Tartalomjegyzék

①

Vektorok

összeadás

$\underline{a} + \underline{b} = \underline{a} + \underline{b}$

$(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$

kivonás

$\underline{a} - \underline{b} \neq \underline{b} - \underline{a}$

Szorzás számmal

$\|\alpha \underline{a}\| = |\alpha| \cdot \|\underline{a}\| \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

- $\alpha \underline{a}$: $\underline{a}$ állása megegyezik
- $\alpha < 0 \to \alpha \underline{a}$ és $\underline{a}$ irányítása ellentétes
- $\alpha > 0 \to \alpha \underline{a}$ és $\underline{a}$ irányítása azonos

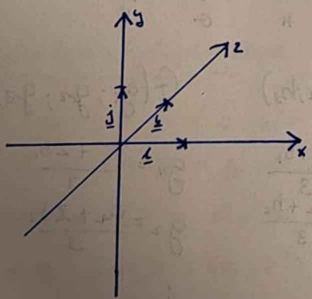
$\alpha(\underline{a} + \underline{b}) = \alpha \underline{a} + \alpha \underline{b}$

Tétel:

Ha adott 3 nem egysíkú vektor a térben akkor bármely $\underline{V}$ egyértelműen felbontható velük párhuzamos összetevőkre

Tehát, egyértelműen léteznek olyan, hogy

$\underline{V} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c} \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$



$\underline{V} = \alpha \underline{i} + \beta \underline{j} + \gamma \underline{k}$

$\|\underline{i}\| = \|\underline{j}\| = \|\underline{k}\| = 1$

$\underline{i} \perp \underline{j} \quad \underline{i} \perp \underline{k} \quad \underline{j} \perp \underline{k}$

2

Vektorok összeadása

$\underline{a}(a_1; a_2; a_3)$ $\quad$ $\underline{b}(b_1; b_2; b_3)$

$\underline{a} + \underline{b}\,(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2;\ a_3 + b_3)$

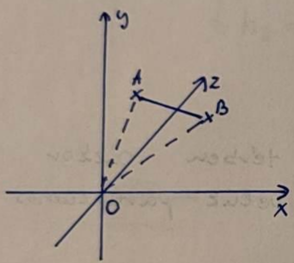
Vektorok kivonása

$\underline{a} - \underline{b}\,(a_1 - b_1;\ a_2 - b_2;\ a_3 - b_3)$

Vektor szorzása számmal

$\alpha\underline{a}\,(\alpha a_1;\ \alpha a_2;\ \alpha a_3)$

Pont koordinátái

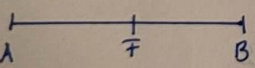


$\overrightarrow{OA} = \underline{a}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \underline{b} - \underline{a}$

$\overrightarrow{AB}\,(b_1 - a_1;\ b_2 - a_2;\ b_3 - a_3)$

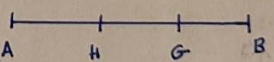
Szakasz felezőpontja



$F(f_1; f_2; f_3)$

$$f_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$
$$f_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$$
$$f_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}$$

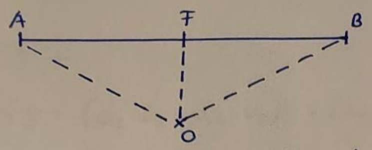
Szakasz harmadolópontja



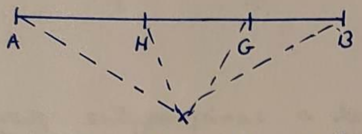
$H(h_1; h_2; h_3)$ $\quad$ $G(g_1; g_2; g_3)$

$$h_1 = \frac{2a_1 + b_1}{3} \qquad g_1 = \frac{a_1 + 2b_1}{3}$$
$$h_2 = \frac{2a_2 + b_2}{3} \qquad g_2 = \frac{a_2 + 2b_2}{3}$$

