# Tartalom jegyzék

① 

# Vektorok

**Összeadás**

$\underline{a} + \underline{b} = \underline{a} + \underline{b}$

$(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$

**Kivonás**

$\underline{a} - \underline{b} \neq \underline{b} - \underline{a}$

**Szorzás számmal**

$\| \alpha \underline{a} \| = |\alpha| \cdot \| \underline{a} \| \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

- $\alpha \underline{a}$ : $\underline{a}$ állása megegyezik
- $\alpha < 0 \rightarrow \alpha \underline{a}$ és $\underline{a}$ irányítása ellentétes
- $\alpha > 0 \rightarrow \alpha \underline{a}$ és $\underline{a}$ irányítása azonos

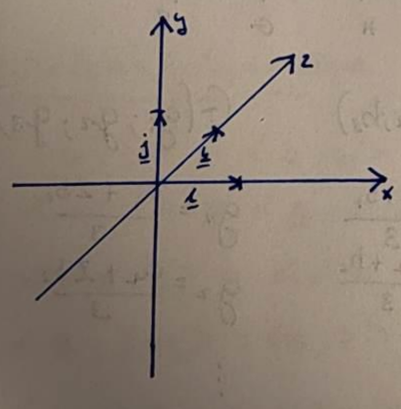
$\alpha(\underline{a} + \underline{b}) = \alpha \underline{a} + \alpha \underline{b}$

**Tétel:**

Ha adott 3 nem egysíkú vektor a térben akkor bármely $\underline{v}$ egyértelműen felbontható velük párhuzamos összetevőkre

Tehát, egyértelműen léteznek olyan, hogy

$\underline{v} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c} \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$




$\underline{v} = \alpha \underline{i} + \beta \underline{j} + \gamma \underline{k}$

$\| \underline{i} \| = \| \underline{j} \| = \| \underline{k} \| = 1$

$\underline{i} \perp \underline{j} \quad \underline{i} \perp \underline{k} \quad \underline{j} \perp \underline{k}$

②

## Vektorok összeadása

$\underline{a}(a_1; a_2; a_3)$ $\quad$ $\underline{b}(b_1; b_2; b_3)$

$\underline{a} + \underline{b}\,(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2;\ a_3 + b_3)$

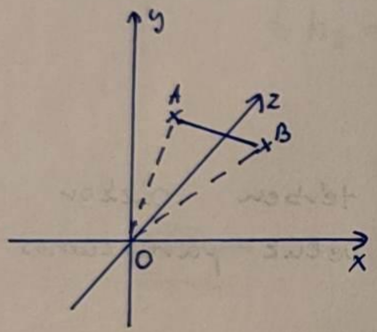
## Vektorok kivonása

$\underline{a} - \underline{b}\,(a_1 - b_1;\ a_2 - b_2;\ a_3 - b_3)$

## Vektor szorzása számmal

$\lambda\underline{a}\,(\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3)$

## Pont koordinátái

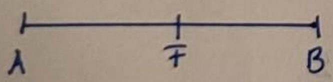



$\vec{OA} = \underline{a}$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \underline{b} - \underline{a}$

$\vec{AB}\,(b_1 - a_1;\ b_2 - a_2;\ b_3 - a_3)$

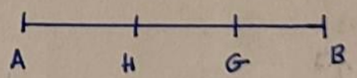
## Szakasz felezőpontja




$F(f_1; f_2; f_3)$

$$f_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$
$$f_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$$
$$f_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}$$

## Szakasz harmadoló pontja

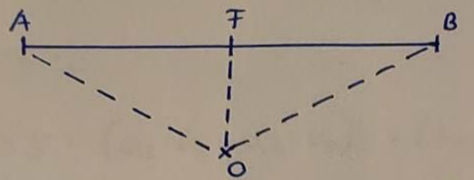



$H(h_1; h_2; h_3)$ $\quad$ $G(g_1; g_2; g_3)$

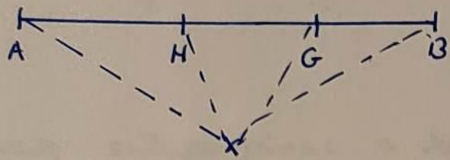
$$h_1 = \frac{2a_1 + b_1}{3} \qquad g_1 = \frac{a_1 + 2b_1}{3}$$
$$h_2 = \frac{2a_2 + b_2}{3} \qquad g_2 = \frac{a_2 + 2b_2}{3}$$

