Matematika 3

• mátrixok LU felbontása

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & \vdots \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \quad (u_{jk} = 0 \text{ ha } j > k)$$

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & \cdot & 1 & 0 \\ l_{n1} & \cdots & & 1 \end{pmatrix} \quad (l_{jk} = 0 \text{ ha } j < k \text{ és } l_{jk} = 1 \text{ ha } j = k)$$

pl:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 6 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix}$$ ↓ Gauss elimináció

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 6 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\underline{2}\,\mathrm{I} \\ -\underline{3}\,\mathrm{I} \end{matrix} \qquad \underline{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \underline{2} & 1 & 0 \\ \underline{3} & \underline{4} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\underline{4}\,\mathrm{II} \end{matrix}$$

$$\det A = \det(L \cdot U) = \det L \cdot \det U =$$

$$= \underbrace{\det L}_{1} \cdot \underbrace{\det U}_{\text{főátlók szorzata}} = 1 \cdot (2 \cdot 1 \cdot 10) = \underline{20}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \underline{U}$$

• Lineáris regressziós függvény

Pl,

a, $x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 2$
$f_1 = 2 \quad f_2 = 4 \quad f_3 = 16$

$$\begin{pmatrix} \sum 1 & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum f \\ \sum x \cdot f \end{pmatrix}$$

$y = a_0 + a_1 \cdot x$

	1	x	x^2	f	$x \cdot f$
	1	0	0	2	0
	1	1	1	4	4
	1	2	4	16	32
Σ	3	3	5	22	36

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

$$\left.\begin{aligned} 3a_0 + 3a_1 &= 22 \\ 3a_0 + 5a_1 &= 36 \end{aligned}\right\} \downarrow$$

$a_0 = \frac{1}{3}$

$a_1 = +7$

$y = \frac{1}{3} + 7x$

• Quadratikus regressziós függvény

a, $x_1 = -2 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 1 \quad x_5 = 2$
$f_1 = -1 \quad f_2 = 0 \quad f_3 = 1 \quad f_4 = 0 \quad f_5 = -1$

$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$

$$\begin{pmatrix} \sum 1 & \sum x & \sum x^2 \\ \sum x & \sum x^2 & \sum x^3 \\ \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum f \\ \sum xf \\ \sum x^2 f \end{pmatrix}$$

1	x	x^2	x^3	x^4	f	xf	x^2f
1	-2	4	-8	16	-1	2	-4
1	-1	1	-1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0
1	2	4	8	16	-1	-2	-4
5	0	10	0	34	-1	0	-8

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

$a_0 = \frac{23}{35}$ *

$a_1 = 0$

$a_2 = -\frac{3}{7}$

$y = \frac{23}{35} + 0x + \frac{3}{7}x^2$

• legkisebb négyzetes megoldás

a, $x+y=1$
$2x+2y=1$
$3x+4y=1$

$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{A}^T \cdot \underline{A}\,\underline{x} = \underline{A}^T \cdot \underline{b}$ (Gauss féle normálalak) $\Rightarrow$ ált. mo.

$\underline{A}^T \cdot \underline{A}$

	1 1 / 2 2 / 3 4
1 2 3	14 17
1 2 4	17 21

$\underline{A}^T \cdot \underline{b}$

	1 / 1 / 1
1 2 3	6
1 2 4	7

$\begin{pmatrix} 14 & 17 \\ 17 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow x = \dfrac{6-17y}{14} \rightarrow y = -\dfrac{4}{5}$
$x = \dfrac{7}{5}$

• Lagrange interpolációs polinom

a, $x_0 = -2 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 3$
$f_0 = 4 \quad f_1 = 0 \quad f_2 = -4 \quad f_3 = 8$

$L_3(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

x	f			
	$\Rightarrow a_0$	$\Rightarrow a_1$	$\Rightarrow a_2$	$\Rightarrow a_3$
-2	4			
		$\left(\frac{0-4}{0-2}\right) = -2$		
0	0		$-\frac{2}{3}$	
		-4		$\frac{4}{5}$
1	-4		$\frac{10}{3}$	
		6		
3	8			

$L_3(x) = 4 + (-2)(x--2) + \left(-\frac{2}{3}\right)(x--2)(x) + \frac{4}{5}(x--2)(x)(x-1)$

