弹性力学

一、平面问题

1. 基本假设

- 平面应变

$\varepsilon_x、\varepsilon_y、\gamma_{xy} \sim (x, y)$

$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \Rightarrow \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

- 平面应力

$\sigma_x、\sigma_y、\tau_{xy} \sim (x, y)$

$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \Rightarrow \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

2、本构关系

- 平面应变

$\sigma(\varepsilon)$ 易得.

$$\varepsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x\right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

$$\sigma_z = \lambda(\varepsilon_x+\varepsilon_y) = \nu(\sigma_x+\sigma_y)$$

- 平面应力

$\varepsilon(\sigma)$ 易得.

$$\sigma_x = \frac{2G}{1-\nu}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{2G}{1-\nu}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y) = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)$$

3. 平衡方程

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} + f_\alpha = 0$$

$$\langle 二 \rangle \begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y} + f_y = 0 \\ f_z = 0 \end{cases}$$

4. 协调方程

- 平面应变

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0$$

- 平面应力

$$\begin{cases} \varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0 \\ \varepsilon_{33,11} = \varepsilon_{33,22} = \varepsilon_{33,12} = 0 \end{cases}$$

解得 $\varepsilon_z = Ax + By + C$

$\Rightarrow \Theta = \sigma_x + \sigma_y = ax + by + c$

* 广义平面应力: $z \ll r$ 时, σ_z 相对面内应力分量可略, 近似可按平面问题处理

5. 几何方程

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

平面应变: $\varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow w = 0$

平面应力: $\varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} = -\dfrac{\nu}{1-\nu}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right)$

$\Rightarrow w = \varepsilon_z(x,y)\,z$

由4、$\varepsilon_z = Ax + By + C$

6. 边界条件

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x \cos(\nu,x) + \tau_{xy}\cos(\nu,y) &= \bar{X} \\ \tau_{xy}\cos(\nu,x) + \sigma_y\cos(\nu,y) &= \bar{Y} \\ 0 &= \bar{Z} \end{aligned}\right\} \text{侧面}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{平面应变}: \bar{X} = 0 \quad \bar{Y} = 0 \quad \bar{Z} = \sigma_z \\ &\text{平面应力}: \bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z} = 0 \end{aligned}\right\} \text{端面}$$

7. 求解—位移解法(以应力为例)

代入本构、平衡方程, 得:

$$G\nabla^2 u_\alpha + G\frac{1+\nu}{1-\nu}u_{\beta,\alpha\beta} + f_\alpha = 0$$

边界条件亦可用位移表示

8. 求解—应力解法 I

应力函数

若体力 $\vec{f} = -\nabla V$, 则平衡方程化为:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\sigma_x - V)}{\partial x} + \dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial(\sigma_y - V)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

引入A、B, s.t.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial y} = \sigma_x - V & \dfrac{\partial A}{\partial x} = -\tau_{xy} \\ \dfrac{\partial B}{\partial y} = -\tau_{xy} & \dfrac{\partial B}{\partial x} = \sigma_y - V \end{cases}$$

$\dfrac{\partial A}{\partial x} = \dfrac{\partial B}{\partial y}$, 再引入 ϕ s.t.

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = A \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} = B、$$

ϕ 即为平面问题的艾里应力函数

由上、得:

$$\begin{cases}\sigma_x = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+V\\ \sigma_y=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+V\\ \tau_{xy}=-\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\end{cases}$$

代回协调方程即得应力函数法的基本方程：

$$\nabla^2\nabla^2\phi = \begin{cases}-(1-\nu)\nabla^2 V & 平面应力\\ -\dfrac{1-2\nu}{1-\nu}\nabla^2V & 平面应变\end{cases}$$

若无体力/常体力，进一步可得：

$$\nabla^2\nabla^2\phi=0$$

9、求解—应力函数法 II

I、$\phi=\phi_1+ax+by+c$ 也是解

II、边界条件以A为参考点，则：

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}\Big|_B=\int_A^B \bar X\, ds = R_x$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_B = -\int_A^B \bar Y\, ds = -R_y$$

$$\phi_B = \int_A^B[-(x_B-x_A)\bar Y+(y_B-y_A)\bar X]\,ds = M_P$$

相对B点

表相对于A点的相反数

另：$R_n=\frac{\partial\phi}{\partial s}$

$R_s=-\frac{\partial\phi}{\partial n}$

若 $V\neq0$，则将 $\bar X$、$\bar Y$ 换为 $\bar X-lV$、$\bar Y-mV$

III、单值条件：作用在闭合边界上的载荷构成平自平衡力系

~~求解—应力函数法 III~~ 逆法：

1、计算边界上的 ϕ
2、选择 $\phi(x,y)$ 的形式
3、代入协调方程
4、由边界条件确定积分常数
5、求 σ、ε、u,v,w.