$\vdots$ $\quad$ $\vdots$

③




$$\vec{OF} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} \Rightarrow \begin{cases} f_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1) \\ f_2 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2) \\ f_3 = \dots \end{cases}$$




$$\vec{OH} = \frac{2\vec{OA} + \vec{OB}}{3} \Rightarrow \begin{cases} h_1 = \frac{1}{3}(2a_1 + b_1) \\ h_2 = \frac{1}{3}(2a_2 + b_2) \\ h_3 = \dots \end{cases}$$

## Vektorok szorzása

- skaláris szorzat

Def: Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ skaláris szorzatának nevezzük az $\langle a; b \rangle = \|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\| \cdot \cos\gamma$, ahol $\gamma$ $\underline{a}$ és $\underline{b}$ szöge

$0^\circ \le \gamma \le 180^\circ$

### Műveleti tulajdonságok

- $\langle \underline{a}; \underline{b} \rangle = \langle \underline{b}; \underline{a} \rangle$
- $\langle \underline{a}; \underline{b} \rangle \cdot \underline{c} \neq \underline{a} \cdot \langle \underline{b}; \underline{c} \rangle$
- $\langle \alpha \underline{a}; \underline{b} \rangle = \alpha \langle \underline{a}; \underline{b} \rangle \quad \alpha \in \mathbb{R}$
- $\langle \underline{a}; \underline{b} + \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}; \underline{b} \rangle + \langle \underline{a}; \underline{c} \rangle$
- $\langle \underline{a}; \underline{b} \rangle = 0$ akkor és csak akkor, ha $\underline{a} \perp \underline{b}$

④

Tétel:

$$\langle \underline{a}; \underline{b} \rangle = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

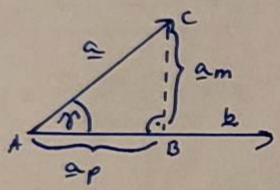
Alkalmazások:

① $\|\underline{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

② $\cos\gamma = \dfrac{\langle \underline{a}; \underline{b} \rangle}{\|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\|}$

③ $\underline{e}_a = \dfrac{1}{\|\underline{a}\|} \cdot \underline{a}$

④ vektor felbontása vele párhuzamos és merőleges összetevőre




$$\underline{a}_p + \underline{a}_m = \underline{a}$$

$$\underline{a}_p = \frac{\langle \underline{a}; \underline{b} \rangle}{\|\underline{b}\|^2} \cdot \underline{b}$$

· Vektoriális szorzat

Def: az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektoriális szorzatának nevezzük az $\underline{a} \times \underline{b}$, amire a következők igazak:

- $\|\underline{a} \times \underline{b}\| = \|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\| \cdot \sin\gamma$
- $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a}$
  $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{b}$

Műveleti tulajdonságok

- $\underline{a} \times \underline{b} \neq \underline{b} \times \underline{a}$
- $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} \neq \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})$
- $\lambda(\underline{a} \times \underline{b}) = \lambda \underline{a} \times \underline{b}$
- $\underline{a} \times \underline{b} = 0$ akkor és csak akkor, ha $\underline{a} \parallel \underline{b}$
- $T_{paralelogramma} = \|\underline{a} \times \underline{b}\|$ $\quad T_\Delta = \frac{1}{2}(\|\underline{a} \times \underline{b}\|)$

⑤

Tétel:

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2)\underline{i} + (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3)\underline{j} + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)\underline{k}$$

Megjegyzés:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2)\underline{i} - (a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1)\underline{j} + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)\underline{k}$$

④ Háromszög súlypontjának a koordinátái

$S(s_1; s_2; s_3)$

$$s_1 = \frac{2 \cdot \frac{a_1 + b_1}{2} + c_1}{3} = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}$$

$$s_2 = \frac{2 \cdot \frac{a_2 + b_2}{2} + c_2}{3} = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}$$

$$s_3 = \dots = \frac{a_3 + b_3 + c_3}{3}$$

· Vegyes szorzat

$$\langle \underline{a} \times \underline{b} ; \underline{c} \rangle = \underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$$

Használata:

$\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = 0$ akkor és csak akkor ha mind a 3 vektor egy síkon helyezkedik el

