Racionális törtfüggvény

Alaptörtek

1, konstans / elsőfokú

$$\int \frac{4}{3x-1}\,dx = 4\int \frac{1}{3x-1}\,dx = 4\cdot \ln|3x-1| \cdot \frac{1}{3} + C$$

2, konstans / (elsőfokú)^n $(n = 2,3,4\ldots)$

$$\int \frac{4}{(3x-1)^3}\,dx = 4\int (3x-1)^{-3}\,dx = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(3x-1)^2} + C$$

3, elsőfokú / másodfokú (másodfokúnak nincs valós gyöke)

$$\int \frac{4x+5}{x^2+2x+2}\,dx = 2\int \frac{2x+2+\frac{1}{2}}{x^2+2x+2}\,dx = 2\left(\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} + \frac{\frac{1}{2}}{x^2+2x+2}\,dx\right) =$$

$$\left(2\cdot\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+1)^2+1}\right)$$

$$= 2\ln(x^2+2x+2) + \operatorname{arctg}(x+1) + C$$

Tört felbontása résztörtekre

1, nevezőben csak elsőfokú első hatványon

$$\int \frac{x^2-3x+8}{x(x+1)(x-3)(x+5)} = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{x+5}\,dx$$

2, nevezőben irreducibilis másodfokú

$$\int \frac{x-7}{x^3+4x}\,dx = \int \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}\,dx$$

3, nevezőben elsőfokú de magasabb hatványon

$$\int \frac{3x^2-2x+5}{x^3(x+1)^2}\,dx = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2}\,dx$$

Helyetesítési integrált

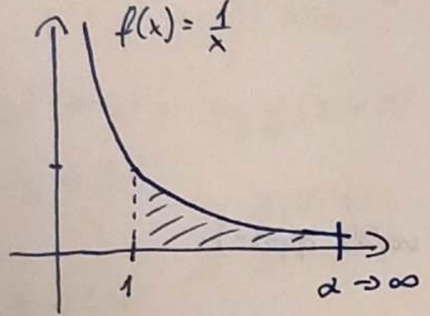
$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{t}{1+t^2}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} e^x + C$$

$t = e^x$

$x = \ln t$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$ deriválás

Improprius integrált



$$T = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\alpha\to\infty} \int_1^{\alpha} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\alpha\to\infty} \left[\ln|x|\right]_1^{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha\to\infty} \left(\ln|\alpha| - \ln|1|\right) = \infty - 0 = \underline{\infty}$$

Nem korlátos függvények integrálása

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad D_f \notin 0$

$$T = \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\ln|x|\right]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\ln 1 - \ln\varepsilon\right) = \infty$$

Implicit alakban adott görbék

Pl: $x^2 + y^2 = 1$

Deriválás

$(x^2+y^2=1)' \to 2x + 2y\cdot y' = 0$

$$\Downarrow$$

$$y' = \frac{-2x}{2y} = \frac{x}{y}$$

Érintő egyenlete:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$m = y'(P)$

derivált érték a P pontban

Függőleges érintő

m nem értelmezhető

számláló $\neq 0$
nevező $= 0$

pl: $y' = \dfrac{y-4x}{4y-x}$

$y - 4x \neq 0$ $\quad$ $4y - x = 0$

$y - 16y \neq 0$ ✓ $\leftarrow$ $x = 4y$

$f: \; x^2 + y^2 - xy/2 = 15$

$(4y)^2 + y^2 - 4y \cdot y/2 = 15$

$y = \pm 1$ $\searrow A(4; 1)$
$\vdots$ $\quad \nearrow B(-4; -1)$
$x = \pm 4$

Vízszintes érintő

$m = 0$

számláló $= 0$
nevező $\neq 0$

pl: $y' = \dfrac{y-4x}{4y-x}$

$y - 4x = 0$ $\quad$ $4y - x \neq 0$

$y = 4x$ $\longrightarrow$ $4x - x \neq 0$ ✓

$f: \; x^2 + y^2 - xy/2 = 15$

$x^2 + (4x)^2 - x \cdot 4x/2 = 15$

$x = \pm 1$ $\searrow A(1; 4)$
$\vdots$ $\quad \nearrow B(-1; -4)$
$y = \pm 4$

Paraméteres alakú síkgörbék

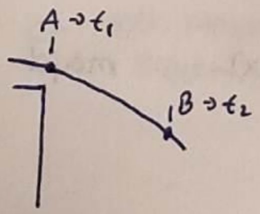
$c(t) = (\underbrace{r \cdot \cos t}_{f(t)}, \underbrace{r \cdot \sin t}_{g(t)}), \quad t \in [0; 2\pi]$