* 直角坐标
* 极坐标

10、极坐标，解与轴对称

$\varepsilon_r=\frac{\partial u_r}{\partial r}$ $\quad\varepsilon_\theta=\frac1r\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}$

$\gamma_{r\theta}=\frac1r\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}$

平衡、协调、

平面应力：$\sigma_r=\frac{2G}{1-\nu}(\varepsilon_r+\nu\varepsilon_\theta)$ $\quad\varepsilon_r=\frac1E(\sigma_r-\nu\sigma_\theta)$

$\sigma_\theta=\frac{2G}{1-\nu}(\varepsilon_\theta+\nu\varepsilon_r)$ $\quad\varepsilon_\theta=\frac1E(\sigma_\theta-\nu\sigma_r)$

$\tau_{r\theta}=G\gamma_{r\theta}$

平面应变：$G^*=G$，$\nu^*=\frac{\nu}{1-\nu}$ $\quad E^*=\frac{E}{1-\nu^2}$

$$\nabla^2\nabla^2\phi=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac1r\frac{\partial}{\partial r}+\frac1{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)^2\phi$$

$\cancel{\sigma_r=\frac{\partial^2\phi}{r\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}}$

$$\sigma_r=\frac1{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+\frac1r\frac{\partial\phi}{\partial r}$$

$\sigma_\theta=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}$ $\quad\tau_{r\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac1r\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)$.

轴对称（平移），$\phi=\phi(r)$

此时：$\nabla^2\nabla^2\phi=\frac{d^4\phi}{dr^4}+\frac2r\frac{d^3\phi}{dr^3}-\frac1{r^2}\frac{d^2\phi}{dr^2}+\frac1{r^3}\frac{d\phi}{dr}=0$

$\varepsilon_r=\frac{du_r}{dr}$ $\quad\varepsilon_\theta=\frac{u_r}{r}$ $\quad\gamma_{r\theta}=\frac{dv_\theta}{dr}-\frac{v_\theta}{r}$

$\sigma_r=\frac1r\frac{d\phi}{dr}$ $\quad\sigma_\theta=\frac{d^2\phi}{dr^2}$ $\quad\tau_{r\theta}=0$

设解为 r^k，代入解，而后可得：

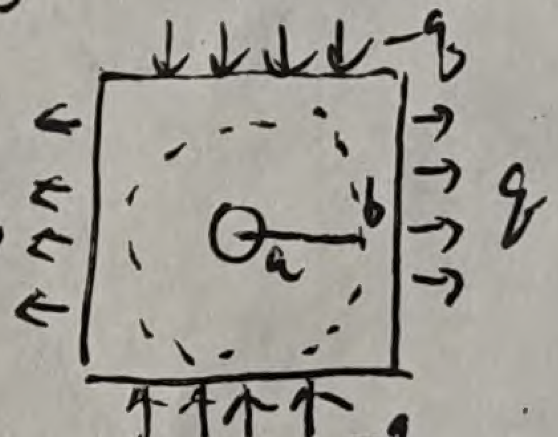
$$\phi=A\ln r+Br^2\ln r+C(r^2+1)$$

（也可用位移解法）

11、非对称、

一般：$\phi=\phi_0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}[f_n(r)\cos n\theta+g_n(r)\sin n\theta]$

