WWW.UMT6174.SITE

2025

Memahami Pertidaksamaan **Aljabar**

untuk Pemahaman Lebih Baik

UMT6174.SITE

INSIGHT
UMT

Learn More

Pertidaksamaan Aljabar

BELAJAR PERTIDAKSAMAAN DENGAN PEMAHAMAN MENDALAM

by

UMT

Understanding Mathematical Thinking (UMT)

Preface

Kata pengantar ini berisi penjelasan mengenai tujuan buku ini, bagaimana pendekatannya, serta harapan penulis terhadap pembaca.

Buku ini disusun untuk membantu pembaca memahami pertidaksamaan aljabar secara intuitif dan konseptual sebelum mendalami perhitungannya secara formal. Tujuan kami adalah agar pembaca tidak hanya menghafal rumus, tetapi benar-benar menguasai logika di balik setiap langkah penyelesaian. Kami berharap buku ini dapat menjadi referensi yang bermanfaat bagi pelajar dan pengajar.

UMT
Februari 2025

Contents

Chapter 1

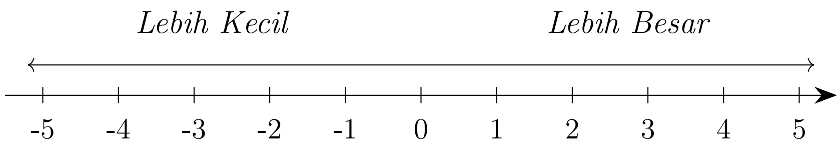
Materi Tingkat SMP

1.1 Pertidaksamaan Dasar

Sebelum kita melangkah lebih jauh ke dalam dunia aljabar, kita harus membangun fondasi yang kokoh mengenai konsep pertidaksamaan. Berbeda dengan persamaan yang berpusat pada pernyataan kesetaraan (‘=‘), pertidaksamaan adalah bahasa matematika untuk mendeskripsikan hubungan perbandingan atau urutan antara dua nilai.

1.1.1 Definisi Fundamental Tanda Pertidaksamaan

Inti dari semua konsep perbandingan dalam matematika adalah **garis bilangan**. Garis bilangan adalah representasi visual dari himpunan bilangan riil, di mana setiap titik merepresentasikan sebuah bilangan unik. Urutan antar bilangan didefinisikan secara mutlak oleh posisi relatif titik-titik tersebut.



Sebuah bilangan yang terletak di sebelah **kanan** bilangan lain *selalu* memiliki nilai yang lebih besar. Sebaliknya, bilangan yang terletak di sebelah **kiri** *selalu* memiliki nilai yang lebih kecil. Dari aksioma fundamental ini, kita dapat mendefinisikan keempat tanda pertidaksamaan.

- **Tanda $>$ (Lebih Dari)**
  Notasi $a > b$ adalah sebuah pernyataan matematis yang menegaskan bahwa posisi bilangan a pada garis bilangan berada di sebelah **kanan** dari posisi bilangan b.

  Contoh: Pernyataan $5 > 2$ adalah **benar** karena 5 terletak di kanan 2. Pernyataan $-2 > -5$ juga **benar** karena -2 terletak di kanan -5.

- **Tanda $<$ (Kurang Dari)**
  Notasi $a < b$ adalah pernyataan yang menegaskan bahwa posisi bilangan a pada garis bilangan berada di sebelah **kiri** dari posisi bilangan b.

  Contoh: Pernyataan $3 < 8$ adalah **benar** karena 3 terletak di kiri 8. Pernyataan $-10 < -1$ juga **benar** karena -10 terletak jauh di sebelah kiri -1.

- **Tanda $\geq$ (Lebih Dari atau Sama Dengan)**
  Notasi ini bersifat inklusif. Pernyataan $a \geq b$ adalah benar jika salah satu dari dua kondisi ini terpenuhi: $(a > b)$ **ATAU** $(a = b)$. Tanda ini menyatakan bahwa nilai a setidaknya sama dengan b, dan bisa jadi lebih besar.

  Contoh: $7 \geq 7$ adalah pernyataan **benar** karena kondisi $7 = 7$ terpenuhi. $8 \geq 7$ juga **benar** karena kondisi $8 > 7$ terpenuhi.

- **Tanda $\leq$ (Kurang Dari atau Sama Dengan)**
  Serupa dengan sebelumnya, pernyataan $a \leq b$ adalah benar jika salah satu dari dua kondisi ini terpenuhi: $(a < b)$ **ATAU** $(a = b)$. Tanda ini menyatakan bahwa nilai a tidak lebih dari b.

  Contoh: $4 \leq 4$ adalah pernyataan **benar** karena kondisi $4 = 4$ terpenuhi. $3 \leq 4$ juga **benar** karena kondisi $3 < 4$ terpenuhi.

1.1.2 Visualisasi Himpunan Penyelesaian pada Garis Bilangan

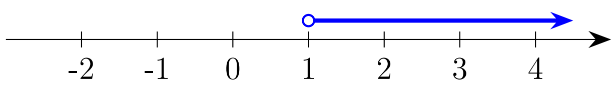
Solusi dari sebuah pertidaksamaan bukanlah satu angka tunggal, melainkan sebuah **himpunan penyelesaian** yang seringkali tak terhingga. Visualisasi pada garis bilangan adalah cara paling akurat untuk merepresentasikan himpunan ini. Kita menggunakan dua jenis penanda pada titik batas:

Lingkaran Kosong (Notasi: $\circ$) Digunakan untuk menandai titik batas yang **tidak termasuk** dalam himpunan penyelesaian. Ini berlaku untuk pertidaksamaan ketat ($<$ dan $>$).

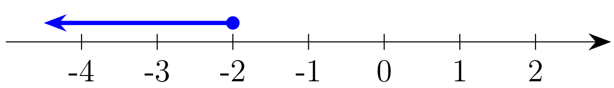
Lingkaran Penuh (Notasi: $\bullet$) Digunakan untuk menandai titik batas yang **termasuk** dalam himpunan penyelesaian. Ini berlaku untuk pertidaksamaan inklusif ($\leq$ dan $\geq$).

Berikut adalah empat contoh visualisasi untuk berbagai jenis pertidaksamaan:

1. **Contoh untuk** $x > 1$: Himpunan semua bilangan yang lebih besar dari 1. Angka 1 sendiri tidak termasuk.



2. **Contoh untuk** $x \leq -2$: Himpunan semua bilangan yang kurang dari atau sama dengan -2. Angka -2 termasuk.



1.1.3 Prinsip Aljabar dalam Menyelesaikan Pertidaksamaan

Tujuan dari menyelesaikan pertidaksamaan adalah untuk mengisolasi variabel (misalnya x) di salah satu sisi, sehingga kita dapat menentukan himpunan nilai yang memenuhi kondisi pertidaksamaan tersebut. Aturan-aturan yang digunakan sangat mirip dengan aturan pada persamaan, namun dengan satu pengecualian yang sangat penting.

Operasi yang Tidak Mengubah Arah Pertidaksamaan

1. **Penjumlahan dan Pengurangan**
   Menambah atau mengurangi kedua ruas pertidaksamaan dengan bilangan apa pun (positif atau negatif) **tidak** akan mengubah arah tanda pertidaksamaan.

   Alasan Konseptual: Operasi ini hanya "menggeser" keseluruhan garis bilangan ke kiri atau ke kanan. Posisi relatif semua titik tetap sama, sehingga urutannya tidak berubah. Jika a berada di kanan b, maka $a + c$ juga pasti berada di kanan $b + c$.

2. **Perkalian dan Pembagian dengan Bilangan Positif**
   Mengalikan atau membagi kedua ruas dengan bilangan **positif tidak** akan mengubah arah tanda pertidaksamaan.

   Alasan Konseptual: Operasi ini "meregangkan" atau "menyusutkan" garis bilangan dari titik nol. Meskipun jarak antar titik berubah, urutannya tetap terjaga.

Operasi yang Membalik Arah Pertidaksamaan

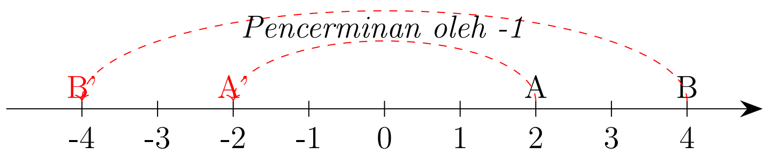
Inilah aturan paling fundamental yang membedakan aljabar pertidaksamaan dari persamaan.

Ketika kedua ruas pertidaksamaan dikalikan atau dibagi dengan sebuah bilangan negatif, maka arah tanda pertidaksamaan wajib dibalik.

- $>$ menjadi $<$
- $<$ menjadi $>$
- $\geq$ menjadi $\leq$
- $\leq$ menjadi $\geq$

Pemahaman Sejati di Balik Aturan Ini: Mengalikan sebuah bilangan dengan -1 secara geometris setara dengan **mencerminkan bilangan tersebut terhadap titik 0** pada garis bilangan. Proses pencerminan ini secara inheren akan **membalik urutan**.

Perhatikan pernyataan yang benar: $2 < 4$.



Pada awalnya, titik A (2) berada di sebelah kiri titik B (4). Setelah dikalikan dengan -1, titik A terpental menjadi A' (-2) dan titik B terpental menjadi B' (-4). Sekarang, perhatikan posisi barunya: A' (-2) berada di sebelah **kanan** dari B' (-4). Urutan mereka telah terbalik. Oleh karena itu, untuk menjaga agar pernyataan matematis tetap benar, kita harus membalik tandanya: $-2 > -4$.

Contoh Penyelesaian Lengkap

Mari kita selesaikan pertidaksamaan $3x - 7 > 7x + 5$ dan tentukan himpunan penyelesaiannya.

$$3x - 7 > 7x + 5$$

Langkah 1: Kumpulkan semua suku yang mengandung x di ruas kiri. Kurangi kedua ruas dengan $7x$. Karena ini operasi pengurangan, tanda tidak berubah.

$$3x - 7x - 7 > 7x - 7x + 5$$
$$-4x - 7 > 5$$

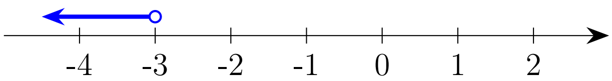
Langkah 2: Kumpulkan semua konstanta di ruas kanan. Tambahkan kedua ruas dengan 7. Tanda tidak berubah.

$$-4x - 7 + 7 > 5 + 7$$
$$-4x > 12$$

Langkah 3: Isolasi x dengan membagi kedua ruas dengan -4. ***PERHATIAN! Karena kita membagi dengan bilangan negatif, tanda pertidaksamaan harus dibalik dari $>$ menjadi $<$.***

$$\frac{-4x}{-4} < \frac{12}{-4}$$
$$x < -3$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah semua bilangan yang kurang dari -3.
Garis Bilangan untuk $x < -3$:



Soal Latihan dan Pembahasan

Berikut adalah soal-soal untuk menguji pemahaman Anda mengenai konsep paling fundamental dari pertidaksamaan.

Soal dengan Pembahasan

1. **Soal:** Manakah di antara pernyataan berikut yang bernilai **benar**? (a) $-10 > -2$, (b) $-5 \leq -5$, (c) $0 < -3$, (d) $-4 \geq 0$.

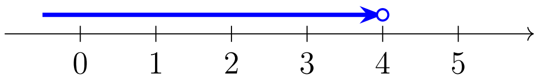
   Pembahasan: (a) Salah, karena -10 berada di sebelah kiri -2 pada garis bilangan. (b) **Benar**, karena kondisi "sama dengan" ($-5 = -5$) terpenuhi. (c) Salah, karena 0 berada di sebelah kanan -3. (d) Salah, karena -4 berada di sebelah kiri 0.

2. **Soal:** Tuliskan pertidaksamaan yang merepresentasikan kalimat "nilai p paling sedikit 15".

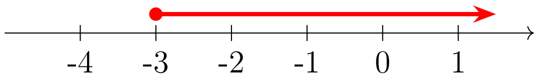
   Pembahasan: Kalimat "paling sedikit 15" berarti nilai p bisa 15 atau lebih besar dari 15. Jadi, pertidaksamaannya adalah $p \geq 15$.

3. **Soal:** Gambarkan himpunan penyelesaian dari $x < 4$ pada garis bilangan.

   Pembahasan: Kita mencari semua bilangan yang lebih kecil dari 4. Titik batasnya adalah 4, dan karena tandanya "kurang dari" ($<$), kita gunakan lingkaran kosong.

4. **Soal:** Himpunan penyelesaian apa yang direpresentasikan oleh garis bilangan berikut?

   Pembahasan: Garis bilangan menunjukkan semua nilai yang lebih besar dari atau sama dengan -3 (karena lingkaran penuh). Pertidaksamaannya adalah $x \geq -3$.

5. **Soal:** Selesaikan pertidaksamaan $x - 7 > 3$.

   Pembahasan: Untuk mengisolasi x, tambahkan 7 ke kedua ruas. Tanda pertidaksamaan tetap. $x - 7 + 7 > 3 + 7 \implies x > 10$. **HP** $= \{x \mid x > 10\}$

6. **Soal:** Tentukan himpunan penyelesaian dari $4x \leq 20$.

   Pembahasan: Bagi kedua ruas dengan 4 (bilangan positif). Tanda pertidaksamaan tetap. $\frac{4x}{4} \leq \frac{20}{4} \implies x \leq 5$. **HP** $= \{x \mid x \leq 5\}$

7. **Soal:** Selesaikan pertidaksamaan $-5x > 30$.

   Pembahasan: Bagi kedua ruas dengan -5 (bilangan negatif). Tanda pertidaksamaan **harus dibalik** dari $>$ menjadi $<$. $\frac{-5x}{-5} < \frac{30}{-5} \implies x < -6$. **HP** $= \{x \mid x < -6\}$

8. **Soal:** Tentukan HP dari $2x + 5 \geq 11$.

   Pembahasan: Lakukan dua langkah: kurangi 5, lalu bagi dengan 2. $2x + 5 - 5 \geq 11 - 5 \implies 2x \geq 6$. $\frac{2x}{2} \geq \frac{6}{2} \implies x \geq 3$. **HP** $= \{x \mid x \geq 3\}$

9. **Soal:** Apakah $x = 2$ merupakan solusi dari pertidaksamaan $1 - 3x > -4$?

   Pembahasan: Substitusikan $x = 2$ ke dalam pertidaksamaan: $1 - 3(2) > -4 \implies 1 - 6 > -4 \implies -5 > -4$. Pernyataan ini **Salah**. Jadi, $x = 2$ bukan merupakan solusi.

10. **Soal:** Tuliskan pertidaksamaan untuk "tiga kali sebuah bilangan dikurangi 5 hasilnya tidak lebih dari 10".

    Pembahasan: Misalkan bilangan tersebut adalah x. "Tiga kali sebuah bilangan" adalah $3x$. "Dikurangi 5" menjadi $3x - 5$. "Tidak lebih dari 10" berarti bisa 10 atau kurang dari 10, yaitu ≤ 10. Pertidaksamaannya adalah $3x - 5 \leq 10$.

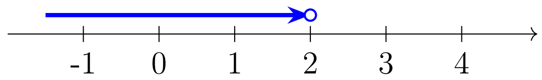
Soal Latihan Mandiri

1. Manakah di antara pernyataan berikut yang bernilai **salah**? (a) $-8 < 1$, (b) $-2 \geq -2$, (c) $-1 > -100$, (d) $3 \leq -1$.

2. Tuliskan pertidaksamaan yang merepresentasikan kalimat "kecepatan maksimum kendaraan adalah 60 km/jam".

3. Gambarkan himpunan penyelesaian dari $x \geq -1$ pada garis bilangan.

4. Himpunan penyelesaian apa yang direpresentasikan oleh garis bilangan berikut?



5. Selesaikan pertidaksamaan $12 + y < 5$.

6. Tentukan himpunan penyelesaian dari $\frac{x}{3} > 4$.

7. Selesaikan pertidaksamaan $-x \leq 2$.

8. Tentukan HP dari $1 - 4x > 9$.

9. Apakah $x = -10$ merupakan solusi dari pertidaksamaan $\frac{x}{5} + 3 \geq 1$?

10. Sebuah lift memiliki kapasitas maksimal 500 kg. Jika lift tersebut sudah berisi barang seberat 80 kg, tuliskan pertidaksamaan untuk total berat (w) orang yang masih bisa masuk ke dalam lift.

1.2 Pertidaksamaan Linear Satu Variabel

Setelah memahami prinsip-prinsip dasar, kini kita akan menerapkannya pada jenis pertidaksamaan yang paling sering ditemui dalam aljabar: pertidaksamaan linear satu variabel. Mari kita bedah artinya:

- **Linear**: Istilah ini menandakan bahwa variabel dalam pertidaksamaan (misalnya x) hanya memiliki pangkat satu (x^1). Tidak ada suku seperti x^2, $\sqrt{x}$, atau $\frac{1}{x}$. Hal ini membuat hubungannya direpresentasikan sebagai garis lurus jika digambarkan.
- **Satu Variabel**: Menandakan bahwa kita hanya berurusan dengan satu jenis nilai yang tidak diketahui (misalnya, hanya ada x, tidak ada y atau variabel lainnya).

Tujuan kita tetap sama: menemukan himpunan penyelesaian untuk variabel tersebut dengan menggunakan prinsip aljabar yang telah kita pelajari.

1.2.1 Bentuk Umum dan Penyelesaian

Pertidaksamaan linear satu variabel secara umum dapat ditulis dalam salah satu bentuk berikut:

- $ax + b < c$
- $ax + b > c$
- $ax + b \leq c$
- $ax + b \geq c$

di mana x adalah variabel, sedangkan a, b, dan c adalah konstanta bilangan riil, dengan syarat $a \neq 0$.

Proses penyelesaiannya melibatkan langkah-langkah aljabar yang sudah kita kenal untuk mengisolasi variabel x. Mari kita terapkan pada contoh yang sedikit lebih kompleks.

Contoh Penyelesaian

Selesaikan pertidaksamaan berikut: $5(x-2) - 1 \geq 2(3x+1)$.

$$5(x-2) - 1 \geq 2(3x+1)$$

Langkah 1: Gunakan sifat distributif untuk menghilangkan tanda kurung.

$$\begin{aligned} 5x - 10 - 1 &\geq 6x + 2 \\ 5x - 11 &\geq 6x + 2 \end{aligned}$$

Langkah 2: Kumpulkan suku yang mengandung x di ruas kiri dengan mengurangi kedua ruas dengan $6x$. Tanda tetap sama.

$$\begin{aligned} 5x - 6x - 11 &\geq 6x - 6x + 2 \\ -x - 11 &\geq 2 \end{aligned}$$

Langkah 3: Kumpulkan konstanta di ruas kanan dengan menambahkan 11 ke kedua ruas. Tanda tetap sama.

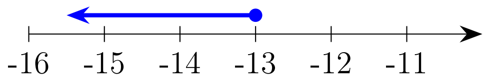
$$-x - 11 + 11 \geq 2 + 11$$
$$-x \geq 13$$

Langkah 4: Isolasi x. Saat ini koefisien x adalah -1. Kita harus mengalikan (atau membagi) kedua ruas dengan -1. ***INGAT! Tanda pertidaksamaan wajib dibalik.***

$$(-1)(-x) \leq (-1)(13)$$
$$x \leq -13$$

Himpunan penyelesaiannya adalah semua bilangan yang kurang dari atau sama dengan -13.

Garis Bilangan untuk $x \leq -13$:



1.2.2 Pertidaksamaan Gabungan (Compound Inequalities)

Pertidaksamaan gabungan adalah dua pertidaksamaan sederhana yang dihubungkan oleh kata "dan" atau "atau".

Gabungan "DAN" (Konjungsi)

Pertidaksamaan ini mengharuskan variabel memenuhi **kedua kondisi secara bersamaan**. Solusinya adalah **irisan** (intersection) dari himpunan penyelesaian kedua pertidaksamaan. Bentuk yang paling umum adalah notasi ringkas seperti:

$$a < x < b$$

Ini adalah cara singkat untuk menulis "$x > a$ **dan** $x < b$".

Untuk menyelesaikannya, kita melakukan operasi aljabar pada ketiga "ruas" secara serentak.

Contoh: Selesaikan $-7 \leq 2x + 1 < 5$.

$$-7 \leq 2x + 1 < 5$$

Langkah 1: Kurangi semua tiga ruas dengan 1 untuk mengisolasi suku $2x$.

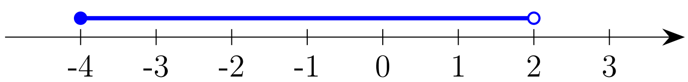
$$-7 - 1 \leq 2x + 1 - 1 < 5 - 1$$
$$-8 \leq 2x < 4$$

Langkah 2: Bagi semua tiga ruas dengan 2. Karena 2 adalah bilangan positif, tanda tidak berubah.

$$\frac{-8}{2} \leq \frac{2x}{2} < \frac{4}{2}$$
$$-4 \leq x < 2$$

Solusinya adalah semua bilangan x di antara -4 dan 2, di mana -4 termasuk tetapi 2 tidak.

Garis Bilangan untuk $-4 \leq x < 2$:



1.2.3 Aplikasi dalam Masalah Kontekstual

Kemampuan terbesar matematika adalah menerjemahkan masalah dunia nyata ke dalam model yang bisa diselesaikan. Pertidaksamaan sangat berguna untuk masalah yang melibatkan batasan seperti "tidak lebih dari", "minimal", "paling banyak", dan sejenisnya.

Kerangka Penyelesaian Soal Cerita

1. **Definisikan Variabel:** Tentukan kuantitas yang tidak diketahui dan beri nama, misalnya x.
2. **Buat Model Matematika:** Terjemahkan kalimat dalam soal menjadi satu atau lebih pertidaksamaan.
3. **Selesaikan Pertidaksamaan:** Gunakan teknik aljabar untuk menemukan himpunan penyelesaian.
4. **Interpretasikan Jawaban:** Nyatakan jawaban akhir dalam konteks soal cerita dan pastikan jawaban tersebut masuk akal.

Contoh Soal Cerita: Seorang siswa telah mendapatkan nilai 78, 85, dan 80 dari tiga ujian matematika. Berapakah nilai minimal yang harus ia peroleh pada ujian keempat agar nilai rata-rata dari empat ujian tersebut **paling sedikit** 82?
Penyelesaian:

1. **Variabel:** Misalkan x adalah nilai ujian keempat.
2. **Model Matematika:** Rata-rata dari empat ujian dihitung dengan menjumlahkan semua nilai dan membaginya dengan 4. Kata "paling sedikit 82" berarti "lebih dari atau sama dengan 82" ($\geq$).

$$\frac{78+85+80+x}{4} \geq 82$$

3. **Selesaikan Pertidaksamaan:**

$$\frac{243+x}{4} \geq 82$$

Kalikan kedua ruas dengan 4 (bilangan positif, tanda tetap).

$$\begin{aligned} 4 \cdot \frac{243+x}{4} &\geq 82 \cdot 4 \\ 243+x &\geq 328 \end{aligned}$$

Kurangi kedua ruas dengan 243.

$$\begin{aligned} x &\geq 328-243 \\ x &\geq 85 \end{aligned}$$

4. **Interpretasi Jawaban:** Hasil $x \geq 85$ berarti nilai ujian keempat harus 85 atau lebih. Jadi, nilai minimal yang harus diperoleh siswa tersebut pada ujian keempat adalah **85**.

