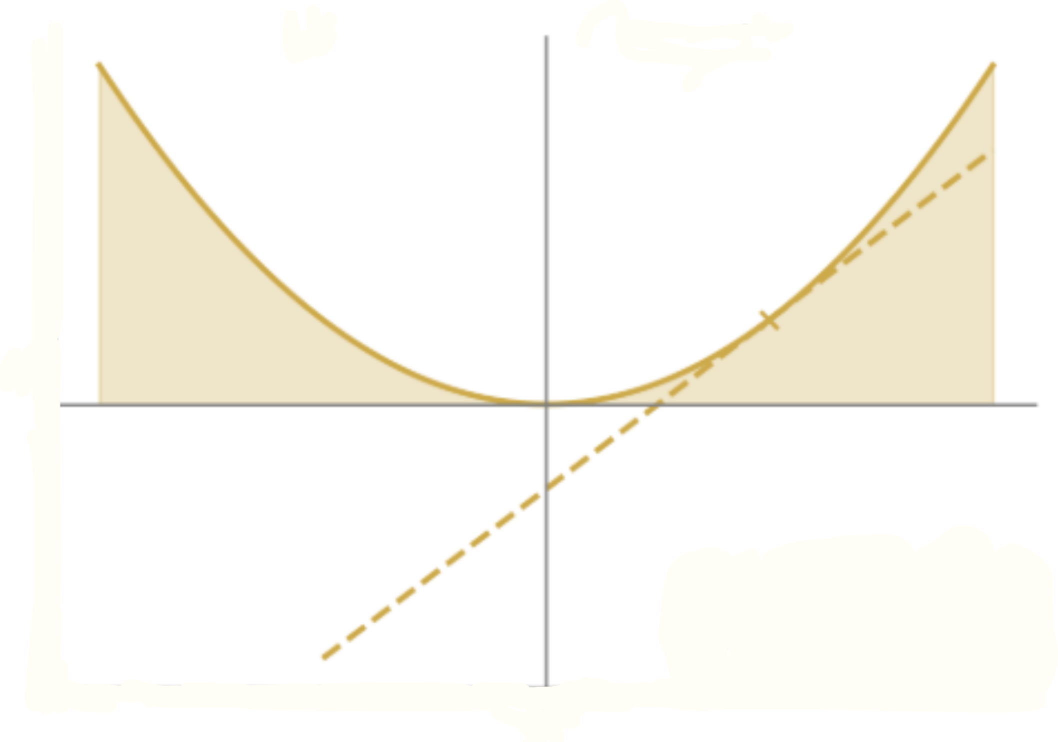
Pengantar Kalkulus



BY UMT

A Strong Foundation for Deep Understanding of Calculus

Pengantar Kalkulus

Belajar Kalkulus dengan Pemahaman Mendalam

by

UMT

Understanding Mathematical Thinking (UMT)

Preface

Kata pengantar ini berisi penjelasan mengenai tujuan buku ini, bagaimana pendekatannya, serta harapan penulis terhadap pembaca.

Buku ini disusun untuk membantu pembaca memahami kalkulus secara intuitif dan konseptual sebelum mendalami perhitungannya secara formal. Kami berharap buku ini dapat menjadi referensi yang bermanfaat bagi pelajar dan pengajar.

UMT
Maret 2025

Contents

Bab 1 - Sistem Bilangan Real

Sistem Bilangan Real adalah struktur matematika yang terdiri dari **himpunan bilangan real** beserta dua operasi dasar, yaitu **penjumlahan** dan **perkalian**. Sistem ini dirancang sedemikian rupa sehingga memenuhi serangkaian aturan atau **aksioma** tertentu, seperti:

- Sifat tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian.
- Adanya elemen identitas untuk penjumlahan (0) dan perkalian (1).
- Adanya elemen invers untuk penjumlahan $(-a)$ dan perkalian $(\frac{1}{a}$, jika $a \neq 0)$.
- Sifat distributif, asosiatif, dan komutatif.

Sistem Bilangan Real berperan sebagai **semesta pembicaraan dalam Kalkulus**, karena hampir semua konsep dalam Kalkulus, seperti limit, turunan, dan integral, didefinisikan dalam ranah bilangan real.

1.1 Himpunan Bilangan Real

Secara lebih mendasar, **himpunan bilangan real** terdiri dari dua kelompok utama:

1. **Bilangan rasional** Yaitu bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan:
$$\frac{p}{q}, \quad \text{dengan } p, q \in \mathbb{Z}, \quad q \neq 0.$$
Contohnya: $\frac{1}{2}, -3, 0.75$.

2. **Bilangan irasional** Yaitu bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan sederhana dan memiliki ekspansi desimal yang tidak berulang serta tidak berhenti. Contohnya: π, $\sqrt{2}$, dan bilangan Euler e.

Dengan demikian, **himpunan bilangan real adalah gabungan antara bilangan rasional dan bilangan irasional**, yang mencakup semua titik di garis bilangan tanpa ada celah. Berikut adalah gambar diagram venn dari himpunan bilangan real :

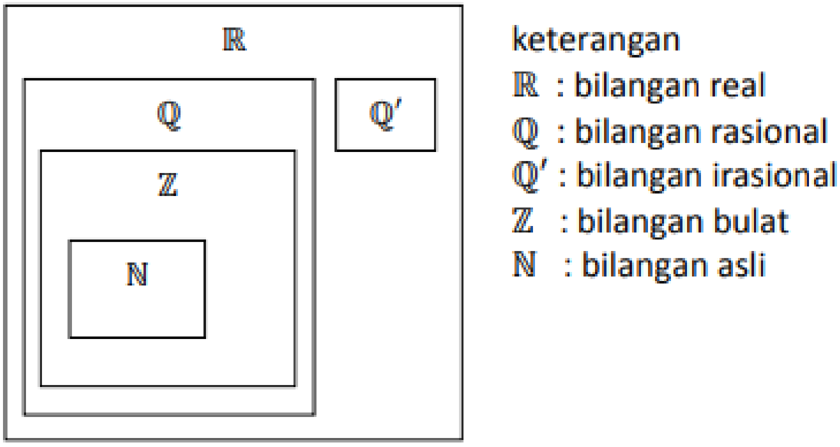


Figure 1.1: Diagram Venn Himpunan Bilangan Real

Contoh Soal :

Tunjukkan bahwa $\sqrt{2}$ adalah bilangan tak rasional!

Bukti :

Andaikan $\sqrt{2}$ adalah bilangan rasional, maka $\sqrt{2}$ dapat ditulis sebagai $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ dengan a, b bilangan bulat, $b \neq 0$ dan pembagi sekutu terbesar dari a dan b adalah 1 atau $FPB(a, b) = 1$ artinya bentuk pecahan tersebut sudah dalam bentuk paling sederhana. Dari sini diperoleh $2b^2 = a^2$. Karena a^2 kelipatan 2 maka a juga haruslah kelipatan 2, sehingga bisa kita buatkan $a = 2k, k \in \mathbb{Z}$, sehingga dapat diperoleh :

$$2b^2 = (2k)^2$$

$$2b^2 = 4k^2$$

$$b^2 = 2k^2$$

Dengan cara yang sama dapat disimpulkan bahwa b kelipatan 2 juga. Hal ini berarti bahwa a dan b mempunyai permbagi sekutu terbesar berkelipatan 2 atau $FPB(a, b) = 2l, l \in \mathbb{Z}$ yang mana ini berkontradiksi dengan asumsi awal kita yaitu $FPB(a, b) = 1$. Jadi, Pengandaian $\sqrt{2}$ adalah bilangan rasional adalah salah, seharusnya $\sqrt{2}$ adalah bilangan tak rasional.

1.2 Sifat - Sifat Lapangan Bilangan Real

Bilangan real, yang dilambangkan dengan $\mathbb{R}$, merupakan himpunan bilangan yang mencakup bilangan rasional dan irasional, serta dilengkapi dengan operasi dasar penjumlahan dan perkalian. Dalam matematika, bilangan real membentuk sebuah

lapangan (*field*), yang berarti bahwa operasi-operasi tersebut memenuhi sejumlah sifat fundamental yang menjamin keteraturan dan konsistensi dalam perhitungan.

Konsep **lapangan** dalam bilangan real sangat penting karena menjadi dasar dalam banyak cabang matematika, termasuk aljabar, analisis, dan kalkulus. Sifat-sifat dalam lapangan bilangan real memastikan bahwa kita dapat melakukan operasi matematika dengan hasil yang tetap berada dalam himpunan bilangan real, tanpa keluar dari sistemnya.

Secara umum, sifat-sifat lapangan bilangan real dapat dikelompokkan menjadi tiga kategori utama:

1. **Sifat Tertutup** Menyatakan bahwa operasi penjumlahan dan perkalian selalu menghasilkan bilangan real.

2. **Sifat Aljabar** Meliputi sifat asosiatif, komutatif, identitas, invers, dan distributif, yang menjamin kelangsungan operasi dalam $\mathbb{R}$.

3. **Sifat Keterurutan** Menyatakan bahwa $\mathbb{R}$ memiliki relasi keterurutan yang memenuhi prinsip trikotomi, transitivitas, dan kompatibilitas terhadap operasi aljabar.

Sifat-sifat ini menjadi dasar bagi berbagai konsep lanjutan dalam matematika, seperti fungsi, limit, dan integral. Sebelum kita membahas masing-masing sifat secara mendalam, kita akan mulai dengan **sifat tertutup** dalam bilangan real.

1.2.1 Sifat Tertutup pada Bilangan Real

Suatu himpunan dikatakan memiliki **sifat tertutup** terhadap suatu operasi jika hasil operasi tersebut tetap berada dalam himpunan tersebut. Pada **bilangan real** ($\mathbb{R}$), sifat tertutup berlaku untuk **penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian (kecuali pembagian oleh nol)**.

Penjumlahan

Jika $a, b \in \mathbb{R}$, maka:

$$a + b \in \mathbb{R}$$

Contoh:

$$3.5 + 2.1 = 5.6, \quad (-4) + 7 = 3$$

Pengurangan

Jika $a, b \in \mathbb{R}$, maka:

$$a - b \in \mathbb{R}$$

Contoh:

$$10 - 3 = 7, \quad (-2) - (-5) = 3$$

Perkalian

Jika $a, b \in \mathbb{R}$, maka:

$$a \times b \in \mathbb{R}$$

Contoh:

$$2.5 \times 4 = 10, \quad (-3) \times (-6) = 18$$

Pembagian (Kecuali Nol)

Jika $a, b \in \mathbb{R}$ dan $b \neq 0$, maka:

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$$

Contoh:

$$\frac{8}{2} = 4, \quad \frac{-5}{2} = -2.5$$

Namun, jika $b = 0$, maka pembagian tidak terdefinisi:

$$\frac{6}{0} \quad \text{tidak didefinisikan}$$

Kesimpulan

Sifat tertutup berarti bahwa hasil operasi tetap berada dalam bilangan real, kecuali dalam kasus pembagian dengan nol.

1.2.2 Sifat Aljabar Pada Bilangan Real

Dalam matematika, suatu himpunan dikatakan memiliki **sifat aljabar** jika operasi-operasi yang didefinisikan dalam himpunan tersebut memenuhi aturan tertentu yang memungkinkan manipulasi simbolik dan perhitungan yang terstruktur.

Pada bilangan real $\mathbb{R}$, sifat aljabar berlaku untuk operasi penjumlahan dan perkalian, yang mencakup sifat **komutatif, asosiatif, distributif, unsur identitas (kesatuan), dan unsur invers (kebalikan)**. Sifat-sifat ini menjamin bahwa setiap operasi dalam $\mathbb{R}$ tetap terdefinisi dan dapat dilakukan tanpa menghasilkan kontradiksi. Berikut adalah masing-masing sifatnya:

Sifat Komutatif

Sifat komutatif menyatakan bahwa urutan dalam operasi penjumlahan dan perkalian tidak mempengaruhi hasilnya, yaitu:

$$a + b = b + a, \quad a \times b = b \times a, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Sebagai contoh:

$$3 + 5 = 5 + 3 = 8, \quad 4 \times 7 = 7 \times 4 = 28.$$

Sifat Asosiatif

Sifat asosiatif menyatakan bahwa pengelompokan dalam operasi penjumlahan dan perkalian tidak mempengaruhi hasilnya:

$$(a+b)+c = a+(b+c), \quad (a\times b)\times c = a\times(b\times c), \quad \forall a,b,c\in\mathbb{R}.$$

Sebagai contoh:

$$(2+3)+4 = 2+(3+4) = 9, \quad (2\times 3)\times 4 = 2\times(3\times 4) = 24.$$

Sifat Distributif

Sifat distributif menghubungkan operasi penjumlahan dan perkalian dengan aturan:

$$a\times(b+c) = (a\times b)+(a\times c), \quad \forall a,b,c\in\mathbb{R}.$$

Sebagai contoh:

$$2\times(3+4) = (2\times 3)+(2\times 4) = 6+8 = 14.$$

Unsur Identitas (Kesatuan)

Terdapat dua unsur identitas dalam bilangan real: - **Identitas penjumlahan**: Terdapat elemen 0 sehingga untuk setiap bilangan real a:

$$a+0 = 0+a = a.$$

Contoh:

$$7+0 = 7, \quad -5+0 = -5.$$

- **Identitas perkalian**: Terdapat elemen 1 sehingga untuk setiap bilangan real a:

$$a\times 1 = 1\times a = a.$$

Contoh:

$$9\times 1 = 9, \quad (-4)\times 1 = -4.$$

Unsur Invers (Kebalikan)

Untuk setiap bilangan real, terdapat elemen kebalikan yang menghasilkan identitas ketika dioperasikan: - **Invers penjumlahan**: Untuk setiap bilangan $a\in\mathbb{R}$, terdapat $-a$ sehingga:

$$a+(-a) = (-a)+a = 0.$$

Contoh:

$$5+(-5) = 0, \quad -3+3 = 0.$$

- **Invers perkalian**: Untuk setiap bilangan real $a\neq 0$, terdapat $a^{-1} = \frac{1}{a}$ sehingga:

$$a\times a^{-1} = a^{-1}\times a = 1.$$

Contoh:

$$4\times\frac{1}{4} = 1, \quad -2\times\frac{1}{-2} = 1.$$

Sifat-sifat ini menjamin bahwa operasi penjumlahan dan perkalian dalam bilangan real tetap terstruktur dan dapat digunakan dalam berbagai perhitungan aljabar.

Definisi Pengurangan Dan Pembagian Bilangan Real

Misalkan $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Pengurangan dari bilangan real x dengan y ditulis $x - y$ didefinisikan dengan $x - y = x + (-y)$
2. Pembagian dari bilangan real x oleh y $(y \neq 0)$ ditulis $x : y$ didefinisikan dengan $x : y = \frac{x}{y} = x \times y^{-1}$

Perlu diingat bahwa operasi pengurangan saling invers dengan operasi penjumlahan, dan operasi pembagian saling invers dengan operasi perkalian. Selain itu, dari sifat lapangan pada $\mathbb{R}$ dapat diturunkan rumus - rumus aljabar elementer yang disajikan pada sifat sifat berikut yang merupakan teorema.

Sifat-Sifat Aljabar Elementer

Misalkan a, b, c adalah anggota bilangan real $(a, b, c \in \mathbb{R})$, maka terdapat beberapa sifat aljabar elementer yang selalu berlaku dalam operasi bilangan real.

1. **Penambahan Bilangan yang Sama ke Kedua Sisi Persamaan** Jika $a = b$, maka menambahkan bilangan real c ke kedua sisi tidak mengubah kesamaan:
$$a + c = b + c.$$
2. **Penghapusan Bilangan yang Sama dari Kedua Sisi Persamaan** Jika $a + c = b + c$, maka dengan mengurangi c dari kedua sisi diperoleh:
$$a = b.$$
3. **Perkalian Kedua Sisi Persamaan dengan Bilangan yang Sama** Jika $ac = bc$ dan $c \neq 0$, maka dengan membagi kedua sisi dengan c diperoleh:
$$a = b.$$
4. **Sifat Negasi Ganda** Negasi dari suatu bilangan real dua kali berturut-turut akan menghasilkan bilangan itu sendiri:
$$-(-a) = a.$$
5. **Invers Perkalian Ganda** Jika $a \neq 0$, maka invers dari invers suatu bilangan adalah bilangan itu sendiri:
$$\left(a^{-1}\right)^{-1} = a.$$
6. **Distribusi Perkalian terhadap Pengurangan** Perkalian terhadap selisih dua bilangan mengikuti aturan distributif:
$$a(b - c) = ab - ac.$$

7. **Perkalian dengan Nol** Setiap bilangan real yang dikalikan dengan nol selalu menghasilkan nol:

$$a \times 0 = 0 \times a = 0.$$

8. **Negasi dalam Perkalian** Perkalian dengan bilangan negatif memenuhi aturan:

$$a(-b) = (-a)b = -ab.$$

Secara khusus, perkalian dengan -1 menghasilkan:

$$(-1) \times a = -a.$$

9. **Negasi Ganda dalam Perkalian** Jika dua bilangan negatif dikalikan, hasilnya adalah positif:

$$(-a)(-b) = ab.$$

10. **Sifat Nol dalam Perkalian** Jika hasil perkalian dua bilangan real adalah nol, maka minimal salah satu dari bilangan tersebut harus nol:

$$ab = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \text{ atau } b = 0.$$

11. **Kesetaraan Pecahan** Jika dua pecahan bernilai sama, maka berlaku hubungan:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad ad = bc, \quad \text{dengan } b \neq 0, d \neq 0.$$

12. **Penjumlahan Pecahan** Untuk dua pecahan dengan penyebut tidak nol, berlaku aturan:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \text{dengan } b \neq 0, d \neq 0.$$

Sifat-sifat di atas merupakan dasar dalam manipulasi persamaan dan perhitungan aljabar dalam bilangan real.

1.2.3 Sifat Urutan Pada Bilangan Real

Sifat urutan pada nilangan real menurunkan suatu konsep yang membandingkan di antara bilangan real, sehingga diperoleh suatu bilangan real *lebih dari* atau *kurang dari* bilangan real lainnya. Pada bilangan real $\mathbb{R}$, jika b terletak di sebelah kanan dari a pada garis bilangan, dikatakan b "lebih dari" a dan ditulis $b > a$. Sebaliknya, dikatakan a "Kurang dari" b dan ditulis $a < b$.

Bilangan real bukan nol dibedakan menjadi bilangan real positif dan bilangan real negatif. Dari fakta tersebut dapat diperkenalkan relasi urutan "<" yang disajikan pada definisi - definisi berikut.

Definsi Relasi Ketidaksamaan 2 **bilangan real**

: Diberikan $a, b \in \mathbb{R}$.

1. $a < b$ berarti $b - a$ positif atau $b - a > 0$
2. $a \leq b$ berarti $a = b$ atau $a < b$
3. $b > a$ berarti $a < b$ atau $b - a$ positif

Berikut ini diperkenalkan aksioma urutan yang sering disebut dengan **Sifat Trikotomi**. Adapun aksioma urutan tersebut disajikan seperti berikut ini.