eg1：小圆孔应力集中



外围边界：

$\sigma_r|_{r=b}=q\cos2\theta$

$\tau_{r\theta}|_{r=b}=-q\sin2\theta$

内：$\sigma_r|_{r=a}=\sigma_\theta|_{r=b}=0$

应设 $\phi=f(r)\cos2\theta$，代入得：

$$f(r)=Ar^4+Br^2+C+Dr^{-2}$$

由此算出 σ_r、σ_θ、$\tau_{r\theta}$，得到A、B、C、D

再取 $b\to\infty$，则：

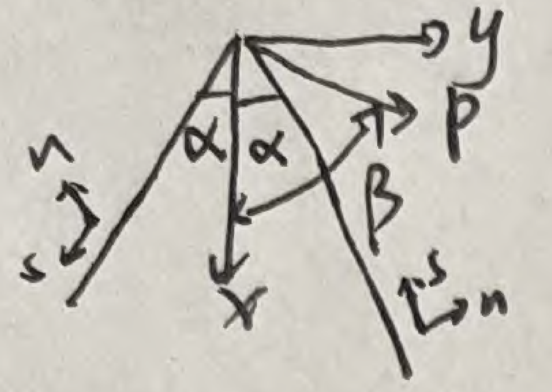
$$f(r)=-\frac q2 r^2+qa^2-\frac{qa^4}{2r^2}$$

附：$\sigma_r=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\theta+\tau_{xy}\sin2\theta$

$\sigma_\theta=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\theta-\tau_{xy}\sin2\theta$

$\tau_{r\theta}=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin2\theta+\tau_{xy}\cos2\theta$

eg2：楔体



$\theta=\frac{\alpha}{2}$：$\phi=0$

$$\frac{\partial\phi}{\partial s}=-\frac{\partial\phi}{\partial r}=0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=0$$

$\theta=-\frac{\alpha}{2}$：$\phi=-Pr\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)$

$$\frac{\partial\phi}{\partial s}=\frac{\partial\phi}{\partial r}=-P\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)$$

$$-\frac{\partial\phi}{\partial n}=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=P\cos(\frac{\alpha}{2}+\beta)$$

$\phi=rf(\theta)$、代入得：

$$\frac{1}{r^3}\left[\frac{d^4f}{d\theta^4}+2\frac{d^2f}{d\theta^2}+1\right]=0$$

$$f=A\cos\theta+B\sin\theta+\theta(C\cos\theta+D\sin\theta)$$

$$\sigma_r=\frac{2}{r}(D\cos\theta-C\sin\theta)$$

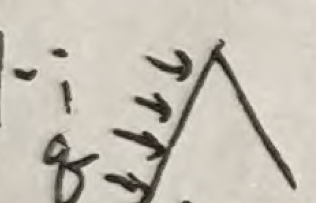
$$\sigma_\theta=\tau_{r\theta}=0$$

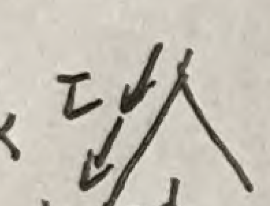
边界条件：$\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}\sigma_r\cos\theta\, r\,d\theta+P\cos\beta=0$

$\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}\sigma_r\sin\theta\, r\,d\theta+P\sin\beta=0$

$\Rightarrow$ A.D.C

特别地、$\alpha=\pi$时、$\sigma_r=-\frac{2P}{\pi r}\cos\theta$

补：

& 

$\phi=r^2f(\theta)$

$\phi=\frac{1}{2}qr^2$　　$\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=\tau r^2$

二、柱形杆问题

1、位移解法

$$\begin{cases}u_r=0\\ v_\theta=\alpha zr\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=-\alpha zy\\ v=\alpha zx\\ w=\alpha\psi(x,y).\end{cases}$$

$\Rightarrow\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_z=\gamma_{xy}=0$

$\gamma_{xz}=\alpha(\frac{\partial\psi}{\partial x}-y)$

$\gamma_{yz}=\alpha(\frac{\partial\psi}{\partial y}+x)$

$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=\tau_{xy}=0$

$\tau_{xz}=G\alpha(\frac{\partial\psi}{\partial x}-y)$

$\tau_{yz}=G\alpha(\frac{\partial\psi}{\partial y}+x)$

$\omega_x=\Omega_{yz}=\frac{1}{2}\alpha(\frac{\partial\psi}{\partial y}-x)$

$\omega_y=\Omega_{zx}=-\frac{1}{2}\alpha(\frac{\partial\psi}{\partial x}+y)$

$\omega_z=\Omega_{xy}=\alpha z$

平衡方程：$\nabla^2\psi=0$

侧面边界、端面边界(剪力、扭矩)