$\vdots$ $\qquad$ $\vdots$



$$\vec{OF} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} \Rightarrow \begin{cases} f_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1) \\ f_2 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2) \\ f_3 = \dots \end{cases}$$



$$\vec{OH} = \frac{2\vec{OA} + \vec{OB}}{3} \Rightarrow \begin{cases} h_1 = \frac{1}{3}(2a_1 + b_1) \\ h_2 = \frac{1}{3}(2a_2 + b_2) \\ h_3 = \dots \end{cases}$$

Vektorok szorzása

- Skaláris szorzat

Def: Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ skaláris szorzatának nevezzük az $\langle a; b \rangle = \|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\| \cdot \cos\gamma$, ahol γ $\underline{a}$ és $\underline{b}$ szöge

$0^\circ \leq \gamma \leq 180^\circ$

Műveletek tulajdonságok

- $\langle \underline{a}; \underline{b} \rangle = \langle \underline{b}; \underline{a} \rangle$
- $\langle \underline{a}; \underline{b} \rangle \cdot \underline{c} \neq \underline{a} \cdot \langle \underline{b}; \underline{c} \rangle$
- $\langle \alpha \underline{a}; \underline{b} \rangle = \alpha \langle \underline{a}; \underline{b} \rangle \qquad \alpha \in \mathbb{R}$
- $\langle \underline{a}; \underline{b} + \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}; \underline{b} \rangle + \langle \underline{a}; \underline{c} \rangle$
- $\langle \underline{a}; \underline{b} \rangle = 0$ akkor és csak akkor, ha $\underline{a} \perp \underline{b}$

4

Tétel:

$$\langle \underline{a}; \underline{b} \rangle = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

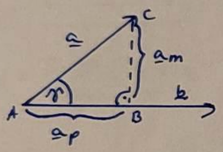
Alkalmazások:

(I) $\| \underline{a} \| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

(II) $\cos\gamma = \dfrac{\langle \underline{a}; \underline{b} \rangle}{\| \underline{a} \| \cdot \| \underline{b} \|}$

(III) $\underline{e}_a = \dfrac{1}{\| \underline{a} \|} \cdot \underline{a}$

(IV) vektor felbontása vele párhuzamos és merőleges összetevőre



$$\underline{a}_p + \underline{a}_m = \underline{a}$$

$$\underline{a}_p = \frac{\langle \underline{a}; \underline{b} \rangle}{\| \underline{b} \|^2} \cdot \underline{b}$$

- **Vektoriális szorzat**

Def: az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektoriális szorzatának nevezzük az $\underline{a} \times \underline{b}$, amire a következők igazak:

- $\| \underline{a} \times \underline{b} \| = \| \underline{a} \| \cdot \| \underline{b} \| \cdot \sin\gamma$
- $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a}$

  $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{b}$

Műveleti tulajdonságok

- $\underline{a} \times \underline{b} \neq \underline{b} \times \underline{a}$
- $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} \neq \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})$
- $\alpha(\underline{a} \times \underline{b}) = \alpha \underline{a} \times \underline{b}$
- $\underline{a} \times \underline{b} = 0$ akkor és csak akkor, ha $\underline{a} \parallel \underline{b}$
- $T_{paralelogramma} = \| \underline{a} \times \underline{b} \|$ $\quad T_\Delta = \frac{1}{2}(\| \underline{a} \times \underline{b} \|)$

⑤

Tétel:

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2)\underline{i} + (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3)\underline{j} + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)\underline{k}$$

Megjegyzés:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2)\underline{i} - (a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1)\underline{j} + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)\underline{k}$$

④ Háromszög súlypontjának a koordinátái

$S(s_1; s_2; s_3)$

$$s_1 = \frac{2 \cdot \frac{a_1 + b_1}{2} + c_1}{3} = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}$$

$$s_2 = \frac{2 \cdot \frac{a_2 + b_2}{2} + c_2}{3} = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}$$

$$s_3 = \dots = \frac{a_3 + b_3 + c_3}{3}$$

· Vegyes szorzat

$$\langle \underline{a} \times \underline{b} ; \underline{c} \rangle = \underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$$

