弹性力学 笔记

[redacted] [redacted]

$\sigma_{eq}=\sqrt{\frac{3}{2}\sigma_{ij}'\sigma_{ij}'}$

1. (   )

$[a,b,c]=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

$$\begin{vmatrix}\delta_{or} & \delta_{os} & \delta_{ot}\\ \delta_{pr} & \delta_{ps} & \delta_{pt}\\ \delta_{qr} & \delta_{qs} & \delta_{qt}\end{vmatrix}=e_{opq}e_{rst}$$

$e_{ijk}e_{ist}=\delta_{js}\delta_{kt}-\delta_{jt}\delta_{sk}$

$e_{ijk}e_{ijt}=2\delta_{kt}$

$e_{ijk}e_{ijk}=6$

$\beta_{i'k}=\frac{\partial x_{i'}}{\partial x_k}$

$T_{m'n'}=\beta_{m'i}\beta_{n'j}T_{ij}$

$T_{mn}=\beta_{i'm}\beta_{j'n}T_{i'j'}$

球形张量、偏斜张量

$|\lambda I-T|=0$

$\Rightarrow \lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3=0$

$I_1=tr\,T$

I_2：所有二阶主子式之和（顺序主子式）

$\frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj}-T_{ij}T_{ji})$

$I_3=\det T$

$\int_V \nabla * \tilde{T}\,dV=\int_S \vec{\nu} * \tilde{T}\,dS$

$\int_S \vec{\nu}\cdot(\nabla\times\tilde{T})\,dS=\oint_L d\vec{l}\cdot\tilde{T}$

名义应力：$\vec{\sigma}_0=\frac{\vec{F}}{A_0}$（工程应力）

柯西应力：$\vec{\sigma}=\frac{\vec{F}}{A}$

正应力～切应力/剪应力

柯西公式/斜面应力公式：

$\vec{\sigma}_{(\nu)}=\vec{\nu}\cdot\tilde{\sigma}$

应力分量转换公式/转轴公式

第三主应力：$\sigma_1\geq\sigma_2\geq\sigma_3$

（重根、则重根对应作用平面

任选正交方向 [redacted]

作主方向）

正应力之最大、最小值：σ_1，σ_3

剪应力的六个极值：$\tau_{(\nu)}$ $\pm\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)$　方向分别为对应主应力

$\pm\frac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_3)$　方向之对角线

$\pm\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)$

八面体正应力 $\sigma_8=\frac{1}{3}I_1$，剪应力 $|\tau_8|=\frac{2}{3}\sqrt{\tau_{12}^2+\tau_{23}^2+\tau_{31}^2}=\frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_{eq}$

动量定理：$\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=\rho\vec{f}+\nabla\cdot\tilde{\sigma}\xrightarrow{\text{平衡}}\rho\vec{f}+\nabla\cdot\tilde{\sigma}=0$

柱坐标系：$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta r}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}+f_r=0$

$\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial z}+2\frac{\sigma_{r\theta}}{r}+f_\theta=0$

$\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rz}}{r}+f_z=0$

$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(g_{ij}-g^{\circ}_{ij})$　工程剪应变 γ_{ij}　$\tilde{F}=\frac{\partial x_i}{\partial a_j}\vec{e}_i\vec{e}_j$

格林应变张量 $E_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_m}{\partial a_i}\frac{\partial x_m}{\partial a_j}-\delta_{ij}\right)$

$\tilde{E}=\frac{1}{2}(\vec{u}\nabla+\nabla\vec{u}+\vec{u}\nabla\cdot\nabla\vec{u})$　$(\varepsilon_{ij}\overset{\circ}{\vec{e}}_i\overset{\circ}{\vec{e}}_j)$

阿尔曼西张量 $e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\delta_{ij}-\frac{\partial a_m}{\partial x_i}\frac{\partial a_m}{\partial x_j}\right)$

$\tilde{e}=\frac{1}{2}(\vec{u}\nabla+\nabla\vec{u}-\vec{u}\nabla\cdot\nabla\vec{u})$　$(\varepsilon_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j)$

对数应变：$\epsilon_{zz}=\ln\frac{L}{L_0}$

变形前后、长度比 $\lambda_\nu=\frac{ds}{ds_0}=\sqrt{1+2\vec{\nu}\cdot\tilde{E}\cdot\vec{\nu}}$

单位向量 $\lambda_\nu\vec{\nu}'=(\tilde{I}+\vec{u}\nabla)\cdot\vec{\nu}=\tilde{F}\cdot\vec{\nu}$

夹角：$\cos(\vec{\nu}',\vec{t}')=\frac{\vec{\nu}\cdot\vec{t}+2\vec{\nu}\cdot\tilde{E}\cdot\vec{t}}{\lambda_\nu\lambda_t}$

线应变分量 $E_\nu=\frac{1}{2}(\lambda_\nu^2-1)$　$(\varepsilon_{ii}=l_i)$

切应变分量 $E_{\nu t}=\frac{1}{2}(\lambda_\nu\vec{\nu}')\cdot(\lambda_t\vec{t}')$　$(\varepsilon_{ij}=\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi_{ij}}{2})$

$\boxed{\text{小变形}}$：$\lambda_\nu=\vec{\nu}\cdot\tilde{\varepsilon}\cdot\vec{\nu}=:\varepsilon_\nu$、工程正应变，

