $\alpha$  上两点, 点  $M$  在直线  $PQ$  上, 过  $M$  作圆锥曲线的弦  $AD, BC$ , 记  $AC \cap PQ = R, BD \cap PQ = S$ , 则  $\frac{1}{MP} + \frac{1}{MQ} = \frac{1}{MR} + \frac{1}{MS}$ .

*proof.* 由于  $(P, R, M, Q) \bar{\cap} C(P, R, M, Q) \bar{\cap} \alpha(P, A, B, Q) \bar{\cap} D(P, A, B, Q) \bar{\cap} (P, M, S, Q)$ , 故  $(PR, MQ) = (PM, SQ)$ , 利用交比的定义展开即证.  $\square$

在上述定理中, 若取  $M$  为弦的中点, 则可以得到如下定理. 由于它的结构形似蝴蝶, 它被称为蝴蝶定理:

**Theorem 6.3.8 (蝴蝶定理 (butterfly theorem)).** 圆锥曲线  $\alpha$  的弦  $PQ$  的中点为  $M$ , 过  $M$  作圆锥曲线的弦  $AD, BC$ ,  $AC \cap PQ = R, BD \cap PQ = S$ , 则  $MR = MS$ .

对于圆锥曲线, 我们还有如下几个重要的结论:



**Theorem 6.3.9.** 如图6.9, 对于  $\triangle A'B'C'$ , 点  $D_1, D_2$  的反 Ceva 三角形分别为  $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$ , 则点  $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$  在同一条圆锥曲线上, 称为点  $D_1, D_2$  关于  $\triangle A'B'C'$  的双反 Ceva 锥线.

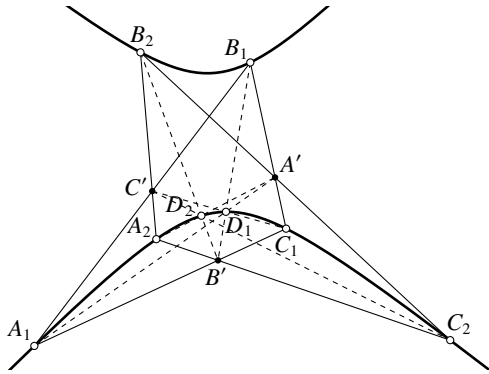


Figure 6.9

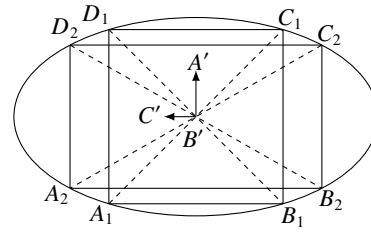


Figure 6.10

*proof.* 考虑  $\alpha = \mathfrak{C}(A_1B_1C_1D_1D_2)$ , 对完全四点形  $A_1B_1C_1D_1$  应用 Brocard 定理可知  $\triangle A'B'C'$  关于  $\alpha$  自极, 故  $B'C' = p_\alpha(A')$ , 则若设  $A'D_2$  与  $\alpha$  的另一交点为  $A'_2$ , 则  $B'(D_2, A'_2, C', A')$  为调和线束; 另一方面, 对于四点形  $A_2B_2C_2D_2$ , 由完全四点形的性质可知  $B'(D_2, A_2, C', A')$  成调和线束. 结合上述两者可知  $B'A'_2 = B'A_2$ , 故必有  $A'_2 = A_2$ , 则  $A_2 \in \alpha$ , 同理可证  $B_2, C_2 \in \alpha$ .  $\square$

*another proof.* 如图6.10, 通过射影变换, 可将四边形  $A_1B_1C_1D_1$  变为一个正方形, 此时点  $A', C'$  变为相互垂直的方向上的无穷远点,  $A_2B_2C_2D_2$  就变成了一个四边与  $A_1B_1C_1D_1$  平行的矩形, 且  $B'$  变为  $A_1B_1C_1D_1$  与  $A_2B_2C_2D_2$  的共同中心, 由对称性, 此时点  $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$  共圆锥曲线.  $\square$

最后一个定理本身并不涉及圆锥曲线, 但却可以用极点极线方便地解决:

**Theorem 6.3.10.** 给定  $\triangle ABC$  与定点  $P, Q$ , 点  $P, Q$  的 Ceva 三角形分别为  $\triangle A_1B_1C_1$  和  $\triangle A_2B_2C_2$ , 设  $C_3 = CC_1 \cap A_2B_2, C_4 = CC_2 \cap A_1B_1$ , 类似定义点  $A_3, A_4; B_3, B_4$ , 则  $A_1A_4, A_2A_3, B_1B_4, B_2B_3, C_1C_4, C_2C_3$  交于一点, 称为  $P, Q$  关于  $\triangle ABC$  的交错点 (cross point).

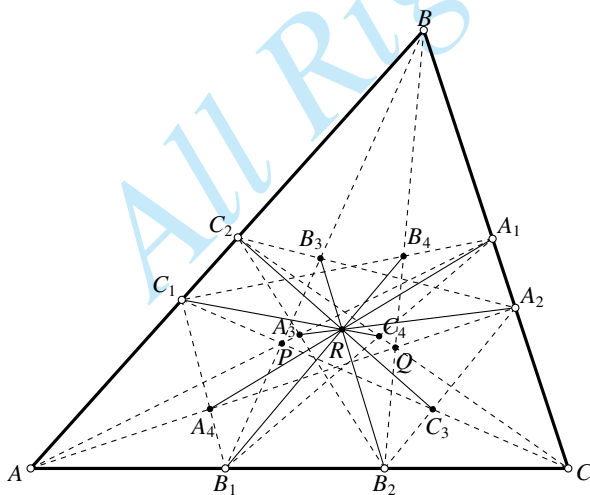


Figure 6.11

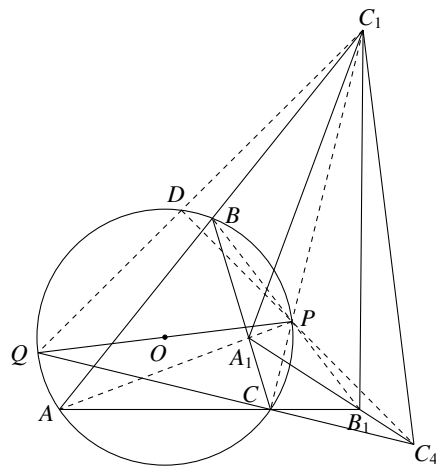


Figure 6.12

*proof.* 考虑  $\alpha = \mathfrak{C}(ABCPQ)$ , 利用射影变换, 可  $\alpha$  变为一个以  $PQ$  为直径的圆.

此时, 如图6.12, 对完全四点形  $ABCP$  应用 Brocard 定理知  $p_{\odot(ABC)}(C_1) = A_1B_1$ . 设  $QC_1$  与圆的另一个交点为  $D$ . 考察  $\triangle QPC_1$ , 由于  $PQ$  为直径, 故  $PD, QC$  是它的两条高线, 记其交点为  $C'_4$ , 则  $C'_4$  为  $\triangle QPC_1$  的垂心.

但对完全四点形  $QCPD$  应用 Brocard 定理知  $C'_4 \in p(C_1)$ , 故  $C'_4 \in A_1B_1$ , 结合  $C'_4 \in CQ$  可知必有  $C'_4 = C_4$ , 即  $C_4$  为  $\triangle APC$  的垂心, 因而  $C_1C_4 \perp PQ$ , 即  $p(PQ) \in C_1C_4$ .

对其它几条直线作类似的讨论, 可知它们均垂直于  $PQ$ , 因此这六条直线交于垂直于  $PQ$  方向上的无穷远点.  $\square$

利用上述讨论, 我们还能得到交错点的一个性质:

**Theorem 6.3.11.** 点  $P, Q$  对  $\triangle ABC$  的交错点为  $p_{\mathfrak{C}(ABCPQ)}^{-1}(PQ)$ .

*proof.* 在(6.3.10)的证明中, 在射影变换后, 六直线所共之点为垂直于  $PQ$  方向上的无穷远点, 易知这就是  $\odot(ABC)$  在  $P, Q$  处的切线的交点, 则射影变换后交错点  $R = p_{\odot(ABC)}^{-1}(PQ)$ . 那么射影变换前的交错点  $R = p_{\mathfrak{C}(ABCPQ)}^{-1}(PQ)$ .  $\square$

### 练习

#### Problem 6.19.

- (1) 证明 Brianchon 逆定理.
- (2) 已知某圆锥曲线的五条切线, 如何仅用直尺作出圆锥曲线的其他切线?
- (3) 已知某圆锥曲线上五点, 如何仅用直尺作出圆锥曲线上的其他点, 以及圆锥曲线在这五点处的切线?

**Problem 6.20.** 证明:  $\triangle ABC$  的外接圆锥曲线为等轴双曲线当且仅当该圆锥曲线过  $\triangle ABC$  的垂心.

**Problem 6.21.** (如图 6.13) 证明: 两条圆锥曲线的四条公切线形成四边形的对角线交点与这两条圆锥曲线的四个交点形成的四边形的对角线交点重合.

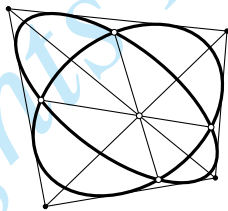


Figure 6.13

**Problem 6.22.** 证明: 对于  $\triangle ABC, \triangle DEF$ , 它们内接于同一圆锥曲线的充要条件为它们外切于同一圆锥曲线.

**Problem 6.23** (六边形定理 (the hexagon theorem)). 圆锥曲线  $\alpha$  交  $\triangle ABC$  的三边  $AB, BC, CA$  分别于点  $C_1, C_2, A_1, A_2$  及  $B_1, B_2$ . 设直线  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$  对  $\alpha$  的极点分别为  $A_3, B_3, C_3$ , 证明:  $\triangle ABC, \triangle A_3B_3C_3$  透视.

**Problem 6.24.** 设圆锥曲线  $\alpha$  的主轴  $l$  上有两定点  $P, Q$ ,  $\alpha$  上的动点  $A, B, C, D$  满足  $AB, CD$  过点  $P$ , 且  $BC$  过点  $Q$ , 设  $R = BC \cap AD$ , 证明:  $\frac{\tan \angle(l, BC)}{\tan \angle(l, CD)}$  为定值.

**Problem 6.25** (四边形蝴蝶定理). 凸四边形  $ABCD$  中,  $CD$  平分  $AB$  于点  $P$ , 在线段  $DB, BC, CA, AD$  上分别取点  $F, E, G, H$ , 使得直线  $EH, GF$  均过点  $P$ . 设  $GH, EF$  分别交  $AB$  于点  $UV$ , 证明: 点  $P$  为线段  $UV$  的中点.

**Problem 6.26.** 设  $\triangle ABC$  的垂心和重心分别为  $H, G$ , 证明:  $Sp \in \mathfrak{C}(ABCGH)$ . *Hint.* 利用练习 [6.20].

**Problem 6.27.** 对于  $\triangle ABC$ , 若点  $R$  为点  $P, Q$  的交错点, 设  $U = BP \cap CQ, V = BQ \cap CP$ , 证明:  $R \in UV$ .

**Problem 6.28.** \* 设  $\triangle ABC$  的重心为  $G$ , 对于平面内一点  $P$ , 证明: 点  $P, G$  的交错点即为  $\sigma t P$ .



## 6.4 射影视角下的圆锥曲线

在本节中, 我们继续用射影几何的方式建立圆锥曲线的体系.

我们特别声明, 本节在复射影平面中考虑, 从而任意直线与圆锥曲线均会有两个 [可能重合的] 交点, 但是, 我们考虑的仍是实系数的圆锥曲线, 即只考虑(1.1)式中的各系数均为实数的二次曲线, 复射影平面的引入只是为了方便考虑一些问题.

### 6.4.1 圆锥曲线的仿射性质

我们所说的“圆锥曲线的仿射性质”即之中心、直径、渐进线相关的性质, 因为它们与无穷远直线相关. 我们曾在之前讨论过圆锥曲线的中心、直径与渐近线, 本节将用射影几何的方法来研究它们.

#### 中心与直径

我们首先用射影几何的方法给出中心与直径的定义:

**Definition 6.4.1** (中心与直径的射影定义). 对于一条圆锥曲线, 称无穷远直线关于它的极点为该圆锥曲线的中心, 一无穷远点关于它的有穷远极线称为它的一条直径.

我们说明这一定义与我们之前的定义方式是自洽的.

在我们之前的定义下, 对有心圆锥曲线  $\alpha$ , 它的中心就是其几何中心, 因而是满足这样的条件的点  $O$ : 对任意过  $O$  的直线  $l$ , 若  $l$  交  $\alpha$  于两点  $A, B$ , 则  $O$  为  $AB$  的中点. 而在射影定义下的中心  $O$ , 由于  $p(O)=l_\infty$ , 过  $O$  的直线  $l$  交  $\alpha$  于两点  $A, B$ , 利用(6.1.7)可知  $(AB, O\infty_l)=-1$ , 则  $O$  为  $AB$  的中点, 符合之前的定义.

当然, 在之前, 我们没有定义抛物线的中心; 在现在的定义下, 由于(3.1.13)告诉我们抛物线与无穷远点切于其轴上的无穷远点, 则抛物线的中心被定义为其轴上的无穷远点.

下面考虑直径. 在之前的定义下, 根据(2.1.15)(2.2.11)(2.3.6): 直径是圆锥曲线的一族平行弦中点的轨迹, 它等价于过圆锥曲线中心的直线<sup>(8)</sup>; 而在射影定义下, 由配极原则, 直径就是过中心的直线, 两者等价.  $\square$

我们总结一下中心与直径的性质, 我们不再给出证明:

**Theorem 6.4.2.** 有心圆锥曲线有唯一的中心, 它是一个有穷远点; 抛物线有唯一的中心, 它是其轴上的无穷远点.

**Theorem 6.4.3.** 圆锥曲线的直径过它的中心, 且直径被圆锥曲线所截得的线段的中点就是圆锥曲线的中心.

**Remark.** 若在实射影平面中考虑, 上述结论的后半句应当是在直径与圆锥曲线有交点的情况下的(切线视为有两重合交点, “所截得的线段”退化至长度为零); 不过, 若在复射影平面中考虑, 任意直线都能与圆锥曲线有两个交点, 此时上述结论也总是成立.

下面我们考虑一种特殊的直径:

**Definition 6.4.4.** 称圆锥曲线的两条直径为一对共轭直径, 如果这两条直径共轭.

(8) 在之前, 对于抛物线的直径, 抛物线的直径是平行于轴的直线, 而我们现在补充定义了抛物线的直径为其轴上的无穷远点.

容易知道, 共轭直径具有以下性质:

**Theorem 6.4.5.** 圆锥曲线的一条直径的共轭直径是其上无穷远点的极线.

*proof.* 显然一直径上的无穷远点的极线是圆锥曲线的一条直径, 且它们互为共轭.  $\square$

**Theorem 6.4.6.** 圆锥曲线的一条直径在其端点<sup>(9)</sup>处的切线平行于该直径的共轭直径.

*proof.* 由配极原则, 显然一条直径在其端点处的切线过该直径的极点, 而由共轭直径的定义知原直径的极点在其共轭直径上, 又这一极点是一个无穷远点, 故有平行关系.  $\square$

**Theorem 6.4.7.** 对于有心圆锥曲线, 平行于某一直径的弦被该直径的共轭直径平分.

*proof.* 设  $l$  为有心圆锥曲线  $\alpha$  的一条直径,  $\alpha$  的弦  $AB$  平行于  $l$ , 对于  $AB$  的中点  $M$ , 由于  $(AB, M \infty_{AB}) = -1$ , 则可知  $\infty_{AB} \in p(M)$ , 即  $\infty_l \in p(M)$ , 故  $M \in p(\infty_l)$ , 即  $M$  点在  $l$  的共轭直径上.  $\square$

### 渐近线

下面给出渐近线的射影定义:

**Definition 6.4.8.** 二次曲线在其与无穷远直线的交点处的切线, 若不是无穷远直线, 则称之为该二次曲线的一条渐近线.

容易看出这与我们之前的定义是自洽的: 在之前, 我们有双曲线的渐近线, 而由(3.1.13)可知双曲线的渐近线过双曲线的无穷远点, 而显然双曲线的渐近线上没有双曲线上的其他点, 因此是相切关系, 从而与此定义自洽.  $\square$

我们可得出渐近线的如下结论:

**Theorem 6.4.9.** 抛物线无渐近线, 双曲线有两条实渐近线, 椭圆(包括圆)有两条虚渐近线.

*proof.* 显然.  $\square$

**Theorem 6.4.10.** 有心圆锥曲线的两渐近线交于该圆锥曲线的中心, 且调和分离这一圆锥曲线的一对共轭直径.

*proof.* 设  $t, t'$  为有心圆锥曲线  $\alpha$  的渐近线, 而  $t, t'$  切  $\alpha$  于两个无穷远点  $\infty_t, \infty_{t'}$ , 从而  $t, t'$  的交点为  $l_\infty = \infty_t \infty_{t'}$  的极点, 即  $\alpha$  的中心  $O$ .