Aksioma Urutan atau Sifat Trikotomi

1. Jika $a \in \mathbb{R}$, maka salah satu dari pernyataan - pernyataan berikut berlaku atau bernilai benar : $a = 0$ atau $a > 0$ atau $a < 0$
2. Jumlah dua bilangan real positif adalah bilangan positif
3. Perkalian dua bilangan real positif adalah bilangan positif

Selanjutnya, akan dibicarakan sifat - sifat urutan yang disajikan pada teorema berikut.

Teorema Urutan

Diberikan $x, y, z \in \mathbb{R}$

1. Jika $x < y$ dan $y < z$, maka $x < z$ (Sifat Transitif)
2. Jika $x < y$, maka $x + z < y + z$ (Sifat Penambahan)
3. Jika $x < y$ dan $z > 0$ maka $xz < yz$ (Sifat Perkalian)
4. Jika $x < y$ dan $z < 0$ maka $xz > yz$ (Sifat Perkalian)

Teorema ini dibuktikkan hanya bagian 2 dan 3, sedangkan bagian yang lainnya diberikan kepada pembaca sebagai latihan.

Bukti :

2. $x < y$ berarti $y - x > 0$ (definisi)
   $y < z$ berarti $z - y > 0$ (definisi)
   Dari sini diperoleh $(y - x) + (z - y) > 0$ (Jumlah dua bilangan positif)

$$\rightarrow y - x + z - y > 0$$

$$\rightarrow z - x > 0$$

$$\rightarrow z > x$$

3. Karena $x < y$, maka berarti $y - x > 0$ (definisi)

   Dari sini diperoleh $y - x + c - c > 0$

$$\begin{aligned} &\to y + x + c - x > 0 \\ &\to y + c - x - c > 0 \\ &\to y + c > x + c \end{aligned}$$

1.3 Latihan Soal

Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 8, buktikan kebenaran dari setiap pernyataan yang diberikan.

1. $\sqrt{3}$ adalah bilangan tak rasional.
2. Jumlah dua bilangan rasional adalah rasional.
3. $a < b$ jika dan hanya jika $a^c < b^c$.
4. $a < b$ jika dan hanya jika $a^{-1} > b^{-1}$.
5. Jika $a < b$, maka $\frac{a+c}{2} < \frac{b+c}{2}$.
6. Hasil kali sebuah bilangan rasional yang tak nol dengan sebuah bilangan tak rasional adalah tak rasional.
7. Jika bilangan asli m bukan merupakan bentuk kuadrat sempurna, maka $\sqrt{m}$ adalah bilangan tak rasional.

Untuk soal nomor 10 sampai dengan 14, selidiki apakah setiap pernyataan yang diberikan benar? Jika benar, buktikan kebenaran pernyataan tersebut. Akan tetapi jika pernyataan tersebut salah, berikan contoh penyanggah yang menyatakan bahwa pernyataan tersebut salah.

10. Jika $a \leq b$ maka $a^2 \leq b^2$.
11. Jika $a \leq b$ maka $a + 5 \leq b + 5$.
12. Jika $a^2 \leq b^2$, maka $a \leq b$.
13. Jika $ab = 0$, maka $a = 0$ atau $b = 0$.
14. Hasil dua bilangan tak rasional adalah tak rasional.

Untuk soal nomor 15 sampai nomor 18, ubahlah masing-masing desimal berulang menjadi suatu hasil bagi dua bilangan bulat.

1. 2.56565656...
2. 3.92929292...

3. $0.81818181\ldots$

4. $0.23535353\ldots$

Tentukan bilangan tak rasional antara 3.14159 dan $\pi = 3.141592\ldots$.
Apakah bilangan $-\frac{22}{7}$ positif, negatif, atau nol?
Apakah bilangan 0.1234567891011121314 rasional atau tak rasional? Jelaskan yang mendasari jawaban Anda!

Cari dan tentukan batas atas dan batas bawah himpunan bilangan S, bila x adalah anggota setiap x pada S. Sebagai contoh, 5, 6, dan 13 adalah batas atas dari himpunan $\{2, 3, 4, 5\}$. Angka 5 merupakan batas atas terkecil dari S. Berdasarkan pengertian di atas, tentukan batas atas dan batas bawah dari setiap himpunan berikut:

1. $S = \{-2, -2.1, -2.11, -2.111, \ldots\}$

2. $S = \{4, 2.4, 2.44, 2.444, 2.4444, \ldots\}$

3. $S = \{-1, -1.5, -1.75, -1.875, -1.9375, \ldots\}$

4. $S = \{x \mid x^2 - 1 \leq 0\}$

5. $S = \{x \mid x^2 < 2, x \text{ adalah bilangan bulat positif}\}$

Aksioma kelengkapan pada bilangan real
Setiap himpunan bilangan real yang memiliki batas atas, mempunyai sebuah batas atas terkecil.
Benar atau salah, jika pernyataan tersebut salah, berikan contoh yang menunjukkan bahwa pernyataan tersebut salah.

Bab 2 - Pertidaksamaan

Pertidaksamaan merupakan hubungan matematis yang menyatakan bahwa suatu bilangan atau ekspresi lebih besar atau lebih kecil dari bilangan lainnya. Simbol yang umum digunakan dalam pertidaksamaan adalah:

- $a < b$ berarti a lebih kecil dari b.
- $a > b$ berarti a lebih besar dari b.
- $a \leq b$ berarti a lebih kecil atau sama dengan b.
- $a \geq b$ berarti a lebih besar atau sama dengan b.

Pertidaksamaan sering muncul dalam berbagai situasi, seperti membandingkan nilai, batasan dalam perhitungan ekonomi, dan model matematika lainnya.

2.1 Himpunan Penyelesaian Pertidaksamaan

Penyelesaian dari suatu pertidaksamaan adalah kumpulan bilangan yang memenuhi ketidaksamaan tersebut. Misalnya, penyelesaian dari $x > 3$ adalah semua bilangan real yang lebih besar dari 3.

Sering kali, himpunan penyelesaian ini dinyatakan dalam bentuk **interval**. Ada dua jenis interval utama, yaitu interval terbatas dan tak terbatas.

2.1.1 Interval Terbatas

Interval terbatas adalah interval yang memiliki batas atas dan batas bawah. Notasi yang digunakan adalah sebagai berikut:

- **Interval terbuka**: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$. Interval ini mencakup semua bilangan antara a dan b, tetapi tidak termasuk a dan b.
- **Interval tertutup**: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$. Interval ini mencakup semua bilangan antara a dan b, termasuk a dan b.
- **Interval setengah terbuka**:
  - $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (termasuk a, tidak termasuk b).
  - $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ (termasuk b, tidak termasuk a).

2.1.2 Interval Tak Terbatas

Interval tak terbatas adalah interval yang memiliki batasan di salah satu sisi atau keduanya menuju tak hingga. Beberapa bentuknya adalah:

- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$, yaitu semua bilangan lebih kecil dari a.
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$, yaitu semua bilangan lebih besar dari a.
- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$, yaitu semua bilangan lebih kecil atau sama dengan a.
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$, yaitu semua bilangan lebih besar atau sama dengan a.

Perlu diingat bahwa lambang $+\infty$ berarti "Membesar Tanpa Batas" dan lambang $-\infty$ berarti "Mengecil Tanpa Batas".

Contoh Soal :

Tentukan Himpunan Penyelesaian dari pertidaksamaan :

a) $x + 2 < 5$

b) $\frac{-3}{2} \times x \geq 9$

c) $x^2 - x - 2 \geq 4$

d) $x^3(x+1)^2(x-2) > 0$

Penyelesaian :

a) $x + 2 < 5 \rightarrow x + 2 - 2 < 5 - 2 \rightarrow x < 3$

Himpunan penyelesaian pertidaksamaan tersebut adalah $\{x \in \mathbb{R} | x < 3\} = (-\infty, 3)$

b) $\frac{-3}{2} \times x \geq 9 \rightarrow \frac{-3}{2} \times 2 \geq 9 \times 2 \ \rightarrow -3 \times x \geq 18 \rightarrow \frac{-3x}{3} \geq \frac{18}{3} \rightarrow -x \geq 6 \rightarrow x \leq -6$

Himpunan Penyelesaian pertidaksamaan tersebut adalah $\{x \in \mathbb{R} | x \leq -6\} = (-\infty, -6]$

c)

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow x^2 - x - 2 &&\geq 4 \\
&\Rightarrow x^2 - x - 2 - 4 &&\geq 4 - 4 \\
&\Rightarrow x^2 - x - 6 &&\geq 0 \\
&\Rightarrow (x-3)(x+2) &&\geq 0 \\
&\Rightarrow \text{Perhatikan Interval : } (-\infty, -2] \cup (-2, 3) \cup [3, +\infty) \\
&\Rightarrow \text{Untuk } x \in (-\infty, -2] \text{ Maka nilai } (x-3)(x+2) \geq 0 \\
&\Rightarrow \text{Untuk } x \in (-2, 3) \text{ Maka nilai } (x-3)(x+2) < 0 \\
&\Rightarrow \text{Untuk } x \in [3, -\infty) \text{ Maka nilai } (x-3)(x+2) \geq 0
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, Himpunan Penyelesaian yang memenuhi pertidaksamaan tersebut adalah $\{x \in \mathbb{R} | x \leq -2 \cup x \geq 3\} = (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$

d)

$\Rightarrow x^3(x+1)^2(x-2) > 0$
Perhatikan bahwa pada pertidaksamaan tersebut terdapat pangkat yang bernilai genap dan ganjil, sehingga berarti :
$\Rightarrow$ Pada Interval :$(-\infty, -1) \cup [-1, 0) \cup [0, 2] \cup (2, +\infty)$
$\Rightarrow$ Untuk $x \in (-\infty, -1)$ Maka nilai $x^3(x+1)^2(x-2) > 0$
$\Rightarrow$ Untuk $x \in [-1, 0)$ Maka nilai $x^3(x+1)^2(x-2) \geq 0$
$\Rightarrow$ Untuk $x \in [0, 2]$ Maka nilai $x^3(x+1)^2(x-2) \leq 0$
$\Rightarrow$ Untuk $x \in (2, +\infty)$ Maka nilai $x^3(x+1)^2(x-2) \geq 0$

Dengan demikian, Himpunan Penyelesaian yang memenuhi pertidaksamaan tersebut adalah $\{x \in \mathbb{R} | x < 0 \cup x > 2\} = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

2.2 Hal yang perlu anda ketahui terkait pertidaksamaan

Dalam menyelesaikan pertidaksamaan, terdapat beberapa hal penting yang perlu diperhatikan, terutama ketika melakukan operasi pada kedua ruas. Salah satu hal yang sering diabaikan adalah pengaruh perkalian terhadap tanda pertidaksamaan.

Perkalian dengan Bilangan Negatif

Dalam persamaan biasa, kita dapat mengalikan kedua ruas dengan sembarang bilangan real yang bukan nol tanpa mengubah hubungan kesetaraan. Namun, dalam pertidaksamaan, jika kedua ruas dikalikan atau dibagi dengan bilangan negatif, maka tanda pertidaksamaan harus dibalik. Secara matematis, jika $k < 0$, maka:

$$a < b \quad \Rightarrow \quad a \cdot k > b \cdot k$$

$$a > b \quad \Rightarrow \quad a \cdot k < b \cdot k$$

Hal ini disebabkan oleh sifat bilangan negatif yang membalik urutan relatif dari bilangan yang dikalikan.

Kasus Variabel dengan Nilai Positif

Jika suatu variabel sudah diketahui bernilai positif, maka aturan pembalikan tanda pada perkalian dengan variabel tersebut tidak berlaku. Artinya, jika x sudah diketahui selalu positif ($x > 0$), maka kita dapat mengalikannya pada kedua ruas tanpa perlu mempertimbangkan perubahan tanda.

Sebagai contoh, dalam pertidaksamaan:

$$\frac{a}{x} < \frac{b}{x}$$

jika diketahui bahwa $x > 0$, maka kita bisa langsung mengalikan dengan x tanpa membalik tanda pertidaksamaan:

$$a < b$$

Namun, jika x belum diketahui positif atau bisa bernilai negatif, maka perlu diperiksa kembali apakah tanda pertidaksamaan harus dibalik.

Pentingnya Mengevaluasi Himpunan Penyelesaian

Ketika menyelesaikan pertidaksamaan yang melibatkan variabel, penting untuk mempertimbangkan kembali hasil yang diperoleh. Jika solusi bergantung pada nilai variabel tertentu, maka perlu dilakukan pengecekan tambahan terhadap rentang nilai yang memenuhi kondisi awal.

Sebagai contoh, jika dalam suatu langkah penyelesaian diperoleh solusi $x > 3$, tetapi sebelumnya terdapat kondisi bahwa $x \leq 5$, maka himpunan penyelesaian harus dibatasi menjadi $3 < x \leq 5$.

Kesimpulan

Penyelesaian pertidaksamaan memerlukan kehati-hatian dalam manipulasi aljabar, terutama saat melakukan operasi perkalian atau pembagian dengan variabel yang nilainya belum pasti. Memastikan bahwa tanda pertidaksamaan tetap valid setelah setiap langkah sangat penting untuk mendapatkan solusi yang benar.

Contoh Soal :

a) Tentukan Himpunan Penyelesaian Dari Pertidaksamaan $\frac{2}{x} \geq x + 1$

Penyelesaian :

a) disini kita tahu bahwa x adalah variabel dalam pertidaksamaan tersebut dan tidak diberikan info apakah x itu merupakan bilangan positif atau negatif sehingga berdasarkan keterangan dalam pertidaksamaan yang telah dibahas diatas kita tidak bisa langsung mengalikan saja sembarang kedua ruas tersebut dengan hal yang mengandung variabel x. Sehingga, yang perlu kita lakukan adalah :

$$\Rightarrow \frac{2}{x} \geq x+1$$
$$\Rightarrow \frac{2}{x} - x - 1 \geq 0$$
$$\Rightarrow \frac{2 - x^2 - x}{x} \geq 0$$
$$\Rightarrow \frac{x^2 + x - 2}{x} \leq 0$$
$$\Rightarrow \frac{(x+2)(x-1)}{x} \leq 0$$

Perhatikan Pembuat 0 Dari Pembilang Dan Penyebutnya

Perhatikan Interval : $(-\infty, -2] \cup (-2, 0) \cup (0, 1) \cup [1, +\infty)$

$\Rightarrow$ Untuk $x \in (-\infty, -2]$ Maka nilai $\dfrac{(x+2)(x-1)}{x} \leq 0$

$\Rightarrow$ Untuk $x \in (-2, 0)$ Maka nilai $\dfrac{(x+2)(x-1)}{x} > 0$

$\Rightarrow$ Untuk $x \in (0, 1)$ Maka nilai $\dfrac{(x+2)(x-1)}{x} < 0$

$\Rightarrow$ Untuk $x \in [1, +\infty)$ Maka nilai $\dfrac{(x+2)(x-1)}{x} \geq 0$

Dengan demikian, Himpunan Penyelesaian yang memenuhi pertidaksamaan tersebut adalah $\{x \in \mathbb{R} | x \leq -2 \cup 0 < x < 1\} = (-\infty, -2] \cup (0, 1)$

2.3 Latihan Soal

Untuk soal nomor 1 sampai dengan 6, carilah semua nilai x yang memenuhi setiap sistem pertidaksamaan yang diberikan.

1. $3x + 7 > 1$ dan $2x + 1 < 3$
2. $3x + 7 > 1$ dan $2x + 1 \leq -4$
3. $3x + 7 > 1$ atau $2x + 1 < -4$
4. $3x + 7 \leq 1$ atau $2x + 1 < -5$
5. $3x + 7 \leq 1$ atau $2x + 1 > -8$
6. $3x + 7 \leq 1$ atau $2x + 1 > -8$

Untuk soal nomor 7 sampai dengan 14, tentukan himpunan penyelesaian dari setiap pertidaksamaan yang diberikan.

7. $x^2 - x < 0$
8. $2 \leq x^2 - x < 6$
9. $x - 2 \leq x + 1$
10. $x^2 + 3 < 9$
11. $(x+1)(x^2 + 2x - 7) \geq x^2 - 1$
12. $(x^2+1)^2 - (x^2+1) + 10 < 0$
13. $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \leq 0$
14. $\frac{1+x^3}{x^2} \leq 52$

Bab 3 - Nilai Mutlak

Dalam matematika, nilai mutlak memiliki peran penting dalam berbagai konsep, terutama dalam pembahasan jarak dan pertidaksamaan. Nilai mutlak membantu kita memahami bagaimana suatu bilangan berhubungan dengan nol dan bagaimana jarak antara dua bilangan dapat direpresentasikan secara matematis.

Salah satu aplikasi utama nilai mutlak adalah dalam mengukur jarak antara dua bilangan pada garis bilangan. Selain itu, nilai mutlak juga memiliki hubungan erat dengan konsep selisih, karena selisih antara dua bilangan selalu bernilai tidak negatif, sama seperti sifat nilai mutlak. Oleh karena itu, sebelum membahas lebih lanjut tentang pertidaksamaan nilai mutlak, kita akan terlebih dahulu memahami konsep dasar dari nilai mutlak itu sendiri.

3.1 Pengertian Nilai Mutlak

Nilai mutlak dari suatu bilangan real menyatakan jarak bilangan tersebut dari nol pada garis bilangan. Secara umum, nilai mutlak digunakan untuk memastikan bahwa hasil operasi matematika selalu tidak negatif.

3.1.1 Definisi Nilai Mutlak

Nilai mutlak dari suatu bilangan real x didefinisikan sebagai:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jika } x \geq 0, \\ -x, & \text{jika } x < 0. \end{cases}$$

Dari definisi ini, kita melihat bahwa nilai mutlak suatu bilangan selalu bernilai positif atau nol.

3.2 Hubungan Nilai Mutlak dengan Selisih dan Jarak

3.2.1 Konsep Selisih

Selisih antara dua bilangan real a dan b adalah hasil pengurangan $a - b$ atau $b - a$. Secara umum, nilai selisih ini dapat dinyatakan dengan:

$$\text{Selisih antara } a \text{ dan } b = |a - b|.$$

Karena nilai mutlak selalu tidak negatif, maka hasil selisih ini juga dapat kita nyatakan dalam nilai mutlak.

3.2.2 Konsep Jarak

Dalam geometri, jarak antara dua bilangan a dan b pada garis bilangan didefinisikan sebagai panjang segmen antara keduanya. Secara matematis, ini dinyatakan sebagai:

$$\text{Jarak antara } a \text{ dan } b = |a - b|.$$

Karena nilai mutlak selalu tidak negatif, maka jarak ini juga dapat kita nyatakan dalam nilai mutlak.