Használata:

$\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = 0$ akkor és csak akkor ha mind a 3 vektor egy síkon helyezkedik el

$V_{pp} = |\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}| \leftarrow$ paralelepipedon térfogata

$V_t = \frac{|\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}|}{6} \leftarrow$ tetraéder térfogata

6

Egyenesek

$\underline{r} = \vec{OP} + t \cdot \underline{v} \qquad t \in \mathbb{R}$

r az egyenes futópontjának a helyvektora

$$R \begin{cases} r_1 = p_1 + t \cdot v_1 \\ r_2 = p_2 + t \cdot v_2 \\ r_3 = p_3 + t \cdot v_3 \end{cases}$$

Sík

$\langle r - \vec{OP}, n \rangle = 0 \qquad$ ($\leftarrow$ normálegyenlet)

$r = (x; y; z)$ a futópont helyvektora

$$\left.\begin{array}{l} n_1 x_1 + n_2 y + n_3 z + D = 0 \\ D = -n_1 \cdot p_1 - n_2 \cdot p_2 - n_3 \cdot p_3 \end{array}\right\} n_1 x + n_2 y + n_3 z = n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2 + n_3 \cdot p_3$$

- 2 sík metszés vonala

$S_1 : n_{11} x + n_{12} y + n_{13} z = -D_1$

$S_2 : n_{21} x + n_{22} y + n_{23} z = -D_2$

$n_1 \nparallel n_2 \iff S_1 \nparallel S_2 \Rightarrow$ létezik megoldás

Válasszuk meg az egyik ismeretlen értékét $\quad$ pl: $x = 0$

Helyettesítsük be mindkét egyenletbe!

⋮

Kijön 1 pont koordinátája : A

$\Downarrow$

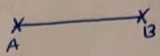
Behelyettesítünk egy másik ismeretlennek az értékébe pl: $y = 0$

Kijön 2. pont koordinátája : B

$$e: \begin{cases} x = a_1 + \underline{a}_1 \cdot t \\ y = a_2 + \underline{a}_2 \cdot t \\ z = a_3 + \underline{a}_3 \cdot t \end{cases} \qquad \vec{AB} = \underline{a} \qquad A(a_1; a_2; a_3) \qquad \leftarrow \text{metszés vonal egyenlete}$$

Térelemek távolsága

I. Két pont távolsága:



$$d_{AB} = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

II. Pont és egyenes távolsága:

$$d_{pe} = \frac{\|\overrightarrow{P_eP} \times \underline{v}_e\|}{\|\underline{v}_e\|}$$

III. Pont és egy sík távolsága:

$$d_{ps} = \frac{|\langle \overrightarrow{P_sP} ; \underline{n}_s \rangle|}{\|\underline{n}_s\|}$$

IV. Két egyenes távolsága

- (a) $e \parallel f$

  $d_{P_e f}$ = pont és egyenes távolsága

- e és f kitérőek

  d_{ef} = pont és sík távolsága $\quad \underline{n}_s = \underline{v}_e \times \underline{v}_f$

V. Egyenes és sík távolsága

d_{es} = pont és sík távolsága

VI. 2 sík távolsága

d_{s_1,s_2} = két pont távolsága

⑧

Térelemek szöge

Ⓘ 2 egyenes szöge φ_{ef}

$$\cos\alpha = \frac{\langle v_e ; v_f \rangle}{\|v_e\| \cdot \|v_f\|} \rightarrow \alpha \qquad 0° \le \alpha \le 180°$$

Ha $\alpha \le 90° \rightarrow \alpha = \varphi_{ef}$

Ha $\alpha \gtrsim 90° \rightarrow \alpha = 180° - \varphi_{ef}$

Ⓘⓘ 2 sík szöge φ_{s_1, s_2}

$$\cos\alpha = \frac{\langle n_1 ; n_2 \rangle}{\|n_1\| \cdot \|n_2\|} \rightarrow \alpha$$