又设  $l, l'$  是一对共轭直径, 则  $p(\infty_l) = \infty_{l'}$ , 而  $l_\infty$  过  $\infty_l$  又交  $\alpha$  于  $\infty_t, \infty_{t'}$ , 则由(6.1.7)知  $(\infty_l \infty_{l'}, \infty_t \infty_{t'}) = -1$ , 故  $(ll', tt') = -1$ , 即证.  $\square$

### 练习

**Problem 6.29.** 用射影方法证明: 若双曲线的一条切线交两条渐近线于两点, 则切线的切点是此二点所连线段的中点.

**Problem 6.30.** 设双曲线  $\alpha$  有两渐近线  $l_1, l_2$ ,  $t_1, t_2$  是  $\alpha$  的两条切线,  $t_1$  与  $l_1, l_2$  分别交于点  $A_1, B_1$ ,  $t_2$  与  $l_1, l_2$  分别交于点  $A_2, B_2$ , 用射影方法证明:  $A_1 B_2 \parallel A_2 B_1$ .

**Problem 6.31.** 若一个平行四边形内接于一条有心圆锥曲线, 证明: 它的两条对角线是圆锥曲线的直径, 且它的两对对边分别平行于一对共轭直径.

(9) 即直径与圆锥曲线的 [有穷远] 交点. 注意对于抛物线, 这里所说的交点不考虑无穷远处的那个点.

**Problem 6.32.** 证明: 圆锥曲线的过定点的弦的中点的轨迹是一条同型<sup>(10)</sup>圆锥曲线.

**Problem 6.33.** 设点  $P, Q$  关于某有心圆锥曲线  $\alpha$  共轭,  $A$  为线段  $PQ$  的中点, 且  $A \in \alpha$ , 证明:  $PQ$  与  $\alpha$  的一条渐近线平行.

**Problem 6.34.** 证明下列命题:

- (1) 等轴双曲线的共轭直径关于其渐近线对称.
- (2) 证明两条同心等轴双曲线之间的交角等于其渐近线的交角的两倍.

## 6.4.2 圆锥曲线的度量性质

本节我们用射影方法探讨圆锥曲线的度量性质, 它们与圆环点相关.

### 圆的射影定义

在学习之前的章节时, 读者可能会想, 既然五点确定一条圆锥曲线, 但三点确定一个圆, 那么剩下两个点是什么呢? 答案是, 所有圆均过两个圆环点. 实际上, 我们可以按如下方式定义一个圆:

**Definition 6.4.11** (圆的射影定义). 圆是过两个圆环点的 [非退化] 二次曲线.

为说明这与中学所学的圆的定义相同, 我们先利用上述定义推导如下的结论:

**Theorem 6.4.12.** 一个圆的所有共轭直径互相垂直.

*proof.* 圆与无穷远直线的交点是两个圆环点  $I, J$ , 设圆的一组共轭直径交无穷远直线于点  $P, Q$ , 圆的中心为  $O$ .

由(3.2.11),  $OI, OJ$  为圆的两渐近线, 且  $(OP, OQ; OI, OJ) = -1$ , 故由(3.5.22)  $OP \perp OQ$ . □

注意, 显然满足任意共轭直径互相垂直的圆锥曲线必为 [中学所学的定义下的] 圆, 从而上述结论表明圆的射影定义与中学所学一致.

利用圆的射影定义, 我们可以给出如下结论:

**Theorem 6.4.13.** 设  $l_1, l_2$  不过圆环点  $I, J$ , 它们与  $l_\infty$  的交点分别为点  $A, B$ , 则  $\angle(l_1, l_2)$  的值与  $(AB, IJ)$  的值是一一对应关系.

*proof.* 设  $l_1, l_2$  交于点  $O$ , 另有两不过圆环点的直线  $l'_1, l'_2$ , 它们交于点  $O'$ , 与  $l_\infty$  的交点分别为  $A', B'$ . 设  $P = l_1 \cap l'_1, Q = l_2 \cap l'_2$ , 则  $\angle(l_1, l_2) = \angle POQ, \angle(l'_1, l'_2) = \angle PO'Q$ . 需要证明:  $\angle POQ = \angle PO'Q \Leftrightarrow (AB, IJ) = (A'B', IJ)$ .

先证“ $\Rightarrow$ ”. 若  $\angle POQ = \angle PO'Q$ , 则点  $P, Q, O, O'$  共圆于  $\omega$ , 而  $I, J \in \omega$ , 则  $l_\infty(A, B, I, J) \bar{\cap} O(A, B, I, J) \bar{\cap} \omega(P, Q, I, J) \bar{\cap} O'(A', B', I, J) \bar{\cap} l_\infty(A', B', I, J)$ , 故  $(AB, IJ) = (A'B', IJ)$ .

对“ $\Leftarrow$ ”方向的证明是类似的. □

**Remark.** 实际上, Laguerre 定理称,  $\angle(l_1, l_2) = \frac{1}{2i} \ln(AB, IJ)$ . 我们将在第四中证之.

在上述定理中, 假如让  $l_1$  趋于过某一圆环点  $I$ , 则对于任意的不过  $J$  的  $l_2$ ,  $\angle(l_1, l_2) = (AB, IJ) = (IB, IJ) = 0$ , 它们不是一一对应的关系; 倘再令  $l_2$  趋于过点  $J$ , 则  $\angle(l_1, l_2) = (IJ, IJ)$  不被定义. 但是, 重复(6.4.13)的证明过程, 它应该对任意  $l_1, l_2$  均成立, 即是过圆环点. 那么, 唯一的解释是: 我们无法合理地定义过圆环点的直线与其他直线的夹角, 或者说, 过圆环点的直线与其他直线的夹角不是一个确定

(10) 即, 若原曲线是椭圆, 则轨迹也是椭圆; 若原曲线是双曲线, 则轨迹也是双曲线, 若圆曲线是抛物线, 则轨迹也是抛物线.

的值, 因此, 我们称过圆环点的直线为迷向直线.

我们再给出一个圆环点的应用的例子:

**Theorem 6.4.14** (三锥线定理 (three conics theorem)). (如图6.14) 如果三条圆锥曲线有两个公共点, 则过它们剩下的两两的交点的三条弦交于一点.

即, 对  $[$  在  $\mathbb{CP}^2$  中的  $]$  有两个公共点  $P, Q$  的三条圆锥曲线  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , 设  $\alpha_1, \alpha_2$  的另两个交点为  $A_3, B_3$ ,  $\alpha_2, \alpha_3$  的另两个交点为  $A_1, B_1$ ,  $\alpha_3, \alpha_1$  的另两个交点为  $A_2, B_2$ , 则直线  $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3$  交于一点.

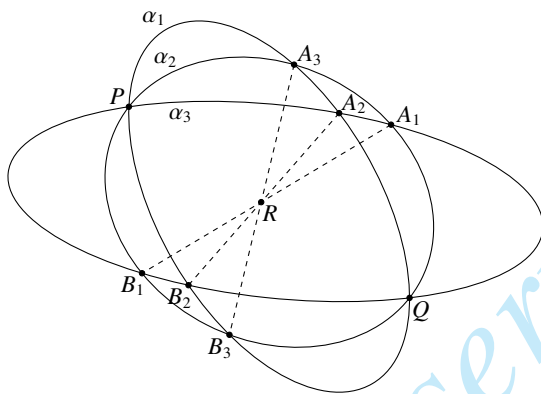


Figure 6.14

*proof.* 通过射影变换, 将  $P, Q$  变为圆环点, 这样  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  变为了三个圆, 利用根心定理即证<sup>(11)</sup>. □

最后, 作几点注解:

在 §6.2.1 的注(7)中, 我们论述了过任意三点不共线的五点存在一条二次曲线, 这可以几何地说明如下: 通过射影变换可将其中两点变为圆环点, 则过剩下三点存在一个圆, 而这个圆又过两个圆环点.

另外, 在之前, 我们曾在有些地方将直线视为圆心在无穷远处、半径为无穷大的圆, 它与圆的射影定义是相融洽的: 考虑共线三点  $A, B, C$  以及圆环点  $I, J$ , 过  $A, B, C, I, J$  存在一条圆锥曲线, 它退化为  $\overline{ABC} \cup l_\infty$ , 但它又过圆环点  $I, J$ , 从而一定程度上也具有圆的性质. 不过, 在之前, 直线本身被视为一个退化的圆, 但由这里的讨论, 严格地说应该退化为直线与  $l_\infty$  之并; 但大多数情形下忽略其中  $l_\infty$  不影响几何上的讨论.

#### 轴与顶点的射影定义 \*

现在, 我们用射影方法研究圆锥曲线的轴和顶点:

**Definition 6.4.15** (轴与顶点的射影定义). 圆锥曲线的轴是平分一组和它垂直的弦的直径, 轴与圆锥曲线的有穷交点为圆锥曲线的顶点.

容易看出, 上述定义确保了圆锥曲线关于它的主轴对称, 从而和我们之前的定义是等价的. 现在我们用射影方法给出与主轴相关的结论.

**Theorem 6.4.16.** 抛物线有唯一的轴和唯一顶点, 且抛物线的轴是两圆环点与抛物线上的无穷远点的第四调和点的极线.

(11) 注意, 在复  $\text{Eukleidies}$  平面中, 通过两圆相交的情形进行延拓可知: 两圆的根轴就是两圆的公共弦.

*proof.* 设无穷远直线  $l_\infty$  与抛物线切于点  $P_\infty$ ,  $P_\infty$  关于  $I, J$  的第四调和点  $Q_\infty$ , 则  $Q_\infty$  的极线显然过  $P_\infty$ , 并设这一极线与抛物线的另一个交点为  $V$ . 由于  $(I, J; P_\infty, Q_\infty) = -1$ , 故  $VP_\infty \perp VQ_\infty$ .

又  $VP_\infty$  为无穷远点  $Q_\infty$  的极线从而是直径, 过  $Q_\infty$  作任意一条直线交抛物线于  $M_1, M_2$ , 交  $VP_\infty$  于  $M$ , 由于  $VP_\infty$  为  $Q_\infty$  的极线, 故  $(Q_\infty, M; M_1, M_2) = -1$ , 从而  $M$  为  $M_1M_2$  的中点, 而  $M_1M_2 \parallel VQ_\infty$  且  $VQ_\infty \perp VP_\infty$ , 故  $M_1M_2 \perp VP_\infty$ , 从而  $VP_\infty$  满足直径的定义.

由于抛物线的所有直径均过点  $P_\infty$ , 而  $P_\infty$  唯一确定, 故轴唯一.  $\square$

**Theorem 6.4.17.** 除圆以外的有心二次曲线只有一对轴, 有四个顶点, 它的轴是两条渐近线所成角的平分线.

*proof.* 设无穷远直线  $l_\infty$  交二次曲线于点  $P_\infty$  和  $Q_\infty$ , 二次曲线在这两点处的切线  $t_1, t_2$  即为渐近线, 它们交于中心  $C$ . 作  $\angle P_\infty C Q_\infty$  的内、外角平分线, 分别交无穷远直线于点  $A_\infty, B_\infty$ , 则  $a \perp b$ , 从而  $(t_1, t_2; a, b) = -1$ , 即  $(P_\infty, Q_\infty; A_\infty, B_\infty) = -1$ , 故  $a, b$  为一对共轭直径, 从而为轴 (由于直径平分与之共轭的弦).

下证它没有其他的主轴. 若不然, 设有一对主轴  $a', b'$  (轴一定成对出现, 因为一条轴的共轭直径一定还是轴), 则  $a' \perp b'$ , 故  $(a', b'; CI, CJ) = -1$ , 但  $(a, b; CI, CJ) = -1$ . 考虑交换  $a$  与  $a'$  以及  $b$  与  $b'$  的对合变换, 这一对合变换将直径变为其共轭直径, 而  $CI, CJ$  是对合的不变直线, 因而为渐近线. 那么  $I, J$  在该二次曲线上, 该二次曲线退化为圆.  $\square$

## 焦点与准线

最后, 我们用射影几何的方式来研究焦点与准线:

**Definition 6.4.18** (焦点与准线的射影定义). 过两圆环点引二次曲线的切线, 所得的四条切线彼此的无穷交点为二次曲线的焦点, 焦点关于二次曲线的极线称为准线.

在论述这一定义与之前的定义自洽前, 我们先用射影方法给出焦点的一些性质.

**Theorem 6.4.19.** 圆的中心即其焦点, 其准线为无穷远直线.

*proof.* 对于圆而言, 它过圆环点, 从而过圆环点的切线就是它的渐近线, 它们交于圆的中心, 故圆的中心即其焦点, 因而其准线为无穷远直线.  $\square$

**Theorem 6.4.20.** 抛物线有一个焦点, 且它的焦点在轴上; 抛物线的准线垂直于轴, 迷向切线<sup>(12)</sup>的切点在准线上.

*proof.* 由于抛物线与无穷远直线  $l_\infty$  相切, 故它只有两条有穷的迷向切线, 它们的交点即为焦点  $F$ , 从而抛物线只有一个焦点和一条准线.

如图6.15<sup>(13)</sup>, 设抛物线的两迷向切线分别为  $IA, IB$ , 切点分别为  $A, B$ , 其中  $I, J$  为圆环点.

那么, 直线  $AB$  即为准线, 它交  $l_\infty$  于  $Q_\infty$ , 抛物线与无穷远直线切于  $P_\infty$ , 对退化为三角形的六线形  $\{IA, AF, FB, BJ, JP_\infty, \infty P\}$  应用 Brianchon 定理可知  $FP_\infty, IB, AJ$  共点于  $C$ , 从而由(3.5.10)得  $(P_\infty, Q_\infty; I, J) = -1$ , 故  $(D, Q_\infty; A, B) = -1$ , 其中  $D = AB \cap FP_\infty$ , 因此  $FP_\infty$  为  $Q_\infty$  的极线, 且由  $FP_\infty \perp FQ_\infty$  知  $FP_\infty$  垂直平分过  $Q_\infty$  的一组平行弦.

那么, 由轴的定义,  $FP_\infty$  为轴,  $F$  在轴上, 准线  $AB$  垂直于轴 (因为  $AB \parallel P_\infty Q_\infty$ ).  $\square$

(12) 顾名思义, 迷向切线即同时是迷向直线的切线, 即抛物线的过圆环点的非无穷远切线.

(13) 我们无法作出复射影平面上的图形, 下图仅为一个方便读者理解的示意, 后同.





故  $-1 = (TP, TQ; TR, TC) = (FP, FQ; FR, FC)$ , 由(6.5.1)知  $R \in p(C)$ , 则  $FR, FC$  为共轭直径, 由(6.4.23)知  $FR \perp FC$ , 即  $FR \perp FT$ . 但  $F(P, Q, R, C)$  为调和线束, 由(3.2.15)知命题成立.  $\square$

下面, 我们说明焦点的射影定义与传统的定义相符.