扭转刚度：$D_t=\frac{M}{\alpha}=G\int_A(x^2+y^2)dA+G\int_A(\frac{\partial\psi}{\partial y}x-\frac{\partial\psi}{\partial x}y)dA$

2、应力函数解法

平衡方程：$\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}=0$

引入ϕ s.t. $\frac{\partial\phi}{\partial y}=\tau_{zx}$　$\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\tau_{zy}$

协调方程：$\nabla^2\tau_{zx}=\nabla^2\tau_{zy}=0$

$\Rightarrow\nabla^2\phi=C\xRightarrow{\tau_{xz}(\psi),\tau_{yz}(\psi)}\nabla^2\phi=-2G\alpha$

侧边界：$\phi|_P=C$　对单连通域、可取为0

扭矩：$M=2\int\phi\,dx\,dy$（前提：$\phi|_P=0$）

求法：1、由边界条件、泊松方程求ϕ

2、求τ_{xz}、τ_{yz}、α、进而得M_t、D_t.

3、对位移、宜用τ_{ij}得ψ.

3、解例.

拔侧面由N段曲线$f_n(x,y)=0$组成、则

令$\phi=m f_1(x,y)\cdots f_n(x,y)$

4. 薄膜比拟

周边固定，内部有拉张力S的薄膜，受横向均匀压力q.

$$\begin{cases} \nabla^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{S} q \\ z|_P = 0 \end{cases}$$

比拟关系：$\phi \sim \frac{2G\alpha S}{q} z$

补充普朗特应力函数的两个性质：

1°. 做截面内任意点：$\tau = -\frac{\partial \phi}{\partial \nu}$

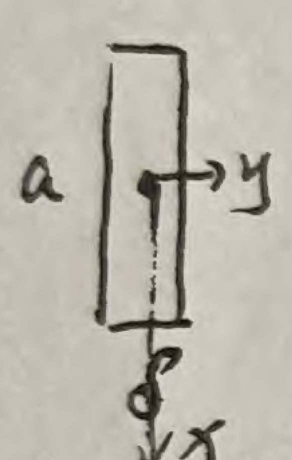
ν 指向 ϕ 等值线法向

τ 方向同等值线切向

2°. 在 ϕ 等值线上：$\oint \tau ds = 2G\alpha A_L$

下面给出几个解例：

① 狭长矩形杆



参考薄膜实验，设 $\phi = \phi(y)$，则由边界条件与对称性：

$\left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \quad \phi|_{y=\pm\frac{\delta}{2}} = 0$

解得 $\phi = G\alpha\left(\frac{\delta^2}{4} - y^2\right)$

$\Rightarrow D_t = \frac{1}{3} G a \delta^3$

$\tau = -\tau_{zx} = -\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 2G\alpha y$

剪应力产生的扭矩为 $\frac{1}{6} G a \delta^3 \alpha$，$M_t$ 的另一半由 τ_{zy} 提供

② 开口薄壁杆

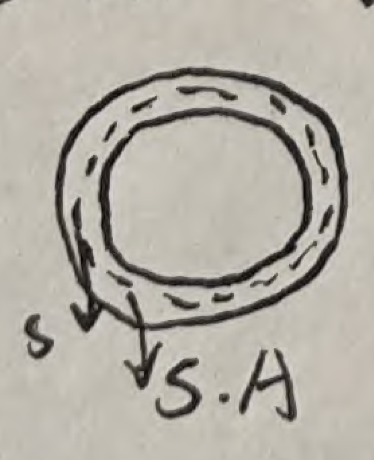
可将其看作若干狭长矩形杆拼接而成

$D_t = \frac{1}{3} G \sum_i a_i \delta_i^3$

$\alpha = \frac{M_t}{D_t} = \frac{3M_t}{G \sum_i a_i \delta_i^3}$

第 i 部分：$\tau_{i\max} = \frac{3M_t \delta_i}{\sum_i a_i \delta_i^3}$

③ 闭口薄壁杆管



薄膜实验得 $\tau = -\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \approx \frac{\Phi_1}{\delta(s)}$