$V_{pp} = |\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}|$ ← paralelepipedon térfogata

$V_t = \frac{|\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}|}{6}$ ← tetraéder térfogata

6

## Egyenesek

$\underline{r} = \vec{OP} + t \cdot \underline{v} \qquad t \in \mathbb{R}$

$r$ az egyenes futópontjának a helyvektora

$$R \begin{cases} r_1 = p_1 + t \cdot v_1 \\ r_2 = p_2 + t \cdot v_2 \\ r_3 = p_3 + t \cdot v_3 \end{cases}$$

## Sík

$\langle r - \vec{OP}, n \rangle = 0$ ($\leftarrow$ normálegyenlet)

$r = (x; y; z)$ a futópont helyvektora

$$\left.\begin{aligned} & n_1 x_1 + n_2 y + n_3 z + D = 0 \\ & D = -n_1 \cdot p_1 - n_2 \cdot p_2 - n_3 \cdot p_3 \end{aligned}\right\} n_1 x + n_2 y + n_3 z = n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2 + n_3 \cdot p_3$$

· 2 sík metszés vonala

$S_1: n_{11} x + n_{12} y + n_{13} z = -D_1$

$S_2: n_{21} x + n_{22} y + n_{23} z = -D_2$

$n_1 \nparallel n_2 \iff S_1 \nparallel S_2 \Rightarrow$ létezik megoldás

Válasszuk meg az egyik ismeretlen értékét pl: $x = 0$

Helyettesítsük be mindkét egyenletbe!

⋮

Kijön 1 pont koordinátája: A

⇓

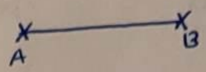
Behelyettesítünk egy másik ismeretlennek az értékébe pl: $y = 0$

Kijön 2. pont koordinátája: B

$$e: \begin{cases} x = a_1 + \underline{a}_1 \cdot t \\ y = a_2 + \underline{a}_2 \cdot t \\ z = a_3 + \underline{a}_3 \cdot t \end{cases} \qquad \begin{aligned} & \vec{AB} = \underline{a} \\ & A(a_1; a_2; a_3) \end{aligned} \quad \longleftarrow \text{metszésvonal egyenlete}$$

# Térelemek távolsága

I. Két pont távolsága:




$$d_{AB} = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

II. Pont és egyenes távolsága:

$$d_{Pe} = \frac{\|\overrightarrow{P_eP} \times \underline{v}_e\|}{\|\underline{v}_e\|}$$

III. Pont és egy sík távolsága:

$$d_{PS} = \frac{|\langle \overrightarrow{P_SP} ; \underline{n}_S \rangle|}{\|\underline{n}_S\|}$$

IV. Két egyenes távolsága

- $e \parallel f$

  $d_{ef}$ = pont és egyenes távolsága

- e és f kitérőek

  $d_{ef}$ = pont és sík távolsága $\underline{n}_S = \underline{v}_e \times \underline{v}_f$

V. Egyenes és sík távolsága

$d_{eS}$ = pont és sík távolsága

VI. 2 sík távolsága

$d_{S_1,S_2}$ = két pont távolsága

⑧

## Térelemek szöge

Ⓘ 2 egyenes szöge $\varphi_{ef}$

$$\cos\alpha = \frac{\langle \underline{v}_e ; \underline{v}_f \rangle}{\| \underline{v}_e \| \cdot \| \underline{v}_f \|} \rightarrow \alpha \qquad 0° \leq \alpha \leq 180°$$

Ha $\alpha \leq 90° \rightarrow \alpha = \varphi_{ef}$

Ha $\alpha \gneq 90° \rightarrow \alpha = 180° - \varphi_{ef}$

Ⓘ Ⓘ 2 sík szöge $\varphi_{S_1 S_2}$

$$\cos\alpha = \frac{\langle \underline{n}_1 ; \underline{n}_2 \rangle}{\| \underline{n}_1 \| \cdot \| \underline{n}_2 \|} \rightarrow \alpha$$

Ha $\alpha \leq 90° \rightarrow \alpha = \varphi_{S_1 S_2}$

Ha $\alpha > 90° \rightarrow \alpha = 180° - \varphi_{S_1 S_2}$

ⒾⒾⒾ sík és egyenes szöge $\varphi_{es}$

$$\cos\alpha = \frac{\langle \underline{n}_1 ; \underline{v}_e \rangle}{\| \underline{n}_1 \| \cdot \| \underline{v}_e \|} \Rightarrow \alpha$$