Soal Latihan dan Pembahasan

Berikut adalah soal-soal untuk melatih kemampuan Anda dalam menyelesaikan berbagai bentuk pertidaksamaan linear satu variabel, termasuk pertidaksamaan gabungan dan soal kontekstual.

Soal dengan Pembahasan

1. **Soal:** Tentukan himpunan penyelesaian dari $4(x-2) > 6x+8$.

   Pembahasan:

   (a) **Gunakan Sifat Distributif:**

   $$4x - 8 > 6x + 8$$

   (b) **Kumpulkan Variabel x:** Kurangi kedua ruas dengan $6x$.

   $$4x - 6x - 8 > 8 \implies -2x - 8 > 8$$

   (c) **Kumpulkan Konstanta:** Tambahkan 8 ke kedua ruas.

   $$-2x > 16$$

   (d) **Isolasi x:** Bagi kedua ruas dengan -2 dan **balik tanda pertidaksamaan**.

   $$x < -8$$

   HP $= \{x \mid x < -8\}$

2. **Soal:** Selesaikan pertidaksamaan $\frac{2x-1}{3} \geq \frac{x+4}{2}$.

   Pembahasan:

   (a) **Hilangkan Penyebut:** Kalikan kedua ruas dengan KPK dari 3 dan 2, yaitu 6 (bilangan positif, tanda tetap).

   $$6 \cdot \frac{2x-1}{3} \geq 6 \cdot \frac{x+4}{2}$$
   $$2(2x-1) \geq 3(x+4)$$

   (b) **Selesaikan Pertidaksamaan:**

   $$4x - 2 \geq 3x + 12$$

   $$4x - 3x \geq 12 + 2$$
   $$x \geq 14$$

   HP $= \{x \mid x \geq 14\}$

3. **Soal:** Tentukan HP dari $-1 < 4 - 2x \leq 7$.

   Pembahasan:

(a) **Isolasi Suku x:** Kurangi semua tiga ruas dengan 4.

$$-1-4 < -2x \leq 7-4$$

$$-5 < -2x \leq 3$$

(b) **Isolasi x:** Bagi semua tiga ruas dengan -2 dan **balik semua tanda pertidaksamaan**.

$$\frac{-5}{-2} > x \geq \frac{3}{-2}$$
$$\frac{5}{2} > x \geq -\frac{3}{2}$$

(c) **Tulis Ulang:** Untuk kemudahan membaca, tulis dari nilai terkecil ke terbesar.

$$-\frac{3}{2} \leq x < \frac{5}{2}$$

HP $= \{x \mid -1.5 \leq x < 2.5\}$

4. **Soal:** Selesaikan $3x - 1 < -7$ atau $2x + 3 > 11$.

Pembahasan:

(a) **Selesaikan Satu per Satu:** Karena dihubungkan oleh "atau", kita selesaikan masing-masing dan gabungkan hasilnya.

- $3x - 1 < -7 \implies 3x < -6 \implies x < -2$.
- $2x + 3 > 11 \implies 2x > 8 \implies x > 4$.

(b) **Gabungkan Solusi:** Solusinya adalah gabungan dari kedua hasil. **HP** $= \{x \mid x < -2$ **atau** $x > 4\}$

5. **Soal:** Sebuah perusahaan taksi mengenakan tarif buka pintu Rp 8.000 ditambah Rp 5.000 per kilometer. Jika Budi memiliki uang antara Rp 50.000 dan Rp 80.000, berapakah rentang jarak (dalam km) yang bisa ia tempuh?

Pembahasan:

(a) **Model Matematika:** Misalkan x adalah jarak dalam km. Biaya total adalah $B(x) = 8000 + 5000x$. Uang Budi berada di antara 50.000 dan 80.000.

$$50000 < B(x) < 80000$$

$$50000 < 8000 + 5000x < 80000$$

(b) **Selesaikan Pertidaksamaan:** Kurangi semua ruas dengan 8000:

$$42000 < 5000x < 72000$$

Bagi semua ruas dengan 5000:

$$\frac{42000}{5000} < x < \frac{72000}{5000}$$
$$8.4 < x < 14.4$$

(c) **Kesimpulan:** Rentang jarak yang bisa ditempuh Budi adalah antara 8.4 km dan 14.4 km.

Soal Latihan Mandiri

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari $2(3x - 1) + 4 \geq 5x - 3(x - 2)$.
2. Selesaikan pertidaksamaan $1 - \frac{x-3}{2} > \frac{x}{3}$.
3. Tentukan himpunan penyelesaian dari $-10 \leq 3 - 4x < 15$.
4. Suhu di sebuah ruangan pendingin dijaga agar tidak lebih dari 5°C dan tidak kurang dari −2°C. Jika suhu dalam Celcius (C) dan Fahrenheit (F) dihubungkan oleh rumus $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, tentukan rentang suhu ruangan tersebut dalam derajat Fahrenheit.
5. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $2x - 4 \leq 5x + 8 \leq 2x + 20$. (Petunjuk: Pecah menjadi dua pertidaksamaan yang dihubungkan dengan "dan").

1.3 Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel (SPLDV)

Sejauh ini, kita telah bekerja pada garis bilangan dengan satu variabel. Sekarang, kita akan memasuki dimensi baru dengan menambahkan variabel kedua. Ini membawa kita dari garis bilangan ke sebuah **bidang Kartesius** (koordinat x-y).

- **Linear**: Sama seperti sebelumnya, setiap variabel (kini x dan y) hanya berpangkat satu.
- **Dua Variabel**: Terdapat dua kuantitas yang tidak diketahui, yang kita sebut x dan y.

1.3.1 Bentuk Umum

Setiap pertidaksamaan linear dua variabel dapat ditulis dalam salah satu dari empat bentuk umum berikut:

$$ax + by < c$$
$$ax + by > c$$
$$ax + by \leq c$$
$$ax + by \geq c$$

Dengan x dan y sebagai variabel, a dan b sebagai koefisien (tidak boleh keduanya nol), dan c sebagai konstanta.

Jika sebuah persamaan linear dua variabel seperti $ax + by = c$ menghasilkan sebuah **garis** lurus, maka sebuah pertidaksamaan linear dua variabel seperti $ax + by < c$ akan menghasilkan sebuah **daerah** (region) pada salah satu sisi dari garis tersebut.

1.3.2 Menentukan Daerah Himpunan Penyelesaian (DHP)

Untuk menemukan daerah yang merupakan solusi dari sebuah pertidaksamaan, kita mengikuti dua langkah utama: menggambar garis batas dan melakukan uji titik. Untuk menemukan daerah yang merupakan solusi dari sebuah pertidaksamaan, kita mengikuti dua langkah utama: menggambar garis batas dan melakukan uji titik.

Langkah 1: Menggambar Garis Batas

Garis batas adalah visualisasi dari pertidaksamaan jika tandanya diubah menjadi sama dengan (=).

1. **Ubah menjadi Persamaan**: Anggap pertidaksamaan sebagai persamaan untuk sementara. Contoh: $2x + 3y \leq 6$ menjadi $2x + 3y = 6$.
2. **Cari Dua Titik**: Cara termudah untuk menggambar garis adalah dengan menemukan titik potong sumbu-x (saat $y = 0$) dan sumbu-y (saat $x = 0$).
3. **Tentukan Jenis Garis**:
   - **Garis Utuh (—)**: Digunakan jika tandanya $\leq$ atau $\geq$. Ini berarti titik-titik pada garis tersebut **termasuk** dalam penyelesaian.
   - **Garis Putus-putus (- - -)**: Digunakan jika tandanya $<$ atau $>$. Ini berarti titik-titik pada garis tersebut **tidak termasuk** dalam penyelesaian.

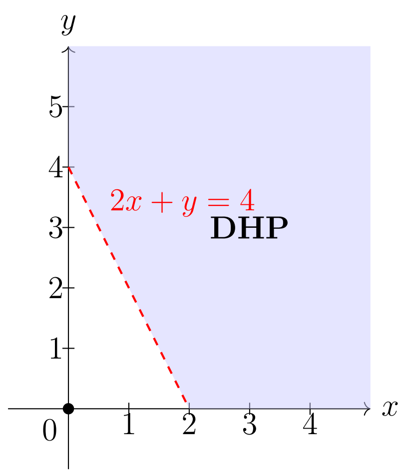
Langkah 2: Melakukan Uji Titik

Setelah garis batas tergambar, bidang Kartesius terbagi menjadi dua daerah. Kita perlu menentukan daerah mana yang benar.

1. **Pilih Titik Uji**: Ambil sembarang titik yang **tidak berada** di atas garis. Titik termudah untuk digunakan adalah titik asal, **(0,0)**, selama garis tidak melewatinya.
2. **Substitusi ke Pertidaksamaan Asli**: Masukkan koordinat titik uji ke dalam pertidaksamaan awal.
3. **Analisis Hasil**:
   - Jika hasilnya adalah pernyataan yang **BENAR**, maka daerah yang mengandung titik uji adalah daerah penyelesaiannya. Arsirlah daerah tersebut.
   - Jika hasilnya adalah pernyataan yang **SALAH**, maka daerah di seberangnyalah yang merupakan penyelesaian. Arsirlah daerah seberangnya.

Contoh Lengkap: Tentukan daerah himpunan penyelesaian dari $2x + y > 4$.

1. **Gambar Garis Batas**: $2x + y = 4$.
   - Titik potong sumbu-x (y=0): $2x + 0 = 4 \implies x = 2$. Titiknya adalah (2,0).
   - Titik potong sumbu-y (x=0): $2(0) + y = 4 \implies y = 4$. Titiknya adalah (0,4).
   - Jenis garis: Karena tandanya $>$, kita gunakan **garis putus-putus**.
2. **Uji Titik**: Kita gunakan titik (0,0).
   - Substitusi ke $2x + y > 4$:
   $$2(0) + 0 > 4$$
   $$0 > 4$$
   - Analisis: Pernyataan ini **SALAH**. Maka, kita arsir daerah yang tidak mengandung titik (0,0).



Uji (0,0) [Salah]

Sistem Pertidaksamaan

Sebuah "sistem" berarti ada lebih dari satu pertidaksamaan yang harus dipenuhi secara bersamaan. Daerah penyelesaian dari sebuah sistem adalah **irisan** atau **daerah tumpukan** dari semua daerah penyelesaian masing-masing pertidaksamaan.

1.3.3 Aplikasi pada Masalah Kontekstual Sederhana

Di tingkat SMP, kita menggunakan SPLDV untuk memodelkan situasi sederhana yang memiliki beberapa batasan.

Contoh Soal Cerita:

Di sebuah toko buku, harga sebuah pulpen adalah Rp2.000 dan harga sebuah buku tulis adalah Rp4.000. Budi ingin membeli beberapa pulpen dan buku tulis dengan uang tidak lebih dari Rp16.000. Buatlah model matematika dan gambarkan daerah penyelesaian yang mungkin.

Penyelesaian:

1. **Definisikan Variabel:**
   - Misalkan $x =$ jumlah pulpen yang dibeli.
   - Misalkan $y =$ jumlah buku tulis yang dibeli.
2. **Buat Model Matematika:**
   - **Batasan Biaya**: Total belanja (2000 kali jumlah pulpen + 4000 kali jumlah buku) tidak boleh lebih dari 16000.

     $$2000x + 4000y \leq 16000$$

     (Ini bisa disederhanakan dengan membagi semua ruas dengan 2000)

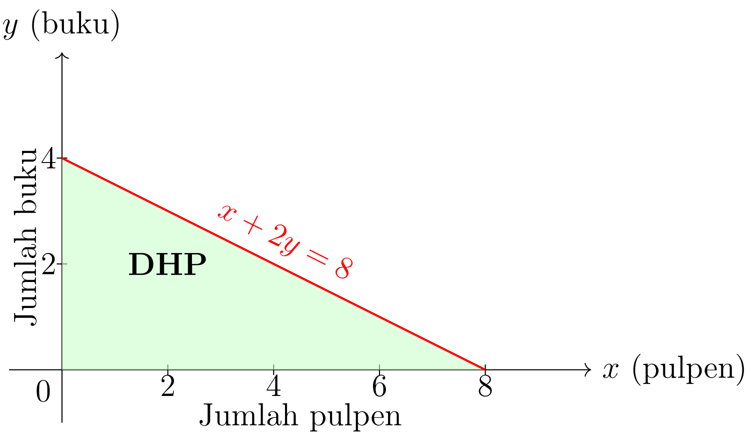
     $$x + 2y \leq 8$$

   - **Batasan Logis**: Jumlah barang tidak mungkin negatif.

     $$x \geq 0$$

     $$y \geq 0$$

   Jadi, sistem pertidaksamaannya adalah $x + 2y \leq 8$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$.
3. **Gambar Daerah Penyelesaian:** Kita arsir irisan dari ketiga daerah tersebut. Karena $x \geq 0$ dan $y \geq 0$, kita hanya fokus pada kuadran pertama.
   - Garis batas: $x + 2y = 8$. Titik potongnya adalah (8,0) dan (0,4). Garisnya utuh.
   - Uji titik (0,0) pada $x + 2y \leq 8 \implies 0 \leq 8$. Pernyataan ini **BENAR**, jadi arsir ke arah (0,0).



Interpretasi: Setiap titik koordinat (x, y) dengan bilangan bulat di dalam atau pada batas daerah yang diarsir (DHP) merupakan kemungkinan kombinasi jumlah pulpen dan buku yang bisa dibeli Budi tanpa melebihi anggarannya. Misalnya, titik (4,2) berarti Budi bisa membeli 4 pulpen dan 2 buku.

Soal Latihan dan Pembahasan

Berikut adalah soal-soal untuk melatih kemampuan Anda dalam menggambar dan menginterpretasikan daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear dua variabel.

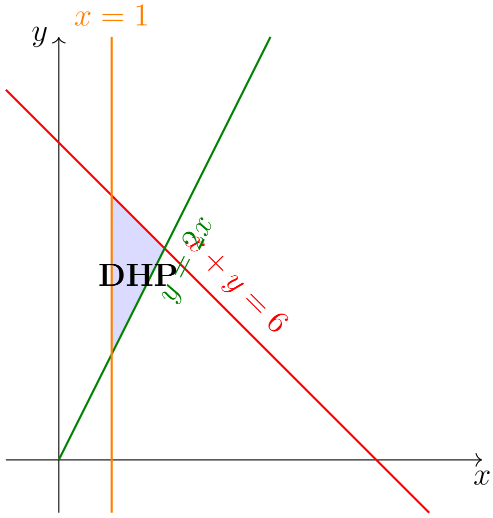
Soal dengan Pembahasan

1. **Soal:** Gambarkan daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan: $x + y \leq 6$, $2x - y \geq 0$, $x \geq 1$.

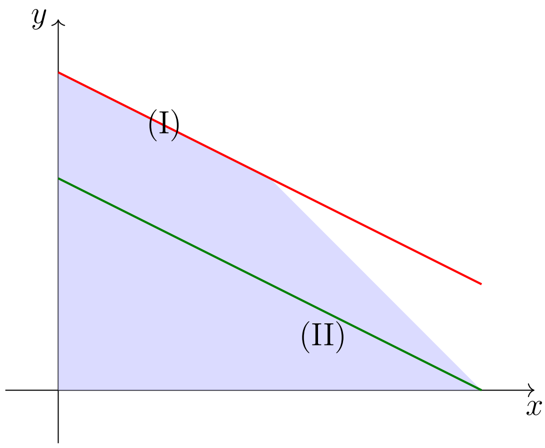
   Pembahasan:

   (a) **Gambar Garis Batas:**
   - $x + y = 6$: Memotong sumbu di (6,0) dan (0,6). Arsir ke arah (0,0) karena $0 + 0 \leq 6$ (Benar).
   - $2x - y = 0$ atau $y = 2x$: Garis yang melalui (0,0) dan (1,2). Uji titik lain, misal (3,0): $2(3) - 0 \geq 0$ (Benar). Arsir ke arah (3,0).
   - $x = 1$: Garis vertikal di $x = 1$. Arsir ke kanan karena $x \geq 1$.

   (b) **Tentukan DHP:** DHP adalah irisan dari ketiga daerah arsiran.



2. **Soal:** Tentukan sistem pertidaksamaan untuk daerah yang diarsir pada grafik berikut.



Pembahasan:

(a) **Analisis Batas:** Daerah diarsir berada di kuadran pertama, maka $x \geq 0$ dan $y \geq 0$.

(b) **Garis (I):** Melalui (0,6) dan (8,2). Gradien $m = \frac{2-6}{8-0} = -\frac{1}{2}$. Persamaan: $y - 6 = -\frac{1}{2}(x - 0) \implies 2y - 12 = -x \implies x + 2y = 12$. Karena arsiran di bawah garis, maka $x + 2y \leq 12$.

(c) **Garis (II):** Melalui (8,0) dan (0,4). Persamaan cepat: $\frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1 \implies x + 2y = 8$. Oh, ada kesalahan, mari kita perbaiki titiknya. Misal melalui (4,0) dan (0,4). Persamaan: $x + y = 4$. Karena arsiran di atas garis (jika titik (8,0)), maka... Mari kita gunakan titik yang jelas (8,0) dan (0,4) untuk garis (II). Persamaan: $\frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1 \implies x + 2y = 8$. Arsiran di bawah, jadi $x + 2y \leq 8$. Mari kita gunakan garis yang lebih jelas. Garis (I) melalui (0,6) dan (4,4). $m = \frac{4-6}{4-0} = -\frac{1}{2} \implies y - 6 = -\frac{1}{2}x \implies x + 2y = 12$. Arsiran di bawah: $x + 2y \leq 12$. Garis (II) melalui (4,4) dan (8,0). $m = \frac{0-4}{8-4} = -1 \implies y - 0 = -1(x - 8) \implies y = -x + 8 \implies x + y = 8$. Arsiran di bawah: $x + y \leq 8$. Ini tidak membentuk daerah yang diberikan.

Mari kita asumsikan garisnya adalah (I) melalui (0,6) dan (4,4), dan (II) melalui (6,0) dan (4,4). Garis (I): $x+2y=12$. Arsiran di bawahnya $\implies x+2y \le 12$. Garis (II): melalui (6,0) dan (4,4). $m = \frac{4-0}{4-6} = -2$. $y-0=-2(x-6) \implies y=-2x+12 \implies 2x+y=12$. Arsiran di bawahnya $\implies 2x+y \le 12$.

(d) **Kesimpulan:** Sistem pertidaksamaannya adalah $x \ge 0, y \ge 0, x+2y \le 12, 2x+y \le 12$.

3. **Soal:** Seorang pengusaha parkir memiliki lahan seluas 800 m^2. Ia hanya bisa menampung tidak lebih dari 70 kendaraan. Sebuah mobil memerlukan 5 m^2 dan bus 20 m^2. Buatlah model matematika dari permasalahan ini.

   Pembahasan:

   (a) **Definisikan Variabel:** Misal x = jumlah mobil, y = jumlah bus.

   (b) **Buat Model Matematika:**
   - Batasan Lahan: $5x+20y \le 800$, disederhanakan menjadi $x+4y \le 160$.
   - Batasan Kapasitas: $x+y \le 70$.
   - Batasan Logis: $x \ge 0$ dan $y \ge 0$.

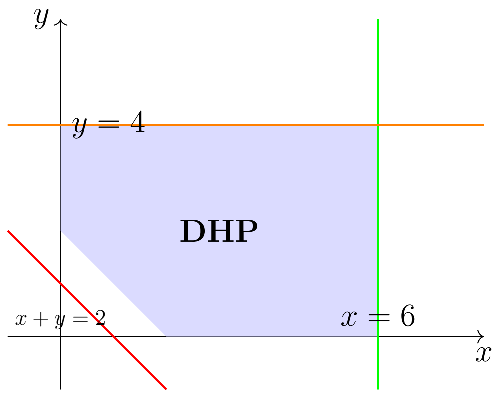
   (c) **Kesimpulan:** Model matematikanya adalah $x+4y \le 160, x+y \le 70, x \ge 0, y \ge 0$.

4. **Soal:** Gambarkan DHP dari sistem: $y \le 4$, $x \le 6$, $x+y \ge 2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

   Pembahasan:

   (a) **Gambar Garis Batas:** $y=4$ (horizontal), $x=6$ (vertikal), dan $x+y=2$ (memotong di (2,0) dan (0,2)).

   (b) **Tentukan DHP:** Daerahnya adalah poligon yang dibatasi oleh sumbu-x, sumbu-y, garis $x+y=2$, garis $x=6$ dan garis $y=4$.



5. **Soal:** Tentukan sistem pertidaksamaan dari DHP berbentuk segitiga dengan titik-titik sudut di (0,0), (5,0), dan (0,3).

   Pembahasan:

   (a) **Analisis Batas:** Daerah berada di kuadran I, jadi $x \ge 0$ dan $y \ge 0$.

   (b) **Garis Miring:** Garis yang melalui (5,0) dan (0,3) memiliki persamaan $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1 \implies 3x+5y=15$.

(c) **Uji Titik:** Uji titik di dalam segitiga, misal (1,1). $3(1) + 5(1) = 8 \leq 15$. Jadi, pertidaksamaannya adalah $3x + 5y \leq 15$.

(d) **Kesimpulan:** Sistemnya adalah $x \geq 0, y \geq 0, 3x + 5y \leq 15$.

Soal Latihan Mandiri

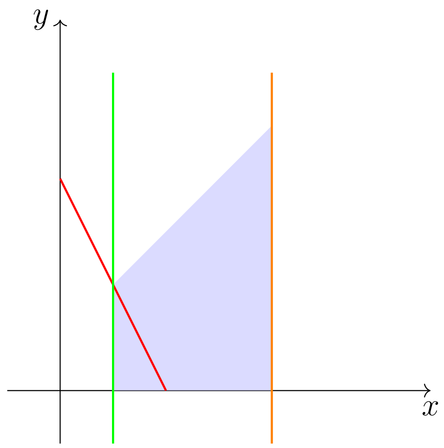
1. Gambarkan daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan: $3x + 4y \leq 12$, $x - y > -2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

2. Tentukan sistem pertidaksamaan yang mendefinisikan daerah berbentuk persegi panjang dengan titik-titik sudut di (1,1), (5,1), (5,4), dan (1,4).

3. Seorang pedagang buah memiliki modal Rp 1.000.000 untuk membeli apel dan pisang. Harga beli apel adalah Rp 4.000/kg dan pisang Rp 1.600/kg. Kiosnya hanya dapat menampung tidak lebih dari 400 kg buah. Buatlah model matematika dari permasalahan ini.