Kesimpulan

Berdasarkan hubungan di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa jarak antara dua bilangan real pada garis bilangan dapat direpresentasikan menggunakan nilai mutlak dari selisih kedua bilangan tersebut. Dengan kata lain:

$$\text{Jarak antara } a \text{ dan } b = \text{Selisih antara } a \text{ dan } b = |a - b|.$$

Konsep ini sering digunakan dalam analisis matematika, terutama dalam penyelesaian persamaan dan pertidaksamaan yang melibatkan nilai mutlak.

Contoh Soal :

a) $|2| = ...$

b) $|-5| = ...$

c) $|x - 1| = ...$

Penyelesaian :

a)
- secara konsep selisih : $|2| = |2 - 0|$ disitu terdapat 2 bilangan yaitu 2 dan 0 sehingga kita perlu mencari selisih dari kedua bilangan tersebut, dan karena fakta bahwa $2 > 0$ maka selisih dari kedua bilangan tersebut adalah $2 - 0 = 2$. Jadi, secara konsep selisih hasil dari $|2| = 2 - 0 = 2$
- secara konsep jarak itu tetap sama jarak dari 2 ke 0 dan 0 ke 2 jelas adalah 2
- secara definisi nilai mutlak : karena $2 \geq 0$ maka $|2| = 2$

b)
- secara konsep selisih : $|-5| = |0 - 5|$ disitu terdapat 2 bilangan yaitu 5 dan 0 sehingga kita perlu mencari selisih dari kedua bilangan tersebut, dan karena fakta bahwa $5 > 0$ maka selisih dari kedua bilangan tersebut adalah $5 - 0 = 5$. Jadi, secara konsep selisih hasil dari $|-5| = 5 - 0 = 5$
- secara konsep jarak itu tetap sama jarak dari -5 ke 0 adalah jelas 5
- secara definisi nilai mutlak : karena $-5 < 0$ maka $|-5| = -(-5) = 5$

c)
- secara konsep selisih : $|x-5|$ sudah terdapat 2 bilangan yaitu x dan 5 tetapi kita tidah tahu apakah x ini > 5 atau < 5 karena hal tersebut belum jelas jadi ada 2 representasi yang mungkin untuk menyatakan nilai selisih dari kedua bilangan tersebut yaitu : $|x-5| = x-5$ untuk $x \geq 0$ atau $|x-5| = 5-x$ untuk $x < 5$
- secara konsep jarak yang menarik jadi dalam jarak itu tidak peduli mana yang besar dan mana yang kecil intinya adalah jarak yang ada pada x dan 5 tersebut. Jadi, yang dia pedulikan adalah bentuk $|(x)-(5)|$ tersebut yang mengartika jarak x dan 5.
- secara definsi nilai mutlak : kita juga mendapatkan 2 representasi nilai yaitu $x-5$ untuk $x \geq 5$ dan $-(x-5) = 5-x$ untuk $x < 5$.

3.3 Sifat - Sifat Nilai Mutlak

Berdasarkan definisi nilai mutlak diatas, diperoleh rumus - rumus yang sering dipakai dalam pembahasan selanjutnya, adapun rumus - rumus tersebut disajikan pada teorema berikut.

Teorema Sifat - Sifat Nilai Mutlak

$\forall x, y, a \in \mathbb{R}$ Berlaku :

1. $|x| = |y|$ Jika dan hanya jika $x = \pm y$ dan $(x)^2 = (y)^2$
2. Jika $a \geq 0$, maka
   a) $|x| \leq a$ Jika dan hanya jika $-a \leq x \leq a$ dan $(x)^2 \leq (a)^2$
   b) $|x| \geq a$ Jika dan hanya jika $x \geq a$ atau $x \leq -a$ dan $(x)^2 \geq (a)^2$
3. $|x+y| \leq |x| + |y|$
4. $|x-y| \leq |x| + |y|$
5. $|x| - |y| \leq |x-y|$
6. $||x| - |y|| \leq |x-y|$
7. $|xy| = |x||y|$, Dapat diperumum
8. $\frac{x}{y} = \frac{|x|}{|y|}$, Dapat diperumum

Berikut diperlihatkan beberapa bukti dari teorema diatas, sedangkan bukti sisanya diberikan kepada pembaca sebagai latihan.

Bukti :

Akan dibuktikkan $|x| \leq a$ Jika dan hanya jika $-a \leq x \leq a$ dan $a \geq 0$

2a) $\Rightarrow$ Karena $|x| \leq a$, maka $x \leq a$ dan $-x \leq a$, diperoleh $x \geq -a$ atau $-a \leq x$. Dengan demikian, dari $x \leq a$ dan $-a \leq x$ sehingga diperoleh $-a \leq x \leq a$
$\Rightarrow$ Karena $a \leq x \leq a$ maka $x \leq a$ dan $x \geq -a$. Dari $x \geq -a$, diperoleh $-x \leq a$. Karena $x \leq a$ dan $-x \leq a$ maka $|x| \leq a$

3. Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ beraku $-|x| \leq x \leq |x|$ dan $-|y| \leq y \leq |y|$. Akibatnya, diperoleh $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq (|x| + |y|)$. Sehingga bisa didapat :

   $|x + y| \leq |x| + |y|$

3.4 Pertidaksamaan Terkait Nilai Mutlak

Sebelum membahas penyelesaian pertidaksamaan yang melibatkan nilai mutlak, penting untuk memahami bagaimana suatu ekspresi yang mengandung nilai mutlak dapat diubah menjadi bentuk tanpa nilai mutlak. Transformasi ini memungkinkan kita untuk menganalisis masalah dengan lebih mudah dalam berbagai kasus.

Contoh Soal :

Sederhanakan bentuk berikut sehingga tidak mengandung nilai mutlak:

$$3|x| + |x - 2|$$

Penyelesaian :

Untuk menyelesaikan ini, kita perlu memperhatikan titik di mana nilai mutlak dapat berubah tanda. Dalam kasus ini, titik kritis terjadi pada $x = 0$ dan $x = 2$. Maka, garis bilangan terbagi menjadi tiga interval:

$$(-\infty, 0) = x < 0, \quad [0, 2) = 0 \leq x < 2, \quad \text{dan} \quad [2, \infty) = x \geq 2$$

Kita akan menentukan ekspresi tanpa nilai mutlak untuk masing-masing interval.

- **Interval** $x < 0$:

  $$|x| = -x, \quad |x - 2| = -(x - 2) = -x + 2$$

  Sehingga:

  $$3|x| + |x - 2| = 3(-x) + (-x + 2) = -3x - x + 2 = -4x + 2$$

- **Interval** $0 \leq x < 2$:

  $$|x| = x, \quad |x - 2| = -(x - 2) = -x + 2$$

  Sehingga:

  $$3|x| + |x - 2| = 3x + (-x + 2) = 2x + 2$$

- **Interval** $x \geq 2$:
$$|x| = x, \quad |x-2| = x-2$$
Sehingga:
$$3|x| + |x-2| = 3x + (x-2) = 4x - 2$$

Maka, bentuk tanpa nilai mutlak dari ekspresi yang diberikan adalah:

$$3|x| + |x-2| = \begin{cases} -4x+2, & x < 0 \\ 2x+2, & 0 \leq x < 2 \\ 4x-2, & x \geq 2 \end{cases}$$

Metode Penyelesaian Pertidaksamaan yang Mengandung Nilai Mutlak

Setelah memahami bagaimana menghilangkan nilai mutlak dalam ekspresi aljabar, kita dapat menyelesaikan pertidaksamaan yang melibatkan nilai mutlak dengan dua cara:

1. Menuliskan bentuk tanpa nilai mutlak dan menyelesaikan dengan mempertimbangkan kasus-kasusnya.
2. Menggunakan sifat nilai mutlak seperti teorema ketiga nilai mutlak atau mengkuadratkan kedua ruas jika memungkinkan.

Dengan memahami konsep ini, kita dapat menyelesaikan pertidaksamaan nilai mutlak secara lebih sistematis dan akurat.

Contoh Soal :

a) $|x-5| \leq 4$

b) $x^2|x| \leq 8$

c) $|x+1| \geq 2x-7$

d) $|8-3x| \geq |2x|$

Penyelesaian :

a) Dengan menggunakan teorema bagian 2a, diperoleh :
$$|x-5| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x-5 \leq 4 \Rightarrow -4+5 \leq x-5+5 \leq 4+5 \Rightarrow 1 \leq x \leq 9$$

b) Berdasarkan Definsi Nilai Mutlak, Untuk kasus $x < 0$:
$$\begin{aligned} &\Rightarrow x^2|x| \leq 8 \\ &\Rightarrow x^2(-x) \leq 8 \\ &\Rightarrow -x^3 - 8 \leq 0 \\ &\Rightarrow x^3 + 8 \geq 0 \\ &\Rightarrow (x+2)(x^2-2x+4) \geq 0 \end{aligned}$$

Dari sini dapat kita lihat bahwa bentuk $x^2 - 2x + 4$ merupakan definit positif artinya "Untuk x real berapapun nilainya akan selalu positif" sehingga yang perlu kita tinjau adalah nilai dari bentuk $x + 2$, $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$. Nah, karena ini kita juga mempertimbangkan bahwa hal tersebut terjadi disaat $x < 0$ maka itu berarti untuk solusinya juga harus di pertimbangkan berada pada interval tersebut juga, berdasarkan pertimbangan tersebut maka daerah solusinya adalah : $-2 \leq x < 0 = [-2, 0)$

Untuk kasus $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
&x^2|x| \leq 8 \\
&x^3 - 8 \leq 0 \\
&(x-2)(x^2 + 2x + 4) \leq 0
\end{aligned}$$

Dari sini dapat kita lihat bahwa bentuk (x^2+2x+4) merupakan definit positif juga artinya "Untuk x real berapapun nilainya akan selalu positif", sehingga yang perlu kita tinjau adalah nilai dari bentuk $x - 2$, $x - 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2$.Nah, karena ini kita juga mempertimbangkan bahwa hal tersebut terjadi disaat $x \geq 0$ maka itu berarti untuk solusinya juga harus dipertimbangkan berada pada daerah $x \geq 0$, berdasarkan pertimbangan tersebut maka daerah untuk solusinya adalah : $0 \leq x \leq 2 = [0, 2]$

Kalau kita perhatikan berdasarkan kedua solusi tersebut bisa kita dapat solusi umumnya yang memenuhi pertidaksamaan $x^2|x| \leq 8$ adalah :

$$-2 \leq x \leq 2 = [-2, 2]$$

c) Berdasarkan definisi nilai mutlak, Untuk $x \geq -1$:

$$\begin{aligned}
|x+1| &\geq 2x - 7 \\
x + 1 &\geq 2x - 7 \\
-x &\geq -8 \\
x &\leq 8
\end{aligned}$$

Jika disesuaikan dengan keharusan bahwa bentuk tersebut terjadi disaat $x \geq -1$ maka solusi yang memenuhi kasus tersebut adalah :

$$-1 \leq x \leq 2 = [-1, 8]$$

Untuk $x < -1$:

$$\begin{aligned}
|x+1| &\geq 2x - 7 \\
-(x+1) &\geq 2x - 7 \\
-x - 1 &\geq 2x - 7 \\
-3x &\geq -6 \\
x &\geq 2
\end{aligned}$$

Jika disesuaikan dengan keharusan bahwa bentuk tersebut terjadi disaat $x < -1$ maka solusi yang memenuhi kasus tersebut tidak ada karena tidak bersesuaian dengan $x < -1$ artinya solusinya dari hasil yang didapatkan pada pertidaksamaan dengan keharusan itu saling berlawanan sehingga solusi yang memenuhi disaat $x < -1$ tidak ada.

Sehingga solusi yang memenuhi pertidaksamaan tersebut hanyalah :

$$-1 \leq x \leq 8$$

d) Berdasarkan definisi nilai mutlak, ini akan terbagi atas beberapa interval untuk menghasilkan bentuk tanpa nilai mutlak, yaitu :

$$(-\infty, 0), [0, \frac{8}{3}] \text{ dan } (\frac{8}{3}, +\infty)$$

.

Untuk kasus $x < 0$:

$$\begin{aligned} 8 - 3x &\geq -2x \\ -x &\geq -8 \\ x &\leq 8 \end{aligned}$$

Jika disesuaikan dengan asumsi awal yaitu itu terjadi disaat $x < 0$ maka solusinya akan menjadi perpotongan antara $x < 0$ dan $x \leq 8$ sehingga yang sesuai adalah :

$$x < 0$$

Untuk kasus $0 \leq x < \frac{8}{3}$:

$$\begin{aligned} 8 - 3x &\geq 2x \\ -5x &\geq -8 \\ x &\leq \frac{8}{5} \end{aligned}$$

Jika disesuaikan dengan asumsi awal yaitu itu terjadi disaat $0 \leq x < \frac{8}{3}$ maka solusinya akan menjadi perpotongan antara $0 \leq x \leq \frac{8}{3}$ dan $x \leq \frac{8}{5}$, sehingga yang sesuai adalah

$$0 \leq x \leq \frac{8}{5}$$

Untuk kasus $x > \frac{8}{5}$:

$$\begin{aligned} -(8 - 3x) &\geq 2x \\ -8 + 3x &\geq 2x \\ x &\geq 8 \end{aligned}$$

Jika disesuaikan dengan asumsi awal yaitu itu terjadi disaat $x > \frac{8}{5}$ maka solusinya yang sesuai adalah :

$$x \geq 8$$

Jadi, solusi secara umum dari pertidaksamaan $|8 - 3x| \geq |2x|$ adalah :

$$(x \leq \frac{8}{5}) \cup (x \geq 8)$$

3.5 Latihan Soal

Untuk soal nomor 1 sampai dengan 3, ubahlah setiap bentuk yang diberikan ke dalam bentuk yang tidak memuat nilai mutlak.

1. $2|x| + |x+3|$
2. $|2x| + x$
3. $|x| - |x+1| + |x+2|$

Untuk soal nomor 4 sampai dengan 12, tentukan himpunan penyelesaian dari setiap pertidaksamaan yang diberikan.

4. $2x + |3x-5| \leq 10$
5. $|2x-5| - 3|2x-5| > 10$
6. $|x^2 - x| \leq 1$
7. $|x^2 - 3x + 2| \leq 5$
8. $|x| - |x-2| \leq 7$
9. $|2x+1| - 6|3x+2| + 8 \geq 0$
10. $|2x+1| \leq \frac{2x+1}{2}$

Untuk soal nomor 13 sampai dengan 14, buktikan bahwa implikasi yang diberikan adalah benar.

13. Jika $|x-6| < 3$, maka $5 < |x-5| < 2.5$.
14. Jika $x + 4 < 2$, maka $|ax + b| < c$.

Untuk soal nomor 15 sampai dengan 16, carilah suatu bilangan (tergantung pada bilangan x sebarang) sehingga implikasi yang diberikan adalah benar.

15. Jika $|x-6| < a$, maka $|x-15| < b$.
16. Jika $|x+6| < c$, maka $|x+36| < d$. Untuk soal nomor 17 sampai dengan 19, buktikan bahwa setiap pernyataan yang diberikan adalah benar.
17. Diberikan bilangan $\epsilon > 0$ sebarang, terdapat suatu bilangan $\delta > 0$ sehingga jika $0 < |x-2| < \delta$, maka $|(2x+6) - 10| < \epsilon$.
18. $|x| \leq |y|$ jika dan hanya jika $x^2 \leq y^2$.
19. Jika $0 < a < b$, maka $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

    (Petunjuk: gunakan hasil soal nomor 16)

Untuk soal nomor 20 sampai dengan 24, gunakan pertidaksamaan segitiga untuk membuktikan setiap pertidaksamaan berikut.

20. $|a - b| \leq |a| + |b|$

21. $|a + b| \leq |a| + |b|$

22. $|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|$

23. Buktikan bahwa:

    (a) Jika $|x| \leq 1$, maka
    $$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2 + x} \leq 1$$

    (b) Jika $|x| \leq 2$, maka
    $$\frac{1}{x^2 + 1} \geq \frac{1}{5}$$

    (c) $|x + y|^2 \leq (x^2 + y^2)$

    (d) $|x^2 - y^2| \leq |x - y| \cdot |x + y|$

24. Buktikan bahwa: jika $h > 0$, maka

    (a) $|x - s| < h \Rightarrow s - h < x < s + h$

    (b) $-h < x - a < h \Rightarrow a - h < x < a + h$

Bab 4 - Fungsi Satu Variabel

Fungsi memiliki peranan yang sangat penting dalam kalkulus. Hampir semua konsep utama dalam kalkulus seperti limit, kekontinuan, turunan, dan integral berkaitan erat dengan fungsi. Oleh sebab itu, memahami berbagai aspek fungsi seperti domain, range, operasi pada fungsi, komposisi fungsi, serta fungsi invers menjadi hal yang sangat penting. Dalam hal itu disini kita akan membahas seputar "Fungsi Satu Variabel".

4.1 Fungsi dan Representasinya

Konsep fungsi dapat dipahami melalui dua pendekatan utama, yaitu sebagai himpunan pasangan berurutan dan sebagai pemetaan antara dua himpunan.

4.1.1 Apa Itu Pasangan Terurut?

Dalam matematika, pasangan terurut merupakan konsep dasar yang sangat penting, terutama dalam bidang relasi, fungsi, dan teori himpunan. Pasangan terurut dari dua elemen a dan b ditulis sebagai:

$$(a, b)$$

yang berarti elemen pertama adalah a dan elemen kedua adalah b. Sifat utama dari pasangan terurut adalah bahwa urutan elemen di dalamnya memiliki makna, sehingga:

$$(a, b) \neq (b, a) \quad \text{jika } a \neq b.$$

4.1.2 Sifat-Sifat Pasangan Terurut

Pasangan terurut (a, b) memiliki sifat sebagai berikut:

1. Dua pasangan terurut dianggap sama jika dan hanya jika komponen-komponennya sama, yaitu:
$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ dan } b = d.$$

2. Jika A dan B adalah himpunan, maka himpunan dari semua pasangan terurut yang mungkin antara elemen-elemen A dan B disebut sebagai produk kartesian, ditulis sebagai:
$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

3. Pasangan terurut sering digunakan dalam relasi dan fungsi. Misalnya, suatu fungsi dari A ke B adalah himpunan pasangan terurut (x, y) yang memenuhi sifat fungsi, yaitu setiap elemen x dari A dipasangkan dengan tepat satu elemen y di B.

Contoh Penggunaan Pasangan Terurut

- Dalam sistem koordinat kartesius, titik pada bidang dinyatakan sebagai pasangan terurut (x, y) di mana x adalah absis dan y adalah ordinat.
- Dalam teori graf, suatu graf terdiri dari simpul dan sisi, di mana sisi dapat direpresentasikan sebagai pasangan terurut (u, v) yang menyatakan hubungan antara dua simpul u dan v.
- Dalam basis data, setiap entri dalam tabel dapat dianggap sebagai pasangan terurut yang menyatakan hubungan antar atribut.