在射影定义下, 对于圆锥曲线  $\alpha$ , 设  $F, l$  为一对对应的交点与准线, 对  $\alpha$  的任意一弦  $XY$ , 设  $R = PQ \cap l$ , 则由(6.4.23)知  $FR$  是  $\angle PFQ$  的(外)角平分线, 故  $\frac{FP}{FQ} = \frac{PR}{QR} = \frac{\text{dist}(P, l)}{\text{dist}(Q, l)}$ , 则  $\alpha$  是到定点  $F$  与定直线  $l$  的距离之比为定值的点的轨迹, 与圆锥曲线的第二定义相符. 从而焦点的射影定义与传统的定义方式相符.  $\square$

## 练习

**Problem 6.35.** 用射影方法证明垂径定理: 圆的垂直于一条非直径的弦的直径平分这条弦.

**Problem 6.36.** 证明: 如果一个四边形的四条边均为迷向直线, 则它的对角线互相垂直平分.

**Problem 6.37.** 证明: 一个仿射变换是相似变换的充要条件是它保持两个圆环点.

**Problem 6.38.** 用射影方法证明: 一条有心圆锥曲线的两条轴是两渐近线所成角的内、外角平分线.

**Problem 6.39.** 对于有心二次曲线, 讨论它的实的焦点与准线对应的离心率和它的虚的焦点与准线对应的离心率间的关系.

**Problem 6.40.** 定圆锥曲线  $\alpha$  有两条定切线  $t_1, t_2$ , 动直线  $m$  与  $\alpha$  相切分别交它们于点  $M_1, M_2$ ,  $F$  为一个焦点, 用射影方法证明:  $\angle M_1FM_2$  为定值. *Hint.* 可能需要用到如下结论: 二次曲线的四定切线  $l_1, l_2, l_3, l_4$  与该二次曲线的动切线  $l$  的交点分别为  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , 则  $(A_1A_2, A_3A_4)$  与  $l$  的选取无关.

**Problem 6.41.** 用射影方法证明: 抛物线的外切三角形的外接圆过抛物线的交点.

**Problem 6.42.** 用射影方法证明 Monge 圆定理.

## 6.5 配极与对偶

### 6.5.1 配极与对偶的基本概念

类似于3.6中讨论的配极变换, 对于我们介绍的圆锥曲线的极点极线, 也可类似地定义所谓的配极变换: 一个关于某圆锥曲线的配极[变换]将平面上的一点变为它的极线, 将平面上的一条直线变为它的极点.

下面, 我们将配极变换推广至任意曲线:

**Definition 6.5.1.** 在配极变换下, 一条光滑曲线<sup>(14)</sup>关于某圆锥曲线的配极曲线, 是该曲线的所有切线的极点组成的曲线, 或者该曲线上的所有点的极线所包络<sup>(15)</sup>的曲线.

我们说明, 上述定义中的两种配极曲线的生成方式是等价的:

(14) 我们在考虑曲线的配极曲线时, “光滑曲线”表明我们要求曲线的性质足够良好, 例如具有很好的连续性, 且在各点处均能作出唯一的切线, [非退化的]圆锥曲线就是一种这样的曲线; 而像由曲线和直线拼接起来的曲线, 则不具备良好的性质, 它在其直线部分的切线的极点是同一个点, 这些部分在配极下就会变得比较奇怪. 我们考虑的都是有良好性质的曲线的配极, 不过我们所涉及的曲线大多都是这样的有良好性质的曲线, 除非有特别声明.

(15) 若一族动直线恒与某曲线相切, 则我们说这一族动直线包络(envelope)该曲线, 该曲线是这一族动直线的包络线.



设曲线  $\gamma$  上有两点  $A, B$ ,  $\gamma$  在这两个点处的切线分别为  $a, b$ . 设点  $A, B$  在配极下变成直线  $a', b'$ , 线  $a, b$  在配极下变成点  $A', B'$ , 由配极原则可知  $A' \in a', b' \in B'$ . 当点  $B \rightarrow A$  时,  $AB$  趋于  $\gamma$  的切线  $a$ , 而  $(a \cap b)$  趋于  $\gamma$  上的点  $A$ , 那么,  $A' = p(a) = p\left(\lim_{B \rightarrow A} AB\right) = \lim_{B \rightarrow A} p(AB) \stackrel{(16)}{=} \lim_{B \rightarrow A} (a' \cap b') = A''$ .

设通过“所有点的极线的包络”得到的配极曲线为  $\gamma'$ , 则  $a', b'$  均与  $\gamma'$  相切, 切点分别记为  $A'', B''$ , 且当  $B \rightarrow A$  时,  $b' \rightarrow a'$ , 此时  $\lim_{B \rightarrow A} (a' \cap b') = A''$ .

因此, 点  $A' = A''$ . 那么, 所有  $\gamma'$  的切线与它的切点的集合就是  $\gamma'$  的“所有切线的极点”的集合, 因此通过“所有切线的极点的轨迹”得到的配极曲线也是  $\gamma'$ . 即证.  $\square$

对于曲线的配极变换, 我们还有如下的结论:

**Theorem 6.5.2.** 设  $\mathfrak{d}$  是关于某一圆锥曲线的配极变换,  $\gamma$  是一曲线, 则  $\mathfrak{d}(\mathfrak{d}(\gamma)) = \gamma$ .

*proof.* 曲线  $\mathfrak{d}(\gamma)$  可视为  $\gamma$  的所有切线的极点的集合, 则  $\mathfrak{d}(\mathfrak{d}(\gamma))$  就是  $\gamma$  的所有切线的极点的极线的包络, 这就是原来  $\gamma$  的所有切线的包络, 故仍未  $\gamma$ .  $\square$

以下, 我们将用  $\mathfrak{d}_\alpha$  来表示关于圆锥曲线的配极变换.

我们简要说明一下记号  $\mathfrak{t}, \mathfrak{p}, \mathfrak{d}$  间的区别:  $\mathfrak{t}$  专门用于表达切线, 当表示圆锥曲线  $\alpha$  上点  $P$  处的切线时,  $\mathfrak{t}_\alpha(P)$  与  $\mathfrak{p}_\alpha(P)$  是等价的, 但用  $\mathfrak{t}$  时特别强调了“切线”的概念; 并且, 使用符号  $\mathfrak{t}_\alpha$  时  $\alpha$  可以是一般的曲线而并不一定是圆锥曲线.  $\mathfrak{p}$  相较于  $\mathfrak{d}$  而言, 专门强调极点与极线的变换, 而不能表达一条曲线的配极; 并且表达一条线  $a$  的极点的时候需要用  $\mathfrak{p}^{-1}(a)$ , 因为  $\mathfrak{p}$  专用于表示一个点的极线, 而用  $\mathfrak{d}$  时一条线  $a$  的极点也用  $\mathfrak{d}(a)$  表示, 因为  $\mathfrak{d}$  是配极变换, 它将极点与极线互换; 此外, 在使用  $\mathfrak{d}$  时, 我们还表达了一些变换的视角.

下面, 我们考虑一条圆锥曲线的配极.

**Theorem 6.5.3.** 一个圆  $\omega_1$  关于另一个圆  $\omega$  的配极曲线  $\alpha$  为一条圆锥曲线, 且当  $\omega$  的圆心在  $\omega_1$  内时,  $\alpha$  为圆; 当  $\omega$  的圆心在  $\omega_1$  上时,  $\alpha$  为抛物线; 当  $\omega$  的圆心在  $\omega_1$  外时,  $\alpha$  为双曲线.

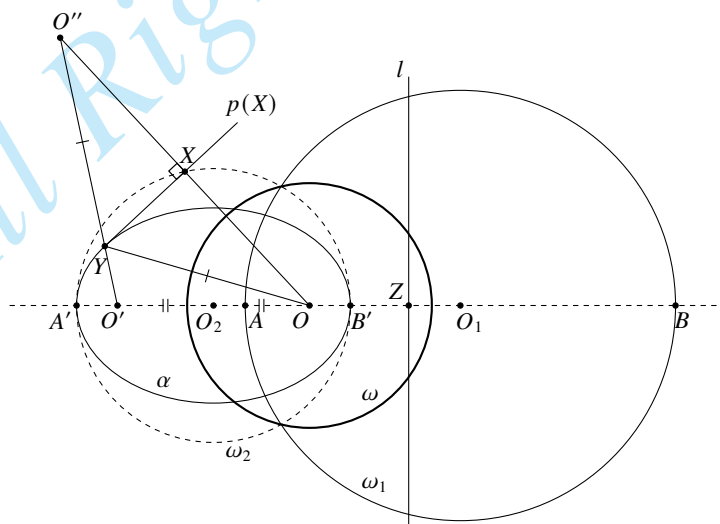


Figure 6.17

*proof.* 设  $\omega$  为一个以点  $O$  为圆心的圆,  $\omega_1$  为一个以点  $O_1$  为圆心的圆. 若  $O$  在  $\omega_1$  内, 如图6.17所示, 令  $\omega_2 = i_\omega(\omega_1)$ . 我们用  $p(X)$  表示过点  $\omega_2$  上一点  $X$  且垂直于  $OX$  的直线, 易知它等于  $\mathfrak{p}(i_\omega(X))$ .

(16) 此步利用了配极变换的连续性, 则先取极限再配极和先配极再取极限的效果相同. 我们的课程不会对连续性这方面作严格地讨论, 不过从直观上是容易理解的.

从而, 当  $X$  在  $\omega_2$  上运动一周时,  $p(X)$  的包络就是  $\omega_1$  的配极曲线. 由此, 我们只需要证明这样的  $p(X)$  均与一条圆锥曲线相切.

设点  $O', O''$  分别为点  $O$  关于点  $O_2, X$  的对称点, 则易知  $O'O'' = 2O_2X$  为  $\omega_2$  的直径的长, 因而为定值. 令  $Y = O'O'' \cap p(X)$ , 则  $O'Y + YO = O'Y + YO'' = \text{const}$ , 故点  $Y$  在一个以  $O, O'$  为焦点的椭圆上运动. 另一方面, 易见  $OY, O'Y$  与  $XY$  的夹角为定值, 从而由光学性质知上述椭圆恒与  $XY$  切于点  $Y$ .

对点  $O$  在  $\omega_1$  内以及  $\omega_1$  上的情形也可类似地证明, 我们将其留给读者.  $\square$

更进一步地, 下面的定理刻画了圆关于圆的配极曲线的刻画方式:

**Proposition 6.5.4.** 设  $\omega, \omega_1$  分别为以  $O, O_1$  为圆心的圆, 则  $\mathbf{d}_\omega(\omega_1)$  是以  $O, \mathbf{p}_\omega(O_1)$  为一组对应的焦点与准线、 $\mathbf{i}_\omega(\omega_1)$  为辅助圆<sup>(17)</sup>的圆锥曲线.

*proof.* (6.5.3)的证明已经表明  $O$  为焦点、 $\mathbf{i}_\omega(\omega_1)$  为辅助圆, 我们只用证明  $\mathbf{p}(O_1)$  为准线. 记  $\alpha = \mathbf{d}_\omega(\omega_1), \omega_2 = \mathbf{i}_\omega(\omega_1), l = \mathbf{p}_\omega(O_1), l \cap OO_1 = Z, \omega_1, \omega_2$  与  $OO_1$  的交点分别为  $A, B$  和  $A', B'$ , 如图6.17.

显然  $(AB, O_1 \in OO_1) = -1$ , 注意  $\mathbf{i}_\omega$  下点  $A, B, \infty_{OO_1}$  分别变为  $A', B', O$ , 且由(4.2.11)知  $\mathbf{i}_\omega(O_1) = Z$ , 则由(4.2.13)知  $(A'B', PZ) = 0$ .

结合(6.1.9)知  $Z \in \mathbf{p}_\alpha(O)$ , 而  $O$  在  $\alpha$  的轴上, 由对称性知  $\mathbf{p}_\alpha(O) \perp OO_1$ , 故  $l = \mathbf{p}_\alpha(O)$ . 注意  $O$  为  $\alpha$  的焦点, 结合(6.1.17)即证.  $\square$

将上边定理的配极过程反过来, 我们就得到如下的结果:

**Theorem 6.5.5.** 设  $\alpha$  是一条圆锥曲线,  $F$  为其一个焦点, 则关于以  $F$  为中心的圆的配极变换将  $\alpha$  变为一个圆, 且它是  $\alpha$  的辅助圆关于  $F$  的反演.

上面我们考虑了关于圆的配极变换. 关于圆的配极变换是配极变换中一种常用的特例, 它被称为标准配极变换. 一个以  $P$  为中心的标准配极变换即指关于某一以  $P$  为圆心的圆的配极变换.

有了上面的结果, 我们可以将配极变换推广到一般的圆锥曲线的情形:

**Theorem 6.5.6.** 一条圆锥曲线  $\alpha_1$  对另一条圆锥曲线  $\alpha$  的配极曲线为一条圆锥曲线.

*proof.* 利用(6.5.3)的定理, 结合射影变换, 我们可以证明这一结论, 这只需要将两圆锥曲线的两个[不重合的][可以为虚的]交点变为两个圆环点, 这样就转化为了(6.5.3); 若两圆锥曲线的四个交点全部重合<sup>(18)</sup>, 它可视为交点不重合时的极限情形.

但若不考虑复射影变换, 我们并不是总能将两条圆锥曲线同时变为两个圆. 因此, 我们再给出另外一种证法.

考虑  $\alpha_1$  上给定的五点  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$ , 它们关于  $\alpha$  的极线分别为  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ , 这五条直线唯一地确定了一条与它们均相切的二次曲线  $\beta$ . 对于  $\alpha_1$  上的任意一点  $X$ , 设它的极线为  $x$ , 则可对  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X$  使用 Pascal 定理, 从而由配极原则容易验证  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x$  满足 Brianchon 逆定理的条件, 利用 Brianchon 的逆定理可知  $x$  也与  $\beta$  相切, 即证.  $\square$

与之前圆的情形一样, 我们还可以将对偶关系进行推广. 关于一圆锥曲线互为配极的元素就是对偶的. 根据(6.5.6), 我们只需要将之前关于圆的对偶原则中的圆改为圆锥曲线, 且圆锥曲线与圆锥曲线对偶, 即可将表3.13.2中的对偶关系作如下的推广:

(17) 请记得, 我们约定将抛物线在其顶点处的切线也称为是它的“辅助圆”, 这可以视为椭圆的一种极限.

(18) 由于圆锥曲线是二次的曲线, 则在复射影平面中两圆锥曲线必能有四个[可能相同的]交点. 我们在后面还会详细地讨论这些情况.

**Definition 6.5.7.** 在射影平面中, 对于仅由下表中元素、关系及操作构成的图形 (或命题), 通过互换每一行中的两个元素、关系或操作, 得到的新的图形 (或命题) 称为原来的图形 (或命题) 的对偶图形 (或对偶命题):<sup>(19)</sup>

①	点	直线
②	过一点作一条直线	在直线上取一点
③	一点在一直线上	一直线过一点
④	一点不在一直线上	一直线不过一点
⑤	作过两点的直线	取两直线的交点
⑥	(某 $n$ 个) 点在同一直线上	(某 $n$ 条) 直线过同一点
⑦	(某四个) 点的交比为 $t$ 特别地, (某四个点) 成调和点列	(某四条) 直线的交比为 $t$ 特别地, (某四条直线) 成调和线束
⑧	圆锥曲线	圆锥曲线
⑨	一点在圆锥曲线上	一直线与圆锥曲线相切
⑩	一点不在圆锥曲线上	一直线不与圆锥曲线相切
⑪	一点是一直线关于圆锥曲线的极点	一直线是一点关于圆锥曲线的极线

Table 6.1

在推广后, 我们也有对偶原则:

**Theorem 6.5.8** (对偶原则 (The duality principle)). 如果一个射影几何下的命题成立, 则其对偶命题同样成立.

与之前的讨论类似, 在配极变换下, 一个命题可以实现与它的对偶命题的转化, 即: 配极变换也将表6.1的左右对应项互换, 我们称之为广义配极原则. 例如, 若直线与某一圆锥曲线相切, 则广义配极原则称, 在一个配极变换下, 该直线的极点在圆锥曲线的配极曲线上, 这对应于表6.1中的 ⑨. 有时, 我们也将广义配极原则称为对偶原则.

下面, 我们给出对偶原则的几个例子:

**Example 6.5.9.** “存在唯一二次曲线过给定的五点”与“存在唯一的二次曲线与给定的五条直线相切”对偶.

**Example 6.5.10.** Pascal 定理与 Brianchon 定理对偶, Pascal 逆定理与 Brianchon 逆定理对偶.

**Example 6.5.11.** (6.1.14)与(6.1.15)对偶.

另外, 利用对偶, 我们可以将二次点列推广到所谓的二次线束. 首先给出(6.2.1)的对偶命题:

**Theorem 6.5.12.** 设  $l_1, l_2, l_3, l_4$  是圆锥曲线  $\alpha$  的四条切线,  $l$  是  $\alpha$  的任意一条切线,  $l_1, l_2, l_3, l_4$  与  $l$  分别交于点  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , 则  $(A_1 A_2, A_3 A_4)$  不依赖于  $l$  的选取.

