Решения на основе экспертных оценок: согласование кластерных ранжировок

Мишуров Сергей

1 ноября 2022

1 Постановка задачи

Дана последовательность из n объектов, упорядоченных по возрастанию (убыванию) какого-либо свойства:

$$A = [x_1 < x_2 < \{x_3, x_4\} < ... < x_n < ... < x_5]$$

В этой записи знак $<$ обозначает направление возрастания ("улучшение") свойства таким образом, что самый левый объект считается "хуже"всех (в данном примере объект x_1) , а самый правый объект "лучше"всех (в примере, x_5). При этом некоторые объекты в последовательности будут считаться неразличимыми, если эксперт или экспертная система при оценке не смогли их различить (в примере это объекты x_3 и x_4). Подобные объекты образуют группу или **кластер**.

Будем называть приведенную выше последовательность - **кластерная ранжировка (упорядочение)** (или здесь для краткости просто *ранжировка*), а множество сравниваемых объектов - **носителем**.

Приведенную выше запись ранжировки можно записать иначе:

$$A = [x_1, x_2, \{x_3, x_4\}, ..., x_n]$$

2 Представление кластерных ранжировок в матричной форме

Обозначим y_{ij} отношение двух объектов i-ого и j-ого друг к другу в данной ранжировке.

Будем полагать $y_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда x_i стоит в ранжировке правее x_j или эти объекты неразличимы, иначе полагаем $y_{ij} = 0$. Тогда *ранжировку* A можно представить в виде множества y_{ij}, образующего матрицу размерностью $n \times n$. Такую матрицу $Y_A = \left\| y_{ij} \right\|$ будем называть **матрицей отношений**.

Рассмотрим пример ранжировки 10 инвестиционных проектов (x_i) по уровню их рискованности, которая выполнена экспертом **A**. Проекты упорядочены слева направо от наиболее рискованных к наименее рискованным. Такую ранжировку можно записать:

$$A = [x_1 < \{x_2, x_3\} < x_4 < \{x_5, x_6, x_7\} < x_8 < x_9 < x_{10}]$$

или

$$A = [x_1, \{x_2, x_3\}, x_4, \{x_5, x_6, x_7\}, x_8, x_9, x_{10}]$$

в виде *матрицы отношений*

$$Y_A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Рассмотрим еще одну ранжировку данного набора объектов по тому же свойству, выполненную другим экспертом **B**:

$$B = [x_3, \{x_1, x_4\}, x_2, x_6, \{x_5, x_7, x_8\}, \{x_9, x_{10}]\}$$

Для данной ранжировки *матрица отношений* будет:

$$Y_B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3 Метод согласования кластерных ранжировок

Рассмотрим возможность построения ранжировки $f(A, B)$ такой, что в ней объекты x_i будут упорядочены (ранжированы) непротиворечиво по отношению к исходным ранжировкам A и B[1].

Для этого оценим наличие противоречий в ранжировках экспертов. Будем полагать, что два эксперта имеют противоречие в оценке пары объектов x_i и x_j только, если в ранжировке одного эксперта x_i стоит строго левее x_j, а у другого x_i - строго правее x_j.

В приведенном примере у экспертов A и B нет противоречия по поводу оценки объектов x_5 и x_6, так как эксперт B считает проект x_5 лучше проекта x_6, а эксперт A не различает данные проекты. С учетом установленного правила в приведенном примере противоречие у экспертов A и B существует в отношении двух пар объектов (x_1, x_3) и (x_2, x_4). Таким образом, **ядро противоречий** экспертов A и B будет $S(A, B) = [(x_1, x_3), (x_2, x_4)]$.

Рассмотрим формализованный алгоритм поиска *ядра противоречий* для пары ранжировок (A и B):

1. построим *матрицы отношений* для каждой ранжировки Y_A и Y_B, а также их транспонированные варианты Y'_A и Y'_B;

2. поэлементно перемножим *матрицы отношений* Y_A и Y_B, а также Y'_A и Y'_B, и обозначим полученные матрицы соответственно Y_{AB} и Y'_{AB};

3. сравнивая поэлементно матрицы Y_{AB} и Y'_{AB} путем логического сложения соответствующих элементов, найдем элементы, значения которых в обеих матрицах равны 0;

4. множество пар таких элементов и будет образовывать *ядро противоречий*.