4.1.3 Definisi Fungsi Sebagai Pasangan Terurut

Misalkan A dan B adalah dua himpunan yang tidak kosong. Fungsi dari A ke B, yang dinotasikan sebagai $f : A \to B$, adalah himpunan pasangan terurut (x, y) yang memenuhi:

1. Untuk setiap $x \in A$, terdapat tepat satu $y \in B$ sehingga $(x, y) \in f$.
2. Jika $(x, y) \in f$ dan $(x, z) \in f$, maka haruslah $y = z$.

4.1.4 Daerah Asal(Domain) dan Daerah Nilai(Range)

Dalam suatu fungsi f, jika pasangan $(x, y) \in f$ ditulis dalam bentuk $y = f(x)$ atau $f : x \to y$, maka x disebut sebagai nilai masukan (input) dan y adalah nilai fungsi di x (output). Himpunan semua nilai yang mungkin untuk x disebut **daerah asal** (domain), biasanya dinotasikan sebagai D_f. Sedangkan himpunan nilai yang diperoleh dari fungsi disebut **daerah nilai** (range), dinotasikan sebagai R_f.

Dalam kalkulus, fungsi seringkali memiliki domain dan range dalam bilangan real, sehingga kita dapat menyatakan bahwa $D_f, R_f \subseteq \mathbb{R}$. Sebagai contoh, fungsi kuadrat $f(x) = x^2$ memiliki daerah asal semua bilangan real, tetapi daerah nilainya hanya bilangan real tak-negatif, yaitu $R_f = \mathbb{R}^{\geq 0}$.

4.1.5 Variabel Bebas dan Variabel Terikat

Dalam sebuah fungsi, variabel x disebut sebagai *variabel bebas*, sedangkan $y = f(x)$ disebut *variabel terikat* karena nilainya tergantung pada x. Jika dalam suatu kasus domain fungsi tidak disebutkan secara eksplisit, maka kita mengasumsikan bahwa domain tersebut adalah himpunan bilangan real terbesar yang membuat fungsi tersebut terdefinisi. Domain ini sering disebut sebagai **daerah asal alami** dari fungsi.

Contoh Soal :

Periksa apakah pengaitan - pengaitan di bawah ini merupakan suatu fungsi atau bukan.

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Dengan Aturan $f(x) = x$

b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Dengan Aturan $g(x) = x^2$

c) $h : [-5, 5] \rightarrow [-5, 5]$ Dengan Aturan $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 25\}$

Penyelesaian :

Untuk memeriksa pengaitan-pengaitan tersebut dapat dilakukan secara geometri yaitu dengan cara membuat sketsa grafiknya, kemudian gambarkan garis yang sejajar dengan sumbu y. Pilih bilangan x, apabila garis tersebut yang melalui x memotong kurva di satu titik maka fungsi tersebut merupakan suatu fungsi. Tetapi apabila garis tersebut memotong kurva di dua titik, maka kurva tersebut bukan merupakan suatu fungsi.

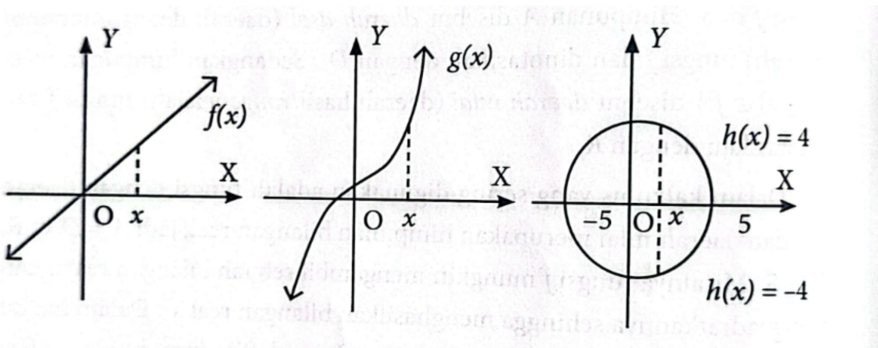


Figure 4.2: Gambar Grafik Fungsi $x^2, x,$ dan $x^2 + y^2 = 25$

4.1.6 Definisi Fungsi Sebagai Pemetaan

Misalkan A dan B himpunan-himpunan tidak kosong. Suatu fungsi f dari A ke B ditulis $f : A \rightarrow B$ adalah suatu aturan yang memasangkan setiap $x \in A$ dengan tepat satu anggota $f(x) \in B$.

Dalam definisi di atas, x dinamakan variabel bebas dan y yang nilainya tergantung dari x dinamakan variabel tak bebas. Himpunan A dinamakan daerah asal fungsi f dan dinotasikan dengan $D_f = A$. Sedangkan himpunan $\{f(x) \mid x \in A\}$ dinamakan daerah nilai fungsi f dan dinotasikan dengan $R_f = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Suatu fungsi f dapat digambarkan sebagai suatu grafik dan sebagai suatu pemetaan. Sebelumnya pada Figure 4.2 sudah diberikan gambaran fungsi f sebagai suatu grafik dibawah ini akan diberikan gambaran fungsi f sebagai pemetaan.

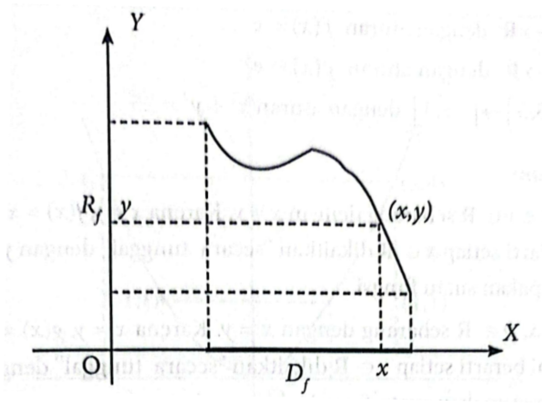


Figure 4.3: Gambar Contoh Pemetaan 1

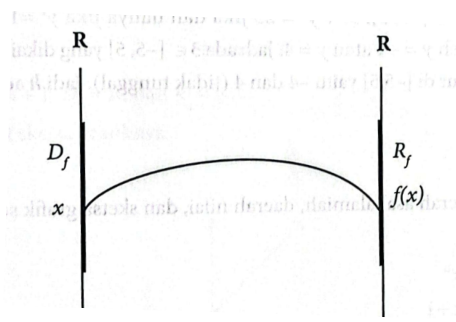


Figure 4.4: Gambar Contoh Pemetaan 2

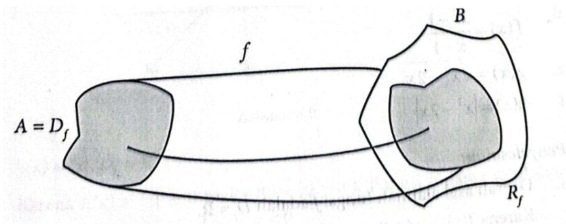


Figure 4.5: Gambar Contoh Pemetaan 3

Contoh Soal :

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Dengan Aturan $f(x) = x$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Dengan Aturan $g(x) = x^2$

c) $h : [-5, 5] \to [-5, 5]$ Dengan Aturan $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 25\}$

Penyelesaian :

a) Ambil $x, y \in \mathbb{R}$ sebarang dengan $x = y$. Karena $x = y$, $f(x) = x = y = f(y)$. Ini berarti setiap $x \in \mathbb{R}$ dikaitkan *"secara tunggal"* dengan $y \in \mathbb{R}$. Jadi f merupakan suatu fungsi.

b) Ambil $x, y \in \mathbb{R}$ sebarang dengan $x = y$. Karena $x = y$, $g(x) = x^2 = y^2 = g(y)$. Ini berarti setiap $x \in \mathbb{R}$ dikaitkan *"secara tunggal"* dengan $y \in \mathbb{R}$. Jadi g merupakan suatu fungsi.

c) Ambil $3 \in [-5, 5]$, $3^2 + y^2 = 25$ jika dan hanya jika $y^2 = 16$. Dari sini diperoleh $y = -4$ atau $y = 4$. Jadi ada $x = [-5, 5]$ yang dikaitkan dengan dua unsur di $[-5, 5]$ yaitu -4 dan 4 (tidak tunggal). Jadi h adalah bukan fungsi.

Contoh Soal :

a) $f(x) = x^2$

b) $g(x) = x + 1$

c) $h(x) = |x|$

d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

e) $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

f) $h(x) = |x^2 - 2x|$

Penyelesaian :

a) Daerah asal alamiah fungsi f adalah $D_f = \mathbb{R}$. Karena $f(x) = x^2 \geq 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, maka daerah nilai fungsi f adalah $R_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ atau $R_f = [0, +\infty)$. Berikut sketsa grafiknya.

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$f(x) = x^2$	$\cdots$	4	1	0	1	4	$\cdots$

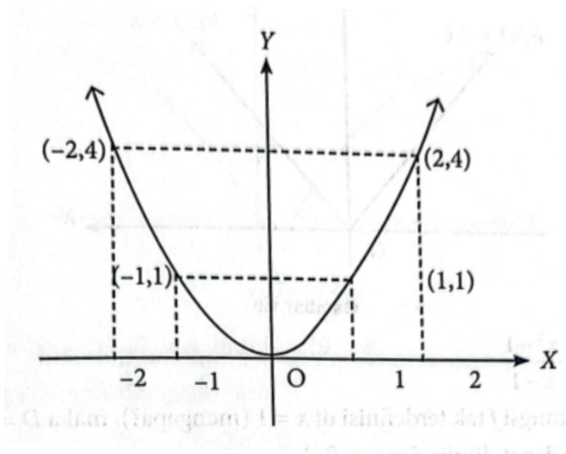


Figure 4.6:

b) $g(x) = x + 1, \quad D_g = \mathbb{R},$ dan $R_g = \mathbb{R}$.

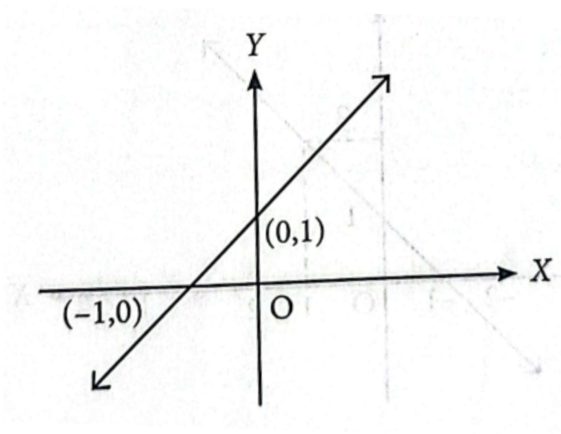


Figure 4.7:

c) $h(x) = |x|, \quad D_h = \mathbb{R}$.
Karena $h(x) = |x| \geq 0$ maka $R_h = [0, +\infty)$. Fungsi h dapat dituliskan

$$h(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

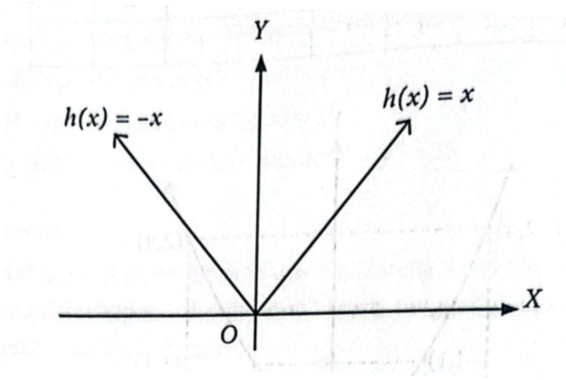


Figure 4.8:

d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ Karena fungsi f tak terdefinisi di $x = 1$ (*mengapa?*), maka $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$. Fungsi f dapat ditulis dengan $f(x) = x + 1, \quad x \neq 1$ (*mengapa?*), sehingga diperoleh $R_f = \mathbb{R} - \{2\}$.

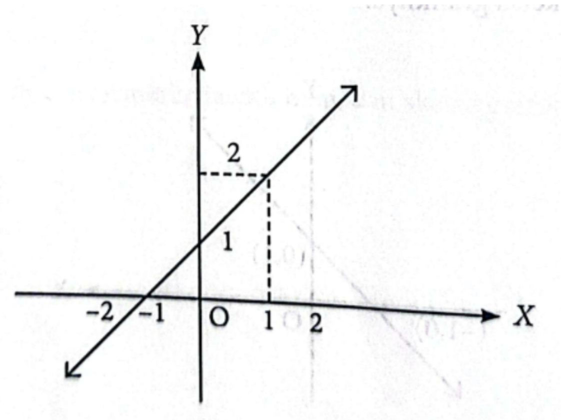


Figure 4.9:

e) $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ $D_g = \{x \mid x^2 - 2x \geq 0\} = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ (*mengapa?*) Karena $g(0) = g(2) = 0$ dan $g(x) > 0$ untuk setiap $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, maka $R_g = [0, +\infty)$.

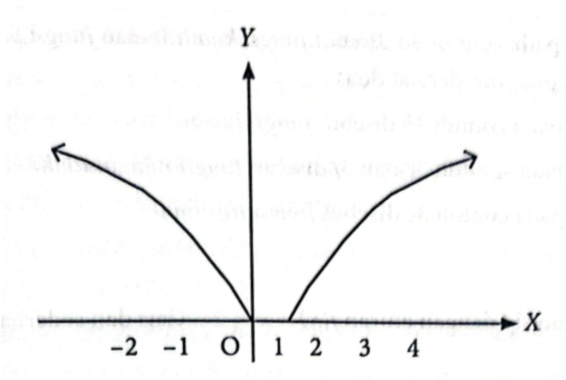


Figure 4.10:

f) $h(x) = |x^2 - 2x|, \quad D_h = \mathbb{R},$ dan $R_h = [0, +\infty)$.

Fungsi h dapat disajikan oleh:

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x^2 - 2x \geq 0 \\ -(x^2 - 2x), & x^2 - 2x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - 2x, & x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \\ -x^2 + 2x, & x \in (0, 2) \end{cases}$$

Sketsa grafiknya:

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
h(x) = —x$^2 - 2x$|	$\cdots$	4	1	0	1	4	$\cdots$

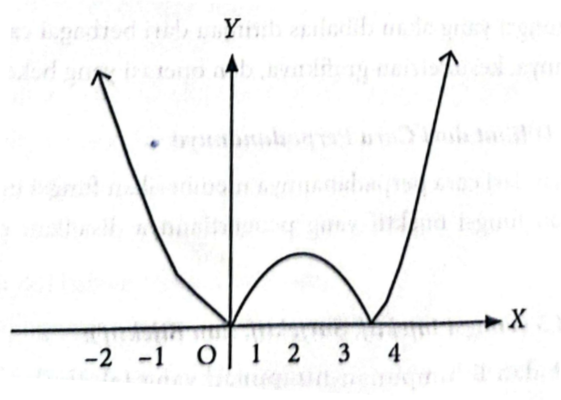


Figure 4.11:

Catatan :

1. Fungsi pada contoh 3a disebut *fungsi kuadrat* atau *fungsi pangkat dua* (fungsi polinom derajat dua).

2. Fungsi pada contoh 3b disebut *fungsi linear.*

3. Fungsi pada contoh 3c disebut *fungsi nilai mutlak.*

4. Fungsi pada contoh 3d disebut *fungsi rasional.*

Contoh 16:

Diberikan fungsi f dengan aturan $f(x) = x^2 - 2x$. Cari dan sederhanakan:

1. $f(4)$

2. $f(4 + h)$

3. $f(4 + h) - f(4)$

4. $\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$

Penyelesaian:

1. $f(4) = 4^2 - 2(4) = 16 - 8 = 8$
2. $f(4+h) = (4+h)^2 - 2(4+h) = 16 + 8h + h^2 - 8 - 2h = 8 + 8h + h^2$
3. $f(4+h) - f(4) = (8 + 8h + h^2) - 8 = 8h + h^2$
4. $\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \frac{8h+h^2}{h} = 8 + h$

4.2 Jenis-Jenis Fungsi dan Grafiknya

Jenis-jenis fungsi yang akan dibahas ditinjau dari berbagai cara, yaitu cara perpadanannya, kecekungan grafiknya, dan operasi yang bekerja padanya.

4.2.1 Fungsi Dilihat dari Cara Perpadaannya

Fungsi dilihat dari cara perpadanannya memberikan klasifikasi fungsi injektif, surjektif, dan bijektif. Fungsi bijektif yang pengertiannya disajikan pada definisi berikut.

Definisi (Fungsi Injektif, Surjektif, dan Bijektif)

Misalkan A dan B himpunan-himpunan yang tak kosong dan fungsi $f : A \to B$.

1. f dikatakan **fungsi satu-satu** ditulis $f : A \xrightarrow{1-1} B$ apabila $x_1, x_2 \in A$ dan $f(x_1) = f(x_2)$, maka $x_1 = x_2$, atau ekuivalen dengan pernyataan:

   Apabila $x_1, x_2 \in A$ dan $x_1 \neq x_2$, maka $f(x_1) \neq f(x_2)$. Fungsi satu-satu juga disebut **fungsi injektif**.

2. f dikatakan **fungsi pada** (onto) ditulis $f : A \xrightarrow{\text{pada}} B$, apabila $R_f = B$. Fungsi ini disebut juga **fungsi surjektif**.

3. Jika fungsi f tidak pada, maka f dikatakan fungsi **"ke dalam"** (into) dan ditulis $f : A \xrightarrow{\text{kedalam}} B$. Jadi, pada kasus ini $B \neq R_f$ dalam kasus ini $R_f \subset B$

4. Jika fungsi f satu-satu dan pada, maka f dikatakan suatu **korespondensi satu-satu** antara A dan B. Fungsi ini disebut juga **fungsi bijektif**.

Catatan:

Pada fungsi $f : A \to B$, jika B selalu dipandang sebagai $\mathbb{R}$, maka f selalu merupakan fungsi pada.

Contoh 17:

Periksa di antara fungsi-fungsi berikut, mana yang merupakan fungsi satu-satu.

a) $f(x) = x^3$

b) $g(x) = x^2 - x + 1$

Penyelesaian :

a) Ambil $x_1, x_2 \in D_f$ dengan $f(x_1) = f(x_2)$, akan dibuktikan bahwa $x_1 = x_2$. Karena $f(x_1) \neq f(x_2)$, maka

$$x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1^3 - x_2^3 = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = 0$$

Diperoleh,

$$(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

atau

$$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

Jadi, terbukti bahwa f fungsi satu-satu.

b) $g(x) = x^2 - 1$.
Ambil $1 \in D_g$ dan $-1 \in D_g$. Akan tetapi

$$g(1) = 0 = g(-1).$$

Ini menunjukkan bahwa fungsi g bukan fungsi satu-satu.

4.2.2 Fungsi Dilihat dari Kesimetrian Grafiknya

Fungsi dilihat dari cara kesimetrian grafiknya memberikan fungsi genap dan fungsi ganjil. Grafik fungsi genap simetri terhadap sumbu Y dan grafik fungsi ganjil simetri terhadap titik O. Pengertian kedua fungsi tersebut disajikan pada definisi berikut ini.