4. Gambarkan DHP dari sistem: $x \geq 2$, $y \geq 1$, $x + y \leq 8$. Apa bentuk DHP yang dihasilkan?

5. Tentukan sistem pertidaksamaan yang diarsir pada grafik berikut.



Chapter 2

Materi Tingkat SMA

2.1 Pertidaksamaan Kuadrat

Kita melangkah dari pertidaksamaan "linear" ke "kuadrat". Perbedaan utamanya adalah kehadiran suku yang memuat variabel berpangkat dua (misalnya, x^2). Perubahan ini memiliki dampak fundamental: jika pertidaksamaan linear berhubungan dengan **garis lurus**, maka pertidaksamaan kuadrat berhubungan erat dengan kurva mulus yang disebut **parabola**.

Memahami hubungan ini adalah kunci untuk menguasai topik ini, bukan sekadar menghafal langkah-langkah.

2.1.1 Bentuk Umum

Setiap pertidaksamaan kuadrat dapat ditulis dalam salah satu dari empat bentuk umum berikut, dengan syarat koefisien $a \neq 0$:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$ax^2 + bx + c < 0$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

di mana x adalah variabel, sedangkan a, b, dan c adalah konstanta bilangan riil.

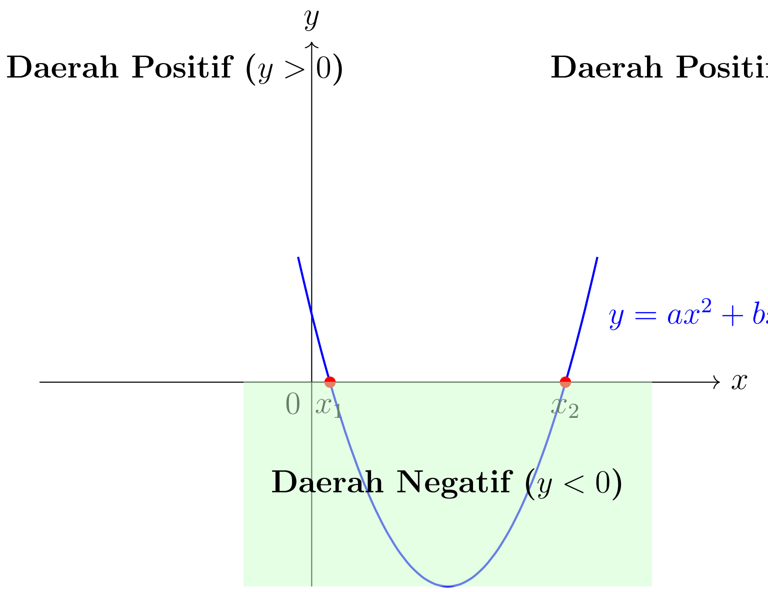
2.1.2 Hubungan Fundamental dengan Grafik Parabola

Mari kita pikirkan ekspresi $ax^2 + bx + c$ sebagai sebuah fungsi, yaitu $y = ax^2 + bx + c$. Grafik dari fungsi ini adalah sebuah parabola.

Dengan demikian, menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat secara konseptual adalah sebuah pertanyaan visual:

- Menyelesaikan $ax^2 + bx + c > 0$ sama dengan mencari interval nilai x di mana grafik parabola berada **di atas** sumbu-x.
- Menyelesaikan $ax^2 + bx + c < 0$ sama dengan mencari interval nilai x di mana grafik parabola berada **di bawah** sumbu-x.

Titik-titik di mana parabola memotong sumbu-x (yaitu, saat $ax^2 + bx + c = 0$) disebut **akar-akar** atau **pembuat nol**. Titik-titik inilah yang menjadi batas krusial yang membagi sumbu-x menjadi beberapa interval.



Dari visualisasi di atas, kita dapat melihat dengan jelas bahwa perilaku pertidaksamaan ditentukan sepenuhnya oleh letak akar-akarnya.

2.1.3 Langkah-Langkah Penyelesaian Secara Aljabar

Metode aljabar berikut adalah cara sistematis untuk menemukan solusi berdasarkan pemahaman grafis yang telah kita bangun.

1. **Pindahkan Semua Suku ke Satu Ruas**. Pastikan ruas kanan pertidaksamaan adalah nol.

2. **Tentukan Pembuat Nol**. Ubah tanda pertidaksamaan menjadi sama dengan ($=$) dan carilah akar-akar (x_1 dan x_2) dari persamaan kuadrat tersebut. Anda bisa menggunakan faktorisasi atau rumus ABC.

3. **Buat Garis Bilangan**. Gambar sebuah garis bilangan dan letakkan akar-akar yang ditemukan pada garis tersebut. Akar-akar ini akan membagi garis bilangan menjadi beberapa interval. Gunakan lingkaran penuh ($\bullet$) jika pertidaksamaan memuat tanda $\leq$ atau $\geq$, dan lingkaran kosong ($\circ$) jika memuat $<$ atau $>$.

4. **Lakukan Uji Titik**. Pilih satu bilangan sederhana dari setiap interval, lalu substitusikan ke dalam ekspresi kuadrat $ax^2 + bx + c$ untuk menentukan apakah hasilnya positif ($+$) atau negatif (-). Tandai setiap interval dengan hasilnya.

5. **Tentukan Himpunan Penyelesaian**. Berdasarkan tanda pertidaksamaan awal, pilih interval yang sesuai.
   - Jika pertidaksamaan adalah $>$ atau $\geq$, pilih daerah yang bertanda **($+$)**.
   - Jika pertidaksamaan adalah $<$ atau $\leq$, pilih daerah yang bertanda **(-)**.

Contoh Penyelesaian Lengkap

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $x^2 - x > 6$.

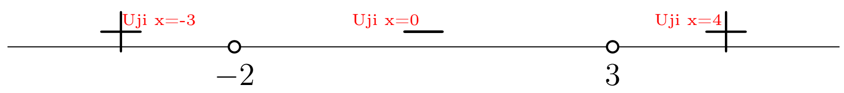
1. **Pindahkan ke satu ruas**:
$$x^2 - x - 6 > 0$$

2. **Cari pembuat nol**:
$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 &= 0 \\ (x-3)(x+2) &= 0 \\ x_1 = 3, \quad x_2 &= -2 \end{aligned}$$

3. **Buat garis bilangan**: Kita letakkan -2 dan 3 pada garis bilangan. Kita gunakan lingkaran kosong karena tanda pertidaksamaannya adalah $>$.

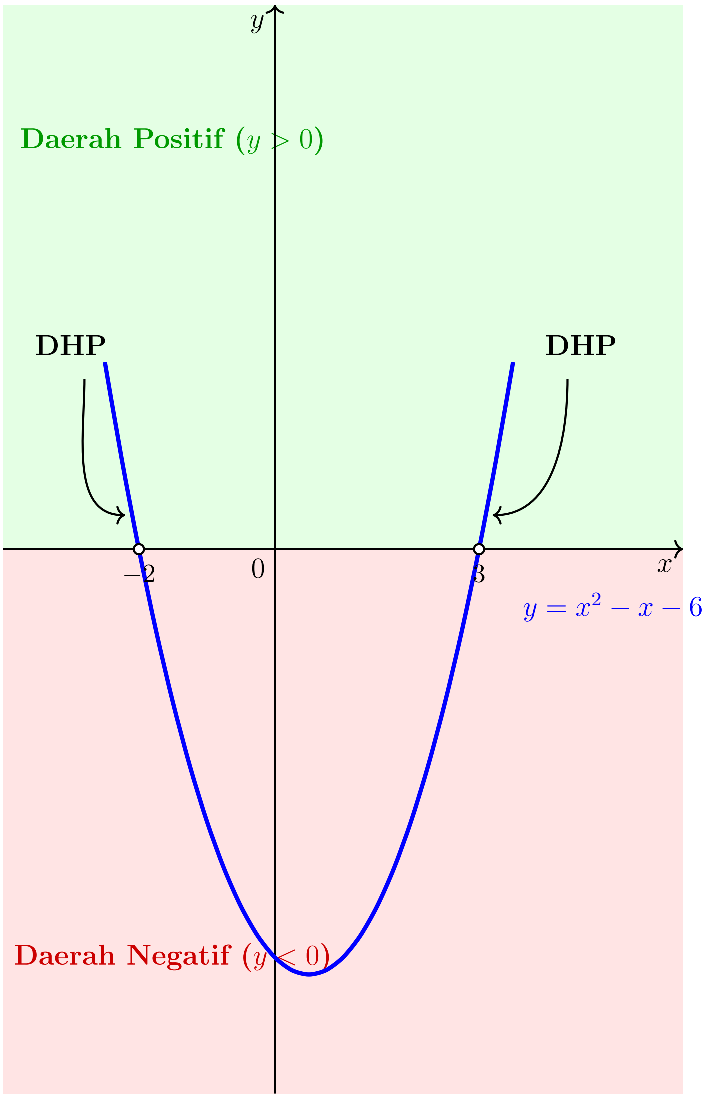
4. **Lakukan uji titik**:

   - *Interval 1:* $x < -2$. Kita pilih $x = -3$. Substitusi ke $(x-3)(x+2) \implies (-3-3)(-3+2) = (-6)(-1) = 6$. Hasilnya **Positif (+)**.
   - *Interval 2:* $-2 < x < 3$. Kita pilih $x = 0$. Substitusi ke $(x-3)(x+2) \implies (0-3)(0+2) = (-3)(2) = -6$. Hasilnya **Negatif (-)**.
   - *Interval 3:* $x > 3$. Kita pilih $x = 4$. Substitusi ke $(x-3)(x+2) \implies (4-3)(4+2) = (1)(6) = 6$. Hasilnya **Positif (+)**.



5. **Tentukan himpunan penyelesaian**: Karena pertidaksamaan awalnya adalah $x^2 - x - 6 > 0$ (lebih besar dari nol), kita mencari daerah yang bertanda **positif (+)**.

   Dari garis bilangan, kita melihat daerah positif adalah $x < -2$ dan $x > 3$. Jadi, himpunan penyelesaiannya (HP) adalah:
$$\text{HP} = \{x \mid x < -2 \text{ atau } x > 3, x \in R\}$$



Dari grafik diatas untuk menilai Himpunan Penyelesaian x yang memenuhi bentuk pertidaksamaan $x^2-x-6>0$ kita hanya tinggal lihat bentuk bagian mana yang grafiknya sudah terletak diatas 0 jelas itu sudah berada diatas 0 bentuk grafiknya disaat $x<-2$ atau $x>3$

Soal Latihan dan Pembahasan

Berikut adalah soal-soal untuk melatih kemampuan Anda dalam menyelesaikan berbagai bentuk pertidaksamaan kuadrat dengan metode garis bilangan dan analisis parabola.

Soal dengan Pembahasan

1. **Soal:** Tentukan himpunan penyelesaian dari $x^2+2x-15 \leq 0$.

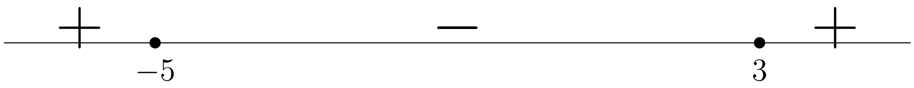
   Pembahasan:

   (a) **Faktorkan dan Cari Akar:**

   $$(x+5)(x-3) \leq 0$$

   Pembuat nolnya adalah $x=-5$ dan $x=3$.

(b) **Garis Bilangan:** Gunakan lingkaran penuh (●) karena tanda pertidaksamaan adalah $\leq$. Karena ini adalah parabola yang membuka ke atas ($a = 1 > 0$), daerah negatif berada di antara kedua akarnya.



(c) **Kesimpulan:** Karena pertidaksamaan adalah ≤ 0, kita pilih daerah (-). **HP** $= \{x \mid -5 \leq x \leq 3\}$

2. **Soal:** Selesaikan pertidaksamaan $2x^2 - 7x > -3$.

Pembahasan:

(a) **Pindahkan ke Satu Ruas:**

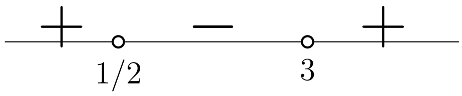
$$2x^2 - 7x + 3 > 0$$

(b) **Faktorkan dan Cari Akar:**

$$(2x - 1)(x - 3) > 0$$

Pembuat nolnya adalah $x = 1/2$ dan $x = 3$.

(c) **Garis Bilangan:** Gunakan lingkaran kosong (○). Parabola membuka ke atas ($a = 2 > 0$), sehingga daerah positif berada di luar kedua akarnya.



(d) **Kesimpulan:** Karena pertidaksamaan adalah > 0, kita pilih daerah ($+$). **HP** $= \{x \mid x < 1/2$ **atau** $x > 3\}$

3. **Soal:** Tentukan HP dari $-x^2 + 8x - 12 \geq 0$.

Pembahasan:

(a) **Ubah Bentuk:** Agar lebih mudah difaktorkan, kalikan kedua ruas dengan -1 dan balik tanda pertidaksamaan.

$$x^2 - 8x + 12 \leq 0$$

(b) **Faktorkan dan Cari Akar:**

$$(x - 2)(x - 6) \leq 0$$

Pembuat nolnya adalah $x = 2$ dan $x = 6$.

(c) **Garis Bilangan:** Gunakan lingkaran penuh (●). Parabola $x^2 - 8x + 12$ membuka ke atas, dan kita mencari daerah negatif (karena tanda sudah dibalik menjadi $\leq$). Daerah negatif berada di antara akar.

(d) **Kesimpulan:** **HP** $= \{x \mid 2 \leq x \leq 6\}$

4. **Soal:** Selesaikan $x^2 - 10x + 25 > 0$.

   Pembahasan:

   (a) **Faktorkan Polinomial:**
   $$(x-5)^2 > 0$$

   (b) **Analisis Logika:** Kuadrat dari sebuah bilangan riil, $(x-5)^2$, akan selalu non-negatif (yaitu ≥ 0). Pertidaksamaan ini menanyakan kapan ekspresi tersebut *strictly* lebih besar dari 0. Jawabannya adalah "selalu, kecuali saat ekspresi tersebut bernilai 0".

   (c) **Cari Pengecualian:** Ekspresi bernilai 0 saat $x - 5 = 0 \implies x = 5$.

   (d) **Kesimpulan:** Solusinya adalah semua bilangan riil kecuali 5. **HP** $= \{x \mid x \in R, x \neq 5\}$

5. **Soal:** Tentukan HP dari $x^2 + 2x + 5 > 0$.

   Pembahasan:

   (a) **Cek Diskriminan (D):** Kita coba mencari akar dari $x^2 + 2x + 5 = 0$. $D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -16$.

   (b) **Analisis Definit:** Karena $D < 0$ (tidak memiliki akar riil) dan koefisien $a = 1$ (positif), maka fungsi kuadrat $x^2 + 2x + 5$ adalah **definit positif**. Artinya, nilainya akan selalu positif untuk semua nilai x bilangan riil. Grafiknya adalah parabola yang seluruhnya berada di atas sumbu-x.

   (c) **Kesimpulan:** Karena fungsi selalu positif, pertidaksamaan $x^2 + 2x + 5 > 0$ selalu benar. **HP** $= \{x \mid x \in R\}$ (Semua bilangan riil)

Soal Latihan Mandiri

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari $x^2 - 11x + 18 < 0$.
2. Selesaikan pertidaksamaan $3x^2 \geq 5x + 2$.
3. Tentukan himpunan penyelesaian dari $15 - 7x - 2x^2 < 0$.
4. Selesaikan pertidaksamaan $4x^2 + 12x + 9 \leq 0$.
5. Tentukan himpunan penyelesaian dari $x^2 - 3x + 7 > 0$.

2.2 Pertidaksamaan Rasional (Pecahan)

Istilah "rasional" berasal dari kata "rasio", yang berarti perbandingan atau pecahan. Pertidaksamaan rasional adalah pertidaksamaan yang melibatkan bentuk pecahan, di mana pembilang dan/atau penyebutnya mengandung variabel.

2.2.1 Bentuk Umum dan Konsep Fundamental

Bentuk umum dari pertidaksamaan rasional adalah:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0, \quad \text{atau} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$$

di mana $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah polinomial.

Pemahaman Sejati di balik penyelesaian pertidaksamaan ini terletak pada aturan dasar pembagian:

1. Sebuah pecahan bernilai **Positif (+)** jika pembilang dan penyebutnya **bertanda sama** (keduanya positif atau keduanya negatif).
2. Sebuah pecahan bernilai **Negatif (-)** jika pembilang dan penyebutnya **bertanda beda** (satu positif, satu negatif).

Selain itu, ada satu aturan mutlak dalam pecahan: **Penyebut tidak boleh bernilai nol ($Q(x) \neq 0$)**. Aturan ini sangat krusial dan akan selalu kita terapkan.

2.2.2 Langkah-Langkah Penyelesaian Sistematis

Mengikuti logika di atas, kita dapat merumuskan metode yang andal untuk menyelesaikan pertidaksamaan rasional.

1. **Jadikan Ruas Kanan Nol**. Pindahkan semua suku ke ruas kiri sehingga pertidaksamaan berbentuk $\frac{F(x)}{G(x)} \geq 0$ (atau tanda lainnya).

   PERINGATAN KERAS: Jangan pernah melakukan kali silang dengan ekspresi yang mengandung variabel (misalnya, mengalikan kedua ruas dengan $Q(x)$). Kita tidak tahu apakah $Q(x)$ positif atau negatif, sehingga kita tidak bisa menentukan apakah tanda pertidaksamaan perlu dibalik atau tidak.

2. **Tentukan Pembuat Nol Pembilang dan Penyebut**.
   - Selesaikan $P(x) = 0$ untuk menemukan pembuat nol pembilang.
   - Selesaikan $Q(x) = 0$ untuk menemukan pembuat nol penyebut.

   Nilai-nilai ini adalah titik-titik kritis yang akan menjadi batas interval pada garis bilangan.

3. **Buat Garis Bilangan**. Letakkan semua titik kritis pada garis bilangan. Perhatikan aturan untuk lingkaran:
   - Pembuat nol dari **penyebut** *selalu* menggunakan **lingkaran kosong** ($\circ$) karena nilai tersebut membuat pecahan tidak terdefinisi.

- Pembuat nol dari **pembilang** menggunakan lingkaran kosong ($\circ$) untuk $<$ atau $>$ dan lingkaran penuh ($\bullet$) untuk $\leq$ atau $\geq$.

4. **Lakukan Uji Titik**. Pilih satu bilangan dari setiap interval pada garis bilangan, substitusikan ke dalam bentuk pecahan $\frac{P(x)}{Q(x)}$, dan tentukan apakah hasilnya positif (+) atau negatif (-).

5. **Tentukan Himpunan Penyelesaian**. Pilih interval dengan tanda (+) atau (-) sesuai dengan tanda pada pertidaksamaan awal.

Contoh Penyelesaian Lengkap

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\frac{x+5}{x-2} \geq 3$.

1. **Jadikan ruas kanan nol** (Jangan kali silang!):

$$\frac{x+5}{x-2} - 3 \geq 0$$

Samakan penyebutnya:

$$\begin{aligned} \frac{x+5}{x-2} - \frac{3(x-2)}{x-2} &\geq 0 \\ \frac{(x+5)-(3x-6)}{x-2} &\geq 0 \\ \frac{x+5-3x+6}{x-2} &\geq 0 \\ \frac{-2x+11}{x-2} &\geq 0 \end{aligned}$$

Ini adalah bentuk final yang akan kita analisis.

2. **Tentukan pembuat nol**:

- Pembilang: $-2x + 11 = 0 \implies 2x = 11 \implies x = 5.5$.
- Penyebut: $x - 2 = 0 \implies x = 2$.

3. **Buat garis bilangan**:

- Titik $x = 5.5$ (dari pembilang) menggunakan **lingkaran penuh ($\bullet$)** karena tanda soal adalah $\geq$.
- Titik $x = 2$ (dari penyebut) *selalu* menggunakan **lingkaran kosong ($\circ$)**.

4. **Lakukan uji titik** pada ekspresi $\frac{-2x+11}{x-2}$:

- *Interval 1:* $x < 2$. Pilih $x = 0$.

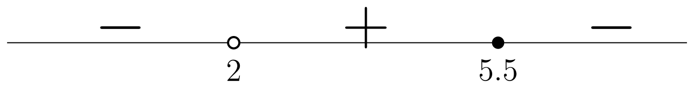
$$\frac{-2(0)+11}{0-2} = \frac{11}{-2} \implies \text{Hasil } \textbf{Negatif (-)}$$

- *Interval 2:* $2 < x < 5.5$. Pilih $x = 3$.

$$\frac{-2(3)+11}{3-2} = \frac{-6+11}{1} = \frac{5}{1} \implies \text{Hasil } \textbf{Positif (+)}$$

- *Interval 3:* $x > 5.5$. Pilih $x = 6$.

$$\frac{-2(6)+11}{6-2} = \frac{-12+11}{4} = \frac{-1}{4} \implies \text{Hasil } \textbf{Negatif (-)}$$



5. **Tentukan himpunan penyelesaian**: Karena bentuk akhir pertidaksamaan adalah ≥ 0 (lebih dari atau sama dengan nol), kita mencari daerah yang bertanda **positif (+)**.

   Dari garis bilangan, daerah positif terletak di antara 2 dan 5.5. Jadi, himpunan penyelesaiannya (HP) adalah:

$$\text{HP} = \{x \mid 2 < x \leq 5.5, x \in R\}$$

Soal Latihan dan Pembahasan

Berikut adalah soal-soal untuk melatih kemampuan Anda dalam menyelesaikan berbagai bentuk pertidaksamaan rasional dengan menggunakan metode garis bilangan.

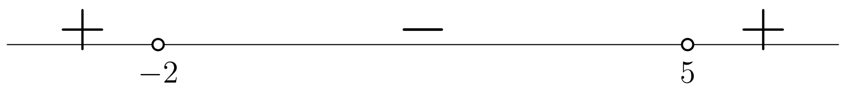
Soal dengan Pembahasan

1. **Soal:** Tentukan himpunan penyelesaian dari $\frac{x-5}{x+2} < 0$.

   Pembahasan:

   (a) **Tentukan Pembuat Nol:**
   - Pembilang: $x - 5 = 0 \implies x = 5$.
   - Penyebut: $x + 2 = 0 \implies x = -2$.

   (b) **Garis Bilangan:** Gunakan lingkaran kosong ($\circ$) untuk kedua titik karena tanda pertidaksamaan adalah $<$. Uji interval paling kanan ($x > 5$), misal $x = 6$: $\frac{6-5}{6+2} = \frac{+}{+} \implies$ Positif. Tanda berselang-seling.



   (c) **Kesimpulan:** Karena pertidaksamaan adalah < 0, kita pilih daerah (-). **HP** $= \{x \mid -2 < x < 5\}$

2. **Soal:** Selesaikan pertidaksamaan $\frac{2x-1}{x-3} \leq 1$.

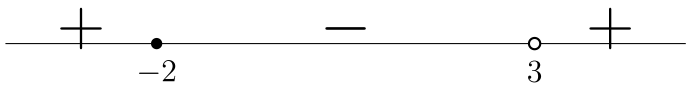
   Pembahasan:

   (a) **Jadikan Ruas Kanan Nol:**

$$\frac{2x-1}{x-3} - 1 \leq 0 \implies \frac{2x-1-(x-3)}{x-3} \leq 0 \implies \frac{x+2}{x-3} \leq 0$$

   (b) **Tentukan Pembuat Nol:** Pembilang $x = -2$, Penyebut $x = 3$.

