1° Fecha de parcial 1c2024 ~ Tema 1

Enunciados

Ejercicio 1

Sean Σ la superficie de ecuación $x^2y+xz-e^y+z^2$ y Γ la curva de parametrización $\vec{X} = (t^2, 0, 1+t)$.

1. Encuentre los puntos donde se intersecan Σ y Γ
2. Para cada puntp P hallado en el ítem 1, encuentre el plano tangente a Σ en P.

Ejercicio 2

Sea $f(x, y) = 3x^2 + 6xy + 2y^3$. Halle los puntos críticos de f y clasifíquelos.

Ejercicio 3

Pruebe que la ecuación $2xy - \cos(x)z + yz^2$ define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1 en un entorno de $(x_0, y_0) = (0, 1)$ tal que $f(0, 1) = 1$. Halle los versores en los cuales la derivada direccional de f en $(0, 1)$ se anula.

Ejercicio 4

Sea $g(x, y) = f(ye^x, x + 2y)$ con $f(r, s)$ un campo escalar de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$. Se sabe que $L(r, s) = 1 + 2r - 3s)$ es la aproximación lineal de f en $(1, 2)$. Halle el plano tangente y la recta normal al gráfico de g en el punto $(0, 1, g(0, 1))$

Ejercicio 5

Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(3xy)}{x^2+2y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Estudie la continuidad en $(0, 0)$ y la existencia de $f'_x(0, 0)$ y $f'_y(0, 0)$.

Resolución

Ejercicio 1

Planteamos la intersección

$$(x, y, z) : \begin{cases} x^2y + xz - e^y + z^2 = 0 & (1) \\ (x, y, z) = (t^2, 0, 1 + t), \ t \in \mathbb{R} & (2) \end{cases}$$

Reemplazando (2) en (1), tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow (t^2)^2\cdot(0) + t^2\cdot(1+t) - e^0 + (1+t)^2 = 0\\
&\Rightarrow t^2 + t^3 - 1 + 1 + 2t + t^2 = 0\\
&\Rightarrow t^3 + 2t^2 + 2t = 0\\
&\Rightarrow t(t^2 + 2t + 2) = 0
\end{aligned}
$$

La expresión cuadrática no tiene raíces reales, por lo que nos queda una única solución con $t = 0 \to (x, y, z) = (0, 0, 1)$ único punto de intersección entre Σ y Γ.

El plano tangente lo podemos sacar con el teorema de la función implícita, planteando la aproximación lineal de la función $z(x, y)$ en un entorno del punto $(0, 0, z(0, 0))$:

$$
\begin{array}{ll}
F(x,y,z) = x^2y + xz - e^y + z^2, & P_0 = (0,0,1)\\
F'_z(P_0) = (x+2z)|_{(0,0,1)} = 2 \neq 0 & \text{define } z(x,y) \text{ implícitamente}\\
& \\
F'_x(P_0) = (2xy+z)|_{(0,0,1)} = 1 & F'_y(P_0) = (x^2 - e^y)|_{(0,0,1)} = -1\\
z'_x(P_0) = -\frac{F'_x(P_0)}{F'_z(P_0)} = \frac{1}{2} & \\
z'_y(P_0) = -\frac{F'_y(P_0)}{F'_z(P_0)} = -\frac{1}{2} &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \Pi : z = z(0,0) + \nabla z(0,0)\cdot(x,y)\\
&\Rightarrow \Pi : \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}y - z + 1 = 0
\end{aligned}
$$

Ejercicio 2

Calculamos el gradiente de f, e igualamos ambas componentes a 0:

$$
\nabla f = (6x + 6y, 6x + 6y^2)
$$

$$
\begin{cases} 6x + 6y = 0 & (1)\\ 6x + 6y^2 = 0 & (2) \end{cases}
$$

De (1) queda que $y = -x$, reemplazando en (2) y simplificando tenemos que $y^2 - y = 0 \Rightarrow y = 0 \vee y = 1$. Obtenemos entonces 2 puntos que analizamos por el criterio de la matriz hessiana:

$$
P_1 = (0,0), \quad H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 12y \end{pmatrix}|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1)
$$

$$
P_2 = (-1,1), \quad H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 12y \end{pmatrix}|_{(-1,1)} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \quad (2)
$$

La matriz hessiana en P_1 tiene determinante negativo y $f''_{xx}(P_1) < 0$, por lo que P_1 es un punto de ensilladura. En cambio, el determinante de la matriz hessiana de P_2 es positivo y $f''_{xx} > 0$, por lo que $H_f(P_2)$ queda definida positiva y podemos concluir que P_2 es un mínimo local de valor $f(P_2) = -1$

Ejercicio 3

Sea $F(x, y, z) = 2xy - \cos(x)z + yz^2$, se comprueba que $F(0, 1, 1) = 0$. Cabe aclarar que $F(0, 1, 0) = 0$ también, pero nos pide el enunciado que $f(0, 1) = 1$.