Пример

Составим транспонированные *матрицы отношений*:

$$Y_A^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$Y_B^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Найдем поэлементные произведения *матриц отношений*:

$$Y_{AB} = Y_A \circ Y_B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$Y'_{AB} = Y_A^T \circ Y_B^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Построим матрицу, образованную логическим сложением элементов Y_{AB} и Y'_{AB} :

$$Y_{AB} \vee Y'_{AB} = \quad \begin{array}{c|cccccccccc|} \text{-} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ x_1 & 1 & 1 & \mathbf{0} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{0} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_3 & \mathbf{0} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_4 & 1 & \mathbf{0} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_{10} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Таким образом, *ядро противоречий* для ранжировок A и B будет $S(A, B) = [(x_1, x_3), (x_2, x_4)]$.

Имея *ядро противоречий*, мы можем составить **согласующую кластернную ранжировку** для ранжировок A и B:

$$f(A, B) = [\{x_1, x_3\} < \{x_2, x_4\} < x_6 < \{x_5, x_7\} < x_8 < x_9 < x_{10}]$$

или

$$f(A, B) = [\{x_1, x_3\}, \{x_2, x_4\}, x_6, \{x_5, x_7\}, x_8, x_9, x_{10}]$$

При формировании *согласующей кластерной ранжировки* может возникать вопрос о том, как упорядочить (расположить относительно друг друга) неразличимые группы объектов. Для установления порядка между такими группами произвольно выбирается по одному объекту из каждой группы. Порядок между группами устанавливается такой же, какой имеется между выбранными объектами в любой из рассматриваемых ранжировок. Если в одной из исходных ранжировок объекты неразличимы, а в другой различимы, то при построении *согласованной кластерной ранжировки* используется отношение объектов из последней. При этом неразличимые в обеих ранжировках объекты, естественно записываются в одну группу (в данном примере такими являются объекты x_5 и x_7).

4 Немного теории

Рассмотренный нами математический объект - *кластерная ранжировка*, в литературе называют "ранжировка со связями"[2], "упорядочение"[3], "квазисерия"[4], "совершенный квазипорядок"[5].

Можно выделить некоторые свойства рассмотренного алгоритма согласования *кластерных ранжировок* [1].

1. Пусть D = f(A, B, C,...). Если a<b в согласующей кластеризованной ранжировке D, то a<b или a=b в каждой из исходных ранжировок A, B, C, ..., причем хотя бы в одной из них справедливо строгое неравенство.

2. Построение согласующих кластеризованных ранжировок может осуществляться поэтапно. В частности, f(A,B,C) = f(f(A,B), f(A,C), f(B,C)). Ясно, что *ядро противоречий* для набора кластеризованных ранжировок является объединением ядер противоречий для всех пар рассматриваемых ранжировок.

3. Построение согласующих кластеризованных ранжировок нацелено на выделение общего упорядочения в исходных кластеризованных ранжировках. Однако при этом некоторые общие свойства исходных кластеризованных ранжировок могут теряться.

4. Область применения рассматриваемого метода не ограничивается экспертными оценками. Он может быть использован, например, для сравнения качества математических моделей процесса испарения жидкости. Имелись данные экспериментов и результаты расчетов по 8 математическим моделям.

Список используемой литературы

[1] Организационно-экономическое моделирование : учебник : в 3 ч.. / А.И.Орлов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2009.

[2] Холлендер М., Вулф Д. Непараметрические методы статистики. М.: Финансы и статистика, 1983. – 518 с.

[3] Кемени Дж., Снелл Дж. Кибернетическое моделирование: Некоторые приложения. - М.: Советское радио, 1972. - 192 с.

[4] Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974. – 256 с.

[5] Шрейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок. - М.: Наука, 1971. – 256 с.