Ha $\alpha \leq 90° \rightarrow \varphi_{es} = 90° - \alpha$

Ha $\alpha > 90° \rightarrow \varphi_{es} = \alpha - 90°$

# Komplex számok

<u>algebrai alak:</u> $z = a + bi$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$

a: z valós része

b: z képzetes része

$i^2 = -1$

## Műveletek

$\oplus$ $z_1 + z_2 = (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

$\ominus$ $z_1 - z_2 = (a-c) + (b-d)i$

$\otimes$ $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

$\oplus$ $\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + \left(\frac{ad+bc}{c^2+d^2}\right)i$

## Komplex számok konjugáltja

$z = a + bi \qquad \bar{z} = a - bi$

$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

<u>trigonometrikus alak:</u> $z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

$r = |z| \qquad r = \sqrt{a^2+b^2}$

$\varphi \Rightarrow 0° \leq \varphi \leq 360° \qquad tg\,\varphi^* = \left|\frac{b}{a}\right| \to \varphi^*$

$\varphi$ meghatározása $\varphi^*$-ból

I. síknegyed $\varphi = \varphi^*$

II. síknegyed $\varphi = 180° - \varphi^*$

III. síknegyed $\varphi = 180° + \varphi^*$

IV. síknegyed $\varphi = 360° - \varphi^*$

## Műveletek

$+$ nem elvégezhető

$-$ nem elvégezhető

$*$ $z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2)(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

$\div$ $\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

$\wedge$ $z^n = r^n(\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi))$

$\sqrt{}$ $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 360 \cdot k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 360 \cdot k}{n}\right)\right)$ $\quad k = 0, 1 \dots n-1$

## Függvények

Def: Ha A halmaz elemeihez egyértelműen hozzárendeljük B Halmaz elemeit -> függvényt kapunk

$f(x)$

### Összetett függvény

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

pl: $f(x) = \sin x$ $\quad (f \circ g)(x) = \sin(x^2)$

$g(x) = x^2$ $\quad (g \circ f)(x) = \sin^2 x$

f: külső
g: belső
függvény

(11)

## Inverz függvények

Ha $f$ (~~kölcsönös~~) kölcsönösen egyértelmű, akkor megfordítható a hozzárendelése jele: $f^{-1}$

(~~...~~) kiszámítása:

pl:

$f(x) = 2x + 3$ $\qquad y = 2x + 3$

$f^{-1}(x) = 2y + 3$ $\qquad x = 2y + 3$

$y = \frac{x-3}{2} = f^{-1}(x)$

x-et és y-t felcseréljük az egyenletben és kifejezzük y-t

## Függvény ábrázolás 13. lap!

## Ábrázolás lineáris transzformációkkal

alapfüggvény $f(x)$

(I) $f(x) \to f(ax)$

x-szel ∥ nyújtás / összenyomás } aránya $\boxed{\frac{1}{a}}$

(II) $f(x) \Rightarrow f(x+b)$

x-szel ∥ eltolás } $\boxed{-b}$-vel

$f(x) \to f(ax+b)$

x-szel ∥ eltolás } $\boxed{-\frac{b}{a}}$-val

(III) $f(x) \to f(x)+d$

y-nal ∥ eltolás } $\boxed{d}$-vel

(IV) $f(x) \to f(x) \cdot c$

y-nal ∥ nyújtás / összenyomás } aránya $\boxed{c}$

ha c negatív akkor tükrözni kell

## Számsorozatok

olyan függvény ahol $D_f = \mathbb{N}$

Def: $\{a_n\}$ szig. mon. csökken, ha bármely $k$ és $l \in \mathbb{N}$ számok esetén, ha $k < l$ akkor $a_k > a_l$

Ha minden $n$ szám esetén $a_{n+1} - a_n < 0$ akkor az $\{a_n\}$ szig. mon. csökken

Def: Azt mondjuk, hogy az $\{a_n\}$ alulról korlátolt és $k$ alsó korlát, ha minden $n$ esetén $a_n \geq k$

szig. mon. csökken $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ felülről korlátos és $\underbrace{K = a_1}_{\text{legkisebb felső korlát}}$