Definisi (Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil)

Diberikan f suatu fungsi sebarang.

1. f dikatakan fungsi genap apabila $f(-x) = f(x)$ untuk setiap $x \in D_f$.

2. f dikatakan fungsi ganjil apabila $f(-x) = -f(x)$ untuk setiap $x \in D_f$.

Contoh 18 :

Periksalah apakah fungsi-fungsi berikut merupakan fungsi genap, ganjil, atau tidak keduanya.

a) $f(x) = x^2 - 2$.

b) $g(x) = x$.

c) $h(x) = |x + 1|$.

d) $s(x) = x^3 - x$.

Penyelesaian :

a) Perhatikan bahwa $f(x) = x^2 - 2$, dan

$$f(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 = f(x).$$

Dengan demikian, f adalah fungsi genap.

b) Perhatikan bahwa $g(x) = x$ dan

$$g(-x) = -x = -g(x).$$

Dengan demikian, g adalah fungsi ganjil.

c) Diketahui

$$h(x) = |x+1|$$
$$= \begin{cases} x+1, & x+1 \geq 0 \\ -(x+1), & x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -x-1, & x < -1 \end{cases}$$

Selanjutnya, untuk $h(-x)$,

$$h(-x) = \begin{cases} -x+1, & -x \geq -1 \\ -(-x-1), & -x < -1 \end{cases} = \begin{cases} -x+1, & x \leq 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$$

Jadi, $h(-x) \neq h(x)$ dan $h(-x) \neq -h(x)$.

Ini berarti h bukan fungsi genap dan bukan fungsi ganjil.

d) Karena:

$$s(x) = x^3 - x, \quad \text{dan} \quad s(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -s(x)$$

maka s adalah fungsi ganjil.

Silakan gambar fungsi genap dan fungsi ganjil pada contoh tersebut, kemudian perhatikan kesimetrian gambar tersebut. Berdasarkan grafik-grafik fungsi tersebut dapat disimpulkan bahwa:

(a) Grafik fungsi genap simetri terhadap sumbu Y.

(b) Grafik fungsi ganjil simetri terhadap titik O.

4.2.3 Fungsi Dilihat Dari Operasi Yang Bekerja Padanya

Fungsi dapat diklasifikasikan berdasarkan operasi yang bekerja di dalamnya, yang membagi fungsi menjadi fungsi aljabar dan fungsi transenden. Dalam bab ini, fungsi transenden seperti eksponen, logaritma, dan hiperbolik belum akan dibahas. Fokus utama hanya pada fungsi trigonometri dan invers trigonometri.

Fungsi aljabar merupakan fungsi yang diperoleh dari variabel x melalui berbagai operasi aljabar dasar, seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, dan operasi akar. Berikut adalah contoh fungsi aljabar yang menggunakan operasi tersebut:

$$f(x) = \frac{(x+2)^2\sqrt{x}}{x^3 - \sqrt{x^2+1}}$$

Secara umum, fungsi aljabar terdiri dari:

1. **Fungsi polinom (suku banyak)** dengan bentuk umum:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

   Jika $a_n \neq 0$, maka $P_n(x)$ adalah polinom berderajat n.

2. **Fungsi rasional** dengan bentuk umum:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{P_m(x)}$$

   di mana $P_n(x)$ dan $P_m(x)$ masing-masing merupakan polinom.

3. **Fungsi irasional** adalah fungsi yang mengandung akar dari fungsi rasional.

Selanjutnya, fungsi transenden adalah fungsi yang bukan fungsi aljabar. Contohnya meliputi:

- Fungsi trigonometri,
- Fungsi siklometri (invers trigonometri),
- Fungsi eksponen,
- Fungsi logaritma,
- Fungsi hiperbolik.

Fungsi Khusus

Di antara fungsi-fungsi yang sering digunakan, terdapat beberapa fungsi yang bersifat khusus. Salah satu contohnya adalah fungsi bilangan bulat terbesar, yang akan didefinisikan pada bagian berikutnya.

Definisi 1.4.5 (Bilangan Bulat Terbesar)

Bilangan bulat terbesar dari $x \in \mathbb{R}$, ditulis $\lfloor x \rfloor$, didefinisikan sebagai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x:

$$\lfloor x \rfloor = k \quad \text{jika dan hanya jika} \quad k \leq x < k+1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Contoh:

$$\lfloor 3.1 \rfloor = 3, \quad \lfloor -3.1 \rfloor = -4, \quad \text{dan} \quad \lfloor 3 \rfloor = 3$$

Definisi (Fungsi Bilangan Bulat Terbesar/Floor Function)

Fungsi bilangan bulat terbesar adalah fungsi yang memuat bentuk $\lfloor x \rfloor$ atau $[x]$ atau $[|x|]$.

Contoh:

Gambar sketsa grafik fungsi $f(x) = \lfloor x \rfloor$, untuk $x \in \mathbb{R}$.

Penyelesaian:

Pada kasus ini, $D_f = \mathbb{R}$ dan $R_f = \mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat. Fungsi bilangan bulat terbesar dapat ditulis dalam bentuk:

$$f(x) = \lfloor x \rfloor = \begin{cases} -2, & -2 \leq x < -1 \\ -1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \\ \vdots \end{cases}$$

Bilangan Bulat Terkecil (Fungsi Atap)

Selain bilangan bulat terbesar, terdapat juga bilangan bulat terkecil dari x, yang disebut **fungsi atap** dan ditulis $\lceil x \rceil$. Bilangan bulat terkecil dari $x \in \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x:

$$\lceil x \rceil = k \quad \text{jika dan hanya jika} \quad k - 1 < x \leq k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Contoh:

$$\lceil 3.1 \rceil = 4, \quad \lceil -3.1 \rceil = -3, \quad \text{dan} \quad \lceil 3 \rceil = 3$$

Fungsi atap $\lceil x \rceil$ juga merupakan fungsi langkah yang dapat dituliskan sebagai:

$$g(x) = \lceil x \rceil = \begin{cases} -1, & -1 < x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \leq 2 \\ 2, & 2 < x \leq 3 \\ \vdots \end{cases}$$

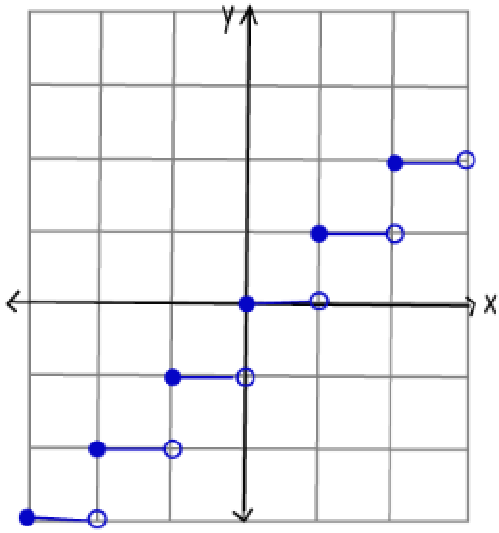


Figure 4.12:

4.3 Operasi Pada Fungsi

Pada operasi pada fungsi akan dibicarakan bagaimana membangun suatu fungsi baru dari dua fungsi yang diberikan dan syarat apakah yang harus dipenuhi agar fungsi baru tersebut terdefinisi. Suatu cara yang sederhana untuk membangun suatu fungsi baru adalah dengan menjumlah, mengurangi, mengalikan, membagi, dan memangkatkan fungsi-fungsi yang diketahui.

1. Jumlah, Selisih, Hasil Kali, Hasil Bagi, dan Pangkat

Perhatikan fungsi f dan g yang didefinisikan dengan aturan:

$$f(x) = \frac{2x}{x-1}$$

dan

$$g(x) = \sqrt{1-x}$$

Daerah asal fungsi f dan g berturut-turut adalah:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad D_g = (-\infty, 1].$$

Dari fungsi f dan g dapat dibentuk fungsi baru dengan aturan:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{2x}{x-1} + \sqrt{1-x}.$$

Dalam hal ini, harus hati-hati dalam menentukan daerah asal fungsi $f+g$. Jelas bahwa x harus berupa sebuah bilangan di mana fungsi f dan g berlaku. Dengan kata lain, bahwa x harus anggota $D_f \cap D_g$. Oleh karena itu, $f+g$ terdefinisi jika $D_f \cap D_g \neq \varnothing$. Jadi himpunan $D_f \cap D_g \neq \varnothing$ merupakan syarat perlu agar fungsi $f+g$ ada.

Definisi umlah, Selisih, Hasil Kali, Hasil Bagi, dan Pangkat pada fungsi

Diberikan f, g adalah fungsi dan c suatu konstanta. Fungsi-fungsi $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, dan $\frac{f}{g}$ untuk setiap $x \in D_f \cap D_g$ didefinisikan sebagai:

a. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

b. $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

c. $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$

d. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$

e. $(f^c)(x) = (f(x))^c$

Contoh Soal :

Misalkan fungsi f dan g diberikan oleh:

$$f(x) = x \quad \text{dan} \quad g(x) = \sqrt{x-1}.$$

a.) Jika $h = f+g$, tentukan rumus untuk h, tentukan pula daerah asal dan daerah nilainya.

b.) Jika $H = f \cdot g$, tentukan rumus untuk H, kemudian tentukan pula daerah asal dan daerah nilainya.

Penyelesaian :

a) Berdasarkan definisi jumlah dari fungsi di atas, diperoleh:

$$h(x) = (f+g)(x) = x + \sqrt{x-1}.$$

Daerah asalnya adalah:

$$D_f = \mathbb{R}, \quad D_g = [1, \infty) \Rightarrow D_h = D_f \cap D_g = [1, \infty).$$

Kemudian, karena $h(x) = x + \sqrt{x-1}$ untuk setiap $x \in [1, \infty)$, maka:

$$R_h = [1, \infty).$$

b) Berdasarkan definisi jumlah dari fungsi tersebut, diperoleh

$$H(x) = (f \oplus g)(x) = f(x) \cdot g(x) = x\sqrt{x-1}$$

dengan $D_h = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap [1, +\infty) = [1, +\infty)$.

Kemudian, karena $H(1) = 0$ dan $h(x) > 0$ untuk setiap $x \in [1, +\infty)$, maka $R_h = [0, +\infty)$.

Contoh Soal :

Diketahui fungsi f dan g yang didefinisikan dengan aturan

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$$

dan

$$g(x) = \begin{cases} -x, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

Tentukan $f + g$.

Penyelesaian :

Fungsi f dan g bisa ditulis dengan bentuk:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$$

dan

$$g(x) = \begin{cases} -x, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

Berdasarkan definisi jumlah dari fungsi, diperoleh

$$(f+g)(x) = \begin{cases} -1 - x, & x \leq 0 \\ -1 - x, & 0 < x < 1 \\ -1 + x^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

Catatan: Grafik fungsi dapat bergeser. Perhatikan fungsi f, g, dan h dengan aturan berturut-turut $h(x) = (x-1)^2 - 2$. Sketsa grafik fungsi f, g, dan h adalah sebagai berikut:

x	$f(x)$	$g(x)$	$(x-1)^2 - 2$
-2	-2	2	1
-1	-1	1	-1
0	0	0	-2
1	-1	-1	-1
2	-1	4	2

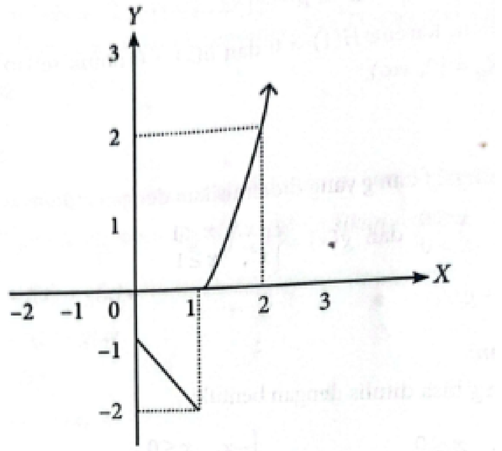


Figure 4.13:

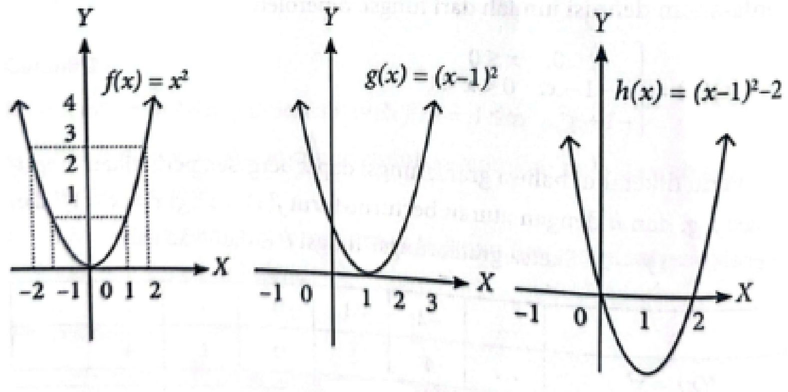


Figure 4.15:

Dari Gambar 4.15 terlihat bahwa grafik g diperoleh dari grafik f dengan *menggeser ke kanan* sejauh 1 satuan, dan grafik h diperoleh dengan *menggeser grafik g ke bawah* sejauh 2 satuan. Secara umum, pergeseran grafik fungsi dapat dirumuskan sebagai berikut.

Aturan Pergeseran Grafik

Diberikan grafik fungsi f dan suatu bilangan positif a, maka:

1. Grafik fungsi $y = f(x - a)$ diperoleh dengan **menggeser grafik f ke kanan** sejauh a satuan.

2. Grafik fungsi $y = f(x + a)$ diperoleh dengan **menggeser grafik f ke kiri** sejauh a satuan.

3. Grafik fungsi $y = f(x) + a$ diperoleh dengan **menggeser grafik f ke atas** sejauh a satuan.

4. Grafik fungsi $y = f(x) - a$ diperoleh dengan **menggeser grafik f ke bawah** sejauh a satuan.

4.4 Fungsi Komposisi Dan Inversnya

Konsep peta dan prapeta suatu fungsi adalah menjadi dasar untuk memahami konsep fungsi komposisi. Agar lebih memahami konsep tersebut perhatikan contoh berikut.

Contoh 23

Perhatikan fungsi f dengan aturan $f(x) = x^2$. Nilai fungsi f di $x = 2$, yaitu $f(2) = 4$. Nilai $f(2) = 4$ disebut **peta** dari $x = 2$ dan himpunan

$$f^{-1}(4) = \{-2, 2\}$$

disebut **prapeta** dari $y = 4$. Situasi tersebut diperlihatkan pada Gambar 4.15.

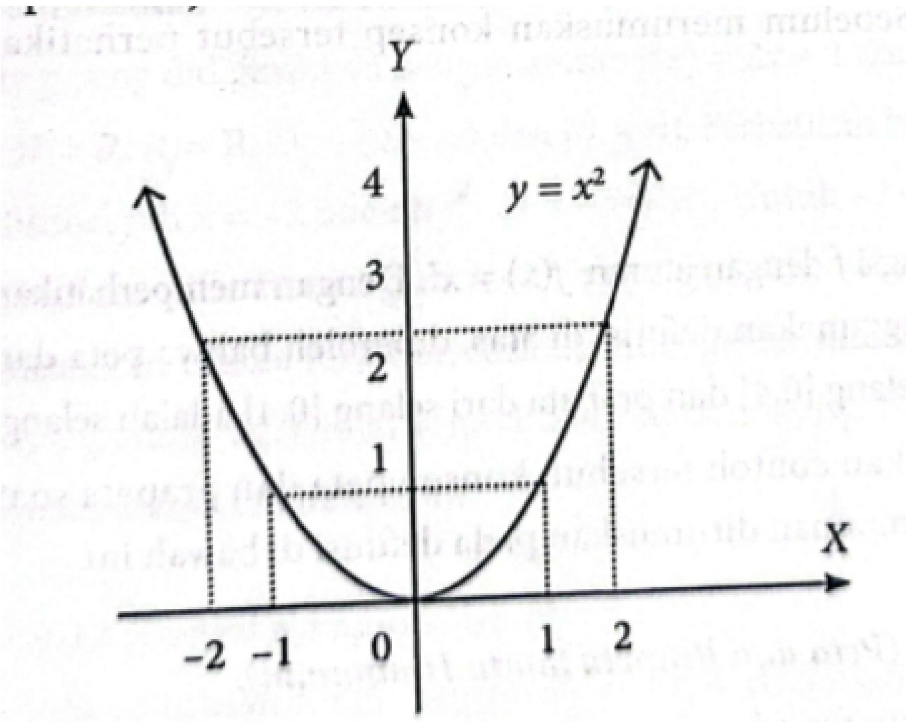


Figure 4.16:

Berdasarkan contoh tersebut, konsep peta dan prapeta suatu fungsi dirumuskan pada definisi berikut ini.

4.4.1 Definisi Peta dan Prapeta

Diberikan $y = f(x)$ suatu fungsi.

a) Jika $x \in D_f$, maka $f(x)$ disebut peta dari x.

b) Jika $y \in R_f$, maka himpunan $\{x \in D_f \mid f(x) = y\}$ disebut prapeta dari y, ditulis $f^{-1}(y)$.

Situasi definisi di atas disajikan pada Gambar 1.17 berikut.

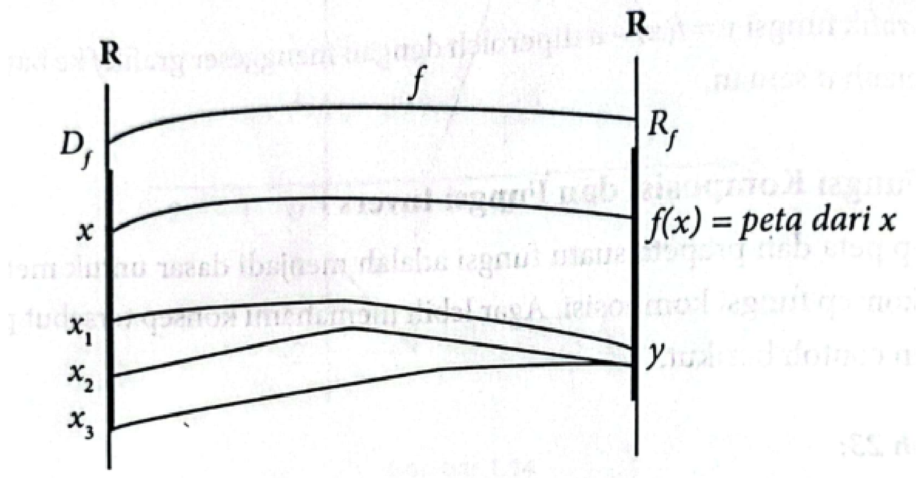


Figure 4.17:

Sekarang bagaimana konsep peta dan prapeta suatu fungsi pada suatu himpunan. Sebelum merumuskan konsep tersebut perhatikan contoh berikut.