**Remark.** 允许  $l$  与  $l_1, l_2, l_3, l_4$  中的某者重合的情况. 例如若  $l=l_1$ , 则考虑极限意义, 当  $l$  趋于  $l_1$  时,  $l \cap l_1$  便成为了  $l_1$  与  $\alpha$  的切点.

(19) 在之前, 我们要求命题中只能有一个圆, 因为多个圆在配极下不能被同时保持; 但是, 此处的圆锥曲线就可以不止一个, 因为任意圆锥曲线关于圆锥曲线的配极曲线均为圆锥曲线.

由此我们引出二次线束的概念:

**Definition 6.5.13.** 定义:

- a.) 二次线束是一条圆锥曲线  $\alpha$  的切线  $a, b, c, \dots$  的集合, 可记为  $\alpha(a, b, c, \dots)^{(20)}$ .
- b.) 对于一条圆锥曲线  $\alpha$  的给定的四切线  $a, b, c, d$ , 利用(6.5.12)可以定义它们的交比  $\alpha(a, b; c, d) \triangleq (a \cap p, b \cap p; c \cap p, d \cap p)$ , 其中  $p$  为  $\alpha$  的任意一条切线. 在不引起歧义时, 可简记  $\alpha(a, b; c, d)$  为  $\alpha(ab, cd)$ , 乃至  $(a, b; c, d)$  或  $(ab, cd)$ .
- c.) 若圆锥曲线  $\alpha$  上的二次线束  $\alpha(a, b, c, d)$  满足  $\alpha(ab, cd) = -1$ , 则称二次线束  $\alpha(a, b, c, d)$  为一个  $\alpha$  上的调和二次线束.

容易知道, 二次点列和二次线束是对偶的, 特别地, 调和二次点列与调和二次线束对偶.

最后, 类似于圆锥曲线的射影定义 1, 我们可以用线束的射影对应定义圆锥曲线:

**Definition 6.5.14** (圆锥曲线的射影定义 2). 射影对应  $f$  将以直线  $l_1$  为底的点列变换为以直线  $l_2$  为底的点列, 则以  $l_1$  为底的点列中的点与它在  $f$  下的像点的连线的包络是一条与  $l_1, l_2$  相切的圆锥曲线. 该圆锥曲线是非退化的, 当且仅当这一射影对应不是透视对应.

**Remark.** 这里所说的圆锥曲线退化, 不是退化为通常意义下的退化二次曲线 (即两直线). 考虑极限的情况, 当  $f$  为透视对应时, 它退化成两点:  $l_1, l_2$  的交点与  $f$  的透视中心.

那么这样的圆锥曲线的退化方式为什么会不同于常规的退化圆锥曲线呢? 其原因在于, 之前我们定义的圆锥曲线, 包括射影定义 1 下的圆锥曲线, 实际上均是将其看成了点的集合, 这样的圆锥曲线称为二阶曲线; 而在射影定义 2 下的圆锥曲线, 是用与直线相切的角度来看待的, 它被称为二级曲线. 用点定义的二级曲线在退化时变成了两直线, 对偶地, 二阶曲线在退化时变成了两点.

对于非退化的二级曲线与二阶曲线, 它们均表现为非退化圆锥曲线的形式, 因而没有什么区别, 而我们一般讨论的均是非退化的圆锥曲线<sup>(21)</sup>, 因此可以不对两者作出区分. 当读者在之后学习了齐次坐标中的点坐标和线坐标后, 会体会到代数上二阶曲线和二级曲线的不同.

## 练习

**Problem 6.43.** 证明(6.5.3)的双曲线和抛物线的情形.

**Problem 6.44.** 设  $C$  为圆锥曲线  $\beta$  的中心, 若  $\beta$  为圆  $\alpha$  关于圆  $\omega$  的配极曲线, 证明: 点  $C$  关于圆  $\omega$  的极线与  $\omega$  的中心关于  $\alpha$  的极线重合.

**Problem 6.45.** 证明: 等轴双曲线关于与它的辅助圆的配极曲线就是它本身.

**Problem 6.46.** 分别写出下列定理 (命题) 的对偶命题:

(1)(6.2.5), (6.2.6);

(2)Châsles 定理、六边形定理与三锥线定理.

**Problem 6.47.** \* 仿照之前对二次点列间的射影对应以及对合的讨论, 试探究二次线束间的射影对应以及对合的性质.

**Problem 6.48.** \* 在射影平面上, 建立点到直线的连续双射  $j: X \mapsto j(X)$ , 并使得  $j$  满足对偶原则, 即  $A \in j(B) \Leftrightarrow B \in j(A)$ , 证明:  $\{A | A \in j(A)\}$  为一条圆锥曲线, 且双射  $j$  给出了关于这一圆锥曲线的配极对应.

(20) 在不引起歧义的情况下, 二次点列的记号中可以省略表示所在圆锥曲线的  $\alpha$ ; 此外, 与之间介绍“二次点列”时类似, 我们用“二次线束”一词时, 对线束中线的个数并没有要求.

(21) 不过也可通过取极限的方式讨论退化的情形. 以后, 若不特殊说明, 退化的圆锥曲线一般指二阶曲线的退化, 即退化为两 [可能重合] 的直线; 若要特指退化为两个点的这种二级曲线, 我们用退化二级曲线来称之.

### 6.5.2 标准配极变换的应用

在所有的配极变换中, 标准配极变换的应用是最多的, 因为关于圆的配极有如下特别的性质:

**Theorem 6.5.15.** 设  $\omega$  是以  $O$  为圆心的圆, 对于点  $A, B$ ,  $\angle AOB = \angle(p_\omega(A), p_\omega(B))$ .

*proof.* 注意  $p(A) \perp OA, p(B) \perp OB$ , 则上述命题显然.  $\square$

这一性质告诉我们, 标准配极变换不仅有射影几何上的性质, 还能保持角度性质, 因此其应用也特别广泛.

第一个例子是等轴双曲线的性质 [6.20]:

**Theorem 6.5.16.**  $\triangle ABC$  的外接圆锥曲线  $\alpha$  是等轴双曲线的充要条件是  $\alpha$  过  $\triangle ABC$  的垂心  $H$ .

先证明如下引理:

**Lemma 6.5.17.** 设  $H$  为  $\triangle ABC$  的垂心, 一个以  $H$  为中心的配极变换将  $\triangle ABC$  变为其配极三角形  $\triangle A'B'C'$ , 则  $\triangle A'B'C'$  与  $\triangle ABC$  位似, 且  $H$  仍为  $\triangle A'B'C'$  的垂心.

*proof.* 如图6.18, 由于  $H$  为  $\triangle ABC$  的垂心, 所以  $AH \perp BC$ , 而由关于圆的配极的定义,  $B'C' = d(A) \perp AH$ , 则  $B'C' \parallel BC$ , 同理有另两组平行, 故  $\triangle A'B'C'$  与  $\triangle ABC$  位似.

注意配极下,  $A' = d(BC)$ , 因此  $A'H \perp BC$ , 故  $A, H, A'$  共线, 则  $A'H \perp BC$ , 结合  $B'C' \parallel BC$  得  $A'H \perp B'C'$ , 同理有另两组垂直, 因此  $H$  是  $\triangle A'B'C'$  的垂心.  $\square$

回到原命题的证明.

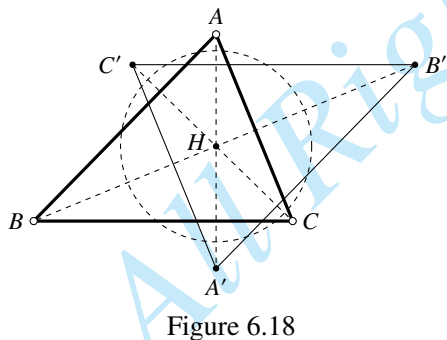


Figure 6.18

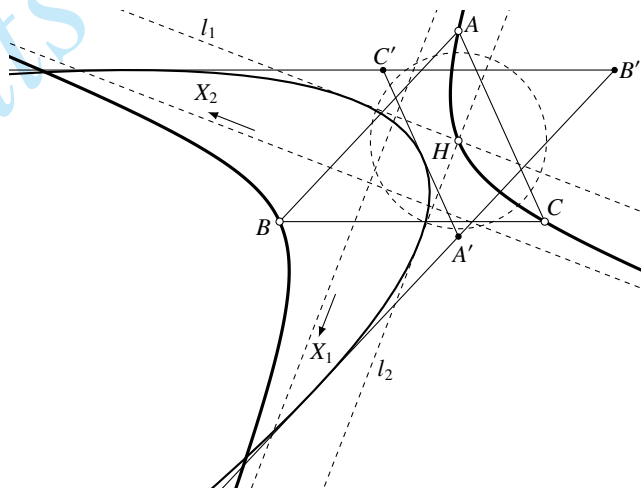


Figure 6.19

*back to the proof.* 先证充分性. 如图6.19, 若等轴双曲线  $\alpha$  过  $\triangle ABC$  的垂心  $H$ , 考虑一个中心在  $H$  处的标准配极变换  $d$ , 设配极下  $\beta \triangleq d(\alpha)$ , 由对偶原则可知  $d(H) = l_\infty$  与  $\beta$  相切, 故  $\beta$  是一条抛物线.

由于  $A, B, C \in \alpha$ , 则由对偶关系可知其配极三角形  $\triangle A'B'C'$  外切于  $\beta$ , 而由(6.5.17)知  $H$  为  $\triangle A'B'C'$  的垂心, 则由(4.1.12)知  $H$  在  $\beta$  的准线上.

设  $X_1, X_2$  为  $\alpha$  的渐近线上的无穷远点, 配极下它们分别为  $l_1, l_2$ , 则  $l_1, l_2$  过点  $H$ . 结合对偶关系可知  $l_1, l_2$  均与  $\beta$  相切, 由(1.5.6)知  $l_1 \perp l_2$ , 故由(6.5.15)知配极前  $OX_1 \perp OX_2$ , 即  $\alpha$  过两个相互垂直的方向上的无穷远点, 则  $\alpha$  为等轴双曲线.

必要性的证明是类似的.  $\square$



正交截线是另一个配极的应用的例子, 虽然它并没有涉及到圆锥曲线:

**Theorem 6.5.18.** 对于  $\triangle ABC$  与一点  $P$ , 过  $P$  分别作  $AP, BP, CP$  的垂线, 与  $BC, CA, AB$  分别交于点  $X, Y, Z$ , 则点  $X, Y, Z$  共线, 所共直线称为  $P$  关于  $\triangle ABC$  的正交截线 (orthotransversal).

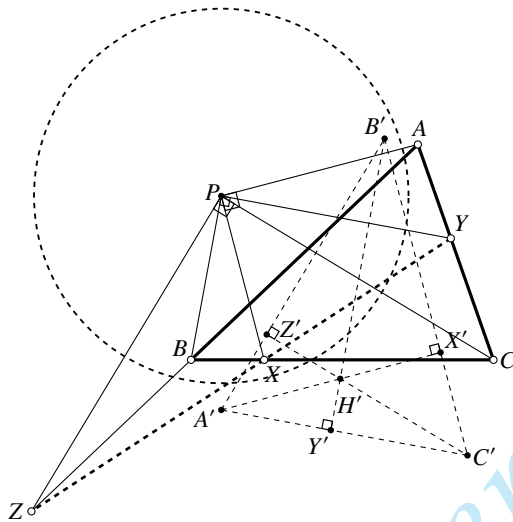


Figure 6.20

*proof.* 作一个以  $P$  为中心的标准配极变换  $\mathfrak{d}$ . 设  $\triangle ABC$  的配极三角形为  $\triangle A'B'C'$ , 如图6.20所示. 注意  $\mathfrak{d}(B) = A'C'$ , 则  $PB \perp A'C'$ ; 由于  $PY$  过配极中心, 则  $\mathfrak{d}(PY)$  为与其垂直方向上的无穷远点, 即  $\mathfrak{d}(PY) = \infty_{PB}$ .

由对偶原则,  $\mathfrak{d}(Y) = \mathfrak{d}(PY)\mathfrak{d}(AC) = \infty_{PB}B'$ , 而  $PB \perp A'C'$ , 则  $\mathfrak{d}(Y) \perp A'C'$ . 同理  $\mathfrak{d}(X), \mathfrak{d}(Z)$  分别与  $B'C', A'B'$  垂直, 则  $\mathfrak{d}(X), \mathfrak{d}(Y), \mathfrak{d}(Z)$  交于  $\triangle A'B'C'$  的垂心, 则由对偶原则知原来  $X, Y, Z$  共线.  $\square$

下面, 我们介绍所谓的 Frézier 点.

**Theorem 6.5.19 (Frézier).** 给定一条圆锥曲线  $\alpha$  以及其上的一个点  $P$ , 则  $\alpha$  的所有对  $P$  的张角为  $90^\circ$  的弦过一个定点, 称为点  $P$  关于  $\alpha$  的Frézier 点.

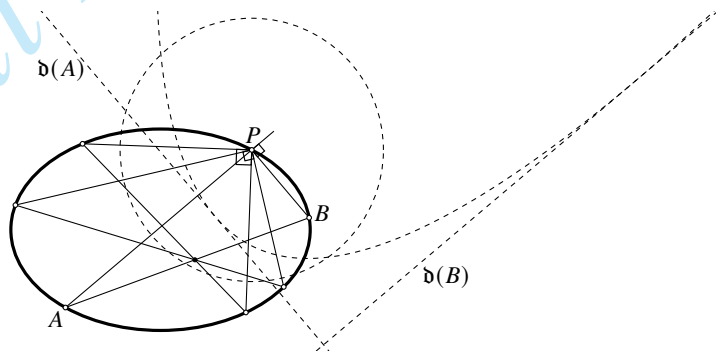


Figure 6.21

*proof.* 考虑一个以  $P$  为中心的标准配极变换  $\mathfrak{d}$ , 则  $\mathfrak{d}(P) = l_\infty$ , 设  $\mathfrak{d}(\alpha) = \beta$ , 则  $\beta$  与  $l_\infty$  相切, 因而为抛物线.

设  $\alpha$  的一条弦  $AB$  满足  $AP \perp BP$ , 由于  $AP$  过配极中心, 则  $\mathfrak{d}(AP)$  为与  $AP$  垂直的方向上的无穷远点, 即  $\infty_{BP}$ , 同理  $\mathfrak{d}(BP) = \infty_{AP}$ .

由于  $A, B$  分别在  $AP, BP$  上, 由对偶原则,  $\mathfrak{d}(A), \mathfrak{d}(B)$  分别为  $\beta$  的过点  $\infty_{BP}, \infty_{AP}$  的非无穷远切线, 即  $\mathfrak{d}(A), \mathfrak{d}(B)$  是  $\beta$  的互相垂直的切线. 由(1.5.6)可知  $\mathfrak{d}(A) \cap \mathfrak{d}(B)$  在定直线 ( $\beta$  的准线) 上运动, 则配极前  $AB$  过定点.  $\square$

*another proof.* 对于圆锥曲线  $\alpha$  上任意一点  $A$ , 将  $AP$  绕  $P$  转  $90^\circ$  后得到的直线与  $\alpha$  交于点  $P, B$ , 则变换  $f: AP \mapsto BP$  保持对应直线的交角, 从而保交比, 因而是  $P$  上的射影变换. 那么,  $A \mapsto AP \mapsto BP \mapsto B$  中的每一者均是射影变换, 从而变换  $g: A \mapsto B$  是  $\alpha$  上的射影变换. 显然又有  $g(B) = A$ , 故  $g^2 = \text{id}$ , 即  $g$  为对合变换, 对合下的对应点  $A, B$  过对合中心.  $\square$

下面我们来考虑 Frégier 点的刻画.

对于圆锥曲线  $\alpha$ , 设  $x$  是  $\alpha$  的主轴, 考虑两条特殊的弦  $AB$ : 令  $AP \parallel x, BP \perp x$ , 易知此时  $AB$  为  $\alpha$  的一条直径, 且  $\mathfrak{f}_x(P) \in AB$ ; 令  $B \rightarrow P$ , 则  $BP$  趋于  $\mathfrak{t}(P)$ ,  $AP$  变为与  $\mathfrak{t}(P)$  垂直的直线. 上述两特殊位置的  $AB$  之交点即为 Frégier 点  $P'$ . 从而我们就找到了定点  $P'$  的位置.