Ha $\alpha \le 90° \rightarrow \alpha = \varphi_{ef\, s_1, s_2}$

Ha $\alpha > 90° \rightarrow \alpha = 180° - \varphi_{s_1, s_2}$

Ⓘⓘⓘ sík és egyenes szöge φ_{es}

$$\cos\alpha = \frac{\langle n_1 ; v_e \rangle}{\|n_1\| \cdot \|v_e\|} \Rightarrow \alpha$$

Ha $\alpha \le 90° \rightarrow \varphi_{es} = 90° - \alpha$

Ha $\alpha > 90° \rightarrow \varphi_{es} = \alpha - 90°$

9

Komplex számok

algebrai alak: $z = a + bi$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$

a: z valós része

b: z képzetes része

$i^2 = -1$

Műveletek

⊕ $z_1 + z_2 = (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

⊖ $z_1 - z_2 = (a-c) + (b-d)i$

⊗ $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

⊘ $\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + \left(\frac{ad+bc}{c^2+d^2}\right)i$

Komplex számok konjugáltja

$z = a + bi \qquad \bar{z} = a - bi$

$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

trigonometrikus alak: $z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

$r = |z| \qquad r = \sqrt{a^2+b^2}$

$\varphi \Rightarrow 0° \leq \varphi \leq 360° \qquad tg\,\varphi^* = \left|\frac{b}{a}\right| \to \varphi^*$

φ meghatározása φ^*-ból

I. síknegyed $\varphi = \varphi^*$

II. síknegyed $\varphi = 180° - \varphi^*$

III. síknegyed $\varphi = 180° + \varphi^*$

IV. síknegyed $\varphi = 360° - \varphi^*$

10

Műveletek

$\oplus$ nem elvégezhető

$\ominus$ nem elvégezhető

$\circledast$ $z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2)(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

$\div$ $\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

$\wedge$ $z^n = r^n(\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi))$

$\sqrt{\ }$ $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 360 \cdot k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 360 \cdot k}{n}\right)\right)$ $\quad k = 0, 1 \ldots n-1$

Függvények

Def: Ha A halmaz elemeihez egyértelműen hozzárendeljük B halmaz elemeit → függvényt kapunk

$f(x)$

Összetett függvény

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

pl: $f(x) = \sin x$ $\quad (f \circ g)(x) = \sin(x^2)$

$g(x) = x^2$ $\quad (g \circ f)(x) = \sin^2 x$

f: külső függvény
g: belső függvény

⑪

Inverz függvények

Ha f (~~kölcsönös~~) kölcsönösen egyértelmű, akkor meg fordítható a hozzárendelése jele: f^{-1}

(~~f(x)...~~) kiszámítása:

pe:

$f(x) = 2x + 3$ $y = 2x + 3$

$\downarrow$

$f^{-1}(x) = 2y + 3$ $x = 2y + 3$

$y = \frac{x-3}{2} = f^{-1}(x)$

x-et és y-t felcseréljük az egyenletben és kifejezzük y-t

Függvény ábrázolás 13. lap!

Ábrázolás lineáris transzformációkkal

alapfüggvény $f(x)$

① $f(x) \to f(ax)$

x-szel ∥ nyújtás / összenyomás } aránya $\boxed{\frac{1}{a}}$

Ⓘⓘ $f(x) \to f(x+b)$

x-szel ∥ eltolás } $\boxed{-b}$-vel

$f(x) \to f(ax+b)$

x-szel ∥ eltolás } $\boxed{-\frac{b}{a}}$-val

Ⓘⓘⓘ $f(x) \to f(x) + d$

y-nal ∥ eltolás } $\boxed{d}$-vel

Ⓘⓥ $f(x) \to f(x) \cdot c$

y-nal ∥ nyújtás / összenyomás } aránya $\boxed{c}$

ha c negatív akkor tükrözni kell

12

Szám sorozatok

olyan függvény ahol $D_f = \mathbb{N}$

Def: $\{a_n\}$ szig. mon. csökken, ha bármely k és $l \in \mathbb{N}$ számok esetén, ha $k < l$ akkor $a_k > a_l$