(c) **Garis Bilangan:** Gunakan lingkaran penuh (•) untuk $x = -2$ (dari pembilang) dan lingkaran kosong (∘) untuk $x = 3$ (dari penyebut). Uji $x = 4$: $\frac{\pm}{+} \implies$ Positif.



(d) **Kesimpulan:** Karena pertidaksamaan adalah ≤ 0, kita pilih daerah (-). **HP** $= \{x \mid -2 \leq x < 3\}$

3. **Soal:** Tentukan HP dari $\frac{x^2-3x-10}{x-1} \geq 0$.

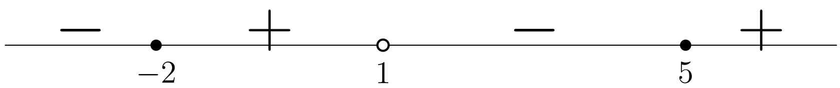
   Pembahasan:

   (a) **Faktorkan Pembilang:**

$$\frac{(x-5)(x+2)}{x-1} \geq 0$$

   (b) **Tentukan Pembuat Nol:** Pembilang $x = 5, x = -2$. Penyebut $x = 1$.

   (c) **Garis Bilangan:** Lingkaran penuh untuk $x = 5, x = -2$. Lingkaran kosong untuk $x = 1$. Uji $x = 6$: $\frac{(+)(+)}{(+)} \implies$ Positif. Tanda berselang-seling.



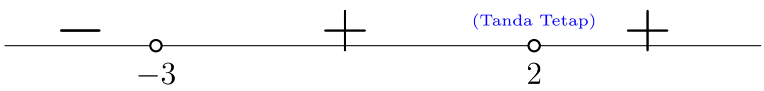
   (d) **Kesimpulan:** Karena pertidaksamaan adalah ≥ 0, kita pilih daerah $(+)$. **HP** $= \{x \mid -2 \leq x < 1$ **atau** $x \geq 5\}$

4. **Soal:** Selesaikan $\frac{(x-2)^2}{x+3} > 0$.

   Pembahasan:

   (a) **Tentukan Pembuat Nol:** Pembilang $x = 2$ (multiplisitas 2, genap). Penyebut $x = -3$ (multiplisitas 1, ganjil).

   (b) **Garis Bilangan:** Lingkaran kosong untuk keduanya. Uji $x = 3$: $\frac{(+)}{(+)} \implies$ Positif. Tanda tetap di $x = 2$ dan berubah di $x = -3$.



   (c) **Kesimpulan:** Karena pertidaksamaan adalah > 0, kita pilih daerah $(+)$. **HP** $= \{x \mid -3 < x < 2$ **atau** $x > 2\}$

5. **Soal:** Tentukan HP dari $\frac{x^2+4}{x^2-9} \leq 0$.

   Pembahasan:

   (a) **Analisis Faktor:** Faktor $(x^2 + 4)$ di pembilang selalu bernilai positif (definit positif). Jadi, kita bisa membaginya tanpa mengubah tanda. Pertidaksamaan menjadi $1/(x^2 - 9) \leq 0$. Karena pembilang (1) positif, agar pecahan negatif, penyebut harus negatif.

$$x^2 - 9 < 0$$

(b) **Selesaikan Pertidaksamaan Kuadrat:**

$$(x-3)(x+3) < 0$$

Pembuat nolnya $x = 3$ dan $x = -3$. Solusinya berada di antara kedua akar.

(c) **Kesimpulan: HP** $= \{x \mid -3 < x < 3\}$

Soal Latihan Mandiri

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari $\frac{2x+7}{x-4} \geq 1$.
2. Selesaikan pertidaksamaan $\frac{x^2-x-6}{x^2+2x-3} > 0$.
3. Tentukan HP dari $\frac{x}{x-2} \leq \frac{x+1}{x+3}$.
4. Selesaikan pertidaksamaan $\frac{(x+1)^3(x-3)}{(x-2)^2} \leq 0$.
5. Tentukan himpunan penyelesaian dari $\frac{5}{x-1} < \frac{2}{x+1}$.

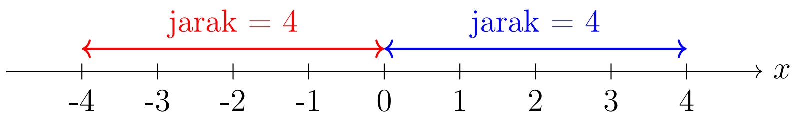
2.3 Pertidaksamaan Nilai Mutlak

Pertidaksamaan nilai mutlak memperkenalkan konsep yang unik. Sebelum kita masuk ke dalam rumus, kita harus memahami makna sejati dari nilai mutlak.

2.3.1 Konsep Fundamental: Nilai Mutlak sebagai Jarak

Definisi paling mendasar dari nilai mutlak, $|x|$, adalah **jarak dari titik x ke titik nol (0) pada garis bilangan**. Karena jarak tidak pernah negatif, hasil dari nilai mutlak selalu non-negatif.

Sebagai contoh, $|-4| = 4$ karena jarak dari titik -4 ke 0 adalah 4 unit. Demikian pula, $|4| = 4$ karena jarak dari titik 4 ke 0 juga 4 unit.



Dengan memahami nilai mutlak sebagai jarak, kita dapat menyelesaikan pertidaksamaan secara intuitif.

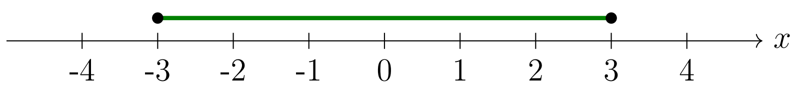
2.3.2 Menyelesaikan Pertidaksamaan dengan Konsep Jarak

Ada dua kasus utama dalam pertidaksamaan nilai mutlak.

Kasus 1: Bentuk "Kurang Dari" (Contoh: $|x| \leq 3$)

Pertidaksamaan $|x| \leq 3$ secara harfiah berarti: "Carilah semua bilangan x yang **jaraknya dari nol kurang dari atau sama dengan 3**."
Visualisasi: Pada garis bilangan, ini adalah semua titik yang berada di "zona dekat" dengan nol, yaitu antara -3 dan 3.

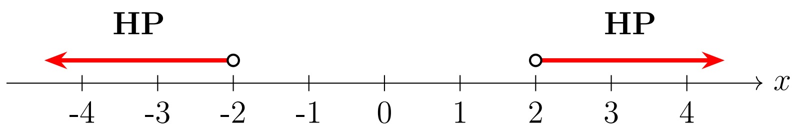
HP: Zona yang jaraknya ≤ 3 dari nol



Kesimpulan (Sifat 1): Dari visualisasi ini, kita dapat menyimpulkan sifatnya. Jika $|f(x)| \leq c$, maka solusinya adalah $-c \leq f(x) \leq c$.

Kasus 2: Bentuk "Lebih Dari" (Contoh: $|x| > 2$)

Pertidaksamaan $|x| > 2$ berarti: "Carilah semua bilangan x yang **jaraknya dari nol lebih dari 2**."
Visualisasi : Pada garis bilangan, ini adalah semua titik yang berada di "zona jauh" dari nol, yaitu di sebelah kiri -2 atau di sebelah kanan 2.



Kesimpulan (Sifat 2) : Dari sini, kita dapatkan sifat kedua. Jika $|f(x)| \geq c$, maka solusinya adalah $f(x) \leq -c$ **atau** $f(x) \geq c$.

2.3.3 Penyelesaian Aljabar

Konsep jarak di atas melahirkan sifat-sifat formal yang menjadi alat utama kita dalam menyelesaikan pertidaksamaan nilai mutlak secara aljabar.

Sifat-Sifat Utama Pertidaksamaan Nilai Mutlak

Untuk $c > 0$:

1. $|f(x)| \leq c \iff -c \leq f(x) \leq c$
2. $|f(x)| \geq c \iff f(x) \leq -c$ atau $f(x) \geq c$

Metode lain yang juga berguna, terutama jika kedua ruas mengandung nilai mutlak, adalah dengan mengkuadratkan kedua ruas. Ini diperbolehkan karena kedua ruas dijamin non-negatif.

- $|a| > |b| \iff a^2 > b^2 \iff a^2 - b^2 > 0 \iff (a-b)(a+b) > 0.$

Contoh Penyelesaian Lengkap

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $|3x - 2| \geq 7$.

1. **Identifikasi Bentuk**: Pertidaksamaan ini memiliki bentuk "lebih dari" ($\geq$), jadi kita akan menggunakan **Sifat 2**.

$$|f(x)| \geq c \implies f(x) \leq -c \text{ atau } f(x) \geq c$$

2. **Terapkan Sifat**: Dengan $f(x) = 3x - 2$ dan $c = 7$, kita dapatkan dua pertidaksamaan terpisah:

$$3x - 2 \leq -7 \quad \text{atau} \quad 3x - 2 \geq 7$$

3. **Selesaikan Masing-Masing Pertidaksamaan**:

   - *Bagian Kiri:*

$$\begin{aligned} 3x - 2 &\leq -7 \\ 3x &\leq -7 + 2 \\ 3x &\leq -5 \\ x &\leq -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

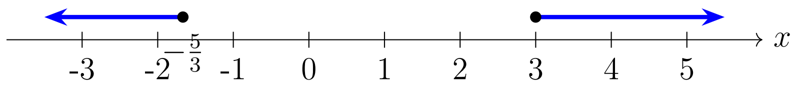
   - *Bagian Kanan:*

$$\begin{aligned} 3x - 2 &\geq 7 \\ 3x &\geq 7 + 2 \\ 3x &\geq 9 \\ x &\geq 3 \end{aligned}$$

4. **Gabungkan Solusi**: Solusi akhirnya adalah gabungan dari kedua hasil. Jadi, himpunan penyelesaiannya (HP) adalah:

$$\text{HP} = \{x \mid x \leq -\frac{5}{3} \text{ atau } x \geq 3, x \in R\}$$

Garis Bilangan untuk Solusi:



Sifat-Sifat Penting Lainnya

Selain sifat untuk menyelesaikan pertidaksamaan, terdapat beberapa sifat dasar nilai mutlak yang sangat berguna.

- **Sifat Perkalian dan Pembagian**
  Nilai mutlak dari sebuah perkalian (atau pembagian) adalah perkalian (atau pembagian) dari nilai mutlak masing-masing.

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad \text{untuk } b \neq 0$$

- **Sifat Jarak Antara Dua Titik**
  Jika $|x|$ adalah jarak dari x ke 0, maka $|a-b|$ dapat diartikan sebagai **jarak antara titik** a **dan titik** b pada garis bilangan. Sifat ini sangat intuitif.

$$\text{Jarak}(a, b) = |a - b| = |b - a|$$

  Contoh: Jarak antara -2 dan 5 adalah $|-2-5| = |-7| = 7$.

- **Ketaksamaan Segitiga (Triangle Inequality)**
  Ini adalah sifat yang paling terkenal dari nilai mutlak. Sifat ini menyatakan bahwa nilai mutlak dari sebuah penjumlahan tidak akan pernah lebih besar dari jumlah nilai mutlak masing-masing.

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

  Pemahaman Konseptual: Bayangkan perjalanan pada garis bilangan. $|a|$ adalah jarak dari 0 ke a. $|b|$ adalah sebuah jarak. $|a + b|$ adalah jarak dari 0 ke titik akhir. Sifat ini mengatakan "jarak langsung ke tujuan ($|a + b|$) selalu lebih pendek atau sama dengan jarak jika mengambil jalan memutar (pergi ke a dulu, lalu bergerak sejauh $|b|$)." Tanda **sama dengan (=)** hanya terjadi jika a dan b memiliki tanda yang sama (atau salah satunya nol), artinya perjalanannya searah dan tidak ada "putar balik".

Soal Latihan dan Pembahasan

Berikut adalah soal-soal untuk menguji kemampuan Anda dalam menerapkan sifat-sifat nilai mutlak dalam berbagai situasi.

Soal dengan Pembahasan

1. **Soal:** Tentukan himpunan penyelesaian dari $|2x - 5| < 3$.

   Pembahasan:

   (a) **Identifikasi Bentuk:** Ini adalah bentuk "kurang dari" ($|f(x)| < c$), sehingga kita gunakan sifat: $-c < f(x) < c$.

   (b) **Terapkan Sifat:**
   $$-3 < 2x - 5 < 3$$

   (c) **Selesaikan Pertidaksamaan Gabungan:** Tambahkan 5 ke semua tiga ruas.
   $$-3 + 5 < 2x < 3 + 5$$
   $$2 < 2x < 8$$
   Bagi semua tiga ruas dengan 2.
   $$1 < x < 4$$

   (d) **Kesimpulan: HP** $= \{x \mid 1 < x < 4\}$

2. **Soal:** Selesaikan pertidaksamaan $|4x + 1| \geq 7$.

   Pembahasan:

   (a) **Identifikasi Bentuk:** Ini adalah bentuk "lebih dari" ($|f(x)| \geq c$), sehingga kita gunakan sifat: $f(x) \leq -c$ atau $f(x) \geq c$.

   (b) **Terapkan Sifat:**
   $$4x + 1 \leq -7 \quad \text{atau} \quad 4x + 1 \geq 7$$

   (c) **Selesaikan Masing-Masing:**
   - $4x \leq -8 \implies x \leq -2$
   - $4x \geq 6 \implies x \geq \frac{3}{2}$

   (d) **Kesimpulan: HP** $= \{x \mid x \leq -2$ **atau** $x \geq \frac{3}{2}\}$

3. **Soal:** Tentukan HP dari $|2x - 1| \leq |x + 4|$.

   Pembahasan:

   (a) **Identifikasi Metode:** Karena kedua ruas adalah nilai mutlak (dijamin non-negatif), metode paling efisien adalah mengkuadratkan kedua ruas.

   (b) **Kuadratkan dan Selesaikan:**
   $$\begin{aligned}(2x-1)^2 &\leq (x+4)^2 \\ 4x^2 - 4x + 1 &\leq x^2 + 8x + 16 \\ 3x^2 - 12x - 15 &\leq 0 \\ x^2 - 4x - 5 &\leq 0 \quad \text{(dibagi 3)} \\ (x-5)(x+1) &\leq 0\end{aligned}$$

   (c) **Garis Bilangan:** Pembuat nolnya adalah $x = 5$ dan $x = -1$. Karena ini pertidaksamaan kuadrat "kurang dari", solusinya berada di antara kedua akar.

(d) **Kesimpulan: HP** $= \{x \mid -1 \leq x \leq 5\}$

4. **Soal:** Selesaikan $|x-2| > 2x-1$.

   Pembahasan:

   (a) **Identifikasi Metode:** Ruas kanan $(2x-1)$ bisa bernilai negatif, sehingga kita tidak bisa langsung mengkuadratkan. Gunakan definisi nilai mutlak atau analisis kasus.

   (b) **Gunakan Definisi: Kasus A: Jika** $x-2 \geq 0 \implies x \geq 2$. Maka $|x-2| = x-2$.
   $$x-2 > 2x-1 \implies -1 > x \implies x < -1$$
   Irisan dari $x \geq 2$ dan $x < -1$ adalah himpunan kosong. **Tidak ada solusi di Kasus A**.
   Kasus B: Jika $x-2 < 0 \implies x < 2$. Maka $|x-2| = -(x-2) = -x+2$.
   $$-x+2 > 2x-1 \implies 3 > 3x \implies 1 > x \implies x < 1$$
   Irisan dari $x < 2$ dan $x < 1$ adalah $x < 1$.

   (c) **Kesimpulan:** Gabungan dari semua kasus adalah $x < 1$. **HP** $= \{x \mid x < 1\}$

5. **Soal:** Tentukan HP dari $|x|^2 - 2|x| - 3 < 0$.

   Pembahasan:

   (a) **Bentuk Kuadratik:** Misalkan $p = |x|$. Syaratnya $p \geq 0$.
   $$p^2 - 2p - 3 < 0 \implies (p-3)(p+1) < 0$$
   Solusi untuk p adalah $-1 < p < 3$.

   (b) **Substitusi Kembali dan Iriskan:** Irisan dari $-1 < p < 3$ dengan $p \geq 0$ adalah $0 \leq p < 3$.
   $$0 \leq |x| < 3$$

   (c) **Selesaikan:** $|x| \geq 0$ selalu benar untuk semua x. Kita hanya perlu menyelesaikan $|x| < 3$. Berdasarkan sifat, solusinya adalah $-3 < x < 3$.

   (d) **Kesimpulan: HP** $= \{x \mid -3 < x < 3\}$

Soal Latihan Mandiri

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari $|5x+2| > 8$.
2. Selesaikan pertidaksamaan $|3-2x| \leq 5$.
3. Tentukan himpunan penyelesaian dari $|x+1| \geq |2x-4|$.
4. Selesaikan pertidaksamaan $|x+3| \leq 2x$.
5. Tentukan himpunan penyelesaian dari $|\frac{x-1}{x+2}| < 1$.

2.4 Program Linear

Program linear adalah metode matematika yang digunakan untuk menemukan nilai optimum (maksimum atau minimum) dari suatu fungsi linear, yang tunduk pada serangkaian batasan (kendala) yang juga berbentuk linear.

Secara sederhana, program linear membantu kita menjawab pertanyaan seperti: "Bagaimana cara mendapatkan keuntungan terbesar jika sumber daya kita terbatas?" atau "Bagaimana cara meminimalkan biaya produksi dengan tetap memenuhi target?"

Setiap masalah program linear memiliki dua komponen utama:

1. **Fungsi Objektif (atau Fungsi Tujuan)**: Ini adalah fungsi yang nilainya ingin kita maksimalkan atau minimalkan. Biasanya berbentuk $Z = ax + by$.

2. **Kendala (Constraints)**: Ini adalah sistem pertidaksamaan linear yang merepresentasikan semua batasan atau keterbatasan yang ada, seperti anggaran, waktu, atau ketersediaan bahan.

2.4.1 Model Matematika dan Daerah Penyelesaian

Langkah pertama dalam program linear adalah menerjemahkan masalah dunia nyata ke dalam bahasa matematika. Ini disebut **pemodelan matematika**. Setelah model dibuat, kita menggambar semua kendala pada bidang Kartesius.

Daerah yang memenuhi semua pertidaksamaan kendala secara bersamaan disebut **Daerah Himpunan Penyelesaian (DHP)** atau *Feasible Region*.

Pemahaman Konseptual: Setiap titik (x, y) di dalam DHP merepresentasikan sebuah solusi yang *mungkin* dan *valid*—artinya, solusi tersebut tidak melanggar batasan apa pun. Tugas kita adalah menemukan satu titik *terbaik* di antara semua kemungkinan ini.

2.4.2 Optimasi Fungsi Objektif: Metode Uji Titik Pojok

Setelah kita memiliki DHP dengan tak terhingga banyaknya solusi yang mungkin, bagaimana kita menemukan yang terbaik? Jawabannya terletak pada sebuah teorema fundamental:

Nilai optimum (maksimum atau minimum) dari fungsi objektif selalu tercapai pada salah satu titik pojok (verteks) dari Daerah Himpunan Penyelesaian (DHP).

Artinya, kita tidak perlu menguji semua titik di dalam daerah tersebut. Kita hanya perlu menguji titik-titik sudutnya.

Langkah-Langkah Penyelesaian Program Linear

1. **Buat Model Matematika**: Tentukan fungsi objektif $Z = ax + by$ dan tuliskan semua kendala dalam bentuk sistem pertidaksamaan linear.

2. **Gambar Daerah Himpunan Penyelesaian (DHP)**: Gambarkan semua garis batas dari kendala dan tentukan daerah irisannya.

3. **Tentukan Koordinat Titik-Titik Pojok**: Cari koordinat (x, y) dari setiap verteks DHP. Titik pojok terbentuk dari perpotongan garis-garis batas.

4. **Uji Titik Pojok**: Substitusikan koordinat setiap titik pojok ke dalam fungsi objektif Z.

5. **Tentukan Nilai Optimum**: Bandingkan hasil dari semua titik pojok. Nilai terbesar adalah nilai maksimum, dan nilai terkecil adalah nilai minimum.

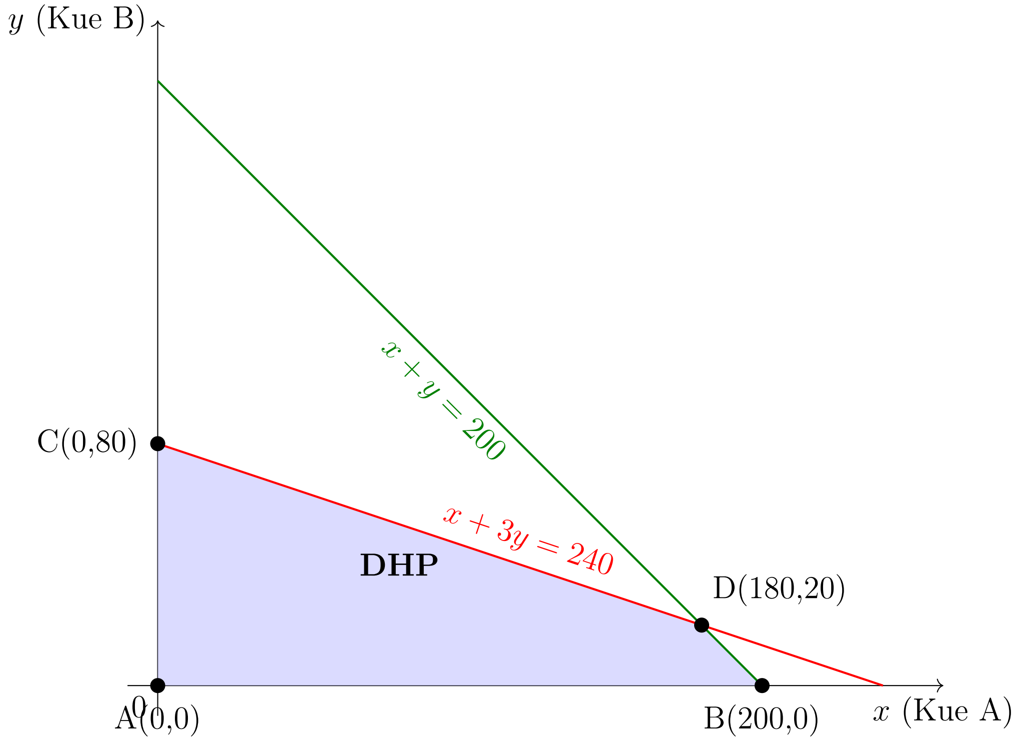
Contoh Penyelesaian Lengkap

Masalah: Seorang pedagang ingin membuat dua jenis kue, kue A dan kue B. Kue A memerlukan 20 gram tepung dan 10 gram gula. Kue B memerlukan 20 gram tepung dan 30 gram gula. Persediaan tepung yang dimiliki adalah 4000 gram, dan persediaan gula adalah 2400 gram. Jika keuntungan kue A adalah Rp 1.000 per buah dan kue B adalah Rp 1.500 per buah, berapa keuntungan maksimum yang bisa didapat?