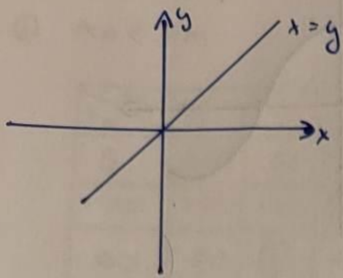
Def: Azt mondjuk, hogy az $\{a_n\}$ konvergens és határértéke $A$, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható $N$ (~~küszöbindex~~) küszöbszám úgy, hogy ha $n > N$ akkor $|A - a_n| < \varepsilon$

Tétel: Ha $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$ és $\lim\limits_{n \to \infty} b_m = B$ akkor létezik $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_m)$ és $= A + B$

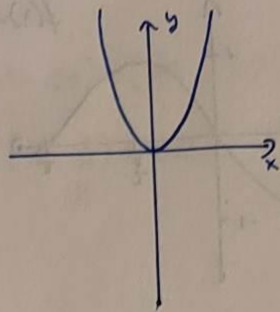
ugyan ez kimondható a többi értelmezhető műveletre is

Def: Az $\{a_n\}$ tágabb értelemben vett konvergens és 'határértéke' $\infty$, ha bármely $K$ számhoz megadható $N$ küszöb úgy, hogy ha $n > N$ akkor $a_n > K$