Contoh Soal :

Diberikan fungsi f dengan aturan $f(x) = x^2$. Dengan memperhatikan Gambar 1.17 dan menggunakan definisi di atas, diperoleh bahwa peta dari interval $[0, 2]$ adalah selang $[0, 4]$ dan prapeta dari selang $[0, 4]$ adalah selang $[-2, 2]$.

Berdasarkan contoh tersebut, konsep peta dan prapeta suatu fungsi pada suatu himpunan dirumuskan pada definisi di bawah ini.

Definisi Peta dan Prapeta Suatu Himpunan

Misalkan f suatu fungsi.

1. Jika $A \subset D_f$, maka himpunan $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ disebut *peta dari himpunan* A.

2. Jika $B \subseteq R$, maka himpunan $f^{-1}(B) = \{x \in D_f \mid f(x) \in B\}$ disebut *peta dari himpunan* B.

Situasi definisi tersebut dapat digambarkan sebagai berikut.

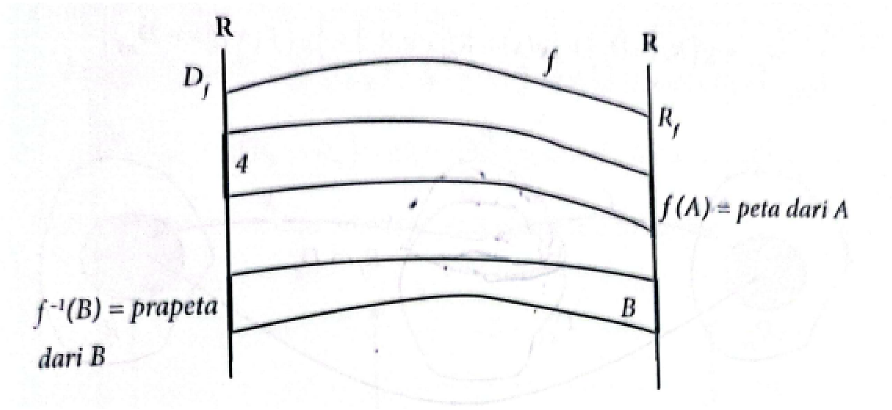


Figure 4.18:

Catatan :

1. Peta dari D_f adalah R_f
2. Prapeta dari R_f adalah D_f

Sebelum mendefinisikan fungsi komposisi, terlebih dahulu perhatikan fungsi f dan g yang didefinisikan dengan aturan $f(x) = 2x + 1$ dan $g(x) = \sqrt{x}$. Diperoleh $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \mathbb{R}$, $D_g = [0, +\infty)$ dan $R_g = [0, +\infty)$. Perhatikan bahwa $-2 \in D_f$ dan nilai fungsi f di $x = -2$ adalah $f(-2) = -3 \in R_f$. Untuk $-2 \in D_f$ ini dapat ditentukan nilai fungsi g di $f(-2)$, yaitu $g(f(-2))$, sebab $f(-2) = -3 \notin D_g$. Berdasarkan uraian tersebut, timbul suatu pertanyaan syarat apakah yang harus dipenuhi agar nilai $g(f(x))$ ada untuk $x \in D_f$. Syarat tersebut disajikan pada definisi di bawah ini.

4.4.2 Definisi Fungsi Komposisi $g \circ f$:

Misalkan f dan g adalah fungsi dengan $R_f \cap D_g \neq \varnothing$. Terdapat fungsi dari himpunan bagian D_f ke himpunan bagian R_g. Fungsi ini disebut komposisi dari f dan g, ditulis $g \circ f$ (dibaca g bundaran f) dan persamaannya ditentukan oleh

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Daerah asal $g \circ f$ adalah prapeta $R_f \cap D_g$ terhadap f, ditulis :

$$D_{g \circ f} = f^{-1}(R_f \cap D_g) = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

Daerah nilai $g \circ f$ adalah peta terhadap g, ditulis :

$$R_{g \circ f} = g(R_f \cap D_g) = \{g(x) \in R_g \mid x \in R_f\} = \{g(f(x)) \mid x \in D_{g \circ f}\}$$

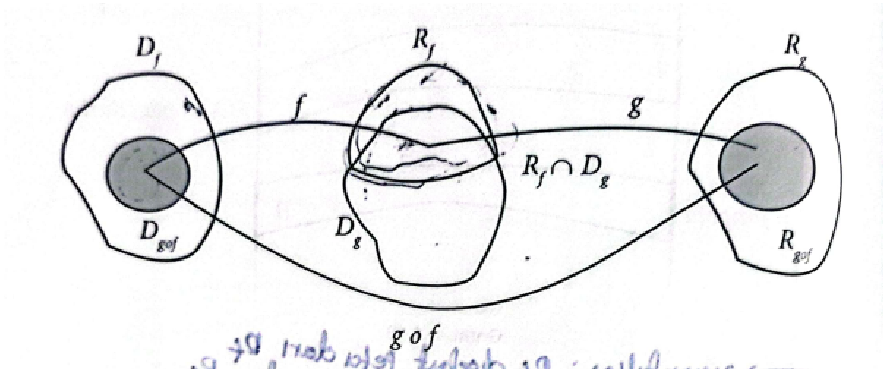


Figure 4.19: Gambaran untuk fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$

Contoh Soal:

Diberikan f dan g adalah fungsi-fungsi yang diberikan berturut-turut oleh $f(x) = x - 2$ dan $g(x) = x^2 - 1$. Tentukan fungsi $g \circ f$ jika ada, selanjutnya tentukan daerah asal dan daerah nilainya.

Penyelesaian :

Perhatikan bahwa $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$, dan $R_g = [-1, +\infty)$. Karena $R_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \neq \varnothing$, maka berdasarkan definisi fungsi komposisi di atas, komposisi $g \circ f$ ada dengan aturan

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 2) = (x - 2)^2 - 1$$

Daerah asal:

$$D_{g \circ f} = f^{-1}(R_f \cap D_g) = f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

Daerah nilai:

$$R_{g \circ f} = g(R_f \cap D_g) = g(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R}) = [-1, +\infty)$$

Contoh Soal :

Diberikan fungsi f dan g dengan aturan berturut-turut $f(x) = 1 - x^2$ dan $g(x) = \sqrt{x}$. Tentukan $g \circ f$ jika ada, selanjutnya tentukan daerah asal dan daerah nilainya.

Penyelesaian :

Perhatikan bahwa $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = (-\infty, 1]$, $D_g = [0, +\infty)$, dan $R_g = [0, +\infty)$. Kemudian, karena

$$R_f \cap R_g = (-\infty, 1] \cap [0, +\infty) = [0, 1] \neq \varnothing$$

maka fungsi komposisi $g \circ f$ ada dengan aturan

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1 - x^2) = \sqrt{1 - x^2}$$

dengan

$$D_{g\circ f} = f^{-1}(R_f \cap D_g) = f^{-1}([0,1]) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - x^2 \geq 0\} = [-1,1]$$

dan

$$R_{g\circ f} = g(R_f \cap D_g) = g([0,1]) = \{g(x) = \sqrt{x} \mid 0 \leq x \leq 1\} = [0,1]$$

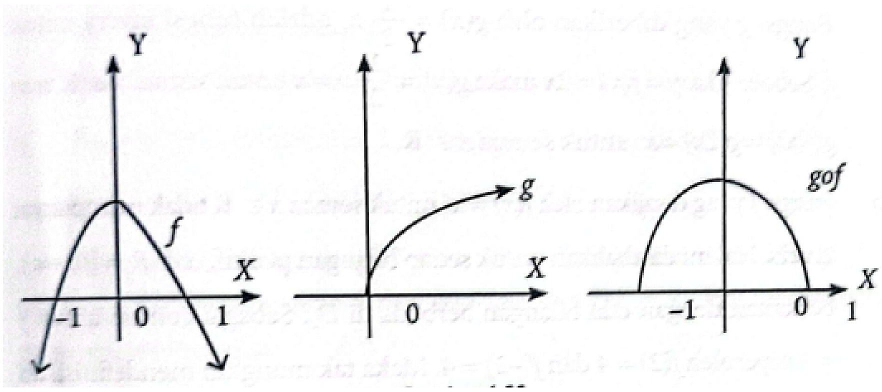


Figure 4.20:

Contoh Beberapa Gambaran Fungsi Komposisi

Daftar Berikut ini memperlihatkan berbagai fungsi yang dapat dikembalikan sebagai komposisi 2 fungsi.

Fungsi Komposisi $Y = (g \circ f)(x)$	$y = g(x)$	$y = f(x)$
$y = (x^2 + 7)^{\frac{2}{3}}$	$g(x) = x^{\frac{2}{3}}$	$f(x) = x + 7$
$y = 4 + \sqrt{2 + x^2}$	$g(x) = 4 + \sqrt{x}$	$f(x) = 2 + x^2$
$y = 4 + \sqrt{2 + x^2}$	$g(x) = 4 + x$	$f(x) = \sqrt{2 + x^2}$
$y = \dfrac{8}{3 + x^4}$	$g(x) = \dfrac{8}{\lvert x\rvert}$	$f(x) = 3 + x^4$
$y = \dfrac{8}{3 + x^4}$	$g(x) = \dfrac{8}{x}$	$f(x) = \lvert 3 + x^4\rvert$

Dengan cara yang sama, dapat didefinisikan fungsi komposisi $f \circ g$. Sebagai latihan silakan tuliskan definisi fungsi komposisi tersebut, kemudian carilah fungsi komposisi $f \circ g$ untuk fungsi pada contoh 3 dan contoh 4.

Pengantar konsep komposisi dua fungsi digunakan dalam mendefinisikan fungsi invers. Sebelum mendefinisikan fungsi invers, perlu diingat kembali konsep fungsi satu-satu. Untuk itu perhatikan contoh berikut.

Contoh Soal :

a) Misalkan f suatu fungsi yang diberikan oleh $f(x) = 2x$ untuk $x \in \mathbb{R}$. Fungsi g yang diberikan oleh $g(x) = \frac{1}{2}x$ adalah fungsi invers untuk f. Sebab: Jika

$y = f(x) = 2x$ maka $g(y) = \frac{1}{2}y$

$$g(f(x)) = g(2x) = \frac{1}{2}(2x) = x \quad \text{untuk semua } x \in \mathbb{R}$$

atau

$$f(g(x)) = f\left(\frac{1}{2}x\right) = 2 \times \frac{1}{2}x = x \quad \text{untuk semua } x \in \mathbb{R}$$

b) Fungsi yang didefinisikan oleh $f(x) = x^2$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$ tidak mempunyai invers. Hal ini disebabkan karena setiap bilangan positif, x^2, $R_f = [0, +\infty)$, berkaitan dengan dua bilangan berbeda di D_f. Sebagai contoh untuk $x = 2$ diperoleh $f(2) = 4$ dan $f(-2) = 4$. Maka tak mungkin mendefinisikan g sehingga $g(4) = 2$ dan $g(4) = -2$. Jadi tidak terdapat fungsi g yang memenuhi $g(f(x)) = x$, sehingga $f(x) = x^2$ bukan fungsi satu-satu.

Berdasarkan contoh di atas, dapat dirumuskan definisi fungsi identitas dan fungsi invers yang disajikan di bawah ini.

4.4.3 Definisi Fungsi Identitas

Diberikan f suatu fungsi dari A ke B. Jika $f(x) = x$ untuk setiap $x \in A$, maka f disebut fungsi identitas.

4.4.4 Definisi Fungsi Invers

Misalkan f suatu fungsi dari A ke B. Jika terdapat fungsi g dari B ke A sehingga $g(f(x)) = x$ untuk semua $x \in A$ dan $f(g(x)) = x$ untuk semua $x \in B$, maka g disebut fungsi invers dari f dan ditulis $g = f^{-1}$.

Situasi definisi diatas dapat digambarkan sebagai berikut.

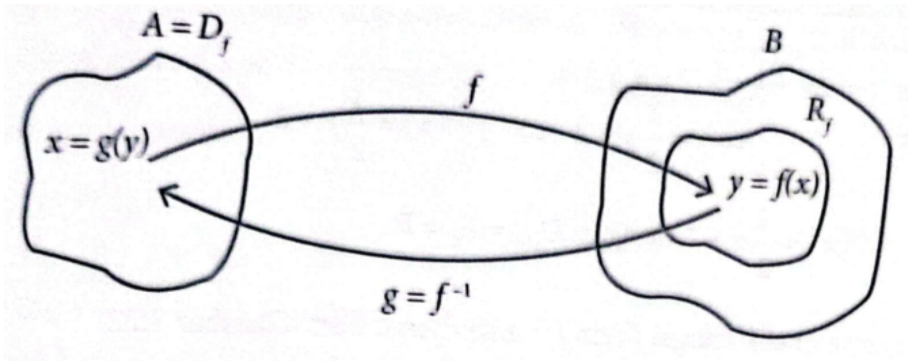


Figure 4.21:

Perlu diperhatikan bahwa:

a. Penulisan f^{-1} menyatakan fungsi invers untuk f, bukan berarti $\frac{1}{f}$.

b. Jika g fungsi invers untuk f, maka $D_g = R_f$, sebab g didefinisikan oleh

$$g(y) = x \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow g(y) = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x).$$

Berdasarkan definisi fungsi invers, dapat disimpulkan bahwa fungsi f^{-1} ada jika fungsi f merupakan fungsi satu-satu dan $D_f = R_f$. Hal ini disajikan pada teorema berikut.

4.4.5 Teorema Keberadaan Fungsi Invers

Jika f fungsi satu-satu, maka

a. fungsi invers f^{-1} ada, dan

b. $D_{f^{-1}} = R_f$.

Contoh Soal :

Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan aturan $f(x) = 2x - 4$. Tentukan fungsi f^{-1} bila ada.

Penyelesaian :

Akan ditunjukkan f sebagai fungsi satu-satu. Ambil sembarang $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ dengan $y_1 = y_2$. Terdapat $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sehingga $f(x_1) = y_1$ dan $f(x_2) = y_2$. Karena

$$f(x_1) = 2x_1 - 4 \quad \text{dan} \quad f(x_2) = 2x_2 - 4,$$

maka jika $f(x_1) = f(x_2)$, diperoleh

$$2x_1 - 4 = 2x_2 - 4.$$

$$2x_1 = 2x_2.$$

$$x_1 = x_2.$$

Sehingga f adalah fungsi satu-satu. Terbukti bahwa f adalah fungsi satu-satu, maka berdasarkan teorema keberadaan fungsi invers, f^{-1} ada. Tulis

$$y = 2x - 4 \Leftrightarrow 2x = y + 4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y + 2 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y + 2.$$

Jadi,

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 2 \quad \text{dengan} \quad D_{f^{-1}} = R_f = \mathbb{R}.$$

Sketsa grafik fungsi f dan f^-1 disajikan dalam gambar berikut.

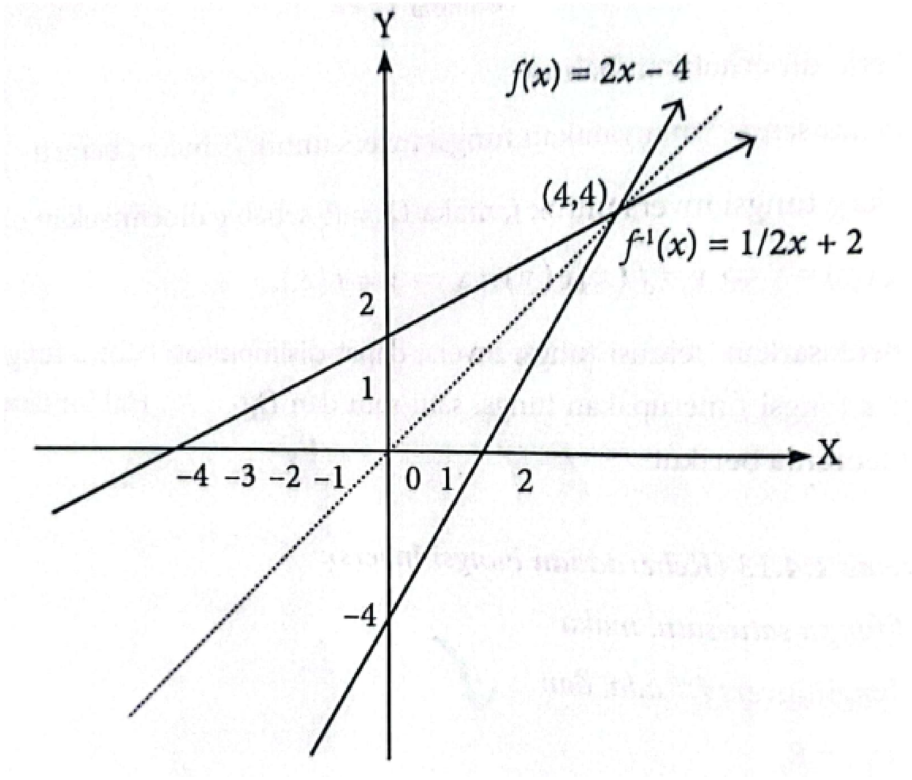


Figure 4.22:

Hubungan grafik fungsi f dan inversnya, f^{-1} dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut: Jika $(a, b) \in f$, maka $(b, a) \in f^{-1}$. Ini berarti setiap titik dari f^{-1} diperoleh dari titik di f dengan melakukan pencerminan terhadap garis $y = x$. Jadi grafik f dan f^{-1} simetris terhadap garis $y = x$ (Lihat Gambar 1.22).

Contoh Soal :

Tentukan f^{-1} (bila ada) jika fungsi f diberikan dengan

$$f(x) = \frac{3x+2}{2x+1}, \quad x \neq -\frac{1}{2}.$$

Penyelesaian :

Akan ditunjukkan bahwa f fungsi satu-satu. Diambil sembarang $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ dengan $y_1 \neq y_2$. Terdapat $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sehingga $f(x_1) = y_1$ dan $f(x_2) = y_2$.

Karena $y_1 = y_2$, maka

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$\frac{3x_1+2}{2x_1+1} = \frac{3x_2+2}{2x_2+1}$$

$$\Leftrightarrow (3x_1+2)(2x_2+1) = (3x_2+2)(2x_1+1)$$

$$\Leftrightarrow 6x_1x_2 + 3x_1 + 4x_2 + 2 = 6x_1x_2 + 4x_1 + 3x_2 + 2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Ini menunjukkan bahwa f fungsi satu-satu. Oleh karena itu f^{-1} ada.
Tulis

$$y = \frac{3x+2}{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow 2xy + y = 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2xy - 3x = 2 - y$$

$$\Leftrightarrow x(2y-3) = 2 - y$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2-y}{2y-3}$$

Jadi,

$$f^{-1}(x) = \frac{2-x}{2x-3}, \quad x \neq \frac{1}{2}$$

Catatan :

Suatu fungsi f dapat dibuat satu-satu dengan cara membatasi daerah asalnya, sehingga fungsi tersebut mempunyai invers.