Para ver si esta función define $z = f(x, y)$ en un entorno del $(0, 1)$, comprobamos la derivada parcial de F con respecto a z:

$$F'_z(0, 1, 1) = (-\cos(x) + 2yz)|_{(0,1,1)} = 1 \neq 0$$

Por lo tanto, queda definida una función $f(x, y)$ de clase C^1 tal que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ en un entorno del $(0, 1)$. Calculamos las derivadas parciales:

$$f'_x(0, 1) = -\frac{F'_x(0, 1, 1)}{F'_z(0, 1, 1)} = -\frac{2y + z\sin(x)}{-\cos(x) + 2yz}|_{(0,1,1)} = -2$$

$$f'_y(0, 1) = -\tfrac{F'_y(0,1,1)}{F'_z(0,1,1)} = -\tfrac{2x+z^2}{-\cos(x)+2yz}|_{(0,1,1)} = -1$$

$$\nabla f(0, 1) = (-2, -1);\ ||\nabla f(-2, -1)|| = \sqrt{5}$$

Los versores que anulan la derivada direccional serán entonces los perpendiculares a la dirección del gradiente:

$$\hat{v_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)$$

$$\hat{v_2} = \tfrac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2)$$

Ejercicio 4

Sean los campos escalares $r(x, y) = ye^x$ y $s(x, y) = x + 2y$, vale entonces que $g(x, y) = f(r(x, y), s(x, y))$. Calculamos las derivadas parciales de g con la regla de la cadena:

$$\begin{array}{l}
g'_x(x, y) = f'_r(r(x, y), s(x, y))\cdot r'_x(x, y) + f'_s(r(x, y), s(x, y))\cdot s'_x(x, y) \\
g'_y(x, y) = f'_r(r(x, y), s(x, y))\cdot r'_y(x, y) + f'_s(r(x, y), s(x, y))\cdot s'_y(x, y) \\
\Downarrow \\
g'_x(0, 1) = f'_r(1, 2)\cdot r'_x(0, 1) + f'_s(1, 2)\cdot s'_x(0, 1) \\
g'_y(0, 1) = f'_r(1, 2)\cdot r'_y(0, 1) + f'_s(1, 2)\cdot s'_y(0, 1) \\
g(0, 1) = f(1, 2) = L(1, 2) = -3
\end{array}$$

Las derivadas de r y s las calculamos directamente, mientras que las derivadas de f las podemos calcular usando la aproximación lineal provista:

$$f'_r(1,2) = L'_r(1,2) = 2 \quad f'_s(1,2) = L'_s(1,2) = -3$$

$$r'_x(0,1) = ye^x|_{(0,1)} = 1 \quad r'_y(0,1) = e^x|_{(0,1)} = 1$$

$$s'_x(0,1) = 1 \quad s'_y(0,1) = 2$$

$$g'_x(0,1) = -1 \quad g'_y(0,1) = -4$$

Con esto, pdoemos expresar el plano tangente como el polinomio de taylor de g de grado 1, y la recta normal en función al plano:

$$\Pi : z = g(0,1) + \nabla g(0,1) \cdot ((x,y) - (0,1))$$

$$\Pi : -x - 4y - z + 1 = 0$$
$$\Gamma : (x,y,z) = (0,1,-3) + \lambda(-1,-4,-1),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 5

Para analizar la continuidad, estudiamos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(3xy)}{x^2+2y^2}$$

Analizando los límites por $y = 0$ e $y = x$ se observa rápidamente que este límite no existe:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(0)}{x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x^2)}{3x^2} = 1$$

Como encontramos dos límites por caminos distintos que dan valores distintos, podemos concluir que el límite no existe y, por lo tanto, la función no es continua en el orígen.

En cuanto a las derivadas direccionales, podemos calcularlas por definición

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} f(h,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(0)}{h^2} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0} f(0,h) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(0)}{2h^2} = 0$$