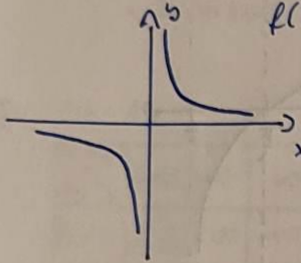
# Függvény ábrázolás



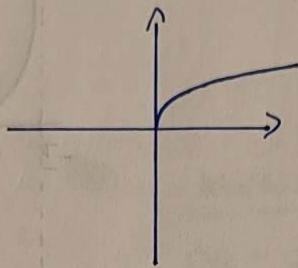

$f(x) = x$



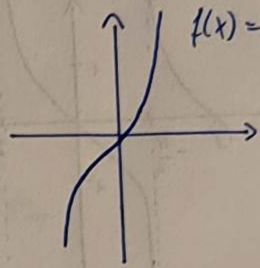

$f(x) = x^2$



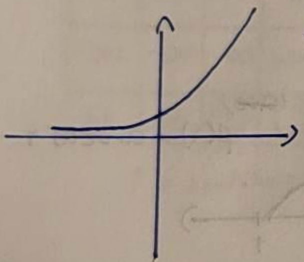

$f(x) = \frac{1}{x}$



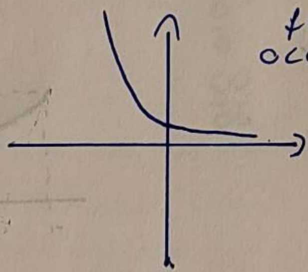
$f(x) = \sqrt{x}$



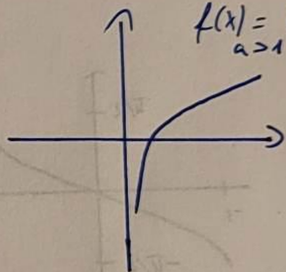
$f(x) = x^3$



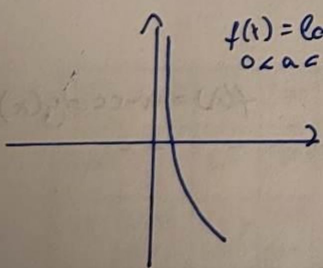
$f(x) = a^x$
$a > 1$



$f(x) = a^x$
$0 < a < 1$

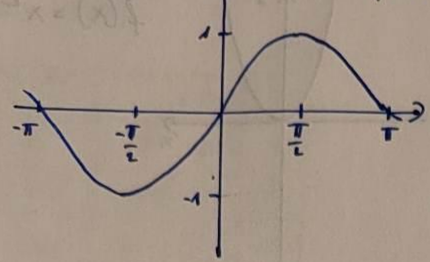


$f(x) = \log_a x$
$a > 1$

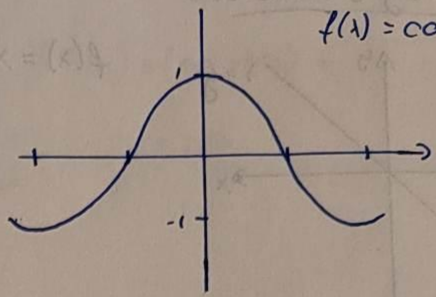


$f(x) = \log_a x$
$0 < a < 1$

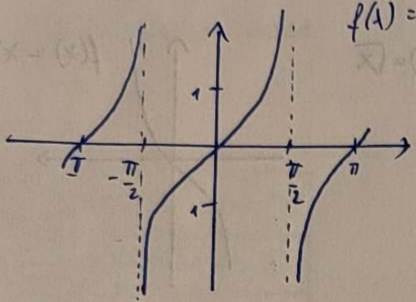
f(x) = sin x



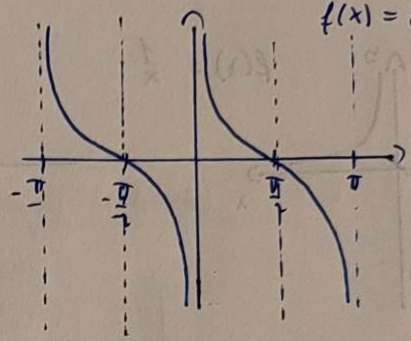

f(x) = cos x



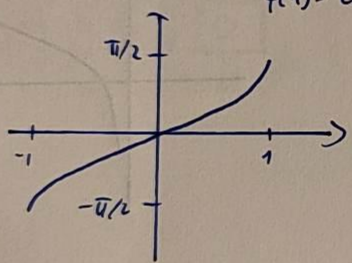

f(x) = tg x



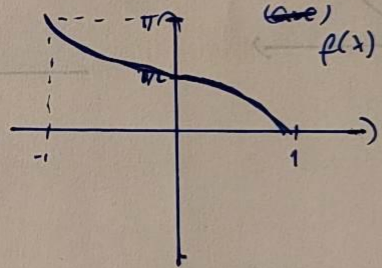

f(x) = ctg x



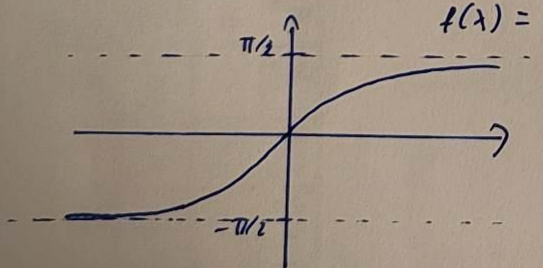

f(x) = arcsin x



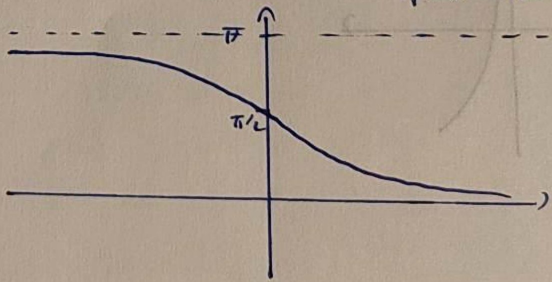

f(x) = arccos x




f(x) = arctg (x)




f(x) = arccotg(x)



(15)

# Műveletek határértékkel

① $a_n + b_n$

| $b_n \backslash a_n$ | $A$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|
| $B$ | $A+B$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | ? |
| $-\infty$ | $-\infty$ | ? | $-\infty$ |

? = kritikus eset

Pl: $\lim_{n\to\infty}(n^2-2n) = (\infty\cdot\infty) =$

$= \lim_{n\to\infty} n^2\left(1-\frac{2}{n}\right) = \infty$

$\qquad\quad \downarrow\infty \qquad \downarrow 0$

② $a_n \cdot b_n$

| $b_n \backslash a_n$ | $A\neq0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|
| $B\neq0$ | $A\cdot B$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | ? |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ? |
| $0$ | $0$ | ? | ? | $0$ |

? = kritikus eset

PK: **Kritikus esetek**

$\infty - \infty$

$0\cdot\infty$

$\frac{0}{0}$

$\frac{\infty}{\infty}$

!