1. **Model Matematika**:
   - Variabel: Misalkan $x =$ jumlah kue A, dan $y =$ jumlah kue B.
   - Fungsi Objektif (Keuntungan): Maksimalkan $Z = 1000x + 1500y$.
   - Kendala:
     - Tepung: $20x + 20y \leq 4000 \implies x + y \leq 200$
     - Gula: $10x + 30y \leq 2400 \implies x + 3y \leq 240$
     - Non-negatif: $x \geq 0$, $y \geq 0$ (jumlah kue tidak mungkin negatif).
2. **Gambar DHP**: Kita gambar garis $x + y = 200$ dan $x + 3y = 240$ di kuadran pertama.
3. **Tentukan Titik Pojok**:
   - Titik A: Titik asal, $(0, 0)$.
   - Titik B: Perpotongan $x + y = 200$ dengan sumbu-x ($y = 0$), yaitu $(200, 0)$.
   - Titik C: Perpotongan $x + 3y = 240$ dengan sumbu-y ($x = 0$), yaitu $(0, 80)$.
   - Titik D: Perpotongan antara $x + y = 200$ dan $x + 3y = 240$. Dengan eliminasi yaitu dengan mengurangkan kedua persamaan tersebut :

     $$\begin{array}{r} x + 3y = 240 \\ x + y = 200 \\ \hline 2y = 40 \implies y = 20 \end{array}$$

     Substitusi $y = 20$ ke $x + y = 200 \implies x = 180$. Jadi, titik D adalah $(180, 20)$.



4. **Uji Titik Pojok** pada $Z = 1000x + 1500y$:
   - Titik A(0,0): $Z = 1000(0) + 1500(0) = 0$
   - Titik B(200,0): $Z = 1000(200) + 1500(0) = 200.000$
   - Titik C(0,80): $Z = 1000(0) + 1500(80) = 120.000$
   - **Titik D(180,20)**: $Z = 1000(180) + 1500(20) = 180.000 + 30.000 = \mathbf{210.000}$
5. **Tentukan Nilai Optimum**: Nilai Z terbesar adalah 210.000, yang terjadi pada titik D.

   Kesimpulan: Untuk mendapatkan keuntungan maksimum sebesar **Rp 210.000**, pedagang harus membuat **180 buah kue A** dan **20 buah kue B**.

Pemahaman Mendalam: Mengapa Solusi Optimum Selalu di Titik Pojok?

Untuk memahami mengapa titik-titik pojok begitu istimewa, mari kita gunakan analogi yang lebih sederhana dan konkret: sebuah lereng bukit di lapangan berpagar.

1. Daerah Penyelesaian (DHP) adalah Lapangan Berpagar

Bayangkan Daerah Himpunan Penyelesaian (DHP) pada grafik adalah sebuah **lapangan datar yang dikelilingi pagar**. Pagar-pagar ini adalah garis-garis kendala Anda. Aturan mainnya, Anda hanya boleh berada di titik mana pun di dalam area berpagar ini.

2. Fungsi Objektif (Z) adalah Ketinggian Tanah

Sekarang, bayangkan bahwa lapangan ini sebenarnya berada di lereng sebuah bukit yang sangat landai. Fungsi objektif $Z = ax + by$ adalah rumus yang memberitahu kita **ketinggian tanah** pada setiap titik (x, y) di lapangan.

Karena fungsinya **linear**, maka "tanah"-nya bukanlah bukit yang kompleks dengan banyak puncak atau lembah. Tanahnya adalah sebuah **bidang miring yang rata sempurna**, seperti papan yang disandarkan.

3. Mencari Keuntungan Maksimum = Mencari Titik Tertinggi

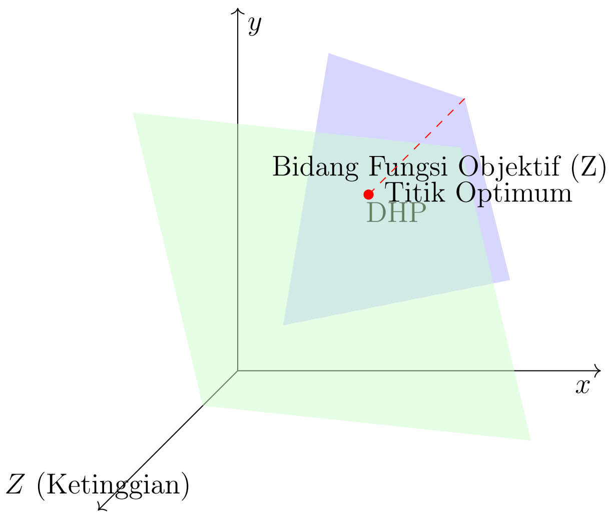
Dengan analogi ini, pertanyaan "Di manakah keuntungan maksimum?" berubah menjadi:

"Di manakah titik dengan ketinggian paling tinggi yang bisa saya capai di dalam lapangan berpagar ini?"

Logikanya menjadi sangat jelas:

- Jika Anda berdiri di **tengah-tengah lapangan**, Anda pasti bukan berada di titik tertinggi, karena Anda selalu bisa berjalan ke arah yang lebih "menanjak" untuk mencapai posisi yang lebih tinggi.
- Proses berjalan menanjak ini akan terus berlanjut sampai Anda **terhenti oleh pagar** (garis batas).
- Titik tertinggi yang bisa Anda capai pastilah sebuah **sudut dari pagar**, yaitu titik pojok yang posisinya paling "atas" di lereng bukit tersebut.

Visualisasi di bawah ini menunjukkan DHP sebagai alas, dan bidang miring di atasnya sebagai "ketinggian" Z. Terlihat jelas bahwa titik tertinggi dari DHP pada bidang miring tersebut adalah salah satu titik pojoknya.



Kesimpulan: Kita hanya perlu menguji titik-titik pojok karena secara logis, nilai tertinggi (atau terendah) dari sebuah bidang miring yang dibatasi oleh pagar poligonal pasti akan tercapai di salah satu sudut pagar tersebut.

Pemahaman Tambahan by Founder UMT : Intinya karena nilai optimumnya itu akan berupa bidang datar yang memiliki tingkat kemiringan, karena dia memiliki tingkat kemiringan maka untuk mencapai bagian yang paling rendah atau tinggi kita harus pergi sejauh mungkin makanya yang diambil itu adalah batas batas ujung atau titik titik pojok karena semakin jauh anda pergi maka harusnya nilainya atau lokasinya itu pasti akan semakin tinggi atau rendah.

Soal Latihan dan Pembahasan

Untuk mengasah kemampuan Anda dalam memodelkan dan menyelesaikan masalah program linear, berikut adalah beberapa contoh soal beserta pembahasannya, diikuti dengan soal-soal untuk latihan mandiri.

Soal dengan Pembahasan

1. **Soal:** Tentukan nilai minimum dari fungsi objektif $Z = 3x + 2y$ yang memenuhi sistem pertidaksamaan: $x + y \geq 8$, $5x + 2y \geq 20$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

   Pembahasan:

   (a) **Gambar DHP:** Gambarkan garis $x + y = 8$ (memotong di (8,0) dan (0,8)) dan $5x + 2y = 20$ (memotong di (4,0) dan (0,10)). Karena tanda $\geq$, DHP berada di atas kedua garis.

   (b) **Tentukan Titik Pojok:**
   - Titik A: Perpotongan dengan sumbu-y, yaitu $(0, 10)$.
   - Titik B: Perpotongan dengan sumbu-x, yaitu $(8, 0)$.
   - Titik C: Perpotongan antara $x + y = 8$ dan $5x + 2y = 20$. Kalikan persamaan pertama dengan 2: $2x+2y = 16$. Eliminasi: $(5x+2y)-(2x+2y) = 20-16 \implies 3x = 4 \implies x = 4/3$. Substitusi: $4/3 + y = 8 \implies y = 20/3$. Titik C adalah $(4/3, 20/3)$.

   (c) **Uji Titik Pojok** pada $Z = 3x + 2y$:
   - A(0,10): $Z = 3(0) + 2(10) = 20$.
   - B(8,0): $Z = 3(8) + 2(0) = 24$.
   - C(4/3, 20/3): $Z = 3(4/3) + 2(20/3) = 4 + 40/3 = 52/3 \approx 17.33$.

   (d) **Kesimpulan:** Nilai minimumnya adalah 52/3 atau 17.33.

2. **Soal:** Seorang peternak berencana memelihara kambing dan sapi. Ia memiliki tidak lebih dari 8 kandang. Setiap kandang dapat menampung 15 kambing atau 6 sapi. Jumlah hewan yang ia rencanakan tidak lebih dari 100 ekor. Jika keuntungan seekor kambing adalah Rp 200.000 dan seekor sapi Rp 1.000.000, tentukan keuntungan maksimum.

   Pembahasan:

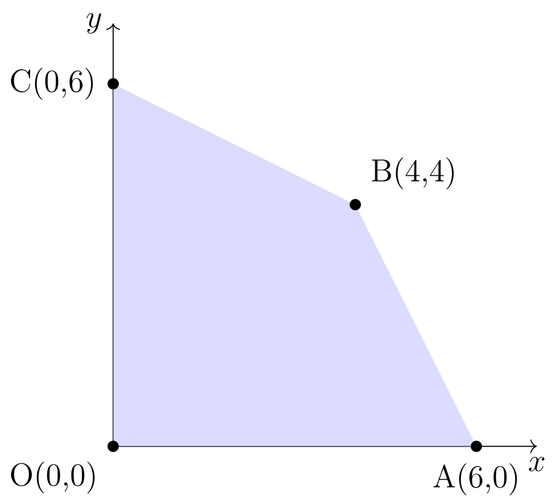
   (a) **Model Matematika:** Misal x = jumlah kandang kambing, y = jumlah kandang sapi.
   - Fungsi Objektif: $Z = (15 \times 200000)x + (6 \times 1000000)y = 3000000x + 6000000y$.
   - Kendala: (i) $x + y \leq 8$ (jumlah kandang) (ii) $15x + 6y \leq 100$ (jumlah hewan) (iii) $x \geq 0, y \geq 0$

(b) **Tentukan Titik Pojok:** DHP dibatasi oleh $x = 0, y = 0, x+y = 8, 15x+6y = 100$. Titik pojoknya adalah A(0,0), B(≈6.67, 0), C(0,8). Titik D (perpotongan): $y = 8 - x \implies 15x + 6(8 - x) = 100 \implies 9x = 52 \implies x \approx 5.77, y \approx 2.22$. Karena jumlah kandang harus bulat, kita uji titik-titik bulat di sekitar D, seperti (5,3) (tidak valid), (5,2) (valid), (4,4) (valid). Titik pojok efektif: A(0,0), B(6,0), C(0,8), dan titik bulat valid terdekat seperti (4,4) atau (2,8) (tidak valid). Pojok-pojok yang mungkin: A(0,0), B(6,0), C(0,8), D(perpotongan $15x + 6y = 100$ dan $x + y = 8$ yaitu (52/9, 20/9) atau ≈(5.7, 2.2)). Titik bulat yang valid: (0,0), (6,0), (0,8), (2,6), (4,4), (5,2).

(c) **Uji Titik Pojok** pada $Z = 3x + 6y$ (dalam jutaan): A(0,0) $\rightarrow Z = 0$. B(6,0) $\rightarrow Z = 18$. C(0,8) $\rightarrow Z = 48$. Uji (2,6): $15(2) + 6(6) = 66 \leq 100$. $Z = 3(2)+6(6) = 42$. Uji (4,4): $15(4)+6(4) = 84 \leq 100$. $Z = 3(4)+6(4) = 36$. Uji (5,2): $15(5) + 6(2) = 87 \leq 100$. $Z = 3(5) + 6(2) = 27$.

(d) **Kesimpulan:** Nilai maksimum terjadi di titik C(0,8), yaitu dengan 0 kandang kambing dan 8 kandang sapi. Keuntungan maksimum adalah $6.000.000 \times 8 =$ Rp 48.000.000.

3. **Soal:** Daerah yang diarsir pada grafik adalah himpunan penyelesaian dari suatu masalah program linear. Tentukan nilai maksimum dari fungsi $f(x, y) = 5x + 4y$.



Pembahasan:

(a) **Identifikasi Titik Pojok:** Dari grafik, titik pojok DHP adalah O(0,0), A(6,0), B(4,4), dan C(0,6).

(b) **Uji Titik Pojok** pada $f(x, y) = 5x + 4y$:

- O(0,0): $f = 5(0) + 4(0) = 0$.
- A(6,0): $f = 5(6) + 4(0) = 30$.
- B(4,4): $f = 5(4) + 4(4) = 20 + 16 = 36$.
- C(0,6): $f = 5(0) + 4(6) = 24$.

(c) **Kesimpulan:** Nilai maksimumnya adalah 36, yang terjadi pada titik B(4,4).

4. **Soal:** Seorang apoteker meracik dua jenis obat. Obat jenis I memerlukan 5 gram bahan A dan 3 gram bahan B. Obat jenis II memerlukan 2 gram bahan A dan 4 gram bahan B. Harga jual obat I adalah Rp 8.000 dan obat II adalah Rp 6.000. Jika persediaan bahan A adalah 60 gram dan bahan B adalah 48 gram, tentukan pendapatan maksimumnya.

   Pembahasan:

   (a) **Model Matematika:** x = jumlah obat I, y = jumlah obat II.
   - Fungsi Objektif: Maksimalkan $Z = 8000x + 6000y$.
   - Kendala: (i) Bahan A: $5x + 2y \leq 60$. (ii) Bahan B: $3x + 4y \leq 48$. (iii) $x \geq 0, y \geq 0$.

   (b) **Tentukan Titik Pojok:** A(0,0). B(perpotongan $5x+2y = 60$ dengan sumbu-x) $\implies$ B(12,0). C(perpotongan $3x + 4y = 48$ dengan sumbu-y) $\implies$ C(0,12). D(perpotongan $5x + 2y = 60$ dan $3x + 4y = 48$). Kalikan persamaan pertama dengan 2: $10x + 4y = 120$. Eliminasi: $7x = 72 \implies x = 72/7$. $y = (48 - 3(72/7))/4 = 30/7$. Titik D(72/7, 30/7).

   (c) **Uji Titik Pojok** pada $Z = 8000x + 6000y$: A(0,0) $\to Z = 0$. B(12,0) $\to Z = 96000$. C(0,12) $\to Z = 72000$. D(72/7, 30/7) $\to Z = 8000(72/7) + 6000(30/7) = (576000 + 180000)/7 = 756000/7 \approx 108000$.

   (d) **Kesimpulan:** Pendapatan maksimumnya adalah sekitar Rp 108.000. Karena jumlah obat harus bulat, kita uji titik bulat di sekitar D, misal (10,4), (10,5). (10,4) valid, Z=104000. (10,5) tidak valid. Uji (8,6) valid, Z=100000. Titik optimum bulat yang paling mendekati adalah (10,4) dengan keuntungan Rp 104.000.

5. **Soal:** Tentukan nilai minimum dari $Z = 4x+y$ dengan kendala $x+y \geq 6$, $2x+y \geq 8$, $x \geq 0, y \geq 0$.

   Pembahasan:

   (a) **Gambar DHP dan Tentukan Titik Pojok:** A(perpotongan $x + y = 6$ dengan sumbu-y) $\implies$ A(0,6). B(perpotongan $2x + y = 8$ dengan sumbu-x) $\implies$ B(4,0). C(perpotongan $x+y = 6$ dan $2x+y = 8$). Eliminasi: $x = 2, y = 4$. Titik C(2,4). D(perpotongan $x + y = 6$ dengan sumbu-x, BUKAN POJOK DHP), E(perpotongan $2x + y = 8$ dengan sumbu-y, yaitu (0,8)). Titik pojok DHP adalah (0,8), (2,4), dan (6,0).

   (b) **Uji Titik Pojok** pada $Z = 4x + y$: (0,8): $Z = 4(0) + 8 = 8$. (2,4): $Z = 4(2) + 4 = 12$. (6,0): $Z = 4(6) + 0 = 24$.

   (c) **Kesimpulan:** Nilai minimumnya adalah 8.

Soal Latihan Mandiri

1. Sebuah perusahaan memproduksi dua jenis produk, A dan B. Setiap unit produk A memerlukan 4 jam kerja mesin dan 2 jam kerja manual. Setiap unit produk B memerlukan 2 jam kerja mesin dan 3 jam kerja manual. Total jam kerja mesin yang tersedia adalah 100 jam, dan total jam kerja manual adalah 90 jam. Keuntungan per unit produk A adalah Rp 50.000 dan produk B adalah Rp 40.000. Tentukan jumlah masing-masing produk yang harus dibuat untuk memaksimalkan keuntungan.

2. Tentukan nilai minimum dari fungsi $Z = 10x + 20y$ yang memenuhi kendala: $3x + 2y \geq 12$, $x + 2y \geq 8$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

3. Seorang petani memiliki lahan seluas 10 hektar. Ia ingin menanam jagung dan gandum. Biaya penanaman jagung adalah Rp 400.000 per hektar, dan gandum Rp 200.000 per hektar. Modal yang ia miliki hanya Rp 2.800.000. Keuntungan dari jagung adalah Rp 500.000 per hektar dan dari gandum Rp 300.000 per hektar. Tentukan alokasi lahan untuk setiap tanaman agar keuntungan maksimal.

4. Tentukan nilai maksimum dari $f(x, y) = 2x + 3y$ pada daerah yang dibatasi oleh pertidaksamaan $x + y \leq 5$, $x + 2y \leq 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

5. Sebuah area parkir memiliki luas 1760 m^2. Luas rata-rata untuk sebuah mobil adalah 4 m^2 dan untuk sebuah bus adalah 20 m^2. Area tersebut hanya dapat menampung maksimal 200 kendaraan. Jika biaya parkir untuk mobil adalah Rp 5.000 dan untuk bus Rp 15.000, berapakah pendapatan maksimum yang bisa diperoleh dari area parkir tersebut?

2.5 Pertidaksamaan Eksponensial dan Logaritma

Pertidaksamaan ini melibatkan variabel yang berada di posisi eksponen atau di dalam argumen fungsi logaritma. Kunci utama untuk menyelesaikan keduanya adalah memahami sifat monoton (selalu naik atau selalu turun) dari kedua fungsi tersebut, yang ditentukan oleh bilangan pokok atau basisnya.

2.5.1 Pertidaksamaan Eksponensial

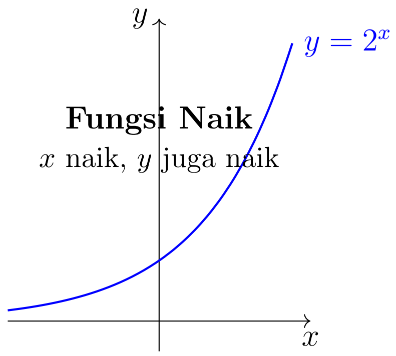
Pertidaksamaan eksponensial memiliki bentuk umum $a^{f(x)} > a^{g(x)}$. Cara menyelesaikannya terbagi menjadi dua kasus, bergantung pada nilai basis a.

Kasus 1: Basis $a > 1$ (Fungsi Naik)

Jika basisnya lebih besar dari 1 (misalnya 2, 3, 10), maka fungsi $y = a^x$ adalah fungsi yang selalu naik. Artinya, jika input (eksponen) semakin besar, maka output (hasil perpangkatan) juga akan semakin besar.

Karena hubungannya searah, maka tanda pertidaksamaan pada eksponen **TETAP SAMA**.

$$\text{Jika } a^{f(x)} > a^{g(x)} \text{ dan } a > 1, \text{ maka } f(x) > g(x)$$

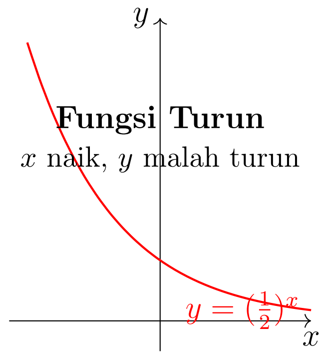


Kasus 2: Basis $0 < a < 1$ (Fungsi Turun)

Jika basisnya adalah pecahan antara 0 dan 1 (misalnya $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$), maka fungsi $y = a^x$ adalah fungsi yang selalu turun. Artinya, jika input (eksponen) semakin besar, maka output (hasil perpangkatan) justru akan semakin *kecil*.

Karena hubungannya berlawanan arah, maka tanda pertidaksamaan pada eksponen **HARUS DIBALIK**.

$$\text{Jika } a^{f(x)} > a^{g(x)} \text{ dan } 0 < a < 1, \text{ maka } f(x) < g(x)$$



Contoh Penyelesaian (Eksponen)

Tentukan himpunan penyelesaian dari $9^{x-1} \geq (\frac{1}{27})^{x^2-1}$.

1. **Samakan basis**. Kita ubah keduanya menjadi basis 3.

$$\begin{aligned} (3^2)^{x-1} &\geq (3^{-3})^{x^2-1} \\ 3^{2(x-1)} &\geq 3^{-3(x^2-1)} \\ 3^{2x-2} &\geq 3^{-3x^2+3} \end{aligned}$$

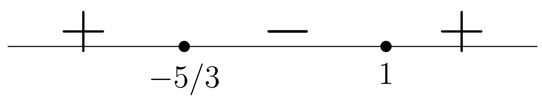
2. **Analisis basis**. Basisnya adalah $a = 3$, yaitu $a > 1$. Maka, tanda pertidaksamaan $(\geq)$ **TETAP**.

3. **Selesaikan pertidaksamaan eksponen**.

$$\begin{aligned} 2x - 2 &\geq -3x^2 + 3 \\ 3x^2 + 2x - 2 - 3 &\geq 0 \\ 3x^2 + 2x - 5 &\geq 0 \end{aligned}$$

   Ini adalah pertidaksamaan kuadrat. Kita cari akarnya: $(3x + 5)(x - 1) = 0$, maka $x_1 = -5/3$ dan $x_2 = 1$.

4. **Gunakan garis bilangan** untuk pertidaksamaan kuadrat. Dengan uji titik (misal $x = 0 \implies -5$, hasilnya negatif), kita dapatkan:



   Karena pertidaksamaannya ≥ 0, kita pilih daerah $(+)$.

5. **Himpunan Penyelesaian**: $x \leq -5/3$ atau $x \geq 1$.

2.5.2 Pertidaksamaan Logaritma

Logika penyelesaian pertidaksamaan logaritma, $\log_a f(x) < \log_a g(x)$, sama persis dengan eksponen. Perilakunya juga bergantung pada basis a.

Namun, ada satu **syarat tambahan yang sangat penting**:

Syarat Numerus: Argumen dari logaritma (numerus) harus selalu positif. $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$.

Solusi akhir adalah **irisan** dari penyelesaian pertidaksamaan dan semua syarat numerus.

Sifat-sifat Utama

- Untuk basis $a > 1$ (fungsi naik), tanda pertidaksamaan **TETAP**.

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \implies f(x) < g(x)$$

- Untuk basis $0 < a < 1$ (fungsi turun), tanda pertidaksamaan **DIBALIK**.

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \implies f(x) > g(x)$$

Contoh Penyelesaian (Logaritma)

Tentukan himpunan penyelesaian dari $\log_{1/2}(x^2-3) > 0$.