* Hermite interpretációs polinom

$x_0 = 0{,}8 \qquad x_1 = 1$

$f_0 = 2 \qquad f_1 = -1$

$f_0' = -1 \qquad f_1' = 1$

$$\left| \begin{aligned} & H_3(x) = A + B \cdot \frac{(x-x_0)}{h} + C \cdot \frac{(x-x_0)^2}{h^2} + D \cdot \frac{(x-x_0)^3}{h^3} \\ & h = x_1 - x_0 \end{aligned} \right) \qquad \left| \begin{aligned} & A = f_0 \\ & A+B+C+D = f_1 \\ & B = f_0' \cdot h \\ & B + 2C + 3D = f_1' \cdot h \end{aligned} \right)$$

$h = 0{,}2$

$$\left.\begin{aligned} & A = 2 \\ & A + B + C + D = -1 \\ & B = -1 \cdot 0{,}2 \\ & B + 2C + 3D = 1 \cdot 0{,}2 \end{aligned}\right\} \to \begin{aligned} & A = 2 \\ & B = -0{,}2 \\ & C = -8{,}8 \\ & D = 6 \end{aligned}$$

$$H_3(x) = 2 + (-0{,}2)\left(\frac{x-0{,}8}{0{,}2}\right) + (-8{,}8)\left(\frac{x-0{,}8}{0{,}2}\right)^2 + 6\left(\frac{x-0{,}8}{0{,}2}\right)^3$$

Közelítési érték: $f(0{,}9)$

$H_3(0{,}9) \approx f(0{,}9)$ Behelyettesítés és kiszámolás

Spline függvény

$f(x) = \ln(2x-1)$

$x_0 = 1 \quad x_1 = 1{,}5 \quad x_2 = 2$

$f_j = f(x_j)\ ; \quad f_0' = f'(x_0)\ ; \quad f_2' = f'(x_2)$

$x_0 = 1 \qquad x_1 = 1{,}5 \qquad x_2 = 2$

$f_0 = 0 \qquad f_1 = 0{,}6931 \qquad f_2 = 1{,}0986$

$f_0' = 2 \qquad f_1' = ? \qquad f_2' = \frac{2}{3}$

$\left(f' = \frac{1}{2x-1} \cdot 2 \right)$

$$\left(f_{k-1}' + 4 \cdot f_k' + f_{k+1}' = \frac{-3 \cdot f_{k-1} + 3 \cdot f_{k+1}}{h} \right)$$

$k = 1 \quad h = 0{,}5$

$$f_0' + 4 \cdot f_1' + f_2' = \frac{-3 \cdot f_0 + 3 \cdot f_2}{h}$$

$$\hookrightarrow \quad f_1' = \frac{\frac{3 \cdot \ln 3}{0{,}5} - 2 - \frac{2}{3}}{4} \Rightarrow 0{,}9813$$

1. lépés

$x_0 ; x_1$ Hermite-int.

$$\left.\begin{aligned} A &= 0 \\ A+B+C+D &= 0{,}6931 \\ B &= 2 \cdot 0{,}5 \\ B+2C+3D &= 0{,}9813 \cdot 0{,}5 \end{aligned}\right\}$$

$\downarrow$

$A = 0 \quad B = 1 \quad C = -0{,}4113 \quad D = 0{,}1044$

2. lépés

$x_1 ; x_2$ H.

$$\left.\begin{aligned} A &= 0{,}6931 \\ A+B+C+D &= 1{,}0986 \\ B &= 0{,}9813 \cdot 0{,}5 \\ B+2C+3D &= \tfrac{2}{3} \cdot 0{,}5 \end{aligned}\right\}$$

$\downarrow$

$A = 0{,}6931 \quad B = 0{,}4907 \quad C = -0{,}0981$

$D = 0{,}1298$

$$S_3(x) = \begin{cases} 0 + 1 \cdot \left(\frac{x-1}{0{,}5}\right) - 0{,}4113 \left(\frac{x-1}{0{,}5}\right)^2 + 0{,}1044 \left(\frac{x-1}{0{,}5}\right)^3 & \text{ha } x_0 \le x \le x_1 \\ 0{,}6931 + 0{,}4907 \left(\frac{x-1{,}5}{0{,}5}\right) - 0{,}0981 \left(\frac{x-1{,}5}{0{,}5}\right)^2 + 0{,}1298 \left(\frac{x-1{,}5}{0{,}5}\right)^3 & \text{ha } x_1 \le x \le x_2 \end{cases}$$