Contoh :

Perhatikan fungsi dengan aturan $f(x) = x^2$ yang terdefinisi pada $\mathbb{R}$. Fungsi ini bukan satu-satu. Tetapi dengan membatasi daerah asalnya pada interval $(0, \infty)$ atau interval $(-\infty, 0)$, fungsi $f(x)$ mempunyai fungsi invers. Pada selang $(0, \infty)$, invers fungsi f adalah:

$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{y}, \quad \text{maka } x = f^{-1}(y)$$

Jadi, diperoleh

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$

Pada selang $(-\infty, 0)$, invers fungsi f adalah:

$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = -\sqrt{y}, \quad \text{maka } x = f^{-1}(y)$$

Jadi, diperoleh

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$

Perhatikan grafik fungsi pada setiap kasus.

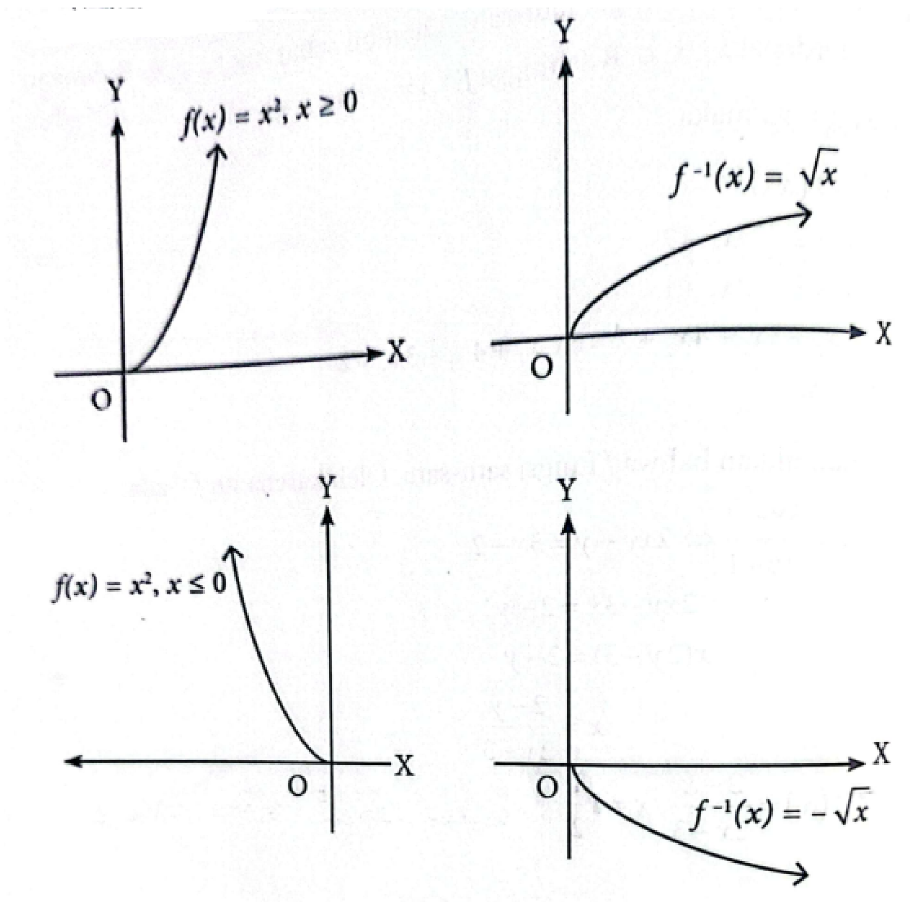


Figure 4.23:

4.5 Latihan Soal

1. Selidiki apakah persamaan berikut ini merupakan suatu fungsi atau bukan? Berikan alasan yang mendasari jawaban Anda.

   (a) $x^2 + y^2 = 9$

   (b) $xy + y + 3x = 4$

   (c) $x = \sqrt{3y + 1}$

   (d) $\frac{3x}{y+1} = y$

2. Cari dan sederhanakanlah nilai $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ jika:

   (a) $f(x) = 2x^2 - 1$

   (b) $f(x) = \frac{3}{x-2}$

   (c) $f(x) = \frac{x}{x+4}$

3. Tentukan daerah asal dan daerah hasil masing-masing fungsi berikut.

   (a) $f(x) = \sqrt{-2x + 3}$

(b) $G(x) = \frac{x+1}{x-2}$

(c) $H(x) = \frac{2}{x^2-4}$

(d) $F(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

(e) $g(x) = \sin x + 3\cos x$

4. Selidiki apakah fungsi yang diberikan genap, ganjil, atau tidak keduanya. Kemudian, sketsa grafiknya.

   (a) $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

   (b) $G(x) = x^3 + x$

   (c) $H(x) = x^4 - x^2$

   (d) $h(x) = -|2x - 1|$

   (e) $g(x) = \begin{cases} x, & \text{jika } x \leq 0 \\ |x|, & \text{jika } 0 < x < 2 \\ 2x - 1, & \text{jika } x \geq 2 \end{cases}$

5. Sebuah tabung lingkaran tegak berjari-jari r satuan diletakkan di dalam sebuah bola yang berjari-jari $2r$ satuan. Cari rumus volume tabung, dinyatakan dalam $V(r)$.

6. Diketahui f adalah suatu fungsi dengan daerah asal bilangan asli $\mathbb{N}$, dan memenuhi:

$$f(1) = 3, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = 4, \quad f(4) = 1, \quad f(5) = 5, \quad f(6) = 9.$$

   Sejauh ditemukan polanya, tuliskan rumus untuk $f(n)$ dan tentukan daerah hasilnya.

7. Daerah hasil dari fungsi $f(n)$ adalah angka ke-n pada deret desimal $\sqrt{2} = 1.4142135\ldots$. Manakah dari fungsi-fungsi berikut yang memenuhi $f(n) = x$?

$$f(x) = \lfloor 10^x \sqrt{2} \rfloor - 10\lfloor 10^{x-1}\sqrt{2} \rfloor$$

8. Diketahui fungsi $f(x)$ dan $g(x)$, tentukan:

   (a) Peta dari interval $[a]$

   (b) Prapeta dari interval $[a, b]$

9. Diketahui fungsi $f(x) = x^2 + x$ dan $g(x) = x^3$. Carilah nilai fungsi berikut:

   (a) $(g \circ f)(x)$

   (b) $(f \circ g)(x)$

   (c) $(g \circ f)(2)$

   (d) $(f \circ g)(1)$

10. Jika $f(x) = x - 1$ dan $g(x) = \frac{2}{x}$, cari rumus-rumus yang berikut dan tentukan daerah asalnya.

    (a) $(f \circ g)(x)$
    (b) $(g \circ f)(x)$
    (c) $(f \circ f)(x)$
    (d) $(g \circ g)(x)$

11. Jika
    $$f(x) = \sqrt{x} - 1 \quad \text{dan} \quad g(x) = \frac{2}{x},$$
    cari rumus-rumus yang berikut dan tentukan daerah asalnya.

    (a) $(f \circ g)(x)$
    (b) $(g \circ f)(x)$
    (c) $(g \circ g)(x)$

12. Carilah fungsi f dan g sehingga $F = g \circ f$.

    (a) $F(x) = (x^2 + 3)^7$
    (b) $F(x) = (x^2 + x)^7$
    (c) $F(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$
    (d) $F(x) = \log(x^2 + 3x)$

13. Gambar grafik setiap fungsi berikut.

    (a) $f(x) = |2x| + 1$
    (b) $f(x) = |2x + 1|$

14. Sketsa grafik fungsi f dengan menggunakan pergeseran.

    (a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$
    (b) $f(x) = (x - 3)^2 - 4$
    (c) $f(x) = |x + 2| - 3$

    Diketahui $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Buktikan bahwa $f(f^{-1}(x)) = x$ dengan $ad - bc \neq 0$ dan $x \neq -\frac{d}{c}$.

15. Diketahui $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Buktikan bahwa $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

16. Selidiki apakah fungsi berikut mempunyai fungsi invers. Kemudian gambarkan fungsi asal dan fungsi inversnya dalam suatu sistem koordinat.

    (a) $f(x) = 3x + 2$
    (b) $f(x) = x^3 + 4$
    (c) $f(x) = x^2 + 2$

(d) $f(x) = \frac{3x+1}{3x-1}$

17. Batasilah daerah asal fungsi f agar f memiliki invers. Kemudian tentukan $f^{-1}(x)$.

    (a) $f(x) = 2x^2 + x - 4$

18. Misalkan fungsi f dan g mempunyai invers. Jika $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$, buktikan bahwa h mempunyai invers dan $h^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. Kemudian cocokan hasil tersebut untuk $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = 3x + 2$.

Bab 5 - Fungsi Trigonometri Dan Inversnya

5.1 Fungsi Trigonometri

Fungsi trigonometri yang akan dibahas pada pasal ini tidak menggunakan ukuran sudut dalam derajat, tetapi menggunakan ukuran radian. Fungsi trigonometri seperti sin t dengan t adalah bilangan real, bukan sudut. Suatu sudut pada bidang dapat diukur dengan satuan radian. Ukuran radian sebuah sudut didefinisikan pada lingkaran yang pusatnya di titik O dan berjari-jari r satuan.

5.1.1 Definisi Ukuran Radian :

Diberikan t sudut pusat sebuah lingkaran yang berjari-jari r satuan dan s panjang busur di hadapan sudut t. Ukuran radian sudut t didefinisikan sebagai nilai:

$$t = \frac{s}{r}$$

Jika $s = r$, maka sudut t berukuran satu radian. Dengan kata lain yang dimaksud dengan satu radian (ditulis 1 rad) adalah besarnya sudut pusat lingkaran yang berjari-jari r satuan di hadapan busur lingkaran yang panjangnya r satuan. Situasi ini diperlihatkan pada Gambar Berikut.

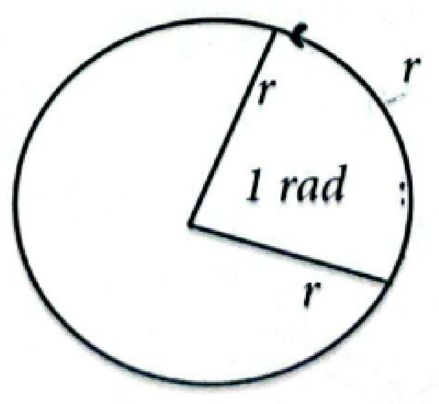


Figure 5.24:

5.1.2 Hubungan antara ukuran derajat dan ukuran radian ditentukan:

Satu keliling lingkaran $= 2\pi$ rad $= 360°$

$$1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} \approx 57,3°$$

$$1° = \frac{2\pi}{360°} \approx 0,0175 \text{ rad}$$

Selanjutnya, untuk mendefinisikan fungsi trigonometri akan didasarkan pada lingkaran satuan. Misalkan C adalah lingkaran satuan $x^2 + y^2 = 1$, A adalah titik $(1,0)$ dan t sebarang bilangan positif.

Jika $t > 0$ terdapat tepat satu titik $P(x,y)$ pada C sehingga panjang busur AP yang diukur menurut arah berlawanan dengan putaran jarum jam dari A sepanjang lingkaran satuan adalah t.

Jika $t = 0$, diperoleh tepat satu titik $P(x,y) = A(1,0)$.

Jika $t < 0$, terdapat tepat satu titik $P(x,y)$ pada C sepanjang busur AP yang diukur searah putaran jarum jam pada C sehingga panjang busur $AP = -t$.

Situasi ini diperlihatkan pada gambar berikut ini.

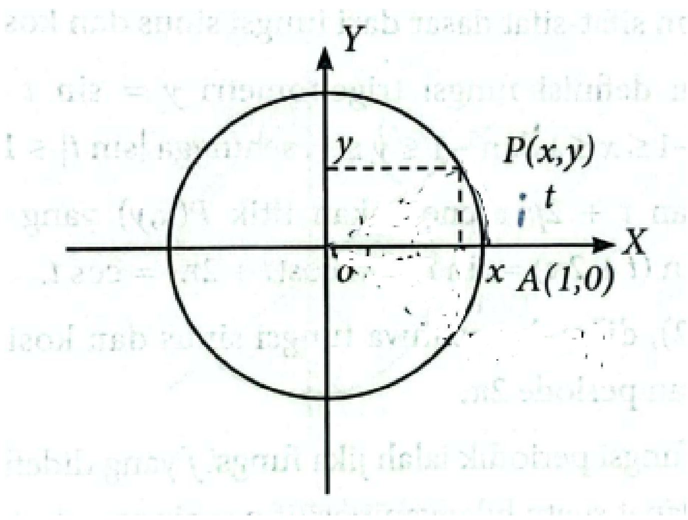


Figure 5.25:

Berdasarkan uraian di atas dapat disimpulkan bahwa untuk sebarang bilangan real t, diperoleh sebuah titik $P(x,y)$ yang tunggal. Selanjutnya akan dibahas pengertian kosinus dan sinus yang disajikan pada definisi berikut.

5.1.3 Definisi Kosinus dan Sinus :

Diberikan bilangan real t yang menyatakan panjang sebuah busur lingkaran satuan dan menentukan titik $P(x,y)$ yang tunggal. Kosinus dan sinus sudut t, ditulis sebagai $\cos t$ dan $\sin t$, didefinisikan sebagai:

$$\cos t = x \quad \text{dan} \quad \sin t = y.$$

Karena setiap panjang busur t menentukan titik $P(x, y)$ yang tunggal, maka persamaan $x = \cos t$ dan $y = \sin t$ mendefinisikan suatu fungsi. Fungsi yang didefinisikan dengan $x = \cos t$ disebut fungsi kosinus dan fungsi yang didefinisikan dengan $y = \sin t$ disebut fungsi sinus. Dari fungsi-fungsi tersebut dapat didefinisikan empat buah fungsi trigonometri lainnya, yaitu fungsi tangen, kotangen, sekan, dan fungsi kosekan.

5.1.4 Definisi Nilai Tangen, Kotangen, Sekan, dan Kosekan

Tangen, kotangen, sekan, dan kosekan sudut t berturut-turut ditulis $\tan t$, $\cot t$, $\sec t$, dan $\csc t$, didefinisikan sebagai:

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}, \quad \sec t = \frac{1}{\cos t}, \quad \csc t = \frac{1}{\sin t}.$$

5.1.5 Sifat-Sifat Dasar Fungsi Sinus dan Kosinus

Berikut dijelaskan sifat-sifat dasar dari fungsi sinus dan kosinus.

1. Berdasarkan definisi fungsi trigonometri $y = \sin t$ dan $x = \cos t$ diperoleh $-1 \leq x \leq 1$ dan $-1 \leq y \leq 1$, sehingga nilai $\sin t$ dan $\cos t$ selalu berada dalam interval $[-1, 1]$.

2. Karena t dan $(t + 2\pi)$ menentukan titik $P(x, y)$ yang sama pada lingkaran satuan, maka diperoleh $\sin(t + 2\pi) = \sin t$ dan $\cos(t + 2\pi) = \cos t$. Dari sifat (2) ini, dikatakan bahwa fungsi sinus dan kosinus adalah **periodik** dengan periode 2π.

3. Dari sifat periodik ini, maka nilai fungsi yang didefinisikan dengan tangen juga mempunyai sifat bilangan periodik sehingga $\tan(t + \pi) = \tan t$. Bilangan π tersebut menyatakan sifat ini disebut **periode fungsi**.

4. Setiap bilangan t pada sudut $-t$ menentukan titik (x, y) dan $(x, -y)$. Kedua titik tersebut simetri terhadap sumbu x, sehingga koordinatnya adalah x sama dan koordinat y-nya berlawanan. Akibatnya diperoleh $\sin(-t) = -\sin t$ dan $\cos(-t) = \cos t$. Dengan kata lain, fungsi sinus adalah fungsi ganjil dan fungsi kosinus adalah fungsi genap.

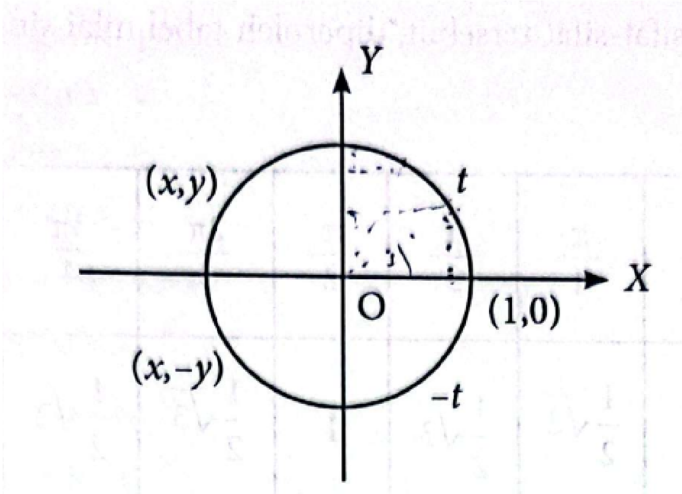


Figure 5.26:

5. Setiap bilangan real t dan $\frac{\pi}{2} - t$ menentukan titik (x, y) dan (y, x). Kedua titik tersebut simetri terhadap garis $y = x$ (mengapa?), sehingga koordinat-koordinatnya saling bertukaran. Akibatnya diperoleh:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t \quad \text{dan} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$$

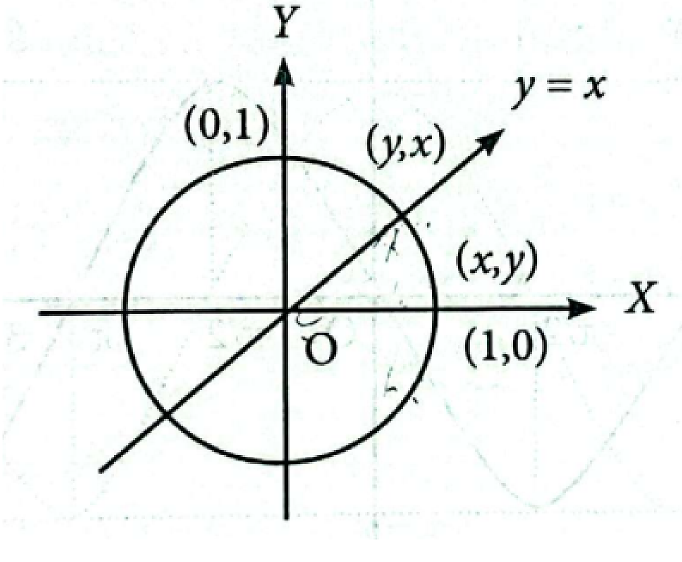


Figure 5.27:

6. Karena fungsi $y = \sin t$ dan $x = \cos t$ didefinisikan pada lingkaran satuan $x^2 + y^2 = 1$, maka $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Perhatikan fungsi $f(x) = \sin x$, $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-1, 1]$. Untuk setiap $x \in D_f$ berlaku:

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \text{dan} \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Selanjutnya, perhatikan pula fungsi $g(x) = \cos x$, $D_g = \mathbb{R}$, $R_g = [-1, 1]$. Untuk setiap $x \in D_g$ berlaku:

$$\cos(-x) = \cos x \quad \text{dan} \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Berdasarkan Sifat - Sifat Tersebut Diperoleh :

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos t$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1

Grafik fungsi $f(x) = sin(x)$ dan $f(x) = cos(x)$ diperlihatkan seperti berikut ini.