③ $\frac{a_n}{b_n}$

| $b_n \backslash a_n$ | $A\neq0$ | $0$ | $\pm\infty$ |
|---|---|---|---|
| $B\neq0$ | $\frac{A}{B}$ | $0$ | $\pm\infty$ |
| $0$ | $\pm\infty$ div | ? | $\pm\infty$ div |
| $\pm\infty$ | $0$ | $0$ | ? |

? = kritikus eset

(16)

## Nevezetes határérték

$$\lim_{n\to\infty} g^n \begin{cases} \infty, \text{ ha } g>1 \\ 1, \text{ ha } g=1 \\ 0 \text{ ha } g<1 \text{ és } g>-1 \\ \text{div ha } g<-1 \end{cases}$$

## Függvények határértékei

**Def:** az $f$ függvény határértéke a $\infty$-ben az $A$ szám ha minden ~~($\varepsilon<0$)~~ $\varepsilon>0$ számhoz megadható olyan $x_0$ küszöbszám, hogyha $x>x_0$ akkor $|f(x)-A)<\varepsilon$

**Def:** az $f$ függvény határértéke a $\infty$-ben $+\infty$ ha bármely $K$ számhoz megadható $x_0$, hogy ha $x>x_0$ akkor $f(x)>K$

**Def:** az $f$ függvény határértéke az $x_0$ helyen balról $A$, ha minden $\varepsilon>0$ számhoz megadható olyan $\delta$, hogy ha $x<x_0$ és $x>x_0-\delta$, akkor $|A-f(x)|<\varepsilon$

(1) gyöktényezős alak

$ax^2+bx+c = a(x_1-x_1)(x-x_2)$

$x_1$ és $x_2$ az egyenlet gyökei

**Def:** az $f$ függvény az $x_0$ helyen folytonos ha létezik $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ határérték és a függvény $x$ helyen felvett értéke megegyezik a határértékkel

$f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

(7)

Tétel: minden elemi alapfüggvény~~nek~~ folytonos

Tétel: Ha a folytonos függvényekkel végzünk műveletet az eredmény is folytonos lesz

Nevezetes határérté~~k~~

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1 \quad \to \quad \frac{\sin(kx)}{kx} = 1$$

(+)

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Differenciál számítás

a derivált: az $f$ deriváltja az a függvény amely $x \mapsto f'(x)$ minden olyan helyen ahol $f$ differenciálható

Tétel: Ha $f$ differenciálható az $x_0$ helyen akkor $f$ folytonos az $x_0$ helyen

## Alapderiváltak

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $c \ (\in \mathbb{R})$ | $0$ |
| $x^{\alpha}$ | $\alpha \cdot x^{\alpha-1}$ |
| $a^x$ | $a^x \cdot \ln a$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $\log_a x$ | $\frac{1}{x \cdot \ln a}$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\mathrm{tg}\, x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $\mathrm{ctg}\, x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ |

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\mathrm{arctg}\, x$ | $\frac{1}{x^2+1}$ |
| $\mathrm{arcctg}\, x$ | $-\frac{1}{x^2+1}$ |
| (+) $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |

## Deriválási szabályok

(I) $(c \cdot f(x))' = c \cdot f(x)$

(II) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

(III) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

(IV) $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

(V) $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

19

## Függvény érintőjének egyenlete

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y_0 = f(x_0)$$

$$m = f'(x_0)$$

## L'Hospital - szabály

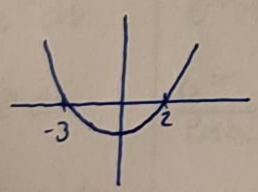
Ha a $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határértékének típusa $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ akkor

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

## 1 Határérték ábrázolással

Pl: $$\lim_{x \to -3} \frac{x^2+10x+21}{x^3+4x^2-3x-18} = \lim_{x \to -3} \frac{x+7}{x^2+x-6} = \left(\frac{4}{0}\right)$$

nevező ábrázolva:




$$\lim_{x \to -3^+} \frac{x+7}{x^2+x-6} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{x+7}{x^2+x-6} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

# Teljes függvény vizsgálat

① $D_f$: Értelmezési tartomány

② tengely metszetek:

$f(0) = ?$ $\Downarrow$ $y = ?$

$f(x) = 0$ $\Downarrow$ $\underbrace{x = ?}_{\text{zérus helyek}}$

③ Szimmetria

(~~[illegible]~~)

Ha, $f(x) = f(-x)$ akkor páros

Ha, $f(-x) = -f(x)$ akkor páratlan

④ Határérték (~~a függvény~~)