$\Phi_1 \cdot 2A = M_t$

$\Rightarrow \tau = \frac{M_t}{2A\delta(s)}$

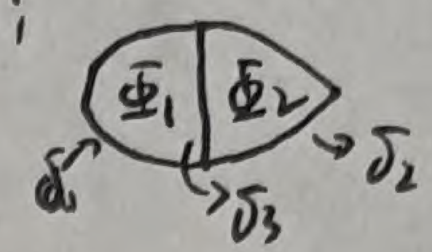
$\alpha = \frac{M_t}{4GA^2} \oint \frac{ds}{\delta(s)}$

$D_t = \frac{4GA^2}{\oint \frac{ds}{\delta(s)}}$

④ 多闭室薄壁管

K连通域，K个未知量：α、Φ_1、…、Φ_{k-1}

eg：



$\tau_1 = \frac{\Phi_1}{\delta_1} \quad \tau_2 = \frac{\Phi_2}{\delta_2}$

$\tau_3 = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\delta_3}$

$M_t = 2A_1\Phi_1 + 2A_2\Phi_2$

$\int_1 \tau ds = 2G\alpha A_1$

$\int_2 \tau ds = 2G\alpha A_2$

由上可解得 α、Φ_i，进而得其它量

三、能量法补充——梁弯曲理论

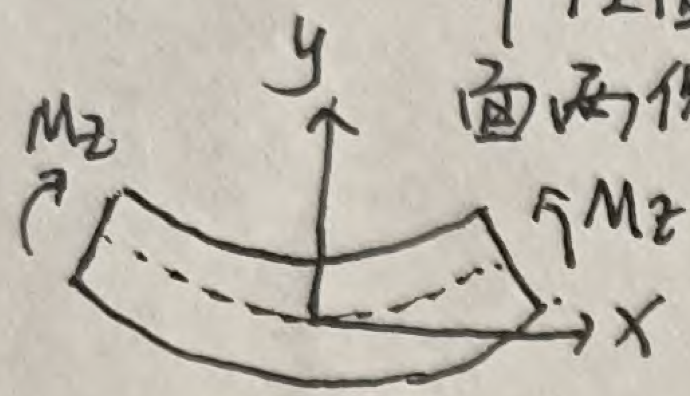
1、基本假设

平截面：截面变形前垂直于轴线，则变形后保持平面

直法线：直线段变形前垂直于轴线，则变形后保持直线，垂直于变形后轴

共曲率：平直截面上的点弯曲曲率相同（由上两个假设导出）

中性面：纯弯曲中，沿梁的厚度方向存在中性面，面上无轴向拉伸/压缩，面两侧一侧受拉、一侧受压



$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho_z}$ $\quad \sigma_x = E\varepsilon_x$

2、几何、应力关系

转角 $\theta = \frac{dw}{dx}$

曲率 $K = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2w}{dx^2}$

由 $\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho_z}$、$\sigma_x = E\varepsilon_x$

$$\Rightarrow M_z = -\int_A y\,\sigma_x\,dA$$

$$= \frac{E}{\rho_z}\underbrace{\int_A y^2 dA}_{}\text{(即为 } I_z\text{)} = \frac{EI_z}{\rho_z}$$

$$\Rightarrow \sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} \qquad \varepsilon_x = -\frac{M_z y}{EI_z}$$

另：$\int_A \sigma_x\,dA = 0$

$\int_A (\sigma_x dA)\,z = 0$

附：静矩 $S_y = \int_A z\,dA$ $\quad S_z = \int_A y\,dA$

惯性矩 $I_y = \int_A z^2 dA$ $\quad I_z = \int_A y^2 dA$

$I_{yz} = \int_A yz\,dA$

若截面上弯矩还有 M_y，则：

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

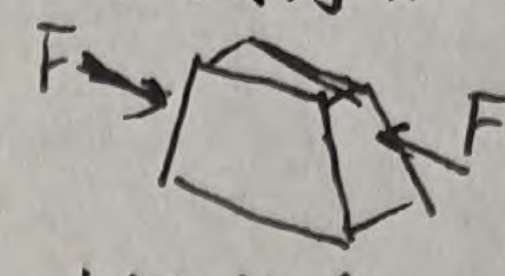
仅考虑 M_z 时：$\sigma_{x\max} = \pm\frac{M_z}{W_z}$