Ha minden n szám esetén $a_{n+1} - a_n < 0$ akkor az $\{a_n\}$ szig. mon. csökken

Def: Azt mondjuk, hogy az $\{a_n\}$ alulról korlátolt és k alsó korlát, ha minden n esetén $a_n \geq k$

szig. mon. csökken $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ felülről korlátos és $\underbrace{K = a_1}_{\text{legkisebb felső korlát}}$

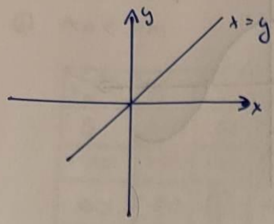
Def: Azt mondjuk, hogy az $\{a_n\}$ konvergens és határértéke A, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható N (~~küszöbindex~~) küszöbszám úgy, hogy ha $n > N$ akkor $|A - a_n| < \varepsilon$

Tétel: Ha $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$ és $\lim\limits_{n \to \infty} b_m = B$ akkor létezik $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_m)$ és $= A + B$

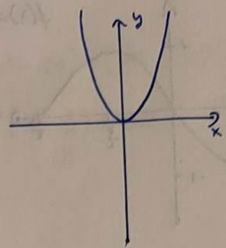
ugyan ez kimondható a többi értelmezhető műveletre is

Def: Az $\{a_n\}$ tágabb értelemben vett konvergens és 'határértéke' ∞, ha bármely K számhoz megadható N küszöb úgy, hogy ha $n > N$ akkor $a_n > K$