•

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx J(f) = \sum_j a_j \cdot f(x_j)$$

$$\int_0^1 f(x)dx \qquad J(f) = \frac{f(\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{3}{4})}{3}$$

Mo: $f(x) = x^k$

• $k = 0$

$$f(x) = x^0 = 1 \rightarrow \int_0^1 1\,dx = [x]_0^1 = 1 \Rightarrow J(f) = \frac{1+1+1}{3} = 1$$

$= \checkmark$

• $k = 1$

$$f(x) = x^1 = x \rightarrow \int_0^1 x\,dx = [x^2/2]_0^1 = \frac{1}{2} \Rightarrow J(f) = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{3} = \frac{1}{2}$$

$= \checkmark$

• $k = 2$

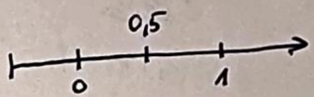
$$f(x) = x^2. \rightarrow \int_0^1 x^2\,dx = [x^3/3]_0^1 = \frac{1}{3} \Rightarrow J(f) = \frac{\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{9}{16}}{3} = \frac{14}{48}$$

$\neq$

Maximálisan elsőfokú polinom

Pl:

$$\int_0^1 \frac{1}{x-3}\,dx$$



a, érintő formula

$$\int_0^1 \frac{1}{x-3}\,dx \approx f\Big(\underbrace{\tfrac{0+1}{2}}_{\text{felező}}\Big) \cdot (1-0) = -\frac{2}{5} = -0{,}4$$

(0,5)

b, trapéz formula

$$\int_0^1 \frac{1}{x-3}\,dx \approx \frac{f(0) + f(1)}{2} = -0{,}4167$$

c, Simpson formula

$$\int_0^1 \frac{1}{x-3}\,dx = \frac{f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1)}{6} = -0{,}4056$$

Visszatevéses valószínűség

① Mi a valószínűsége, hogy

a, pontosan 1 hibás

b, legalább 4 hibás

120 db összesen

30 db hibás

8 db húzás

Mo: X: kihúzott hibás elemek száma (diszkrét változó)

a, $P(X)=1 = \frac{30 \cdot 90^7 \cdot \binom{8}{1}}{120^8} = \frac{2187}{8192} \Rightarrow 26,6968$

b, $P(X) \geq 4 = 1 - P(X) < 4 = 1 - \left[\frac{90^8 + 30 \cdot 90^7 \binom{8}{1} + 30^2 \cdot 90^6 \cdot \binom{8}{2}}{120^8} \right] =$

$= 0,1138$

② 10 tombola 1 húzás

100 Ft ha osztható 3-mal

0 Ft ha a maradék 2

-100 Ft ha a maradék 1

Határozzuk meg a nyeremény összegének

a, várható értékét

b, szórását

Mo: X: a nyeremény összege (diszkrét változó)

a, $E(X) = \sum_j x_j \cdot p_j = 100 \cdot \frac{3}{10} + 0 \cdot \frac{3}{10} + (-100) \frac{4}{10} = \underline{-10}$

b, $D(X) = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)} = \sqrt{7000 - (-10)^2} = 83,06$

$\left[E(X^2) = 100^2 \cdot \frac{3}{10} + 0^2 \cdot \frac{3}{10} + (-100)^2 \cdot \frac{4}{10} \right]$

Eloszlás függvény

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{81}{x^4} & \text{ha } x > 3 \\ 0 & \text{többi} \end{cases}$$

a, $P(x < 5) = F(5) = 1 - \frac{81}{5^4} = \underline{\frac{544}{625}}$

b, $P(x \geq 4) = 1 - P(x < 4) = 1 - F(4) = 1 - (1 - \frac{81}{4^3}) = \underline{\frac{81}{256}}$

c, $P(5 \leq x < 6) = F(6) - F(5) = \left(1 - \frac{81}{6^4}\right) - \left(1 - \frac{81}{5^4}\right) = 0{,}0671$

d, $P(1 \leq x < 4) = F(4) - F(1) = \left(1 - \frac{81}{4^4}\right) - 0 = \frac{175}{256}$

e, $P(x = 5) = 0$

Sűrűség függvény

$$f(x) = \begin{cases} \frac{324}{x^5} & \text{ha } x > 3 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

a, $P(x < 5) = \int_{-\infty}^{5} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{3} \overbrace{f(x)\,dx}^{0} + \int_{3}^{5} f(x)\,dx =$