我们还有如下结果:

**Proposition 6.5.20.** 一条有心圆锥曲线上的点的 Frégier 点的轨迹为一条与原圆锥曲线关于其中心位似的圆锥曲线, 且位似比为  $\frac{2-e^2}{e^2}$ , 其中  $e$  为原圆锥曲线的离心率.

*proof.* 先证椭圆的情形, 如图6.22所示, 设椭圆  $\alpha$  上一点  $P$  关于长轴的对称点为  $Q$ , 则显然  $PQ$  被长轴垂直平分于点  $T$ . 设  $\mathfrak{t}(P)$  交长轴于  $Z$ , 过点  $P$  且垂直于  $\mathfrak{t}(P)$  的直线交长轴于  $X$ , 则  $OQ$  与  $PX$  的交点  $P'$  即为  $P$  点的 Frégier 点.

设保持长轴不变的仿射变换将椭圆变为圆, 此时  $P$  变为  $Y$  的位置. 设椭圆半长轴为  $a$ , 半短轴为  $b$ , 半焦距为  $c$ . 仿射变换后显然有  $YT = \frac{a}{b} PT$ , 点  $O, X, T, Z$  不变, 而  $YZ$  为圆的切线.

那么  $OY \perp OZ$ , 由射影定理得  $OT \cdot ZT = YT^2 = \frac{a^2}{b^2} PT^2$ ; 同时  $PX \perp PZ$ , 故由射影定理可得  $XT \cdot ZT = PT^2$ . 因此,  $\frac{OT}{XT} = \frac{a^2}{b^2}, \frac{TX}{XO} = \frac{b^2}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 - c^2}{c^2} = \frac{1 - e^2}{e^2}$ .

对  $\triangle OQT$  与截线  $\overline{PXP'}$  应用 Menélaos 定理:  $1 = \frac{P'O}{P'Q} \cdot \frac{QP}{PT} \cdot \frac{TX}{XO} = \frac{P'O}{P'Q} \cdot 2 \cdot \frac{1 - e^2}{e^2}$ , 从而  $\frac{P'O}{P'Q} = \frac{2 - 2e^2}{e^2}$ , 故  $\frac{OP'}{OQ} = \frac{2 - 2e^2 + e^2}{e^2} = \frac{2 - e^2}{e^2} = \text{const}$ , 即证.

对于双曲线的情形, 与椭圆时是类似的, 利用复仿射变换即可(22).  $\square$

**Proposition 6.5.21.** (如图6.23) 一条抛物线上的点的 Frégier 点的轨迹是原抛物线沿主轴向开口方向平移两倍的焦准距后得到的抛物线.

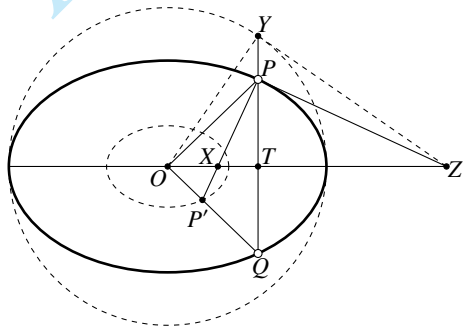


Figure 6.22

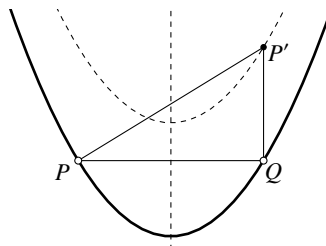


Figure 6.23

(22) 虽然复平面中的长度度量可能涉及到复数开根号的问题, 但对于平行 (或共线) 的线段长度之比, 不需要引入额外的结构即可获得, 因为这可以用向量来定义: 若  $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$ , 则可以定义  $\frac{AB}{AC} = \lambda$ .



*proof.* 对于抛物线  $\alpha$  上一点  $P$ , 作  $P$  关于轴的对称点  $Q$ , 过  $Q$  作轴的平行线交  $P$  点处的法线于  $P'$ , 则  $P'$  即为 Frégier 点. 利用(2.3.8)可知  $P'Q=2$  倍焦距, 即证.  $\square$

下面考虑 Frégier 定理的推广:

**Theorem 6.5.22.** 给定一条圆锥曲线  $\alpha$  以及其上的一个点  $P$ , 对于定值锐角角度  $\phi$ , 则  $\alpha$  的所有对  $P$  的张角为  $\phi$  或  $180^\circ - \phi$  的弦包络一条圆锥曲线.

*proof.* 与 Frégier 定理的第一个证明类似地作配极, 只不过此时对于满足条件的弦  $AB$ ,  $\mathfrak{d}(A), \mathfrak{d}(B)$  的交角不再是  $90^\circ$ , 而是  $\phi$  或  $180^\circ - \phi$ , 则由(1.5.7)可知  $\mathfrak{d}(A) \cap \mathfrak{d}(B)$  在一条圆锥曲线上, 由对偶原则可知原来  $AB$  包络一条圆锥曲线.  $\square$

上面的结果还可以继续推广:

**Theorem 6.5.23.** 一条定圆锥曲线上的非对合的射影变换下的对应点的连线包络一条圆锥曲线.

*proof.* 对于圆锥曲线  $\alpha$ , 设  $f$  是其上的一个非对合的射影变换, 任取  $\alpha$  上的一个定点  $P$ . 对于  $\alpha$  上的动点  $A$ ,  $A \mapsto AP$  是射影对应,  $f(A) \mapsto f(A)P$  是射影对应, 而  $A \mapsto f(A)$  是射影对应, 因此变换  $g: PA \mapsto Pf(A)$  是点  $P$  上的射影对应. 且由  $f$  不是对合易知  $g$  也不是对合.

若  $g$  是非抛物型的射影变换, 则可取出  $g$  的 [可能为虚的] 自对应直线  $m, n$ , 由(3.5.15)可知对任意点  $A$ ,  $(PA, Pf(A); m, n) = \text{const.}$  作射影变换使  $m, n$  分别过两圆环点, 由(6.4.13)可知此时  $PA, Pf(A)$  间的有向夹角为定值且不为  $90^\circ$  (否则就是对合), 则由(6.5.22)知  $Af(A)$  包络圆锥曲线. 那么射影变换前,  $Af(A)$  也包络圆锥曲线.

若  $g$  为抛物型射影变换, 考虑非抛物型射影变换的极限情形即可.  $\square$

## 练习

**Problem 6.49.** 一个定椭圆的所有内接菱形包络一条怎样的曲线?

**Problem 6.50.** 设以  $O$  为中心的双曲线的两渐近线的夹角为  $\theta$ , 双曲线上一点  $P$  的 Frégier 点为  $P'$ , 证明:  $\frac{OP}{OP'} = \cos \theta$ .

**Problem 6.51.** 给定平面上五点  $A, B, C, D, P$ , 证明: 点  $P$  关于  $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDA, \triangle DAB$  的正交截线共点于  $P$  关于  $\mathfrak{C}(ABCDP)$  的 Frégier 点.

**Problem 6.52.** 给定三角形, 证明: 一点的三线性极线、正交截线、关于它的 Ceva 三角形的正交截线、关于它的反 Ceva 三角形的正交截线交于一点.

**Problem 6.53.** 给定圆锥曲线  $\alpha$  与两点  $P, Q$ , 点  $A$  是  $\alpha$  上的动点,  $AP, AQ$  与  $\alpha$  的另一交点分别为  $M, N$ , 证明:  $MN$  包络一圆锥曲线.

**Problem 6.54.** 给定抛物线  $\alpha$ , 其内接  $\triangle ABC$  的垂心为  $\alpha$  的焦点  $F$ , 作  $\alpha$  的外切三角形  $\triangle A'B'C'$ , 使得  $\triangle A'B'C'$  三边与  $\alpha$  的切点分别为  $A, B, C$ . 记  $\alpha$  在其顶点处的切线为  $l$ . 证明:

- (1)  $\odot(ABC)$  与  $l$  相切;
- (2)  $\triangle A'B'C'$  的垂心为定点;
- (3) 记 (1) 中相切的切点为  $T$ ,  $\triangle A'B'C'$  的外心为  $O$ , 则  $O$  在定直线上运动, 且  $OT \perp l$ .

**Problem 6.55.** \* 给定  $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ , 满足  $A$  对  $B'C'$  的垂线、 $B$  对  $C'A'$  的垂线、 $C$  对  $A'B'$  的垂线交于一点  $Q_1$ , 证明:

- (1)  $A'$  对  $BC$  的垂线、 $B'$  对  $CA$  的垂线、 $C'$  对  $AB$  的垂线交于一点  $Q_2$ ;
- (2) [Sondat] 若  $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$  还有透视中心  $P$ , 则点  $Q_1, Q_2, P$  共线.

## 6.6 圆锥曲线束

本节我们介绍圆锥曲线束,这是之前介绍的圆束的概念的推广.

### 6.6.1 圆锥曲线束的概念与分类

注意在复射影平面中,两圆锥曲线总有四个(可能重合的)交点,例如两个相离的圆的四个交点中有两个有穷虚交点(其连线就是根轴)和两个圆环点(是虚无穷远点);同时五点确定一条圆锥曲线.因此,我们可以用以下方式来定义圆锥曲线束:

**Definition 6.6.1.** 给定平面上四个可能重合<sup>(23)</sup>的点  $A, B, C, D$ , 所有过点  $A, B, C, D$  的圆锥曲线(允许退化)的集合称为一个圆锥曲线束, 下记之为  $\text{pen}(A, B, C, D)$ , 或更简单地,  $\text{pen}(ABCD)$ .

在上述定义中我们提到,  $\mathcal{P} = \text{pen}(ABCD)$  中确定圆锥曲线束的四个点  $A, B, C, D$  可以重合, 但完全重合的点除了告诉我们这是一个  $\mathcal{P}$  中曲线公切点, 并没有提供关于这个切点的更多信息, 因此实际上重合的点的含义是, 还需指定这些点趋于重合的方向, 这可以这样完成: 设已知  $\mathcal{P}$  中有非退化圆锥曲线  $\alpha_0$ , 不妨设点  $A, B$  重合, 那么, 在  $\alpha_0$  上固定点  $A, C, D$ , 再在  $\alpha_0$  上取出点  $B'$ , 考虑  $\lim_{B' \rightarrow A} \text{pen}(AB'CD)$  即自然地得到了  $\text{pen}(ABCD)$ <sup>(24)</sup>. 这种趋近方式是正确的, 因为  $\mathcal{P}$  中的  $\alpha_0$  在此过程中一直属于  $\text{pen}(AB'CD)$ , 而将选取的基准改为  $\mathcal{P}$  中的其他非退化圆锥曲线不改变结果.

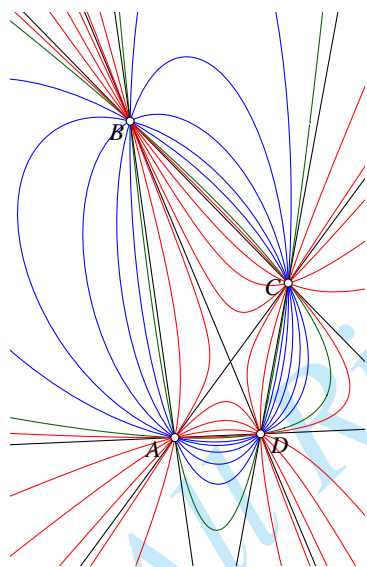


Figure 6.24

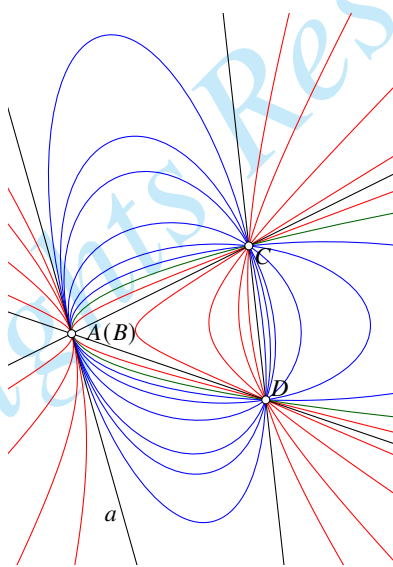


Figure 6.25

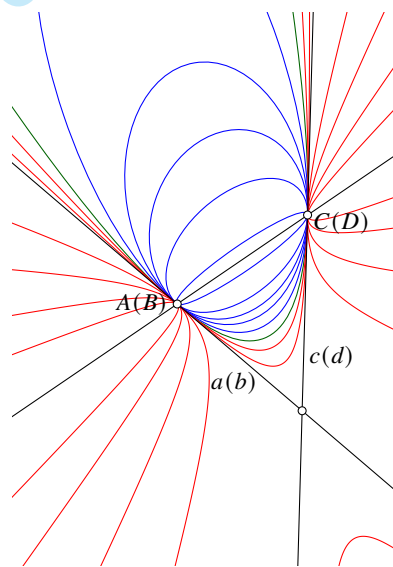


Figure 6.26

下面我们根据  $A, B, C, D$  中重合的点的数目对圆锥曲线束分类进行讨论:

① 点  $A, B, C, D$  互不重合, 下称此时的  $\mathcal{P}$  为非退化圆锥曲线束.

由于允许退化圆锥曲线, 则  $AB \cup CD, AC \cup BD, AD \cup BC$  是  $\mathcal{P}$  中的三条退化圆锥曲线.

这是最常见的情形, 图6.24的情形给出了一种例子. 又如椭圆型和双曲型的圆束也是这样的圆锥曲线束, 这样的圆束是由生成圆束的两个(可能为虚的)点以及两个圆环点确定的圆锥曲线束.

② 点  $A, B, C, D$  中有[且仅有]两者重合, 不妨设为点  $A, B$ , 下称此时的  $\mathcal{P}$  为单切点圆锥曲线束, 此时  $\mathcal{P}$  中的曲线公切于点  $A(B)$ , 且切点为二重切点.

(23) 下面会详细解释重合时的含义: 对于重合的点, 我们需要再给定趋于重合的方式.

(24) 倘若不止有两个点是重合点, 按类似操作即可, 例如对  $A, B, C$  重合的情形, 只需在  $A, D$  固定的情况下, 在  $\alpha_0$  上取出  $B', C'$ , 然后令  $B', C'$  趋于  $A$ .

此时, 选取  $\alpha_0 \in P$ , 我们指定让  $B$  沿  $\alpha_0$  趋近于  $A$ , 由于只是二重切点, 这等效于  $B$  沿着  $t_{\alpha_0}(A)$  趋于  $A$ , 即沿  $\mathcal{P}$  中锥线在  $A$  处的公切线  $a$  趋于  $A$  点. 因此, 我们可以简化地附加指定  $B$  沿着某一直线  $a$  趋近于  $A$  点即可.

对此种情况, 令 ① 中讨论的  $\mathcal{P}$  中三条退化圆锥曲线的  $B \rightarrow A$ , 就是这种情形下  $\mathcal{P}$  中的退化圆锥曲线, 它有两类:  $l \cup CD, AC \cup AD$ .

图6.25给出了这类圆锥曲线束的一种例子; 容易知道, 抛物型圆束也是这样的一种圆锥曲线束.

③ 由两对互相重合的点生成的圆锥曲线束, 不妨设点  $A, B$  重合, 点  $C, D$  重合 (但  $A, C$  间不重合), 下称此时的  $\mathcal{P}$  为双切点圆锥曲线束.

类似于 ② 中的讨论, 我们只需要指定  $B$  趋近于  $A$  的方向  $a$ , 以及  $D$  趋近于  $C$  的方向  $c$ , 其中  $a, c$  均为直线; 这样, 就可以将  $\mathcal{P}$  视为情形 ① 的一种极限情况. 此时,  $\mathcal{P}$  中的圆锥曲线公切于两点  $A(B), C(D)$ , 在此两点处的公切线分别为  $a, c$ .

考虑情形 ① 下  $B \rightarrow A, C \rightarrow D$  的极限, 可知  $\mathcal{P}$  中有两条退化圆锥曲线:  $a \cup c$  与  $AC \cup AC$ , 其中  $AC \cup AC$  代表一对重合直线.

图6.26给出了这样的一个例子; 又如, 所有直角坐标系中的方程为  $y = ax^2$  ( $a$  为参数) 的抛物线同属一双切点圆锥曲线束, 确定它的两对重合的点为坐标原点以及  $y$  轴上的无穷远点; 再如, 一族同心圆同属一双切点圆锥曲线束, 确定它的两对重合点是两个圆环点.