$W_z = \frac{I_z}{y_{max}}$：横截面对z轴的弯曲截面系数

M_y 时：$\sigma_{x\max} = \pm\frac{M_y}{W_y}$

$W_y = \frac{I_y}{z_{max}}$

若载荷轴向偏心，则：



$$\sigma_x = \pm\frac{F}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

3、功能关系

	$\vec{F}$	$\vec{u}$	$\vec{F}\cdot\vec{u}$
	$\tilde{\sigma}$	$\tilde{\varepsilon}$	$\int\tilde{\sigma}:\tilde{\varepsilon}\,dV$
扭转	$\vec{M}_T$	$\vec{\alpha}$	$\int\vec{M}_T\cdot\vec{\alpha}\,dl$
弯曲	$\vec{M}_z$	$\vec{K}$曲率	$\int\vec{M}_z\cdot\vec{K}\,dl$

四、能量原理

1、基本概念

* 基本关系 { 变形状态($\vec{u}$, $\vec{\varepsilon}$)
静力关系($\vec{\sigma}$, $\vec{f}$)
本构关系(力学←→几何)

* 真实状态 ~ 变形可能状态

$u_i^{(k)}$ $\varepsilon_{ij}^{(k)}$

$\delta u_i^{(k)}$ $\delta\varepsilon_{ij}^{(k)}$

~ 静力可能状态

$\sigma_{ij}^{(s)}$ $f_i^{(s)}$ $p_i^{(s)}$

$\delta\sigma_{ij}^{(s)}$ $\delta f_i^{(s)}$ $\delta p_i^{(s)}$

* 变形功：载荷在其本身所引起的物体准静态弹性变形上所做的功

线弹性：变形功 $= \frac{1}{2} F_{广义} W_{广义}$

可能功（虚功）：约束允许的范围内载荷在任何变形可能位移（虚位移）上做的功

$A = F_i u_i \qquad A = F_i \delta u_i$

* 总势能 = 应变能 + 载荷外力势

$\Pi = U + V$

$V = -\int_V f_i u_i dV - \int_{S_\sigma} \bar{p}_i u_i dS$

总余能 = 应变余能 + 支承系统余势

$\Pi_c = U_c + V_c$

$V_c = -\int_{S_\sigma} p_i \bar{u}_i dS$

2.(1) 可能功原理

可能外力在可能位移上做的功等于可能应力在相应可能应变上做的功.

$$\underbrace{\int_V f_i^{(s)} u_i^{(k)} dV}_{A_e = A_f} + \underbrace{\int_S p_i^{(s)} u_i^{(k)} dS}_{A_p} = \underbrace{\int_V \sigma_{ij}^{(s)} \varepsilon_{ij}^{(k)} dV}_{-A_i\ 内力功}$$

外力功

或：外力功+内力功=0

(2) 功的互等定理

上原理用于线性弹性体，得：

（内功互等）$\sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(1)}$

（外功互等）Betti $\int_V f_i^{(1)} u_i^{(2)} dV + \int_S p_i^{(1)} u_i^{(2)} dS$

$= \int_V f_i^{(2)} u_i^{(1)} dV + \int_S p_i^{(2)} u_i^{(1)} dS$

3.(1) 虚功原理

$$\int_V f_i \delta u_i dV + \int_S \bar{p}_i \delta u_i dS = \int_V \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} dV$$

正定理：↑

逆定理：满足上式，则满足平衡方程、力边界条件，σ_{ij}是与外载平衡的静力可能应力场

(2) 余虚功原理

$$\int_S \bar{u}_i \delta p_i dS = \int_V \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} dV$$

正定理：↑

逆定理：满足上式，则是协调的变形可能状态，满足协调方程、位移边界条件.

4. 对弹性保守系统，可能功原理有推论

(1) 最小势能原理

$\delta\Pi = 0$

or: $\delta U = \int_V f_i \delta u_i dV + \int_{S_\sigma} \bar{p}_i \delta u_i dS$

(2) 最小余能原理

$\delta\Pi_c = 0$

or: $\delta U_c = \int_{S_\sigma} \bar{u}_i \delta p_i dS$

两个原理的一些关系

$\Pi + \Pi_c = 0$，故：

$\Pi_c^{(s)} \geq \Pi_c = -\Pi \geq -\Pi^{(k)}$

且 $\Pi_c = -\Pi = A_e - U$（外力功−应变能）

$\Rightarrow A_e = U + \Pi_c = U + U_c + V_c$

对整个弹性系统，与U互余的是Π_c.