$\gamma_{\nu t}=2\vec{\nu}\cdot\tilde{\varepsilon}\cdot\vec{t}=2\varepsilon_{\nu t}$ 工程剪应变

转动张量 $\tilde{\Omega}=\frac{1}{2}(\nabla\vec{u}-\vec{u}\nabla)$　$\Omega_{ij}=e_{ijk}\omega_k$

$(-\tilde{\Omega}\cdot d\vec{x}=\vec{\omega}\times d\vec{x})$

协调方程：$\varepsilon_{ij,kl}+\varepsilon_{kl,ij}-\varepsilon_{ik,jl}-\varepsilon_{jl,ik}=0$

$\eta_{mn}=e_{mil}e_{njk}\varepsilon_{ij,kl}=0$　$\nabla\times\tilde{\varepsilon}\times\nabla=0$

二维：$\varepsilon_{\alpha\alpha,\beta\beta}-\varepsilon_{\alpha\beta,\alpha\beta}=0$

单连通域上，位移单值 $\Leftrightarrow$ 满足协调方程

由应变求位移

~~直接积分~~ 线积分：eg: $d\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2}dx_1+\left(\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_2}-\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1}\right)dx_2$

$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial \gamma_{31}}{\partial x_2}-\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1}\right)dx_3$

有直接积分：eg：$\varepsilon_{ij}=0$

$\Rightarrow u_1=f_1(x_2,x_3)\quad u_2=f_2(x_1,x_3)\quad u_3=f_3(x_1,x_2)$

$\Rightarrow \gamma_{12}=\cdots=0\quad \gamma_{13}=\cdots=0\quad \gamma_{23}=\cdots=0$

欢家变量、再求导、得：$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2}=0$、$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3^2}=0$

$\Rightarrow f_1=g_1(x_3)x_2+g_0(x_3)\Rightarrow g_1''\cdot x_2+g_0''=0$

$\Rightarrow g_1''=g_0''=0\Rightarrow f_1=a_0+a_1x_2+a_2x_3+a_3x_2x_3$

同理可得 u_2、u_3、

代回四、进一步简化：$f_1=a_0-b_2x_2+a_2x_3,\ldots$

柱坐标系：$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r}\quad \varepsilon_\theta=\frac{\partial v}{r\partial\theta}+\frac{u}{r}\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}$

$\gamma_{r\theta}=\frac{\partial u}{r\partial\theta}-\frac{v}{r}+\frac{\partial v}{\partial r}\quad \gamma_{\theta z}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{r\partial\theta}$

$\gamma_{rz}=\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}$

协调方程：$\frac{\partial^2\varepsilon_r}{r\partial\theta^2}-\frac{\partial\varepsilon_r}{r\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varepsilon_\theta)-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}(r\gamma_{r\theta})=0$

$\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y-\nu\sigma_z)\quad \gamma_{ij}=\frac{1}{G}\tau_{ij}\quad G=\frac{E}{2(1+\nu)}$

$\varepsilon_{ij}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}-\frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}$

令 $\theta=\varepsilon_{kk}$、$\Theta=\sigma_{kk}$、$K=\frac{E}{3(1-2\nu)}$、则：

$\theta=\frac{1}{3K}\Theta=\frac{1}{K}\sigma_0$（体积应变 vs 静水应力）

令 $\lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$、则：

$\sigma_{ij}=2G\varepsilon_{ij}+\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$　　λ、G、第一二拉梅常数

$\Rightarrow \sigma_0=K\theta=3K\varepsilon_0\quad \sigma_{ij}'=2G\varepsilon_{ij}'$

一般形式：$\sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\quad W=\frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}=\frac{1}{2}\sigma_{kl}\varepsilon_{kl}$

应变能 $W=\int_0^{\tilde\varepsilon}\tilde\sigma:d\tilde\varepsilon\quad \frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ij}}=\sigma_{ij}$

$\Rightarrow$ 广义格林公式 $\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}}=\frac{\partial\sigma_{kl}}{\partial\varepsilon_{ij}}$

应变余能 $W_c=\int_0^{\tilde\sigma}\tilde\varepsilon:d\tilde\sigma\quad \frac{\partial W_c}{\partial\sigma_{ij}}=\varepsilon_{ij}\Rightarrow\frac{\partial\varepsilon_{kl}}{\partial\sigma_{ij}}=\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial\sigma_{kl}}$

$W+W_c=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$

正定性：$W=\frac{1}{2}K\varepsilon_{ii}^2+\frac{1}{2}\cdot 2G\varepsilon_{ij}'\varepsilon_{ij}'$

$W_c=\frac{1}{2K}\sigma_0^2+\frac{1}{2\cdot 2G}\sigma_{ij}'\sigma_{ij}'$

Lame-Navier 方程：$Gu_{i,jj}+(\lambda+G)u_{j,ji}+f_i=0\,(\rho\ddot u_i)$

Beltrami-Michell 方程：

$\nabla^2\sigma_{ij}+\frac{1}{1+\nu}\Theta_{,ij}=-(f_{i,j}+f_{j,i})-\frac{\nu}{1-\nu}f_{k,k}\delta_{ij}$

圣维南定理