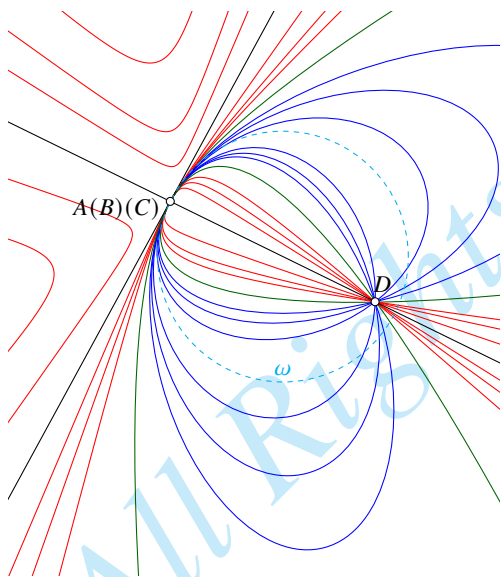


Figure 6.27

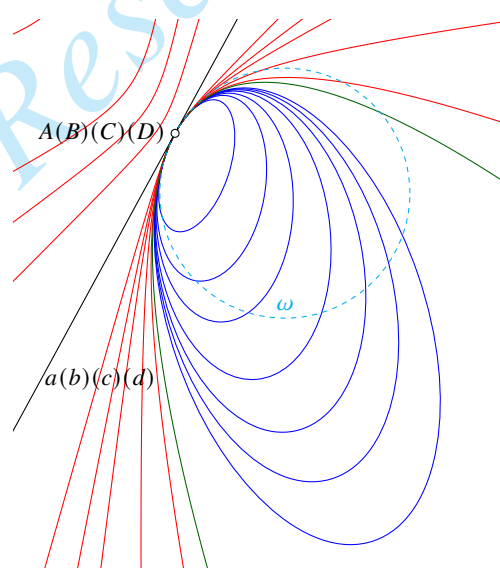


Figure 6.28

④ 若点  $A, B, C, D$  中有三者相互重合, 且与另一者不同, 不妨设  $A = B = C \neq D$ , 此时称  $\mathcal{P}$  为密切圆锥曲线束<sup>(25)</sup>.

此时,  $\mathcal{P}$  中的曲线公切于点  $A(B)(C)$ , 且这是一个三重切点. 我们也需要指定点  $B, C$  趋近于  $A$  点的方向, 但是不能再按  $\mathcal{P}$  中曲线在  $A$  处的公切线的方向趋近, 因为不然在取极限的过程中,  $A, B, C$  保持共线; 而对于沿  $\mathcal{P}$  中的  $\alpha_0$  趋近于  $A$  的情况, 共线是不满足的.

但是, 由于三点确定一个圆, 所以过点  $A, B, C$  存在一个圆, 令  $B, C$  沿着  $\mathcal{P}$  中的  $\alpha_0$  趋于  $A$  时,  $\odot(ABC)$  趋于一定圆  $\omega$ , 称为  $\alpha_0$  在点  $A$  处的曲率圆. 那么, 对于  $\mathcal{P}$  中的其他曲线, 它们在  $A$  点处有相同的曲率圆  $\omega$ . 那么, 我们可以简化地指定圆  $\omega$ , 让  $B, C$  沿着  $\omega$  趋于点  $A$ . 因此, 此时的  $\mathcal{P}$  中的所有曲线在  $A$  处不仅有相同的公切线  $a$ , 同时还均与  $\omega$  密切.

(25) 若两曲线的切点是三重的, 则说这两条曲线是密切 (osculating) 的.

考虑情形①下  $B, C \rightarrow A$  的极限可知, 此时  $\mathcal{S}$  中只有一个退化圆锥曲线:  $a \cup AD$ .

图6.27给出了一种这样的圆锥曲线束.

⑤ 若点  $A, B, C, D$  均重合, 此时称  $\mathcal{S}$  为超密切圆锥曲线束<sup>(26)</sup>.

类似于④中的讨论, 此时依然存在直线  $a$  与圆  $\omega$ , 使得  $\mathcal{S}$  中的所有曲线均与  $a$  相切于  $A$  且与  $\omega$  密切于  $A(B)(C)(D)$ . 但是, 此时不能再如④一样简单地使用  $\omega$  来指定  $B, C, D$  趋于  $A$  的方向, 因为在用  $\mathcal{S}$  中的某一曲线  $\alpha_0$  作为趋近方向的参照时, 点  $A, B, C, D$  共圆; 对这种情况, 只能用  $\mathcal{S}$  中的某一曲线  $\alpha_0$  来规定趋近方向.

此时  $\mathcal{S}$  中只有一个退化圆锥曲线:  $a \cup a$ , 这是一对重合直线.

图6.28所示的情形便是这样的一个例子; 直角坐标系中所有形如  $y = x^2 + a$  ( $a$  是参数) 的抛物线同属于一个超密切圆锥曲线束, 它们公切于  $y$  轴上的无穷远点.

②③④⑤ 中的圆锥曲线束统称退化圆锥曲线束.

对偶地<sup>(27)</sup>, 我们还有如下定义:

**Definition 6.6.2.** 给定四直线  $a, b, c, d$  (允许重合), 则称所有与  $a, b, c, d$  相切的圆锥曲线形成一个对偶圆锥曲线束, 下记之为  $\text{pen}(a, b, c, d)$ , 或  $\text{pen}(abcd)$ .

**Remark.** 对偶圆锥曲线束并不是一种我们之前定义的曲线束, 因为其中的圆锥曲线没有公共点.

实际上, 作为同时与给定直线相切的曲线, 严格来讲其中的曲线是二级曲线, 因此, 为与圆锥曲线束区分, 也可称圆锥曲线束为二阶曲线束, 而对偶圆锥曲线束为二级曲线束. 对于其中的非退化曲线, 它们均是圆锥曲线; 而对于其中的退化曲线, 圆锥曲线束中有退化为两直线的曲线, 对偶地, 对偶圆锥曲线束中相应的有退化为两点的曲线, 这是一种退化二级曲线.

不过, 除非探究其中的退化部分, 圆锥曲线束与对偶圆锥曲线束中的曲线也均是通常意义下的圆锥曲线, 因此有时也会将两者统称为圆锥曲线束, 根据上下文容易区分“圆锥曲线束”一词的含义.

考虑对偶圆锥曲线束  $\mathcal{Q} = \text{pen}(abcd)$ , 对于  $a, b, c, d$  中有重合的情形, 与之前类似地, 用如下方式让一者趋近于另一者: 取出  $\mathcal{Q}$  中的某一非退化曲线  $\alpha_0$ , 不妨设  $a, b$  重合, 则  $\alpha_0$  与  $a, c, d$  相切, 固定  $a, c, d$ , 令  $\alpha$  的切线  $b'$  趋于  $b$ , 则  $\lim_{b' \rightarrow b} \text{pen}(ab'cd) = \text{pen}(abcd)$ , 此种情况下,  $\mathcal{Q}$  中的曲线有公共点, 即  $a(b)$  与其中所有曲线的切点.

我们也可以对对偶圆锥曲线束分类讨论, 它们很多性质直接根据圆锥曲线束的性质作对偶即得, 我们不再作详细的说明:

(26) 若两曲线的切点是四重的, 则说这两条曲线是超密切 (hyperosculating) 的.

(27) 我们先提醒读者一下,  $\mathbb{CP}^2$  两个圆锥曲线有四个 [可能重合] 的交点, 对偶地, 其中的两个圆锥曲线也有四条 [可能] 重合的切线.

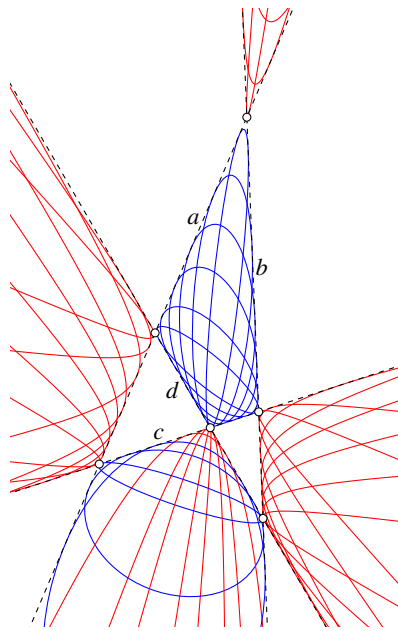


Figure 6.29

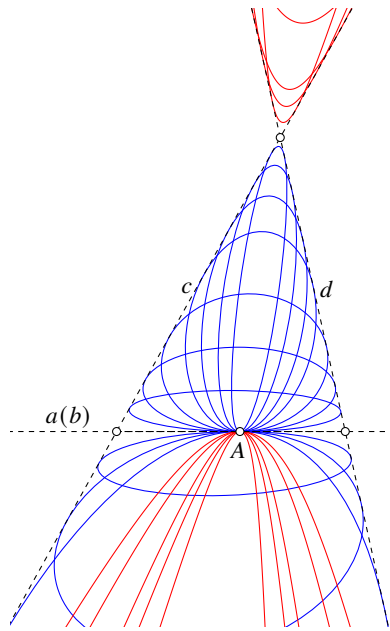


Figure 6.30

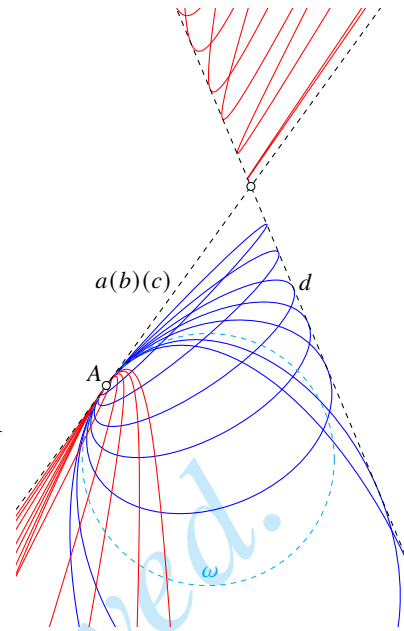


Figure 6.31

① 若  $a, b, c, d$  互不重合, 则称  $\mathcal{Q}$  为一个非退化对偶圆锥曲线束: 其中含有退化二级曲线  $(a \cap b) \cup (c \cap d), (a \cap c) \cup (b \cap d), (a \cap d) \cup (b \cap c)$ . 图6.29给出了这样的一个例子.

② 若  $a, b, c, d$  中有 [且仅有] 两者重合, 不妨设为  $a, b$ , 则称  $\mathcal{Q}$  为一个单切线对偶圆锥曲线束. 此时可简化地指定  $a$  上一点  $A$ , 让  $b \rightarrow a$  时始终保持过点  $A$  来得到单切线对偶圆锥曲线束; 此时  $\mathcal{Q}$  中所有曲线均过点  $A$ , 且  $A$  是它们的一个公切点 (二重).

这样的对偶圆锥曲线束含有退化二级曲线  $X \cup (c \cap d), (a \cap c) \cup (a \cap d)$ . 图6.30给出了一个例子.

③ 若  $a, b, c, d$  中有两对重合点, 不妨设  $a = b \neq c = d$ , 则称  $\mathcal{Q}$  为一个双切线对偶圆锥曲线束 (double-tangent dual pencil of conics). 此时可简化地指定  $a$  上一点  $A$  与  $c$  上一点  $C$ , 让  $b \rightarrow a$  时始终过点  $A$ ,  $d \rightarrow c$  时始终过点  $C$ , 这样取极限便能得到双切线对偶圆锥曲线束; 此时  $\mathcal{Q}$  中所有曲线均过点  $A, C$ , 且  $A, C$  分别是它们的两个公切点 (二重).

因此, 双切线对偶圆锥曲线束与双切点圆锥曲线束几乎是一样的 (故亦可参看图6.25), 除了里面的退化部分, 对于双切线对偶圆锥曲线束, 其中的退化部分是  $A \cup C$  和  $(a \cap c) \cup (a \cap d)$  (两个重合点).

④ 若  $a, b, c, d$  中有三个点重合, 但与第四个点不同, 不妨设  $a = b = c \neq d$ , 则称  $\mathcal{Q}$  为一个密切对偶圆锥曲线束. 类似于 ② 中对重合切线的交点的讨论可知, 此时, 在直线  $a(b)(c)$  上存在一个点  $A$ ,  $\mathcal{Q}$  中的所有曲线均过点  $A$ , 且  $A$  是它们的一个公切点 (三重). 因此, 在此点处,  $\mathcal{Q}$  中曲线有类似于密切圆锥曲线束中曲线在其密切点处的性质: 存在一个过  $A$  的圆  $\omega$ , 使得  $\mathcal{Q}$  中的曲线均与  $\omega$  密切于点  $A$ .

那么, 对于  $b, c$  如何趋于  $a$  的问题, 可简化地指定出圆  $\omega$ , 使得  $b, c$  在趋于  $a$  时始终保持与  $\omega$  相切即可. 这样的对偶圆锥曲线束中含有一个退化二级曲线  $A \cup (a \cap d)$ , 图6.31给出了这样的一个例子.

⑤ 若  $a, b, c, d$  均重合, 则称  $\mathcal{Q}$  为一个超密切对偶圆锥曲线束. 类似于 ④ 的讨论, 在  $a(b)(c)(d)$  上存在一点  $A$ , 使得  $\mathcal{Q}$  中的所有曲线均过点  $A$ , 且  $A$  是它们的一个公切点 (四重); 且存在过  $A$  点的圆  $\omega$ , 使得  $\mathcal{Q}$  中的曲线均与  $\omega$  密切于  $A$ .

此时没有简化地指定  $b, c, d$  趋向于  $a$  的方法, 只能选取  $\mathcal{Q}$  中的某一曲线  $\alpha_0$ , 让  $b, c, d$  趋于  $a$  时保持与  $\alpha_0$  相切.

类似于双切线对偶圆锥曲线束的性质, 超密切对偶圆锥曲线束与超密切圆锥曲线束几乎相同, 除了其中的退化部分 (故亦可参看图6.26): 超密切对偶圆锥曲线束中的退化部分是一个退化二级曲线  $A \cup A$  (两个重合点).



②③④⑤ 中的对偶圆锥曲线束统称退化对偶圆锥曲线束.

### 练习

**Problem 6.56.** 一密切对偶圆锥曲线束中是否可能有两个不同的圆? 请说明理由. 一超密切对偶圆锥曲线束呢?

**Problem 6.57.** 证明:

- (1) 一族同心圆同属一个双切点圆锥曲线束;
- (2) 直角坐标系中的所有抛物线  $y=ax^2$  ( $a$  为参数) 同属一双切点圆锥曲线束;
- (3) 直角坐标系中的所有抛物线  $y=x^2+a$  ( $a$  为参数) 同属一超密切圆锥曲线束;
- (4) 一族有一个共同的焦点与相应的准线的圆锥曲线同属一双切点圆锥曲线束;
- (5) 一族有两个相同焦点的圆锥曲线同属一对偶圆锥曲线束.

**Problem 6.58.** 在直角坐标系中, 求下列曲线束中的圆锥曲线的方程:

- (1)  $A(0,0)$ ,  $D(0,1)$ ,  $B=C=A$ , 且  $B, C$  沿着  $\odot(D, AD)$  趋近于  $A$ , 求  $\text{pen}(ABCD)$ ;
- (2)  $a: y=0$ ,  $c: y=1+x$ ,  $d: y=1-x$ ,  $b=a$ , 且  $b$  趋于  $A$  时保持过坐标原点, 求  $\text{pen}(abcd)$ ;
- (3)  $a: y=0$ ,  $d: x=0$ ,  $b=c=a$ , 且  $b, c$  沿着圆  $x^2+(y-1)^2=1$  趋于  $a$ , 求  $\text{pen}(abcd)$ .

## 6.6.2 圆锥曲线束的基本性质

本节我们讨论圆锥曲线束的性质. 首先我们引入如下的概念:

**Definition 6.6.3.** (如图6.32) 对于四边形  $ABCD$ <sup>(28)</sup>, 设对角线  $AC, BD$  的中点分别为  $M, N$ , 则称直线  $MN$  为四边形  $ABCD$  的 Gauß 线 (Gauss line).