$c'(t) = (f'(t), g'(t)) \rightarrow y'(x) = y' = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}$

Ívhossz

$c(t) = (f(t), g(t))$

$I = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} \, dt$



Differenciál egyenletek

- a DE rendje a legmagasabb előforduló ismeretlen rendje
- a DE lineáris ha benne az ismeretlen függvény és deriváltjai csak első hatványai szerepelnek

Típusai

1, Szétválasztható változójú DE

általános alak:

$$y' = \underbrace{g(x)}_{\substack{\text{csak } x\text{-től} \\ \text{függ} \\ \text{pl: } \sin x,\ \cos x,\ x^2}} \cdot \underbrace{h(y)}_{\substack{\text{csak } y\text{-tól} \\ \text{függ} \\ \text{pl: } \sin y,\ y^e}}$$

I. eset: $h(y) = 0$

↳ y constanst kapunk $\Rightarrow$ $y' = 0$

II. eset: $h(y) \neq 0$

↳ oszthatunk vele

$$\frac{y'}{h(y)} = g(x) \quad /\int$$

$$\int \frac{y'}{h(y)} = \int g(x)$$

$$\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)$$

majd integrálás után y-ra fejezzük ki

2, Elsőrendű lineáris DE

Általános alak: $y' + a(x) \cdot y = b(x)$

ha $b(x) \equiv 0$, akkor homogén
ha $b(x) \not\equiv 0$, akkor inhomogén

($\equiv 0 \rightarrow$ minden x esetén 0-át vesz fel)

1, ha $b(x) \equiv 0$

$y' + a(x) \cdot y = 0$ homogén egyenlet

$y' = \underbrace{-a(x)}_{g(x)} \cdot \underbrace{y}_{h(y)}$ szétválasztható változójú

2, ha $b(x) \not\equiv 0$

pl: $y' + \frac{5y}{x} = 9x^3$ ← inhomogén

Homogén egyenlet:

$y_h' + \frac{5y}{x} = 0$

$\frac{dy_h}{dx} = -\frac{5}{x} \cdot y_h$

$\int \frac{1}{y_h} dy_h = \int -\frac{5}{x} dx$

$\ln|y_h| = -5\ln|x| + C$

$|y_h| = e^{C - 5\ln|x|} = \frac{C}{x^5}$ ← ált. megoldása a homogén egyenletnek

Inhomogén egyenlet:

$y = \frac{k(x)}{x^5} \rightarrow y' = \frac{k'(x) \cdot x^5 - k(x) \cdot 5x^4}{x^{10}} =$

$= -\frac{5k(x)}{x^6} + \frac{k'(x)}{x^5}$

behelyettesítés az eredeti egyenletbe

$k(x) = \int 9x^8 dx = x^9 + C$

[redacted] *

*

$y = \frac{x^9 + C}{x^5} = x^4 + \frac{C}{x^5}$ ← ált. megoldása az inhomogén egyenletnek

Állandó együtthatós DE

$y = y_h + y_p$ $\qquad$ $y_h = C \cdot e^{\lambda x}$

pl: $y' - 5y = \underbrace{3x}_{b(x)}$

$\downarrow \quad \downarrow$

$\lambda - 5 = 0$

$\lambda = 5$

$y_h = C \cdot e^{5x}$

pl: $y'' - 2y' + 5y = 0$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$

$\vdots$

$y_h = C \cdot e^{\lambda_1 x} + C \cdot e^{\lambda_2 x}$

behelyettesítjük y helyére az eredeti fg.-be

$$\left.\begin{aligned} y_p &= Ax + B \\ y'_p &= A \end{aligned}\right\} \Rightarrow A - 5(Ax + B) = 3x$$

$x: \ -5A = 3 \ \rightarrow \ A = -\frac{3}{5}$

$c: \ A - 5B = 0 \ \rightarrow \ B = -\frac{3}{25}$

$y_p = -\frac{3}{5}x - \frac{3}{25}$

$y = y_h + y_p = C \cdot e^{5x} + \frac{3}{5}x - \frac{3}{25}$

$b(x)$	y_p
$2x$	$Ax + B$
$3x^2 - 5x - 7$	$Ax^2 + Bx + C$
$x^3 - x$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
x^4	$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$
$2e^x$	Ae^x
e^{2x}	Ae^{2x}
$2e^x - e^{2x}$	$Ae^x + Be^{2x}$
$x + e^{3x}$	$Ax + B + Ce^{3x}$
$x \cdot e^{3x}$	$Axe^{3x} + Be^{3x}$
$\sin x$	$A\sin x + B\cos x$
$\cos x$	$A\sin x + B\cos x$
$3\sin x - 5\cos(2x)$	$A\sin x + B\cos x + C\sin(2x) + D\cos(2x)$
$e^x \cdot \sin x$	$Ae^x\sin x + Be^x\cos x$
$x \cdot \sin x$	$Ax\sin x + Bx\cos x + C\sin x + D\cos x$