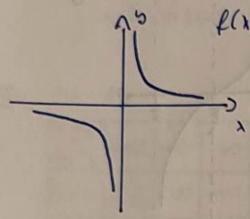
Függvény ábrázolás



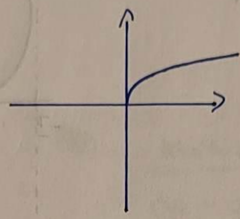
$f(x) = x$



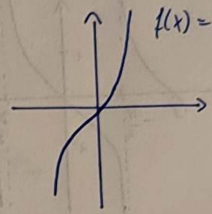
$f(x) = x^2$



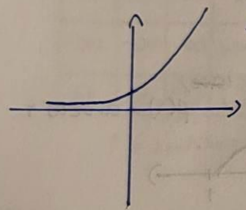
$f(x) = \frac{1}{x}$



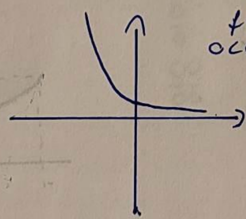
$f(x) = \sqrt{x}$



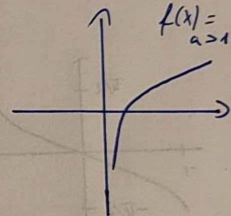
$f(x) = x^3$



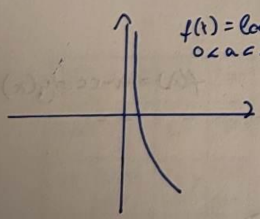
$f(x) = a^x$
$a > 1$



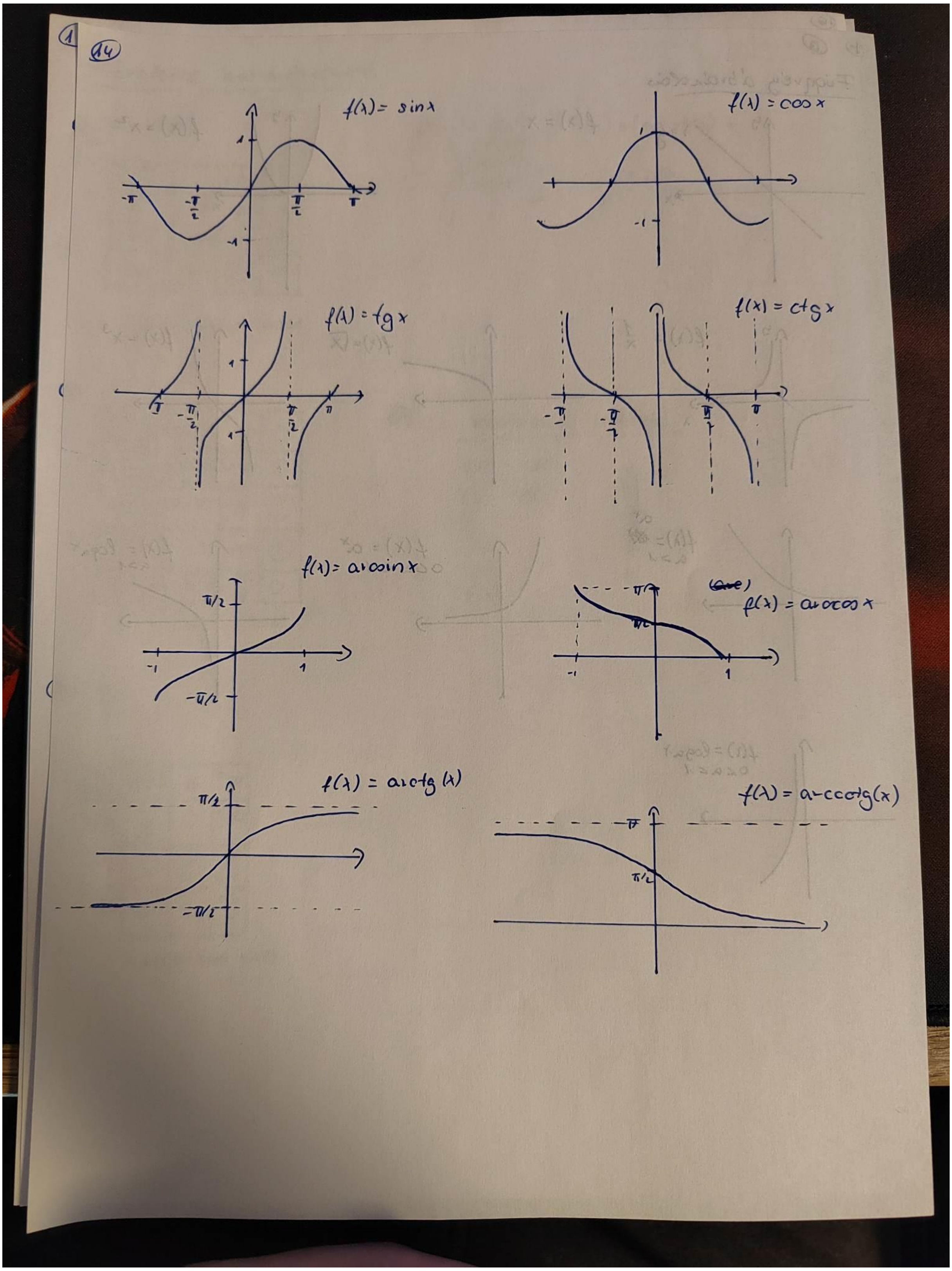
$f(x) = a^x$
$0 < a < 1$



$f(x) = \log_a x$
$a > 1$



$f(x) = \log_a x$
$0 < a < 1$


14
f(x)= sin x
f(x) = cos x
f(x) = tg x
f(x) = ctg x
f(x)= arcsin x
f(x) = arccos x
f(x) = arctg (x)
f(x) = arcctg(x)

15

Műveletek határértékkel

I. $a_n + b_n$

$b_n \backslash a_n$	A	$+\infty$	$-\infty$
B	$A+B$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

? = kritikus eset

Pl: $\lim_{n\to\infty}(n^2-2n) = (\infty - \infty) =$

$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{n^2}_{\infty}(1 - \underbrace{\tfrac{2}{n}}_{0}) = \infty$

II. $a_n \cdot b_n$

$b_n \backslash a_n$	$A\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$B\neq 0$	$A\cdot B$	$+\infty$	$-\infty$	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?
0	0	?	?	0

? = kritikus eset

Kritikus esetek

$\infty - \infty$

$0 \cdot \infty$

$\frac{0}{0}$

$\frac{\infty}{\infty}$

!