$= \int_{3}^{5} \frac{324}{x^5}\,dx = \frac{544}{625}$

b, $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_{3}^{\infty} x \cdot \frac{324}{x^5}\,dx = \lim_{\alpha \to \infty} \int_{3}^{\alpha} \frac{324}{x^4}\,dx = \lim_{\alpha \to \infty} \left[324 \cdot \frac{x^{-3}}{-3}\right]_3^{\alpha} =$

$= 4$

c, $D(x) = \sqrt{E(x^2) - E^2(x)} = \sqrt{18 - (4^2)} = \boxed{2}$

$\left(E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx \ldots = 18 \right.$

Poisson eloszlás

① 1 óra alatt beérkező hívások száma Poisson eloszlást követ
0,92 a valószínűsége hogy 1 óra alatt érkezik hívás
Mi a valószínűsége, hogy
a, 30 perc alatt legalább 2 hívás
b, 10 perc alatt legalább 3 hívás

<u>Mo:</u> X: hívások száma (1 óra) (Poisson)

$$\lambda = ?$$

$$0{,}92 = P(X \geq 1)$$
$$= 1 - P(X < 1)$$
$$= 1 - P(X = 0)$$
$$= 1 - \frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} = 1 - e^{\lambda}$$

$$0{,}92 = 1 - e^{\lambda}$$

$$\underline{\lambda} = -\ln(0{,}08) = \underline{2{,}5257}$$

a, X: hívások száma (0,5 óra)

$$\lambda = \frac{2{,}5257}{2} = 1{,}2629$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)] =$$

$$\underline{= 1 - \left[\frac{1{,}2629^0}{0!} + \frac{1{,}2629^1}{1!}\right] \cdot e^{-1{,}2629}}$$

b, X: hívások száma (1/6 óra)

$$\lambda = \frac{2{,}5257}{6} = 0{,}4209$$

$$P(X \geq 3) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)] =$$

$$\underline{= 1 - \left[\frac{0{,}4209^0}{0!} + \frac{0{,}4209^1}{1!} + \frac{0{,}4209^2}{2!}\right] \cdot e^{-0{,}4209}}$$

Exp. eloszlás

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x} & x > 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

$$E(x) = \frac{1}{\lambda} = D(x)$$

$\downarrow$ Érték $\quad$ $\downarrow$ szórás

#①

Az X exp. eloszlású változó várható értéke 80
Mi a valószínűsége, hogy X értéke

a, 160 nál kisebb

b, 40 és 100 között van

c, 60 nál nagyobb

d, a szórás kétszeresénél kisebb

Mo: X: exp eloszlás

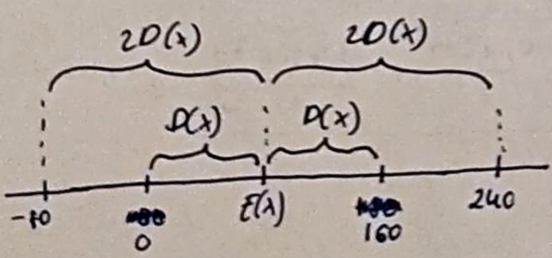
$$\lambda = \frac{1}{E(x)} = \frac{1}{80} \qquad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{80} \cdot x} & x > 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

a, $P(x < 160) = F(160) = 1 - e^{-\frac{1}{80} \cdot x} = 1 - e^{-\frac{1}{80} \cdot 160} = \underline{1 - e^{-2}}$

b, $P(40 < x < 100) = F(100) - F(40) = 1 - e^{-\frac{100}{80}} - (1 - e^{-\frac{1}{2}}) = \ldots$

c, $P(x > 60) = 1 - P(x \le 60) = 1 - F(60) = 1 - (1 - e^{-\frac{60}{80}}) =$

$= - \underline{e^{-\frac{60}{80}}}$



d, $D(x) = 80$

$P(-80 < x < 240) = F(240) - F(-80) = 1 - e^{-\frac{240}{80}} - 0 =$

$= \underline{0{,}9502}$

1 óra alatt átlagosan 3 hívás érkezik
Mi a valószínűsége annak:

a, a következő hívásig legalább fél óra van

b, a —"— —"— ~~legalább~~ további fél óra van feltéve hogy 10 percig nem érkezett hívás