5.2 Grafik Fungsi Sinus Dan Kosinus

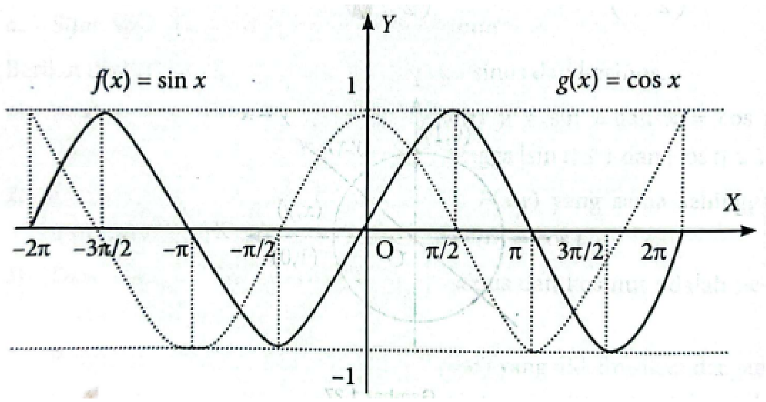


Figure 5.28: Grafik Fungsi Sinus dan Kosinus

5.3 Persamaan Trigonometri

Pada bagian ini, persamaan trigonometri yang akan dibahas hanya merupakan ringkasannya saja yang dianggap penting dan sering digunakan dalam pembahasan selanjutnya. Adapun pembuktiannya tidak akan dibahas di sini, melainkan diberikan kepada pembaca sebagai latihan untuk membuktikan kebenarannya.

Persamaan Ganjil-Genap

$$\sin(-x) = -\sin x$$
$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\tan(-x) = -\tan x$$

Persamaan Pythagoras

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 x &= 1\\ 1 + \tan^2 x &= \sec^2 x\\ 1 + \cot^2 x &= \csc^2 x\end{aligned}$$

Persamaan Penjumlahan

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y\\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y\\ \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}\end{aligned}$$

Persamaan Sudut Ganda

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2\sin x \cos x\\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x\end{aligned}$$

Persamaan Setengah Sudut

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{x}{2} &= \frac{1 - \cos 2x}{2}\\ \cos^2 \frac{x}{2} &= \frac{1 + \cos 2x}{2}\end{aligned}$$

Persamaan Jumlah

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\\ \cos x + \cos y &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

Persamaan Hasil Kali

$$\begin{aligned}\sin x \sin y &= \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]\\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]\\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]\end{aligned}$$

Contoh Soal :

Hitung tanpa menggunakan kalkulator:

1. $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$
2. $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
3. $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}
&\text{a.)} \quad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1\\
&\text{b.)} \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\\
&\text{c.)} \quad \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Contoh Soal :

Tentukan daerah definisi dan daerah nilai fungsi:

1. $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x \quad (D_f = \mathbb{R}, R_f = [-1, 1])$
2. $g(x) = 3\cos^2 4x - 4\sin x$

Penyelesaian :

a) Daerah definisi fungsi f adalah $D_f = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos^4 x + \sin^4 x\\
&= (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x\\
&= 1 - 2(\sin x\cos x)^2\\
&= 1 - \frac{1}{2}(\sin 2x)^2\\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x
\end{aligned}$$

Daerah nilai fungsi f dapat dicari sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
-1 \leq \cos 4x \leq 1\\
\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\\
0 \leq f(x) \leq 1
\end{aligned}$$

Jadi, daerah nilai fungsi f adalah $R_f = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

b) Daerah definisi fungsi g adalah $D_g = \mathbb{R}$. Untuk menentukan daerah nilai fungsi g, nyatakan fungsi g dalam bentuk $g(x) = k\cos(x+\alpha)$ dengan k dan α konstanta positif.

Dengan menggunakan dua aturan untuk identitas trigonometri:

$$g(x) = 5\cos(x+\alpha)$$

Dengan sifat keterbatasan fungsi kosinus diperoleh:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos(x+\alpha) \leq 1 \\ -5 &\leq 5\cos(x+\alpha) \leq 5 \end{aligned}$$

Jadi, daerah nilai fungsi g adalah $R_g = [-5, 5]$.

Contoh Soal :

Gambar grafik fungsi f dengan persamaan

$$f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Penyelesaian :

pada $x \in [-\pi, 2\pi]$.

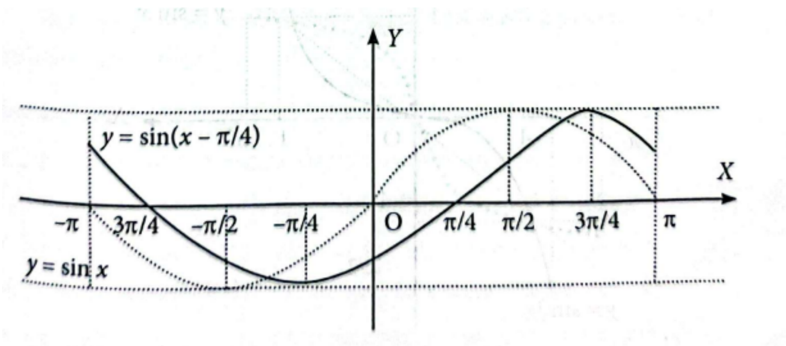


Figure 5.29: Grafik Fungsi Sinus dan Kosinus

Grafik fungsi f dapat dilakukan dengan cara menggambar grafik fungsi sinus kemudian digeser ke kanan sejauh $\frac{\pi}{4}$ pada selang $[-\pi, 2\pi]$

5.4 Invers Fungsi Trigonometri

Perhatikan fungsi trigonometri $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ dengan $f(x) = \sin x$. Fungsi f tidak satu-satu (mengapa?). Akibatnya, f tidak mempunyai fungsi invers.

Agar fungsi f mempunyai fungsi invers, maka D_f harus dibatasi sehingga f merupakan fungsi satu-satu. Adapun cara membatasi daerah asal fungsi f dijelaskan sebagai berikut.

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1], \quad \text{dengan } f(x) = \sin x$$

Invers fungsi f ditulis:

$$f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

dengan $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$ atau $f^{-1}(x) = \arcsin x$.
Namakan $y = f^{-1}(x) = \sin^{-1} x = \arcsin x$, berarti:

$$x = \sin y, \quad x \in [-1, 1], \quad \text{dan} \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Grafik $f(x) = \sin x$ dan $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$ diperlihatkan pada Gambar 1.30.

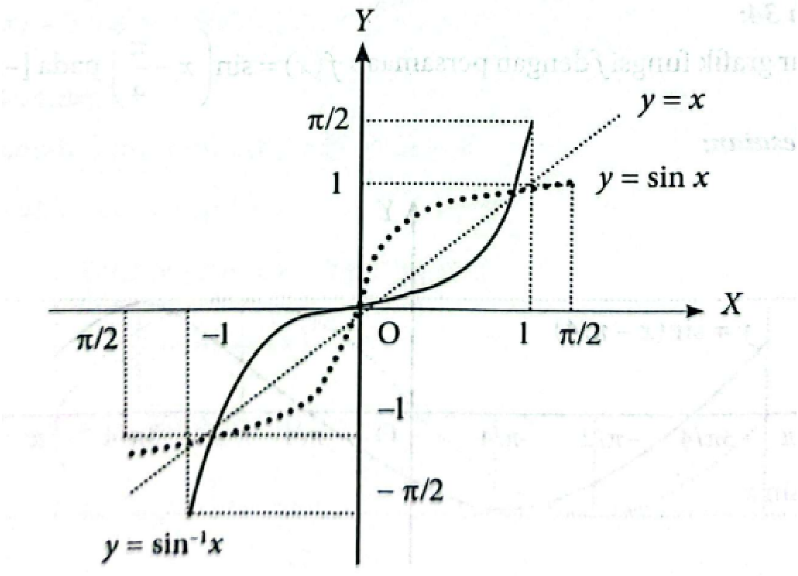


Figure 5.30:

Inversi fungsi trigonometri lainnya diperoleh dengan cara yang sama, yaitu dengan membatasi daerah definisinya sehingga fungsi tersebut menjadi fungsi satu-satu. Adapun invers fungsi trigonometri lainnya didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.5.4 (Fungsi Invers Trigonometri)

a. Invers fungsi $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$ dengan aturan $f(x) = \cos x$ adalah

$$f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi] \quad \text{dengan} \quad f^{-1}(x) = \cos^{-1} x.$$

b. Invers fungsi $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ dengan aturan $f(x) = \tan x$ adalah

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{dengan} \quad f^{-1}(x) = \tan^{-1} x.$$

c. Invers fungsi $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = \cot x$ adalah

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \pi) \quad \text{dengan} \quad f^{-1}(x) = \cot^{-1} x.$$

d. Invers fungsi $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [1, \infty)$ dengan $f(x) = \sec x$ adalah

$$f^{-1} : [1, \infty) \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{dengan} \quad f^{-1}(x) = \sec^{-1} x.$$

e. Invers fungsi $f : (0, \pi) \to [1, \infty)$ dengan $f(x) = \csc x$ adalah

$$f^{-1} : [1, \infty) \to (0, \pi) \quad \text{dengan} \quad f^{-1}(x) = \csc^{-1} x.$$

Hubungan antara invers fungsi trigonometri dan fungsi aslinya, disajikan pada definisi berikut.

Definisi

a. $y = \sin^{-1} x$ jika dan hanya jika $x = \sin y, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

b. $y = \cos^{-1} x$ jika dan hanya jika $x = \cos y, \quad 0 \leq y \leq \pi$.

c. $y = \tan^{-1} x$ jika dan hanya jika $x = \tan y, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

d. $y = \cot^{-1} x$ jika dan hanya jika $x = \cot y, \quad 0 < y < \pi$.

e. $y = \sec^{-1} x$ jika dan hanya jika $x = \sec y, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

f. $y = \csc^{-1} x$ jika dan hanya jika $x = \csc y, \quad 0 < y < \pi$.

Grafik fungsi trigonometri lainnya beserta inversnya diperlihatkan pada gambar - gambar berikut.

1. Grafik fungsi $f(x) = cos(x)$ dan inversnya

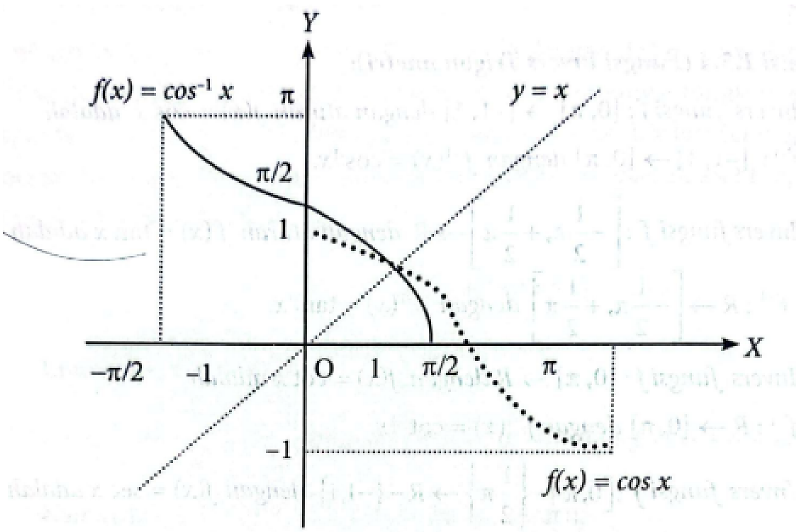


Figure 5.31:

2. Grafik fungsi $f(x) = tan(x)$ dan inversnya

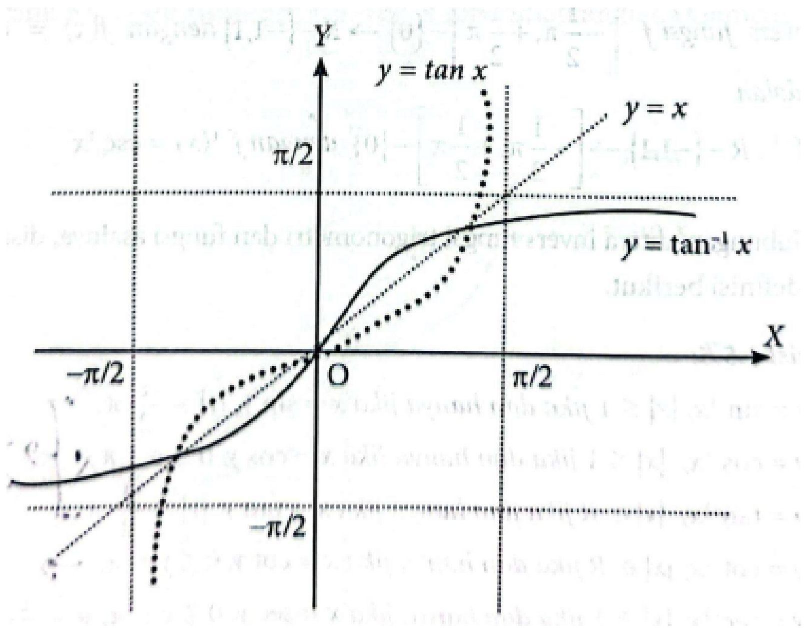


Figure 5.32:

3. Grafik fungsi $f(x) = cot(x)$ dan inversnya

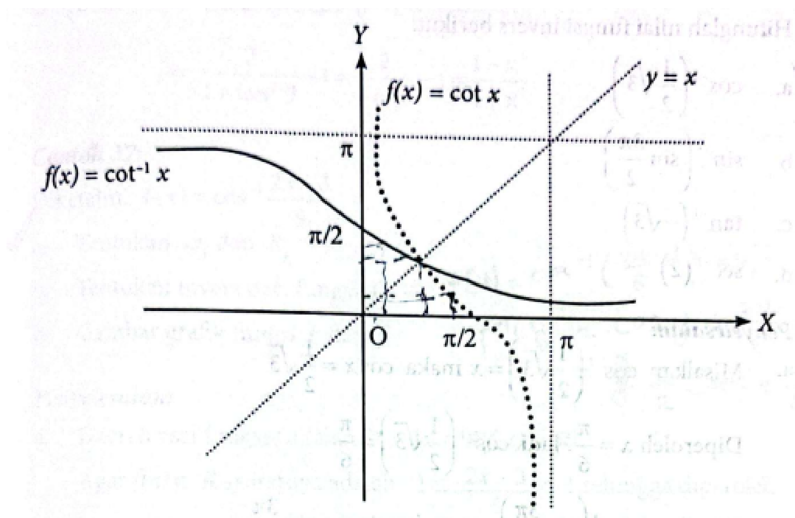


Figure 5.33:

4. Grafik fungsi $f(x) = sec(x)$ dan inversnya.

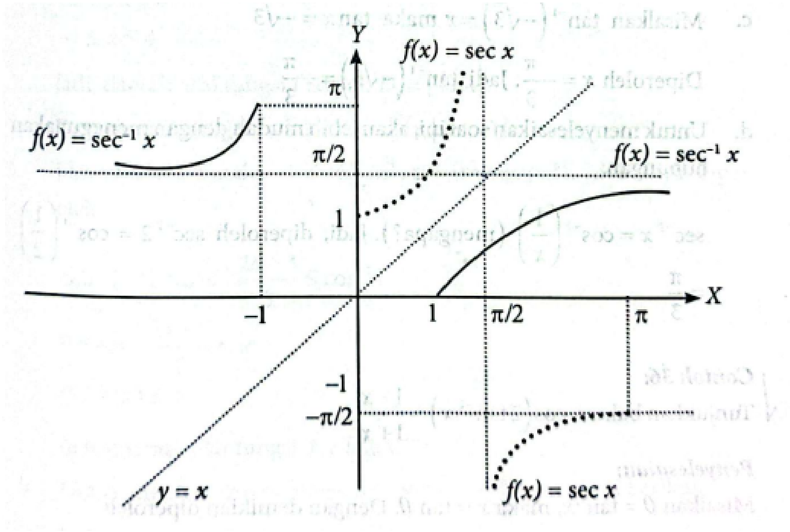


Figure 5.34:

Contoh Soal :

Hitunglah nilai fungsi invers berikut:

$\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

$\sin^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$

$\sec^{-1}(2)$

Penyelesaian :

a. Misalkan $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = x$ maka $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
Diperoleh $x = \frac{\pi}{6}$, jadi $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{6}$

b. Misalkan $\sin^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{2}\right) = x$ maka $\sin x = \sin\frac{3\pi}{2}$
Diperoleh $\sin x = -1$ atau $x = -\frac{\pi}{2}$, jadi $\sin^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$

c. Misalkan $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right) = x$ maka $\tan x = -\sqrt{3}$
Diperoleh $x = -\frac{\pi}{3}$, jadi $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$

d. Untuk menyelesaikan soal ini, akan lebih mudah dengan menggunakan hubungan:
$\sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ (mengapa?). Jadi, diperoleh $\sec^{-1} 2 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$
$= \frac{\pi}{3}$

Contoh Soal :

Tunjukkan bahwa $\cos(2\tan^{-1} x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

Penyelesaian :

Misalkan $\theta = \tan^{-1} x$, maka $x = \tan\theta$. Dengan demikian diperoleh

5.5 Latihan Soal

Hitunglah nilai fungsi invers trigonometri berikut tanpa menggunakan kalkulator.

1. (a) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$
   Wilayah rentang: $[-\pi/2, \pi/2]$ (kuadran I)

   (b) $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) =$
   Wilayah rentang: $[-\pi/2, \pi/2]$ (kuadran IV)

   (c) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$
   Wilayah rentang: $[0, \pi]$ (kuadran II)

   (d) $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) =$
   Wilayah rentang: $[-\pi/2, \pi/2]$ (kuadran I)

2. Tentukan rumus untuk fungsi invers f^{-1}, kemudian batasi daerah asal f agar f^{-1} ada.

   (a) $f(x) = 3\cos x$, untuk $-\pi \leq x \leq \pi$.

   (b) $f(x) = \tan x$, untuk $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

   (c) $f(x) = 2\sin x$, untuk $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

3. Buktikan bahwa:

   (a) $\frac{\pi}{4} + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$.

   (b) $\frac{\pi}{4} + \tan^{-1}\left(\frac{5}{9}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{239}{99}\right)$.

4. Tentukan daerah asal fungsi f, daerah nilai fungsi f, dan fungsi invers f^{-1}. Kemudian gambar grafik fungsi f dan f^{-1} dalam satu sistem koordinat.

   (a) $f(x) = 2\sin^{-1}(x-1)$, dengan daerah asal $[0, 2]$ dan daerah hasil $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

   (b) $f(x) = 2\tan^{-1} x$, dengan daerah asal $\mathbb{R}$ dan daerah hasil $(-\pi, \pi)$.