III. $\frac{a_n}{b_n}$

$b_n \backslash a_n$	$A\neq 0$	0	$\pm\infty$
$B\neq 0$	$\frac{A}{B}$	0	$\pm\infty$
0	$\pm\infty$ div	?	$\pm\infty$ div
$\pm\infty$	0	0	?

? = kritikus eset

16

Nevezetes határérték

$$\lim_{n \to \infty} q^n \begin{cases} \infty, \text{ ha } q > 1 \\ 1, \text{ ha } q = 1 \\ 0 \text{ ha } q < 1 \text{ és } q > -1 \\ \text{div ha } q < -1 \end{cases}$$

Függvények határértékei

Def: az f függvény határértéke a ∞-ben az A szám ha minden ~~$\varepsilon < 0$~~ $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan x_0 küszöbszám, hogyha $x > x_0$ akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$

Def: az f függvény határértéke a ∞-ben $+\infty$ ha bármely K számhoz megadható x_0, hogy ha $x > x_0$ akkor $f(x) > K$

Def: az f függvény határértéke az x_0 helyen balról A, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan δ, hogy ha $x < x_0$ és $x > x_0 - \delta$, akkor $|A - f(x)| < \varepsilon$

① gyöktényezős alak

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

x_1 és x_2 az egyenlet gyökei

Def: az f függvény az x_0 helyen folytonos ha létezik $\lim_{x \to x_0} f(x)$ határértéke és a függvény x helyen felvett értéke megegyezik a határértékkel

$f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

17

Tétel: minden elemi alapfüggvény~~nek~~ folytonos

Tétel: Ha a folytonos függvényekkel végzünk műveletet az eredmény is folytonos lesz

Nevezetes határérték~~ek~~

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1 \rightarrow \frac{\sin(kx)}{kx} = 1$$

+

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Differenciálszámítás

a derivált: az f deriváltja az a függvény amely $x \mapsto f'(x)$ minden olyan helyen ahol f differenciálható

Tétel: Ha f differenciálható az x_0 helyen akkor f folytonos az x_0 helyen

19

Alapderiváltak

$f(x)$	$f'(x)$
$c\ (\in \mathbb{R})$	0
x^α	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{x^2+1}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{x^2+1}$
(+) $\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Deriválási szabályok

I. $(c \cdot f(x))' = c \cdot f(x)$

II. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

III. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

IV. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

V. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Függvény érintőjének egyenlete

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y_0 = f(x_0)$$

$$m = f'(x_0)$$

L'Hospital - szabály

Ha a $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határértéke típusa $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ akkor

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

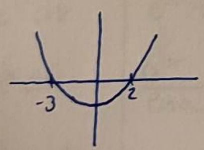
1 Határérték ábrázolással

Pl: $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2+10x+21}{x^3+4x^2-3x-18} = \lim\limits_{x \to -3} \frac{x+7}{x^2+x-6} = \left(\frac{4}{0}\right)$

$\lim\limits_{x \to -3^+} \frac{x+7}{x^2+x-6} = \frac{4}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -3^-} \frac{x+7}{x^2+x-6} = \frac{4}{0^-} = -\infty$

nevező ábrázolva:



Teljes függvény vizsgálat

① D_f: Értelmezési tartomány

② tengely metszetek:

$f(0) = ?$ ⇓ $y = ?$

$f(x) = 0$ ⇓ $\underbrace{x = ?}_{\text{zérushelyek}}$

③ Szimmetria

(~~[illegible]~~)

