From: Tim UMT
Subject: Kalkulus Diferensial untuk Optimisasi
Date: 23 Juni 2025

Eksplorasi Teori

Dokumen ini menyajikan pembahasan mendalam tentang bagaimana kalkulus diferensial digunakan untuk optimisasi. Fokus utama adalah pada **pemahaman konsep**: mengapa turunan digunakan untuk mencari maksimum/minimum, apa makna geometrisnya, dan bagaimana mengaitkan hasil dengan konteks masalah nyata.

Mengapa Optimisasi Penting?

Dalam kehidupan nyata, kita sering dihadapkan pada pertanyaan seperti:

- Bagaimana memaksimalkan keuntungan?
- Bagaimana meminimalkan biaya?
- Bagaimana mendesain bentuk yang efisien?

Semua ini adalah pertanyaan **optimisasi**. Dan kalkulus, khususnya turunan, memberi kita alat untuk menjawabnya secara sistematis.

Dasar Konsep: Titik Stasioner dan Turunan

2.1 Apa itu titik stasioner?

Titik stasioner adalah titik di mana kemiringan grafik fungsi adalah nol:

$$\frac{df}{dx} = 0$$

Mengapa ini penting? Karena di titik ini, grafik bisa mencapai titik maksimum, minimum, atau datar (infleksi).

2.2 Turunan sebagai Kemiringan

Turunan $f'(x)$ menyatakan laju perubahan fungsi. Secara geometris, ia menggambarkan *kemiringan garis singgung.* Ketika kemiringan nol, garis singgung datar $\Rightarrow kemungkinanekstrem.$

Langkah Umum Menyelesaikan Masalah Optimisasi

1. Identifikasi fungsi tujuan (yang akan dimaksimalkan/diminimalkan).
2. Jika perlu, gunakan syarat tambahan (constraint) untuk menyusun fungsi tunggal.
3. Hitung turunannya dan cari titik stasioner ($f'(x) = 0$).
4. Gunakan turunan kedua (atau uji nilai) untuk menentukan apakah itu maksimum atau minimum.
5. Interpretasikan hasilnya dalam konteks masalah.

Pertanyaan Pemahaman: Mengapa kita harus mencari turunan dan menyamakan ke nol? Karena kita mencari titik di mana fungsi "berhenti naik/turun", yaitu titik puncak/lembah.

Contoh: Memaksimalkan Luas Persegi Panjang

Masalah: Sebuah pagar sepanjang 40 meter akan digunakan untuk membuat kandang persegi panjang yang satu sisinya menempel pada dinding. Berapa ukuran maksimum luasnya?

Langkah 1: Misalkan panjang sisi sejajar dinding $= x$, maka sisi tegak lurus $= y$

Karena tiga sisi dipagar:

$$2y + x = 40 \Rightarrow y = \frac{40 - x}{2}$$

Langkah 2: Luas $A = x \cdot y = x \cdot \frac{40-x}{2}$

$$A(x) = \frac{40x - x^2}{2}$$

Langkah 3: Turunkan dan cari titik stasioner:

$$A'(x) = \frac{40 - 2x}{2} = 0 \Rightarrow x = 20$$

Langkah 4: Uji turunan kedua:

$$A''(x) = -1 < 0 \Rightarrow \text{Maksimum lokal}$$

Interpretasi: Luas maksimum terjadi saat $x = 20$, maka $y = 10$. Luas maksimum: 200 meter persegi.

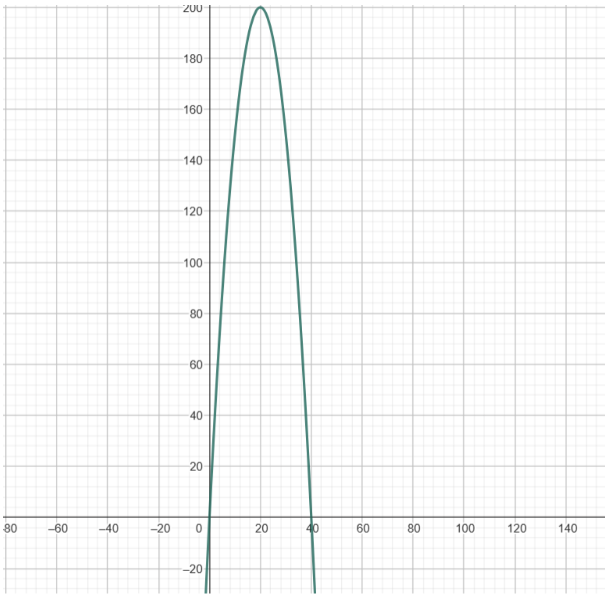

Figure 1: Visualisasi: perubahan luas terhadap nilai x

Mengapa Uji Turunan Kedua?

Pertanyaan: Bukankah cukup dengan $f'(x) = 0$?

Jawaban: Tidak! Titik stasioner bisa jadi:

- Titik maksimum $\Rightarrow f''(x) < 0$
- Titik minimum $\Rightarrow f''(x) > 0$
- Titik infleksi $\Rightarrow f''(x) = 0$

Tanpa turunan kedua, kita tidak bisa memastikan jenis ekstremumnya.

Optimisasi dengan Batasan (Constraint)

Ketika masalah melibatkan batasan (misalnya keliling tetap), kita bisa menggunakan **substitusi** seperti pada contoh sebelumnya.

Untuk kasus lebih kompleks (misalnya lebih dari satu variabel), bisa digunakan **Lagrange Multipliers**. Itu akan dibahas dalam dokumen lanjutan.

Refleksi UMT: Dari Rumus ke Pemahaman

> ”Optimisasi bukan soal menghafal langkah, tapi memahami: Mengapa cara ini berhasil? Apa makna matematisnya?”

Poin Inti UMT:

- Hubungkan setiap langkah dengan makna geometri atau konteks nyata.
- Tanyakan ”mengapa?” di setiap proses.
- Gunakan visualisasi untuk menguatkan intuisi.

Penutup

Kalkulus diferensial membuka pintu untuk memahami perubahan dan pencapaian nilai ekstrem. Melalui pendekatan berbasis pemahaman, kita tidak hanya belajar teknik, tetapi juga **mengapa teknik itu bermakna**. Inilah landasan berpikir matematis yang dalam, sesuai dengan semangat komunitas UMT.

References

[1] Stewart, J. (2016). *Calculus: Early Transcendentals*. Cengage Learning.

[2] UMT Lab. (2025). *Optimisasi dan Pemahaman Kontekstual*. Komunitas UMT.