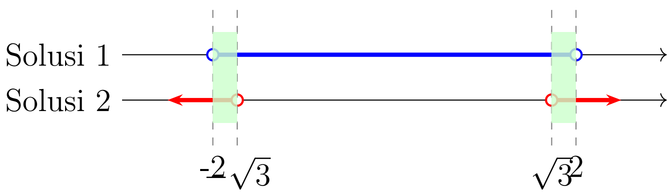
1. **Samakan bentuk logaritma**. Ingat bahwa $0 = \log_{1/2} 1$.
$$\log_{1/2}(x^2-3) > \log_{1/2} 1$$

2. **Analisis basis**. Basisnya adalah $a = 1/2$, yaitu $0 < a < 1$. Maka, tanda pertidaksamaan ($>$) **DIBALIK** menjadi ($<$).

3. **Selesaikan pertidaksamaan numerus (Solusi 1)**.
$$\begin{aligned} x^2 - 3 &< 1 \\ x^2 - 4 &< 0 \\ (x-2)(x+2) &< 0 \end{aligned}$$
Pembuat nolnya adalah $x = 2$ dan $x = -2$. Dengan garis bilangan, didapat solusi: $-2 < x < 2$.

4. **Penuhi Syarat Numerus (Solusi 2)**. Numerus harus positif:
$$\begin{aligned} x^2 - 3 &> 0 \\ (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) &> 0 \end{aligned}$$
Pembuat nolnya adalah $x = \sqrt{3} \approx 1.73$ dan $x = -\sqrt{3} \approx -1.73$. Dengan garis bilangan, didapat solusi: $x < -\sqrt{3}$ atau $x > \sqrt{3}$.

5. **Cari irisan dari Solusi 1 dan Solusi 2**. Kita harus mencari nilai x yang memenuhi ($-2 < x < 2$) **DAN** ($x < -\sqrt{3}$ atau $x > \sqrt{3}$).



Daerah yang tumpang tindih (diarsir hijau) adalah penyelesaian akhirnya.

6. **Himpunan Penyelesaian**: $-2 < x < -\sqrt{3}$ atau $\sqrt{3} < x < 2$.

2.5.3 Aplikasi

Pertidaksamaan eksponensial dan logaritma sangat penting dalam sains dan keuangan untuk menjawab pertanyaan yang melibatkan batasan waktu atau kuantitas, seperti:

- "Kapan populasi bakteri akan *melebihi* 1 juta jiwa?" (Pertumbuhan eksponensial).
- "Berapa lama waktu *minimal* agar investasi saya mencapai Rp 100 juta?" (Bunga majemuk).
- "Pada rentang pH berapa sebuah larutan dianggap *sangat asam*?" (Skala logaritmik).

Soal Latihan dan Pembahasan

Untuk mengasah pemahaman Anda, bagian ini menyajikan soal-soal yang terbagi menjadi pertidaksamaan eksponensial dan logaritma, diikuti dengan latihan mandiri gabungan.

Soal Eksponensial dengan Pembahasan

1. **Soal:** Tentukan himpunan penyelesaian dari $5^{2x-1} > 125$.

   Pembahasan:

   (a) **Samakan Basis:** Ubah 125 menjadi basis 5, yaitu 5^3.

   $$5^{2x-1} > 5^3$$

   (b) **Analisis Basis:** Basisnya adalah $a = 5$ ($a > 1$), maka tanda pertidaksamaan ($>$) **TETAP**.

   (c) **Selesaikan Eksponen:**

   $$2x - 1 > 3 \implies 2x > 4 \implies x > 2$$

   HP $= \{x \mid x > 2\}$

2. **Soal:** Selesaikan pertidaksamaan $(\frac{1}{4})^{x+3} \geq (\frac{1}{8})^{x-1}$.

   Pembahasan:

   (a) **Samakan Basis:** Ubah keduanya menjadi basis $\frac{1}{2}$.

   $$((\frac{1}{2})^2)^{x+3} \geq ((\frac{1}{2})^3)^{x-1} \implies (\frac{1}{2})^{2x+6} \geq (\frac{1}{2})^{3x-3}$$

   (b) **Analisis Basis:** Basisnya adalah $a = \frac{1}{2}$ ($0 < a < 1$), maka tanda pertidaksamaan ($\geq$) **DIBALIK** menjadi ($\leq$).

   (c) **Selesaikan Eksponen:**

   $$2x + 6 \leq 3x - 3 \implies 9 \leq x$$

   HP $= \{x \mid x \geq 9\}$

3. **Soal:** Tentukan HP dari $2^{2x} - 2^{x+1} - 8 < 0$.

   Pembahasan:

   (a) **Ubah Bentuk (Kuadratik):**

   $$(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 8 < 0$$

   Misalkan $p = 2^x$. Karena 2^x selalu positif, maka syaratnya $p > 0$.

   $$p^2 - 2p - 8 < 0 \implies (p - 4)(p + 2) < 0$$

   Solusi untuk p adalah $-2 < p < 4$.

(b) **Substitusi Kembali dan Iriskan dengan Syarat:** Irisan dari $-2 < p < 4$ dengan $p > 0$ adalah $0 < p < 4$.

$$0 < 2^x < 4$$

Karena 2^x selalu lebih besar dari 0, kita hanya perlu menyelesaikan $2^x < 4 \implies 2^x < 2^2$.

(c) **Selesaikan Eksponen:** Basis $a = 2$ (> 1), tanda tetap. $x < 2$. **HP** $= \{x \mid x < 2\}$

4. **Soal:** Tentukan HP dari $(\sqrt{3})^{4x-2} < (\frac{1}{81})^{x-4}$.

   Pembahasan:

   (a) **Samakan Basis:** Ubah keduanya ke basis 3. $\sqrt{3} = 3^{1/2}$ dan $\frac{1}{81} = 3^{-4}$.

   $$(3^{1/2})^{4x-2} < (3^{-4})^{x-4} \implies 3^{2x-1} < 3^{-4x+16}$$

   (b) **Analisis Basis:** Basis $a = 3$ (> 1), tanda ($<$) **TETAP**.

   (c) **Selesaikan Eksponen:**

   $$2x - 1 < -4x + 16 \implies 6x < 17 \implies x < \frac{17}{6}$$

   HP $= \{x \mid x < \frac{17}{6}\}$

5. **Soal:** Himpunan penyelesaian dari $7^{x^2-3x-10} \geq 49^{x+2}$ adalah...

   Pembahasan:

   (a) **Samakan Basis:** $49 = 7^2$.

   $$7^{x^2-3x-10} \geq (7^2)^{x+2} \implies 7^{x^2-3x-10} \geq 7^{2x+4}$$

   (b) **Analisis Basis:** Basis $a = 7$ (> 1), tanda ($\geq$) **TETAP**.

   (c) **Selesaikan Eksponen (Pertidaksamaan Kuadrat):**

   $$x^2 - 3x - 10 \geq 2x + 4 \implies x^2 - 5x - 14 \geq 0 \implies (x-7)(x+2) \geq 0$$

   Pembuat nolnya $x = 7$ dan $x = -2$. Solusinya adalah $x \leq -2$ atau $x \geq 7$. **HP** $= \{x \mid x \leq -2$ **atau** $x \geq 7\}$

Soal Logaritma dengan Pembahasan

1. **Soal:** Tentukan himpunan penyelesaian dari $\log_3(2x-5) < 2$.

   Pembahasan:

   (a) **Syarat Numerus:** $2x - 5 > 0 \implies 2x > 5 \implies x > 2.5$.

   (b) **Penyelesaian Aljabar:** Ubah ruas kanan ke bentuk logaritma. $2 = \log_3 3^2 = \log_3 9$.

   $$\log_3(2x-5) < \log_3 9$$

   Basis $a = 3$ (> 1), tanda ($<$) **TETAP**.

   $$2x - 5 < 9 \implies 2x < 14 \implies x < 7$$

(c) **Irisan Solusi:** Irisan dari $x < 7$ dan $x > 2.5$ adalah $2.5 < x < 7$. **HP** $= \{x \mid 2.5 < x < 7\}$

2. **Soal:** Selesaikan $\log_{1/5}(x^2 - 8) \geq -1$.

   Pembahasan:

   (a) **Syarat Numerus:** $x^2 - 8 > 0 \implies x^2 > 8 \implies x < -\sqrt{8}$ atau $x > \sqrt{8}$. ($\sqrt{8} \approx 2.82$).

   (b) **Penyelesaian Aljabar:** $-1 = \log_{1/5}(\frac{1}{5})^{-1} = \log_{1/5} 5$.

   $$\log_{1/5}(x^2 - 8) \geq \log_{1/5} 5$$

   Basis $a = 1/5$ ($0 < a < 1$), tanda ($\geq$) **DIBALIK** menjadi ($\leq$).

   $$x^2 - 8 \leq 5 \implies x^2 - 13 \leq 0 \implies -\sqrt{13} \leq x \leq \sqrt{13}$$

   ($\sqrt{13} \approx 3.6$).

   (c) **Irisan Solusi:** Cari irisan dari ($x < -2.82$ atau $x > 2.82$) dengan ($-3.6 \leq x \leq 3.6$). **HP** $= \{x \mid -\sqrt{13} \leq x < -\sqrt{8}$ **atau** $\sqrt{8} < x \leq \sqrt{13}\}$

3. **Soal:** Tentukan HP dari $\log(x - 1) + \log(x - 3) < \log(x + 5)$. Basis 10.

   Pembahasan:

   (a) **Syarat Numerus:** (i) $x - 1 > 0 \implies x > 1$. (ii) $x - 3 > 0 \implies x > 3$. (iii) $x + 5 > 0 \implies x > -5$. Irisan dari ketiganya adalah $x > 3$.

   (b) **Penyelesaian Aljabar:** Gunakan sifat logaritma.

   $$\log((x - 1)(x - 3)) < \log(x + 5)$$

   Basis $a = 10$ (> 1), tanda ($<$) **TETAP**.

   $$x^2 - 4x + 3 < x + 5 \implies x^2 - 5x - 2 < 0$$

   Gunakan rumus ABC untuk mencari akar: $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$. $x_1 \approx \frac{5 - 5.74}{2} \approx -0.37$, $x_2 \approx \frac{5 + 5.74}{2} \approx 5.37$. Solusi kuadratnya adalah $-0.37 < x < 5.37$.

   (c) **Irisan Solusi:** Irisan dari ($-0.37 < x < 5.37$) dengan ($x > 3$) adalah $3 < x < 5.37$. **HP** $= \{x \mid 3 < x < \frac{5+\sqrt{33}}{2}\}$

4. **Soal:** Selesaikan $(\log_2 x)^2 - 5 \log_2 x + 6 \geq 0$.

   Pembahasan:

   (a) **Syarat Numerus:** $x > 0$.

   (b) **Penyelesaian Aljabar (Bentuk Kuadratik):** Misalkan $p = \log_2 x$.

   $$p^2 - 5p + 6 \geq 0 \implies (p - 2)(p - 3) \geq 0$$

   Solusinya adalah $p \leq 2$ atau $p \geq 3$.

(c) **Substitusi Kembali:** (i) $\log_2 x \le 2 \implies \log_2 x \le \log_2 4 \implies x \le 4$. (ii) $\log_2 x \ge 3 \implies \log_2 x \ge \log_2 8 \implies x \ge 8$. Jadi, solusi aljabarnya adalah $x \le 4$ atau $x \ge 8$.

(d) **Irisan Solusi:** Irisan dari ($x \le 4$ atau $x \ge 8$) dengan ($x > 0$) adalah $0 < x \le 4$ atau $x \ge 8$. **HP** $= \{x \mid 0 < x \le 4$ **atau** $x \ge 8\}$

5. **Soal:** Tentukan HP dari $\log_{x-1}(2x + 7) > 2$.

   Pembahasan: Soal ini melibatkan basis variabel, sehingga memerlukan analisis kasus untuk basis.

   (a) **Syarat Numerus dan Basis:** (i) Numerus: $2x + 7 > 0 \implies x > -3.5$. (ii) Basis: $x - 1 > 0 \implies x > 1$ dan $x - 1 \neq 1 \implies x \neq 2$. Irisan syarat: $x > 1$ dan $x \neq 2$.

   (b) **Penyelesaian Aljabar: Kasus A: Basis** $0 < x - 1 < 1 \implies 1 < x < 2$. Tanda pertidaksamaan **DIBALIK**.

   $$2x + 7 < (x - 1)^2 \implies 2x + 7 < x^2 - 2x + 1 \implies 0 < x^2 - 4x - 6$$

   Akar dari $x^2 - 4x - 6 = 0$ adalah $x = 2 \pm \sqrt{10}$. ($x_1 \approx -1.16, x_2 \approx 5.16$). Solusi kuadratnya $x < 2 - \sqrt{10}$ atau $x > 2 + \sqrt{10}$. Irisan dengan syarat kasus ($1 < x < 2$) tidak ada. **Tidak ada solusi di Kasus A**.

   Kasus B: Basis $x - 1 > 1 \implies x > 2$. Tanda pertidaksamaan **TETAP**.

   $$2x + 7 > (x - 1)^2 \implies 0 > x^2 - 4x - 6$$

   Solusi kuadratnya adalah $2 - \sqrt{10} < x < 2 + \sqrt{10}$ (atau $-1.16 < x < 5.16$). Irisan dengan syarat kasus ($x > 2$) adalah $2 < x < 2 + \sqrt{10}$.

   (c) **Kesimpulan:** Solusi total adalah gabungan solusi semua kasus, yaitu $2 < x < 2 + \sqrt{10}$. **HP** $= \{x \mid 2 < x < 2 + \sqrt{10}\}$

Soal Latihan Mandiri

1. **(Eksponen)** Tentukan HP dari $8^{2x-4} > (\frac{1}{32})^{x-2}$.
2. **(Eksponen)** Selesaikan pertidaksamaan $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 \le 0$.
3. **(Eksponen)** Tentukan HP dari $(\frac{1}{5})^{x^2+6x-16} < (\frac{1}{25})^{x+4}$.
4. **(Eksponen)** Selesaikan $100^x - 1001(10^x) + 1000 \le 0$.
5. **(Eksponen)** Tentukan himpunan penyelesaian dari $(\sqrt[3]{2})^{x+1} \ge 8^{x-5}$.
6. **(Logaritma)** Tentukan HP dari $\log_{0.5}(3x + 1) < \log_{0.5}(x + 7)$.
7. **(Logaritma)** Selesaikan pertidaksamaan $\log_2(x^2 - 2x) \le 3$.
8. **(Logaritma)** Tentukan HP dari $\log(x) + \log(x + 2) > \log(3)$.
9. **(Logaritma)** Selesaikan $\log_{1/3}(2x - 1) + \log_{1/3}(2x - 3) \ge \log_{1/3}(x - 1)$.
10. **(Logaritma)** Tentukan himpunan penyelesaian dari ${}^x\log 9 > 2$.

Chapter 3

Materi Lanjutan

3.1 Pertidaksamaan Trigonometri

Pertidaksamaan trigonometri adalah pertidaksamaan yang memuat fungsi trigonometri seperti sinus, kosinus, dan tangen. Berbeda dengan pertidaksamaan aljabar, solusi dari pertidaksamaan ini bersifat **periodik**, artinya himpunan penyelesaiannya akan berulang dalam interval tertentu.

Ada dua pendekatan visual yang sangat ampuh untuk menyelesaikan masalah ini: menggunakan lingkaran satuan dan menggunakan grafik fungsi. Metode grafik fungsi umumnya lebih disarankan karena lebih informatif dan dapat menangani kasus yang lebih kompleks.

3.1.1 Penyelesaian Menggunakan Lingkaran Satuan

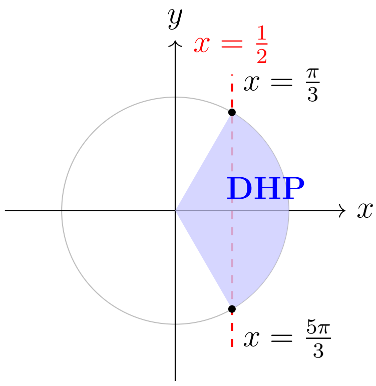
Lingkaran satuan sangat baik untuk memvisualisasikan nilai sinus (koordinat-y) dan kosinus (koordinat-x) untuk sudut antara 0 dan 2π.

Contoh: Tentukan himpunan penyelesaian dari $\cos x \geq \frac{1}{2}$ untuk interval $0 \leq x \leq 2\pi$.

1. **Selesaikan Persamaannya**: Cari sudut di mana $\cos x = \frac{1}{2}$. Dalam interval $[0, 2\pi]$, solusinya adalah $x = \frac{\pi}{3}$ (atau $60°$) dan $x = \frac{5\pi}{3}$ (atau $300°$). Ini adalah titik-titik batas kita.

2. **Visualisasikan pada Lingkaran Satuan**: Ingat bahwa $\cos x$ adalah koordinat-x. Pertidaksamaan $\cos x \geq \frac{1}{2}$ berarti kita mencari semua titik pada lingkaran satuan di mana koordinat-x nya lebih besar dari atau sama dengan $\frac{1}{2}$. Ini adalah semua titik pada atau di sebelah kanan dari garis vertikal $x = \frac{1}{2}$.

3. **Tentukan Busur Penyelesaian**: Daerah yang memenuhi adalah busur lingkaran di kuadran I dan IV. Busur ini dimulai dari 0 sampai $\frac{\pi}{3}$, dan berlanjut dari $\frac{5\pi}{3}$ sampai 2π.



Himpunan Penyelesaian: Menggabungkan kedua busur, kita dapatkan $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ atau $\frac{5\pi}{3} \le x \le 2\pi$.

3.1.2 Penyelesaian Menggunakan Grafik Fungsi

Metode ini adalah yang paling umum dan andal. Langkah-langkahnya mirip dengan menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat secara grafis.

Langkah-Langkah Penyelesaian

1. **Gambar Grafik**: Gambarlah grafik fungsi trigonometri (misal $y = \sin x$) dan garis horizontal (misal $y = c$) pada interval yang diminta.
2. **Cari Titik Potong**: Selesaikan persamaan trigonometri untuk menemukan titik potong antara kedua grafik. Ini adalah titik-titik batas.
3. **Identifikasi Interval Solusi**: Amati grafik untuk menentukan pada interval x mana grafik fungsi trigonometri berada di atas ($>$), di bawah ($<$), atau menyentuh ($\ge, \le$) garis horizontal.
4. **Tulis Himpunan Penyelesaian**.

Contoh Penyelesaian Lengkap

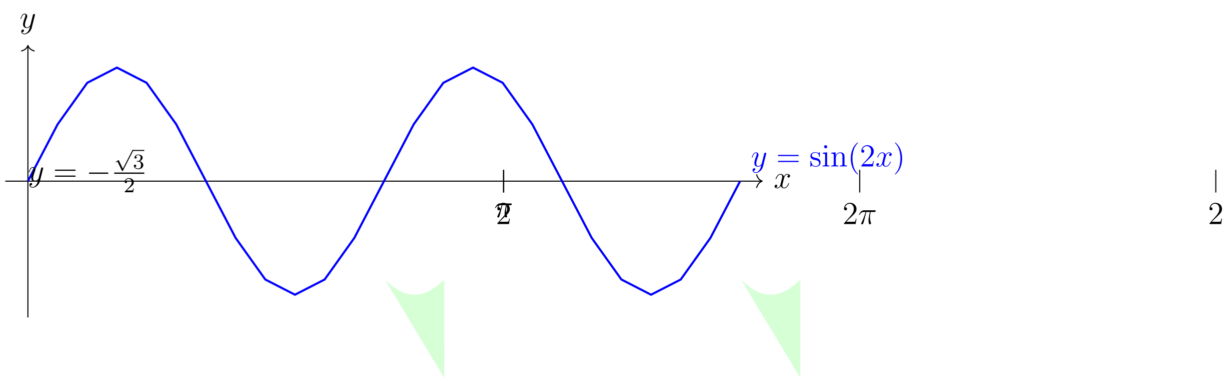
Tentukan himpunan penyelesaian dari $\sin(2x) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ untuk interval $0 \le x \le 2\pi$.

1. **Substitusi dan Ubah Interval**: Misalkan $u = 2x$. Pertidaksamaan menjadi $\sin u < -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Karena $0 \le x \le 2\pi$, maka interval untuk u adalah $0 \le 2x \le 4\pi$. Kita akan mencari solusi dalam dua putaran (0 sampai 4π).
2. **Cari Titik Potong** untuk $\sin u = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ dalam interval $[0, 4\pi]$: Nilai sinus negatif di kuadran III dan IV. Sudut dasarnya adalah $\frac{\pi}{3}$.
   - Putaran 1 ($0 \le u \le 2\pi$): $u = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ dan $u = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$.
   - Putaran 2 ($2\pi \le u \le 4\pi$): $u = \frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{10\pi}{3}$ dan $u = \frac{5\pi}{3} + 2\pi = \frac{11\pi}{3}$.
3. **Identifikasi Interval dari Grafik**: Kita cari di mana grafik $y = \sin u$ berada **di bawah** garis $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ini terjadi di antara solusi kuadran III dan IV pada setiap putaran. Solusi untuk u adalah: $\frac{4\pi}{3} < u < \frac{5\pi}{3}$ atau $\frac{10\pi}{3} < u < \frac{11\pi}{3}$.

4. **Substitusi Kembali ke x:**

   - $\frac{4\pi}{3} < 2x < \frac{5\pi}{3} \implies \frac{2\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{6}$.
   - $\frac{10\pi}{3} < 2x < \frac{11\pi}{3} \implies \frac{5\pi}{3} < x < \frac{11\pi}{6}$.

   Visualisasi Grafik untuk $y = \sin(2x)$:



5. **Himpunan Penyelesaian**: $\text{HP} = \{x \mid \frac{2\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{6} \text{ atau } \frac{5\pi}{3} < x < \frac{11\pi}{6}\}$.

3.1.3 Solusi Umum

Jika interval tidak ditentukan, kita perlu menyatakan semua solusi yang mungkin dengan menambahkan kelipatan periode fungsi. Periode untuk sinus dan kosinus adalah 2π, dan untuk tangen adalah π.

Sebagai contoh, solusi umum untuk $\cos x \geq \frac{1}{2}$ dari contoh pertama adalah:

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad \text{di mana } k \text{ adalah bilangan bulat.}$$

Ini adalah cara yang lebih ringkas untuk merepresentasikan kedua interval solusi yang kita temukan.

Soal Latihan dan Pembahasan

Berikut adalah soal-soal untuk melatih kemampuan Anda dalam menyelesaikan pertidaksamaan trigonometri menggunakan berbagai metode dan dalam interval yang berbeda.

Soal dengan Pembahasan

1. **Soal:** Tentukan himpunan penyelesaian dari $2\sin x - 1 < 0$ untuk interval $0 \leq x \leq 2\pi$.

   Pembahasan:

   (a) **Ubah Bentuk:** Pertidaksamaan menjadi $\sin x < \frac{1}{2}$.

   (b) **Cari Batas:** Selesaikan persamaan $\sin x = \frac{1}{2}$. Dalam interval $[0, 2\pi]$, solusinya adalah $x = \frac{\pi}{6}$ (Kuadran I) dan $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ (Kuadran II).