利用 Gauß 线, 我们可以给出对偶圆锥曲线束的一个性质:

**Theorem 6.6.4.** 若直线  $a, b, c, d$  围成的四边形不是平行四边形, 则对偶圆锥曲线束  $\text{pen}(abcd)$  中的所有圆锥曲线的中心的轨迹是直线  $a, b, c, d$  围成的四边形的 Gauß 线.

为此, 我们需要关于 Gauß 线的如下引理:

**Lemma 6.6.5** (Léon Anne). 设  $l$  是四边形  $ABCD$  的 Gauß 线, 则对于平面内一点  $P$ ,  $P \in l \Leftrightarrow [\triangle PAB] + [\triangle PCD] = [\triangle PBC] + [\triangle PDA] = \frac{S_{ABCD}}{2}$ .

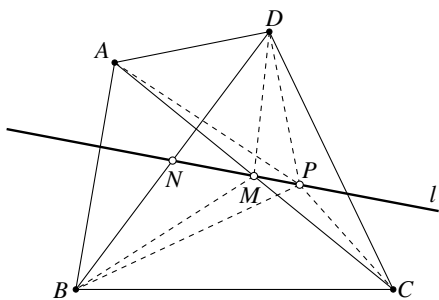


Figure 6.32

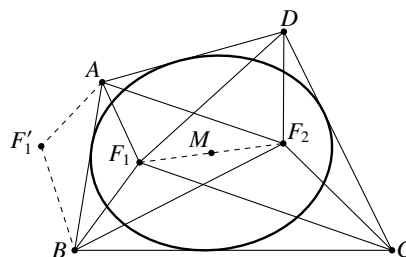


Figure 6.33

(28) 显然, 只有对于非平行四边形, 才能良好地定义 Gauß 线.

*proof.* 如图6.32, 设  $AC, BD$  的中点分别为  $M, N$ , 则  $l=M, N$ . 由于  $[\triangle PAB] + [\triangle PCD] + [\triangle PBC] + [\triangle PDA] = S_{\triangle ABCD}$ , 则只要证  $P \in l \Leftrightarrow [\triangle PBC] + [\triangle PDA] = \frac{S_{\triangle ABCD}}{2}$ .

注意对平面内任意任意一点  $P$ , 由

$$\begin{aligned} [\triangle PBC] + [\triangle PDA] &= [\triangle MBC] + [\triangle MDA] + [\triangle MPC] + [\triangle DMP] - [\triangle BMP] - [\triangle MPA] \\ &= \frac{S_{\triangle ABC}}{2} + \frac{S_{\triangle ADC}}{2} + ([\triangle MPC] - [\triangle MPA]) + ([\triangle DMP] - [\triangle BMP]) \\ &= \frac{S_{\triangle ABCD}}{2} + 0 + ([\triangle DMP] - [\triangle BMP]) \end{aligned}$$

知只要证明  $P \in l \Leftrightarrow [\triangle DMP] = [\triangle BMP]$ , 而  $M$  为  $BD$  中点, 则由燕尾定理知  $[\triangle DMP] = [\triangle BMP] \Leftrightarrow N, M, P$  共线, 即证.  $\square$

回到定理的证明.

*back to the proof of (6.6.4).* 考虑有心圆锥曲线的情形, 抛物线的情形可以通过取极限得到. 设四边形的内切圆锥曲线的焦点为  $F_1, F_2$ , 中心  $M$  即为  $F_1 F_2$  的中点. 考虑图6.33的情形, 其余情形类似.

作  $F'_1$  关于直线  $AB$  的对称点为  $F'_1$ , 则

$$[\triangle F_1 AB] + [\triangle F_2 AB] = S_{F'_1 A F_2 B} = \frac{1}{2} (AF'_1 \cdot AF_2 \sin \angle F'_1 A F_2 + BF'_1 \cdot BF_2 \sin \angle F'_1 B F_2).$$

由(4.4.20)知  $F_1, F_2$  关于四边形  $ABCD$  等角共轭, 故

$$\angle F'_1 A F_2 = \angle B A F_2 + \angle B A F'_1 = \angle F_1 A B + \angle F_2 A B = \angle B A D,$$

同理  $\angle F'_1 B F_2 = \angle A B C$ , 因此

$$[\triangle F_1 AB] + [\triangle F_2 AB] = \frac{1}{2} (AF_1 \cdot AF_2 \sin \angle B A D + BF_1 \cdot BF_2 \sin \angle A B C) = \sum_{X=A, B} X F_1 \cdot X F_2 \sin \angle X.$$

类似地可求出  $[\triangle F_1 CD] + [\triangle F_2 CD]$  的表达式, 从而

$$\frac{1}{2} \sum_{X=A, B, C, D} X F_1 \cdot X F_2 \sin \angle X = [\triangle F_1 AB] + [\triangle F_1 CD] + [\triangle F_2 AB] + [\triangle F_2 CD] \stackrel{[0.7]}{=} 2([\triangle BMA] + [\triangle CMD]).$$

同理可证, 上式左边也等于  $2([\triangle BMC] + [\triangle AMD])$ , 则  $[\triangle BMA] + [\triangle CMD] = [\triangle BMC] + [\triangle AMD]$ , 由 Léon Anne 定理即证.  $\square$

**Corollary 6.6.6.** 给定异于完全四线形  $\{a, b, c, d\}$  的对边三线形的三边的直线  $l$ , 则  $\forall \alpha \in \text{pen}(abcd)$ ,  $p_\alpha^{-1}(l)$  在一定直线上.

*proof.* 用射影变换将直线  $l$  变为  $l_\infty$ , 由  $l$  不与对边三线形的边重合, 易知射影变换后四直线  $a, b, c, d$  围成的四边形必不是平行四边形, 而  $l_\infty$  关于任意圆锥曲线的极点就是该圆锥曲线的中心, 由(6.6.4)即证.  $\square$

**Corollary 6.6.7.** 给定完全四点形  $ABCD$ , 对于平面内异于其对顶三点形的三个顶点的一点  $P$ ,  $\forall \alpha \in \text{pen}(ABCD)$ ,  $p_\alpha(P)$  过定点.

*proof.* 这是(6.6.6)的对偶.  $\square$

*another proof.* 将  $A, B, C, D$  中的两点变为两个圆环点, 则变为(4.6.12).  $\square$

下面的 Hesse 定理是(6.6.7)的一个应用.

**Theorem 6.6.8 (Hesse).** 给定圆锥曲线, 若一个完全四点形的三组对顶点中有两组共轭, 则剩下一组也共轭.



*proof.* 对于圆锥曲线  $\alpha$ , 若点  $X, X'$  共轭, 点  $Y, Y'$  也共轭, 设  $Z = XY \cap X'Y'$ ,  $Z' = X'Y \cap XY'$ , 下证  $Z, Z'$  也共轭.

设  $XX' \cap \alpha = A, B$ ,  $YY' \cap \alpha = C, D$ , 记  $A, B, C, D$  确定圆锥曲线束  $\mathcal{W}$ . 由(6.1.11)知,  $(A, B; X, X') = (C, D; Y, Y') = -1$ , 则对于任意  $\mathcal{W}$  中的圆锥曲线,  $X, X'$  和  $Y, Y'$  也共轭.

易知可取  $\mathcal{W}$  中的某一圆锥曲线  $\beta$ , 使得  $p_\beta(X) = X'Y'$ , 由配极原则知  $X \in p_\beta(Y')$  的极线过  $X$ , 而由  $Y, Y'$  的共轭知  $Y \in p_\beta(Y')$ , 从而  $p_\beta(Y') = XY$ , 则由配极原则知  $Z$  的极线过  $X, Y'$ , 故  $p_\beta(Z) = XY'$ . 同理取另一  $\gamma \in \mathcal{W}$ , 可使  $p_\gamma(Z) = X'Y$ .

由(6.6.7)知存在定点  $Z''$  使得  $Z, Z'$  关于任意  $\mathcal{W}$  中曲线共轭, 而前述讨论表明  $Z''$  只能为  $X'Y \cap XY'$ , 即  $Z'' = Z'$ . 由于  $\alpha \in \mathcal{W}$ , 故  $Z, Z'$  关于  $\alpha$  共轭.  $\square$

之前我们考虑了对偶圆锥曲线束中曲线中心的轨迹, 下面考虑圆锥曲线束中曲线中心的轨迹:

**Theorem 6.6.9.** 给定完全四点形  $ABCD$ , 则所有  $\text{pen}(ABCD)$  中圆锥曲线的中心的轨迹是一条过完全四点形  $ABCD$  的六条边的中点以及四点形的三个对边点的圆锥曲线, 称为完全四点形  $ABCD$  的九点二次/圆锥曲线 (nine-point conic).

*proof.* 注意, 对于  $AB, BC, CD, DA$  的中点  $K, L, M, N$ , 容易知道它们均可以作为  $ABCD$  的外接圆锥曲线的中心<sup>(29)</sup>.

设  $\alpha \in \text{pen}(ABCD)$  且  $O$  为  $\alpha$  的中心, 考虑  $OK, OL, OM, ON$  对  $\alpha$  的极点  $K', L', M', N'$ , 则由(6.1.6),  $(OK, OL; OM, ON) = (K'L', M'N')$ . 注意  $OK$  为直径, 其极点应为其共轭方向上的无穷远点, 而  $K$  为  $AB$  的中点, 由(6.4.7)可知  $K = \infty_{AB}$ .

对  $L', M', N'$  作类似分析可知,  $(OK, OL, OM, ON)$  等于直线  $AB, BC, CD, DA$  上的无穷远点的交比, 与  $\alpha$  的选取无关, 由(6.2.11),  $O$  点的轨迹是一条圆锥曲线  $\beta$ .

类似于  $K, L, M, N \in \beta$  的讨论, 可知完全四点形  $ABCD$  的六边中点均在  $\beta$  上; 同时, 在极限的意义下, 易知由两直线构成的退化圆锥曲线的中心就是这两直线的交点, 因此, 考察退化二次曲线  $AB \cup CD, AC \cup BD, AD \cup BC$ , 容易知道  $\beta$  过完全四点形的三个对边点.

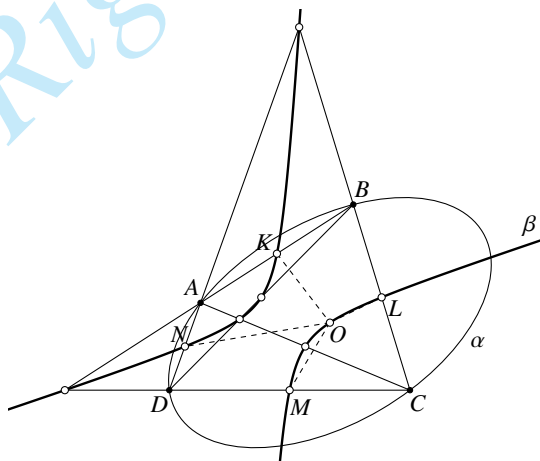


Figure 6.34

$\square$

**Corollary 6.6.10.** 给定完全四点形  $ABCD$  与直线  $l$ ,  $l$  关于  $\text{pen}(ABCD)$  中的圆锥曲线的极点形成了一条圆锥曲线, 且该圆锥曲线过完全四点形  $ABCD$  的三个对边点.

(29) 例如, 利用对称性可知,  $A, B, C, D$  以及点  $C, D$  关于点  $K$  的对称点共圆锥曲线.

*proof.* 通过射影变换可将  $l$  变换为  $l_\infty$ , 则其极点就是圆锥曲线的中心, 由(6.6.9)即证.  $\square$

**Corollary 6.6.11.** 给定完全四线形  $\{a, b, c, d\}$  与一点  $P$ ,  $P$  关于  $\text{pen}(abcd)$  中的圆锥曲线的极线包络一条圆锥曲线, 且该圆锥曲线与完全四线形  $\{a, b, c, d\}$  的三条对角线相切.

*proof.* 这是(6.6.10)的对偶.  $\square$

### 练习

**Problem 6.59.** 对于给定凸四边形  $ABCD$ , 在其内部存在一点  $T$ , 满足  $\text{dist}(T, AB) = \text{dist}(T, CD)$  且  $\text{dist}(T, BC) = \text{dist}(T, AD)$ . 证明: 点  $T$  在  $ABCD$  的 Gauß 线上, 当且仅当  $ABCD$  内接于一个圆, 或外切于一个圆, 或为一个梯形.

**Problem 6.60.** 给定  $\angle POQ$  及其内的两点  $A, B$ . 射线  $OP, OQ$  上分别有点  $X, Y$ , 使得  $\angle AXB, \angle AYB$  的外角分别被  $OP, OQ$  平分. 记  $AB, XY$  的中点分别为点  $C, Z$ . 证明:

- (1) 若  $\angle O = \text{Rt}\angle$ , 则点  $C, Z, O$  在同一直线上.
- (2) 若  $\angle O \neq \text{Rt}\angle$ , 则  $O \in CZ \Leftrightarrow$  折线  $AXB$  与  $AYB$  长度相同.

**Problem 6.61.** 证明: 完全四点形  $ABCD$  的中心就是四边形  $ABCD$  的重心.

**Problem 6.62.** 证明: 一个完全四点形的九点圆锥曲线为一条等轴双曲线, 当且仅当该四边形内接于一个圆.

**Problem 6.63.** 证明: 给定一三角形, 若某一完全四点形中的三组对顶点中有两组等角 (等截) 共轭, 则其余一组也等角 (等截) 共轭. *Hint.* 尝试利用曲线束给出等角共轭点与等截共轭点.

**Problem 6.64.** 给定圆锥曲线束  $\mathcal{S}$ , 点  $P$  是平面内一动点, 直线  $l$  是平面内一动直线. 点  $P$  关于  $\mathcal{S}$  中曲线的极线形成了顶点为  $Q$  的线束, 直线  $l$  关于  $\mathcal{S}$  中曲线的极点形成了圆锥曲线  $\gamma$ . 在  $\mathcal{S}$  中取出给定的四圆锥曲线  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ .

- (1) 证明:  $Q$  上的线束  $p_{\alpha_1}(P), p_{\alpha_2}(P), p_{\alpha_3}(P), p_{\alpha_4}(P)$  的交比为与  $P$  无关的定值  $k_1$ .
- (2) 证明:  $\gamma$  上的二次点列  $p_{\alpha_1}^{-1}(l), p_{\alpha_2}^{-1}(l), p_{\alpha_3}^{-1}(l), p_{\alpha_4}^{-1}(l)$  的交比为与  $l$  无关的定值  $k_2$ .
- (3) 证明:  $k_1 = k_2$ .
- (4) 写出前述命题的对偶命题.

### 6.6.3 Desargues 对合定理

通过 Desargues 对合定理, 圆锥曲线束与对合之间也有紧密的联系.

**Theorem 6.6.12** (Desargues 对合定理). 给定四点  $A, B, C, D$  与直线  $l$ , 则圆锥曲线束  $\mathcal{S} = \text{pen}(ABCD)$  完全确定了  $l$  上的一个对合: 对于  $\mathcal{S}$  中的一条圆锥曲线, 它与  $l$  的两个交点 (可以重合) 是这一对合的一组对应点.



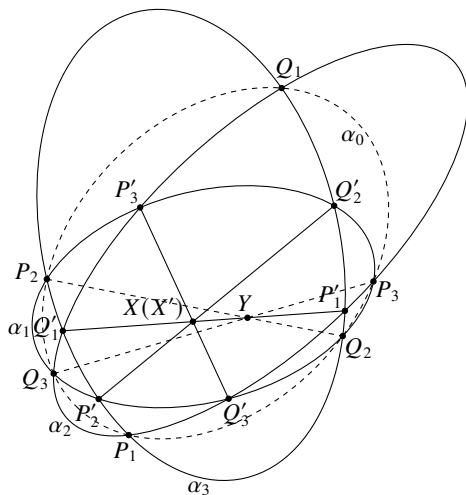


Figure 6.36

*proof.* 设  $P'_2Q'_2 \cap P'_1Q'_1 = X, P'_3Q'_3 \cap P'_1Q'_1 = X'$ , 只要证明  $X = X'$ .

对  $\alpha_0, \alpha_2, \alpha_3$  应用三锥线定理可知,  $P'_1Q'_1, P_2, Q_2, P_3Q_3$  交于一点  $Y$ .