仅当支承均为固定边界时，$V_c = 0$，U与U_c互余.

5. 变分原理之应用—欧拉法

$\delta\Pi = 0$ ~ 平衡方程

$\delta\Pi_c = 0$ ~ 协调方程

6. 变分原理之应用—直接法

A、利用$\delta\Pi = 0$

I. 里茨法(Ritz)

(1) 选择可能的试验函数

$u_i = \bar{u}_i$

$u_i = \underline{u_i^0} + a_{in} u_{in}$

（i为自由指标）

满足非齐次边界条件　　满足齐次边界条件

(2) 代入、得 $\Pi(a_{in})$、求解：

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_{in}}=0$$

II、伽辽金法（Galerkin）

由最小势能原理：

$$\delta\Pi=-\int_V(\sigma_{ij,j}+f_i)\delta u_i dV+\int_{S_\sigma}(\sigma_{ij}\nu_j-\bar{p}_i)\delta u_i dS=0$$

取试验函数：

在 S_u 上满足位移边界条件

在 S_σ 上满足力边界条件

在域内只需满足

$$\int_V(\sigma_{ij,j}+f_i)\delta u_i dV=0$$

加权残量法的一种

B. 利用 $\delta\Pi_c=0$

I. 里茨法

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^0+a_{in}\sigma_{ijn} \text{ or } \phi_i=\phi_i^0+a_{in}\phi_{in}$$

代入、解 $\frac{\partial \Pi_c}{\partial a_{in}}=0$

7、可变边界条件、卡氏定理

(1) 载荷可变，

此时由可能功原理：

$$\int_V \varepsilon_{ij}^{(k)}\delta\sigma_{ij}^{(s)}=\int_V u_i^{(k)}\delta f_i dV+\int_{S_\sigma}u_i^{(k)}\delta\bar{p}_i dS+\int_{S_u}\bar{u}_i^{(k)}\delta p_i^{(s)}dS$$

此即卡斯提良变分方程/应力变分方程、

取上式中 (k) 为真实状态、(s) 为载荷虚变化相对应的静力状态、则：

$$\delta\Pi_c=\int_V\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}dV-\int_{S_u}\bar{u}_i\delta p_i dS=\int_V u_i\delta f_i dV+\int_{S_\sigma}u_i\delta\bar{p}_i dS$$

卡氏定理之变分形式

外载荷常表示为广义力形式 P_i、设与之对应的广义位移为 Δ_i、则可得：

$$\Delta_i=\frac{\partial \Pi_c}{\partial P_i}$$

卡氏定理之微分形式

当位移边界固定或均为力边界时，$V_c=0$

故：$\Delta_i=\frac{\partial U_c}{\partial P_i}$　Crotti-Engesser

若再使用线弹性材料、则：

$$\Delta_i=\frac{\partial U}{\partial P_i}$$

卡氏第二定理

(2) 位移可变，

由可能功原理：

$$\int_V\sigma_{ij}^{(s)}\delta\varepsilon_{ij}^{(k)}dV=\int_V f_i\delta u_i^{(k)}dV+\int_{S_\sigma}\bar{p}_i\delta u_i^{(k)}dS+\int_{S_u}p_i^{(s)}\delta\bar{u}_i dS$$

此即拉格朗日变分方程/位移变分方程

取上式中 (s) 为真实状态、(k) 为位移虚变化对应的位移状态、则：

$$\delta\Pi=\int_V\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV-\int_V f_i\delta u_i dV-\int_{S_\sigma}\bar{p}_i\delta u_i dS=\int_{S_u}p_i\delta\bar{u}_i dS$$

引入广义力 P_i、广义位移 Δ_i、则同样有：

$$P_i=\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_i}$$

外力势 $V=0$ 时、进一步得：

$$P_i=\frac{\partial U}{\partial \Delta_i}$$

卡氏第一定理