Mo: X: a következő hívásig eltelt idő (exp eloszlás)

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{20}x} & x > 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{1}{E(x)} = \frac{1}{20}$$

$$\left(E(x) = \frac{60}{3} = 20 \right)$$
1 óra alatt 3 hívás

a, $P(x \geq 30) = 1 - P(x < 30) =$

$= 1 - F(30) = 1 - (1 - e^{-\frac{30}{20}}) = e^{-\frac{3}{2}} = \underline{0{,}2231}$

b, $P(x \geq 10 + 30 \mid x \geq 10) = P(x \geq 30) = \ldots = \underline{0{,}2231}$

Normális eloszlás

X: norm. eloszl. $\quad m \in \mathbb{R} \quad \sigma \in \mathbb{R}^+$
$\quad (m = E(x)) \quad (\sigma = D(x))$

$X^* = \frac{x - m}{\sigma}$: standard normális eloszlás

$\Phi(x) = \underline{\qquad\qquad}$
táblázatból kivehető

$$\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$$

①

Az X norm. eloszlású változó értéke $\underline{-10}$, szórása 2
Mi a valószínűsége annak, hogy X értéke

a, -7 nél kisebb?

b, -11 nél kisebb?

c, legalább -6?

d, -7 és -9 között van?

<u>Mo</u>: X: normális eloszlás → $m = -10$
$\sigma = 2$

a, $P(x<-7) = P\left(\frac{x-m}{\sigma} < \frac{-7-(-10)}{2}\right) = P(x^* < 1{,}5) =$
$= \Phi(1{,}5) = \underline{0{,}9332}$

b, $P(x<-11) = P\left(\frac{x-m}{\sigma} < \frac{-11-(-10)}{2}\right) = P(x^* < -0{,}5) =$
$= \Phi(-0{,}5) = 1 - \Phi(0{,}5) = \underline{0{,}3085}$

c, $P(x \geq -6) = 1-(P<6) = 1 - P(x^* < 2) = 1 - \Phi(2) = \underline{0{,}0228}$

d, $P(-7 > x > -9) = P(1{,}5 > x^* > 0{,}5) = \Phi(1{,}5) - \Phi(0{,}5) = 0{,}2427$

Binomiális

(1)

alkatrészek 0,08 aranyal selejtes, közülük 1000 alkatrészt vizsgáltunk

Milyen várható értékre szimmetrikus intervallumba esik kb 0,95 valószínűséggel a selejtek száma?

Mo: X: kihúzott selejtek száma (binomiális)

$n = 1000$ (≥ 30)

$p = P(A) = 0{,}08$

M-L

$\Rightarrow$ $X \sim$ normális eloszlás

várható érték: $p \cdot n = 0{,}08 \cdot 1000 = 80$

szórás: $\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{1000 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92} = 8{,}5790$

$$0{,}95 = P(80 - c < X < 80 + c) \overset{I}{=} P\left(\frac{(80-c)-80}{8{,}579} < X^* < \frac{(80+c)+80}{8{,}579}\right) =$$

$$= P\left(\frac{-c}{8{,}579} < X^* < \frac{c}{8{,}579}\right) \overset{II}{\approx} \Phi\left(\frac{c}{8{,}579}\right) - \Phi\left(\frac{-c}{8{,}579}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\frac{c}{8{,}579}\right) - 1 \quad \Rightarrow \quad 0{,}95 = 2\Phi\left(\frac{c}{8{,}579}\right) - 1$$

$$\frac{0{,}95+1}{2} = \Phi\left(\frac{c}{8{,}579}\right)$$

$$0{,}975 = \Phi\left(\frac{c}{8{,}579}\right)$$

$$1{,}96 = \frac{c}{8{,}579}$$

$$c = 16{,}8148$$

$(80 - 1{,}96 \cdot 8{,}579;\ 80 + 1{,}96 \cdot 8{,}579)$

$]63; 97[$

???