Állandó együtthatós DE komplex megoldással

pl: $y'' + 2y' + 17y = 0$

$\Downarrow$

$\lambda^2 + 2\lambda + 17 = 0$

$\lambda = \begin{cases} -1 + 4i \\ -1 - 4i \end{cases}$

$\underline{-1}$ $\Downarrow$ α, $\underline{-4i}$ $\Downarrow$ β

$$y = C_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x + C_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$$

Kétváltozós függvények

Kétváltozós fg.-ek dif. számítása

x szerinti deriváláskor az y-t konstansnak kezeljük és fordítva

pl: $f(x,y) = x^3 - y^2 + x^2 - y^3$

$f'_x(x,y) = 3x^2 - 0 + 2x - 0 = 3x^2 + 2x$

$f'_y(x,y) = 0 - 2y + 0 - 3y^2 = -2y - 3y^2$

$f''_{xx}(x,y) = 6x + 2$ $\qquad$ $f''_{yy}(x,y) = -2 - 6y$

$f''_{xy}(x,y) = 0$ $\quad = \quad$ $f''_{yx}(x,y) = 0$

Gradiens

$\operatorname{grad} f(x,y) = (f'_x(x,y);\ f'_y(x,y))$

Hesse-mátrix: $H(f(x,y)) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}$

Iránymenti derivált

$f'_{\underline{v}} = \langle \operatorname{grad} f;\ \underline{e}_v \rangle =$

$= f'_x(x,y) \cdot \frac{1}{\|v\|} \cdot \underline{v_x} + f'_y(x,y) \cdot \frac{1}{\|v\|} \cdot \underline{v_y}$

- $\underline{e}_v \left(\frac{v_x}{\|v\|};\ \frac{v_y}{\|v\|} \right)$

$\|v\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Érintő sík

S: $n_1 \cdot (x-x_0) + n_2 \cdot (y-y_0) + n_3 \cdot (z-z_0) = 0$

$(n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = n_1 \cdot x_0 + n_2 \cdot y_0 + n_3 \cdot z_0)$

$\underline{v}_x = (1; 0; f'_x(x_0; y_0))$ $\qquad z_0 = f(P_0)$

$y_x = (0; 1; f'_y(x_0; y_0))$

$\underline{n}\,(f'_x; f'_y; -1)$

Szélsőérték

csak azokban a pontokban lehet ahol $f'_x(x,y) = 0$ és $f'_y(x,y) = 0$

↳ ezek az ú.n. STACIONÁRIUS pontok

Ha egy STAC pontban ~~det~~ $\det H(f(x,y)) > 0$ van szélsőérték
$\det H(f(x,y)) < 0$ nincs -"-
$\det H(f(x,y)) = 0$?

pl: $f(x,y) = x^2 - 8x + y^2 + 10y - 3$

$f'_x = 2x - 8$ $\qquad f''_{xx} = 2$ $\qquad f''_{xy} = f''_{yx} = 0$

$f'_y = 2y + 10$ $\qquad f''_{yy} = 2$

$H(f(P)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ det = főátlóban lévő számok szorzata - mellékátlóban lévő számok szorzata

$\det H(f(P)) = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4$

↓

van szélsőérték

$2x - 8 = 0$ $\qquad 2y + 10 = 0$

$x = 4$ $\qquad y = -5$

$f''_{xx}(P_0) = 2 \rightarrow$ minimuma van

STAC pont $P(4;5)$

Ha $f''_{xx} > 0$ ∪ konvex → ott minimuma van

Ha $f''_{xx} < 0$ ∩ konkáv → ott maximuma van

Mátrixok

$$A_{(n\times k)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & & \ddots & & \\ a_{31} & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & & & & a_{nk} \end{bmatrix}$$

Műveletek

$$B = A\cdot C = \begin{bmatrix} a\cdot c_{11} & a\cdot c_{12} & \dots \\ & & a\cdot c_{nk} \end{bmatrix} \qquad b_{ij} = c_{ij}\cdot a \qquad \begin{matrix} 1\le i\le n \\ 1\le j\le k \end{matrix}$$

$$B = A + C = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots \\ & a_{nk}+b_{nk} \end{bmatrix} \qquad b_{ij} = c_{ij} + a_{ij}$$

$$B = A - C = \begin{bmatrix} a_{11}-c_{11} & \dots \\ & a_{nk}-c_{nk} \end{bmatrix} \qquad b_{ij} = a_{ij} - c_{ij}$$

$\left.\right\}$ $A\ (n\times k)$, $C\ (n\times k)$!