⑤ Monotonitás

(~~[illegible]~~: ~~[illegible]~~)

$f'(x)$ kiszámítása

$f'(x) = 0$ $x = ?$

első zh-ig vagy szakadásig

| $x$ | $x < \ldots$ | $zh = x$ | |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $- / +$ | $0$ | .... |
| $f$ | ↘ / ↗ | lokális min/max $y = ?$ | |

csökken nő

⑥ Konvexitás

$f''(x)$ kiszámítása

$f''(x) = 0$

$x = ?$

| $x$ | $x < \ldots$ | $x = \ldots$ | |
|---|---|---|---|
| $f''$ | $- / +$ | $0$ | |
| $f$ | ∩ / ∪ | inf pont | |

akkor van inf.pont. ha vált a függvény!

⑦ Ábrázolás

⑧ $R_f$: Érték készlet

# Integrál számítás

## Határozatlan integrált

Adott $f(x)$ és keressük olyan $F(x)$ függvényt melyre igaz, hogy $F'(x) = f(x)$

Tétel: Ha $F_1$ és $F_2$ primitív függvényei $f$-nek akkor $F_1 - F_2 = \ldots\ldots \to f$ összes prim fg-nek megkapjuk, ha egy prim fug.-hez tetszőleges konstanst adunk $(F(x)+C)$

## Alapintegráltak

| $\int f(x)$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $\int 1\,dx$ | $x + C$ |
| $\int x^{\alpha}dx$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ |
| $\int x^{-1}dx$ | $\ln\lvert x\rvert + C$ |
| $\int e^x dx$ | $e^x + C$ |
| $\int a^x dx$ | $\frac{a^x}{\ln a} + C$ |
| $\int \sin x\,dx$ | $-\cos x + C$ |

| $\int f(x)$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $\int \cos x\,dx$ | $\sin x + C$ |
| $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$ | $\mathrm{tg}\,x + C$ |
| $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$ | $-\mathrm{ctg}\,x + C$ |
| $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ | $\arcsin x + C$ $(-\cancel{\cos}\arccos x + C)$ |
| $\int \frac{1}{x^2+1}$ | $\mathrm{arctg}\,x + C$ $(-\mathrm{arcctg}\,x + C)$ |

22

## Szabályok

I. $$\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$$

II. $$\int f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c$$

III. $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

IV. (parciális-integrálás)

$$\int f\cdot g' = f\cdot g - \int f'\cdot g$$

alkalmazása:

a, $$\int \underbrace{\text{polinom}}_{f}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}\sin\\ \cos\\ \exp\end{pmatrix}}_{g'}$$

b, $$\int \underbrace{\text{polinom}}_{g'}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}\log\\ \text{arc..}\end{pmatrix}}_{f}$$

c, $$\int \exp\cdot\begin{pmatrix}\sin\\ \cos\end{pmatrix}$$

(~~mikor~~)

23

## Határozott integrálás

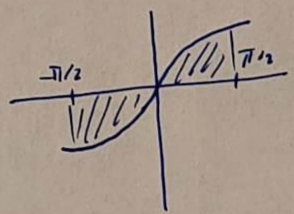
(függvény grafikonja alatti terület)

$$T = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \left( \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) \cdot \Delta x_i \right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Tétel: (Newton-Leibniz szabály)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

I. T fg. grafikonja és x között




Pl: $f(x) = \sin x$

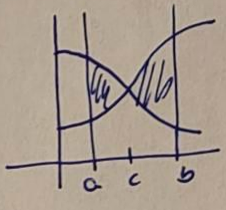
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \sin x\,dx = 0$$

$$T = \underbrace{\left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x\,dx \right|}_{T_1} + \underbrace{\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx}_{T_2} = 2 \cdot \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x\,dx \right|$$

$$\underbrace{T_1 = T_2}_{\text{szim. miatt}}$$

$$T = 2\left[-\cos x\right]_0^{\pi/2} = 2(-\overset{0}{\cos\tfrac{\pi}{2}} + \overset{1}{\cos 0}) = 2$$

II. T két fg. grafikonja között




$$T = \left| \int_a^c (f(x) - g(x))\,dx \right| + \left| \int_c^b (f(x) - g(x))\,dx \right|$$

(III) Forgatott testek térfogata

$$V_f = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$