① a dobozok magasságának várható értéke 20 cm
a szórása pedig 0,8 cm
ezekből 50 darabot pakolunk egymásra.

Mi a valószínűsége, hogy
a, 10,1 m magas polcon elférnek
b, Milyen magas polcot tervezzünk, hogy kb 0,99 valószínűséggel elférjen rajta az 50 doboz

Mo: X: dobozok összmagassága (???) $P(X<1010)=?$

$$\left.\begin{array}{l} X_1: \text{1. doboz magasság} \\ X_2: \text{2. doboz magasság} \\ \vdots \\ X_{50}: \text{50. doboz magasság} \end{array}\right\} \cdot\cdot \left\{\begin{array}{l} \text{azonos eloszlás} \\ \text{független} \\ \text{azonos várható érték } m=20 \\ \text{azonos szórás } \sigma=0,8 \end{array}\right\} \overset{CHT}{\Rightarrow}$$

$\boxed{n=50} \geq 30$

$\Rightarrow X_1+X_2+\dots+X_{50} \sim$ normális eloszlás
várható érték: $n \cdot m = 1000$
~~várható~~ szórás: $\sigma \cdot \sqrt{n} = 5,6569$

a, $P(X<1010) = P(X_1+X_2\dots X_{50}<1010) \overset{I}{=} P\left(X^*<\underbrace{\frac{1010-1000}{5,6569}}_{1,7677}\right) \overset{II}{\approx}$

$\approx \Phi(1,77) \overset{III}{=} 0,9616$

b, $0,99 = P(X_1+X_2\dots X_{50}<a)$
$\downarrow$
$0,99 = P\left(X^*<\frac{a-1000}{5,6569}\right)$?
Φ $\updownarrow$
$2,33 = \frac{a-1000}{5,6569}$

$a = 1013,1806$

X: normális eloszlás

$H_0: E(x) = M_0$

$n \backslash \sigma$	ismert	nem ismert
$n<30$	u	t
$n \geq 30$	u	t u

① Egy termék hossza normális eloszlást követ, 50mm névleges
Az elméleti szórását ismertnek feltételezzük, ami 3,2 mm
$n = 20$ terméket mértünk meg
$\check{m}_{20} = 51{,}2mm$ 95% szinten elfogadható e?

<u>Mo:</u> X: termék hossza (normális eloszlás)

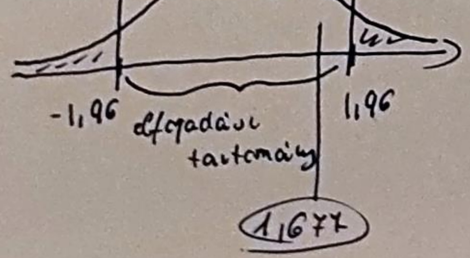
<u>Adatok:</u> $n = 20$
$\check{m}_{20} = 51{,}2mm$
$\sigma = 3{,}2mm$

<u>I.</u> $\Rightarrow$ $H_0: E(x) = 50$ $(=m_0)$
$H_1: E(x) \neq 50$ (kétoldali próba)

<u>II.</u> u-próba (táblázatból ellenőrizve: σ ismert)

$$\hat{u}_p = \underbrace{\frac{\hat{m}_n - m_0}{\sigma/\sqrt{n}}}_{\text{standard norm.}} = \frac{\hat{m}_{20} - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{51{,}2 - 50}{3{,}2/\sqrt{20}} = \underline{1{,}677}$$

<u>III.</u>



(kérdésben a %.)

$$\Phi(u_t) = \frac{0{,}95 + 1}{2} = 0{,}975 \rightarrow u_t = \pm 1{,}96$$

<u>IV.</u> H_0-t elfogadom: a várható értéke a névleges hossz

② Egy termék hossza normális eloszlást követ, névleges hossza 50 mm. 100 darab terméket mértünk meg, a mintalap szerint $\hat{m}_{100} = 51{,}2$ mm, a szórás $3{,}2$ mm

A hossz várható értéke több ez mint 50 mm 95%-os eséllyel?