Két mátrix szorzása

$A_{(n\times k)}$ $B_{(k\times m)}$ Akkor létezik $A\cdot B$ és $C = A\cdot B$ akkor

$$c_{ij} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} \dots = \sum_{m=1}^{k} a_{im}\cdot b_{mj}$$

Falk módszer

pl: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$A\cdot B =$

$$\begin{array}{cc|cc} & & \multicolumn{2}{c}{B} \\ & & 6 & 5 \\ & & 4 & 3 \\ & & 2 & 1 \\ \hline A & 1\ 2\ 3 & 20^{*} & 14 \\ & 4\ 5\ 6 & 56 & 41 \end{array}$$

$^{*}(6\cdot 1 + 2\cdot 4 + 3\cdot 2)$

$B\cdot A =$

$$\begin{array}{cc|ccc} & & \multicolumn{3}{c}{A} \\ & & 1 & 2 & 3 \\ & & 4 & 5 & 6 \\ \hline & 6\ 5 & 26^{*} & 37 & 48 \\ B & 4\ 3 & 16 & 23 & 30 \\ & 2\ 1 & 6 & 9 & 12 \end{array}$$

$^{*}(6\cdot 1 + 4\cdot 5)$

Transzponálás

$$\underset{(n\times k)}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & \end{bmatrix} \rightarrow B = A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{1k} & & & \end{bmatrix} \quad b_{ij} = a_{ji}$$

Műveletek tulajdonságai

$\alpha \cdot \beta \cdot A = \alpha(\beta A) = (\alpha \cdot \beta) A$

$A + B = B + A$

$(A + B) + C = A + B + C$

$\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$

$(A^t)^t = A$

$(\alpha A)^t = \alpha (A^t)$

$A \cdot B \neq B \cdot A$

$(AB) \cdot C = A(BC) = ABC$

$A(B + C) = AB + AC$

$(A + B)C = AC + BC$

$(A + B)^t = A^t + B^t$

$(AB)^t = A^t \cdot B^t$

Speciális mátrixok

1, négyzetes mátrix

$$\underset{(n\times n)}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2, egységmátrix

$$\underset{(n\times n)}{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$I \cdot A = A$

3, nulla mátrix

$$\underset{(n\times k)}{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

$A + O = A$

$A \cdot O = O$

4, vektor

sor

$V = [v_1 \; v_2 \; v_3]$

oszlop

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Determinánsok

$\underset{(n\times n)}{A} \rightarrow \det(A) = |A| \leftarrow$ az A mátrixhoz rendelt szám

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\quad \det(A) = \underset{\text{(főátló)}}{ad} - \underset{\text{(mellékátló)}}{b \cdot c}$ $\Big\}$ 2x2 mátrix

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & \end{bmatrix}$ $\quad \det(A) = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \ldots + a_{1n} \cdot A_{1n}$

előjeles aldeterminánsok

A_{ij}-t úgy kapjuk meg, hogy elhagyjuk az i sort és j oszlopot

előjele: szorozzuk $(-1)^{i+j}$-vel

$\Big\}$ nxn mátrix

pl: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) + (-2) \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = 0$$

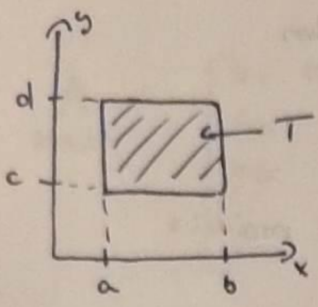
pl: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk az első sor számszorosával}]{} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$

1. oszlop szerinti determináns

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & -9 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 0$$

(a többinek az értéke 0)

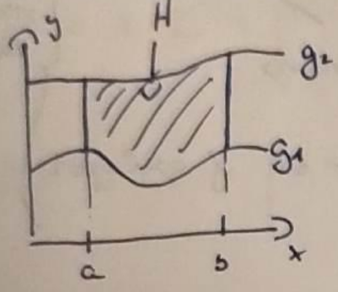
Kétváltozós függvények integrálása



$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$$

$$\iint_T f(x,y)\,dT = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

integrálás normáltartományon



$$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b;\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

$$\iint_H f(x,y)\,dH = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \quad !$$

súlypont kiszámítása

$S(M_x, M_y)$

$$M_x = \frac{\iint_H x\,dH}{\iint_H 1\,dH} \qquad M_y = \frac{\iint_H y\,dH}{\iint_H 1\,dH}$$