Ha, $f(x) = f(-x)$ akkor páros

Ha, $f(-x) = -f(x)$ akkor páratlan

④ Határértékek (~~a függvény~~)

⑤ Monotonitás

(~~[illegible]~~: ~~[illegible]~~)

$f'(x)$ kiszámítása

$f'(x) = 0$ $x = ?$

első zh-ig vagy szakadásig

x	$x < \dots$	zh $= x$	
f'	$-$ / $+$	0	....
f	↘ / ↗	lokális min/max $y = ?$	

csökken / nő

⑥ Konvexitás

$f''(x)$ kiszámítása

$f''(x) = 0$

$x = ?$

x	$x < \dots$	$x = \dots$	
f''	$-$ / $+$	0	
f	∩ / ∪	inf pont	

akkor van inf.pont. ha vált a függvény!

⑦ Ábrázolás

⑧ R_f: Értékkészlet

21

Integrál számítás

Határozatlan integrált

Adott $f(x)$ és keressük olyan $F(x)$ függvényt melyre igaz, hogy $F'(x) = f(x)$

Tétel: Ha F_1 és F_2 primitív függvények f-nek akkor $F_1 - F_2 = \ldots\ldots$ $\to$ f összes prim fg-nét megkapjuk, ha egy prim fug.-hez tetszőleges konstanst adunk $(F(x)+C)$

Alapintegrálok

$\int f(x)$	$f(x)$
$\int 1\,dx$	$x + C$
$\int x^{\alpha}\,dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\int x^{-1}\,dx$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\int e^{x}\,dx$	$e^{x} + C$
$\int a^{x}\,dx$	$\frac{a^{x}}{\ln a} + C$
$\int \sin x\,dx$	$-\cos x + C$

$\int f(x)$	$f(x)$
$\int \cos x\,dx$	$\sin x + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$	$\mathrm{tg}\,x + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$	$-\mathrm{ctg}\,x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$\arcsin x + C$ $(-\arccos x + C)$
$\int \frac{1}{x^2+1}$	$\mathrm{arctg}\,x + C$ $(-\mathrm{arcctg}\,x + C)$

22

Szabályok

I $\displaystyle\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C$

II $\displaystyle\int f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C$

III $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$

IV (parciális - integrálás)

$$\int f\cdot g' = f\cdot g - \int f'\cdot g$$

alkalmazása:

a, $\displaystyle\int \underbrace{\text{polinom}}_{f} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}\sin\\ \cos\\ \exp\end{pmatrix}}_{g'}$

b, $\displaystyle\int \underbrace{\text{polinom}}_{g'} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}\log\\ \text{arc..}\end{pmatrix}}_{f}$

c, $\displaystyle\int \exp \cdot \begin{pmatrix}\sin\\ \cos\end{pmatrix}$

(~~[illegible]~~)

23

Határozott integrálás

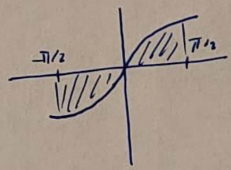
(függvény grafikonja alatti terület)

$$T = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x_i \to 0}} \left(\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\cdot \Delta x_i \right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Tétel: (Newton - Leibitz szabály)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

① T fg. grafikonja és x között



Pl: $f(x) = \sin x$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \sin x\,dx = 0$$

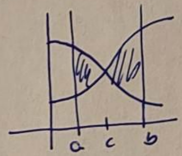
$$T = \underbrace{\left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x\,dx \right|}_{T_1} + \underbrace{\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx}_{T_2} = 2\cdot \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x\,dx \right|$$

$T_1 = T_2$ szim. miatt

$$T = 2\left[-\cos x\right]_0^{\pi/2} = 2\left(-\cos\tfrac{\pi}{2} + \cos 0\right) = 2$$

② T két fg. grafikonja között

$$T = \left| \int_a^c (f(x) - g(x))\,dx \right| + \left| \int_c^b (f(x) - g(x))\,dx \right|$$



(III) Forgatott testek térfogata

$$V_f = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$