那么, 考虑  $\text{pen}(P_2Q_2P'_2Q'_2)$  中的圆锥曲线  $\alpha_1, \alpha_3, P'_2Q'_2 \cup P_2Q_2$  以及直线  $P'_1Q'_1$ , 由 Desargues 对合定理可知点  $M, N, Q'_1, P'_1$  以及  $X, Y$  同属一个对合, 其中  $M, N = \alpha_1 \cap P'_1Q'_1$ .

类似地, 考虑  $\text{pen}(P_3Q_3P'_3Q'_3)$  以及直线  $P'_1Q'_1$ , 可知点  $M, N, Q'_1, P'_1$  以及  $X', Y$  同属一个对合.

由于一组对合由两组对应点决定, 而上述两种对合已经有两组相同的对应点, 故必有  $X' = X$ .  $\square$

顺便一提, 四锥线定理也可以有逆命题, 其证明留给读者:

**Proposition 6.6.16** (四锥线逆定理). 若四组直线  $P_1Q_1, P_2Q_2, P'_3Q'_3, P_1Q_1, P_3Q_3, P'_2Q'_2; P_2Q_2, P_3Q_3, P'_1Q'_1, P'_1Q'_1, P'_2Q'_2, P'_3Q'_3$  分别共点于点  $X_1, X_2, X_3, X_4$ , 其中, 上述这些点分别为三条圆锥曲线  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , 两两的交点:  $\alpha_2 \cap \alpha_3 = P_1, Q_1, P'_1, Q'_1, \alpha_3 \cap \alpha_1 = P_2, Q_2, P'_2, Q'_2, \alpha_1 \cap \alpha_2 = P_3, Q_3, P'_3, Q'_3$ , 则  $P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3$  共圆锥曲线.

第二个例子便是著名的 Poncelet 大定理:

**Theorem 6.6.17** (Poncelet 定理/Poncelet 闭合定理 (Poncelet's Closure Theorem)). 圆锥曲线束  $\mathcal{F}$  中有圆锥曲线  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ . 从  $\alpha_0$  上一点  $A_0$  作  $\alpha_1$  的切线与  $\alpha_0$  的另一个交点为  $A_1$ , 过  $A_1$  作  $\alpha_2$  的一条切线与  $\alpha_0$  的另一个交点为  $A_2 \dots$  若存在一点  $A_n$  与  $A_0$  重合, 则对  $\alpha_0$  上任意一点  $B$  作类似的构造<sup>(30)</sup>, 点  $B_n$  也与  $B_0$  重合.

为此, 我们需要先证明如下的引理:

**Lemma 6.6.18.** (如图6.37) 设圆锥曲线  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$  同属圆锥曲线束  $\mathcal{P}$ ,  $\alpha_0$  上有四点  $A, B, C, D$ , 则:

(1) 若直线  $AB$  切  $\alpha_1$  于点  $K$ , 直线  $AC$  切圆锥曲线  $\alpha_2$  于点  $L$ , 则存在  $D \in \alpha_0$ , 使得:

i.  $\alpha_1$  切  $CD$  于点  $(KL \cap CD)$  且  $\alpha_2$  切  $BD$  于点  $(KL \cap BD)$ ;

ii. 存在  $\alpha_j \in \mathcal{P}$ , 使得  $\alpha_j$  切  $AD$  于点  $(AD \cap KL)$  且切  $BC$  于点  $(BC \cap KL)$ .

(2) 若  $\alpha_1$  切直线  $AB$  于点  $K$  且切直线  $CD$  于点  $M$ , 则存在  $\alpha_j \in \mathcal{P}$ , 使得  $\alpha_j$  切  $AC$  于点  $(KM \cap AC)$

且切  $BD$  于点  $(BD \cap KM)$ .

*proof.* (1) 令  $\alpha_1 \cap KL = K, M$ , 令圆锥曲线束  $\mathcal{F} = \text{pen}(\alpha_1, CM \cup AB)$ .

(30) 与之前在4.7中介绍的圆束情形的 Poncelet 大定理类似, 我们要求指定每一步中作切线的方向.

利用 Desargues 对合定理,  $\mathcal{P}$  在  $AC$  上确定了一个对合,  $\alpha_1$  与  $AC$  的两个交点 (可能为虚) 以及  $\alpha_0$  与  $AC$  的两个交点  $A, C$  分别为对合的两组对应点;  $\mathcal{F}$  也在  $AC$  上确定了一个对合,  $\alpha_1$  与  $AC$  的两个交点以及  $CM \cup AB$  与  $AC$  的两个交点  $A, C$  分别为对合的两组对应点. 由于两组对应点确定一个对合, 故  $\mathcal{F}, \mathcal{P}$  确定了直线  $AC$  上的同一个对合  $f$ .

注意  $\mathcal{P}$  中的  $\alpha_2$  切  $AC$  于  $L$ , 故  $L$  是  $f$  的一个自对应点, 那么也存在  $\mathcal{F}$  中的某一圆锥曲线  $\gamma$  与  $AC$  交于一个二重点. 但注意  $\alpha_1, (AB \cup CM)$  的四个交点中有三个为  $K, K, M$  ( $K$  为切点, 是二重交点), 且它们与  $AB$  公切于  $K$ , 故  $\gamma$  过点  $M$ , 且与  $AB$  有二重交点  $K$ . 那么, 点  $K, K, L, L, M$  确定了  $\gamma$ , 这只能是重合直线  $KL \cup KL$ .

那么,  $\gamma$  与  $CD$  的交点  $M$  也是二重交点, 因此  $\mathcal{F} = \text{pen}(KKMM)$  是一个双切点圆锥曲线束,  $\alpha_1$  与  $CM$  也切于点  $M$ .

设  $CM \cap \alpha_0 = C, D$ , 则对点  $B, C, D$  施以类似的证明, 容易得到  $\alpha_2$  切  $BD$  于  $BD$  和  $KL$  的交点  $N$ , 故 “i.” 成立.

接下来, 考虑  $AD$  与  $NL$  的交点  $J$ , 设  $\alpha_j$  过点  $J$ , 则由类似的讨论可知  $\alpha_j$  切  $AD$  于点  $J$ , 类似可证关于  $BC$  与  $\alpha_j$  相切的论断, 则 “ii.” 成立, 具体证明留给读者补充完整.

(2) 其证明与 (1) 类似, 留作习题. □

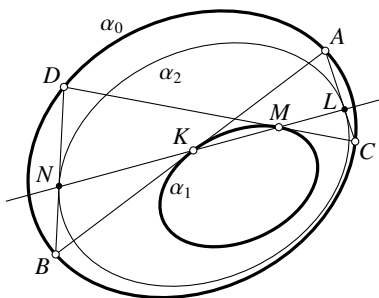


Figure 6.37

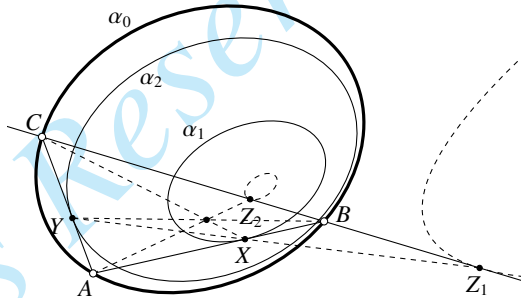


Figure 6.38

**Corollary 6.6.19.** 圆锥曲线束  $\mathcal{F}$  中有圆锥曲线  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ , 点  $A, B, C \in \alpha_0$ ,  $AB$  切  $\alpha_1$  于  $X$ ,  $AC$  切  $\alpha_2$  于点  $Y$ , 设点  $Z \in BC$ , 且满足存在  $\alpha_j \in \mathcal{F}$  使得  $\alpha_j$  与  $BC$  相切于  $Z$ , 则这样的点  $Z$  最多有两个: 其中之一者满足  $Z, X, Y$  共线, 另一种满足  $CX, BY, AZ$  共点.<sup>(31)</sup>

*proof.* 由(6.6.13)可知这样的  $Z$  最多记满足  $Z, X, Y$  共线的  $Z$  是  $Z_1$ , 由(6.6.18)易知  $Z_1$  满足条件; 记满足  $CX, BY, AZ$  的  $Z$  是  $Z_2$ , 下证存在  $\alpha_j$  与  $BC$  切于点  $Z_2$ .

对于完全四点形  $BXYC$ , 由(3.5.10)知  $(BC, Z_1 Z_2) = -1$ .  $\mathcal{F}$  在  $BC$  上确定了一组对合, 而  $B, C$  是一组对应点,  $Z_1$  是自对应点, 故设  $Z_2$  的对应点为  $Z'_2$ , 则  $-1 = (BC, Z_1 Z_2) = (CB, Z_1 Z'_2)$ .

但由(3.2.9)可知  $(CB, Z_1 Z_2) = (BC, Z_1 Z_2)^{-1} = -1$ , 故  $(CB, Z_1 Z'_2) = (CB, Z_1 Z_2)$ , 则必有  $Z'_2 = Z_2$ , 即  $Z_2$  是此对合的自对应点, 由 Desargues 定理即证. □

回到原命题的证明.

*back to the proof.* 使用数学归纳法, 先证明当  $n=3$  时的情况. 设  $A_0 A_1, A_1 A_2, A_2 A_0$  分别与  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  切于点  $X_1, X_2, X_3$ , 且显然  $X_1, X_2, X_3$  不在同一直线上. 对于  $\alpha_0$  上的任意一个点  $B_0$ , 设  $B_0 B_1$  切  $\alpha_1$  于  $Y_1$  交  $\alpha_0$  于  $B_1$  (所作切线的方向与  $A_0 A_1$  相同).

由(6.6.18)(2) 可知存在  $\alpha' \in \mathcal{F}$ , 使得  $\alpha_2$  切  $A_0 B_0, A_1 B_1$  分别于它们和直线  $X_1 Y_1$  的交点  $Z_0, Z_1$ ; 再由(6.6.18)(1) 知存在  $B_2 \in \alpha_0$ , 使得  $\alpha_2$  切  $B_1 B_2$  且  $\alpha'$  切  $B_2 A_2$ , 且两个切点分别为  $B_1 B_2, B_2 A_2$  与直线

(31) 这两种点  $Z$  可能重合, 此时只有一个满足条件的点  $Z$ , 因此我们说 “最多有两个”.

$Z_1X_2$  的交点  $Y_2, Z_2$ ; 再由(6.6.18)(2) 知存在  $\alpha'' \in \mathcal{F}$ , 使得  $\alpha''$  分别切  $A_2A_0, B_2B_0$  于它们和直线  $Z_2Z_0$  的交点  $K, Y_3$ .

考察点  $A_1, A_0, A_2$ , 对直线  $A_0A_2$  使用(6.6.19), 由于  $X_1, X_2, X_3$  不共线, 则若  $K$  是异于  $X_3$  的一点, 由于存在  $\alpha''$  切  $A_0A_2$  于  $K$ , 则  $X_1, X_2, K$  共线; 但对  $\triangle A_0A_1A_2, \triangle Z_0Z_1Z_2$  使用 Desargues 定理, 由于对应顶点的连线显然不交于一点, 故  $X_1, X_2, K$  不共线, 则必有  $X_3=K$ , 且  $\alpha''=\alpha_3$ .

我们已经证明  $n=3$  的情形. 假设当  $n=k-1$  时成立, 下证  $n=k$  时也成立. 类似于之前  $n=3$  时构造  $\alpha''$  的思路, 构造  $\beta \in \mathcal{F}$  且与  $A_0A_2, B_0B_2$  相切. 对于  $k-1$  边的  $A_0A_2 \cdots A_{n-1}$  而言, 其边依次与  $\beta, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$  相切, 由归纳假设知此时 Poncelet 定理成立. 从而我们完成了 Poncelet 定理的证明.  $\square$

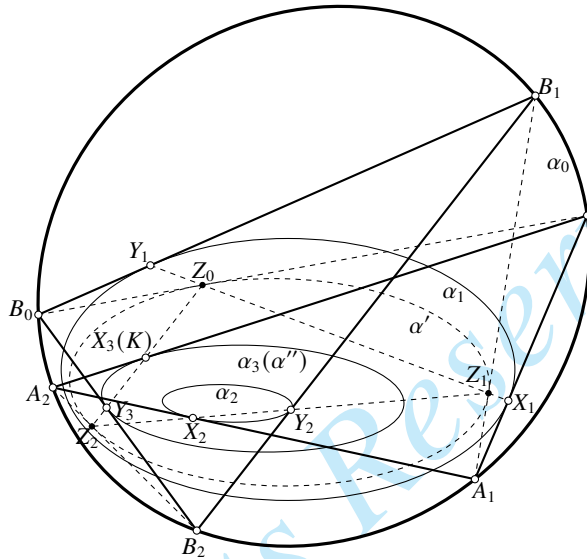


Figure 6.39

上面的引理与 Poncelet 大定理, 其实可以分别视为(4.7.4)与(4.7.3)在圆锥曲线下的情形, 因此通过射影变换将圆锥曲线束变为圆束来证明 (对生成圆锥曲线的几点中有多重点的情形, 考虑极限意义即可); 不过, 我们还是演示一下用 Desargues 对合定理的证法.

Poncelet 大定理告诉我们, 如果存在这样的多边形  $A_0 \cdots A_n$ , 则可以将它“旋转”而其边始终与对应的圆锥曲线相切. 这揭示了圆锥曲线的一种“不变量”, 暗示了圆锥曲线的一种群结构.

### 练习

**Problem 6.65.** 给定四点  $A, B, C, D$ , 以及不过这四个点的直线  $l$ , Desargues 对合定理给出了  $\text{pen}(ABCD)$  在直线  $l$  上确定的一个对合. 对于  $l$  上的一点  $P$ , 如何仅用直尺作出它在这一对合下的对应点?

**Problem 6.66.** 给定圆束  $\mathcal{W}$  与直线  $l$ , Desargues 对合定理给出了  $\mathcal{W}$  在  $l$  上确定的对合. 证明这一对合可以用反演变换刻画: 令  $Q$  为  $\mathcal{W}$  的根轴与  $l$  的交点, 该对合变换为一个以  $Q$  为中心的反演变换.

**Problem 6.67.** 证明四锥线逆定理, 并分别写出四锥线定理及其逆定理的对偶命题吗.

**Problem 6.68.** 三个两两相离的圆, 其两两的内公切线形成了一个六边形, 证明: 该六边形外切于一条圆锥曲线.

**Problem 6.69.** 设  $\triangle ABC, \triangle DEF$  均内接于圆锥曲线  $\Gamma$  且外切于圆锥曲线  $\gamma$ , 设  $EF, BC$  分别切  $\gamma$  于  $L, K$ ,  $AL, DK$  与  $\Gamma$  的另一交点分别为  $N, M$ , 证明:  $AM, EF, BC, DN$  交于一点.



**Problem 6.70.** 对于  $\triangle ABC$ , 设  $C, I_a$  的两外公切线分别交直线  $BC$  于点  $P, Q$ , 证明:  $\angle PAB = \angle CAQ$ .

**Problem 6.71.** 分别写出(6.6.18)(6.6.19)以及 Poncelet 大定理的对偶命题.

**Problem 6.72.** 给定圆锥曲线  $\alpha_0, \alpha_1$ , 点  $A$  为  $\alpha_0$  上的动点, 过  $A$  作  $\alpha_1$  的两切线, 与  $\alpha_0$  分别交于点  $B, C$ , 若直线  $BC$  过定点, 则  $\alpha_0, \alpha_1$  应满足怎样的条件?

**Problem 6.73.** 某动三角形  $\triangle ABC$  的  $A$ -伪外接圆与内切圆均为定圆, 求点  $A$  的轨迹.

**Problem 6.74.** 对于  $\triangle ABC$ , 设  $M \in C$ , 过点  $M$  分别作  $I$  的两条切线, 与直线  $BC$  分别交于点  $X_1, X_2$ ,  $\triangle ABC$  的  $A$ -伪内切圆切  $C$  于点  $T$ , 证明: 点  $X_1, X_2, M, T$  共圆.

**Problem 6.75 (Ivory).** \* 设椭圆  $\alpha_1, \alpha_2$  以及双曲线  $\beta_1, \beta_2$  的两个焦点均重合,  $\beta_1$  与  $\alpha_1, \alpha_2$  的一个交点分别为  $A, B$ ,  $\beta_2$  与  $\alpha_1, \alpha_2$  的一个交点分别为  $C, D$ , 证明:  $AD = BC$ .