   (c) **Analisis Grafik/Lingkaran Satuan:** Kita mencari di mana grafik $y = \sin x$ berada di bawah garis $y = \frac{1}{2}$. Ini terjadi pada awal interval sampai titik batas pertama, dan dari titik batas kedua sampai akhir interval.

(d) **Kesimpulan:** Solusinya adalah $0 \leq x < \frac{\pi}{6}$ atau $\frac{5\pi}{6} < x \leq 2\pi$.
HP $= \{x \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{6}$ **atau** $\frac{5\pi}{6} < x \leq 2\pi\}$

2. **Soal:** Selesaikan pertidaksamaan $\tan x \geq \sqrt{3}$ untuk interval $0 \leq x \leq \pi$.

   Pembahasan:

   (a) **Cari Batas:** Selesaikan persamaan $\tan x = \sqrt{3}$. Dalam interval $[0, \pi]$, solusinya adalah $x = \frac{\pi}{3}$.

   (b) **Perhatikan Asimtot:** Fungsi tangen memiliki asimtot vertikal di $x = \frac{\pi}{2}$. Ini adalah titik penting yang harus diperhatikan.

   (c) **Analisis Grafik:** Kita mencari di mana grafik $y = \tan x$ berada di atas atau menyentuh garis $y = \sqrt{3}$. Pada interval $[0, \pi]$, ini terjadi dari titik batas $x = \frac{\pi}{3}$ hingga sebelum grafik menyentuh asimtot.

   (d) **Kesimpulan:** Solusinya adalah $\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$.
   HP $= \{x \mid \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}\}$

3. **Soal:** Tentukan HP dari $2\cos^2 x + \cos x - 1 \leq 0$ untuk $0° \leq x \leq 360°$.

   Pembahasan:

   (a) **Faktorkan (Bentuk Kuadrat):** Misalkan $p = \cos x$. Pertidaksamaan menjadi $2p^2 + p - 1 \leq 0$. Faktorisasi menghasilkan $(2p - 1)(p + 1) \leq 0$. Pembuat nolnya adalah $p = \frac{1}{2}$ dan $p = -1$. Solusi untuk p adalah $-1 \leq p \leq \frac{1}{2}$.

   (b) **Substitusi Kembali:** Kita selesaikan $-1 \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$.

   (c) **Analisis Grafik/Lingkaran Satuan:**

   - Batas $\cos x = -1$ adalah $x = 180°$.
   - Batas $\cos x = \frac{1}{2}$ adalah $x = 60°$ dan $x = 300°$.

   Kita mencari sudut di mana nilai kosinus berada di antara -1 dan 1/2. Ini terjadi dari 60° hingga 180° dan dari 180° hingga 300°.

   (d) **Kesimpulan:** Menggabungkan interval tersebut, solusinya adalah $60° \leq x \leq 300°$.
   HP $= \{x \mid 60° \leq x \leq 300°\}$

4. **Soal:** Selesaikan $\cos(2x) > 0$ untuk $0 \leq x \leq \pi$.

   Pembahasan:

   (a) **Substitusi:** Misalkan $u = 2x$. Pertidaksamaan menjadi $\cos u > 0$. Interval untuk u: Jika $0 \leq x \leq \pi$, maka $0 \leq 2x \leq 2\pi$.

   (b) **Selesaikan untuk** u**:** Kosinus bernilai positif di Kuadran I dan IV. Solusi untuk $\cos u > 0$ dalam interval $[0, 2\pi]$ adalah $0 \leq u < \frac{\pi}{2}$ atau $\frac{3\pi}{2} < u \leq 2\pi$.

   (c) **Substitusi Kembali ke** x**:**

   - $0 \leq 2x < \frac{\pi}{2} \implies 0 \leq x < \frac{\pi}{4}$.
   - $\frac{3\pi}{2} < 2x \leq 2\pi \implies \frac{3\pi}{4} < x \leq \pi$.

   (d) **Kesimpulan: HP** $= \{x \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ **atau** $\frac{3\pi}{4} < x \leq \pi\}$

5. **Soal:** Tentukan solusi umum dari $\sin x + \cos x < 0$.

   Pembahasan:

   (a) **Ubah Bentuk:** Kita ubah bentuk $a \sin x + b \cos x$ menjadi $k \cos(x - \alpha)$. $k = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. $\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{1}{1} = 1 \implies \alpha = \frac{\pi}{4}$. Pertidaksamaan menjadi $\sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) < 0 \implies \cos(x - \frac{\pi}{4}) < 0$.

   (b) **Selesaikan Pertidaksamaan Dasar:** Misalkan $u = x - \frac{\pi}{4}$. $\cos u < 0$ terjadi di Kuadran II dan III, yaitu $\frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}$.

   (c) **Substitusi Kembali dan Solusi Umum:**

   $$\frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

   Tambahkan $\frac{\pi}{4}$ ke semua ruas:

   $$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

   $$\frac{3\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$$

   Untuk solusi umum, tambahkan periode $2k\pi$.

   (d) **Kesimpulan: HP** $= \{x \mid \frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z\}$

Soal Latihan Mandiri

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari $1 - 2\cos x > 2$ untuk interval $0° \le x \le 360°$.
2. Selesaikan pertidaksamaan $\sqrt{3}\tan(2x) - 1 \le 0$ untuk $0 \le x \le \pi$.
3. Tentukan himpunan penyelesaian dari $\sin^2 x - \sin x - 2 \ge 0$ untuk $0 \le x \le 2\pi$.
4. Selesaikan pertidaksamaan $|\cos x| < \frac{1}{2}$ untuk interval $[0, 2\pi]$.
5. Tentukan solusi umum dari $\sin(x) > \cos(x)$.

3.2 Pertidaksamaan Polinomial Orde Tinggi

Pertidaksamaan polinomial orde tinggi melibatkan polinomial dengan derajat (pangkat tertinggi) tiga atau lebih, misalnya $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$.

Meskipun terlihat lebih rumit, **pemahaman konseptualnya sama persis dengan pertidaksamaan kuadrat**. Solusinya ditentukan oleh **akar-akar** (pembuat nol) dari polinomial, yang berperan sebagai titik-titik batas yang membagi garis bilangan menjadi beberapa interval. Di dalam setiap interval tersebut, tanda dari polinomial (positif atau negatif) akan konstan.

3.2.1 Langkah-Langkah Penyelesaian

Metode penyelesaiannya adalah perluasan dari metode garis bilangan.

1. **Jadikan Ruas Kanan Nol**. Pastikan pertidaksamaan dalam bentuk standar $P(x) > 0$.
2. **Faktorkan Polinomial dan Cari Semua Akar**. Ini adalah langkah yang paling menantang. Beberapa teknik yang bisa digunakan antara lain:
   - Mengeluarkan faktor persekutuan (misalnya, $x^3 - x = x(x^2 - 1)$).
   - Menggunakan **Teorema Faktor Rasional** dan **Metode Horner (Pembagian Sintetis)** untuk menemukan akar-akar dari polinomial.
3. **Buat Garis Bilangan**. Letakkan semua akar riil yang unik pada garis bilangan untuk membaginya menjadi beberapa interval. Gunakan lingkaran penuh (●) atau kosong (○) sesuai dengan tanda pertidaksamaan.
4. **Analisis Tanda pada Setiap Interval**. Ada dua cara efisien untuk melakukan ini:

   a) Uji Titik: Pilih satu titik uji dari setiap interval dan substitusikan ke dalam bentuk *faktorisasi* dari polinomial untuk menentukan tandanya (+ atau -).

   b) Analisis Multiplisitas Akar (Sangat Direkomendasikan): Multiplisitas adalah berapa kali sebuah akar muncul dalam faktorisasi.

   - **Multiplisitas Ganjil** (misal dari faktor $(x-a)^1, (x-a)^3, \ldots$): Tanda akan **berubah** saat melewati akar ini di garis bilangan.
   - **Multiplisitas Genap** (misal dari faktor $(x-a)^2, (x-a)^4, \ldots$): Tanda akan **TETAP SAMA** saat melewati akar ini. Secara grafis, ini berarti kurva hanya menyentuh sumbu-x, tidak memotongnya.

   Dengan metode ini, kita hanya perlu menguji satu interval (biasanya yang paling kanan), lalu menentukan tanda interval lainnya berdasarkan multiplisitas.
5. **Tentukan Himpunan Penyelesaian**. Pilih interval-interval yang tandanya sesuai dengan yang diminta oleh pertidaksamaan.

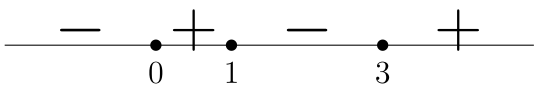
Contoh Penyelesaian Lengkap

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $x^3 - 4x^2 + 3x \leq 0$.

1. **Ruas kanan sudah nol**.
2. **Faktorkan polinomial**:
$$x^3 - 4x^2 + 3x \leq 0$$
$$x(x^2 - 4x + 3) \leq 0$$
$$x(x-1)(x-3) \leq 0$$
3. **Cari akar-akar**: Pembuat nolnya adalah $x = 0$, $x = 1$, dan $x = 3$. Semua akar ini memiliki **multiplisitas 1 (ganjil)**, sehingga tanda akan selalu berubah saat melewati setiap akar.
4. **Buat garis bilangan dan analisis tanda**: Gunakan lingkaran penuh (•) karena tanda pertidaksamaannya adalah $\leq$.

   Kita hanya perlu uji satu interval, misalnya interval paling kanan ($x > 3$). Pilih $x = 4$. Substitusi ke bentuk faktor: $4(4-1)(4-3) = 4(3)(1) = 12 \implies$ **Positif (+)**.

   Karena semua akar multiplisitasnya ganjil, tanda akan berselang-seling.



5. **Tentukan himpunan penyelesaian**: Karena pertidaksamaannya adalah ≤ 0, kita mencari daerah yang bertanda **negatif (-)**.

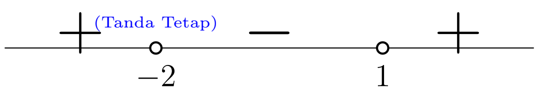
   Dari garis bilangan, daerah negatif adalah $x \leq 0$ dan $1 \leq x \leq 3$.

   Jadi, himpunan penyelesaiannya (HP) adalah:
$$\text{HP} = \{x \mid x \leq 0 \text{ atau } 1 \leq x \leq 3, x \in R\}$$

Contoh dengan Multiplisitas Genap

Perhatikan pertidaksamaan $(x+2)^2(x-1) > 0$.

- Akar-akarnya adalah $x = -2$ (dari $(x+2)^2$, **multiplisitas 2, genap**) dan $x = 1$ (dari $(x-1)$, **multiplisitas 1, ganjil**).
- Uji interval paling kanan ($x > 1$), misal $x = 2$: $(2+2)^2(2-1) = (+)(+) \implies$ Positif (+).
- Buat garis bilangan (lingkaran kosong):



- Tanda berubah di $x = 1$ (ganjil), tetapi **TETAP** di $x = -2$ (genap).
- Karena pertidaksamaannya > 0, kita pilih daerah (+).
- HP: $-2 < x < 1$ atau $x > 1$? Bukan. Kita harus berhati-hati. Daerah positif adalah $x > -2$ tetapi $x \neq 1$. Jadi, solusinya adalah $x \in (-2, 1) \cup (1, \infty)$.

Soal Latihan dan Pembahasan

Berikut adalah soal-soal untuk melatih kemampuan Anda dalam memfaktorkan dan menganalisis tanda pada pertidaksamaan polinomial orde tinggi.

Soal dengan Pembahasan

1. **Soal:** Tentukan himpunan penyelesaian dari $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 > 0$.

   Pembahasan:

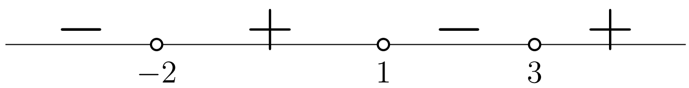
   (a) **Faktorkan Polinomial:** Dengan menggunakan Teorema Faktor Rasional, kita coba faktor dari 6 (misal $\pm1, \pm2, \ldots$). Untuk $x = 1$, $(1)^3-2(1)^2-5(1)+6 = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$. Jadi, $(x - 1)$ adalah salah satu faktor. Dengan pembagian Horner atau sintesis, kita dapatkan:

   $$(x - 1)(x^2 - x - 6) > 0$$

   $$(x - 1)(x - 3)(x + 2) > 0$$

   (b) **Cari Akar:** Pembuat nolnya adalah $x = -2, x = 1, x = 3$. Semua akar bermultiplisitas ganjil (1).

   (c) **Garis Bilangan:** Uji interval paling kanan ($x > 3$), misal $x = 4$: $(+)(+)(+) \implies$ Positif. Tanda akan berselang-seling.

   (d) **Kesimpulan:** Karena pertidaksamaan adalah > 0, kita pilih daerah (+). **HP** $= \{x \mid -2 < x < 1$ **atau** $x > 3\}$

2. **Soal:** Selesaikan pertidaksamaan $(x^2 - 4)(x - 2) \leq 0$.

   Pembahasan:

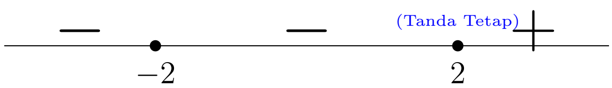
   (a) **Faktorkan Polinomial:**

   $$(x - 2)(x + 2)(x - 2) \leq 0$$

   $$(x - 2)^2(x + 2) \leq 0$$

   (b) **Cari Akar:** Pembuat nolnya adalah $x = 2$ (multiplisitas 2, genap) dan $x = -2$ (multiplisitas 1, ganjil).

   (c) **Garis Bilangan:** Uji interval paling kanan ($x > 2$), misal $x = 3$: $(+)(+) \implies$ Positif. Tanda tetap di $x = 2$ dan berubah di $x = -2$.

   (d) **Kesimpulan:** Karena pertidaksamaannya ≤ 0, kita pilih daerah (-). Solusinya adalah $x \leq -2$ dan $-2 < x < 2$. Jadi, $x < 2$. Namun, kita juga harus menyertakan pembuat nol itu sendiri. Titik $x = 2$ memenuhi $(2-2)^2(2+2) = 0 \leq 0$. **HP** $= \{x \mid x \leq -2$ **atau** $x = 2\}$

3. **Soal:** Tentukan HP dari $x^4 - 16 \geq 0$.

   Pembahasan:

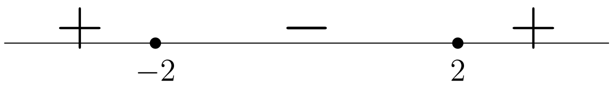
   (a) **Faktorkan Polinomial:**

   $$(x^2 - 4)(x^2 + 4) \geq 0$$

   $$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) \geq 0$$

   (b) **Cari Akar:** Faktor $(x^2 + 4)$ tidak memiliki akar riil (definit positif), sehingga tidak mempengaruhi tanda. Pembuat nol hanya $x = 2$ dan $x = -2$.

   (c) **Garis Bilangan:** Uji interval paling kanan ($x > 2$), misal $x = 3$: $(+)(+)(+) \implies$ Positif.

   (d) **Kesimpulan:** Karena pertidaksamaannya ≥ 0, kita pilih daerah (+). **HP** $= \{x \mid x \leq -2$ **atau** $x \geq 2\}$

4. **Soal:** Selesaikan $-x^3 + 7x - 6 < 0$.

   Pembahasan:

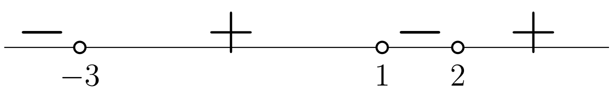
   (a) **Ubah Bentuk:** Agar lebih mudah, kalikan kedua ruas dengan -1 dan balik tandanya.

   $$x^3 - 7x + 6 > 0$$

   (b) **Faktorkan Polinomial:** Dengan uji coba, $x = 1$ adalah akar. $(1)^3 - 7(1) + 6 = 0$. Dengan pembagian sintesis, kita dapatkan: $(x - 1)(x^2 + x - 6) > 0 \implies (x - 1)(x + 3)(x - 2) > 0$.

   (c) **Cari Akar:** Pembuat nolnya $x = -3, x = 1, x = 2$.

   (d) **Garis Bilangan:** Uji interval kanan ($x > 2$), misal $x = 3$: $(+)(+)(+) \implies$ Positif. Tanda berselang-seling.

   (e) **Kesimpulan:** Kita mencari daerah (+) sesuai dengan $x^3 - 7x + 6 > 0$. **HP** $= \{x \mid -3 < x < 1$ **atau** $x > 2\}$

5. **Soal:** Tentukan HP dari $(x^2 - x - 2)(x^2 + 1) \leq 0$.

   Pembahasan:

   (a) **Analisis Faktor:** Faktor $(x^2 + 1)$ selalu bernilai positif untuk semua $x \in R$ (definit positif). Oleh karena itu, kita bisa membagi kedua ruas dengan $(x^2 + 1)$ tanpa mengubah tanda pertidaksamaan.

   $$x^2 - x - 2 \leq 0$$

(b) **Selesaikan Pertidaksamaan Kuadrat:**

$$(x-2)(x+1) \leq 0$$

(c) **Cari Akar dan Garis Bilangan:** Pembuat nolnya $x = -1$ dan $x = 2$. Ini adalah pertidaksamaan kuadrat yang membuka ke atas, sehingga daerah negatif berada di antara akar-akarnya.

(d) **Kesimpulan:** Solusinya adalah $-1 \leq x \leq 2$. **HP** $= \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$

Soal Latihan Mandiri

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari $x^3 + 2x^2 - x - 2 \geq 0$.
2. Selesaikan pertidaksamaan $(x+1)^3(x-2)^2(x-4) < 0$.
3. Tentukan HP dari $x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0$.
4. Selesaikan $x^2(x-3) > 4(x-3)$. (Petunjuk: Jangan membagi dengan $x - 3$!).
5. Tentukan himpunan penyelesaian dari $x^5 - x > 0$.

3.3 Pertidaksamaan dengan Fungsi Campuran

Pertidaksamaan dengan fungsi campuran adalah jenis pertidaksamaan di mana variabel x muncul dalam berbagai bentuk fungsi secara bersamaan, misalnya di dalam akar sekaligus dalam polinomial, seperti $\sqrt{f(x)} > g(x)$.

Kunci untuk menaklukkan jenis soal ini adalah dengan bekerja secara sistematis melalui dua tahap utama:

1. **Analisis Syarat Definisi (Domain)**: Di mana pertidaksamaan ini boleh ada?

2. **Penyelesaian Aljabar**: Apa solusi dari pertidaksamaannya?

Solusi akhirnya adalah irisan dari hasil kedua tahap tersebut.

3.3.1 Langkah-Langkah Penyelesaian Umum

Langkah 1: Tentukan Semua Syarat Definisi (Domain) Ini adalah langkah paling fundamental. Identifikasi semua fungsi yang memiliki batasan domain:

- **Bentuk Akar Genap** ($\sqrt{f(x)}$): Radikan (ekspresi di dalam akar) harus non-negatif. Selesaikan $f(x) \geq 0$.
- **Bentuk Pecahan** ($\frac{P(x)}{Q(x)}$): Penyebut tidak boleh nol. Selesaikan $Q(x) \neq 0$.
- **Bentuk Logaritma** ($\log_a f(x)$): Numerus harus positif. Selesaikan $f(x) > 0$.

Irisan dari semua syarat ini akan menjadi "semesta" solusi kita.

Langkah 2: Selesaikan Pertidaksamaan Secara Aljabar Tujuan dari langkah ini adalah menghilangkan bentuk fungsi campuran. Untuk pertidaksamaan irasional (yang melibatkan akar), metode utamanya adalah **mengkuadratkan kedua ruas**.

PERINGATAN KERAS: Mengkuadratkan kedua ruas hanya valid jika **kedua ruas dijamin bernilai non-negatif**. Jika salah satu ruas bisa bernilai negatif, kita wajib menggunakan **analisis kasus** untuk menghindari kesalahan.

Langkah 3: Cari Irisan Solusi Akhir Gunakan garis bilangan untuk menemukan irisan antara **solusi dari Langkah 2** dan **syarat definisi dari Langkah 1**.

Contoh Penyelesaian Lengkap

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\sqrt{2x+4} \leq x - 2$.

1. **Langkah 1: Tentukan Syarat Definisi (Domain)** Kita memiliki bentuk akar $\sqrt{2x+4}$. Syaratnya adalah radikan harus non-negatif.

$$\begin{aligned} 2x + 4 &\geq 0 \\ 2x &\geq -4 \\ x &\geq -2 \end{aligned}$$

Ini adalah **Syarat Domain Utama** kita. Solusi akhir harus berada dalam interval ini.

2. **Langkah 2: Selesaikan Secara Aljabar (dengan Analisis Kasus)** Kita ingin mengkuadratkan kedua ruas, tetapi ruas kanan $(x-2)$ bisa bernilai negatif. Maka kita bagi menjadi dua kasus.

   Kasus A: Ruas kanan negatif $(x-2<0 \implies x<2)$ Pertidaksamaannya adalah:

   $$\sqrt{2x+4} \le x-2$$

   $$(\text{non-negatif}) \le (\text{negatif})$$

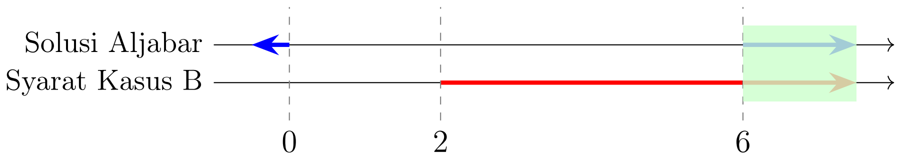
   Sebuah bilangan non-negatif tidak mungkin lebih kecil atau sama dengan bilangan negatif. Maka, untuk kasus ini, **tidak ada solusi**.

   Kasus B: Ruas kanan non-negatif $(x-2 \ge 0 \implies x \ge 2)$ Karena kedua ruas kini dijamin non-negatif, kita **boleh mengkuadratkan**:

   $$\begin{aligned}(\sqrt{2x+4})^2 &\le (x-2)^2\\ 2x+4 &\le x^2-4x+4\\ 0 &\le x^2-6x\\ 0 &\le x(x-6)\end{aligned}$$

   Ini adalah pertidaksamaan kuadrat $x(x-6) \ge 0$. Pembuat nolnya adalah $x=0$ dan $x=6$. Dengan garis bilangan, solusinya adalah $x \le 0$ atau $x \ge 6$.

   Sekarang, kita harus mencari **irisan** dari solusi ini dengan syarat kasus ini $(x \ge 2)$.

   Irisan dari $x \le 0$ atau $x \ge 6$ dengan $x \ge 2$ adalah $x \ge 6$. Ini adalah **Solusi Aljabar Akhir**.

3. **Langkah 3: Cari Irisan Solusi Akhir dengan Syarat Domain** Terakhir, kita cari irisan dari **Solusi Aljabar Akhir** $(x \ge 6)$ dengan **Syarat Domain Utama** $(x \ge -2)$.