Mo: X: termék hossza (normális eloszlás)

Adatok: $n = 100$

$\hat{m}_n = 51{,}2$ $\qquad \hat{s}_{100} = 3{,}2$ $\qquad$ (nem ismerjük a pontos szórást)

I. $H_0 : E(X) = 50 \quad (= m_0)$

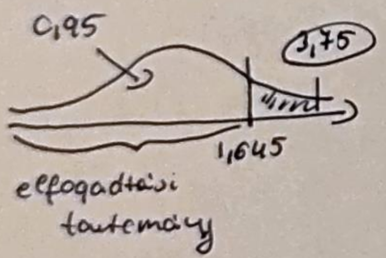
$\Rightarrow H_1 : E(X) > 50$ (egyoldali)

II. u-próba (σ nem ismert, $n \geq 30$)

$$\hat{u}_p = \underbrace{\frac{\hat{m}_n - m_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}}_{\text{közelítőleg standart norm. elo.}} = \frac{51{,}2 - 50}{3{,}2/\sqrt{100}} = \frac{1{,}2 \cdot 10}{3{,}2} = 3{,}75$$

(ha H > akkor +)
(ha H < akkor −)

III. $\Phi(u_t) = 0{,}95$ (egyoldali miatt) $\qquad u_t = +1{,}645$



IV. H_0-t most elutasítom $\Rightarrow$ H_1-t elfogadom, a termék hossza nagyobb mint 50

③

Egy automata lisztet adagol zacskóba, minek a névleges tömege 1kg / zacskó

25 zacskó tömegét megmértük $\Rightarrow \hat{m}_{25} = 0{,}98$, $\hat{s}_{25} = 0{,}035$
(feltételezzük, hogy normális eloszlást követ)

98% szignifikancia szinten elfogadható-e

a, a várható értéke a tömegnek ami 1 kg?
b, kevesebb mint 1kg?

<u>Mo:</u> X: tömeg (normális eloszlás)

<u>Adatok:</u>

$n = 25$

$\hat{m}_{25} = 0{,}98$

$\hat{s}_{25} = 0{,}035$

a,

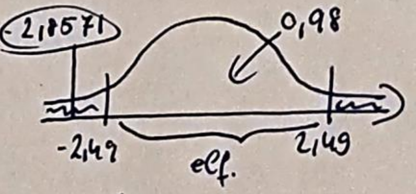
I. $\Rightarrow H_0: E(x) = 1 \ (= m_0)$

$H_1: E(x) \neq 1$ (kétoldali)

II t-próba (σ nem ismert, $n < 30$)

$$\hat{t}_p = \underbrace{\frac{\hat{m}_{25} - m_0}{\hat{s}_{25}/\sqrt{n}}}_{\substack{\text{t-eloszlás } (n-1) \\ \text{szabadsági fokkal}}} = \frac{0{,}98 - 1}{0{,}035/\sqrt{25}} = -2{,}8571$$

III. $t_t = \pm 2{,}49$ $\begin{cases} \text{mg: } \frac{0{,}98+1}{2} = 0{,}99 \\ \text{szf: } 25 - 1 = 24 \end{cases}$



IV. H_0-t elutasítom a liszt tömege nem 1kg b)

I. $H_0 : E(x) = 1$ $(= m_0)$

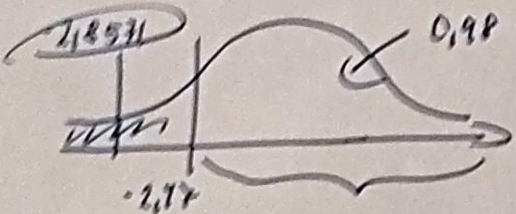
$\Rightarrow H_1 : E(x) < 1$ (egyoldali)

II. t-próba (σ nem ismert, $n < 30$) (nincs változás!)

$$\hat{t}_p = \frac{\hat{m}_n - m_0}{s^*_n / \sqrt{n}} = \frac{0{,}98 - 1}{0{,}035 / \sqrt{25}} = -2{,}8571$$

III. $t_t = -2{,}17$

$$f \begin{cases} mg : 0{,}98 \\ szf : 24 \end{cases}$$



IV. H_0-t elutasítom $\Rightarrow$ H_1 elfogadom, hogy a liszt tömege kevesebb 1 kg