   Irisan dari kedua himpunan ini jelas adalah $x \ge 6$.

4. **Himpunan Penyelesaian**: Jadi, himpunan penyelesaian akhir dari pertidaksamaan $\sqrt{2x+4} \le x-2$ adalah:

   $$\text{HP} = \{x \mid x \ge 6, x \in R\}$$

Soal Latihan dan Pembahasan

Berikut adalah soal-soal untuk menguji kemampuan Anda dalam menyelesaikan pertidaksamaan yang melibatkan berbagai jenis fungsi dan syarat domain yang kompleks.

Soal dengan Pembahasan

1. **Soal:** Tentukan himpunan penyelesaian dari $\sqrt{x-3} > 5$.

   Pembahasan:

   (a) **Syarat Domain:** Radikan harus non-negatif. $x - 3 \geq 0 \implies x \geq 3$.

   (b) **Penyelesaian Aljabar:** Karena kedua ruas (akar kuadrat dan 5) dijamin non-negatif, kita boleh langsung mengkuadratkan kedua ruas.

   $$\begin{aligned} (\sqrt{x-3})^2 &> 5^2 \\ x - 3 &> 25 \\ x &> 28 \end{aligned}$$

   (c) **Irisan Solusi:** Kita cari irisan dari solusi aljabar ($x > 28$) dan syarat domain ($x \geq 3$). Irisannya adalah $x > 28$.

   HP $= \{x \mid x > 28, x \in R\}$

2. **Soal:** Tentukan HP dari $\sqrt{10 - x^2} < x + 2$.

   Pembahasan:

   (a) **Syarat Domain:** $10 - x^2 \geq 0 \implies x^2 \leq 10 \implies -\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$.

   (b) **Penyelesaian Aljabar (Analisis Kasus)**: **Kasus A:** $x+2 < 0 \implies x < -2$. (non-negatif) < (negatif). Pernyataan ini tidak mungkin benar. Tidak ada solusi di kasus ini.

   Kasus B: $x + 2 \geq 0 \implies x \geq -2$. Kedua ruas non-negatif, kita boleh kuadratkan:

   $$\begin{aligned} 10 - x^2 &< (x+2)^2 \\ 10 - x^2 &< x^2 + 4x + 4 \\ 0 &< 2x^2 + 4x - 6 \\ 0 &< x^2 + 2x - 3 \\ 0 &< (x+3)(x-1) \end{aligned}$$

   Solusi pertidaksamaan kuadrat ini adalah $x < -3$ atau $x > 1$. Irisan solusi ini dengan syarat kasus B ($x \geq -2$) adalah $x > 1$.

   (c) **Irisan Solusi Akhir:** Kita cari irisan dari solusi aljabar ($x > 1$) dengan syarat domain ($-\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$). Karena $\sqrt{10} \approx 3.16$, maka irisannya adalah $1 < x \leq \sqrt{10}$.

   HP $= \{x \mid 1 < x \leq \sqrt{10}, x \in R\}$

3. **Soal:** Tentukan HP dari $\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-1} \geq 0$.

   Pembahasan: Pertidaksamaan ini melibatkan akar dan pecahan. Kita analisis tanda pembilang dan penyebut.

   (a) **Syarat Domain:**

   - Dari akar: $x^2 - 4 \geq 0 \implies (x-2)(x+2) \geq 0 \implies x \leq -2$ atau $x \geq 2$.
   - Dari penyebut: $x - 1 \neq 0 \implies x \neq 1$.

Syarat domain utamanya adalah $x \leq -2$ atau $x \geq 2$.

(b) **Penyelesaian Aljabar:** Sebuah pecahan ≥ 0 jika: (Pembilang ≥ 0 DAN Penyebut > 0) ATAU (Pembilang ≤ 0 DAN Penyebut < 0). Karena $\sqrt{x^2-4}$ selalu ≥ 0, maka kita hanya perlu memenuhi kasus pertama: Penyebut $> 0 \implies x - 1 > 0 \implies x > 1$.

(c) **Irisan Solusi:** Kita cari irisan dari solusi aljabar ($x > 1$) dengan syarat domain ($x \leq -2$ atau $x \geq 2$). Irisannya adalah $x \geq 2$.
HP $= \{x \mid x \geq 2, x \in R\}$

4. **Soal:** Selesaikan pertidaksamaan $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} > 3$.

   Pembahasan:

   (a) **Syarat Domain:**
   - $x - 2 \geq 0 \implies x \geq 2$.
   - $x + 1 \geq 0 \implies x \geq -1$.

   Irisan kedua syarat adalah $x \geq 2$.

   (b) **Penyelesaian Aljabar:** Karena semua suku dijamin non-negatif, kita bisa mengkuadratkan:

$$\begin{aligned}(\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1})^2 &> 3^2 \\ (x-2) + (x+1) + 2\sqrt{(x-2)(x+1)} &> 9 \\ 2x - 1 + 2\sqrt{x^2 - x - 2} &> 9 \\ 2\sqrt{x^2 - x - 2} &> 10 - 2x \\ \sqrt{x^2 - x - 2} &> 5 - x\end{aligned}$$

   Kita bertemu pertidaksamaan irasional baru. Lakukan analisis kasus lagi.
   Kasus A: $5 - x < 0 \implies x > 5$. (non-negatif) $>$ (negatif). Pernyataan ini selalu benar. Jadi $x > 5$ adalah solusi.
   Kasus B: $5 - x \geq 0 \implies x \leq 5$. Kuadratkan kedua ruas: $x^2 - x - 2 > (5-x)^2 \implies x^2 - x - 2 > 25 - 10x + x^2 \implies 9x > 27 \implies x > 3$. Irisan dari $x > 3$ dan $x \leq 5$ adalah $3 < x \leq 5$.
   Gabungan solusi Kasus A dan B adalah $x > 3$.

   (c) **Irisan Solusi:** Irisan dari solusi aljabar ($x > 3$) dengan syarat domain ($x \geq 2$) adalah $x > 3$.
   HP $= \{x \mid x > 3, x \in R\}$

5. **Soal:** Tentukan HP dari $|x| - \sqrt{4 - x^2} \geq 0$.

   Pembahasan:

   (a) **Syarat Domain:** $4 - x^2 \geq 0 \implies x^2 \leq 4 \implies -2 \leq x \leq 2$.

   (b) **Penyelesaian Aljabar:** Ubah bentuk menjadi $|x| \geq \sqrt{4 - x^2}$. Karena kedua ruas dijamin non-negatif, kita boleh kuadratkan:

$$\begin{aligned}|x|^2 &\geq (\sqrt{4 - x^2})^2 \\ x^2 &\geq 4 - x^2 \\ 2x^2 &\geq 4 \\ x^2 &\geq 2\end{aligned}$$

Solusi dari $x^2 \geq 2$ adalah $x \leq -\sqrt{2}$ atau $x \geq \sqrt{2}$.

(c) **Irisan Solusi:** Cari irisan dari solusi aljabar ($x \leq -\sqrt{2}$ atau $x \geq \sqrt{2}$) dengan syarat domain ($-2 \leq x \leq 2$).
HP $= \{x \mid -2 \leq x \leq -\sqrt{2}$ **atau** $\sqrt{2} \leq x \leq 2, x \in R\}$

Soal Latihan Mandiri

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari $\sqrt{3x-2} < 4$.
2. Selesaikan pertidaksamaan $\sqrt{x^2 - x - 6} > 4$.
3. Tentukan himpunan penyelesaian dari $\sqrt{x+7} \geq x+1$.
4. Selesaikan pertidaksamaan $\frac{x-5}{\sqrt{x-2}} \leq 0$.
5. Tentukan himpunan penyelesaian dari $\sqrt{|x|-1} < 3$.

3.4 Pertidaksamaan Klasik (Inequality Theorems)

Dalam matematika, "rata-rata" bukan hanya rata-rata hitung yang biasa kita gunakan. Terdapat berbagai jenis rataan (mean), dan pertidaksamaan rataan klasik membangun sebuah hubungan berurutan yang indah di antara mereka. Untuk himpunan bilangan riil positif $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kita definisikan empat rataan utama:

Definisi Empat Rataan Utama

Rataan Kuadratik (Quadratic Mean - QM atau RK) Akar dari rata-rata kuadrat bilangan-bilangan tersebut.

$$\mathrm{QM} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

Rataan Aritmatika (Arithmetic Mean - AM atau RA) Rata-rata hitung yang paling umum.

$$\mathrm{AM} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Rataan Geometri (Geometric Mean - GM atau RG) Akar pangkat-n dari hasil kali bilangan-bilangan tersebut.

$$\mathrm{GM} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

Rataan Harmonik (Harmonic Mean - HM atau RH) Kebalikan dari rata-rata aritmatika dari kebalikan bilangan-bilangan tersebut.

$$\mathrm{HM} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

Teorema Pertidaksamaan Rataan

Keempat rataan ini terhubung oleh sebuah rantai pertidaksamaan yang elegan:

$$\mathrm{QM} \geq \mathrm{AM} \geq \mathrm{GM} \geq \mathrm{HM}$$

Atau dalam bentuk lengkap untuk dua variabel $a, b > 0$:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Tanda kesamaan (=) pada semua pertidaksamaan di atas hanya berlaku jika dan hanya jika semua bilangan tersebut sama ($x_1 = x_2 = \cdots = x_n$).

Aplikasi dan Contoh

Contoh 1: Optimasi dengan AM-GM (Sama seperti sebelumnya) AM-GM sangat ampuh untuk menemukan nilai minimum dari suatu fungsi yang berbentuk jumlahan, di mana hasil kali suku-sukunya adalah konstan.

Soal: Tentukan nilai minimum dari $f(x) = 4x + \frac{9}{x}$ untuk $x > 0$.

1. **Identifikasi Suku**: $a = 4x$ dan $b = \frac{9}{x}$.
2. **Terapkan AM $\geq$ GM**:

$$\frac{4x + \frac{9}{x}}{2} \geq \sqrt{(4x) \cdot \left(\frac{9}{x}\right)} \implies \frac{f(x)}{2} \geq \sqrt{36} \implies f(x) \geq 12$$

3. **Kesimpulan**: Nilai minimum dari $f(x)$ adalah 12. Ini tercapai saat $4x = \frac{9}{x}$, yaitu $x = 3/2$.

Contoh 2: Kecepatan Rata-rata dengan HM Rataan Harmonik (HM) secara alami muncul dalam masalah yang melibatkan rasio atau laju, seperti kecepatan.

Soal: Seseorang berkendara dari kota A ke B dengan kecepatan 60 km/jam, dan langsung kembali dari B ke A melalui rute yang sama dengan kecepatan 40 km/jam. Berapakah kecepatan rata-rata untuk seluruh perjalanan pulang-pergi?

Penyelesaian yang Salah (menggunakan AM): Banyak orang secara keliru menjawab $\frac{60+40}{2} = 50$ km/jam. Ini salah karena waktu tempuh untuk setiap bagian perjalanan tidak sama.

Penyelesaian yang Benar (menggunakan HM): Kecepatan rata-rata sejati untuk perjalanan ini adalah Rataan Harmonik dari kedua kecepatan. Misalkan $v_1 = 60$ dan $v_2 = 40$.

$$\text{Kecepatan Rata-rata} = \text{HM}(v_1, v_2) = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{40}} = \frac{2}{\frac{2+3}{120}} = \frac{2}{\frac{5}{120}} = 2 \cdot \frac{120}{5} = 2 \cdot 24 = 48$$

Jadi, kecepatan rata-rata yang sebenarnya adalah **48 km/jam**. Ini menunjukkan bahwa rataan harmonik memberikan "rata-rata" yang benar untuk situasi yang melibatkan laju.

Pertidaksamaan klasik adalah pilar dalam analisis matematika dan sering menjadi kunci dalam kompetisi olimpiade. Mereka memberikan batasan bawah atau atas yang elegan untuk berbagai ekspresi matematika. Kita akan membahas dua yang paling fundamental: AM-GM dan Cauchy-Schwarz.

3.4.1 Pertidaksamaan Rataan Aritmatika-Geometri (AM-GM)

Pertidaksamaan AM-GM adalah salah satu yang paling terkenal dan intuitif. Ia menyatakan bahwa rata-rata aritmatika dari sekumpulan bilangan riil non-negatif selalu lebih besar dari atau sama dengan rata-rata geometrisnya.

Bentuk dan Konsep

Untuk dua bilangan riil non-negatif a dan b:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

- **AM (Rataan Aritmatika)**: $\frac{a+b}{2}$, atau rata-rata yang kita kenal sehari-hari.
- **GM (Rataan Geometri)**: $\sqrt{ab}$.

Tanda kesamaan (=) hanya berlaku jika dan hanya jika $a = b$. Fakta ini sangat krusial untuk soal-soal optimasi.

Bentuk umum untuk n bilangan riil non-negatif $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

Aplikasi: Mencari Nilai Minimum

AM-GM sangat ampuh untuk menemukan nilai minimum dari suatu fungsi yang berbentuk jumlahan, di mana hasil kali suku-sukunya adalah konstan.

Contoh: Tentukan nilai minimum dari $f(x) = 4x + \frac{9}{x}$ untuk $x > 0$.

Penyelesaian:

1. **Identifikasi Suku**: Kita dapat melihat fungsi ini sebagai jumlahan dua suku, yaitu $a = 4x$ dan $b = \frac{9}{x}$. Karena $x > 0$, kedua suku ini dijamin non-negatif.

2. **Terapkan AM-GM**:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab} \\ \frac{4x + \frac{9}{x}}{2} &\geq \sqrt{(4x) \cdot \left(\frac{9}{x}\right)} \end{aligned}$$

3. **Sederhanakan**:

$$\begin{aligned} \frac{4x + \frac{9}{x}}{2} &\geq \sqrt{36} \\ \frac{f(x)}{2} &\geq 6 \\ f(x) &\geq 12 \end{aligned}$$

4. **Kesimpulan**: Dari pertidaksamaan di atas, kita tahu bahwa nilai terendah yang mungkin untuk $f(x)$ adalah 12. Jadi, nilai minimumnya adalah 12.

5. **Kapan Minimum Tercapai?**: Nilai minimum (yaitu, saat kesamaan terjadi) tercapai ketika $a = b$.

$$\begin{aligned} 4x &= \frac{9}{x} \\ 4x^2 &= 9 \\ x^2 &= \frac{9}{4} \implies x = \frac{3}{2} \quad (\text{karena } x > 0) \end{aligned}$$

3.4.2 Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz

Pertidaksamaan ini sangat kuat dan memiliki interpretasi geometris yang dalam terkait dengan vektor. Ia memberikan batas atas untuk hasil kali titik (dot product).

Bentuk dan Konsep

Untuk dua himpunan bilangan riil $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dan $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$:

$$(a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2$$

Atau dalam notasi sigma:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2$$

Tanda kesamaan (=) berlaku jika dan hanya jika kedua himpunan tersebut proporsional, yaitu $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.

Aplikasi: Mencari Nilai Optimum dengan Kendala

Cauchy-Schwarz sangat berguna untuk menemukan nilai minimum atau maksimum dari ekspresi kuadratik yang terikat oleh sebuah kendala linear.

Contoh: Jika x, y, z adalah bilangan riil sedemikian sehingga $2x-y+3z = 7$, tentukan nilai minimum dari $x^2 + y^2 + z^2$.

Penyelesaian:

1. **Identifikasi Struktur**: Kita memiliki ekspresi linear $2x-y+3z$ yang cocok dengan $\sum a_ib_i$. Kita ingin mencari nilai minimum dari $\sum b_i^2$.

2. **Pilih Himpunan yang Tepat**:

   - Misalkan himpunan pertama adalah koefisien dari kendala: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = (2, -1, 3)$.
   - Misalkan himpunan kedua adalah variabelnya: $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) = (x, y, z)$.

3. **Terapkan Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz**:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

$$(2^2 + (-1)^2 + 3^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (2x - y + 3z)^2$$

4. **Substitusi Nilai yang Diketahui**: Kita tahu bahwa $2x - y + 3z = 7$.

$$\begin{aligned} (4+1+9)(x^2 + y^2 + z^2) &\geq (7)^2 \\ 14(x^2 + y^2 + z^2) &\geq 49 \\ x^2 + y^2 + z^2 &\geq \frac{49}{14} \\ x^2 + y^2 + z^2 &\geq \frac{7}{2} \end{aligned}$$

5. **Kesimpulan**: Nilai terkecil yang mungkin untuk $x^2 + y^2 + z^2$ adalah $\frac{7}{2}$. Jadi, nilai minimumnya adalah $\frac{7}{2}$.

Soal Latihan dan Pembahasan

Untuk mengasah pemahaman Anda tentang penerapan pertidaksamaan klasik, berikut adalah beberapa contoh soal beserta pembahasannya, diikuti dengan soal-soal untuk latihan mandiri.

Soal dengan Pembahasan

1. **Soal:** Tentukan nilai minimum dari fungsi $f(x) = \frac{x^2+16}{x}$ untuk $x > 0$.

   Pembahasan: Pertama, kita ubah bentuk fungsi menjadi jumlahan suku-suku.

   $$f(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{16}{x} = x + \frac{16}{x}$$

   Karena $x > 0$, kita dapat menerapkan AM-GM pada suku $a = x$ dan $b = \frac{16}{x}$.

   $$\begin{aligned} \frac{x + \frac{16}{x}}{2} &\geq \sqrt{x \cdot \frac{16}{x}} \\ \frac{f(x)}{2} &\geq \sqrt{16} \\ \frac{f(x)}{2} &\geq 4 \\ f(x) &\geq 8 \end{aligned}$$

   Jadi, nilai minimum dari $f(x)$ adalah 8.

2. **Soal:** Sebuah persegi panjang memiliki keliling 40 cm. Tentukan luas maksimum yang mungkin dari persegi panjang tersebut.

   Pembahasan: Misalkan panjangnya adalah p dan lebarnya adalah l. Keliling: $2(p + l) = 40 \implies p + l = 20$. Luas: $A = p \cdot l$. Kita ingin memaksimalkan A.

   Dengan menggunakan AM-GM pada bilangan positif p dan l:

   $$\begin{aligned} \frac{p + l}{2} &\geq \sqrt{pl} \\ \frac{20}{2} &\geq \sqrt{A} \\ 10 &\geq \sqrt{A} \\ 100 &\geq A \end{aligned}$$

   Luas maksimum yang mungkin adalah 100 cm^2. Kesamaan terjadi saat $p = l = 10$, yaitu ketika persegi panjang tersebut adalah sebuah persegi.

3. **Soal:** Jika x, y adalah bilangan riil yang memenuhi $x^2 + y^2 = 9$, tentukan nilai maksimum dari $x + 3y$.

   Pembahasan: Bentuk ini sangat cocok untuk Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz. Kita ingin menghubungkan $x^2 + y^2$ dengan $x + 3y$. Pilih himpunan $\mathbf{a} = (1, 3)$ dan $\mathbf{b} = (x, y)$.

   $$\begin{aligned} (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) &\geq (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \\ (1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) &\geq (1 \cdot x + 3 \cdot y)^2 \\ (10)(9) &\geq (x + 3y)^2 \\ 90 &\geq (x + 3y)^2 \end{aligned}$$

   Mengambil akar kuadrat dari kedua sisi:

   $$-\sqrt{90} \leq x + 3y \leq \sqrt{90}$$
   $$-3\sqrt{10} \leq x + 3y \leq 3\sqrt{10}$$

   Jadi, nilai maksimum dari $x + 3y$ adalah $3\sqrt{10}$.

4. **Soal:** Buktikan bahwa untuk setiap bilangan riil positif a, b, c berlaku $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

   Pembahasan: Kita akan menerapkan AM-GM pada tiga pasangan suku secara terpisah.

   - Untuk a, b: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \implies a+b \geq 2\sqrt{ab}$
   - Untuk b, c: $\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc} \implies b+c \geq 2\sqrt{bc}$
   - Untuk c, a: $\frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca} \implies c+a \geq 2\sqrt{ca}$

   Karena semua suku non-negatif, kita dapat mengalikan ketiga pertidaksamaan tersebut:

   $$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a) &\geq (2\sqrt{ab})(2\sqrt{bc})(2\sqrt{ca}) \\ (a+b)(b+c)(c+a) &\geq 8\sqrt{ab \cdot bc \cdot ca} \\ (a+b)(b+c)(c+a) &\geq 8\sqrt{a^2b^2c^2} \\ (a+b)(b+c)(c+a) &\geq 8abc\end{aligned}$$

   (Terbukti)

5. **Soal:** Jika $x+y+z=12$, tentukan nilai minimum dari $x^2+y^2+z^2$.

   Pembahasan: Gunakan Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz. Pilih $\mathbf{a} = (1,1,1)$ dan $\mathbf{b} = (x,y,z)$.

   $$\begin{aligned}(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2) &\geq (1x+1y+1z)^2 \\ (3)(x^2+y^2+z^2) &\geq (x+y+z)^2 \\ 3(x^2+y^2+z^2) &\geq (12)^2 \\ 3(x^2+y^2+z^2) &\geq 144 \\ x^2+y^2+z^2 &\geq 48\end{aligned}$$

   Jadi, nilai minimum dari $x^2+y^2+z^2$ adalah 48.

Soal Latihan Mandiri

1. Tentukan nilai minimum dari fungsi $f(x) = 25x^2 + \frac{4}{x^2}$ untuk $x \neq 0$.

2. Jika x dan y adalah bilangan riil positif dengan hasil kali $xy = 36$, tentukan nilai minimum dari $x+y$.

3. Jika x, y, z adalah bilangan riil yang memenuhi $x^2+y^2+z^2 = 27$, tentukan nilai maksimum dari $x+y+z$.

4. Sebuah balok tanpa tutup dengan alas berbentuk persegi memiliki luas permukaan 108 cm^2. Tentukan volume maksimum yang mungkin dari balok tersebut. (Petunjuk: Gunakan AM-GM untuk 3 suku).

5. Untuk bilangan riil positif a, b, c, buktikan bahwa $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \geq 9$. (Petunjuk: Gunakan AM-GM atau Cauchy-Schwarz).

Penutup

Perjalanan kita dalam memahami dunia pertidaksamaan berakhir di sini. Dari garis bilangan sederhana hingga bentuk-bentuk pertidaksamaan lanjutan, kita telah melihat bagaimana pertidaksamaan menjadi bahasa yang kuat untuk mendeskripsikan batasan, rentang, dan optimasi.

Semoga ebook ini berhasil menyampaikan pesan utamanya: matematika bukanlah tentang menghafal rumus, melainkan tentang membangun pemahaman sejati (*true understanding*) terhadap konsep-konsep fundamental. Logika, intuisi, dan visualisasi adalah alat yang jauh lebih ampuh daripada sekadar hafalan.

Teruslah bertanya "mengapa?". Teruslah mencari hubungan antar-topik. Dengan pendekatan tersebut, setiap tantangan matematika bukan lagi menjadi rintangan, melainkan sebuah undangan untuk berpikir lebih dalam.

Selamat melanjutkan perjalanan matematis Anda.

Understanding Mathematical Thinking (UMT)
Februari 2025